Matemática
em Foco

Fala meu querido aluno, bem vindo ao módulo de Análise Combinatória.

Esse material é um resumo completo sobre **Análise Combinatória**. **Leia com atenção!** Acesse as primeiras resoluções para te dar uma base e siga para as próximas.

Vamos MUTANTE!!!

Fatorial de um número

Fatorial de um número natural N, representado por **N!** é definido como o produto de todos os números naturais menores ou iguais N. Sendo assim temos,

$$N! = N.(N-1).(N-2).(N-3)\ldots 1.$$

Sendo assim vejamos alguns exemplos:

$$1! = 1$$
$$2! = 2.1 = 2$$
$$3! = 3.2.1 = 6$$
$$4! = 4.3.2.1 = 24$$
$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$
$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

Observações:

1. Por definição, **0! = 1**. Portanto os fatoriais **0!** e **1!** possuem o mesmo resultado.

2. Em alguns casos é interessante não expandir toda a multiplicação do fatorial. Por exemplo, vamos simplificar a seguinte fração $\frac{(n+1)!}{n!}$. Note que $(n+1)! = (n+1).n.(n-1).(n-2)\ldots 1$ ou simplesmente, $(n+1)! = (n+1).n!$. Então $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1).n!}{n!} = n+1$. Vejamos outros exemplos:

3. Simplifique a fração $\frac{10!+9!}{9!+8!}$.

Neste caso devemos expandir os fatoriais de tal maneira que todos eles apresentem um fator em comum para simplificação. Portanto $\frac{10!+9!}{9!+8!} = \frac{10.9.8!+9.8!}{9.8!+8!} = \frac{8!(10.9+9)}{8!(9+1)} = \frac{99}{10} = 9{,}9$.

Princípios fundamentais de contagem (PFC)

Suponhamos que uma senhora está na praça de alimentação de um shopping e deseja escolher um lugar para fazer um lanche. Então ela observa e percebe que existem:

- ✓ 3 lanchonetes;
- ✓ 4 restaurantes;
- ✓ 5 pizzarias.

Quantas opções ela possui para escolher um local para fazer seu lanche?

Não será difícil responder essa pergunta, pois apenas devemos somar 3 + 4 + 5 = 12. Portanto existem 12 locais ou 12 opções de escolha para ela fazer seu lanche. Este tipo de cálculo é chamado princípio fundamental de contagem (PFC) ou **PRINCÍPIO ADITIVO DE CONTAGEM**.

É importante notarmos que, se ela vai escolher apenas um local para fazer o lanche então ela vai escolher lanchonete, **ou** restaurante, **ou** pizzaria. O princípio aditivo de contagem está diretamente relacionado com o conectivo "OU".

Suponhamos que a senhora escolheu uma lanchonete e após olhar o *menu* ela decidiu pedir um hambúrguer e uma bebida. Existem 5 opções de hambúrguer e 3 opções de bebida. Então de quantas maneiras ela pode fazer seu pedido?

Para responder essa pergunta vamos montar uma tabela com todas as possibilidades:

Hambúrguer	Bebida	Pedido final
Classic	Milkshake	Classic e Milkshake
Cheeseburguer	Soda	Classic e Soda
American	Beet	Classic e Beet
Tropical		Cheeseburguer e Milkshake
Bacon		Cheeseburguer e Soda
		Cheeseburguer e Beet
		American e Milkshake
		American e Soda
		American e Beet
		Tropical e Milkshake
		Tropical e Soda
		Tropical e Beet
		Tropical e Milkshake
		Tropical e Soda
		Tropical e Beet

Note que existem 15 opções para fazer o pedido. Este tipo de cálculo é chamado **PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO DE CONTAGEM** pois bastava multiplicar as quantidades de cada item.

Sabendo que será escolhido um hambúrguer (5 opções) **e** uma bebida (3 opções) bastava multiplicar 5 por 3. <u>O princípio multiplicativo de contagem está diretamente relacionado com o conectivo "E"</u>.

Observação: Basicamente os problemas de análise combinatória são divididos nestes dois casos, mas o PFC só pode ser aplicado se a divisão do problema for em etapas (casos) independentes umas das outras.

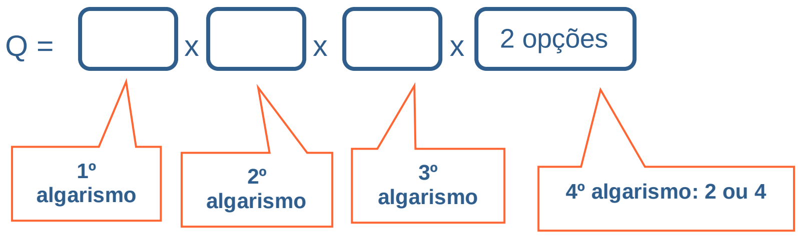
Mas como assim professor? É o seguinte, existem problemas e situações que devemos dividir em etapas (ou casos) para fazer a contagem e separamos em princípios aditivos e multiplicativos. Vejamos algumas situações a seguir para ficar mais claro.

Exemplos de aplicação.

1- Usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números pares de quatro algarismos distintos podem ser formados?

Como o número formado deve possuir <u>algarismos distintos</u> significa que um mesmo algarismo não pode ser usado duas vezes em um mesmo número. E como número formado deve ser PAR, significa que o último algarismo deve ser PAR (condição ou restrição).

Então vamos iniciar pela condição, ou seja, o último algarismo neste caso deve ser 2 ou 4. No esquema abaixo vamos escrever dentro de cada "balãozinho" a quantidade de opções para cada algarismo, começando pelo último:



Sabemos que, primeiro, devemos escolher o 4º algarismo, e uma vez escolhido, já temos a certeza que o número formado será par e o algarismo escolhido não poderá ser repetido.

Portanto, escolhendo por exemplo o algarismo "2" para ocupar a 4ª posição, sobrarão quatro algarismos para a próxima posição a ser escolhida, depois três algarismos para a próxima posição e por fim, dois algarismos para a última posição escolhida.

A ordem de escolha das posições não importa, desde que comecemos escolhendo o último algarismo, entre 2 ou 4. Sendo assim, teremos:

Q = 4 opções x 3 opções x 2 opções x 2 opções

1º algarismo | 2º algarismo | 3º algarismo | 4º algarismo: 2 ou 4

Sendo assim, a quantidade de números pares de quatro algarismos distintos que podem ser formados é dada por

$$\boxed{Q = 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48 \text{ números.}}$$

2- Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantos números ímpares de quatro algarismos distintos podem ser formados?

Como o número formado deve possuir algarismos distintos significa que um mesmo algarismo não pode ser usado duas vezes em um mesmo número. E como número formado deve ser ÍMPAR, significa que o último algarismo deve ser ÍMPAR (condição ou restrição).

Q = ☐ x ☐ x ☐ x 3 opções

1º algarismo | 2º algarismo | 3º algarismo | 4º algarismo: 1, 3 ou 5

Notemos também, que o número não pode começar pelo algarismo ZERO (outra restrição) portanto o primeiro algarismo não pode ser zero e também não poderá ser o algarismo que foi escolhido para a última posição, sobrando assim 4 opções.

Q = 4 opções x ☐ x ☐ x 3 opções

1º algarismo | 2º algarismo | 3º algarismo | 4º algarismo: 1, 3 ou 5

Se já escolhemos dois algarismos para primeira e última posições, sobram quatro opções para a 2ª posição, três opções para a 3ª posição:

Q = 4 opções x 4 opções x 3 opções x 3 opções

1º algarismo | 2º algarismo | 3º algarismo | 4º algarismo: 1, 3 ou 5

Sendo assim, a quantidade de números ímpares de quatro algarismos distintos que podem ser formados é dada por

$$\boxed{Q = 4 \times 4 \times 3 \times 3 = 144 \text{ números.}}$$

Exercícios Princípio Fundamental de Contagem (PFC)

1- Com os algarismos 0,1,2,3,4 e 5, quantos números pares de três algarismos distintos podem ser formados?

2- **(UEG-GO)** Cinco pessoas estão preparando-se para viajar em um carro que comporta exatamente cinco passageiros, incluindo o motorista. Se dentre as cinco pessoas que viajarão apenas três podem dirigir o carro, determine o número de possibilidades da distribuição das pessoas nos bancos do carro.

3- **(PUC - MG)** Em um código binário, utilizam-se dois símbolos: o algarismo 0 (zero) e o algarismo 1 (um). Considerando-se esses símbolos como letras, são formadas palavras. Assim, por exemplo, as palavras 0, 10 e 111 têm, respectivamente, uma, duas e três letras. O número máximo de palavras com até seis letras, que podem ser formadas com esse código, é:

a) 42
b) 62
c) 86
d) 126

4- **(UFMS)** Uma pessoa esqueceu sua senha bancária de seis dígitos, escolhidos entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, diante de um caixa eletrônico. Lembrava-se apenas de que a sequência ordenada 2 0 0 3 figurava na senha, não sabendo se esse número se localizava no começo, meio ou final da senha. Supondo que a pessoa levou um minuto em cada tentativa de testar a senha correta (considere isso possível) e que esgotou todas as possibilidades só acertando na última, quantos minutos a pessoa demorou nessa operação?

5- **(UFG – GO)** Os computadores digitais codificam e armazenam seus programas na forma binária. No código binário, que é um sistema de numeração posicional, as quantidades são representadas somente com dois algarismos: zero e um. Por exemplo, o código 101011001, no sistema binário, representa o número 345, do sistema de numeração decimal. Assim sendo, calcule quantos códigos binários podem ser escritos com exatamente nove algarismos, considerando que o primeiro algarismo do código binário é 1.

GABARITO SIMPLES (resoluções em vídeo)

1- 52
2- 72
3- D
4- 300 minutos
5- 256

Arranjo Simples

Vejamos a seguinte situação.

Suponhamos que 20 competidores disputam uma corrida de *Fórmula 1.* De quantas maneiras diferentes o pódio poderá ser formado?

Antes de responder essa pergunta preste atenção na seguinte observação: não basta saber o nome dos competidores que compõem o pódio, mas também suas respectivas posições pois neste caso, **a ordem de escolha altera o resultado.**

Por exemplo, se escolhermos três competidores quaisquer, **Pedro, João e Lucas**, nesta ordem podemos dizer que Pedro ficou em 1º lugar, João ficou em 2º lugar e Lucas em 3º lugar. Se mudarmos a ordem de escolha para **João, Lucas e Pedro**, apesar de termos escolhido as mesmas pessoas, o resultado foi diferente pois João ficou em 1º lugar, Lucas ficou em 2º lugar e Pedro ficou em 3º lugar.

Cada uma dessas arrumações possíveis para o pódio, é chamado de **Arranjo**. Para calcularmos o número de arrumações possíveis para o pódio podemos utilizar o princípio fundamental de contagem:

1- Pense que primeiro vamos escolher um dos competidores para ocupar um dos três lugares, o 1º lugar por exemplo. Como ninguém ainda foi escolhido, temos 20 opções;

2- Agora devemos escolher um competidor para ocupar um dos lugares que restaram, o 2º lugar por exemplo. Como já escolhemos um candidato, sobram 19 opções;

3- Até o momento escolhemos dois competidores, portanto, para o lugar que sobrou, temos 18 opções.

Q = 20 opções x 19 opções x 18 opções

1º lugar | 2º lugar | 3º lugar

Sendo assim, o número total de arrumações possíveis para o pódio é **Q = 20 x 19 x 18 = 6840**.

No entanto, existe uma fórmula para calcular o número de arranjos possíveis, dentre N elementos distintos, escolhido p a p elementos distintos: $A_N^P = \frac{N!}{(N-P)!}$,sendo (P ≤ N).

No exemplo acima, são 20 competidores (N = 20) escolhidos 3 a 3 (p = 3). Então temos um arranjo de 20 elementos distintos tomados 3 a 3. Substituindo na fórmula temos:

$$A_{20}^{3} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = \frac{20.19.18.17!}{17!} = 20.19.18 = 6840$$

Simplificamos 17!

Conclusão: O uso da fórmula é opcional, como podemos ver acima. Mas sem dúvida conhecer a fórmula e suas aplicações é super relevante. Utilizá-la ou não, fica a critério de cada um ou necessidade de acordo com o problema.

Observação 1: Um arranjo de N elementos distintos tomados N a N, isto é (N = p) é chamado de **PERMUTAÇÃO SIMPLES DE N ELEMENTOS DISTINTOS (P_N).** Substituindo N = p na fórmula obtemos: $P_N = A_N^N = \frac{N!}{(N-N)!} = \frac{N!}{0!} = \frac{N!}{1} = N!$

Portanto, a permutação de N elementos distintos pode ser calculada pela fórmula $P_N = N!$

<u>**O conceito de PERMUTAR é o mesmo que ORDENAR ou EMBARALHAR**</u>. Vejamos alguns exemplos.

1- Uma filha formada por 5 pessoas pode ser ordenada de quantas maneiras diferentes?

A situação acima seria uma permutação de 5 elementos distintos, afinal cada pessoa representa um elemento. Para saber de quantas formas podemos organizar essa fila devemos simplesmente trocar as pessoas de lugar (embaralhar) e contar o número de opções. Portanto o número total de arrumações distintas para essa fila é uma $P_5 = 5! = 120$.

2- **Qual o total de anagramas da palavra AMOR, sabendo que anagrama é o nome dado a qualquer reordenação de uma sequência de letras?**

A palavra AMOR possui quatro letras distintas, portanto ordenar suas letras corresponde a uma permutação simples de 4 elementos distintos: $P_4 = 4! = 24$. Assim, o número de anagramas é 24.

Observação 2: Permutações de N elementos não distintos é chamada de *PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO.* Neste caso, algum dos elementos se repete, por exemplo, qual o total de anagramas da palavra AMAR?

Se calcularmos como uma permutação simples vamos obter 24 anagramas da mesma forma que no exemplo anterior, afinal a palavra possui 4 letras. Mas note que a letra A aparece duas vezes, por isso muitos anagramas foram repetidos nesta contagem.

Portanto precisamos "descontar" os anagramas repetidos, e para isso devemos fazer a dividir o resultado pelo fatorial de 2 (já que uma letra aparece 2 vezes) e vamos representar esse cálculo por P_4^2.

Fazendo o cálculo obtemos $P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$. Então temos um total de 12 anagramas da palavra AMAR.

Vamos generalizar: Se uma palavra possui N letras sendo que uma letra aparece A vezes, outra B vezes, outra C vezes etc., o total de anagramas é dado pela permutação de N divida pelo fatorial das repetições de cada letra, isto é: $P_N^{A,B,C...} = \frac{N!}{A!.B!.C!...}$

Observação 3: Suponhamos que oito pessoas estão sentadas numa mesma circular em reunião.

De quantas maneiras diferentes podemos organizar essas oito pessoas na mesa?

A lógica é parecida com a "fila", isto é, temos que permutar oito pessoas, portanto o número de permutações são $P_8 = 8!$. Mas neste caso, por ser uma ***PERMUTAÇÃO CIRCULAR*** temos que prestar atenção no seguinte: **"Se girarmos a mesa, as pessoas mudam de posição, mas a arrumação ou ordenação continua a mesma."**

Como são oito pessoas, elas podem ocupar oito lugares diferentes, mas mantendo a mesma ordem de todos na mesma, por isso, para calcular o número de arrumações devemos dividir o resultado anterior por 8: $P_8 = \frac{8!}{8} = \frac{8.7!}{8} = 7!$

Generalizando: O número total de arrumações de N elementos distintos numa disposição circular é dado por $P_N = \frac{N!}{N} = (N-1)!$

Exercícios Arranjo Simples e Permutações

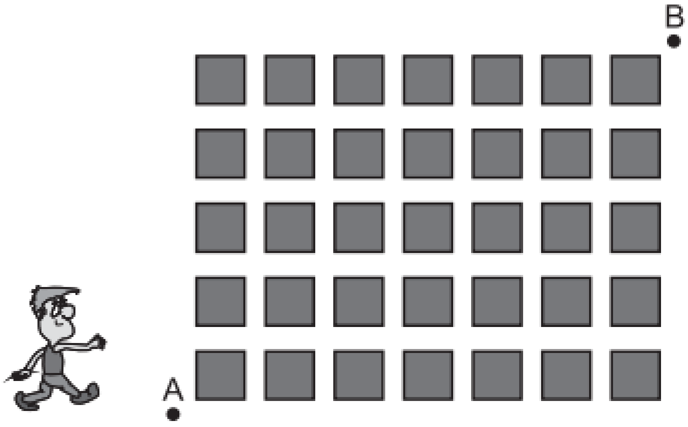
1- **(Unimontes-MG)** Quantos dos anagramas da palavra PINGA começam com a letra G?

a) 120
b) 6
c) 5
d) 24

2- **(FUVEST)** Com as 6 letras da palavra FUVEST podem ser formadas 6! = 720 "palavras" (anagramas) de 6 letras distintas cada uma. Se essas "palavras" forem colocadas em ordem alfabética, como num dicionário, a 250ª "palavra" começa com:

a) EV
b) FU
c) FV
d) SE
e) SF

3- **(VUNESP)** A figura mostra a planta de um bairro de uma cidade. Uma pessoa quer caminhar do ponto A ao ponto B por um dos percursos mais curtos. Assim, ele caminhará sempre nos sentidos “de baixo para cima” ou “da esquerda para a direita”. O número de percursos diferentes que essa pessoa poderá fazer de A até B é:



a) 95 040
b) 40 635
c) 924
d) 792
e) 35

4- **(UNIR-RO)** Uma solução da equação x + y + z + t = 10 é uma quádrupla de números (x_0, y_0, z_0, t_0) tal que $x_0 + y_0 + z_0 + t_0 = 10$. Por exemplo, (2, 3, 1, 4) é uma solução. Considerando apenas as soluções em que x_0, y_0, z_0, t_0 são inteiros não negativos, o número de soluções dessa equação é:

a) 628
b) 286
c) 420
d) 144
e) 980

5- **(VUNESP)** Paulo quer comprar um sorvete com 4 bolas em uma sorveteria que possui três sabores de sorvete: chocolate, morango e uva. De quantos modos diferentes ele pode fazer a compra?

a) 4
b) 6
c) 9
d) 12
e) 15

6- Uma empresa possui uma linha com 12 produtos diferentes. O departamento de *marketing* dessa empresa, em uma campanha publicitária, realizará três tipos de anúncio para divulgação dos produtos: *outdoor*, revista e televisão. Sabendo que em cada tipo de anúncio apenas um dos produtos será divulgado, de quantas maneiras distintas essa empresa pode compor a campanha publicitária?

a) 1310
b) 1320
c) 1330
d) 1340
e) 1350

7- Uma senha de computador é formada por duas letras maiúsculas distintas (de 26 disponíveis), seguidas de quatro algarismos distintos (de 10 disponíveis). Quantas senhas diferentes é possível formar?

a) 3276000
b) 5673000
c) 6234000
d) 7346000
e) 8972000

8- **(UFRRJ)** Em uma tribo indígena o pajé conversava com seu tótem por meio de um alfabeto musical. Tal alfabeto era formado por batidas feitas em cinco tambores de diferentes sons e tamanhos. Se cada letra era formada por três batidas, sendo cada uma em um tambor diferente, pode-se afirmar que esse alfabeto possuía

a) 10 letras.
b) 20 letras.
c) 26 letras.
d) 49 letras.
e) 60 letras.

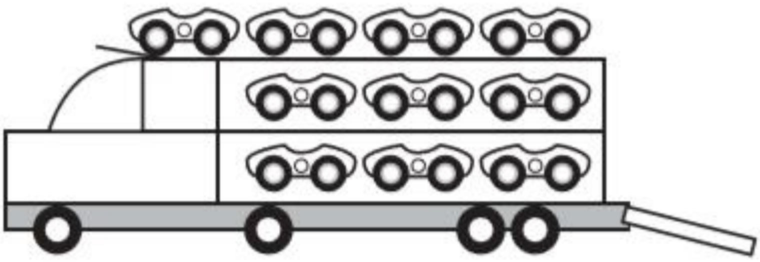
9- **(ENEM)** Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que “L” e “D” representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.
A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.
A opção que mais se adequa às condições da empresa é

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

10- **(ENEM)** Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.
Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) $C_{6,4}$
b) $C_{9,3}$
c) $C_{10,4}$
d) 6^4
e) 4^6

GABARITO SIMPLES (resoluções em vídeo)

1- D
2- D
3- D
4- B
5- E
6- B
7- A
8- E
9- E
10- B

Combinação

O gerente de *marketing* de uma empresa vai escolher três funcionários do setor de vendas para participarem de um *workshop.* Sabendo que a empresa possui 10 funcionários neste setor, de quantas maneiras o gerente pode fazer sua escolha?

Para responder esta pergunta podemos pensar em um arranjo de 10 elementos escolhidos 3 a 3, mas tomando o seguinte cuidado: **NESTE CASO A ORDEM DE ESCOLHA NÃO ALTERA O RESULTADO.**

Calculando o arranjo, temos: $A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10.9.8.7!}{7!} = 720$. Mas ainda precisamos calcular de quantas maneiras diferentes cada grupo pode ser escolhido, por exemplo, o grupo formado pelos funcionários CARLA, PEDRO e LUCAS pode ser escolhido das seguintes maneiras:

1. CARLA, PEDRO, LUCAS;
2. CARLA, LUCAS, PEDRO;
3. PEDRO, CARLA, LUCAS;
4. PEDRO, LUCAS, CARLA;
5. LUCAS, PEDRO, CARLA;
6. LUCAS, CARLA, PEDRO

Um único grupo pode ser escolhido de 6 maneiras diferentes.

Acima concluímos que o mesmo grupo pode ser escolhido de 6 maneiras diferentes, e este valor corresponde à quantidade de arrumações para o grupo, que corresponde à uma permutação de 3 pessoas, ou seja, $P_3 = 3! = 6$.

Sendo assim, devemos dividir o valor encontrado inicialmente por 6: $\frac{720}{6} = 120$. Portanto o gerente de *marketing* poderia fazer sua escolha de 120 maneiras diferentes.

CONCLUSÃO: A situação acima é chamada de *COMBINAÇÃO SIMPLES*: Dentre N elementos distintos devemos escolher P elementos distintos (P ≤ N), tal que **a ordem de escolha não altera o resultado**. Representamos por $C_N^P = \frac{N!}{P!(N-P)!}$. Se tivéssemos usado a fórmula para o problema anterior o cálculo seria direto: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!.7!} = \frac{10.9.8.7!}{6.7!} = \frac{10.9.8}{6} = 120$.

Observação 1: Existe uma outra notação para combinação**,** também chamado de *NÚMERO BINOMIAL* $\binom{N}{p}$ que corresponde à C_N^p**,** ou seja: $\binom{N}{p} = C_N^p = \frac{N!}{p!(N-p)!}$**.**

Observação 2: Existem combinações (ou números binomais) que possuem o mesmo resultado chamados de combinações ou binomais, complementares:

$$\binom{N}{p} = \binom{N}{N-p}.$$

Exemplo:

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} \Rightarrow C_5^3 = C_5^2$$

$$\frac{5!}{3!2!} = \frac{5!}{2!3!}$$

Observação 3: Existem combinações com repetição de elementos, denominada *COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO.* Vejamos o exemplo:

"Paulo quer comprar um sorvete com 4 bolas em uma sorveteria que possui três sabores de sorvete: chocolate, morango e uva. De quantos modos diferentes ele pode fazer a compra?"

Neste caso temos três sabores disponíveis, mas devemos escolher quatro, ou seja, um sabor será repetido ao menos uma vez. Então se trata de uma combinação com elementos repetidos sendo que **N = 3** (3 sabores disponíveis) e **p = 4** (devo escolher 4 sabores). Note que o valor de p é maior que o valor de N e está é uma característica dessa combinação.

A fórmula da Combinação com Repetição é diferente da combinação simples e temos que fazer uma substituição do valor de N por (N + P – 1):

$$C_{N+P-1}^{P} = \frac{(N+P-1)!}{P!(N+P-1-P)!} \Rightarrow C_{N+P-1}^{P} = \frac{(N+P-1)!}{P!(N-1)!}$$

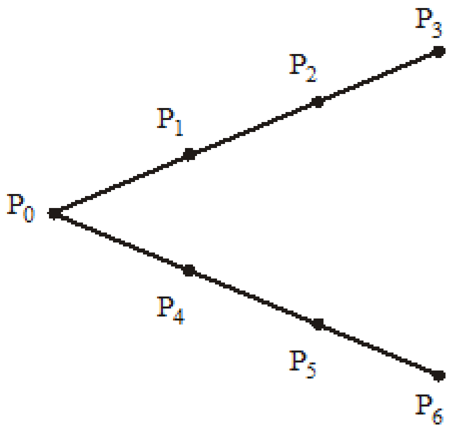
Portanto para o problema apresentado temos um total de 15 opções conforme aplicação da fórmula abaixo.

$$C_{3+4-1}^{4} = C_{6}^{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6.54!}{4!.2} = 15$$

ATENÇÃO: Note que o problema acima foi resolvido na lista de Arranjo e Permutação. Utilizamos a "***distribuição de objetos iguais***" que corresponde à uma permutação com elementos repetidos. Portanto para este tipo de questão, você pode fazer de duas maneiras.

Exercícios Combinação

1- **(UFU – MG)** Na figura abaixo, o maior número de triângulos que podem ser formados tendo como vértices três dos pontos P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 indicados é



a) 33
b) 27
c) 56
d) 18
e) 35

2- **(UFMG)** A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro.

Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada.

Nessas condições, de quantas maneiras distintas se pode formar essa comissão?

a)70
b)35
c)45
d)55

3- **(MACK – SP)** Doze professores, sendo 4 de matemática, 4 de geografia e 4 de inglês, participam de uma reunião com o objetivo de formar uma comissão que tenha 9 professores, sendo 3 de cada disciplina. O número de formas distintas de se compor essa comissão é:

a) 36
b) 108
c) 12
d) 48
e) 64

4- **(PUC – RJ)** O campeonato brasileiro tem, em sua primeira fase, 28 times que jogam todos entre si. Nesta primeira etapa, o número de jogos é de:

a) 376
b) 378
c) 380
d) 388
e) 396

5- **(UNIFOR-CE)** João e Maria fazem parte de uma turma de 10 crianças, 6 das quais serão escolhidas para participar de uma peça a ser encenada em sua escola. Considerando todos os grupos que podem ser escolhidos, em quantos deles João e Maria estariam presentes?

a) 50
b) 60
c) 70
d) 80
e) 90

6- **(Unimontes-MG)** Marcam-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta R' paralela a R. Quantos triângulos existem com vértices em 3 desses 13 pontos?

a) 220
b) 286
c) 66
d) 560

7- **(UEL – PR)** Uma aposta na Mega - Sena (modalidade de apostas da Caixa Econômica Federal) consiste na escolha de 6 dentre os 60 números de 01 a 60. O número máximo possível de apostas diferentes, cada uma delas incluindo os números 12, 22 e 23, é igual a

$a)\ \dfrac{60.59.58}{1.2.3}$

$b)\ \dfrac{60.59.58.57.56.55}{1.2.3.4.5.6}$

$c)\ \dfrac{60.59.58}{1.2.3} - \dfrac{57.56.55}{1.2.3}$

$d)\ \dfrac{57.56.55}{1.2.3}$

$e)\ \dfrac{57.56.55.54.53.52}{1.2.3.4.5.6}$

8- **(CEFET – PR)** Uma pessoa que joga na Mega – Sena não escolhe para seu jogo números múltiplos de três. Então, o número de cartões diferentes que esta pessoa pode preencher, escolhendo seis números de 01 a 60 é:

$a) C_{60}^{6} - C_{20}^{6}$

$b) C_{40}^{6}$

$c) A_{40}^{6}$

$d) A_{60}^{6} - A_{20}^{5}$

$e) C_{60}^{5}$

9- **(Uniube – MG)** Nove estudantes pretendem jogar uma partida de voleibol 4 x 4, ou seja, duas equipes com 4 jogadores cada uma. Assim, o número de maneiras diferentes de se formar dois times oponentes dentre esses estudantes é igual a:

a) 630
b) 315
c) 126
d) 252

10- **(UFMG)** O jogo de dominó possui 28 peças distintas. Quatro jogadores repartem entre si essas 28 peças, ficando cada um com 7 peças.

De quantas maneiras distintas se pode fazer tal distribuição?

$a) \dfrac{28!}{7!4!}$

$b) \dfrac{28!}{4!24!}$

$c) \dfrac{28!}{(7!)^4}$

$d) \dfrac{28!}{7!21!}$

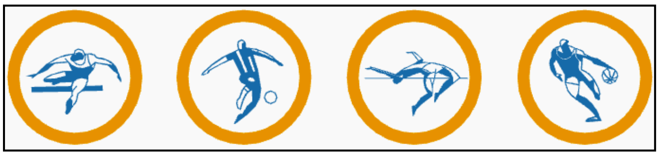
11- **(ENEM)** Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

a) 64
b) 56
c) 49
d) 36
e) 28

12- (**UERJ)** Sete diferentes figuras foram criadas para ilustrar, em grupos de quatro, o Manual do Candidato do Vestibular Estadual 2007. Um desses grupos está apresentado a seguir.



Considere que cada grupo de quatro figuras que poderia ser formado é distinto de outro somente quando pelo menos uma de suas figuras for diferente. Nesse caso, o número total de grupos distintos entre si que poderiam ser formados para ilustrar o Manual é igual a:

a) 24
b) 35
c) 70
d) 140

GABARITO SIMPLES (resoluções em vídeo)

1- B
2- D
3- E
4- B
5- C
6- A
7- D
8- B
9- B
10- C
11- E
12- B

Referências bibliográficas

Matemática: ciência e aplicações 1: ensino médio/Gelson Iezzi...[et al.]. - - 6. ed. - - São Paulo: Saraiva, 2010.

Matemática completa: ensino médio: volume único/José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Jr. – São Paulo: FTD, 2002.

#Contato matemática, 1º ano / Joamir Roberto de Souza, Jacqueline da Silva, 1.ed – São Paulo : FTD, 2016 – (Coleção #contato matemática)

#Contato matemática, 2º ano / Joamir Roberto de Souza, Jacqueline da Silva, 1.ed – São Paulo : FTD, 2016 – (Coleção #contato matemática)

#Contato matemática, 3º ano / Joamir Roberto de Souza, Jacqueline da Silva, 1.ed – São Paulo : FTD, 2016 – (Coleção #contato matemática)

Matemática: ciência e aplicações, 3ª série: ensino médio, matemática /Gelson Iezzi...[et al.]. - - 2. ed. - - São Paulo: Atual, 2004. – (Coleção matemática: ciência e aplicações)

Matemática: ciência e aplicações, 2ª série: ensino médio, matemática /Gelson Iezzi...[et al.]. - - 2. ed. - - São Paulo: Atual, 2004. – (Coleção matemática: ciência e aplicações)

Matemática (Ensino Fundamental, 8º ano) / Edwaldo Bianchini, --São Paulo ; Moderna, 2002

Tudo é matemática (ensino fundamental, 8º ano) / Luiz Roberto Dante. – São Paulo : Ática, 2004.

Matemática: Bianchini (Ensino Fundamental, 6º ano) / Edwaldo Bianchini, -- 7. Ed. -- São Paulo ; Moderna, 2011

Tudo é matemática (ensino fundamental, 6º ano) / Luiz Roberto Dante. – 3. Ed. -- São Paulo : Ática, 2009.

Matemática: Bianchini (Ensino Fundamental, 7º ano) / Edwaldo Bianchini, -- 7. Ed. -- São Paulo ; Moderna, 2011