Módulo: Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal

Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal.

2° **ano do E.M.**

Módulo: Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal
Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Para cada um dos números binomiais abaixo, encontre outro de mesmo valor e na mesma linha do Triângulo de Pascal. Por exemplo, $\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$.

a) $\binom{9}{2}$ b) $\binom{11}{4}$ c) $\binom{12}{7}$ d) $\binom{13}{0}$

Exercício 2. Calcule os números Binomiais abaixo:

a) $\binom{7}{5}$ b) $\binom{6}{2}$ c) $\binom{6}{3}$ d) $\binom{5}{2}$

Exercício 3. Determine o coeficiente de

(a) x^2 no desenvolvimento de $(x+2)^3$;

(b) x^3 no desenvolvimento de $(x+2)^4$;

(c) x^3 no desenvolvimento de $(x+3)^5$;

(d) x^2 no desenvolvimento de $(x+2)^5$.

Exercício 4. Em cada item abaixo, determine o valor de $\binom{n+1}{k+1}$:

(a) Se $\binom{n}{k} = 35$ e $\binom{n}{k+1} = 35$;

(b) Se $\binom{n}{k} = 15$ e $\binom{n}{k+1} = 6$;

(c) Se $\binom{n}{k} = 28$ e $\binom{n}{k+1} = 56$;

(d) Se $\binom{n}{k} = 126$ e $\binom{n}{k+1} = 126$.

Exercício 5. Determine o valor de $\dfrac{n+1}{k+1}$ se:

(a) $\binom{n}{k} = 462$ e $\binom{n+1}{k+1} = 924$;

(b) $\binom{n}{k} = 11$ e $\binom{n+1}{k+1} = 66$;

(c) $\binom{n}{k} = 5$ e $\binom{n+1}{k+1} = 15$.

Dica: Use que $\binom{n+1}{k+1} = \dfrac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$[1]

Exercício 6. Determine o coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(3x+2)^3$.

[1] Veja exercício 20

Exercício 7. Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(5x+2)^5$.

Exercício 8. Determine o número de termos no desenvolvimento de cada um dos binômios abaixo:
a) $(x+y)^3$ b) $(x+y)^5$ c) $(x+y)^7$ d) $(x+y)^{11}$

Exercício 9. No desenvolvimento de $(x+y)^{100}$, qual o vigésimo termo se o desenvolvimento for feito em potências de expoentes crescentes em x?

Exercício 10. Determine o coeficiente independente de y no desenvolvilmento dos seguintes binômios:

(a) $\left(y + \dfrac{1}{y}\right)^4$.

(b) $\left(y + \dfrac{2}{y}\right)^6$.

(c) $\left(y + \dfrac{4}{y}\right)^4$.

Exercício 11. Encontre a soma dos possíveis valores de p que satisfazem:

(a) $\binom{15}{p+3} = \binom{15}{2p}$

(b) $\binom{11}{p+2} = \binom{11}{2p}$

(c) $\binom{14}{p+6} = \binom{14}{3p}$

(d) $\binom{45}{p+15} = \binom{45}{4p}$

2 Exercícios de Fixação

Exercício 12. Qual o coeficiente de x^{n+1} no desenvolvimento de $(x+2)^n \cdot x^3$?

Exercício 13. Quantos termos racionais aparecem no desenvolvimento de $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^{50}$?

Exercício 14. Calcule aproximadamente $(1,002)^{20}$ usando o Teorema Binomial.

Exercício 15. Calcule aproximadamente $(1,001)^{10}$ usando o Teorema Binomial.

Exercício 16. Calcule o valor da soma:

$$S = \sum_{k=0}^{10} \frac{\binom{10}{k}}{2^k}.$$

Exercício 17. Determine o termo central do desenvolvimento de $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^8$.

Exercício 18. Determine o coeficente de x^n no desenvolvimento de $(1-x)^2(1+x)^n$.

Exercício 19. Para que valores de n o desenvolvimento de

$$\left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^n$$

possui um termo independente de x.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 20. Mostre que $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercício 21. Mostre que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exercício 22. O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ é igual a:

a) 110 b) 210 c) 310 d) 410 e) 510

Exercício 23. Desenvolvendo-se o binômio $P(x) = (1+x)^5$, podemos dizer que a soma de seus coeficientes é

a) 16 b) 24 c) 32 d) 40 e) 48

Exercício 24. A expressão $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3}-\sqrt{5})^5$ é igual a:

a) $2630\sqrt{5}$ b) $2690\sqrt{5}$ c) $2712\sqrt{5}$ d) $1584\sqrt{15}$ e) $1604\sqrt{15}$.

Exercício 25. A soma dos coeficientes de todos os termos do desenvolvimento de $(x-2y)^{10}$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 19 d) -1 e) -19.

Exercício 26. Sendo k um número real positivo, o terceiro termo do desenvolvimento de $(-2x+k)^{12}$, ordenado segundo expoentes decrescentes de x, é $66x^{10}$. Assim, é correto afirmar que k é igual a:

a) $1/66$ b) $1/64$ c) $1/58$ d) $1/33$ e) $1/32$.

Exercício 27. Se $\binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} = \frac{n^2-n}{2}$, determine o valor de n.

a) 4 b) 6 c) 9 d) 5 e) 8.

Exercício 28. O termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{3}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é

a) $729\sqrt[3]{45}$ b) $972\sqrt[3]{15}$ c) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ d) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ e) $165\sqrt[3]{75}$.

Exercício 29. Sabendo que x e y são números positivos $x - y = 1$ e $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 16$, podemos concluir que:

a) $x = 7/6$ b) $x = 6/5$ c) $x = 5/4$ d) $x = 4/3$ e) $x = 3/2$.

Exercício 30. A respeito das combinações $a_n = \binom{2n}{n}$ e $b_n = \binom{2n}{n-1}$, temos que, para cada $n = 1, 2, \ldots$, a diferença $a_n - b_n$ é igual a:

a) $\frac{n!}{n+1}a_n$ b) $\frac{2n}{n+1}a_n$ c) $\frac{n}{n+1}a_n$ d) $\frac{2}{n+1}a_n$ e) $\frac{1}{n+1}a_n$.

Exercício 31. Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x+y)^m$, temos que o número de arranjos sem repetição de m elementos, tomados 2 a 2, é:

a) 80 b) 90 c) 70 d) 100 e) 60.

Exercício 32. Em $[0, 2\pi]$, se α é a maior raiz da equação

$$\binom{4}{0}\cos^4 x - \binom{4}{1}\cos^3 x + \binom{4}{2}\cos^2 x - \binom{4}{3}\cos x + 1 = 0,$$

então sen $\frac{3\alpha}{4}$ vale:

a) -1 b) 1 c) 0 d) $1/2$ e) $-1/2$.

Exercício 33. Considere a equação, no conjunto dos número reais,

$$\binom{5}{0}(x-2)^5 + \binom{5}{1}(x-2)^4 + \binom{5}{2}(x-2)^3 + \binom{5}{3}(x-2)^2 + \binom{5}{4}(x-2)^1 + \binom{5}{5} = (7x-13)^5$$

então $(x-2)^6$ vale:

a) 2^6 b) 0 c) 5^6 d) 6^6 e) 4^6.

Exercício 34. No desenvolvimento de $[x^2 + (3/x)]^n$, $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes binomiais do quarto e do décimo-terceiro termos são iguais. Então o termo independente de x é o:

a) décimo b) décimo-primeiro c) nono d) décimo-segundo e) sexto.

Exercício 35. Para cada n, temos que

$$1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \ldots - \binom{4n}{4n-2} + 1$$

é igual a:

a) $(-1)^n \cdot 2^{2n}$ b) 2^{2n} c) $(-1)^n \cdot 2^n$ d) $(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n}$ e) $(-1)^{n+1} \cdot 2^n$.

Exercício 36. A soma de todos os coeficientes do desenvolvimento de $(14x - 13y)^{237}$ é:

a) 0 b) 1 c) -1 d) 331237 e) 1973747.

Exercício 37. O coeficiente de x^3 no polinômio $p(x) = (x-1)(x+3)^5$ é:

a) 30 b) 50 c) 100 d) 120 e) 180.

Exercício 38. Se o terceiro termo do desenvolvimento de $(a+b)^n$ é $21a^5b^2$, então o sexto termo é:

a) $35a^4b^3$ b) $21a^3b^4$ c) $21a^2b^5$ d) $7ab^6$ e) $7a^2b^5$.

Exercício 39. Sejam α e β números reais. Suponha que ao desenvolvermos $(\alpha x + \beta y)^5$, os coeficientes dos monômios x^4y e x^3y^2 sejam iguais a 240 e 720, respectivamente. Nestas condições, assinale a opção que contém o valor de $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

a) $1/2$ b) $3/2$ c) $1/3$ d) 3 e) $2/3$.

Exercício 40. Todas as n capitais de um país estão interligadas por estradas pavimentadas, de acordo com o seguinte critério: uma única estrada liga duas capitais.

Com a criação de duas novas capitais, foi necessária a construção de mais de 21 estradas pavimentadas para que todas as capitais continuassem ligadas com o mesmo critério.

Determine o número inicial de estradas

Exercício 41. Um cofre eletrônico possui um painel com dez teclas numéricas e pode ser aberto por meio da digitação, em qualquer ordem, de três teclas distintas dentre seis habilitadas previamente pelo fabricante. Considere n o número máximo de conjuntos de três teclas que abrem o cofre. Na figura em destaque, as teclas azuis representam as habilitadas previamente.

Se o fabricante reduzisse para cinco o número de teclas habilitadas, haveria entre elas um total de m conjuntos distintos de três teclas distintas para abrir o cofre. Calcule o valor de $n - m$.

Exercício 42. Desenvolvendo-se a expressão $[(x + 1/x)(x - 1/x)]^6$, obtém-se como termo independente de x o valor:

Exercício 43. Mostre que:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}.$$

Respostas e Soluções.

1. a) $\binom{9}{7}$ b) $\binom{11}{7}$ c) $\binom{12}{5}$ d) $\binom{13}{13}$

2.

(a) $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$

(b) $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

(c) $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$

(d) $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$

3.

(a) Pelo desenvolvimento de Newton, o coeficiente de x^2 é dado por $\binom{3}{2} \cdot 2^1 = 6.$

(b) Pelo desenvolvimento de Newton, o coeficiente de x^3 é dado por $\binom{4}{3} \cdot 2^1 = 8.$

(c) Pelo desenvolvimento de Newton, o coeficiente de x^3 é dado por $\binom{5}{3} \cdot 3^2 = 90.$

(d) Pelo desenvolvimento de Newton, o coeficiente de x^2 é dado por $\binom{5}{2} \cdot 2^3 = 80.$

4. Pela relação de Stifel, temos:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Portanto, basta somar os valores dados em cada item.

a) 70 b) 21 c) 84 d) 252

5. Usando a dica, segue que:

$$\frac{n+1}{k+1} = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k}}.$$

Temos então

a) $\frac{924}{462} = 2$ b) $\frac{66}{11} = 6$ c) $\frac{15}{5} = 3$

6. Pelo desenvolvimento de Newton, o coeficiente de x^2 é dado por $\binom{3}{2} \cdot 3^2 \cdot 2^1 = 54$

7. Pelo desenvolvimento de Newton, o coeficiente de x^3 é dado por $\binom{5}{3} \cdot 5^3 \cdot 2^2 = 5000.$

8. Como $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$, o desenvolvimento de tal binômio possui $n+1$ termos. Portanto, as respostas são:
a) 4 b) 6 c) 8 d) 12

9. Desenvolvendo em potências de expoente crescente, temos $(x+y)^{100} = \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} x^i y^{100-i}$. Portanto, o vigésimo termo é $\binom{100}{19} x^{19} y^{81}$.

10.

(a) No desenvolvimento do Binômio de Newton, o termo genérico será da forma $\binom{4}{k} y^k \cdot (\frac{1}{y})^{4-k}$. Assim o termo independente ocorre quando $k = 4-k$, ou seja, $k = \frac{4}{2}$. Portanto o coeficiente procurado é $\binom{4}{2} \cdot 1^2 = 6.$

(b) No desenvolvimento do Binômio de Newton, o termo genérico será da forma $\binom{6}{k} y^k \cdot (\frac{2}{y})^{6-k}$. Assim o termo independente ocorre quando $k = 6-k$, ou seja, $k = \frac{6}{2}$. Portanto o coeficiente procurado é $\binom{6}{3} \cdot 2^3 = 160.$

(c) No desenvolvimento do Binômio de Newton, o termo genérico será da forma $\binom{4}{k} y^k \cdot (\frac{4}{y})^{4-k}$. Assim o termo independente ocorre quando $k = 4-k$, ou seja, $k = \frac{4}{2}$. Portanto o coeficiente procurado é $\binom{4}{2} \cdot 4^2 = 96.$

11. Para que $\binom{n}{k} = \binom{n}{l}$ temos $k = l$ ou $k = n - l$, isso nos gera tipicamente dois casos em cada equação:

(a) No primeiro caso, $p + 3 = 2p$, ou seja, $p = 3$. No segundo caso, $p + 3 = 15 - 2p$, ou seja, $p = 4$. Portanto a soma procurada é 7;

(b) No primeiro caso, $p + 2 = 2p$, ou seja, $p = 2$. No segundo caso, $p + 2 = 11 - 2p$, ou seja, $p = 3$. Portanto a soma procurada é 5;

(c) No primeiro caso, $p+6=3p$, ou seja, $p=3$. No segundo caso, $p+6=14-3p$, ou seja, $p=2$. Portanto a soma procurada é 5;

(d) No primeiro caso, $p+15=4p$, ou seja, $p=5$. No segundo caso $p+15=45-4p$, ou seja, $p=6$. Portanto a soma procurada é 11;

12. Em virtude da multiplicação por x^3, todos os termos do desenvolvimento de $(x+2)^n \cdot x^3$ terão expoente pelo menos 3 na variável x. Portanto, se $n<2$, o coeficiente de x^{n+1} será zero. Se $n \geq 2$, o coeficiente de x^{n+1} no produto dado é igual ao coeficiente de $x^{n+1-3}=x^{n-2}$ em $(x+2)^n$, ou seja, $\binom{n}{n-2} \cdot 2^2$.

13. No desenvolvimento do Binômio de Newton, o termo genérico terá a forma $\binom{50}{i}(\sqrt{2})^i\sqrt{5}^{50-i}$. Quando i é par, tanto $(\sqrt{2})^i$ quanto $(\sqrt{5})^{50-i}$ são racionais. Quando i é ímpar,

$$\binom{50}{i}(\sqrt{2})^i(\sqrt{5})^{50-i}=\sqrt{10}\cdot\binom{50}{i}(\sqrt{2})^{i-1}(\sqrt{5})^{49-i},$$

sendo $\binom{50}{i}(\sqrt{2})^{i-1}(\sqrt{5})^{49-i}$ racional. Como $\sqrt{10}$ é irracional, o produto anterior também é um número irracional. Portanto, os termos do desenvolvimento são racionais apenas quando i é par e, consequentemente, existem 26 termos racionais no desenvolvimento binomial.

14. Se $a=1$ e $h=0,002$, temos

$$\begin{aligned}
(1,002)^{20} &= (a+h)^{20}\\
&= a^{20}+\binom{20}{1}a^{19}h+\binom{20}{2}a^{18}h^2+\dots\\
&\simeq a^{20}+\binom{20}{1}a^{19}h.\\
&= 1,040
\end{aligned}$$

Fizemos a aproximação anterior usando que as potências h^i, com $i>1$, estão muito próximas de zero bem como os termos genéricos $\binom{20}{i}a^{20-i}h^i$ associados a elas. Usando uma calculadora, note que $(1,002)^{20} \simeq 1,04077$.

15. Repetindo a estratégia do exercício anterior, se $a=1$ e $h=0,001$, temos

$$\begin{aligned}
(1,001)^{10} &= (a+h)^{10}\\
&= a^{10}+\binom{10}{1}a^{9}h+\binom{10}{2}a^{8}h^2+\dots\\
&\simeq a^{10}+\binom{10}{1}a^{9}h.\\
&= 1,01
\end{aligned}$$

Fizemos a aproximação anterior usando que as potências h^i, com $i>1$, estão muito próximas de zero bem como os termos genéricos $\binom{10}{i}a^{10-i}h^i$ associados a elas. Usando uma calculadora, note que $(1,001)^{10} \simeq 1,01005$.

16. Pelo desenvolvimento binomial de Newton:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{10}\frac{\binom{10}{k}}{2^k}\\
&= (\frac{1}{2}+1)^{10}\\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{10}
\end{aligned}$$

17. O termo genérico do desenvolvimento binomial é dado por $\binom{8}{k}(-1)^k(x^2)^k\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{8-k}=\binom{8}{k}(-1)^kx^{3k-8}$. O termo central pode ser obtido fazendo $k=8/2=4$ e é dado por $\binom{8}{4}x^4=70x^4$.

18. Temos

$$\begin{aligned}
(1-x)^2(1+x)^n &= (1-2x+x^2)(1+x)^n\\
&= (1+x)^n-2x(1+x)^n+x^2(1+x)^n.
\end{aligned}$$

Basta então determinarmos o coeficente de x^n em cada um dos termos anteriores. No primeiro, seu coefieciente é $\binom{n}{n}$. No segundo, é $-2\binom{n}{n-1}$ e no terceiro é $\binom{n}{n-2}$. Portanto, o coeficiente de x^n no produto é

$$\begin{aligned}
\binom{n}{n}-2\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2} &= 1-2+\frac{n(n-1)}{2}\\
&= \frac{n(n-1)}{2}-1.
\end{aligned}$$

19. O termo genérico do desenvolvimento binomial é dado por $\binom{n}{k}(-1)^k(2x^2)^k\cdot\left(\frac{1}{x^3}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}(-1)^k2^kx^{5k-3n}$. Para que existe um termo independente de x, devemos ter n da forma $\frac{5k}{3}$ para algum k inteiro não negativo.

20.

Primeira Solução

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\\
&= \frac{n+1}{k+1}\cdot\binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Segunda Solução

Considere um grupo de $n+1$ crianças e o seguinte problema: De quantas formas podemos escolher $k+1$ delas para participarem de uma viagem sabendo que uma das escolhidas também receberá um prêmio especial extra? Podemos resolver esse problema de duas formas. A primeira delas é escolher inicialmente as $k+1$ crianças, isso pode ser feito de $\binom{n+1}{k+1}$ formas, e posteriormente, escolher dentre as selecionadas aquela que receberá o prêmio, isso pode ser feito de $k+1$ formas. Pelo princípio multiplicativo, temos $(k+1)\cdot\binom{n+1}{k+1}$ escolhas possíveis. A segunda forma seria inicialmente escolher a criança que ganhará o prêmio e que inevitavelmente estará na viagem, isso pode ser feito de $n+1$ formas, e em seguida, escolhermos as outras k crianças, dentre as n que sobraram, de $\binom{n}{k}$ formas. Novamente, pelo princípio multiplicativo, o total de escolhas possíveis é $(n+1)\cdot\binom{n}{k}$. Portanto, como as duas contagens devem produzir números iguais, temos

$$(k+1)\cdot\binom{n+1}{k+1}=(n+1)\cdot\binom{n}{k}.$$

Basta agora dividir equação por $k+1$ para concluirmos o desejado.

21. Aplicando o exercício anterior, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}\\ &= \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2}\\ &= \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\binom{n-3}{k-3}\\ &\dots\\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\binom{n-k}{0}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}.\end{aligned}$$

22. (Extraído da Aman 2015) O termo genérico do desenvolvimento binomial é da forma

$$\binom{10}{i}\frac{(-1)^{10-i}(x^3)^i}{(x^2)^{10-i}}=\binom{10}{i}(-1)^{10-i}x^{5i-20}.$$

Para o termo independente de x, devemos ter $5i-20=0$, ou seja, $i=4$. Portanto, o coeficiente procurado é $\binom{10}{4}(-1)^6=210$. Resposta letra B.

23. (Extraído da FGV 2013) O termo genérico do desenvolvimento binomial é da forma $\binom{5}{i}1^ix^{5-i}$. Ao substituirmos x por 1, obteremos apenas o coeficiente e, consequentemente, a soma de todos eles é dada por $(1+1)^5=32$. Resposta letra C.

24. (ITA 2010) Se $2\sqrt{3}=a$ e $\sqrt{5}=b$, temos

$$\begin{aligned}(a+b)^5-(a-b)^5 &= \sum\binom{5}{i}a^ib^{5-i}-\binom{5}{i}(-1)^{5-i}a^ib^{5-i}\\ &= \sum\binom{5}{i}(1-(-1)^{5-i})a^ib^{5-i}\\ &= 2\binom{5}{0}b^5+2\binom{5}{2}a^2b^3+2\binom{5}{4}a^4b\\ &= 2690\sqrt{5}\end{aligned}$$

25. (FGV 2008) O termo genérico do desenvolvimento binomial é da forma $\binom{10}{i}x^i(-2y)^{10-i}$. Ao substituirmos x e y por 1, obteremos apenas o coeficiente de cada termo e, consequentemente, a soma de todos eles é dada por $(1-2)^{10}=1$. Resposta letra B.

26. (FGV 2007) O desenvolvimento pelo Binômio de Newton ordenado segundo expoentes decrescentes de x é:

$$\begin{aligned}(-2x+k)^{12} &=\\ (-2x)^{12}+\binom{12}{1}(-2x)^{11}k+\binom{12}{2}(-2x)^{10}k^2+\dots\end{aligned}$$

Igualando o terceiro termo fornecido no enunciado ao encontrado na expressão anterior, temos $\binom{12}{2}(-2)^{10}k^2=66$, ou seja, $k^2=1/1024$. Como k é positivo, devemos ter $k=1/32$ e a resposta é a letra E.

27. (FGV 2005) Pela relação de Stifel,

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{5}+\binom{n-1}{6} &= \frac{n^2-n}{2}\Leftrightarrow\\ \binom{n}{6} &= \binom{n}{2}\end{aligned}$$

Para ocorrer tal igualdade entre elementos de uma mesma linha do Triângulo de Pascal, devemos ter $n-2=6$, ou seja, $n=8$. Resposta letra E.

28. (ITA 2004) O termo genérico do desenvolvimento binomial é dado por

$$\binom{12}{i}\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{3}}{5x}}\right)^i\left(-\sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12-i}=$$

$$\binom{12}{i}(-1)^{12-i}x^{(4-i)/2}\left(\frac{5}{3}\right)^{(24-5i)/6}$$

Para o termo independente de x, devemos ter $4 - i = 0$, ou seja, $i = 4$. Portanto, o coeficiente procurado é:

$$\binom{12}{4}(-1)^8\left(\frac{5}{3}\right)^{2/3} = 165\sqrt[3]{75}.$$

Resposta letra E.

29. (FGV 2003) Temos

$$\begin{aligned} 16 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ &= (x+y)^4 \end{aligned}$$

Como x e y são reais positivos, segue que $x + y = 2$. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

encontramos como soluções $x = 3/2$ e $y = 1/2$. Resposta letra E.

30. (ITA 2001)

Primeira Solução.

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{1}{n+1}a_n. \end{aligned}$$

Segunda Solução.

Pelo exercício 20, temos

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \\ &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \\ &= \frac{2n}{n}\binom{2n-1}{n-1} - \frac{2n}{n+1}\binom{2n-1}{n} \\ &= 2\binom{2n-1}{n-1} - \frac{2n}{n+1}\binom{2n-1}{n-1} \\ &= \frac{2}{n+1}\binom{2n-1}{n-1} \\ &= \frac{2n}{(n+1)n}\binom{2n-1}{n-1} \\ &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{n+1}a_n. \end{aligned}$$

31. (ITA 2001) Para encontrarmos a soma dos coeficientes da expansão binomial de $(x+y)^m$, basta fazermos $x = y = 1$, obtendo $(1+1)^m = 2^m$. Sabendo que tal valor é 1024, podemos concluir que $m = 10$. Portanto o número de arranjos sem repetição de 10 elementos tomados dois a dois é $10 \cdot 9 = 90$. Resposta letra B.

32. (Mackenzie 1999) Pelo desenvolvimento do Binômio de Newton, a expressão dada é equivalente a $(\cos x - 1)^4 = 0$, ou seja, $\cos x = 1$. No intervalo $[0, 2\pi]$, a maior solução é $\alpha = 2\pi$. Portanto, $\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{4} = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$. Resposta letra A.

33. Pelo desenvolvimento do Binômio de Newton, o membro do lado esquerdo é equivalente a $(x-2+1)^5 = (x-1)^5$. Portanto, $x - 1 = 7x - 13$, ou seja, $x = 2$ e $(x-2)^6 = 0$. Resposta letra B.

34. (Mackenzie 1999) A igualdade dada entre os coeficientes binomiais mencionados no enunciado nos permite concluir que $\binom{n}{3} = \binom{n}{12}$. Portanto, $3 + 12 = n$. O termo genérico do desenvolvimento binomial possui a então a forma $\binom{15}{i}(x^2)^i\left(\frac{3}{x}\right)^{15-i} = \binom{15}{i}3^{15-i}x^{3i-15}$. O termo independente de x ocorre quando $3i - 15 = 0$, ou seja, $i = 5$ e o termo independente de x é o sexto. Resposta letra E.

35. (ITA 1995) Se $i^2 = -1$, temos

$$\begin{aligned} (i+1)^{4n} &= \sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}i^k \\ ((i+1)^2)^{2n} &= \sum_{j=0}^{2n}\binom{4n}{2j}i^{2j} + \sum_{j=0}^{2n-1}\binom{4n}{2j+1}i^{2j+1} \\ (2i)^{2n} &= \sum_{j=0}^{2n}\binom{4n}{2j}(-1)^j + i\left(\sum_{j=0}^{2n-1}\binom{4n}{2j+1}(-1)^j\right). \end{aligned}$$

Como $(2i)^{2n} = (-1)^n 2^{2n}$ é número real, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2n}\binom{4n}{2j}(-1)^j &= (-1)^n 2^{2n} \\ \sum_{j=0}^{2n-1}\binom{4n}{2j+1}(-1)^j &= 0. \end{aligned}$$

A resposta é a letra A.

36. (FEI 1994) Basta fazer $x = y = 1$, obtendo $(14-13)^{237} = 1$. Resposta letra B.

37. (UFCE) Os termos de grau 2 e 3 no desenvolvimento binomial $(x+3)^5$ são $\binom{5}{2}3^3x^2$ e $\binom{5}{3}3^2x^3$. Pela propriedade de distributividade, o termo de grau 3 no produto dado é $\cdot \binom{5}{2}3^3x^2 - 1 \cdot \binom{5}{2}3^2x^3 = 180x^3$. Portanto, o coeficiente procurado é 180.

38. (PUC-RS) O terceiro termo, seguindo potências crescentes de b, é da forma $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$. Comparando com o coeficiente dado, temos $n-2=5$, ou seja $n=7$. O sexto termo é dado por $\binom{n}{5}a^{n-5}b^5 = \binom{7}{5}a^2b^5 = 21a^2b^5$. Resposta letra C.

39. (UFCE) Pelo desenvolvimento do Binômio de Newton, temos

$$\begin{aligned}\binom{5}{4}(x\alpha)^4(y\beta)^1 &= 240x^4y\\ \binom{5}{3}(x\alpha)^3(y\beta)^2 &= 720x^3y^2 \quad .\end{aligned}$$

Dividindo os coeficientes da primeira equação pelos da segunda, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\binom{5}{4}}{\binom{5}{3}}\cdot\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{240}{720}\\ \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{2400}{3600}\\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Resposta letra E.

40. (UERJ 2012 Adaptado) Cada uma das novas cidades deverá ser ligada a cada uma das n cidades e assim de cada uma delas partirão n novas estradas. Além disso, precisamos unir essas duas novas por uma estrada. Portanto, $2n+1=21$, ou seja, $n=10$. O total de estradas no início era $\binom{n}{2} = \binom{10}{2} = 45$.

41. (UERJ 2010) Temos $n = \binom{6}{3}$ e $m = \binom{5}{3}$. Portanto, $n - m = \binom{6}{3} - \binom{5}{3} = 20 - 10 = 10$.

42. (FGV-SP) Temos

$$\begin{aligned}[(x+1/x)(x-1/x)]^6 &= (x^2 - \frac{1}{x^2})^6\\ &= \sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}(x^2)^i\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-i}\\ &= \sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}(x^2)^{4i-12}.\end{aligned}$$

O termo independente de x ocorre quando $4i-12=0$, ou seja, $i=3$. Portanto, o coeficiente procurado é $\binom{6}{3} = 20$.

43. Iremos provar a igualdade usando uma contagem dupla. Considere o problema de contarmos o número de maneiras de escolhermos m bolas, dentre um grupo de n bolas iguais, para serem pintadas de preto e, em seguida, escolhermos r dessas m bolas que serão pintadas de preto para receberem também uma listra da cor azul.

O número de maneiras de escolhermos as bolas que serão pintadas de preto é $\binom{n}{m}$. Em seguida, o número de maneiras de escolhermos m dessas bolas que serão pintadas de preto para receberem a listra azul é $\binom{m}{r}$. Pelo princípio multiplicativo, o total de escolhas é $\binom{n}{m}\binom{m}{r}$.

Outra maneira de resolver o problema é inicialmente escolhermos logo as r bolas que serão pintadas de preto e que vão receber a listra azul, isso pode ser feito de $\binom{n}{r}$ maneiras. Em seguida, das $n-r$ bolas restantes, basta escolhermos as $m-r$ bolas que serão pintadas apenas de preto. Isso pode ser feito de $\binom{n-r}{m-r}$. Pelo princípio multiplicativo, o total de escolhas é $\binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$.

Como as duas contagens devem produzir números iguais, obtemos assim o resultado do enunciado.

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com