BINÔMIO DE NEWTON

Denomina-se Binômio de Newton, a todo binômio da forma $(a + b)^n$, sendo n um número natural

Exemplo: $B = (3x - 2y)^4$ (onde $a = 3x$, $b = -2y$ e $n = 4$ [grau do binômio]).

Desenvolvimento de binômios de Newton

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3ab^2 + b^3$

c) $(a + b)^4 = a^4 + 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

d) $(a + b)^5 = a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Exemplo 1: Item d) $(a + b)^5 = a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$,acima:

- O expoente do primeiro e último termos são iguais ao expoente do binômio (a^5 e b^5)
- A partir do segundo termo, os coeficientes podem ser obtidos utilizando-se a seguinte regra prática:
- 1) Multiplicamos o coeficiente de a pelo seu expoente e dividimos o resultado pela ordem do termo. O resultado será o coeficiente do próximo termo.
- Assim, para obter o coeficiente do terceiro termo do item (d) acima teríamos: 5 . 4 = 20; agora dividimos 20 pela ordem do termo anterior (2 por se tratar do segundo termo) 20 : 2 = 10 que é o coeficiente do terceiro termo procurado.
- 2) Os expoentes da variável a decrescem de n até 0 e os expoentes de b crescem de 0 até n.
- Assim, o terceiro termo é $10\,a^3b^2$ (observe que o expoente de a decresceu de 4 para 3 e o de b cresceu de 1 para 2).

Exemplo 2: Usando a regra prática, o desenvolvimento do binômio de Newton $(a + b)^7$ será:

$(a + b)^7 = a^7 + 7\,a^6b + 21\,a^5b^2 + 35\,a^4b^3 + 35\,a^3b^4 + 21\,a^2b^5 + 7\,ab^6 + b^7$

Como obtivemos, por exemplo, o coeficiente do 6º termo ($21a^2b^5$)**?**

Pela regra: coeficiente do termo anterior = 35. Multiplicamos 35 pelo expoente de a que é igual a 3 e dividimos o resultado pela ordem do termo que é 5.

Então, 35 . 3 = 105 e dividindo por 5 (ordem do termo anterior) vem 105 : 5 = 21, que é o coeficiente do sexto termo, conforme se vê acima.

Observações:

1) o desenvolvimento do binômio $(a + b)^n$ é um polinômio.

2) o desenvolvimento de $(a + b)^n$ possui n + 1 termos .

3) os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos, no desenvolvimento de $(a + b)^n$ são iguais .

4) a soma dos coeficientes de $(a + b)^n$ é igual a 2^n.

Fórmula do termo geral de um Binômio de Newton

Um termo genérico T_{p+1} do desenvolvimento de $(a+b)^n$, sendo p um número natural, é dado por

$T_{p+1} = \binom{n}{p}.a^{n-p}.b^p$, onde $\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ é denominado Número Binomial e $\mathbf{C_{n,p}}$ é o número de combinações simples de **n** elementos, agrupados **p** a **p**, ou seja, o número de combinações simples de **n** elementos de taxa **p**. Este número é também conhecido como Número Combinatório.

Exercícios Resolvidos:

1) Determine o 7º termo do binômio $(2x + 1)^9$, desenvolvido segundo as potências decrescentes de x.

Solução:

Dados: a = 2x , b = 1 e n = 9.

Como queremos o 7º termo, fazemos: $p + 1 = 7 \rightarrow p = 7 - 1 \rightarrow p = 6$

Substituímos os dados na fórmula do termo geral $T_{p+1} = \binom{n}{p}.a^{n-p}.b^p$ e efetuamos os cálculos indicados,. Temos:

$$T_7 = C_{9,6} \cdot (2x)^{9-6} \cdot (1)^6 = \frac{9!}{(9!-6!)\cdot 6!} \cdot (2x)^3 \cdot 1 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 6!} \cdot 8x^3 = 84 \cdot 8x^3 = 672x^3$$

Portanto o sétimo termo procurado é $672x^3$.

2) Qual o termo médio do desenvolvimento de $(2x + 3y)^8$?

Solução:

Dados: a = 2x , b = 3y e n = 8.

O desenvolvimento do binômio terá 9 termos $\rightarrow$.$n + 1 = 9 \rightarrow n = 9 - 1 \rightarrow n = 8$

Sendo T1, T2, T3, T4, **T5**, T6, T7, T8, T9 os termos do desenvolvimento do binômio, o termo do meio (termo médio) será o **T5** (quinto termo). Logo, o nosso problema resume-se ao cálculo do T_5.

Como queremos o 5º termo, fazemos: $p + 1 = 5 \rightarrow p = 5 - 1 \rightarrow p = 4$

Substituímos os dados na fórmula do termo geral $T_{p+1} = \binom{n}{p} . a^{n-p} . b^{p}$ e efetuamos os cálculos indicados,. Temos:

$$T_5 = C_{8,\,4} \cdot (2x)^{8-4} \cdot (3y)^4 = \frac{8!}{(8!-4!)\cdot 4!} \cdot (2x)^4 \cdot 3y^4 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!} \cdot 16x^4 \cdot 81y^4 =$$

$$= 70 \cdot 16 \cdot 81 \cdot x^4 \cdot y^4 = 90720x^4\,y^4$$

O termo médio (**T5**) procurado é $90720x^4y^4$.

3) Desenvolvendo o binômio $(2x - 3y)^{3n}$, obtemos um polinômio de 16 termos. Qual o valor de n?

Solução:

Se o desenvolvimento do binômio possui 16 termos, então o expoente do binômio é igual a 15:

Logo, $3n = 15 \rightarrow n = 15/3 \rightarrow$ $\boxed{n = 5.}$

4) Qual a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de :

a) $(2x - 3y)^{12}$?

b) $(x - y)^{50}$?

Solução:

a) basta fazer x = 1 e y = 1. Logo, a soma S procurada será: $S = (2.1 - 3.1)^{12} = (-1)^{12} = 1 \rightarrow$ $\boxed{S = 1}$

b) analogamente, fazendo x = 1 e y = 1, vem: $S = (1 - 1)^{50} = 0^{50} = 0 \rightarrow$ $\boxed{S = 0}$

5) Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $(x + 1/x)^6$.

Solução:

O termo independente de x é aquele que não possui x.

Dados: a = x, b = 1/x e n = 6.

Substituímos os dados na fórmula do termo geral $T_{p+1} = \binom{n}{p} . a^{n-p} . b^{p}$ e efetuamos os cálculos indicados,. Temos:

$$T_{p+1} = C_{6,\,p} \cdot (x)^{6-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p = C_{6,\,p} \cdot (x)^{6-p} \cdot x^{-p} = C_{6,\,p} \cdot (x)^{6-p+(-p)} = C_{6,\,p} \cdot (x)^{6-2p}$$

Para que o termo seja independente de x, o expoente desta variável deve ser zero, pois $x^0 = 1$. Logo, fazendo:

$6 - 2p = 0 \rightarrow 2p = 6 \rightarrow p = 6/3 \rightarrow p=3$.

Substituindo então **p** por **3**, teremos o termo procurado. Temos então:

$$T_{3+1} = C_{6,3} \cdot (x)^{6-2\cdot 3} = C_{6,3} \cdot (x)^{6-6} = C_{6,3} \cdot (x)^0 = C_{6,3} = C_{6,3} = \frac{6!}{(6!-3!)\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3!} = 20$$

O termo independente de x é o T_4 (quarto termo) que é igual a 20.

Exercícios propostos

1) Qual é o termo em x^5 no desenvolvimento de $(x + 3)^8$?

2) Determine a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x - 3y)^7$.

3) Qual é o valor do produto dos coeficientes do 2o. e do penúltimo termo do desenvolvimento de

$(x - 1)^{80}$?

4) (FGV-SP) Desenvolvendo-se a expressão $[(x + 1/x) . (x - 1/x)]^6$, obtém-se como termo independente de x o valor:

a) 10 b) -10 c) 20 d) -20 e) 36

5) (UF. VIÇOSA) A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(2x + 3y)^m$ é 625. O valor de m é:

a) 5 b) 6 c)10 d) 3 e) 4

6) (MACK-SP) Os 3 primeiros coeficientes no desenvolvimento de $(x^2 + 1/(2x))^n$ estão em progressão aritmética valor de n é:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

7) No desenvolvimento de $(3x + 13)^n$ há 13 termos. A soma dos coeficientes destes termos é igual a:

8) (UFBA-92) Sabendo-se que a soma dos coeficientes no desenvolvimento do binômio $(a + b)^m$ é igual a 256, calcule **(m/2)!**

9) (UFBA-88) Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $(x^2 + 1/x)^9$.

10) Calcule a soma dos coeficientes do desenvolvimento do binômio $(3x - 1)^{10}$.

RESPOSTAS

1) $T_4 = 1512.x^5$

2) – 128

3) 6400

4) D

5) E

6) 8

7) 2^{48}

8) 24

9) 84

10) 1024