LISTA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA (PROF. ANTENOR)

1. (Ueg 2019) Um ovo de brinquedo contém no seu interior duas figurinhas distintas, um bonequinho e um docinho. Sabe-se que na produção desse brinquedo, há disponível para escolha 20 figurinhas, 10 bonequinhos e 4 docinhos, todos distintos. O número de maneiras que se pode compor o interior desse ovo de brinquedo é
a) 15.200
b) 7.600
c) 3.800
d) 800
e) 400

2. (G1 - ifce 2019) Certo departamento de uma empresa tem como funcionários exatamente oito mulheres e seis homens. A empresa solicitou ao departamento que enviasse uma comissão formada por três mulheres e dois homens para participar de uma reunião. O departamento pode atender à solicitação de ______ maneiras diferentes.
a) 840.
b) 720.
c) 401.
d) 366.
e) 71.

3. (Espcex (Aman) 2019) Considere o conjunto de números naturais $\{1, 2, \ldots, 15\}$. Formando grupos de três números distintos desse conjunto, o número de grupos em que a soma dos termos é ímpar é
a) 168.
b) 196.
c) 224.
d) 227.
e) 231.

4. (Efomm 2019) De quantas maneiras diferentes podemos escolher seis pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, de um grupo composto de sete homens e quatro mulheres?
a) 210
b) 250
c) 371
d) 462
e) 756

5. (Unesp 2019) Bianca está preparando saquinhos com balas e pirulitos para os convidados da festa de aniversário de sua filha. Cada saquinho irá conter 5 balas e 3 pirulitos, ou 3 balas e 4 pirulitos, já que ambas as combinações resultam no mesmo preço. Para fazer os saquinhos, ela dispõe de 7 sabores diferentes de balas (limão, menta, morango, framboesa, caramelo, canela e tutti-frutti) e 5 sabores diferentes de pirulito (chocolate, morango, uva, cereja e framboesa). Cada bala custou 25 centavos e cada pirulito custou x centavos, independentemente dos sabores.

a) Quantos tipos diferentes de saquinhos Bianca pode fazer se ela não quer que haja balas de um mesmo sabor nem pirulitos de um mesmo sabor em cada saquinho? Qual o preço de cada pirulito?
b) Quantos tipos diferentes de saquinhos Bianca pode fazer se ela não quer que haja sabores repetidos em cada saquinho?

6. (Epcar (Afa) 2019) No ano de 2017, 22 alunos da EPCAR foram premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).
Desses alunos, 14 ganharam medalhas, sendo 3 alunos do 3º esquadrão, 9 do 2º esquadrão e 2 do 1º esquadrão. Os demais receberam menção honrosa, sendo 2 alunos do 3º esquadrão, 4 do 2º esquadrão e 2 do 1º esquadrão.

Para homenagear os alunos premiados, fez-se uma fotografia para ser publicada pela Nascentv em uma rede social.

Admitindo-se que, na fotografia, os alunos que receberam menção honrosa ficaram agachados, sempre numa única ordem, sem alteração de posição entre eles, à frente de uma fila na qual se posicionaram os alunos medalhistas, de modo que, nesta fila:

- as duas extremidades foram ocupadas somente por alunos do 2º esquadrão que receberam medalha;
- os alunos do 1º esquadrão, que receberam medalha, ficaram um ao lado do outro; e
- os alunos do 3º esquadrão, que receberam medalha, ficaram, também, um ao lado do outro.

Marque a alternativa que contém o número de fotografias distintas possíveis que poderiam ter sido feitas.
a) $(72) \cdot 9!$
b) $(144) \cdot 9!$
c) $(288) \cdot 9!$
d) $(864) \cdot 9!$

7. (Fepar 2019) Padronizar as placas de veículos dos países do Mercosul é notícia desde 2014; o padrão já foi introduzido por Argentina e Uruguai. Apenas agora o Brasil resolveu adotar as novas placas. Entre uma notícia e outra, ainda há pequenas divergências sobre o padrão de letras e números que será adotado nas placas aqui no País.

A revista *Quatro Rodas* informa que “antes com três letras e quatro números, a placa inverterá essa ordem e possuirá quatro letras e três números, dispostos agora de forma aleatória, com o último caractere sendo sempre numérico, para não interferir nos rodízios municipais. Contudo, a combinação continuará em alto relevo e será refletiva.”

Tanto no sistema de emplacamento atual quanto no sistema do Mercosul, são utilizadas as 26 letras de nosso alfabeto e os 10 algarismos do sistema de numeração decimal, considerando ainda repetição de letras e algarismos.

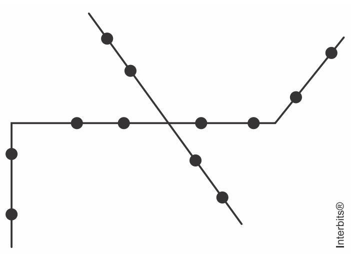
(Adaptado do disponível em: <quatrorodas.abril.com.br/noticias>. Acesso em: 20 maio 2018).

Baseando-se nessas informações e lembrando que o padrão de placas atual leva três letras e quatro números (nessa ordem), avalie as sentenças a seguir.

( ) Levando em conta a disposição de números e letras, existem $26^3.9999$ possibilidades de placas atualmente, considerando-se que placas com numeração 0000 não são utilizadas.
( ) A mudança no modelo de placa resultará em um aumento de 26 vezes na quantidade de placas possíveis.
( ) Com a nova mudança, as configurações de placas possíveis será mais do que o dobro e menos do que o triplo do modelo antigo.
( ) No novo modelo de placas a ser adotado no Brasil, existem $26^4 \cdot 10^3$ configurações possíveis.
( ) No sistema de placas do Mercosul, não levando em conta os rodízios municipais e utilizando-se somente as letras e os números da placa ABCD123, podem-se formar 5.040 placas, considerando todas as permutações simples possíveis.

8. (Uece 2019) Quantos são os números inteiros positivos com três dígitos distintos nos quais o algarismo 5 aparece?
a) 136.
b) 200.
c) 176.
d) 194.

9. (Fuvest 2018) Doze pontos são assinalados sobre quatro segmentos de reta de forma que três pontos sobre três segmentos distintos nunca são colineares, como na figura.



O número de triângulos distintos que podem ser desenhados com os vértices nos pontos assinalados é
a) 200.
b) 204.
c) 208.
d) 212.
e) 220.

10. (Upe-ssa 2 2018) A turma de espanhol de uma escola é composta por 20 estudantes. Serão formados grupos de três estudantes para uma apresentação cultural. De quantas maneiras se podem formar esses grupos, sabendo-se que dois dos estudantes não podem pertencer a um mesmo grupo?
a) 6.840
b) 6.732
c) 4.896
d) 1.836
e) 1.122

11. (Famerp 2018) Lucas possui 6 livros diferentes e Milton possui 8 revistas diferentes. Os dois pretendem fazer uma troca de 3 livros por 3 revistas. O total de possibilidades distintas para que essa troca possa ser feita é igual a
a) 1.040.
b) 684.
c) 980.
d) 1.120.
e) 364.

12. (G1 - ifal 2018) Certa lanchonete possui 5 funcionários para atender os clientes durante os dias da semana. Em cada dia, pode trabalhar, no mínimo, 1 funcionário até todos os funcionários. Dentro desse princípio, quantos grupos de trabalho diário podem ser formados?
a) 5.
b) 15.
c) 16.
d) 31.
e) 32.

13. (Pucsp 2018) A secretária de um médico precisa agendar quatro pacientes, A, B, C e D, para um mesmo dia. Os pacientes A e B não podem ser agendados no período da manhã e o paciente C não pode ser agendado no período da tarde.

Sabendo que para esse dia estão disponíveis 3 horários no período da manhã e 4 no período da tarde, o número de maneiras distintas de a secretária agendar esses pacientes é
a) 72.
b) 126.
c) 138.
d) 144.

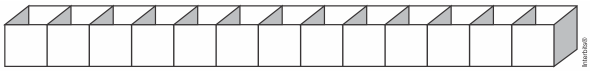
14. (Puccamp 2018) Admita que certa cidade brasileira tenha 8 *canais* de TV aberta, todos com transmissões diárias. Se uma pessoa pretende assistir

três dos oito canais em um mesmo dia, ela pode fazer isso de x maneiras diferentes sem levar em consideração a ordem em que assiste os canais, e pode fazer de y maneiras diferentes levando em consideração a ordem em que assiste os canais. Sendo assim, $y - x$ é igual a

a) 112.
b) 280.
c) 224.
d) 56.
e) 140.

15**.** (Ueg 2018) O número de anagramas que se pode formar com a palavra ARRANJO é igual a
a) 21
b) 42
c) 5.040
d) 2.520
e) 1.260

16**.** (Ufu 2018) Em um laboratório de análises clínicas, um recipiente, fixado em uma estante, em que são armazenados tubos idênticos coletores de sangue tem o formato indicado na Figura. Esse recipiente é composto por 13 compartimentos e apenas um tubo pode ser depositado em cada compartimento.



Baseando-se nessas informações, elabore e execute um plano de resolução de maneira a determinar
a) o número possível de formas para se depositar, ao acaso, 5 desses tubos coletores de sangue nesse recipiente.
b) qual é a probabilidade de que 5 desses tubos coletores de sangue depositados no recipiente não tenham compartimentos vazios entre eles.

Gabarito:

Resposta da questão 1:
[B]

Há $\binom{20}{2} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = 190$ modos de escolher 2 figurinhas, 10 maneiras de escolher um bonequinho e 4 modos de escolher um docinho. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $190 \cdot 10 \cdot 4 = 7600.$

Resposta da questão 2:
[A]

Calculando todas as possibilidades de escolha de três mulheres, temos: $C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

Calculando todas as possibilidades de escolha de dois, temos: $C_{6,2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$

Logo, departamento pode atender à solicitação de $56 \cdot 15 = 840$ maneiras diferentes.

Resposta da questão 3:
[C]

No conjunto há 7 números pares e 8 números ímpares.
Para que a soma de três destes números seja um número ímpar deveremos ter duas possibilidades, ou seja, três números ímpares ou dois números pares e um ímpar.

I) Total da grupos com 3 números ímpares.
$C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$
II) Total da grupos com dois números pares e 1 número ímpar. $C_{7,2} \cdot C_{8,1} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot \frac{8!}{1! \cdot 7!} = 21 \cdot 8 = 168$

Resposta: $56 + 168 = 224.$

Resposta da questão 4:
[C]

A escolha poderá ser feita das seguintes maneiras:
[I] 2 mulheres e 4 homens:
$C_{4,2} \cdot C_{7,4} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 6 \cdot 35 = 210$
[II] 3 mulheres e 3 homens:
$C_{4,3} \cdot C_{7,4} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 4 \cdot 35 = 140$

[III] 4 mulheres e 2 homens:
$$C_{4,4} \cdot C_{7,2} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 1 \cdot 21 = 21$$

Logo, o número de maneiras de se escolher 6 pessoas, com pelo menos duas mulheres, será dado por:
$210 + 140 + 21 = 371.$

Resposta da questão 5:
a) Bianca pode escolher 5 balas de $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$ modos e 3 pirulitos de $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ maneiras. Ademais, ela pode escolher 3 balas de $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$ modos e 4 pirulitos de $\binom{5}{4} = 5$ maneiras. Portanto, existem $21 \cdot 10 + 35 \cdot 5 = 385$ possibilidades de fazer um saquinho.
O preço de cada pirulito é tal que

$$5 \cdot 0{,}25 + 3x = 3 \cdot 0{,}25 + 4x \Leftrightarrow x = R\$\,0{,}50.$$

b) O número de possibilidades em que são escolhidos uma bala e um pirulito de morango é
$$\begin{aligned}\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2} + \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{3} &= \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} + \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 4 \\ &= 15 \cdot 6 + 15 \cdot 4 \\ &= 150.\end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo, o número de possibilidades em que são escolhidos uma bala e um pirulito de framboesa é igual a $150.$
O número de possibilidades de escolher ambos os sabores repetidos é
$$\begin{aligned}\binom{5}{3} \cdot \binom{3}{1} + \binom{5}{1} \cdot \binom{3}{2} &= 10 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \\ &= 45.\end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, segue que o número de modos de fazer um saquinho com pelo menos um sabor repetido é $150 + 150 - 45 = 255.$
Finalmente, como essas possibilidades estão inclusas no resultado encontrado no item (a), podemos concluir que a resposta é $385 - 255 = 130.$

Resposta da questão 6:
[D]

Do enunciado, tem-se que:
$$\underline{9}\,\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{9!}\,\underline{8}$$

Como os alunos medalhistas do primeiro esquadrão ficarão um ao lado do outro e o mesmo ocorre com os medalhistas do terceiro esquadrão, pelo princípio multiplicativo, segue que o número de fotografias distintas possíveis é:
$9 \cdot 8 \cdot 9! \cdot 3! \cdot 2! = (864) \cdot 9!$

Resposta da questão 7:
V – F – F – F – V.

Analisando as afirmativas uma a uma:
[I] VERDADEIRA. Atualmente usa-se 3 letras e 4 algarismos, excluindo-se a composição $0000.$ Assim, pode-se calcular:
$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 1) = 26^3 \cdot 9999$$
[II] FALSA. Calculando:
$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 - 1) = 26^4 \cdot 999$$
[III] FALSA. A placa 000 não será adotada, portanto existirão $26^4 \cdot 999$ configurações possíveis.
[IV] FALSA. Existirão mais combinações possíveis pois a ordem de letrar e números é aleatória.
[V] VERDADEIRA. Calculando:
$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

Resposta da questão 8:
[B]

Primeiramente vamos calcular quantos são os números inteiros positivos com três dígitos distintos.
Existem 9 possibilidades para o algarismo das centenas, pois o zero deve ser descartado; 9 escolhas para o algarismo das dezenas e 8 possibilidades para o algarismo das unidades. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números.
Agora, vamos determinar quantos são os números inteiros positivos com três dígitos distintos em que o algarismo 5 não figura.
Temos 8 escolhas para o algarismo das centenas, 8 possibilidades para o algarismo das dezenas e 7 escolhas para o algarismo das unidades. Em consequência, pelo Princípio Multiplicativo, existem $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ números em que o 5 não figura.
A resposta é $648 - 448 = 200.$

Resposta da questão 9:
[D]

Há $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$ maneiras de escolher três pontos quaisquer. Dentre essas possibilidades, devemos descontar aquelas em que não se pode formar um triângulo. Temos dois segmentos de reta que apresentam quatro pontos cada um, resultando, portanto, em $2 \cdot \binom{4}{3} = 2 \cdot 4 = 8$ possibilidades.
A resposta é $220 - 8 = 212.$

Resposta da questão 10:
[E]

Sejam A e B os estudantes que não podem pertencer a um mesmo grupo.

Vamos supor que queiramos calcular quantas são as possibilidades para formarmos exatamente um grupo.

Assim, temos $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140$ possibilidades, dentre as quais A e B estão presentes em 18.

A resposta é $1140 - 18 = 1122$.

Resposta da questão 11:
[D]

Calculando o total de possibilidades:

$$\text{Total} = C_{6,3} \cdot C_{8,3}$$

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$$

$$\text{Total} = 20 \cdot 56 = 1120$$

Resposta da questão 12:
[D]

Como existem cinco funcionários e no mínimo um trabalha, temos cinco combinações variando de um a cinco funcionários, logo:

$$C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = \frac{5!}{1!(5-1)!} + \frac{5!}{2!(5-2)!} + \frac{5!}{3!(5-3)!} + \frac{5!}{4!(5-4)!} + \frac{5!}{1!(5-5)!}$$

$$= 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

Resposta da questão 13:
[D]

Atendendo o paciente D no período da manhã:

$$A_{3,2} \times A_{4,2} = 6 \times 12 = 72$$

ou

Atendendo o paciente D no período da tarde:

$$A_{3,1} \times A_{4,3} = 3 \times 24 = 72$$

Logo, o número de maneiras distintas de a secretária agendar esses pacientes é:

$$72 + 72 = 144.$$

Resposta da questão 14:
[B]

Calculando:

$$\left.\begin{array}{l} C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56 \\ A_{8,3} = \frac{8!}{5!} = 336 \end{array}\right\rangle \Rightarrow 336 - 56 = 280$$

Resposta da questão 15:
[E]

O cálculo será obtido fazendo uma permutação de 7 elementos com repetição de dois deles.

$$P_7^{2,2} = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260.$$

Resposta da questão 16:
a) Calculando:

$$C_{13,5} = \frac{13!}{5! \cdot 8!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{13 \cdot 11 \cdot 9}{1} = 1287$$

b) Calculando:

$$P(X) \frac{P_9^8}{C_{13,5}} = \frac{9}{1287} = \frac{1}{143}$$