Matemática Discreta

<u>Módulo 4</u>

Análise Combinatória: Combinações com elementos repetidos
Permutações circulares.

1. <u>Combinações com elementos repetidos</u>

Na combinação com repetição os elementos podem aparecer repetidos em cada grupo até p vezes. A quantidade de combinações com elementos repetidos é dado pela expressão:

$\boxed{CR_n^p = C_{n+p-1}^p}$ ou $\boxed{CR_{n;p} = C_{n+p-1;p}}$

CR_n^p ou $CR_{n;p}$ → combinações com p elementos retidos de um conjunto de n elementos.

n → quantidade de elementos disponíveis para formação das combinações.
p → quantidade de elementos que pode ser utilizada em cada grupo.

Exemplo 1 - módulo 4 - matemática discreta.
Seja um conjunto C={A; B; C; D}. Faça as combinações com repetição (conjunto CR) desses 4 elementos tomados 2 a 2 e depois calcule a quantidade elementos que expressão de combinações com elementos repetidos.

Solução: A formação de combinação com repetições segue o mesmo princípio de combinação simples, ou seja, a ordem dos elementos não diferencia um grupo do outro, o grupo AB = BA. Escrevendo as combinações possíveis temos:
CR = {AA; AB; AC; AD; BB; BC; BD; CC; CD; DD}
Portanto a quantidade de combinações é 10.

Aplicando a expressão: $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$ temos:

$CR_4^2 = C_5^2 = \dfrac{5!}{(5-2)!.2!} = \dfrac{5.4.3!}{3!.2.1}$ = 10 combinações

Exemplo 2 - módulo 4 - matemática discreta
Um mercadinho tem 6 marcas diferentes de café no estoque. De quantas formas uma compra de 8 pacotes de café pode ser feita?

Solução: Podemos comprar os 8 pacotes da mesma ou 5 marcas diferentes e mais 3 das mesmas marca. A ordem das marcas não importa. Logo se trata de combinações com elementos repetidos onde n = 6 e p = 8. Note que em combinações com elementos repetidos o valor de p pode ser maior que n o não acontece em combinações simples.

Aplicando a expressão: $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$ temos:

$CR_6^8 = C_{13}^8 = \dfrac{13!}{(13-8)!.8!} = \dfrac{13.12.11.10.9.8!}{5.4.3.2.1.8!} = 1287$

Existem 1287 maneiras diferentes para efetuar a compra.

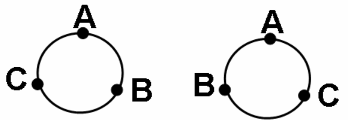
2. <u>Permutações circulares</u>

Existe um tipo de permutação denominada **circular,** em que os elementos são dispostos em círculos ou ao redor de uma mesa circular. A quantidade permutações circulares sendo levado em conta a sentido é dado por:

$\boxed{PC_n = (n-1)!}$ PC_n → permutações circulares de n elementos

Exemplo 3 - módulo 4 - matemática discreta.
Coloque três objetos **A**, **B**, e **C**, distintos em 3 lugares numa circunferência. Faça a figura mostrando todas as possibilidades. Calcule a quantidade de permutações possíveis pela expressão dada.

Solução: Fazendo as figuras das possibilidades levado em conta o sentido temos:



Existem portanto 2 possibilidades.

Aplicando a expressão $PC_n = (n - 1)!$ temos: $PC_3 = (3 - 1)! = 2$ possibilidades

Observação: Se não o sentido não levar em consideração, no caso do exemplo 2 teriamos apenas uma possibilidade. Quando o sentido não importa a quantidade de possibilidades deve ser dividida por 2. Nos exercícios quando não for mencionado devemos levar em consideração o sentido.

Exemplo 4 - módulo 4 - matemática discreta.
De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar-se em volta de uma mesa circular com exatamente 5 cadeiras? Se não considerarmos o sentido não levado em consideração de quantas serão as maneiras?

Solução: Usando a expressão de permutações circulares $PC_n = (n - 1)!$ Temos:
$PC_5 = 4! = 24$ maneiras.
Se o sentido não levado em consideração serão 12 maneiras.

3. Equação com várias variáveis e suas soluções

A equação do tipo $\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_p = n}$ sendo **n** um número inteiro positivo possui infinitas soluções no conjunto dos números reais. Mas no conjunto dos números naturais **N** = {0; 1; 2; 3 .....} o números de soluções é finito.
Inicialmente vamos analisar as soluções possíveis sem o zero ou em **N*** = {1; 2; 3; 4; ...}

Exemplo 5 - módulo 4 - matemática discreta.
Determine quantas soluções existem para x + y + z = 5 no conjunto dos números naturais sem o zero.
Solução: As soluções possíveis pertencem ao conjunto {1; 2; 3} de tal forma que a soma das 3 variáveis seja 5 então fazer a representação do número 5 por unidades. O número será representado por 5 barras (5 = **| | | | |**) agora vamos distribuir sinais de soma (+) entre as barra indicando simbolicamente soluções da equação.
5 = **|** + **|** + **| | |** → representa a solução x = 1; y = 1 e z = 3
5 = **|** + **| |** + **| |** → representa a solução x = 1; y = 2 e z = 2
Neste caso podemos fazer o seguinte raciocínio: a quantidade soluções é a quantidade de combinações simples entre os onde colocamos os sinais de adição. Se chamarmos espaços entre as barras de A, B, C e D temos:
5 = **|** A **|** B **|** C **|** D **|**
A solução 5 = **|** + **|** + **| | |** equivale a combinação AB
A solução 5 = **|** + **| |** + **| |** equivale a combinação AC
Então a quantidade de soluções é $C_{4,2} = 6$ soluções.
Podemos generalizar a equação $\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_p = n}$ sendo n inteiro positivo possui $C_{n-1,\,p-1}$ ou C_{n-1}^{p-1} soluções inteiras positivas.

Exemplo 6 - módulo 4 - matemática discreta.
Usando a conclusão do exemplo anterior determine a quantidade de soluções inteiras positivas ou nulas para a equação $\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_p = n}$ sendo **n** número inteiro positivo.

Solução: Incluindo Zero como solução e utilizando a conclusão do exercício anterior podemos apresentar a cada variável. Assim estaremos acrescenta p na equação e solução não consta o zero.
A equação $\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_p = n}$ (com soluções inteiras positivas ou nulas) tem a mesma quantidade de soluções de $\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_p = n + p}$ (com apensa soluções inteiras positivas)

Então a quantidade de soluções é C_{n+p-1}^{p-1}

Exercícios propostos

1) Quantos colares podemos formar usando sete contas, todas diferentes?

2) Um menino está em um parque de diversões e resolve comprar dois bilhetes. No parque há 4 tipos de brinquedos: chapéu mexicano, trem fantasma, montanha russa e roda gigante.
O menino pode comprar dois bilhetes do mesmo tipo, se ele quiser ir duas vezes no mesmo brinquedo. Nessas condições, qual é o número total de possibilidades de compra dos bilhetes?

3) Um menino encontra-se no balcão de uma sorveteria que oferece 7 opções diferentes de sabores. Ele tem dinheiro para comprar 4 sorvetes e ele também pode escolher sabores repetidos. Nessas condições, quantos diferentes pedidos ele pode fazer?

4) De quantas maneiras diferentes 8 pessoas podem sentar em círculo usando 8 cadeiras?

5) Quantas soluções inteiras positivas ou nulas possui a equação: x + y + x = 15.