E-BOOK

# SEMANA ESPECIAL DA MATEMÁTICA ANÁLISE COMBINATÓRIA

## Sumário

# APRESENTAÇÃO

Olá, amigos! Tudo bem?

O meu nome é Luana Brandão. Sou Graduada, Mestre e Doutora em Engenharia de Produção, pela Universidade Federal Fluminense.

Passei nos concursos de Auditor Fiscal (2009/2010) e Analista Tributário (2009) da Receita Federal e de Auditor Fiscal do Estado do Rio de Janeiro (2010). Sou auditora fiscal do RJ há 10 anos.

Aqui, eu vou dividir com vocês uma parte da minha aula de Análise Combinatória. Esse estudo é fundamental para a resolução de boa parte das questões envolvendo Probabilidade!

Espero que aproveitem!

Um grande abraço,

Luana

“Lute e conquiste, supere seus medos. Acredite em seus sonhos.”

Aislan Dlano

# ANÁLISE COMBINATÓRIA

## 1 – Introdução

A Análise Combinatória, ou simplesmente Combinatória, estuda métodos e técnicas relacionados a **contagens** de elementos em conjuntos **finitos**, de modo que não seja necessário enumerar todos os elementos. Esse estudo é base para a **Teoria da Probabilidade**.

Vejamos um exemplo inicial para entender o que isso significa: quantos números de 3 algarismos podemos formar com o conjunto {1, 3, 4}, sem repetir os elementos em um mesmo número?

Bem, as possibilidades são:

| | | |
|---|---|---|
| i) 134; | ii) 143; | iii) 314; |
| iv) 341; | v) 413; | vi) 431. |

Portanto, são 6 números distintos.

Para resolver esse problema, não precisamos de nenhum conhecimento específico. Basta pensarmos e contarmos todas as possibilidades. E se o conjunto de algarismos fosse todos os números de 1 a 9? Perderíamos muito tempo para contarmos todas as possibilidades e talvez nos perderíamos em algum momento.

A análise combinatória facilita justamente a **contagem** das possibilidades em conjuntos finitos. Ela também permite efetuar contagens de **subconjuntos** com determinadas características. Ou seja, considerando o nosso exemplo, poderíamos estar interessados somente nos números pares ou nos números primos, por exemplo.

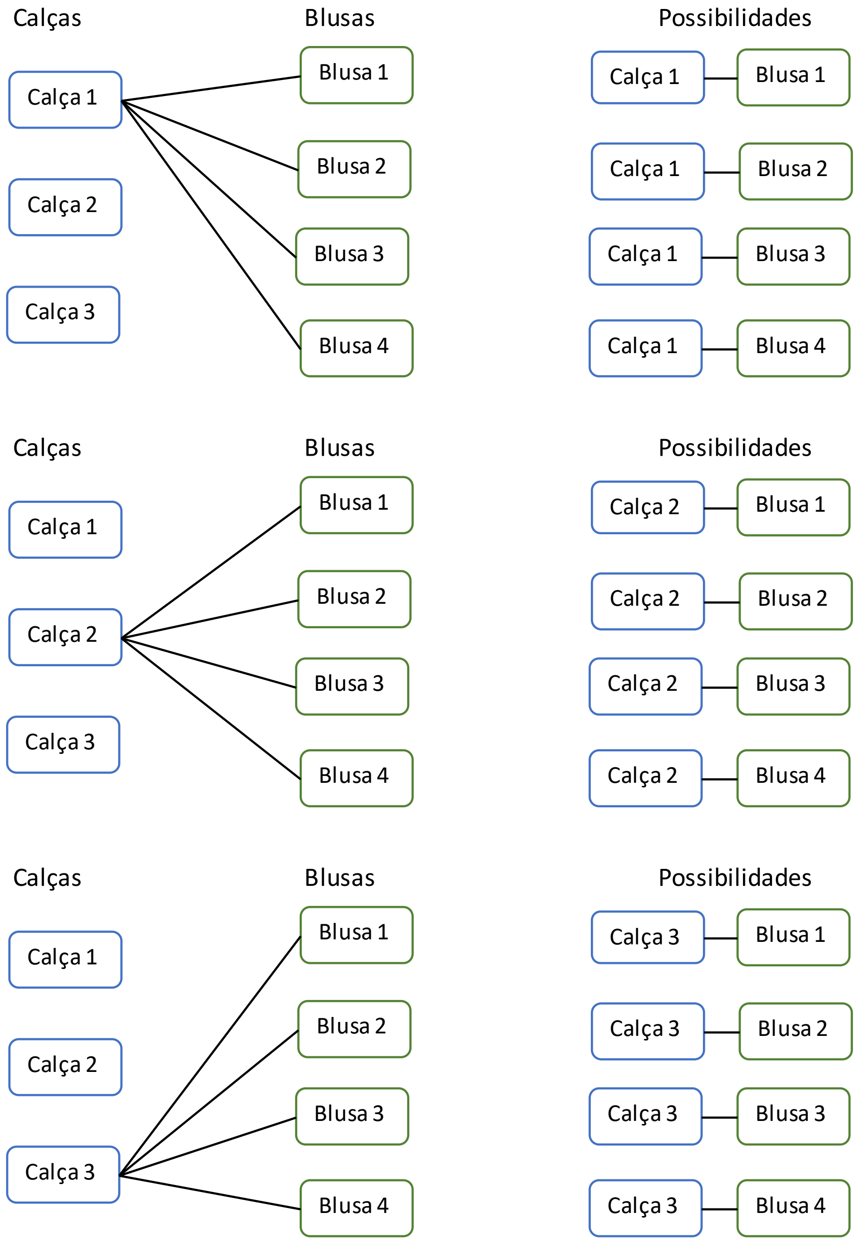
## 2 – Princípios Fundamentais da Contagem

### 2.1 – Princípio Multiplicativo

Vejamos o seguinte princípio fundamental da contagem, chamado de **princípio multiplicativo**:

> *Se um evento A ocorre de **m** maneiras diferentes **e** se, para cada uma dessas maneiras, um outro evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de **ambos** os eventos (A **e** B) ocorrerem é **m x n**.*

Para ilustrar esse princípio, vamos considerar que João precisa se vestir com uma calça e uma blusa e que ele tem 3 calças e 4 blusas. Nesse caso, o evento A corresponde a vestir uma calça, com ***m*** = 3 possibilidades, e o evento B corresponde a vestir uma blusa, com ***n*** = 4 possibilidades. Segundo o princípio multiplicativo, o número de maneiras distintas de João se vestir é ***m*** ***x*** ***n*** = 4 x 3 = 12, conforme ilustrado abaixo.




Observe que para cada calça há 4 possibilidades de blusas. Portanto, são 4 blusas possíveis para a calça 1, 4 blusas possíveis para a calça 2 e 4 blusas possíveis para a calça 3. Somando todas essas possibilidades, temos 4 + 4 + 4 = 4 x 3 = 12. (Obtemos o mesmo resultado se pensarmos que há 3 possibilidades de calça para cada blusa.)

Podemos **extrapolar** esse princípio para **qualquer número de eventos**. Ou seja, se tivermos um terceiro evento C que ocorre de **p** maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de os eventos A, B e C ocorrerem é **m x n x p**.

No exemplo de João, considerando que ele precisa utilizar um cinto e que ele tem **p** = 2 cintos distintos, então o número de maneiras distintas de João colocar uma calça, uma blusa e um cinto é **m x n x p** = 3 x 4 x 2 = 24.

Generalizando, para n eventos, com $\mathbf{p_1}$ possibilidades para o primeiro evento, $\mathbf{p_2}$ possibilidades para o segundo evento, ... e $\mathbf{p_n}$ possibilidades para o n-ésimo evento, então o número de maneiras de os n eventos ocorrerem é $\mathbf{p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n}$.


**(VUNESP/2019 – Prefeitura de dois Córregos/SP)** Em um grupo de pessoas, há 12 homens e 13 mulheres. Com essas pessoas, uma dupla será aleatoriamente formada, com um homem e uma mulher, para participar de um concurso. O número total de possibilidades para a formação dessa dupla é igual a

a) 12.

b) 144.

c) 156.

d) 168.

e) 288.

**Comentários:**

Havendo 12 homens e 13 mulheres, o número de possibilidades de selecionar um homem E uma mulher é, pelo princípio multiplicativo:

12 x 13 = 156

**Gabarito: C**

**(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG)** Assinale a alternativa que contém a quantidade de vezes que é possível usar de maneiras diferentes duas blusas, três calças e quatro meias:

a) 24 maneiras diferentes.

b) 28 maneiras diferentes.

c) 32 maneiras diferentes.

d) 36 maneiras diferentes.

**Comentários:**

Há 2 blusas para cada uma das 3 calças, resultando em 2 x 3 = 6 possibilidades de conjuntos de blusas e calças, pelo princípio multiplicativo. Para cada um desses 6 conjuntos, há 4 possibilidades de meias, resultando em 6 x 4 = 24 maneiras diferentes.

Essa resolução foi dividida em duas etapas para explicar o raciocínio mais lentamente. Porém, poderíamos simplesmente calcular o total de maneiras diferentes em etapa única, multiplicando as possibilidades de cada evento, temos:

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

**Gabarito: A**

**(CESPE/2013 – TRT-ES)** Os alunos de uma turma cursam 4 disciplinas que são ministradas por 4 professores diferentes. As avaliações finais dessas disciplinas serão realizadas em uma mesma semana, de segunda a sexta-feira, podendo ou não ocorrerem em um mesmo dia. A respeito dessas avaliações, julgue o item seguinte.

Se cada professor escolher o dia em que aplicará a avaliação final de sua disciplina de modo independente dos demais, haverá mais de 500 maneiras de se organizar o calendário dessas avaliações.

**Comentários:**

Vamos representar as escolhas dos 4 professores da seguinte forma:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |

Sabendo que há 5 dias disponíveis, então cada professor terá 5 possibilidades de escolha:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 5 | 5 |

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de organizar o calendário para os 4 professores é:

$$\text{Número de maneiras} = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

Ou seja, há mais de 500 maneiras de organizar.

**Gabarito: Certo.**

**(CESPE 2016/FUB)** Em um intervalo para descanso, a assistente em administração Marta foi a uma lanchonete cujo cardápio oferecia 7 tipos diferentes de salgados, 4 tipos diferentes de bolos, 3 espécies diferentes de tapioca, sucos de 3 sabores diferentes e 5 tipos diferentes de refrigerantes. A partir dessa situação hipotética, julgue o item que se segue.

Se Marta desejar fazer um lanche com apenas uma opção de comida e apenas uma bebida, ela terá mais de 100 maneiras distintas de organizar seu lanche.

**Comentários:**

Marta deseja escolher uma comida e uma bebida. As opções de comida são as 7 opções de salgado, as 3 opções de bolo e as 3 opções de tapioca, logo, há 7 + 4 + 3 = 14 opções de comida. As opções de bebida são as 3 opções de suco e as 5 opções de refrigerante, logo, há 3 + 5 = 8 opções de bebida.

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de se escolher uma comida **e** uma bebida é:

$$14 \times 8 = 112$$

Logo, há mais de 100 maneiras.

**Gabarito: Certo.**

## Contagem de Divisores

Com base no princípio multiplicativo, é possível calcular a **quantidade de divisores** de um número natural. O primeiro passo é **fatorar** o número natural em números **primos**. Para exemplificar, vamos trabalhar com o número 60. Podemos calcular os divisores primos da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, podemos representar o número 60, a partir dos seus divisores primos, da seguinte forma:

$$60 = 2^{\mathbf{2}} \times 3^{\mathbf{1}} \times 5^{\mathbf{1}}$$

**Todos os divisores** de um número são compostos pelo produto de alguns dos seus divisores primos. Ou seja, todos os divisores de 60, que podemos denotar por $d_{60}$, podem ser representados da seguinte forma:

$$d_{60} = 2^{x} \times 3^{y} \times 5^{z}, \qquad sendo\ \boldsymbol{x \leq 2}, \boldsymbol{y \leq 1}, \boldsymbol{z \leq 1}$$

Ou seja, as possibilidades para cada expoente são:

- $x$: 0, 1 ou 2 (**3** possibilidades);
- $y$: 0 ou 1 (**2** possibilidades);
- $z$: 0 ou 1 (**2** possibilidades).

Pelo princípio multiplicativo, devemos **multiplicar** as possibilidades desses eventos para encontrar o número de possibilidades, no total:

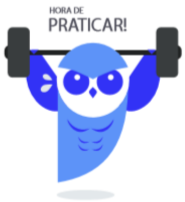
**3** x **2** x **2** = 12

Logo, há 12 divisores de 60.

Observe que os **expoentes dos divisores primos** eram **2**, **1** e **1**, e os valores multiplicados foram **3**, **2** e **2**. Ou seja, basta **somar 1 a cada expoente e multiplicá-los**:

Número de Divisores = (2 **+ 1**) x (1 **+ 1**) x (1 **+ 1**) = 3 x 2 x 2

Isso porque o número de possibilidades que cada expoente pode assumir é igual ao **seu valor**, **mais 1**, correspondente ao **zero**.




**(FCC/2016 – Companhia Metropolitana/SP)** Uma tabela retangular de 12 linhas por 18 colunas possui 216 campos de preenchimento. Outras tabelas retangulares com combinações diferentes de linhas e colunas também possuem 216 campos de preenchimento. Observando-se que uma tabela de 12 linhas por 18 colunas é diferente de uma tabela de 18 linhas por 12 colunas, o total de tabelas retangulares diferentes com 216 campos de preenchimento é igual a

a) 14

b) 12

c) 10

d) 16

e) 18

**Comentários:**

A quantidade de tabelas distintas com 216 campos corresponde à quantidade de maneiras de obter 216 com dois fatores, por exemplo, 1 x 216, 2 x 108,... Essa quantidade é igual ao número de divisores de 216.

Para obter o número de divisores de 216, vamos primeiro fatorá-lo em números primos:

| | |
|---|---|
| 216 | 2 |
| 108 | 2 |
| 54 | 2 |
| 27 | 3 |
| 9 | 3 |
| 3 | 3 |
| 1 | |

Ou seja:

$$216 = 2^3 \times 3^3$$

Os divisores de 216 podem ser, portanto, representados da seguinte forma:

$$d_{216} = 2^x \times 3^y$$

Nesse caso, $x$ pode assumir 4 possibilidades (0, 1, 2 ou 3), assim como $y$. Pelo princípio multiplicativo, há o seguinte número de possibilidades:

$$(3 + 1) \text{ x } (3 + 1) = 4 \text{ x } 4 = 16$$

**Gabarito: D.**

## 2.2 – Princípio Aditivo

Agora, veremos outro princípio fundamental de contagem, chamado de **princípio aditivo**:

> *Se o evento A ocorre de **m** maneiras diferentes e o evento B ocorre de **n** maneiras diferentes, e se A e B são **mutuamente exclusivos*** (ou seja, se um ocorrer o outro **não** ocorre), *então o número de maneiras de ocorrer **um** dos eventos (A **ou** B) é **m + n**.*

Para ilustrar esse princípio, vamos considerar que João precisa se calçar e que ele possui 3 opções de tênis e 2 opções de sapatos. Nesse caso, o evento A corresponde a calçar um tênis, com ***m*** = 3 possibilidades, e o evento B corresponde a calçar um sapato, com ***n*** = 2 possibilidades. Note que esses eventos são mutuamente excludentes (João calçará um tênis **ou** um sapato: **não** pode calçar os dois). Assim, o número de maneiras de João se calçar é ***m + n*** = 3 + 2 = 5.

Podemos extrapolar esse princípio para qualquer número de eventos. Havendo n eventos **mutuamente exclusivos**, com $\mathbf{p_1}$ possibilidades para o primeiro evento, $\mathbf{p_2}$ possibilidades para o segundo evento, ... e $\mathbf{p_n}$ possibilidades para o n-ésimo evento, então o número de maneiras de ocorrer **um** dos n eventos é $\mathbf{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$.

Em suma, quando ocorrem **ambos** eventos (A **e** B), **multiplicamos** as possibilidades de cada evento para encontrar o total de possibilidades (princípio **multiplicativo**); quando ocorre **somente um** dos eventos (A **ou** B), **somamos** as possibilidades de cada evento para encontrar o total de possibilidades (princípio **aditivo**).

## EXEMPLIFICANDO

É importante distinguir bem esses dois princípios. Vamos ver um exemplo combinando esses dois princípios.

Vamos considerar que Maria precisa se vestir e se calçar, dispondo de 4 vestidos, 2 saias, 3 blusas e 5 sapatos. Nesse caso, Maria irá colocar um vestido (evento A) OU um conjunto de saia (evento B) e blusa (evento C). De uma forma ou de outra, irá colocar TAMBÉM um sapato (evento D).

Ou seja:

i) Os eventos B (saia) e C (blusa) são concomitantes – princípio multiplicativo: 2 x 3 = **6** possibilidades;

ii) Os eventos A (vestido) e (i) (saia e blusa) são excludentes – princípio aditivo: 4 + **6** = **10** possibilidades;

iii) Os eventos D (sapato) e (iii) (saia e blusa ou vestido) são concomitantes – princípio multiplicativo: 5 x **10** = 50 possibilidades.

Eventos Concomitantes: A **e** B → Princípio Multiplicativo: n(A) **x** n(B)

Eventos Excludentes: A **ou** B → Princípio Aditivo: n(A) **+** n(B)

HORA DE PRATICAR!

**(2017 – Conselho Regional de Educação Física/CE)** Numa estante encontram-se 4 dicionários de inglês, 3 de espanhol e 2 de francês. De quantas maneiras uma pessoa pode escolher dois dicionários dessa estante e que sejam de idiomas diferentes?

a) 22

b) 24

c) 26

d) 28

**Comentários:**

Selecionando 2 dicionários de idiomas diferentes, podemos encontrar uma das seguintes opções:

i) um livro de inglês **e** um de espanhol; **ou**

ii) um livro de inglês **e** um de francês; **ou**

iii) um livro espanhol **e** um de francês.

Observe que, em cada opção, temos eventos concomitantes (ambos ocorrem), aplicando-se o princípio multiplicativo; enquanto que as opções i, ii e iii se excluem mutuamente (somente uma delas irá ocorrer), aplicando-se o princípio aditivo entre elas.

Portanto, para i (inglês e espanhol), temos 4 x 3 = 12 possibilidades; para ii (inglês e francês), temos 4 x 2 = 8 possibilidades; para iii (espanhol e francês), temos 3 x 2 = 6 possibilidades. No total, temos 12 + 8 + 6 = 26 possibilidades de pegar dois dicionários de idiomas distintos.

**Gabarito: C**

**(CESPE/2013 – TRT-ES)** Considerando que, na fruteira da casa de Pedro, haja 10 uvas, 2 maçãs, 3 laranjas, 4 bananas e 1 abacaxi, julgue o próximo item.

Se Pedro desejar comer apenas um tipo de fruta, a quantidade de maneiras de escolher frutas para comer será superior a 100.

**Comentários:**

Se Pedro deseja comer apenas um tipo de fruta, ele poderá comer uvas OU maçãs OU laranjas OU bananas OU abacaxi:

i) Uvas: há 10 uvas, logo Pedro poderá comer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 uvas. Logo, há 10 maneiras de escolher uvas para comer;

ii) Maçãs: há 2 maçãs, logo há 2 maneiras de escolher maçãs para comer;

iii) Laranjas: com 3 laranjas, há 3 maneiras de comer laranjas;

iv) Bananas: com 4 bananas, há 4 maneiras de comer bananas;

v) Abacaxi: há 1 abacaxi, logo há 1 forma de comer abacaxi.

Como Pedro irá escolher apenas **uma** dessas opções, então devemos aplicar o princípio aditivo:

Número de maneiras = 10 + 2 + 3 + 4 + 1 = 20

Que é inferior a 100.

**Gabarito: Errado.**

## 3 – Fatorial de um número natural

Os princípios fundamentais de contagem podem ser usados em muitos problemas de combinatória. Entretanto, para questões mais complexas, a resolução somente por esses princípios pode se tornar muito trabalhosa. Para resolver esses problemas, existem técnicas mais sofisticadas, as quais dependem do conceito de **fatorial**.

O **fatorial de um número natural** (como 0, 1, 2, 3, ...) é representado como:

$$\boldsymbol{n}!$$

O fatorial representa o **produto de todos os números naturais menores ou iguais àquele número**, **até o número 1**, conforme indicado a seguir:

$$\boldsymbol{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$$

Por exemplo:

2! = 2 x 1 = 2

3! = 3 x 2 x 1 = 6

4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120

6! = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720

10! = 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 3.628.800

**Note que podemos escrever o fatorial de um número natural em função do fatorial de qualquer outro número natural menor, por exemplo:**

$$4! = 4 \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3!} = 4 \times 3!$$

$$7! = 7 \times \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 6!$$

$6!$

$$7! = 7 \times 6 \times \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!} = 7 \times 6 \times 5!$$

$$10! = 10 \times 9 \times \underbrace{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{8!} = 10 \times 9 \times 8!$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!$$

Esse tipo de mudança facilita o cálculo de divisões de fatoriais (**muito comuns** em combinatória):

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

$$\frac{15!}{13!} = \frac{15 \times 14 \times 13!}{13!} = \frac{15 \times 14 \times \cancel{13!}}{\cancel{13!}} = 15 \times 14 = 210$$


Nesses exemplos, aplicamos o **fatorial** **antes** de efetuar a **divisão**. Quando for necessário fazer a **divisão antes**, utilizaremos o **parêntesis**:

$$\frac{6!}{3!} \neq \left(\frac{6}{3}\right)!$$

Vimos que $\frac{6!}{3!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$. Já, em $\left(\frac{6}{3}\right)!$, calculamos o resultado da divisão entre parêntesis, antes do fatorial:

$$\left(\frac{6}{3}\right)! = 2! = 2 \times 1 = 2$$

Analogamente, em um produto, temos:

$$2 \times 4! \neq (2 \times 4)!$$

Em $2 \times 4!$, calculamos o fatorial antes da multiplicação:

$$2 \times 4! = 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$$

Em $(2 \times 4)!$, multiplicamos os fatores, antes de aplicar o fatorial:

$$(2 \times 4)! = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40.320$$

O mesmo vale para as demais operações, ou seja:

$$2 + 4! \neq (2 + 4)!$$

Pois $2 + 4! = 2 + 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 26$; e $(2 + 4)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

$$8 - 3! \neq (8 - 3)!$$

Pois $8 - 3! = 8 - 3 \times 2 \times 1 = 2$; e $(8 - 3)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

### FIQUE ATENTO!

**Casos especiais**:

**1! = 1**

**0! = 1**

### HORA DE PRATICAR!

**(2019 – Prefeitura de Jacutinga/MG)** O fatorial de um número é extremamente utilizado na análise combinatória. Dessa forma, analise as proposições a seguir:

I. O fatorial n! de um número $n \in \mathbb{N}$ é dado por $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \ldots 3 \times 2 \times 1$;

II. 0! = 1;

III. 1! = 0.

Está(ão) CORRETA(S) a(s) proposição(ões):

a) II apenas.

b) I e II apenas.

c) II e III apenas.

d) I e III apenas.

**Comentários:**

A proposição I indica precisamente a definição de fatorial.

A proposição II também está correta: 0! = 1.

A proposição III está incorreta, pois 1! = 1.

Ou seja, estão corretas apenas as proposições I e II.

**Gabarito: B**

**(2018 – Prefeitura de Uruçuí/PI)** A simplificação da expressão a seguir é: $\frac{200!}{198!}$

a) 200

b) 198!

c) 38.800

d) 39.800

**Comentários:**

Podemos escrever 200! como 200! = 200 x 199 x 198!. Assim, temos:

$$\frac{200!}{198!} = \frac{200 \times 199 \times 198!}{198!} = 200 \times 199 = 39.800$$

**Gabarito: D**

## 4 – Permutação

Agora, podemos voltar às técnicas de análise combinatória. Em linguagem coloquial, podemos dizer que **permutar** significa **trocar de lugar**. Ao trocar elementos de lugar, a **ordem** desses elementos se **modifica**. Por isso, podemos dizer que as técnicas de permutação permitem calcular as **diferentes possibilidades** de se **ordenar** elementos.

## 4.1 – Permutação Simples

Em permutações simples, os elementos a serem ordenados são todos **distintos** entre si.

Antes de apresentar a fórmula, vamos entender o raciocínio, que é muito importante. Digamos que 3 alunos (Ana, Beto e Caio), em um grupo de estudo, serão avaliados e, em seguida, ranqueados de acordo com o resultado da sua avaliação. Supondo que não há empates, de quantas formas esses alunos poderão ser ranqueados?

Como o exemplo é pequeno podemos escrever e contar todas as possibilidades. Mas vamos experimentar um outro raciocínio: encontrando o número de possibilidades para cada **posição**:

| | | |
|---|---|---|
| 1º | 2º | 3º |

Quais são os alunos que podem ficar em primeiro lugar? Qualquer um dos alunos (Ana, Beto ou Caio) **pode** ficar em primeiro lugar. Portanto, temos 3 possibilidades para o primeiro lugar.

E para o segundo lugar? Bem, sabendo que alguém ficará em primeiro lugar, restarão 2 possibilidades para o segundo colocado.

E para o terceiro lugar? Sabendo que alguém ficará em primeiro lugar e outro ficará em segundo lugar, restará apenas uma possibilidade para o terceiro lugar.

| 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|
| 1º | 2º | 3º |

Como são eventos concomitantes (alguém ficará em primeiro lugar, outra pessoa ficará em segundo **e** outra em terceiro), pelo princípio multiplicativo, devemos **multiplicar** as possibilidades de cada evento:

$$3 \times 2 \times 1$$

Poderíamos ter começado o raciocínio por qualquer posição, que o resultado seria o mesmo.

> – Só um momento! Como assim “sobrarão” 2 possibilidades para o 2º colocado e 1 possibilidade para o 3º colocado?!?
>
> – Boa pergunta! É realmente importante entender esse raciocínio!

## ESCLARECENDO!

Para a 1ª posição (por onde começamos o nosso raciocínio, mas poderíamos ter começado por qualquer posição), **não** há qualquer **restrição**, então **todos os 3 alunos** podem ocupá-la:

$$\underset{\text{1º}}{\underline{\quad 3 \quad}} \qquad \underset{\text{2º}}{\underline{\qquad\quad}} \qquad \underset{\text{3º}}{\underline{\qquad\quad}}$$

Para cada uma dessas 3 possibilidades, teremos rankings diferentes, **dependendo** de quem ficar em **2º e em 3º lugar**. Por exemplo, mantendo Ana em 1º lugar, temos Ana, Beto e Caio ou Ana, Caio e Beto. Logo, há **novas possibilidades** de ordenação associadas à **2ª posição**.

Porém, **não** é possível que o mesmo aluno ocupe **mais de uma** posição. Logo, para cada uma das 3 possibilidades para a 1ª posição, há **apenas 2 possibilidades** para a 2ª posição, uma vez que um dos alunos terá necessariamente **ocupado** a 1ª posição. Para isso, dizemos que o aluno da 1ª posição "**já foi escolhido**" e assim **sobrarão apenas** 2 alunos para a 2ª posição:

$$\underset{\text{1º}}{\underline{\quad 3 \quad}} \qquad \underset{\text{2º}}{\underline{\quad 2 \quad}} \qquad \underset{\text{3º}}{\underline{\qquad\quad}}$$

Da mesma forma, só haverá 1 aluno que não terá ocupado nem a primeira nem a segunda posição, logo ele irá ocupar a terceira posição. Ou seja, para cada uma das formas de definir o 1º e o 2º colocado, haverá apenas 1 forma de definir o 3º colocado. Para isso, dizemos que, "**após a escolha**" do 1º e do 2º colocados, **sobrará** apenas 1 aluno para a 3ª posição:

$$\underset{\text{1º}}{\underline{\quad 3 \quad}} \qquad \underset{\text{2º}}{\underline{\quad 2 \quad}} \qquad \underset{\text{3º}}{\underline{\quad 1 \quad}}$$

Por fim, **multiplicamos** todas essas possibilidades (princípio multiplicativo) para encontrar a quantidade de maneiras de ordenar todos os 3 elementos.

E se houvesse 4 alunos? Quais seriam as possibilidades de ordenação do primeiro ao quarto lugar? Nesse caso, teríamos 4 possibilidades para o primeiro lugar; 3 para o segundo lugar; 2 para o terceiro e 1 para o quarto:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$

E se houvesse 10 alunos? Teríamos 10 possibilidades para o primeiro lugar, 9 para o segundo, depois 8, depois 7... até sobrar 1 possibilidade para o décimo lugar:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Ou seja, a posição seguinte terá sempre uma possibilidade a menos do que a posição anterior. Para n alunos teríamos:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Lembrou de algo? Essa é a fórmula do **fatorial**!

> Portanto, a **permutação simples** de **n elementos** distintos $P_n$, isto é, o **número de possibilidades de ordenar n elementos distintos**, é dada por:
>
> $$P_n = n!$$

Reforçando, a permutação simples pode ser utilizada para calcular todas as possibilidades de se **reordenar** elementos, sejam letras de uma sigla (formando anagramas distintos), algarismos em um número (formando números distintos), etc., desde que os **elementos sejam todos distintos**.


**(FGV/2019 – Prefeitura de Salvador/BA)** Trocando-se a ordem das letras da sigla PMS de todas as maneiras possíveis, obtêm-se os anagramas dessa sigla. O número desses anagramas é:

a) 16.

b) 12.

c) 9.

d) 8.

e) 6.

**Comentários:**

Considerando que todas as 3 letras de PMS são distintas, o número de anagramas, ou seja, de formas de se reordenar essas letras é dado por:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

**Gabarito: E**

**(VUNESP/2018 – PM/SP)** Em um armário, há 5 prateleiras e será preciso colocar 5 caixas, de cores distintas, cada uma em uma prateleira desse armário, sem que haja uma ordem específica. O número total de maneiras de colocar essas caixas nesse armário é

a) 25.

b) 60.

c) 95.

d) 120.

e) 165.

**Comentários:**

Por se tratarem de caixas distintas a serem alocadas em determinada ordem, temos uma permutação de 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

**Gabarito: D.**

**(CESPE 2018/EBSERH)** Julgue o próximo item, a respeito de contagem.

Se a enfermaria de um hospital possuir cinco leitos desocupados e se cinco pacientes forem ocupar esses leitos, então haverá mais de 100 formas diferentes de fazer essa ocupação.

**Comentários:**

Considerando que temos 5 leitos para serem ocupados por 5 pacientes, temos uma permutação de 5 elementos, dada por:

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Logo, há mais de 100 formas de fazer essa ocupação.

**Gabarito: Certo.**

**(CESPE 2016/CBM-DF)** Para atender uma grave ocorrência, o comando do corpo de bombeiros acionou 15 homens: 3 bombeiros militares condutores de viatura e 12 praças combatentes, que se deslocaram em três viaturas: um caminhão e duas caminhonetes. Cada veículo transporta até 5 pessoas, todas sentadas, incluindo o motorista, e somente os condutores de viatura podem dirigir uma viatura. Com relação a essa situação, julgue o item seguinte.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuir os condutores de viatura para dirigir os veículos é superior a 5.

**Comentários:**

Considerando que há 3 condutores para 3 veículos, a quantidade de maneiras de organizá-los corresponde a uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Logo, a quantidade de maneiras é superior a 5.

**Gabarito: Certo.**

### 4.1.1 – Permutação Simples com Restrição

É possível que algumas questões de permutações imponham determinadas **restrições**. Nesses casos, nem todos os elementos poderão permutar livremente, o que exige mais atenção para resolver a questão.

Vejamos alguns exemplos desse tipo de permutação. Primeiro, vamos considerar que há 8 elementos distintos a serem ordenados, por exemplo, os algarismos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Vamos ilustrar as opções de ordenação com os espaços abaixo.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

Suponha que o número 1 esteja **fixo** na primeira posição e o número 8, na oitava posição:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | 8 |

Sendo assim, **restarão** os algarismos 2 a 7 (ou seja, um total de **6 algarismos**) para serem ordenados nos **6 espaços** restantes. Dessa forma, teremos uma permutação de 6 elementos em 6 posições:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Poderíamos ter **fixado quaisquer 2 algarismos** em quaisquer 2 posições, que continuaríamos com a **permutação dos 6 algarismos restantes**, nos 6 espaços restantes. Portanto, o número de possibilidades de ordená-los seria o mesmo.

Um exemplo sutilmente **diferente** seria se esses dois algarismos fossem posicionados nos **extremos**, mas **sem fixar em qual** dos extremos. Assim, poderíamos ter o número 1 na primeira posição e o número 8 na oitava, como ilustrado anteriormente, **ou** o número 8 na primeira posição e o número 1 na oitava:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | | | | | | 1 |

Portanto, para cada uma das 720 possibilidades de permutar os algarismos de 2 a 7 nas posições intermediárias, haveria **2 possibilidades distintas** de posicionar os extremos. Pelo princípio **multiplicativo**, devemos multiplicar as possibilidades desses dois eventos, resultando em:

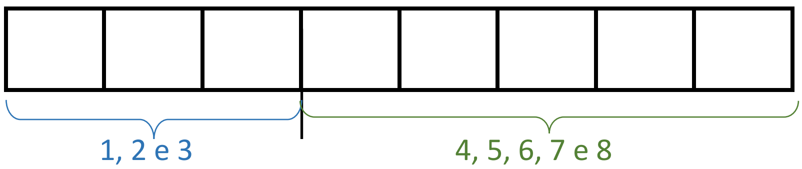
$$2 \times P_6 = 2 \times 720 = 1440$$

Na verdade, essas 2 possibilidades dos números 1 e 8 correspondem à **permutação** desses 2 elementos, $P_2 = 2$. Ou seja, o número de ordenações possíveis nesse exemplo corresponde ao produto das permutações de 2 e de 6 elementos:

$$P_2 \times P_6$$

E por que isso interessa? Bem, sabendo isso, podemos efetuar os cálculos mais facilmente para quando houver mais elementos destinados a determinadas posições, mas não fixos.

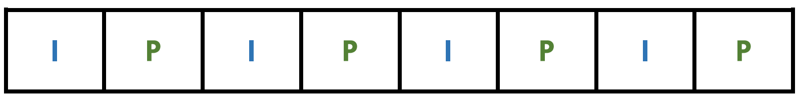
Por exemplo, vamos supor que os 3 primeiros números tenham que ficar nas 3 primeiras posições, em qualquer ordem, e os demais números nas demais posições, como ilustrado a seguir:




Nesse caso, temos a permutação de 3 elementos nas 3 primeiras posições e de 5 elementos nas demais posições. Pelo princípio multiplicativo, o número de ordenações possíveis, nessas condições é:

$$P_3 \times P_5 = 3! \times 5! = 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Teríamos uma situação parecida, caso os algarismos ímpares tivessem que ficar em posições ímpares e os algarismos pares, nas posições pares, como ilustrado abaixo:




Também resolveríamos esse caso com 2 permutações em separado. Em relação aos ímpares, temos 4 algarismos para 4 posições, logo, temos uma permutação de 4 elementos:

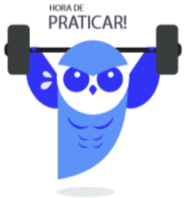
$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Em relação aos pares, temos 4 algarismos para 4 posições, logo, temos outra permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de ordenar todos os 8 algarismos nessas condições é:

$$24 \times 24 = 576$$




**(FCC/2019 – Analista Judiciário do TRF 3ª Região)** Em um concurso com 5 vagas, os candidatos aprovados serão alocados, cada um, em um dos municípios A, B, C, D ou E. O primeiro colocado foi designado para o município A. O número de possíveis alocações dos outros candidatos aprovados é

a) 30

b) 4

c) 120

d) 24

e) 6

**Comentários:**

Trata-se de um problema de permutação. Considerando que um dos candidatos está fixo no município A, restam 4 candidatos para serem alocados em 4 municípios (B, C, D ou E). Portanto:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

**Gabarito: D.**

**(CESPE 2018/BNB)** Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 8! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o camelo fique na primeira posição e o elefante fique na sexta posição.

**Comentários:**

A questão pede para organizarmos uma fila de 10 animais, de forma que o camelo (C) fique na primeira posição e o elefante (E), na sexta:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | | | | | E | | | | |

O número de maneira de organizarmos o restante da fila corresponde à permutação de 10 – 2 = 8 elementos:

$$P_8 = 8!$$

**Gabarito: Certo.**

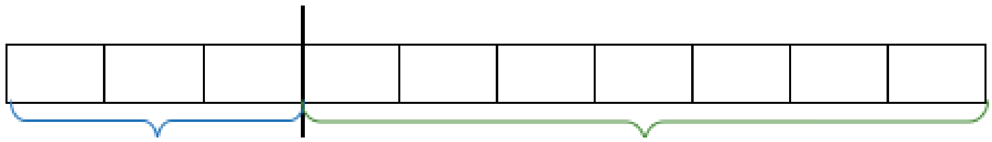
**(CESPE 2018/BNB)** Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 3 × 7! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o elefante, o camelo e o leão fiquem nas três primeiras posições, não necessariamente nessa ordem.

**Comentários:**

Agora, desejamos organizar a fila de forma que os 3 animais (Elefante, Camelo e Leão) fiquem nas 3 primeiras posições, em qualquer ordem. Consequentemente, os outros 10 – 3 = 7 animais ocuparão as outras 7 posições:



Elefante, Camelo, Leão    Outros 7 animais

O número de formas de organizar os 3 animais corresponde a uma permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3!$$

O número de formas de organizar os outros 7 animais equivale a uma permutação de 7 elementos:

$$P_7 = 7!$$

Pelo princípio multiplicativo, multiplicamos esses resultados para obter o número de maneiras possíveis de organizar a fila:

Número de possibilidades = $3! \times 7!$

Note que esse resultado é **diferente** do valor informado no item, qual seja, 3 × 7!, logo, o item está errado.

Nota: Como 3! = 3 x 2, o nosso resultado é o **dobro** do que consta no item da questão.

**Gabarito: Errado.**

Agora, vejamos uma **última** ferramenta para resolver problemas de **permutação simples com restrição**.

Vamos supor que os algarismos 1 e 2 tenham que ficar **sempre juntos**, **nessa ordem**. Nesse caso, tratamos esses 2 algarismos como **elemento único**, que podemos chamar de **A**. Assim, em vez de 8 elementos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}, ordenaremos apenas **7 elementos** {A, 3, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

Ou seja, a quantidade de maneiras de ordenar 8 elementos, de modo que **2 estejam sempre juntos em uma determinada ordem**, corresponde à **permutação de 7 elementos**.

Se houvesse 3 elementos juntos em determinada ordem, {1, 2 e 3}, denotaríamos os 3 elementos por A, e ordenaríamos 6 elementos {A, 4, 5, 6, 7 e 8}. De modo geral, havendo n elementos, dos quais j devem ficar **juntos em determinada ordem**, fazemos a **permutação** de **n – j + 1** elementos (tente entender o raciocínio, ao invés de decorar esta fórmula):

$$\mathbf{P_{n-j+1} = (n - j + 1)!}$$

E se os elementos tivessem que ficar **juntos**, mas em **qualquer ordem**? Nesse caso, o **início** da solução é da mesma forma, isto é, denotamos esses elementos por um **único elemento**, A, e fazemos a **permutação** do elemento **A** com os demais elementos.

Por exemplo, se os algarismos {1, 2 e 3} tivessem que ficar juntos, mas em qualquer ordem, faríamos a **permutação dos 6 elementos** {A, 4, 5, 6, 7 e 8}:

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Porém, para **cada uma** dessas 720 possibilidades de ordenar os elementos {A, 4, 5, 6, 7 e 8}, os algarismos {1, 2 e 3} pode aparecer como:

| | | |
|---|---|---|
| ... 1 2 3 ... | ... 1 3 2 ... | ... 2 1 3 ... |
| ... 2 3 1 ... | ... 3 1 2 ... | ... 3 2 1 ... |

Ou seja, para cada uma das possibilidades que calculamos anteriormente, temos diferentes formas de ordenar os 3 elementos.

Como calculamos as diferentes formas de ordenar 3 elementos? Pela permutação! Logo, pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar o resultado anterior pela permutação de 3 elementos:

$$P_6 \times P_3 = 6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$$

De modo geral, havendo n elementos, dos quais j elementos devem ficar **juntos em qualquer ordem**, fazemos a permutação de n – j + 1 elementos e multiplicamos pela permutação de j elementos (novamente, tente entender o raciocínio, ao invés de decorar esta fórmula):

$$\mathbf{P_{n-j+1} \times P_j = (n - j + 1)! \times j!}$$

– Qual é a diferença entre este tipo de restrição e a restrição que vimos antes?

## ESCLARECENDO!

**Na seção anterior**, estávamos **fixando posições**. Ou seja, fixamos, por exemplo, o algarismo 1 na primeira posição e o algarismo 8 na última, como representado abaixo. Nesse caso, **permutamos** apenas os **demais** elementos.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | 8 |

Número de possibilidades de ordenação = $P_6 = 6!$

Se esses elementos **fixados** puderem **permutar entre si**, então, o resultado da permutação dos demais elementos deve ser multiplicado pela **permutação dos elementos fixados**.

Número de possibilidades de ordenação = $P_6 \times P_2 = 6! \times 2$

Já, **nesta seção**, aprendemos a **fixar vizinhos**. Ou seja, definimos, por exemplo, que os algarismos 1 e 8 devem permanecer **juntos**, em **quaisquer posições**. Nesse caso, devemos tratá-los como **elemento único** e **permutá-lo com os demais elementos**. Havendo 8 elementos no total, teríamos a permutação de 7 elementos:

Número de possibilidades de ordenação = $P_7 = 7!$

Se esses elementos vizinhos precisarem ficar em **determinada ordem**, então já temos a nossa resposta.

Se os vizinhos puderem aparecer em **qualquer ordem**, então precisamos **multiplicar** esse resultado pela **permutação dos elementos vizinhos**.

Número de possibilidades de ordenação = $P_7 \times P_2 = 7! \times 2$

**(FGV/2017 – Prefeitura de Salvador/BA)** Três casais vão ocupar seis cadeiras consecutivas de uma fila do cinema, e os casais não querem sentar separados. Assinale a opção que indica o número de maneiras diferentes em que esses três casais podem ocupar as seis cadeiras.

a) 6.

b) 12.

c) 24.

d) 36.

e) 48.

**Comentários:**

Primeiro, vamos tratar cada casal como elemento único. Assim, temos a permutação de 3 elementos:

$$P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Uma vez definida a ordem entre os casais, é necessário que cada casal decida a sua ordem. Assim, para cada uma dessas 6 possibilidades de ordem entre os casais, há $P_2 = 2$ possibilidades de cada um dos três casais se organizarem:

$$6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

**Gabarito: E**

**(CESPE 2018/BNB)** Em um navio, serão transportados 10 animais, todos de espécies diferentes. Antes de serem colocados no navio, os animais deverão ser organizados em uma fila. Entre esses 10 animais, há um camelo, um elefante e um leão.

A respeito da organização dessa fila, julgue o item subsequente.

Existem 7 × 7! maneiras distintas de organizar essa fila de forma que o elefante, o camelo e o leão estejam sempre juntos, mantendo-se a seguinte ordem: leão na frente do camelo e camelo na frente do elefante.

**Comentários:**

Para organizar uma fila de 10 animais, de modo que o leão, o camelo e o elefante apareçam sempre nessa ordem, podemos tratá-lo como elemento único. Assim, o número de formas de organizar os outros 10 – 3 = 7 animais e mais esse trio corresponde a uma permutação de 8 elementos:

$$P_8 = 8! = 8 \times 7!$$

Esse resultado é diferente de **7** x 7!, descrito no item.

**Gabarito: Errado.**

**(CESPE 2018/BNB)** Julgue o próximo item, relativo a análise combinatória e probabilidade.

A quantidade de números naturais distintos, de cinco algarismos, que se pode formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, de modo que 1 e 2 fiquem sempre juntos e em qualquer ordem, é inferior a 25.

**Comentários:**

Para encontrar a quantidade de números que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 corresponde a uma permutação desses elementos. Para que os números 1 e 2 fiquem sempre juntos, podemos considerá-lo com elemento único. Assim, temos uma permutação de 4 elementos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Porém, para cada uma dessas 24 maneiras de organizar os algarismos 3, 4, 5 e o elemento 1-2, podemos ter 1 primeiro e depois 2, ou 2 primeiro e depois 1. Logo, pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar esse resultado pela permutação de 2 elementos $P_2 = 2! = 2$:

Quantidade de números possíveis = **24** x 2 = 48

Essa quantidade é **superior** a 25.

**Gabarito: Errado.**

## 4.2 – Permutação com Repetição

Na permutação **simples**, todos os elementos são **distintos**. Nesse caso, se houver, por exemplo, 3 elementos {A, B, C}, há $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades de ordená-los. Vejamos essas ordenações:

i) A B C ii) A C B iii) B A C iv) B C A v) C A B vi) C B A

Suponhamos que, ao invés do C, seja um **segundo elemento** A. Vamos escrever novamente as 6 possibilidades descritas acima, porém substituindo C por um segundo A:

I) A B A II) A A B III) B A A IV) B A A V) A A B VI) A B A

Observe que a ordem descrita em I é igual à ordem em VI; que a ordem em II é igual à ordem em V; e que a ordem em III é igual à ordem em IV. Portanto, temos apenas 3 possibilidades **distintas** de ordenar os elementos {A, A, B}:

I) A B A II) A A B III) B A A

Podemos observar que, quando há **elementos repetidos**, o número de possibilidades distintas de ordenação se **reduz**.

– Mas, por quê? O que aconteceu?

Bem, a redução ocorreu porque na opção i da **primeira** permutação, os elementos A e C estavam **invertidos** em relação à opção vi, enquanto **todo o restante se manteve igual**. Por isso, na **segunda** permutação, essas opções se tornaram uma **única** opção. O mesmo ocorreu com as opções ii e v; e com as opções iii e iv.

Em outras palavras, precisamos **dividir** o resultado da primeira permutação pelo número de vezes em que **A e C** **trocam de posição**.

E como calculamos a quantidade de maneiras em que elementos trocam de posição? Pela **permutação**!

Ou seja, na **permutação com repetição**, **dividimos** a **permutação simples** pela **permutação dos elementos repetidos**. Indicamos essa permutação de 3 elementos com repetição de 2 elementos por $P_3^2$:

$$P_3^2 = \frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times \mathbf{2}!}{\mathbf{2}!} = \frac{3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3$$

Assim, se tivéssemos 5 elementos distintos para permutar, teríamos $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Havendo 3 elementos iguais, dividimos esse resultado pela permutação dos 3 elementos $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$:

$$P_5^3 = \frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \mathbf{3}!}{\mathbf{3}!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 5 \times 4 = 20$$

E se além de um elemento repetido, tivéssemos **outro elemento repetido**? Por exemplo, {A, A, B, B, B, C, D}.

Vamos pensar em etapas: primeiro calculamos a permutação simples dos 7 elementos, como se fossem distintos: $P_7 = 7!$. Em seguida, consideramos que o elemento A está repetido 2 vezes e dividimos pela permutação de 2 elementos: $P_2 = 2!$. Por fim, consideramos que o elemento B está repetido 3 vezes e dividimos novamente pela permutação de 3 elementos: $P_3 = 3!$:

$$P_7^{2,3} = \frac{P_7}{P_2 \times P_3} = \frac{7!}{2! \times 3!}$$

$$P_7^{2,3} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \mathbf{3}!}{2 \times \mathbf{3}!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{2 \times \cancel{3!}} = 7 \times 3 \times 5 \times 4 = 420$$

Ou seja, na permutação com mais de um elemento repetido, **dividimos a permutação simples** pelas **permutações dos elementos repetidos**.

> De modo geral, sendo $n$ elementos **totais**, com $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos distintos **repetidos**, a permutação desses elementos é dada por:
>
> $$\boldsymbol{P_n^{m_1,m_2,\ldots,m_k}} = \frac{n!}{m_1! \times m_2! \times \ldots \times m_k!}$$

**(VUNESP/2019 – Prefeitura de Cerquilho/SP)** Com as letras, A, B e C, é possível fazer seis agrupamentos diferentes de três letras: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Se as três letras fossem A, A e B, só poderiam ser feitos três desses agrupamentos diferentes: AAB, ABA, BAA. Com as letras F, F, G e G, o número de agrupamentos diferentes de quatro letras é

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 16.

**Comentários:**

A quantidade de agrupamentos com as letras F, F, G e G corresponde à permutação de 4 elementos, com 2 repetições de F e 2 repetições de G:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

**Gabarito: A.**

**(FGV/2018 – ALE-RO)** Assinale a opção que indica o número de permutações das letras da palavra SUSSURRO

a) 1680

b) 1560

c) 1440

d) 1320

e) 1260

**Comentários:**

A palavra SUSSURRO contém 8 letras, sendo o S repetido 3 vezes, o U repetido 2 vezes e o R repetido 2 vezes. Assim, temos a permutação de 8 elementos com repetição de 2, 2 e 3 elementos:

$$P_8^{2,2,3} = \frac{8!}{2! \times 2! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 2 \times 3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

**Gabarito: A**

**(FCC/2015 – Professor da Secretaria de Educação/ES)** O número de anagramas que podem ser obtidos utilizando as letras da palavra VITÓRIA, e que terminam com uma consoante é igual a

a) 2520

b) 1080

c) 840

d) 5040

e) 1980

**Comentários:**

Na palavra VITÓRIA, há **7 letras**:

| ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

i) Para terminar com uma consoante, há 3 possibilidades para essa posição, todas distintas:

| | | | | | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

ii) As outras 6 letras podem permutar livremente pelas 6 posições restantes. Considerando que dessas 6, há 2 elementos repetidos (letra I), temos:

$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

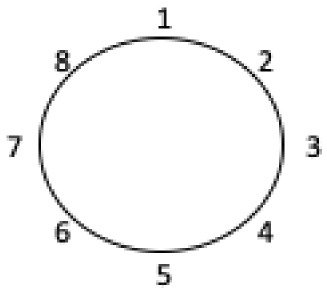
Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades, no total, é:

3 x 360 = 1080

**Gabarito: B.**

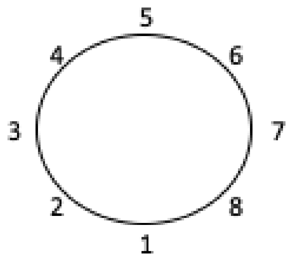
## 4.3 – Permutação Circular

Na permutação circular, considera-se que os elementos estão dispostos em um **círculo**.

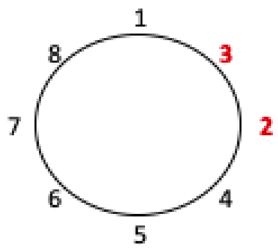



No círculo, considera-se que **não há posições fixas** (primeiro lugar, segundo, terceiro, ..., ou tampouco referências como acima, abaixo, à direita ou à esquerda).

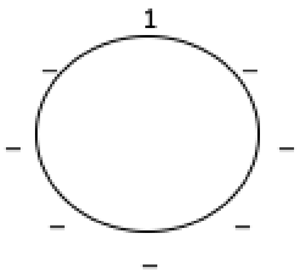
A figura abaixo representa **a mesma disposição** daquela indicada na figura acima, como se tivéssemos **girado** o círculo 180º, mantendo todos os elementos na **mesma posição**:




A disposição varia somente com a mudança da **posição de algum elemento em relação aos demais.** A figura abaixo representa uma disposição **diferente**, haja vista a **troca** dos elementos 2 e 3.




Para calcular a quantidade de disposições distintas, podemos **fixar** (qualquer) **um** dos elementos, por exemplo, o elemento 1, em qualquer posição:




Agora sim, as posições de **todos** os outros elementos irá **importar** porque elas serão **relativas** ao elemento 1 fixado. Portanto, calculamos a **permutação simples para os demais elementos** (7):

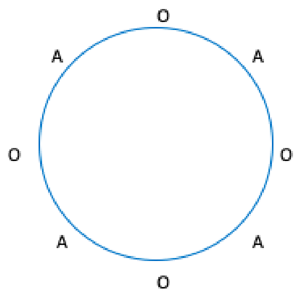
$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

Em geral, como **fixamos um** dos elementos, a permutação circular de $\boldsymbol{n}$ elementos, indicada por $\boldsymbol{PC_n}$, é:

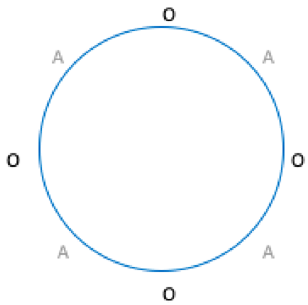
$$\boldsymbol{PC_n = (n-1)!}$$

### Permutação Circular com Restrições

É possível que uma permutação **circular** apresente **restrições**. Por exemplo, suponha que haja 4 meninos (O) e 4 meninas (A) para se sentarem à mesa, de forma que todo menino esteja entre duas meninas (e, portanto, toda menina esteja entre dois meninos), como indicado abaixo.




Nesse tipo de situação, resolvemos o problema em **2 etapas**: primeiro sentamos os meninos e, depois, as meninas (ou vice-versa). Para sentarmos os 4 meninos, há 4 posições possíveis:




Nessa **primeira** etapa, temos uma **permutação circular**, em que **fixamos** a posição de **um** deles e calculamos a **permutação dos demais**:

$$PC_n = (n-1)!$$

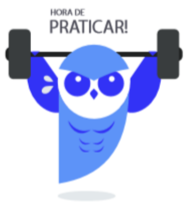
$$PC_4 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Na **segunda** etapa, vamos sentar as 4 meninas. Nesse caso, **todas as posições são diferentes**, pois já temos **meninos sentados**, de modo que a **posição de todas as meninas importa**. Assim, temos a **permutação simples** de 4 elementos:

$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Portanto, para cada uma das 6 possibilidades de se posicionar os meninos, há 24 possibilidades de posicionar as meninas. Pelo princípio multiplicativo, devemos multiplicar as possibilidades desses eventos:

$6 \times 24 = 144$




**(2019 – Prefeitura de Ibiaçá/RS)** O número máximo de maneiras distintas que um grupo de cinco amigos pode se sentar ao redor de uma mesa circular para realizar um lanche coletivo é:

a) 120

b) 50

c) 24

d) 12

e) 1

**Comentários:**

A permutação circular de n = 5 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_5 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

**Gabarito: C**

**(2016 – Prefeitura de Ouricuri/PE)** De quantas maneiras possíveis podemos dispor nove crianças em um círculo em que todas brincam de mãos dadas?

a) 9!

b) 8!

c) 7!

d) 6!

e) 5!

**Comentários:**

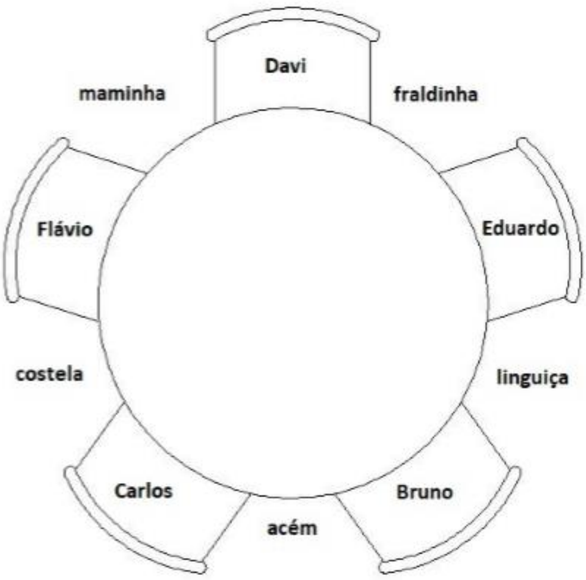
A permutação circular de n = 9 elementos é dada por:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_9 = 8!$$

**Gabarito: B**

**(2017 – Companhia de Desenvolvimento Habitacional/DF)**




Bruno, Carlos, Davi, Eduardo e Flávio são amigos e jantam em uma churrascaria. Na mesa circular em que se encontram, há 5 cadeiras idênticas, equidistantes duas a duas, e 5 espaços entre cada par de cadeiras para os garçons servirem carnes: acém; costela; fraldinha; linguiça; e maminha. A figura acima ilustra uma possível configuração da mesa, com os 5 amigos e as 5 carnes do rodízio. Sabe-se que as carnes preferidas de Bruno são costela e acém e Davi prefere fraldinha.

Com base nessa situação hipotética, julgue o item a seguir.

O número possível de configurações da mesa, contando que os 5 amigos estejam sentados e as 5 carnes estejam entre cada par de cadeiras, é maior que 3.000.

**Comentários:**

Para resolver essa questão, podemos sentar primeiramente os 5 amigos e, em seguida, colocar as 5 carnes (ou vice-versa). Para sentar os 5 amigos em uma mesa redonda, podemos sentar um amigo em qualquer posição e, em seguida, permutar os demais:

$$PC_n = (n-1)!$$

$$PC_5 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Ao colocarmos as 5 carnes, a posição de todas elas importam, pois elas estarão entre amigos distintos. Portanto, temos a permutação simples de 5 elementos:

$$P_n = n!$$

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Portanto, para cada 24 possibilidades de sentar os amigos, há 120 possibilidades de colocar as carnes. Pelo princípio multiplicativo, as possibilidades desses eventos devem ser multiplicadas:

$$24 \times 120 = 2.880$$

Como 2.880 é menor que 3.000, o item está errado.

**Gabarito: Errado**