Capítulo 13

Funções compostas

Objetivos de aprendizagem

- Operações com funções.
- Composição de funções.
- Relações e funções definidas implicitamente.

Muitas funções que estudamos e trabalhamos nas aplicações podem ser criadas modificando ou combinando outras funções.

Operações com funções

Uma maneira de construir novas funções é aplicar as operações usuais (adição, subtração, multiplicação e divisão) usando a seguinte definição.

DEFINIÇÃO Soma, diferença, produto e quociente de funções

Sejam f e g duas funções com domínios que possuem valores comuns. Então, para todos os valores de x na intersecção desses domínios, as combinações algébricas de f e g são definidas pelas seguintes regras:

Soma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Diferença: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Produto: $(fg)(x) = f(x)g(x)$

Quociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, desde que $g(x) \neq 0$

Em cada caso, o domínio da nova função consiste em todos os números que pertencem ao domínio de f e ao domínio de g. Como vemos, as raízes da função do denominador são excluídas do domínio do quociente.

EXEMPLO 1 Definições algébricas de novas funções

Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x+1}$

Encontre fórmulas para as funções $f+g, f-g, fg, f/g, gg$. Descreva o domínio de cada uma.

SOLUÇÃO

O domínio de f é o conjunto de todos os números reais e o domínio de g pode ser representado pelo intervalo $[-1, +\infty[$. Como eles se sobrepõem, então a intersecção desses conjuntos resulta no conjunto dado pelo intervalo $[-1, +\infty[$. Assim:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x+1}$ com domínio $[-1, +\infty[$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \sqrt{x+1}$ com domínio $[-1, +\infty[$

$(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2\sqrt{x+1}$ com domínio $[-1, +\infty[$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ com domínio $]-1, +\infty[$

$(gg)(x) = g(x)g(x) = (\sqrt{x+1})^2$ com domínio $[-1, +\infty[$

Note que podemos expressar $(gg)(x)$ simplesmente por $x + 1$. Essa simplificação não muda o fato de que o domínio de $(gg)(x)$ é o intervalo $[-1, +\infty[$. A função $x + 1$, fora desse contexto, tem como domínio o conjunto dos números reais. Sob essas circunstâncias a função $(gg)(x)$ é o produto de duas funções com domínio restrito.

Composição de funções

Existem situações em que uma função não é construída combinando operações entre duas funções; uma função pode ser construída aplicando as leis envolvidas, primeiro uma e depois a outra. Esta operação para combinar funções, que não está baseada nas operações numéricas, é chamada de *composição de função.*

DEFINIÇÃO Composição de funções

Sejam f e g duas funções tais que o domínio de f intersecciona com a imagem de g. A **composição f de g**, denotada por $f \circ g$, é definida pela regra:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio de $f \circ g$ consiste em todos os valores de x que estão no domínio de g e cujo valor $g(x)$ encontra-se no domínio de f. Veja a Figura 13.1.

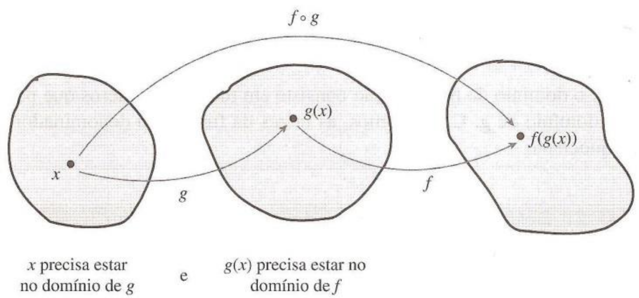


Figura 13.1 Na composição $f \circ g$, primeiro é aplicada a função g e depois a f.

A composição g de f, denotada por $g \circ f$, é definida de maneira similar. Em muitos casos, $f \circ g$ e $g \circ f$ são funções diferentes. Na linguagem técnica, dizemos que "a composição de funções não é comutativa".

EXEMPLO 2 Composição de funções

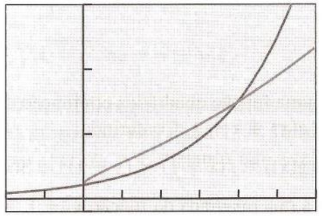
Sejam $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre as funções $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$. Verifique se essas funções não são as mesmas.

SOLUÇÃO

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = \sqrt{e^x}$

Uma forma de verificar que essas funções não são as mesmas é concluindo que não têm domínios iguais: $f \circ g$ é definida somente para $x \geq 0$, enquanto $g \circ f$ é definida para todos os números reais. Poderíamos também considerar seus gráficos (Figura 13.2) que interseccionam apenas em $x = 0$ e $x = 4$.



[−2, 6] por [−1, 15]

Figura 13.2 Os gráficos de $y = e^{\sqrt{x}}$ e $y = \sqrt{e^x}$ não são os mesmos.

Para finalizar, os gráficos sugerem uma verificação numérica: vamos citar um valor de x para o qual $f(g(x))$ e $g(f(x))$ têm valores diferentes. Podemos verificar isso, por exemplo, para $x = 1$: $f(g(1)) = e$ e $g(f(1)) = \sqrt{e}$. O gráfico nos ajuda a fazer a escolha adequada de x, pois escolher $x = 0$ e $x = 4$, levaria à conclusão que elas são iguais.

EXEMPLO 3 Verificação do domínio de funções compostas

Sejam $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre os domínios das funções compostas

(a) $g \circ f$ **(b)** $f \circ g$

SOLUÇÃO

(a) Comporemos as funções na ordem especificada:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Para x estar no domínio de $g \circ f$, primeiro deve-se analisar a função $f(x) = x^2 - 1$. Neste caso, x pode ser qualquer número real. Como depois é calculada a raiz quadrada desse resultado, então $x^2 - 1$ pode ter apenas valores não negativos. Portanto, o domínio de $g \circ f$ consiste em todos os números reais para os quais $x^2 - 1 \geq 0$, isto é, o conjunto $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

(b) Novamente, comporemos as funções na ordem especificada: $(f \circ g)\ x = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 - 1$. Para x estar no domínio de $f \circ g$, primeiro deve-se analisar a função $g(x) = \sqrt{x}$. Neste caso, x deve ser qualquer número real não negativo. Como depois é calculado o quadrado desse resultado e subtraído o valor 1, então o próprio resultado de $\sqrt{x}$ pode ser qualquer número real. Portanto, o domínio d $f \circ g$ consiste em todos os números do conjunto $[0, +\infty[$.

Nos exemplos 2 e 3, vimos que duas funções foram *compostas* para formar uma nova função. Existem momentos em que precisamos do processo inverso. Isso significa que podemos ter a necessidade de, partindo de uma função, encontrar aquelas que, ao serem compostas, resultam na que temos.

EXEMPLO 4 Decomposição de funções

Para cada função h, encontre as funções f e g, tais que $h(x) = f(g(x))$

(a) $h(x) = (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 4$

(b) $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

SOLUÇÃO

(a) Podemos observar que h é uma função quadrática em função de $x + 1$. As funções procuradas são $f(x) = x^2 - 3x + 4$ e $g(x) = x + 1$. Conferindo:

$$h(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 4$$

(b) Podemos observar que h é a raiz quadrada da função $x^3 + 1$. As funções procuradas são $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^3 + 1$. Conferindo:

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^3 + 1) = \sqrt{x^3 + 1}$$

Muitas vezes existe mais de uma maneira para decompor uma função. Por exemplo, uma alternativa para decompor $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ no Exemplo 4(b) é fazer $f(x) = \sqrt{x + 1}$ e $g(x) = x^3$. De fato, $h(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \sqrt{x^3 + 1}$.

Relações e funções definidas implicitamente

O termo geral que relaciona as variáveis dos pares ordenados (x, y) é uma **relação**. Se ocorrer de existir um *único* valor de y para cada valor de x, então a relação também é uma função e seu gráfico satisfaz o teste da linha vertical (Capítulo 7). No caso da equação de um círculo definida, por exemplo, por $x^2 + y^2 = 4$, os pares ordenados $(0, 2)$ e $(0, -2)$ satisfazem a lei da relação; assim, y não é uma função de x.

EXEMPLO 5 Verificação de pares ordenados de uma relação

Determine quais dos pares ordenados dados por $(2, -5)$, $(1, 3)$ e $(2, 1)$ estão na relação definida por $x^2y + y^2 = 5$. A relação é uma função?

SOLUÇÃO

Nós simplesmente substituímos os valores das coordenadas x e y dos pares ordenados em $x^2y + y^2$ e vemos se o resultado é 5.

$(2, -5)$: $\quad (2)^2(-5) + (-5)^2 = 5$

$(1, 3)$: $\quad (1)^2(3) + (3)^2 = 12 \neq 5$

$(2, 1)$: $\quad (2)^2(1) + (1)^2 = 5$

Assim, $(2, -5)$ e $(2, 1)$ estão na relação, mas $(1, 3)$ não está.

Como a relação está satisfeita para pares ordenados com diferentes valores de y, porém para o mesmo valor de x, a relação não pode ser uma função.

Seja novamente a equação do círculo dada por $x^2 + y^2 = 4$. Essa equação não define uma função, porém podemos reescrever e finalizar em duas equações, de modo que cada uma delas *seja* uma função:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y = +\sqrt{4 - x^2} \text{ ou } y = -\sqrt{4 - x^2}$$

Os gráficos dessas duas funções são, respectivamente, os semicírculos superior e inferior do círculo da Figura 13.3. Eles são mostrados na Figura 13.4. Desde que os pares ordenados dessas funções satisfaçam a equação $x^2 + y^2 = 4$, dizemos que a relação dada pela equação define duas funções **implicitamente**.

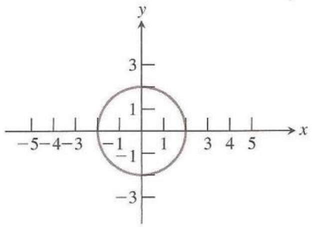


Figura 13.3 Círculo de raio 2 centralizado na origem (0,0), com equação $x^2 + y^2 = 4$.

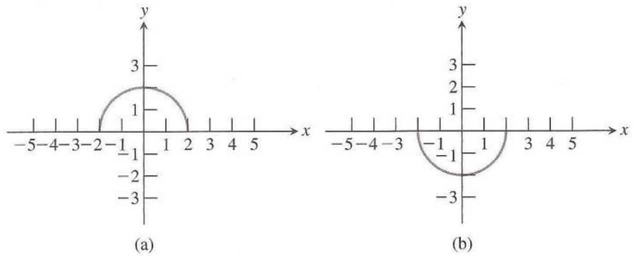


Figura 13.4 Os gráficos de (a) $y = +\sqrt{4 - x^2}$ e (b) $y = -\sqrt{4 - x^2}$.

EXEMPLO 6 Uso das funções definidas implicitamente

Descreva o gráfico da relação $x^2 + 2xy + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO

Observe que a expressão do lado esquerdo da equação pode ser fatorada. Isto permite que a equação seja escrita como duas funções definidas implicitamente, como se seguem:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1$$
$$(x + y)^2 = 1$$
$$x + y = \pm 1$$
$$x + y = 1 \text{ ou } x + y = -1$$
$$y = -x + 1 \text{ ou } y = -x - 1$$

O gráfico consiste em duas retas paralelas (Figura 13.5), cada um referente a uma função definida implicitamente.

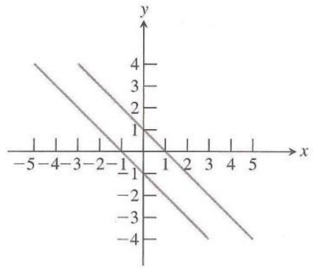


Figura 13.5 O gráfico da relação $x^2 + 2xy + y^2 = 1$.

Revisão Rápida

Nos exercícios 1 a 10, encontre o domínio de cada função e o expresse com a notação de intervalo.

1. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 3}$

2. $g(x) = \ln(x - 1)$

3. $f(t) = \sqrt{5 - t}$

4. $g(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x - 1}}$

5. $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

6. $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$

7. $f(t) = \dfrac{t + 5}{t^2 + 1}$

8. $g(t) = \ln(|t|)$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

10. $g(x) = 2$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 1 a 3, encontre as fórmulas para as funções $f + g$, $f - g$ e fg. Dê o domínio de cada uma delas.

1. $f(x) = 2x - 1$; $g(x) = x^2$

2. $f(x) = (x - 1)^2$; $g(x) = 3 - x$

3. $f(x) = \sqrt{x + 5}$; $g(x) = |x + 3|$

Nos exercícios 4 a 9, encontre as fórmulas para as funções f/g e g/f. Dê o domínio de cada uma delas.

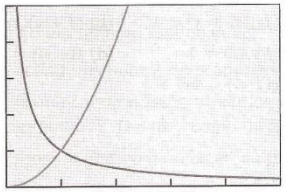
4. $f(x) = \sqrt{x + 3}$; $g(x) = x^2$

5. $f(x) = \sqrt{x - 2}$; $g(x) = \sqrt{x + 4}$

6. $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

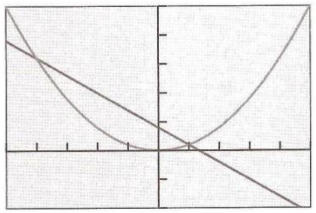
7. $f(x) = x^3$; $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

8. $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1/x$ são mostradas no gráfico a seguir. Esboce o gráfico da soma $(f + g)(x)$ manualmente ou com uma calculadora que tenha esse recurso.



[0, 5] por [0, 5]

9. $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4 - 3x$ são mostradas no gráfico a seguir. Esboce o gráfico da diferença $(f - g)(x)$ manualmente ou com uma calculadora que tenha esse recurso.



[−5, 5] por [−10, 25]

Nos exercícios 10 a 13, encontre $(f \circ g)(3)$ e $(g \circ f)(-2)$.

10. $f(x) = 2x - 3$; $g(x) = x + 1$

11. $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = 2x - 3$

12. $f(x) = x^2 + 4$; $g(x) = \sqrt{x + 1}$

13. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$; $g(x) = 9 - x^2$

Nos exercícios 14 a 21, encontre $f(g(x))$ e $g(f(x))$. Verifique o domínio de cada função.

14. $f(x) = 3x + 2$; $g(x) = x - 1$

15. $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

16. $f(x) = x^2 - 2$; $g(x) = \sqrt{x + 1}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$; $g(x) = \sqrt{x}$

18. $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

19. $f(x) = x^3$; $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

20. $f(x) = \dfrac{1}{2x}$; $g(x) = \dfrac{1}{3x}$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

Nos exercícios 22 a 26, encontre $f(x)$ e $g(x)$, de modo que a função possa ser escrita como $y = f(g(x))$ (pode existir mais de uma maneira de decomposição da função).

22. $y = \sqrt{x^2 - 5x}$

23. $y = (x^3 + 1)^2$

24. $y = |3x - 2|$

25. $y = \dfrac{1}{x^3 - 5x + 3}$

26. $y = (x - 3)^5 + 2$

27. Quais pares ordenados entre (1, 1), (4, −2) e (3, −1) satisfazem a relação dada por $3x + 4y = 5$?

28. Quais pares ordenados entre (5,1), (3,4) e (0, −5) satisfazem a relação dada por $x^2 + y^2 = 25$?

Nos exercícios 29 a 36, encontre duas funções definidas implicitamente, partindo da relação dada.

29. $x^2 + y^2 = 25$

30. $x + y^2 = 25$

31. $x^2 - y^2 = 25$

32. $3x^2 - y^2 = 25$

33. $x + |y| = 1$

34. $x - |y| = 1$

35. $y^2 = x^2$

36. $y^2 = x$

37. Verdadeiro ou falso O domínio da função quociente $(f/g)(x)$ (que significa $f(x)/g(x)$ consiste em todos os números que pertencem aos dois domínios, que são os de f e de g. Justifique sua resposta.

38. Verdadeiro ou falso O domínio da função produto $(fg)(x)$ (que significa $f(x)g(x)$ consiste em todos os números que pertencem ao domínio de f ou ao de g. Justifique sua resposta.

39. Múltipla escolha Suponha f e g funções que possuem como domínio o conjunto de todos os números reais. Qual das seguintes alternativas *não é* necessariamente verdadeira?

(a) $(f + g)(x) = (g + f)(x)$

(b) $(fg)(x) = (gf)(x)$

(c) $f(g(x)) = g(f(x))$

(d) $(f - g)(x) = -(g - f)(x)$

(e) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

40. Múltipla escolha Se $f(x) = x - 7$ e $g(x) = \sqrt{4 - x}$, então qual é o domínio da função f/g?

(a) $]-\infty, 4[$ **(b)** $]-\infty, 4]$ **(c)** $]4, \infty[$

(d) $[4, \infty[$ **(e)** $]4, 7[\cup]7, +\infty[$

41. Múltipla escolha Se $f(x) = x^2 + 1$, então $(f \circ f)(x) =$

(a) $2x^2 + 2$ **(b)** $2x^2 + 1$ **(c)** $x^4 + 1$

(d) $x^4 + 2x^2 + 1$ **(e)** $x^4 + 2x^2 + 2$

42. Múltipla escolha Qual das seguintes relações define a função $y = |x|$ implicitamente?

(a) $y = x$ **(b)** $y^2 = x^2$ **(c)** $y^3 = x^3$

(d) $x^2 + y^2 = 1$ **(e)** $x = |y|$

43. Associe cada função f a uma função g como também a um domínio D, tal que tenhamos $(f \circ g)(x) = x^2$ com domínio D.

f	g	D
e^x	$\sqrt{2 - x}$	$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$(x^2 + 2)^2$	$x + 1$	$]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$
$(x^2 - 2)^2$	$2 \ln x$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{(x - 1)^2}$	$\dfrac{1}{x - 1}$	$[2, +\infty[$
$x^2 - 2x + 1$	$\sqrt{x - 2}$	$]-\infty, 2]$
$\left(\dfrac{x + 1}{x}\right)^2$	$\dfrac{x + 1}{x}$	$]-\infty, +\infty[$

44. Seja $f(x) = x^2 + 1$. Encontre uma função g tal que:

(a) $(fg)(x) = x^4 - 1$ **(b)** $(f + g)(x) = 3x^2$

(c) $(f/g)(x) = 1$ **(d)** $f(g(x)) = 9x^4 + 1$

(e) $g(f(x)) = 9x^4 + 1$