Módulo de Equações do Segundo Grau

Relações entre coeficientes e raízes.

Nono Ano

Relações entre Coeficientes e Raízes.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. *Fazendo as operações de soma e de produto entre as raízes x_1 e x_2 em uma equação do 2° grau, ficamos com:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= \frac{b^2-(\Delta)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Em resumo, $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Agora, calcule a soma e o produto das raízes das equações abaixo.

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $2x^2 + 7x + 5 = 0$

c) $-3x^2 + 12x = 0$

d) $-x^2 + 8x - 12 = 0$

e) $7x^2 - 3x + 1 = 0$

Exercício 2. *Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 + 5x + 7 = 0$, determine o valor de $(x_1 + 3)(x_2 + 3)$.*

Exercício 3. *Sabendo que a e $a + 1$ são as raízes de $x^2 - (p - 1)x + p$, determine o valor de p.*

Exercício 4. *Qual o valor de b na equação $x^2 + bx - 25 = 0$ para que suas raízes sejam simétricas?*

Para tal valor, veja que 5 e -5 são raízes da equação.

Exercício 5. *Determine a soma e o produto das raízes das equações abaixo:*

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$

b) $-x^2 + 7x - 10 = 0$

c) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

d) $x^2 - x - 20 = 0$

Exercício 6. *Determine m para que a equação*

$$2x^2 - 8x + m = 0$$

admita raízes iguais.

Exercício 7. *Determine m para que a equação*

$$3x^2 + 6x + m = 0$$

admita raízes reais distintas.

Exercício 8. *Determine os possíveis valores de p para que a equação*

$$x^2 + p^2x + 3px - 8 = 0$$

admita raízes simétricas[1].

Exercício 9. *Determine m na equação $2x^2 - 12x + 2m = 0$ de modo que uma de suas raízes seja igual ao dobro da outra.*

Exercício 10. *Se a média aritmética de dois números reais a e b é 5 e a média geométrica entre eles é 8, escreva uma equação do segundo grau que admite a e b como raízes.*

Exercício 11. *Qual o valor de p na equação*

$$(p + 3)x^2 + x + p^2 - p = 0$$

para que uma raiz seja inversa da outra?

Exercício 12. *Qual o valor de m na equação*

$$x^2 + (m - 2)x + 2m - 8 = 0$$

para que os quadrados de suas raízes sejam iguais?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 13. *Um aluno resolveu corretamente a equação do 2^o grau $x^2 + Ax + B = 0$ e encontrou as raízes 1 e -3. Nessas condições, determine as soluções da equação $x^2 + Bx + A = 0$.*

Exercício 14. *Determine uma equação do 2^o grau com a soma das suas raízes igual a 4 e o produto das suas raízes igual a -12.*

Exercício 15. *Se a equação quadrática $x^2 - 2nx + n + 3 = 0$ tem como conjunto solução $\left\{\frac{b}{a} + 1, \frac{a}{b} + 1\right\}$. Qual o valor de n^2?*

[1] Dizemos que x e y são simétricos se $x = -y$.

Exercício 16. *Uma equação do 2º grau possui a soma das suas raízes igual a 4 e o produto das suas raízes igual a* -12. *A partir desses dados, sendo* x_1 *e* x_2 *as raízes de tal equação, calcule o que se pede.*

a) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

b) $x_1^2 + x_2^2$.

c) $|x_1 - x_2|$.

Exercício 17. *Suponha que* x_1 *e* x_2 *são as raízes de* $x^2 + x - 7 = 0$. *Encontre os valores das expressões abaixo sem encontrar explicitamente as raízes:*

a) $x_1^2 + x_2^2$.

b) $x_1^3 + x_2^3$.

c) $x_1^4 + x_2^4$.

Exercício 18. *Se* a *e* b *são as raízes de* $2x^2 - x + 3 = 0$, *encontre o valor de* $(2a - 1)(2b - 1) + 8$.

Exercício 19. *Sabendo que a equação*

$$4x^2 + (3m + 1)x + (n + 3) = 0$$

possui as mesmas raízes de $2x^2 + 5x + 8 = 0$, *determine* m *e* n.

Exercício 20. *Os números reais* p *e* q *são as raízes da equação* $15x^2 - 11x + 2 = 0$. *Qual o valor de* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$*?*

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 21. *Determine o valor de* p *para que as raízes* x_1 *e* x_2 *da equação* $2x^2 - px - 1 = 0$ *satisfaçam a relação* $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Exercício 22. *Determine a soma das raízes da equação*

$$x^2 + 18x + 30 = 2 \cdot \sqrt{x^2 + 18x + 45}.$$

Exercício 23. *Sejam* a *e* b *números reais não nulos tais que a equação* $x^2 + ax + b = 0$ *possui soluções* a *e* b. *Determine* $a - b$.

Exercício 24. *(Olimpíada Cearense) As raízes da equação do segundo grau* $ax^2 + bx + c = 0$ *são* R *e* S. *Determine a equação do segundo grau cujas raízes são* $aR + b$ *e* $aS + b$.

Exercício 25. *Mostre que a equação* $x^2 + bx + 17 = 0$ *não possui raiz inteira positiva, se* b *é um inteiro não negativo.*

Exercício 26. *Dentre os trinômios do segundo grau da forma* $x^2 + px + q$, *onde* p *e* q *são inteiros e* $1 \leq p, q \leq 1997$, *qual conjunto é maior: o conjunto* A *dos trinômios que possuem raízes inteiras ou o conjunto* B *daqueles que não possuem raízes reais?*

Exercício 27. *Seja* a *a maior raiz de* $x^2 + x - 1$. *Determine o valor de* $a^5 - 5a$.

a) -1 *b)* -2 *c)* -3 *d)* 1 *e)* 2.

Exercício 28. a, b, c *e* d *são números reais distintos tais que* a *e* b *são raízes da equação* $x^2 - 3cx - 8d = 0$ *e* c *e* d *são raízes da equação* $x^2 - 3ax - 8b = 0$. *Calcule a soma* $a + b + c + d$.

Exercício 29. *Se* a *e* b *são raízes da equação* $x^2 - 2014x - 2004 = 0$, *determine o valor de* $a^2 + b^2 + a^2b^2 + 2ab(a + b + 1)$.

Exercício 30. *Determine um valor do número real* m *para o qual a soma das quartas potências das raízes de* $x^2 - mx - 1 = 0$ *seja mínima.*

Exercício 31. *Determine os valores do número real* k *para que diferença entre as raízes da equação em* x *dada por* $x^2 - (k + 2)x + k - 1 = 0$ *seja mínima.*

Exercício 32. *Observe:*

$$(x - r)(x - s) = x^2 - (r + s)x + rs.$$

Assim, substituindo x *por* r *e por* s, *obtemos*

$$\begin{cases} r^2 - (r + s)r + rs & = & 0 \\ s^2 - (r + s)s + rs & = & 0. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $a \cdot r^n$ *e a segunda por* $b \cdot s^n$, *temos:*

$$\begin{cases} a(r^{n+2} - (r + s)r^{n+1} + rs \cdot r^n) & = & 0 \\ b(s^{n+2} - (r + s)s^{n+1} + rs \cdot s^n) & = & 0. \end{cases}$$

Somando as duas equações e sendo $S_n = a \cdot r^n + b \cdot s^n$, *verifica-se que*

$$S_{n+2} = (r + s)S_{n+1} - rsS_n.$$

Dados que $S_1 = ar + bs = 1$, $S_2 = ar^2 + bs^2 = 2$, $S_3 = ar^3 + bs^3 = 5$ *e* $ar^4 + bs^4 = 6$, *determine* $S_5 = ar^5 + bs^5$.

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. *a)* *Tem-se* $x_1 + x_2 = \dfrac{-(-5)}{1} = 5$ *e* $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{4}{1} = 4$.

b) *Tem-se* $x_1 + x_2 = \dfrac{-7}{2}$ *e* $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{5}{2}$.

c) *Tem-se* $x_1 + x_2 = \dfrac{-12}{-3} = 4$ *e* $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{0}{-3} = 0$.

d) *Tem-se* $x_1 + x_2 = \dfrac{-8}{-1} = 8$ *e* $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-12}{-1} = 12$.

e) *Tem-se* $x_1 + x_2 = \dfrac{-(-3)}{7} = \dfrac{3}{7}$ *e* $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{7}$.

2. *Como* $x_1 + x_2 = -5$ *e* $x_1 x_2 = 7$, *temos:*

$$\begin{aligned}(x_1+3)(x_2+3) &= x_1x_2 + 3(x_1+x_2) + 9\\ &= 7 + 3\cdot(-5) + 9\\ &= 1.\end{aligned}$$

3. *As relações de soma e produto das raízes nos fornecem:*

$$\begin{aligned}2a+1 &= p-1\\ a(a+1) &= p.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}a(a+1)-(2a+1) &= p-(p-1)\\ a^2-a-2 &= 0.\end{aligned}$$

As raízes da equação anterior são $a = 2$ *e* $a = -1$. *Portanto, como* $p = a(a+1)$, *temos* $p = 6$ *ou* $p = 0$.

4. *Se* x_1 *e* x_2 *são as raízes e* $x_1 = -x_2$, *a soma das raízes da equação vale:*

$$\begin{aligned}-b &= x_1 + x_2\\ &= 0\end{aligned}$$

Para tal valor, veja que 5 e -5 são raízes da equação.

5.

a) $x_1 + x_2 = 4$ *e* $x_1 \cdot x_2 = -5$

b) $x_1 + x_2 = 7$ *e* $x_1 \cdot x_2 = 10$

c) $x_1 + x_2 = \dfrac{3}{2}$ *e* $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{2}$

d) $x_1 + x_2 = 1$ *e* $x_1 \cdot x_2 = -20$

6. *A condição para raízes iguais é* $\Delta = 0$. *Sendo assim:*

$$\begin{aligned}0 &= \Delta\\ &= b^2 - 4ac\\ &= (-8)^2 - 4\cdot 2\cdot m\\ &= 64 - 8m\end{aligned}$$

Portanto, $m = 64/8 = 8$.

7. *As raízes são reais e distintas se, e somente se,* $\Delta > 0$. *Devemos ter:*

$$\begin{aligned}0 &< \Delta\\ &= b^2 - 4ac\\ &= 6^2 - 4\cdot 3\cdot m\\ &= 36 - 12m.\end{aligned}$$

Daí, $12m < 36$, *ou seja,* $m < 3$.

8. *A equação anterior pode ser reescrita como:*

$$x^2 + (p^2+3p)x - 8 = 0$$

Sa as raízes da equação, x_1 *e* x_2, *são simétricas, tem-se* $x_1 + x_2 = 0$. *Além disso, como* $x_1 + x_2 = -(p^2+3p)$, *obtemos* $p^2 + 3p = 0$. *Assim,* $p = 0$ *ou* $p = -3$.

9. *Sejam* x_1 *e* x_2 *as raízes da equação com* $x_1 = 2x_2$. *Pelas relações de Viète-Girard:*

$$\begin{aligned}\frac{-(-12)}{2} &= x_1 + x_2\\ &= 3x_2\end{aligned}$$

Portanto, $x_2 = 2$ *e* $x_1 = 2\cdot 2 = 4$. *Consequentemente* $2m/2 = x_1 \cdot x_2 = 8$ *e* $m = 8$.

10. *De* $\dfrac{a+b}{2} = 5$ *e* $\sqrt{ab} = 8$, *obtemos* $a + b = 10$ *e* $ab = 64$. *Assim, eles são raízes da equação*

$$x^2 - 10x + 64 = 0.$$

11. *Se* x_1 *e* x_2 *são as raízes da equação com* $x_2 = 1/x_1$, *pelas relações de Viète-Girard, temos:*

$$\begin{aligned}\frac{p^2-p}{p+3} &= x_1\cdot x_2\\ &= x_1\cdot\frac{1}{x_1}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}p^2 - p &= p + 3\\ p^2 - 2p - 3 &= 0.\end{aligned}$$

As raízes da equação anterior são $p_1 = -1$ *e* $p_2 = 3$. *Como nenhum desses dois valores produz raiz nula na equação original, os valores procurados são:* $p = -1$ *e* $p = 3$.

12. *Para que os quadrados das raízes sejam iguais deve acontecer:*

$$\begin{aligned}x_1^2 &= x_2^2\\ x_1^2 - x_2^2 &= 0\\ (x_1-x_2)(x_1+x_2) &= 0\end{aligned}$$

O que implica que $x_1 - x_2 = 0$ *ou* $x_1 + x_2 = 0$, *analisando cada caso.*

i) Se $x_1 - x_2 = 0$, temos $x_1 = x_2$, ou seja, raízes iguais e a condição para tal é $\Delta = 0$.

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ (m-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m-8) &= 0 \\ m^2 - 4m + 4 - 8m + 32 &= 0 \\ m^2 - 12m + 36 &= 0 \\ (m-6)^2 &= 0 \\ m &= 6 \end{aligned}$$

ii) Se $x_1 + x_2 = 0$, como a soma das raízes é $m - 2 = 0$, devemos ter $m = 2$.

Portanto, $m = 2$ ou $m = 6$.

2 Exercícios de Fixação

13. *(Extraído do vestibular da UNIFOR CE)*
Se 1 e -3 são raízes de $x^2 + Ax + B = 0$, concluímos que:

$$\begin{aligned} 1 + (-3) &= -A \\ 1 \cdot (-3) &= B. \end{aligned}$$

Sendo assim, $A = 2$ e $B = -3$. Basta calcular as raízes da equação $x^2 - 3x + 2 - 2 = 0$ que são 1 e 2.

14. *Basta perceber que qualquer equação do 2^o grau com coeficente $a = 1$ pode ser escrita como:*

$$x^2 - (\textit{Soma das Raízes}) \cdot x + (\textit{Produto das Raízes}) = 0$$

Portanto, $x^2 - 4x - 12 = 0$ é uma possível equação para responder o problema. É importante observar que qualquer outra equação que satisfaça o enunciado será um múltiplo da equação encontrada pois dividindo-se a equação pelo coeficiente de x^2, os outros termos necessariamente serão dados pela soma e o produto das raízes.

15. *Tem-se $x_1 + x_2 = \dfrac{-(-2n)}{1} = 2n$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{n+3}{1} = n + 3$ Assim,*

$$\begin{aligned} n + 3 &= x_1 \cdot x_2 \\ &= \left(\frac{b}{a} + 1\right) \cdot \left(\frac{a}{b} + 1\right) \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1 \\ &= x_1 + x_2 \\ &= 2n \end{aligned}$$

Portanto, $n = 3$ e $n^2 = 9$.

16. *a)*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} \\ &= \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \\ &= \frac{4}{-12} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= (4)^2 - 2(-12) \\ &= 40 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \\ &= 40 - 2(-12) \\ &= 64 \\ |x_1 - x_2| &= 8 \end{aligned}$$

17. *Temos $x_1 + x_2 = -1$ e $x_1x_2 = -7$.*

a)

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= 1 + 14 \\ &= 15 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) \\ &= -1 \cdot ((-1)^2 + 3 \cdot 7) \\ &= -22 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 \\ &= (15)^2 - 2(-7)^2 \\ &= 225 - 98 \\ &= 127. \end{aligned}$$

18. *Pelas relações de Viète-Girard, temos $a + b = 1/2$ e $ab = 3/2$. Assim*

$$\begin{aligned} (2a-1)(2b-1) + 8 &= 4ab - 2(a+b) + 1 + 8 \\ &= 4 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 9 \\ &= 14. \end{aligned}$$

19. *Como as raízes são as mesmas, os resultados obtidos pelas relações de Viète-Girard das duas equações devem ser os mesmos, ou seja,*

$$\begin{aligned} -\frac{3m+1}{4} &= -\frac{5}{2} \\ \frac{n+3}{4} &= \frac{8}{2} \end{aligned}$$

Assim, $m = 3$ *e* $n = 13$.

20. *(Extraído do vestibular da PUC MG) Temos* $p+q = 11/15$ *e* $pq = 2/15$. *Assim,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= \frac{p+q}{pq} \\ &= \frac{11/15}{2/15} \\ &= 11/2. \end{aligned}$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

21. *(Extraído da Olimpíada Cearense de Matemática) Se* $x_1^2 + x_2^2 = 1$, *usando que* $x_1x_2 = -1/2$ *e que* $x_1 + x_2 = p/2$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} (p/2)^2 &= (x_1+x_2)^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ &= 1 + 2x_1x_2 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $p = 0$.

22. *Seja* $x^2 + 18x + 30 = y$, *portanto:*

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot \sqrt{y+15} \\ y^2 &= (2 \cdot \sqrt{y+15})^2 \\ y^2 &= 4 \cdot (y+15) \\ y^2 - 4y - 60 &= 0 \end{aligned}$$

As raízes da última equação são $y = 2 \pm 8$, *isto é,* $y_1 = 10$ *e* $y_2 = -6$. *Assim,* $x^2+18x+30 = 10$ *ou* $x^2+18x+30 = -6$. *É fácil verificar que as quatro raízes encontradas nessas duas equações são reais e satisfazem a equação original. Em ambos os casos, a soma das raízes é* -18 *e consequentemente a soma total de todas as raízes é* -36.

23. *(Extraído da OBM) Pelas relações de Viète-Girard, segue que* $a + b = -a$ *e* $ab = b$, *ou seja,* $b = -2a$ *e* $b(a-1) = 0$. *Como* b *é não nulo, temos* $a - 1 = 0$. *Consequentemente* $a = 1$ *e* $b = -2 \cdot 1 = -2$. *Finalmente,* $a - b = 1 - (-2) = 3$.

24. *Como* $-b/a = R + S$ *e* $c/a = RS$, *temos:*

$$\begin{aligned} (aR+b)+(aS+b) &= a(R+S)+2b \\ &= -b+2b \\ &= b. \\ (aR+b)(aS+b) &= a^2RS + ab(R+S) + b^2 \\ &= ac - b^2 + b^2 \\ &= ac \end{aligned}$$

Portanto, a equação $x^2 - bx + ac$ *possui as raízes desejadas.*

25. *Suponha que exista tal raiz* m. *Se* n *é a outra raiz, como* $mn = 17 > 0$, *devemos ter* $n > 0$. *Além disso, de* $n + m = -b$, *podemos concluir que* $n = -m - b$ *é um número inteiro. Se* m *e* n *são números inteiros tais que* $m \cdot n = 17$, *como 17 possui apenas dois divisores positivos, tem-se* $m = 1, n = 17$ *ou* $n = 1, m = 17$. *Em qualquer um dos casos,* $18 = m + n = -b$. *Isso produz uma contradição pois* $b \geq 0$.

26. *(Extraído da Olimpíada Russa) O conjunto dos trinômios que não possuem raízes reais é maior. Seja* $x^2 + ax + b$ *um trinômio possuindo as raízes inteiras* m *e* n *com* $m \leq n$. *Como* $m + n = -a$, *segue que ambos são negativos. Além disso, como* $mn = b$, *segue que* m *e* n *são divisores de um número menor ou igual a 1997. Portanto,* $-1997 \leq m \leq n \leq 0$. *Daí, podemos concluir que trinômio* $x^2 - nx + mn$ *está em* B *pois seu discriminante é* $n^2 - 4mn = n(n-4m) < 0$. *Veja que para cada elemento de* A *associamos um único elemento de* B *e isso nos diz que* B *possui pelo menos tantos elementos quanto* A *tem. Note que a equação* $x^2 - 3x + 5$ *está em* B *e não é da forma mencionada anteriormente. Assim,* B *possui estritamente mais elementos do que* A.

27. *(Extraído da OBM) Como* a *é raiz da equação, temos* $a^2 = -a + 1$. *Multipliquemos esta equação sucessivamente por* a *sempre trocando o valor de* a^2 *nos resultados por* $-a + 1$:

$$\begin{aligned} a^2 &= -a+1 \\ a^3 &= -a^2+a \\ &= 2a-1 \\ a^4 &= 2a^2-a \\ &= -3a+2 \\ a^5 &= -3a^2+2a \\ &= 5a-3 \end{aligned}$$

Portanto, $a^5 - 5a = -3$. *Resposta C.*

28. *(Extraído da OBM) De início, fazendo a soma das raízes, tem-se que* $a + b = 3c$ *e* $c + d = 3a$. *Somando e subtraindo membro a membro chega-se ao sistema:*

$$\begin{cases} b+d = 2(a+c) \\ b-d = 4(a-c) \end{cases}$$

Agora, como a é raiz de $x^2 - 3cx - 8d = 0$:

$$a^2 - 3ca - 8d = 0 \quad (1)$$

E como c é raiz de $x^2 - 3ax - 8b = 0$:

$$c^2 - 3ac - 8b = 0 \quad (2)$$

Subtraindo 2 de 1:

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 &= 8(d-b) \\ (a-c)(a+c) &= 8(d-b) \\ (a-c)(a+c) &= 8 \cdot 4(a-c) \end{aligned}$$

Como $a - c \neq 0$, então $a + c = 32$. Voltando ao primeiro sistema, obtemos $b + d = 64$. Por fim,

$$a + b + c + d = 64 + 32 = 96.$$

29. *Temos $a + b = 2014$ e $ab = -2004$. Note que:*

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + a^2b^2 + 2ab(a+b+1) &= \\ (a+b+ab)^2 &= \\ (2014 - 2004)^2 &= \\ 100. \end{aligned}$$

30. *Sejam a e a as raízes da equação. Pelas relações de Viète-Girard, segue que $a + b = m$ e $ab = -1$. Daí,*

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\ &= m^2 + 2 \\ a^4 + b^4 &= (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ &= (m^2+2)^2 - 2 \end{aligned}$$

Como $m^2 \geq 0$, segue que $m^2 + 2 \geq 2$ e que $(m^2+2)^2 \geq 4$. Portanto,

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (m^2+2)^2 - 2 \\ &= 2^2 - 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

A igualdade ocorre quando $m^2 = 0$, ou seja, quando $m = 0$.

31. *Sejam a e a as raízes da equação com $a \geq b$. Pelas relações de Viète-Girard, segue que $a + b = k + 2$ e $ab = k - 1$. Daí,*

$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \\ &= (a+b)^2 - 4ab \\ &= (k+2)^2 - 4(k-1). \end{aligned}$$

Veja que $(k+2)^2 - 4(k-1) = k^2 + 8 \geq 8$. Portanto,

$$\begin{aligned} a - b &= \sqrt{(a-b)^2} \\ &= \sqrt{(k+2)^2 - 4(k-1)} \\ &\geq \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Portanto, o valor mímino é $2\sqrt{2}$ e ocorre quando $k^2 + 8 = 8$, ou seja, $k = 0$.

32. *(Extraído da OBM) Sejam $r+s = m$ e $rs = n$. Assim, a partir das equações:*

$$\begin{aligned} S_3 &= mS_2 - nS_1 \\ S_4 &= mS_3 - nS_2. \end{aligned}$$

Podemos obter:

$$\begin{aligned} 5 &= 2m - n \\ 6 &= 5m - 2n. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema anterior nas incógnitas m e n, obtemos $m = -4$ e $n = -13$. Daí,

$$\begin{aligned} S_5 &= mS_4 - nS_3 \\ &= (-4) \cdot 6 - (-13) \cdot 5 \\ &= 41. \end{aligned}$$

Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com