NÚMEROS BINOMIAIS E O TRIÂNGULO DE PASCAL

Denomina-se binomial o número dado por: $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemplos:

- $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$
- $\binom{10}{3} = \dfrac{10!}{3!(10-3)!} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{3!\cdot 7!} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$

Chama-se triângulo de Pascal a sequência numérica ordenada mostrada a seguir.

	C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10 ...
L0	1										
L1	1	1									
L2	1	2	1								
L3	1	3	3	1							
L4	1	4	6	4	1						
L5	1	5	10	10	5	1					
L6	1	6	15	20	15	6	1				
L7	1	7	21	35	35	21	7	1			
L8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
L9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
L10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
⋮											

O triângulo de Pascal, também pode ser representado numericamente por binomiais da seguinte forma:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{8}$$
$$\binom{9}{0}\ \binom{9}{1}\ \binom{9}{2}\ \binom{9}{3}\ \binom{9}{4}\ \binom{9}{5}\ \binom{9}{6}\ \binom{9}{7}\ \binom{9}{8}\ \binom{9}{9}$$

RESULTADOS IMPORTANTES

Decorre da observação dos triângulos as seguintes igualdades:

1. $\binom{n}{0} = 1, \forall n$

2. $\binom{n}{1} = n, \forall n$

3. $\binom{n}{n} = 1, \forall n$

4. $\binom{n}{n-1} = n, \forall n$

IGUALDADE DE BINOMIAIS

Dois binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{k}$ são iguais quando $p = k$ ou quando $p + k = n$.

Exemplos:

• Se $\binom{7}{k} = \binom{7}{2}$, então podemos ter duas situações a considerar:

1. $k = 2$

2. $k + 2 = 7$, ou seja, $k = 5$. Nesse caso, dizemos que os binomiais são complementares.

• Se $\binom{10}{2k+1} = \binom{10}{3}$, então podemos ter duas situações:

1. $2k + 1 = 3$, ou seja, $k = 1$; ou

2. $2k + 1 + 3 = 10$, e daí, temos, $2k = 6$, ou seja, $k = 3$. Nessa situação, os binomiais dados são ditos complementares.

PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO DE PASCAL

P1. BINOMIAIS COMPLEMENTARES: Em qualquer linha, dois valores binomiais equidistantes dos extremos são iguais.

P2. TEOREMA DAS LINHAS: a soma dos elementos da enésima linha é dada por 2^n.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Exemplo: Na linha 5, temos, $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$.

P3. TEOREMA DAS COLUNAS: a soma dos elementos de qualquer coluna, desde o primeiro elemento até um elemento qualquer, é igual ao elemento situado na coluna à direita da considerada e na linha imediatamente abaixo.

$$\binom{n}{p} + \binom{n+1}{p} + \binom{n+2}{p} + \binom{n+3}{p} + \cdots + \binom{n+k}{p} = \binom{n+k+1}{p+1}$$

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

- 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28
- 1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 = 252

P4. TEOREMA DAS DIAGONAIS: a soma dos elementos situados na mesma diagonal desde o elemento da 1ª coluna até o de uma qualquer é igual ao elemento imediatamente abaixo deste.

$$\binom{n}{p} + \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+2}{p+2} + \binom{n+3}{p+3} + \cdots + \binom{n+k}{p+k} = \binom{n+k+1}{p+k}$$

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

- 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
- 1 + 5 + 15 + 35 = 56

P5. RELAÇÃO DE STIFEL: A soma de dois elementos consecutivos de uma mesma linha é igual ao elemento imediatamente abaixo do maior destes.

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$$

Exemplos:

- $\binom{6}{4}+\binom{6}{5}=\binom{7}{5}$
- $\binom{8}{2}+\binom{8}{3}=\binom{9}{3}$

EXERCÍCIOS

01. Calcule os binomiais.

A) $\binom{6}{2}$

B) $\binom{7}{4}$

C) $\binom{9}{2}$

D) $\binom{11}{9}$

02. Calcule o valor das expressões.

A) $\binom{7}{0}+\binom{8}{8}+\binom{9}{1}$

B) $\binom{7}{1}+\binom{9}{9}+\binom{10}{10}$

C) $\binom{6}{5}+\binom{9}{8}\cdot\binom{8}{7}$

D) $\binom{7}{0}+\binom{11}{10}\cdot\binom{10}{9}$

03. Determine o valor das expressões, aplicando a propriedade da soma dos elementos de uma mesma linha.

A) $\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\cdots+\binom{6}{6}=$

B) $\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\cdots+\binom{7}{7}=$

C) $\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\cdots+\binom{8}{8}=$

D) $\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\cdots+\binom{9}{8}=$

E) $\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\cdots+\binom{10}{9}=$

F) $\binom{12}{2}+\binom{12}{3}+\binom{12}{4}+\binom{12}{5}+\cdots+\binom{12}{11}=$

G) $\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{9}{5}+\cdots+\binom{9}{7}=$

H) $\binom{11}{2}+\binom{11}{3}+\binom{11}{4}+\binom{11}{5}+\cdots+\binom{11}{9}=$

04. Aplique a relação de Stifel e transforme cada soma em um único número binomial. Em seguida obtenha seu valor.

A) $\binom{8}{2}+\binom{8}{3}=\binom{9}{3}=84$

B) $\binom{9}{5}+\binom{9}{6}$

C) $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}$

D) $\binom{8}{4}+\binom{8}{3}$

E) $\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{9}{7}$

F) $\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\binom{11}{3}$

05. Considere a propriedade de igualdade de binomiais e determine o valor x em cada caso.

A) $\binom{7}{2}=\binom{7}{x}$

Solução: Há duas possibilidades:
1. Temos $x=2$, para que sejam iguais.
2. Temos $x+2=7$, para que sejam complementares. Daí $x=5$.
Logo, $x=2$ ou $x=5$.

B) $\binom{11}{2}=\binom{11}{x}$

C) $\binom{12}{x}=\binom{12}{7}$

D) $\binom{13}{5}=\binom{13}{x+3}$

E) $\binom{10}{2x+1}=\binom{10}{7}$

F) $\binom{x}{6}=\binom{x}{4}$

G) $\binom{x}{2}+\binom{x}{3}=\binom{8}{3}$

H) $\binom{x}{4}+\binom{x}{5}=\binom{7}{5}$

I) $\binom{10}{x}+\binom{10}{x+1}=\binom{11}{8}$

06. Considere a soma dos elementos de uma mesma coluna do triângulo de Pascal e determine o valor das somas abaixo.

A) $\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}+\binom{8}{3}=\binom{8+1}{3+1}=\binom{9}{4}=126$

B) $\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}+\binom{9}{5}+\binom{10}{5}=$

C) $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}=$

D) $\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{7}{4}+\binom{8}{4}+\binom{9}{4}=$

E) $\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{7}{4}+\binom{8}{4}+\binom{9}{4}+\binom{10}{4}=$

07. Considere a soma dos elementos de uma mesma diagonal do triângulo de Pascal e determine o valor das somas abaixo.

A) $\binom{3}{0}+\binom{4}{1}+\binom{5}{2}+\binom{6}{3}+\binom{7}{4}=\binom{8}{4}=70$

B) $\binom{5}{0}+\binom{6}{1}+\binom{7}{2}+\binom{8}{3}+\binom{9}{4}=$

C) $\binom{9}{2}+\binom{10}{3}+\binom{11}{4}+\binom{12}{5}=$

D) $\binom{4}{0}+\binom{5}{1}+\binom{6}{2}+\binom{7}{3}+\binom{8}{4}+\binom{9}{5}+\binom{10}{6}=$

E) $\binom{7}{1}+\binom{8}{2}+\binom{9}{3}+\binom{10}{4}=$

08. A soma das raízes da equação $\binom{18}{6}=\binom{18}{4x-1}$ é:

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

09. Seja n um número natural tal que $\binom{10}{4}+\binom{10}{n+1}=\binom{11}{4}$. Então n vale:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. Determine n na equação $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}=5n(n-2)$.

GABARITOS E RESPOSTAS

01.

A) 15 B) 35 C) 36 D) 55

02.

A) 11 B) 9 C) 78 D) 111

03.

A) 64
B) 128
C) 255
D) 511
E) 1022
F) 4082
G) 492
H) 2024

04.

A) 84
B) 210
C) 56
D) 126
E) 120
F) 495

05.

A) x = 2 ou x = 5
B) x = 2 ou x = 9
C) x = 7 ou x = 5
D) x = 2 ou x = 5
E) x = 3 ou x = 1
F) x = 10
G) x = 7
H) x = 6
I) x = 7 ou x = 2

06.

A) 126 B) 462 C) 35 D) 252 E) 462

07.

A) 70 B) 210 C) 1278 D) 462 E) 329

08. A **09.** B **10.** n = 11.