Permutações - Gabarito

1) De quantas maneiras distintas quatro pessoas podem se organizar em uma fila?

Solução. Considerando as pessoas como A, B, C e D, o número de filas será 4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24.

2) Anagramas são sequências de letras, com ou sem sentido, que podem ser formadas com todas as letras de uma determinada palavra. Quantos são os anagramas da palavra DELTA?

Solução. Permutando a palavra DELTA, obtemos 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 5! = 120 anagramas.

3) De quantas maneiras podemos organizar em uma prateleira 10 livros distintos?

Solução. Há 10! = 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 3 628 800.

4) Quantos são os anagramas da palavra HIPOTENUSA?

Solução. São 10 letras. Logo, há 10! = 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 3 628 800.

5) Quantos são os anagramas da palavra HIPOTENUSA que começam e terminam por consoante?

Solução. São 5 consoantes. Há 5 possibilidades para iniciar e 4 para terminar. As 8 letras restantes serão permutadas. Logo, Há (5).(4).8! = 20.(8!).

6) Quantos são os anagramas da palavra HIPOTENUSA que tem a sílaba SA?

Solução. Considerando (SA) como um único elemento, HIPOTENU(SA) permutamos 9 elementos no total. Logo, há 9! anagramas.

7) Quantos são os anagramas da palavra HIPOTENUSA que tem as letras S e A juntas?

Solução. Como não há ordenação de (SA), significa que os termos serão também permutados. Isto é, são os anagramas de HIPOTENU(SA) e HIPOTENU(AS). Logo, há (2!).(9!) anagramas.

8) Quantos são os anagramas da palavra MALA?

Solução. Há duas letras repetidas (letra A). Logo, o número de anagramas será: $\frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2!}{2!} = 12.$

9) Quantos são os anagramas da palavra URUBU?

Solução. Há três letras repetidas (letra U). Logo, o número de anagramas será: $\frac{5!}{3!} = \frac{5.4.3!}{3!} = 20.$

10) Quantos são os anagramas da palavra ARARA?

Solução. As letras A e R aparecem repetidas. Logo, o número de anagramas será: $\frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.3.2!}{3!.2!} = 10.$

11) Quantos são os anagramas da palavra MATEMATICAMENTE?

Solução. As letras M, A, T e E aparecem repetidas.

Logo, o número de anagramas será: $\frac{15!}{3!.3!.3!.3!} = \frac{15.14.13.12.11.10.9!}{6.6.6.6} = \frac{5.7.13.2.11.5.9.8.7!}{2.3.1.3} =$

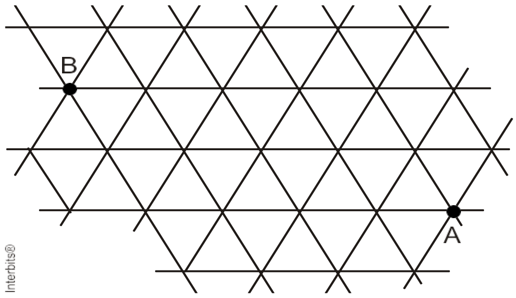
= 5.7.13.11.5.8.7! = 1 009 008 000.

12) De quantas maneiras distintas podemos ordenar 8 livros em uma estante sendo 3 deles indistinguíveis e todos os outros distintos?

Solução. O livros podem ser representados como AAABCDEFG.

O número de maneiras de ordenar esses livros com três iguais é a permutação de 8 elementos, com 3 repetidos: $\frac{8!}{3!} = 8.7.6.5.4 = 6\ 720.$

13) (UERJ 2011) Uma rede é formada de triângulos equiláteros congruentes, conforme a representação abaixo.

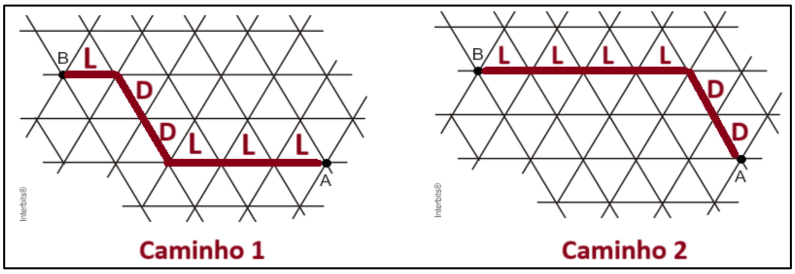


Uma formiga se desloca do ponto A para o ponto B sobre os lados dos triângulos, percorrendo X caminhos distintos, cujos comprimentos totais são todos iguais a d. Sabendo que d corresponde ao menor valor possível para os comprimentos desses caminhos, X equivale a:

(A) 20 **(B)** 15 (C) 12 (D) 10

Solução. Considerando D como "descida" e L como "lado", temos, conforme os dois exemplos de caminhos mostrados, a sequência com DDLLLL. Os caminhos possíveis são os anagramas dessa sequência de letras.

Logo o número de caminhos será a permutação com elementos repetidos: $\frac{6!}{2!.4!}=\frac{6.5.4!}{2!.4!}$ **= 15.**



14) Uma cervejaria produz garrafas de cerveja do tipo LAGER, IPA e WEISS. De quantas maneiras distintas posso comprar 6 garrafas de cerveja nessa cervejaria?

Solução. Observando algumas possibilidades, sabendo que haverá bebida repetida, temos que o problema pode ser representado como as possibilidades de ordenar 6 bolinhas e dois sinais de adição, de forma que as parcelas correspondam ao número de cervejas de cada tipo. Quando dois sinais estão juntos, um ou dois tipos de bebidas não foram comprados.

LAGER	IPA	WEISS	Total
0	0	6	6
1	1	4	6
3	0	3	6
...	...	...	6

+	+	●	●	●	●	●	●
●	+	●	+	●	●	●	●
●	●	●	+	+	●	●	●

Dessa forma, o número de maneiras será o número de permutações de 8 elementos com dois repetidos (+) e 6 repetidos (bolas): $\frac{8!}{2!.6!}=\frac{8.7.6!}{2!.6!}$ **= 28.**

15) Uma cervejaria produz cervejas LAGER, IPA e WEISS. De quantas maneiras distintas posso comprar 10 garrafas de cerveja nessa cervejaria, sabendo que desejo levar pelo menos uma garrafa de cada tipo?

Solução. Como cada tipo será comprado pelo menos uma vez, temos, então (10 – 3) = 7 compras para serem feitas, agora com a possibilidade de alguma não ser comprada. Temos:

LAGER	IPA	WEISS	Total
0	0	6	7
1	1	5	7
2	2	3	7
...	...	...	7

+	+	●	●	●	●	●	●	●
●	+	●	+	●	●	●	●	●
●	●	+	●	●	+	●	●	●

Dessa forma, o número de maneiras será o número de permutações de 9 elementos com dois repetidos (+) e 7 repetidos (bolas): $\frac{9!}{2!.7!} = \frac{9.8.7!}{2!.7!}$ = 36.

16) Uma cervejaria produz cervejas LAGER, IPA e WEISS. De quantas maneiras distintas posso comprar 20 garrafas de cerveja nessa cervejaria, sabendo que desejo levar pelo menos uma garrafa de LAGER, pelo menos 5 de IPA e pelo menos 2 de WEISS?

Solução. As possibilidades, agora serão, calculadas para 20 – (1 + 5 + 2) = 12 cervejas.

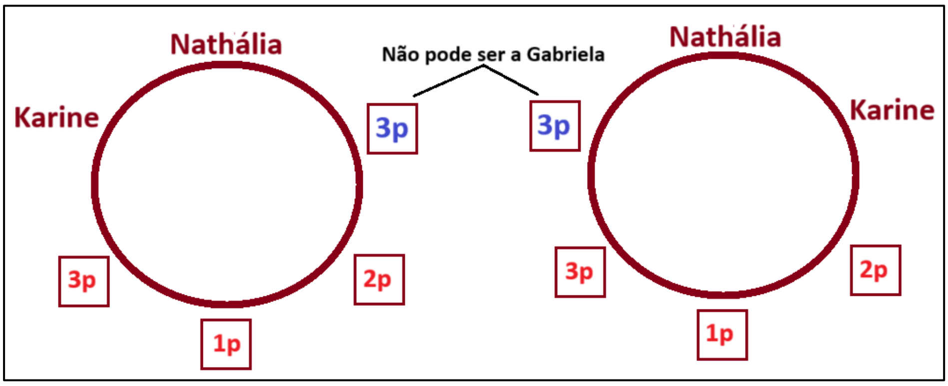
Logo, $\frac{14!}{2!12.!} = \frac{14.13.12!}{2!.12!}$ = 91.

17) De quantas maneiras distintas cinco crianças podem dar as mãos para fazer um círculo para brincar de roda?

Solução. Considerando A, B, C, D, E as crianças, como as rotações não representam configurações diferentes, fixando A, por exemplo, basta permutar as restantes. Logo há (5 – 1)! = 4! = 24 maneiras.

18) Nathália, Karine, Katharine, Laura, Gabriela e Carol foram para a praia juntas. Elas sentaram na areia formando um círculo. Por motivos pessoais, Nathália não gostaria de sentar ao lado da Gabriela mas faz questão que Karine sente ao seu lado. De quantas maneiras distintas elas podem se sentar?

Solução. Fixando o lugar para Nathália, Karine pode estar à sua esquerda ou a sua direita. O outro lugar ao lado de Nathália pode ser ocupado por qualquer outra menina que não seja a Gabriela. Dessa forma as possibilidades estão representadas no desenho.



Logo, há 2 x 3 x 3 x 2 x 1 = 36 maneiras distintas de elas sentarem em círculo.

<u>Exercícios propostos</u>

1. Quantos são os anagramas da palavra LOPEZ:

a) Possíveis?

Solução. O total de anagramas é 5! = 120.

b) Quantos deles terminam pela letra Z?

Solução. Fixando a letra Z na última posição, resta a permutação das 4 letras. Logo, 4! = 24 anagramas.

c) Quantos deles terminam por consoante?

Solução. A ultima posição possui 3 possibilidades (3 consoantes). As demais letras permutam. Logo, há 3.4! = 3 x 24 = 72 anagramas.

d) Quantos deles começam e terminam com uma consoante?

Solução. Há 3 x 2 = 6 possibilidades para ocupação da primeira e última letra. As restantes serão permutadas. Logo, há 3.2.3! = 6 x 6 = 36 anagramas.

e) Quantos deles tem vogais e consoantes alternadas?

Solução. A palavra LOPEZ já apresenta essa configuração. Logo, basta permutas as vogais e as consonates. Portanto, há 3!.2! = 6 x 2 = 12 anagramas.

f) Quantos tem a sílaba PEZ?

Soulução. Considerando (PEZ) como um único elemento, temos: 3! = 6 anagramas.

g) Quantos tem as letras P, E e Z juntas?

Soulução. Considerando (PEZ) como um único elemento, mas não necessariamente nessa ordem, permutamos internamente essas letras. Logo, temos: 3!.3! = 6 x 6 = 36 anagramas.

2. O elenco do Espetáculo Roleta Russa, que estreou em 2016 no Teatro Clara Machado é composto por 6 homens e 3 mulheres. No final de cada apresentação, o elenco faz um agradecimento alinhado no palco, como exemplifica a imagem a seguir:

Fonte: http://www.paulohlima.com.br/portfolio/teatro/35745-teatro-roleta-russa

De quantas maneiras distintas eles podem organizar-se em linha:

a) No total?

Solução. Temos 9! = 362 880 maneiras distintas.

b) Em quantas delas os homens estão juntos?

Solução. Os homens formam um bloco único e permutam entre si. Então há no total 4 elementos que permutam externamente. Temos: 4!.6! = 24 x 720 = 17 280 maneiras distintas.

c) Em quantas delas as mulheres estão juntas?

Solução. As mulheres formam um bloco único e permutam entre si. Então há no total 7 elementos que permutam externamente. Temos: 7!.3! = 5 040 x 6 = 30 240 maneiras distintas.

d) Em quantas delas os homens estão juntos e as mulheres também estão juntas?

Solução. As mulheres formam um bloco único e permutam entre si. Os homens formam um bloco único e permutam entre si. E esses dois blocos permutam externamente.

Temos: 2!.6!.3! = 2 x 720 x 6 = 8 640 maneiras distintas.

3) Determine o algarismo das unidades do resultado da soma 1! + 2! + 3! + ... + 2016!.

Solução. Observe que a partir de 5! a unidade simples das parcelas são sempre 0: 120, 720, ...etc. Logo o resto da divisão dessa soma é 0. Adicionando 1! + 2! + 3! + 4! temos 1 + 2 + 6 + 24 = 33.

Logo, o algarismo das unidades simples será 3 (resto na divisão por 10).

4) (FUVEST 1991) Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis sequências dessas músicas serão necessários aproximadamente:

(A) 100 dias. (B) 10 anos. (C) 1 século. (D) 10 séculos. **(E)** 100 séculos.

Solução. O número de permutações dessas músicas é 10! = 3 628 800. Dessa forma são necessários, considerando 1 ano = 360 dias, (3 628 800 ÷ 360) ~ 10 080 anos. Como 1 século representa 100 anos, dividindo novamente, encontramos (10 080 ÷ 100) ~ 100 séculos.

5) De quantas maneiras cinco pessoas podem sentar-se em uma fileira de cinco cadeiras no cinema, sabendo que duas delas não se falam e por isso não podem sentar-se lado a lado?

Solução. Considere A, B, C, D, E as pessoas e que A e B não podem ficar juntas.

i) O número total de maneiras de sentarem, sem restrição, é 5! = 120;

ii) O número de maneiras com (AB) juntas em qalquer ordem é 2.4! = 2 x 24 = 48;

Logo, o número de maneiras onde A e B não estão juntas é 120 – 48 = 72.

6) Calcule o número de anagramas da palavra CAMILA cujas vogais se mantêm nas respectivas posições.

Solução. Basta permutar as consoantes. Portanto, há 3! = 6 anagramas.

7) Uma prova de múltipla escolha possui 5 questões, cada uma delas com 5 opções: A, B, C, D e E. De quantas maneiras distintas essa prova pode ser respondida sem que duas questões sejam respondidas com a mesma letra?

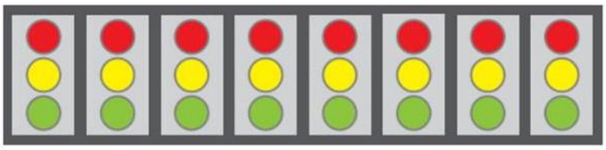
Solução. Cada questão, a partir, da primeira, possui 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 formas diferentes.

8. (CESGRANRIO) Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele varia a ordem de suas visitas. De quantas formas diferentes esse fiscal pode organizar o calendário de visita mensal a essas empresas?

(A) 180 **(B)** 120 (C) 100 (D) 48 (E) 21

Solução. A ordem dessas visitas pode ser feita de 5! = 120 formas diferentes.

9. (UERJ 2012) Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes - vermelha, amarela e verde. Observe a figura:



Considere as seguintes informações:

- cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;
- qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;
- duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule o número de mensagens distintas que esse sistema pode emitir.

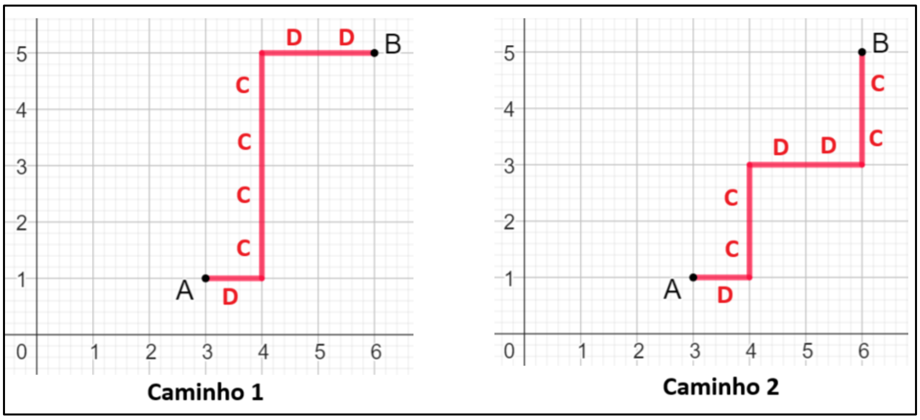
Solução. Considerando V (vermelha acesa), V' (verde acesa), A (amarela acesa) e N (nenhuma acesa), de acordo com as informações, temos que o número de mensagens será a permutação da sequência:

V V V V' V' A N N

Logo, temos: $\frac{8!}{3!.2!.2!} = \frac{8.7.6.5.4.3!}{3!.2!.2!}$ **= 8.7.6.5 = 1 680 mensagens.**

10. (UNIFESO 2013/2) Duas equipes W e Z, disputaram uma partida de futebol. Ao final do 1º tempo, o placar era 3 x 1 para a equipe W. No entanto, a equipe Z reagiu no 2º tempo e venceu o jogo por 6 x 5. Dessa forma, o placar foi alterado 7 vezes. Uma possível sequência de alterações do placar durante o 2º tempo é apresentada a seguir:

W 3 x 2 Z
W 3 x 3 Z
W 3 x 4 Z
W 4 x 4 Z
W 5 x 4 Z
W 5 x 5 Z
W 5 x 6 Z



O número total de possíveis sequências de alterações do placar durante o 2º tempo desse jogo é igual a

(A) 18 **(B)** 21 (C) 28 (D) 42 (E) 56

Solução. Essa alteração de resultados pode ser representada pelos caminhos possíveis no plano cartesiano para um ponto se deslocar da posição (3,1) para a posição (6,5). Considerando C (para cima) e D (para a direita), o número de caminhos será a permutação da sequência D C C C C C D.

Temos: $\frac{7!}{2!.5!} = \frac{7.6.5!}{2!.5!}$ **= 21 possíveis sequências.**

Exercícios de fixação

1. Em um cilindro de acrílico de raio interno r serão colocadas 10 esferas maciças de raio r na vertical. Sabendo que duas delas são vermelhas, 3 são pretas e 5 são douradas, de quantas maneiras distintas podemos fazê-lo?

Solução. Há $\frac{10!}{2!.3!.5!} = \frac{10.9.8.7.6.5!}{2!.3!.5!}$ = 10.9.4.7 = 2 520 maneiras. São as permutações com repetição 2V 3P 5D.

2. Uma fila de cadeiras no cinema tem 10 poltronas. De quantas maneiras 3 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?

Solução. Os casais H1M1, H2M2 e H3M3, juntos ocuparão 6 dos 10 lugares possíveis. Os lugares vazios podem ser representados por V, V, V, V, V. Logo, temos uma permutação de 8 elementos e as permutações internas de cada casal: (H1M1) (H2M2) (H3M3) V V V V.

Há (2!).(2!).(2!) $\frac{7!}{4!} = \frac{(2)(2).(2).(7.6.5.4!)}{4!}$ = 8.7.6.5 = 1 680 maneiras.

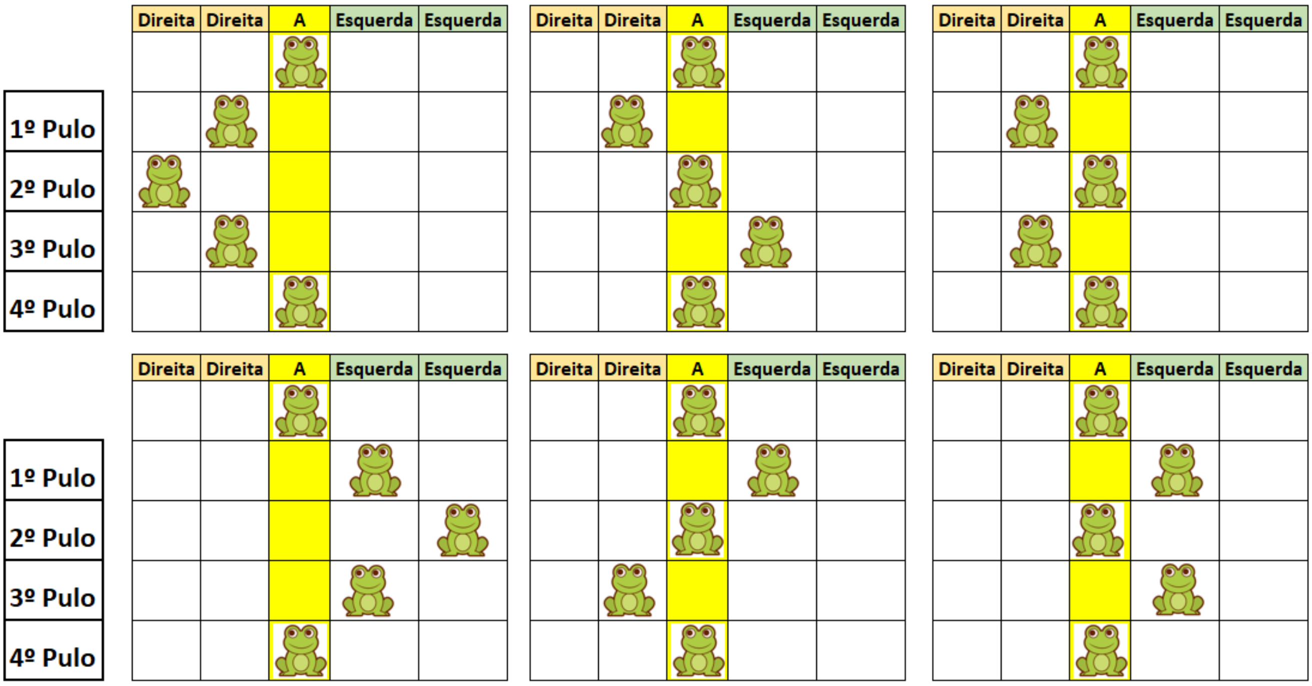
3. (FGV 2013) Um sapo está brincando de dar pulos, sucessivos, todos com o mesmo comprimento e sempre sobre uma mesma linha reta horizontal. A cada salto ele pode pular para a esquerda ou para a direita independentemente do sentindo do pulo anterior. O sapo está inicialmente em um ponto A sobre a reta. A seguir ele dá quatro pulos sucessivos terminando exatamente sobre o mesmo ponto A.

A quantidade de sequências diferentes de pulos (esquerda/direita) que o sapo pode ter dado é:

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 16

Solução. Temos 6 formas de dispor as letras D (direita) e E (esquerda) de forma que, após 4 movimentos, o sapo volte à posição original: DDEE, DEED, DEDE, EEDD, EDDE, EDED.

Isto representa o número de permutações repetidas: $\frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2}{4}$ = 6. Veja os casos nas figuras.



4. (UNIRIO 2000) Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo-se que podem ser compradas de zero a 6 empadas de cada tipo, de quantas maneiras diferentes esta compra pode ser feita?

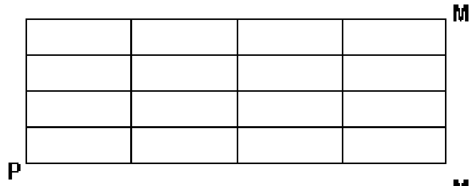
Solução. Utlizando a representação das combinações completas, temos: $\frac{(6+3)!}{6!.3!} = \frac{9.8.7.6!}{6.6!}$ = 84 maneiras.

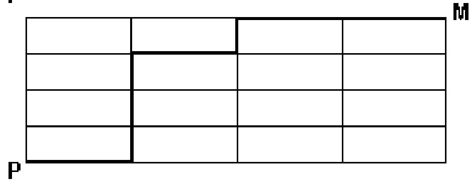
Camarão	Frango	Legumes	Palmito	Total
0	0	0	6	6
1	1	1	3	6
3	0	0	3	6
...	...	...	...	6

+	+	+	●	●	●	●	●	●
●	+	●	+	●	+	●	●	●
●	●	●	+	+	+	●	●	●

5. (CESGRANRIO) Na figura a seguir, temos uma "malha" formada por 16 retângulos iguais.

Uma partícula deve ir do ponto P ao ponto M, percorrendo a menor distância possível, deslocando-se somente por sobre as linhas da figura e com velocidade média de 2cm/s. Como exemplo, temos, a seguir, uma representação de um desses caminhos.





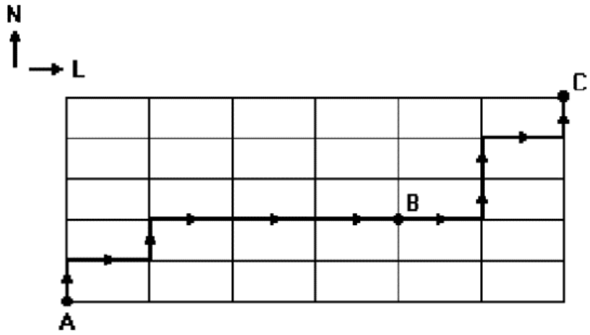
Quantos são os possíveis caminhos que tal partícula poderá percorrer?

(A) 256 (B) 128 (C) 120 **(D)** 70 (E) 56

Solução. Identificando o caminho, vemos que são 4 deslocamentos para a direita e 4 deslocamentos para cima.

O número de caminhos será o número de permutações de DDDDCCCC = $\frac{8!}{4!.4!} = \frac{8.7.6.5.4!}{24.6!}$ **= 70 maneiras.**

6. (FUVEST 1993) A figura a seguir representa parte do mapa de uma cidade onde estão assinalados as casas de João (A), de Maria (B), a escola (C) e um possível caminho que João percorre para, passando pela casa de Maria, chegar à escola. Qual o número total de caminhos distintos que João poderá percorrer, caminhando somente para o Norte ou Leste, para ir de sua casa à escola, passando pela casa de Maria?



Solução. Identificando o caminho de A até B, vemos que são 4 deslocamentos para a direita (DDDD) e 2 deslocamentos para cima (CC). O número de caminhos será $\frac{6!}{2!.4!} = \frac{6.5.4!}{2.4!}$ **= 15.**

Identificando o caminho de B até C, vemos que são 2 deslocamentos para a direita (DD) e 3 deslocamentos para cima (CCC). O número de caminhos será $\frac{5!}{2!.3!} = \frac{5.4.3!}{2.3!}$ **= 10.**

O total de caminhos, portanto, será 15 x 10 = 150.

7. Em uma loja vende-se garrafas de refrigerante de 4 tipos diferentes. De quantas maneiras uma pessoa pode comprar, nessa loja, 10 garrafas de refrigerante

a) no total?

Solução. Usando a representação das combinações completas, temos: $\frac{(10+3)!}{10!.3!} = \frac{13.12.11.10!}{6.10!}$ **= 286.**

b) se ela quiser comprar pelo menos uma garrafa de cada tipo?

Solução. Garantindo que cada tipo será comprado pelo menos uma vez, então, as combinações completas serão com (10 – 4) = 6 garrafas: $\frac{(6+3)!}{6!.3!} = \frac{9.8.7.6!}{6!.6}$ **= 84.**

c) ela quiser comprar pelo menos duas de cada tipo?

Solução. Garantindo que cada tipo será comprado pelo menos duas vezes, então, as combinações completas serão com (10 – 2 x 4) = 2 garrafas: $\frac{(2+3)!}{2!.3!} = \frac{5.4.3!}{2.6}$ **= 10.**

8. Uma fábrica produz 6 tipos de bombons que são vendidos em caixas de 20 bombons (de um mesmo tipo ou sortidos). Quantas caixas diferentes podem ser formadas?

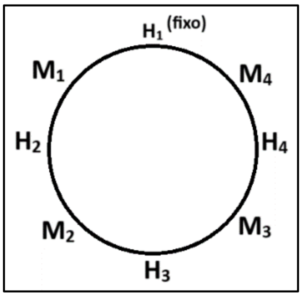
Solução. Essa situação pode ser representadas pelas permutações de 20 bolas e 5 sinais de adição.

Temos: $\frac{(20+5)!}{20!.5!} = \frac{25.24.23.22.21.20!}{20!.120} = \frac{25.24.23.22.21}{120} = \frac{25.23.22.21}{5}$ **= 5.23.22.21 = 53 130.**

9. De quantas maneiras distintas 4 meninos e 4 meninas podem brincar de roda de modo que meninos e meninas fiquem intercalados?

Solução. Considerando meninos como (H) e menina como (M), fixamos 1 dos meninos e permutamos os outros 3 meninos e as 4 meninas.

Logo, há 3!.4! = 6 x 24 = 144 formas.



10. De quantas maneiras distintas 8 crianças podem brincar de roda:

a) No total?

Solução. Permutação circular. Fixando uma criança, basta permutar as restantes: (8 – 1)! = 7! = 5 040.

b) De modo que entre elas, duas específicas devam ficar lado a lado?

Solução. Permutação circular. Considerando as crianças como A, B, C, D, E, F, G, H e que (AB ou BA) são as crianças lado a lado.

Dessa forma, serão permutados ciclicamente (AB), C, D, E, F, G, H: (2!).(7 – 1)! = 2 x 720 = 1 440.

c) De modo que entre elas, duas específicas não devam ficar lado a lado?

Solução. Permutação circular. Considerando as crianças como A, B, C, D, E, F, G, H e que (AB ou BA) são as crianças que não podem ficar lado a lado. Temos:

i) Número total de permutações possíveis: (8 – 1)! = 5 040;

ii) Número de permutações onde (AB) estão juntos: (2!).(7 – 1)! = 2 x 720 = 1 440.

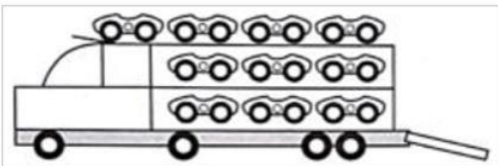
O número de permutações onde (AB) estão separados: 5 040 – 1 440 = 3 600.

11. (UNIGRANRIO 2016) Quantos são os anagramas da palavra MEDICINA que possuem as quatro consoantes em ordem alfabética?

(A) 420 (B) 3360 (C) 20160 (D) 40320 **(E)** 840

Solução. As consoantes tem uma única forma de estarem em ordem alfabética. Então dividimos a permutação total da palavra pelas permutações das 4 consoantes: $\frac{1}{4!} . \left(\frac{8!}{2!}\right) = \frac{8.7.6.5.4!}{2!.4!} =$ **840.**

12. (ENEM 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem um cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro corres disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

(A) C (6,4) **(B)** C (9,3) (C) C (10,4) (D) 6^4 (E) 4^6

Solução. Como cada um dos carrinhos será pintado de uma das 4 cores, temos (10 – 4) = 6 carrinhos para serem pintados ou não com as cores disponíveis. Isso pode ser representado pelas 6 bolinhas e 3 sinais de adição. O número de modelos será: $\frac{(6+3)!}{6!.3!} = \frac{9!}{3!.6!}$ **= C(9,3).**

Cor 1	Cor 2	Cor 3	Cor 4	Total
0	0	0	6	6
1	1	1	3	6
3	0	0	3	6
...	...	...	...	6

+	+	+	●	●	●	●	●	●
●	+	●	+	●	+	●	●	●
●	●	●	+	+	+	●	●	●