9º ANO	Superintendência de Educação Infantil e Ensino Fundamental / Secretaria de Estado da Educação / Somos todos GOIÁS
MATEMÁTICA	

ATIVIDADE 7

Tema: Equações do 2º Grau e suas aplicações.

NOME:

UNIDADE ESCOLAR:

EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU

Chama-se Equação Geral do 2º grau, toda equação do tipo ou redutível ao tipo $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, com $\mathbf{a \neq 0}$.
Em que:

- *a, b* e *c* são os coeficientes;
- *a* recebe o nome de coeficiente dominante;
- *c* recebe o nome de termo independente;
- *x* é a incógnita;
- o grau é 2, visto que o maior expoente da incógnita é 2.

Quando a equação do 2º grau está escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, dizemos que é a Forma Geral.

Exemplo:

a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$ c) $5x^2 - 45 = 0$ e) $\frac{5}{4}x^2 = 0$

b) $-3x^2 + 4x + 7 = 0$ d) $-4x^2 + 12x = 0$ f) $\frac{x^2}{4} + x + 1 = 0$

Nos exemplos acima:

a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$, temos que 2, 3 e –1 são os coeficientes;

b) $-3x^2 + 4x + 7 = 0$, temos que –3, 4 e 7 são os coeficientes;

c) $5x^2 - 45 = 0$, temos que 5, 0 e – 45 são os coeficientes;

d) $-4x^2 + 12x = 0$, temos que – 4, 12 e 0 são os coeficientes;

e) $\frac{5}{4}x^2 = 0$, temos que $\frac{5}{4}$, 0 e 0 são os coeficientes.

f) $\frac{x^2}{4} + x + 1 = 0$, temos que $\frac{1}{4}$, 1 e 1 são os coeficientes.

OBS: Quando todos os coeficientes da equação do 2º grau são diferentes de zero, a equação é dita **completa**, logo será do tipo: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$.

Caso *b* e/ou *c* sejam iguais a zero, então: $ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ ou $ax^2 = 0$, as equações do segundo grau são do tipo **incompletas**.

CÁLCULO DO DISCRIMINANTE OU Δ (delta) DAS EQUAÇÕES DO 2º GRAU

O valor do Δ de uma equação do 2º grau é dado por: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$

Assim temos, por exemplo, na equação $2x^2 + 3x - 2 = 0$ o valor do discriminante é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$
$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)$$
$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

DISCUSSÃO DO NÚMEROS DE RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

O número de raízes de uma equação do 2º grau pode ser de no máximo duas o que depende dos valores obtidos no cálculo do Δ, assim temos:

Se $\Delta > 0 \Rightarrow$ x' e x'' $\in \mathbb{R}$ / x' $\neq$ x''. Neste caso existem duas raízes reais e distintas;

Se $\Delta = 0 \Rightarrow$ x' e x'' $\in \mathbb{R}$ / x' = x''. Neste caso, existem duas raízes reais e coincidentes ou uma raiz real;

Se $\Delta < 0 \Rightarrow$ x' e x'' $\notin \mathbb{R}$. Não existem raízes reais. Neste caso, existem duas raízes complexas.

MÉTODO DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Para resolvermos uma equação do 2º grau laçaremos mão da fórmula de Bháskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

Exemplo1: Resolva a equação do segundo grau $2x^2 + 3x - 2 = 0$

Cálculo de valor de Δ;

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$$

Utilizando a fórmula de Bháskara, temos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x' = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x'' = \frac{-3-5}{4} = -2$$

O conjunto solução da equação S = {1/2, -2}

Exemplo 2: Resolva a equação do segundo grau $x^2 - x - 12 = 0$

Cálculo de valor de Δ;

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

Utilizando a fórmula de Bháskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1}$$

$$x' = \frac{1+7}{2} = 4$$

$$x'' = \frac{1-7}{2} = -3$$

O conjunto solução da equação S = {4, –3}

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU INCOMPLETAS

a) Com b = 0;

Se o valor de b é igual a zero, então a equação do 2º grau será do tipo $\mathbf{ax^2 + c = 0}$. Neste caso isola-se o valor de x, então teremos:

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$$\text{Logo} \quad x' = +\sqrt{\frac{-c}{a}} \text{ ou } x'' = -\sqrt{\frac{-c}{a}}. \quad \Rightarrow \quad S = \{\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}\}$$

OBS:

1) Se $\frac{-c}{a} > 0$, existem duas raízes reais iguais em módulo, porém com sinais contrários;

2) Se $\frac{-c}{a} < 0$, não existem raízes reais.

Exemplo: Resolva a equação incompleta $3x^2 - 12 = 0$.

$$3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{12}{3} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = -2 \end{cases}$$

O conjunto solução da equação S = {4, –3}

b) com c = 0;

Se o valor de c é igual a zero, então a equação do 2º grau será do tipo $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$. Neste caso fatora-se a equação colocando o valor de x em evidência, então teremos:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x \cdot (ax + b) = 0$$

Aplicando a Lei do Anulamento, se o produto de dois números reais m e p é igual a zero, então m = 0 ou p = 0, assim sendo temos:

$$\text{Se } x \cdot (ax + b) = 0, \text{ então}$$

$$x' = 0 \qquad \text{ou} \qquad ax + b = 0$$

$$x'' = \frac{-b}{a}$$

$$\text{Logo} \quad x' = 0 \quad \text{ou} \quad x'' = \frac{-b}{a} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{0, \frac{-b}{a}\right\}$$

OBS: Se o valor se c for igual a zero então uma das raízes da equação do 2º grau será zero.
Exemplo: Resolva a equação incompleta $5x^2 - 3x = 0$.

$$5x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x\cdot(5x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ x'' = \frac{3}{5} \end{cases}$$

O conjunto solução da equação $S = \{0, \frac{3}{5}\}$

FORMA FATORADA DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

A forma toda equação polinomial do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com raízes x' e x", pode ser fatorada da seguinte forma:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow a\cdot(x - x')\cdot(x - x'') = 0}$$

Exemplo: Escreva a equação geral do 2º grau de coeficiente dominante 1, sabendo que as raízes são:
a) $x' = 2$ e $x'' = 5$
Na forma fatorada, temos:

$$a\cdot(x - x')\cdot(x - x'') = 0$$
$$1\cdot(x - 2)\cdot(x - 5) = 0$$

Aplicando a propriedade distributiva

$$x^2 - 5x - 2x + 10 = 0$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Portanto a equação do 2º grau com coeficiente dominante 1 e de raízes 2 e 5 é $x^2 - 7x + 10 = 0$
b) $x' = -1$ e $x'' = \frac{2}{3}$
Na forma fatorada, temos:

$$a\cdot(x - x')\cdot(x - x'') = 0$$
$$1\cdot(x - (-1))\cdot(x - \tfrac{2}{3}) = 0$$
$$(x + 1)\cdot(x - \tfrac{2}{3}) = 0$$

Aplicando a propriedade distributiva

$$x^2 - \tfrac{2}{3}x + x - \tfrac{2}{3} = 0$$
$$x^2 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3} = 0$$

Portanto a equação do 2º grau com coeficiente dominante 1 e de raízes -1 e $\frac{2}{3}$ é $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$.

SOMA E PRODUTO DAS RAÍZES

Soma das Raízes: $\mathbf{S = x' + x'' = \frac{-b}{a}}$ Produto das raízes: $\mathbf{P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}}$

Obtendo a Soma e Produto de uma equação do 2º grau de coeficiente dominante 1:

$$\mathbf{x^2 - Sx + P = 0}$$

ATIVIDADES

01) Nas equações abaixo, determine o valor dos coeficientes a, b, c e o valor do discriminante:
a) $3x^2 - 10x + 3 = 0$
b) $-x^2 + 10x = 25$
c) $x^2 = -2x + 4$

02) Determine os valores reais de m para que as equações abaixo na incógnita x sejam do 2º grau.
a) $(m + 3)x^2 - 10x + 3 = 0$
b) $(2m - 5)x^2 + x + 4 = 0$
c) $(6 - 3m)x^2 - 5x + 8 = 0$

03) Determine o conjunto solução das equações do segundo grau na incógnita x.
a) $x^2 - 7x + 10 = 0$
b) $x^2 - 8x + 12 = 0$
c) $x^2 + 2x - 8 = 0$
d) $4x^2 - 20 = 0$
e) $-5x^2 + 4x = 0$
f) $2x^2 - 10x + 16 = 0$
g) $6x^2 + x - 1 = 0$
h) $4x^2 + 9 = 12x$
i) $(x - 5)^2 = 1$

04) Em sua aula, o professor de matemática propôs o seguinte problema: "*A diferença entre o quadrado e o dobro de um mesmo número é 80*". Depois de um certo tempo seus alunos começaram a apresentar as soluções:

André disse que a solução era S = {-8, 10};
Bruna disse que a solução era S = {8, 10};
Carlos disse que a solução era S = {8, -10};
Débora disse que a solução era S = {-8, -10}

Ao resolver corretamente no quadro, o professor viu que:
A) ( ) André acertou.
B) ( ) Bruna acertou.
C) ( ) Carlos acertou.
D) ( ) Débora acertou.

05) O seguinte problema matemático foi encontrado em uma escavação arqueológica. "A diferença entre o dobro do quadrado de um número positivo e o triplo desse número é 77. Calcule o número."
Querendo o arqueólogo resolver o problema deverá encontrar qual valor?

06) Sabemos que um polinômio do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com raízes x' e x", pode ser fatorada da seguinte forma: $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\cdot (x - x')\cdot (x - x'') = 0$, ou seja, essas duas expressões são iguais, assim temos que $a\cdot (x - x')\cdot (x - x'') = ax^2 + bx + c$.
Nestas condições, escreva a equação do 2º grau (com a = 1), cujas raízes são os números:
a) 6 e 1
b) 7 e −3
c) −4 e −2
d) 2 e −10
e) 5 e −5
f) 3 e 0
g) $\sqrt{6}$ e $-\sqrt{6}$
h) 1 e 1/2
i) $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$

07) De a somente a soma e o produto das seguintes equações:
a) $2x^2 - 6x - 11 = 0$
b) $5x^2 - 4x = 12$
c) $3x^2 + 55 = 0$
d) $x^2 - 6x = 0$
e) $x^2 - 6x + 12 = 0$
f) $x^2 + 10x + 25 = 0$

08) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $10x^2 + 33x - 7 = 0$. O número inteiro mais próximo de $5x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)$ é:
A) ( ) – 33
B) ( ) – 10
C) ( ) – 7
D) ( ) 10

09) Sabemos que a raiz de uma equação é um valor que atribuído a x satisfaz a igualdade. Em um caso particular, se a soma dos coeficientes (a + b + c) da equação do 2º grau for zero então 1 é uma de suas raízes (x' = 1), e a outra raiz é dada por c/a (x" = c/a).

Nestas condições, verifique se "1" é raiz das equações abaixo. Em caso afirmativo, determine a outra raiz.
a) $3x^2 - 10x + 7 = 0$
b) $-4x^2 + 9x - 5 = 0$
c) $15x^2 - 10x - 5 = 0$
d) $-4x^2 - 10x + 14 = 0$
e) $-x^2 - x + 2 = 0$
f) $2021x^2 - 1010x - 1011 = 0$

10) Resolva as seguintes equações do 2º grau.
a) $x = 10 + \frac{11}{x}$, U = ℝ *
b) $x + 1 = \frac{8-x}{x}$, U = ℝ
c) $x + \frac{1}{x} = 2$, U = ℝ *