MATEMÁTICA DISCRETA II — TERCEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS

O Binómio de Newton é tão belo como a Vénus de Milo.
O que há é pouca gente para dar por isso.
óóóó—óóóóóó óóó—óóóóóóó óóóóóóóó
(*O vento lá fora.*)

Álvaro de Campos

Problemas de Contagem II. Binômio de Newton. Funções Geradoras.

1. Quantos inteiros entre 1000 e 10000 (inclusive) não são divisíveis nem por 2, nem por 3 e nem por 5?

2. Lançam-se 3 dados. Em quantos dos 6^3 resultados possíveis a soma dos pontos é 12?

3. Quantos são os inteiros de n dígitos que têm todos os dígitos pertencentes ao conjunto $\{1, 2, 3\}$? Em quantos deles figuram todos os inteiros 1, 2 e 3?

4. Quantas são as soluções inteiras e não-negativas da inequação $x + y + z \leq 5$? Quantas são as soluções inteiras da equação $x + y + z = 20$ nas quais nenhuma incógnita é inferior a 2?

5. 63127 candidatos compareceram a uma prova do vestibular (25 questões de múltipla escolha com 5 alternativas por questão). Considere a afirmação: "Pelo menos dois candidatos responderam de modo idêntico as k primeiras questões da prova." Qual é o maior valor de k para o qual podemos garantir que a afirmação acima é verdadeira? E se a afirmação anterior fosse "Pelo menos quatro candidatos responderam de modo idêntico as k primeiras questões da prova."?

6. Mostre que em todo $(n + 1)$-subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ há um par de elementos tais que um elemento divide o outro.

7. Calcule: a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k + 1)C_n^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k + 1}$.

8. Calcule: a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(2k + 1)$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k - 1)^2(k + 2)$.

9. Partindo de $(x + 1)^n(x + 1)^n = (x + 1)^{2n}$ e igualando coeficientes adequados, prove a fórmula de Lagrange $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$. Partindo de $(x + 1)^h(x + 1)^m = (x + 1)^{h+m}$, prove a fórmula de Euler $C_m^0 C_h^p + C_m^1 C_h^{p-1} + \cdots + C_m^p C_h^0 = C_{m+h}^p$.

10. Para quais valores de n o desenvolvimento de $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x^3}\right)^n$ possui um termo independente de x?

11. Encontre a função geradora ordinária (em forma fechada) da seqüência $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ para:
a) $a_n = 1$ se $n = 2k$ e $a_n = 0$ se $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.
b) $a_n = 0$ se $n = 2k$ e $a_n = 1$ se $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

c) $a_n = (-1)^n$.

12. Encontre o coeficiente de x^6 em $(1-x)^{-6}$. Encontre o coeficiente de x^{27} em $(x^3+x^4+x^5+\dots)^6$.

13. Encontre a função geradora ordinária associada ao problema de se determinar o número de soluções em inteiros não-negativos da equação $2x+3y+4z+5w=r$, $r \in \mathbb{N}$. Encontre o número de soluções em inteiros da equação $x+y+z+w=25$ onde cada variável é no mínimo 3 e no máximo 8.

Algumas respostas. **1.** 2400. **2.** 25. **3.** 3^n, $3^n - 3\cdot 2^n + 3$. **4.** 56, 120. **5.** 6. **7.** a) $(n+2)2^{n-1}$. b) $n(n+1)2^{n-2}$. c) $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$. **8.** a) $\dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$. b) $\dfrac{6n^4+20n^3-3n^2-5n}{6}$. **10.** n múltiplo de 5. **11.** a) $\dfrac{1}{1-x^2}$. b) $\dfrac{x}{1-x^2}$. c) $\dfrac{1}{1+x}$. **12.** 462, 2002.