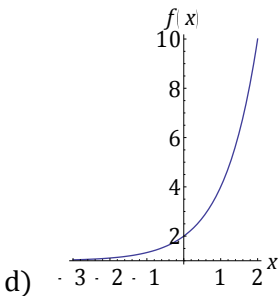
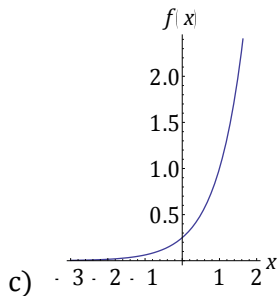
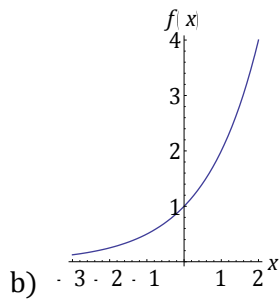
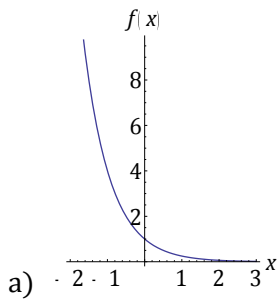


## Undécima lista de exercícios.

### Função exponencial e função logarítmica.

1. Você pegou um empréstimo bancário de R\$ 2500,00, a uma taxa de 5% ao mês.
  - a) Escreva a função que fornece o quanto você deve em um determinado mês  $t$ , contado a partir da data do empréstimo, supondo que você não tenha condições de saldar nem mesmo parte da dívida.
  - b) Determine a dívida acumulada após 12 meses do empréstimo.
2. O decaimento radioativo do estrôncio 90 (Sr-90) é descrito pela função  $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$ , onde  $t$  é um instante de tempo, medido em anos,  $b$  é uma constante real e  $P_0$  é a concentração inicial de Sr-90, ou seja, a concentração no instante  $t = 0$ .
  - a) Determine o valor da constante  $b$  sabendo que a meia-vida do Sr-90 é de 29 anos (ou seja, a concentração de Sr-90 cai pela metade em 29 anos).
  - b) Foram detectados 570 becquerels de Sr-90 por kg de solo na região da usina de Fukushima, no Japão, em abril de 2011 (valor que corresponde a cerca de 130 vezes a concentração normal do solo daquela região). Determine qual será a concentração de Sr-90 daqui a 100 anos.
3. A concentração de  $\text{CO}_2$  na atmosfera vem sendo medida desde 1958 pelo Observatório de Mauna Loa, no Havaí. Os dados coletados mostram que, nos últimos anos, essa concentração aumentou, em média, 0,5% por ano. É razoável supor que essa taxa anual de crescimento da concentração de  $\text{CO}_2$  irá se manter constante nos próximos anos.
  - a) Escreva uma função  $C(t)$  que forneça a concentração de  $\text{CO}_2$  na atmosfera em relação ao tempo  $t$ , dado em anos. Considere como instante inicial — ou seja, aquele em que  $t = 0$  — o ano de 2004, no qual foi observada uma concentração de 377,4 ppm de  $\text{CO}_2$  na atmosfera.
- b) Determine a concentração em 2010.
- c) Determine em que ano a concentração será o triplo daquela verificada em 2010.
4. O sistema de ar condicionado de um ônibus quebrou durante uma viagem. A função que descreve a temperatura (em graus Celsius) no interior do ônibus em função de  $t$ , o tempo transcorrido, em horas, desde a quebra do ar condicionado, é  $T(t) = (T_0 - T_{ext}) \cdot 10^{-t/4} + T_{ext}$ , onde  $T_0$  é a temperatura interna do ônibus enquanto a refrigeração funcionava, e  $T_{ext}$  é a temperatura externa (que supomos constante durante toda a viagem). Sabendo que  $T_0 = 21^\circ\text{C}$  e  $T_{ext} = 30^\circ\text{C}$ ,
  - a) calcule a temperatura no interior do ônibus transcorridas 4 horas desde a quebra do sistema de ar condicionado;
  - b) esboce abaixo o gráfico de  $T(t)$ .
5. Sem usar calculadora, determine o valor das funções abaixo nos pontos indicados.
  - a)  $f(x) = 3^x$ ;  $f(0), f(-1), f(1), f(0,5), f(2)$
  - b)  $f(x) = 3^{-x}$ ;  $f(0), f(-1), f(1), f(0,5), f(2)$
  - c)  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ;  $f(0), f(-1), f(1), f(0,5), f(2)$
  - d)  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^x$ ;  $f(0), f(0,5), f(1), f(2), f(3)$
  - e)  $f(x) = 2^{x-1}$ ;  $f(0), f(0,5), f(1), f(2), f(3)$
  - f)  $f(x) = 2^{x-3} + 1/2$ ;  $f(0), f(-1), f(6)$
  - g)  $f(x) = 5^{-x}$ ;  $f(-2), f(-0,5), f(3)$
  - h)  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$ ;  $f(0), f(-2), f(0,5), f(2)$
6. Você notou alguma semelhança nos valores encontrados nos itens (b) e (c) da questão anterior? Explique o que ocorre. Faça o mesmo com os itens (d) e (e) da questão.
7. Em um mesmo plano cartesiano, esboce o gráfico das funções dos itens (a), (b) e (d) da questão 5.

8. Relacione o gráfico à função.



$$f_1(x) = 3^x + 1,$$

$$f_2(x) = 4^{x-1},$$

$$f_3(x) = 4^{-x},$$

$$f_4(x) = 2^x$$

9. Resolva as equações.

a)  $3^{-x} = \frac{1}{81}$

b)  $e^{3x-1} = 100.$

c)  $4^{3x+2} = 5^{x-1}.$

d)  $\frac{100}{1+2^{3-x/2}} = 20.$

e)  $\ln(3x - 1) = 2.$

f)  $\log_3(x + 19) - 1 = 3 + \log_3(x - 1).$

g)  $\log_2(4x) = \log_4(x) + 7.$

10. Você acaba de contrair uma dívida no cheque especial, pagando uma taxa de 8% ao mês. Supondo que você não terá como saldar nem mesmo parcialmente essa dívida nos próximos meses, determine em quanto tempo ela dobrará de valor.

11. Os vegetais e a maioria dos animais vivos contêm uma concentração de carbono 14 semelhante àquela encontrada na atmosfera. Os vegetais os absorvem quando consomem dióxido de carbono durante a fotossíntese. Entre os animais, ele é distribuído através da cadeia alimentar. Quando um ser vivo morre, ele para de repor o carbono 14, de modo que as quantidades desse elemento começam a decair.

a) Se a meia-vida do carbono 14 é de 5730 anos, encontre a função que fornece a concentração desse elemento ao longo do tempo.

b) Determine a idade de uma múmia que tem 70% da concentração de carbono 14 encontrada nos seres vivos atualmente.

12. Usando as leis dos logaritmos, expanda as expressões abaixo.

a)  $\log(4x).$

b)  $\log_2(16x^3).$

c)  $\log_3(yx^3).$

d)  $\log_2(\sqrt{xy}).$

e)  $\log_2(8/x^2).$

f)  $\log_2\left(\frac{x}{w^5z^2}\right).$

g)  $\log_5\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}\right).$

h)  $\log_3(x\sqrt{x}).$

i)  $\log_3(\sqrt[3]{x^2w}).$

j)  $\ln\left(\sqrt[3]{\frac{y}{w^4}}\right).$

k)  $\log_2(\sqrt{x(x+1)}).$

13. Usando as leis dos logaritmos, condense as expressões abaixo.

a)  $\log(6) + \log(5).$

b)  $\log_2(x) - \log_2(y).$

c)  $3\log_2(x) + 2\log_2(5).$

d)  $\frac{\log_2(x) - 3\log_2(z)}{2}.$

e)  $-2\log_4(x).$

f)  $\frac{1}{3}\log_2(x).$

g)  $\frac{1}{2}\log_2(x) + 2\log_2(y) - \frac{1}{3}\log_2(z).$

h)  $\frac{4}{3}\log_2(x-1) - \frac{1}{3}\log_2(x+1).$

14. Mostre, com um exemplo, que

a)  $\log(a+b) \neq \log(a) + \log(b).$

b)  $\log(a-b) \neq \log(a) - \log(b).$

15. Use uma calculadora científica e a regra de mudança de base para calcular

a)  $\log_2(3).$

b)  $\log_5(2)$

c)  $\log_8(24)$

d)  $\log_6(1/12).$

16. Para certo modelo de computadores produzidos por uma empresa, o percentual dos

- processadores que apresentam falhas após  $t$  anos de uso é dado pela função  $P(t) = 100(1 - 2^{-0,1t})$ . Em quanto tempo 75% dos processadores de um lote desse modelo de computadores terão apresentado falhas?
17. A escala de um aparelho de medir ruídos é definida como  $R(I) = 120 + 10 \log_{10}(I)$ , em que  $R$  é a medida do ruído, em decibéis, e  $I$  é a intensidade sonora, em  $W/m^2$ . O ruído dos motores de um avião a jato equivale a 160 dB, enquanto o tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade atinge 80 dB, que é o limite a partir do qual o ruído passa a ser nocivo ao ouvido humano.
- Determine as intensidades sonoras do motor de um avião a jato e do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade.
  - calcule a razão entre essas intensidades, ou seja, calcule quantas vezes o ruído do avião é maior que o do tráfego.
18. As populações de duas cidades,  $A$  e  $B$ , são dadas em milhares de habitantes por  $A(t) = \log_8(1 + t)^6$  e  $B(t) = \log_2(4t + 4)$ , em que a variável  $t$  representa o tempo em anos. Após certo instante  $t$ , a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determine o valor mínimo desse instante  $t$  e especifique a cidade cuja população é maior a partir desse instante.
19. Escreva cada expressão abaixo como o logaritmo de um único termo.
- $\frac{1}{2} \log_5(x - 1) + \log_5(x + 1)$
  - $3 \log_4(2x + 3) - \log_2(x + 2)$
  - $2 \left[ \log(x + 3) - \log\left(\frac{x}{2}\right) \right] - \frac{3}{2} \log(x)$
20. Resolva as equações.
- $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$
  - $5^{2x-7} = 125$ .
  - $3^{x+1} = 2^{2x-3}$ .
  - $\frac{20}{10+2^x} = 5$ .
  - $\log(10x) - \log(4 - x) = 2$ .
  - $\log_{25}(2x - 1) = 1/2$ .
  - $\ln(x + 1) + \ln(x - 2) = 1$ .
21. Dada a função  $f(x) = \log\left(\frac{2x+4}{3x}\right)$ , determine os valores de  $x$  para os quais  $f(x)$  é um número real menor que 1.
22. Esboce os gráficos de  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{x-2}$ ,  $h(x) = e^{-x}$ .
23. Esboce os gráficos de  $f(x) = \ln(x)$ ,  $g(x) = \ln(x - 2)$ ,  $h(x) = \ln(1/x)$ .
24. A população brasileira era de cerca de 170 milhões de habitantes em 2000 e atingiu os 190 milhões de habitantes em 2010.
- Considerando que  $t = 0$  no ano 2000, determine a função exponencial  $P(t) = ae^{bt}$  que fornece o número aproximado de habitantes do país, em relação ao ano.
  - Usando seu modelo matemático, estime a população brasileira em 2020.
25. A função  $L(x) = ae^{bx}$  fornece o nível de iluminação, em luxes, de um objeto situado a  $x$  metros de uma lâmpada.
- Calcule os valores numéricos das constantes  $a$  e  $b$ , sabendo que um objeto a 1 metro de distância da lâmpada recebe 60 luxes e que um objeto a 2 metros de distância recebe 30 luxes.
  - Considerando que um objeto recebe 15 luxes, calcule a distância entre a lâmpada e esse objeto.
26. O pH de uma substância indica se ela é ácida ( $\text{pH} < 7$ ), neutra ( $\text{pH} = 7$ ), ou básica ( $\text{pH} > 7$ ). O pH está associado à concentração de íons de hidrogênio ( $[H^+]$ ), dada em mol/l, através da fórmula  $\text{pH} = -\log[H^+]$ .
- Determine a concentração de íons de hidrogênio do leite de magnésia, cujo pH é 10,5.
  - Determinou-se que o suco de um determinado limão tinha pH 2,2 e o suco de uma certa laranja tinha pH 3,5. Qual dos dois tinha a maior concentração de íons de hidrogênio?
27. Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 19% ao ano sobre o preço do ano anterior. Suponha que  $F$  representa

o preço inicial (preço de fábrica) e  $p(t)$  o preço após  $t$  anos.

- Determine a expressão de  $p(t)$ .
- Determine o tempo mínimo necessário, em número inteiro de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 5% do valor inicial. Se for preciso, use  $\log(2) \cong 0,301$  e  $\log(3) \cong 0,477$ .

28. Em um determinado momento, foram introduzidos 100 peixes em um lago. Um estudo ecológico-matemático determinou que a população dessa espécie de peixes nesse lago é dada pela fórmula abaixo.

$$P(t) = \frac{1000}{1 + Ae^{-kt}}$$

em que  $t$  é o tempo decorrido, em meses, desde que os primeiros peixes foram postos no lago.

- Determine a função  $P(t)$ , sabendo que, passados 3 meses da introdução dos peixes, a população atingiu 250 cabeças.
- Determine em quantos meses a população atingirá 900 peixes.

29. O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por  $T(t) = T_A + a3^{bt}$ , onde  $T(t)$  é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante  $t$ , dado em minutos,  $T_A$  é a temperatura ambiente, suposta constante, e  $a$  e  $b$  são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de  $-18^\circ\text{C}$ . Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu  $0^\circ\text{C}$  após 90 minutos e chegou a  $-16^\circ\text{C}$  após 270 minutos.

- Encontre os valores numéricos das constantes  $a$  e  $b$ .
- Determine o valor de  $t$  para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas  $(\frac{2}{3})^\circ\text{C}$  superior à temperatura ambiente.

30. Uma bateria perde permanentemente sua capacidade ao longo dos anos. Essa perda varia de acordo com a temperatura de operação e armazenamento da bateria. A função que fornece o percentual de perda anual de capacidade de uma bateria, de acordo com a temperatura de armazenamento,  $T$  (em  $^\circ\text{C}$ ), tem a forma

$$P(T) = a \cdot 10^{bT}$$

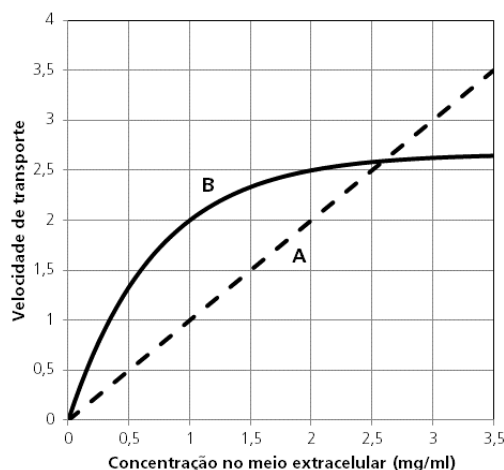
em que  $a$  e  $b$  são constantes reais positivas. A tabela abaixo fornece, para duas temperaturas específicas, o percentual de perda de uma determinada bateria de íons de Lítio.

| Temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) | Perda anual de capacidade (%) |
|----------------------------------|-------------------------------|
| 0                                | 1,6                           |
| 55                               | 20,0                          |

Com base na expressão de  $P(T)$  e nos dados da tabela,

- esboce a curva que representa a função  $P(T)$ , exibindo o percentual exato para  $T = 0$  e  $T = 55$ ;
- determine as constantes  $a$  e  $b$  para a bateria em questão.

31. Hemácias de um animal foram colocadas em meio de cultura em vários frascos contendo diferentes concentrações das substâncias A e B, marcadas com isótopo de hidrogênio. Dessa forma os pesquisadores puderam acompanhar a entrada dessas substâncias nas hemácias, como mostrado no gráfico abaixo



Seja  $x$  a concentração de substância B no meio extracelular e  $y$  a velocidade de transporte. Observando-se o formato da curva B e os valores de  $x$  e  $y$  em determinados pontos, podemos concluir que a função que melhor relaciona essas duas grandezas é

- $y = \frac{4 + \log_2(x)}{2}$ .
- $y = 1 - \log_2(x + 1)$ .
- $y = \frac{8}{3}(1 - 2^{-2x})$ .
- $y = 3^x - 1$ .

## Respostas.

1.a.  $D(t) = 2500(1,05)^t$ .

1.b.  $D(12) = 4489,64$ .

2.a.  $b = 1/29$ .

2.b. 52.22 becquerels.

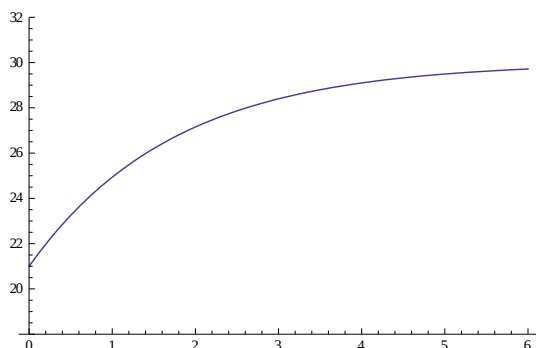
3.a.  $C(t) = 377,4(1,005)^t$ .

3.b. A concentração em 2010 é dada por  $C(6) \cong 388,9$ .

3.c. A concentração atingirá o triplo do valor de 2010 quando  $t = 226,3$ , ou seja, em 2230.

4.a.  $29,1^\circ\text{C}$ .

4.b.  $T(t) = 30 - 9 \cdot 10^{-t/4}$



5.a.  $f(0) = 1$ ,  $f(-1) = 1/3$ ,  $f(1) = 3$ ,  $f(0,5) = \sqrt{3}$ ,  $f(2) = 9$ .

5.b.  $f(0) = 1$ ,  $f(-1) = 3$ ,  $f(1) = 1/3$ ,  $f(0,5) = 1/\sqrt{3}$ ,  $f(2) = 1/9$ .

5.c.  $f(0) = 1$ ,  $f(-1) = 3$ ,  $f(1) = 1/3$ ,  $f(0,5) = 1/\sqrt{3}$ ,  $f(2) = 1/9$ .

5.d.  $f(0) = 1/2$ ,  $f(0,5) = \sqrt{2}/2$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$ ,  $f(3) = 4$ .

5.e.  $f(0) = 1/2$ ,  $f(0,5) = \sqrt{2}/2$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$ ,  $f(3) = 4$ .

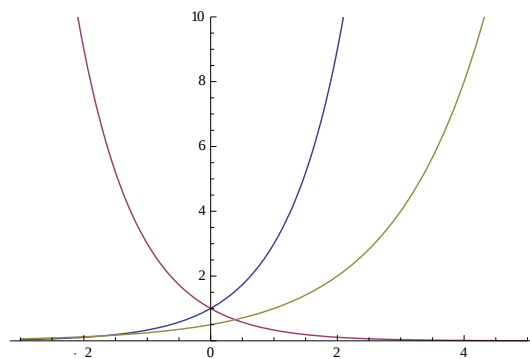
5.f.  $f(0) = 5/8$ ,  $f(-1) = 9/16$ ,  $f(6) = 17/2$ .

5.g.  $f(-2) = 25$ ,  $f(-0,5) = \sqrt{5}$ ,  $f(3) = 1/125$ .

5.h.  $f(0) = 1$ ,  $f(-2) = 1/16$ ,  $f(0,5) = 2$ ,  $f(2) = 16$ .

6. As respostas dos itens (5b) e (5c) são iguais, assim como as respostas dos itens (5d) e (5e), uma vez que  $3^{-x} = 1/3^x = (1/3)^x$ , e que  $(1/2) \cdot 2^x = 2^{-1} \cdot 2^x = 2^{x-1}$ .

7.



8. a.  $f_3$  b.  $f_4$  c.  $f_2$  d.  $f_1$

9.a.  $x = 4$ .

9.b.  $x = (1 + \ln(100))/3 \cong 1,8684$ .

9.c.  $x \cong 1,71882$ .

9.d.  $x = 2$ .

9.e.  $x = (1 + e^2)/3 \cong 2,79635$ .

9.f.  $x = 5/4$ .

9.g.  $x = 1024$ .

10. A dívida dobrará de valor em cerca de 9 meses.

11. a.  $C(t) = C_0 \cdot 2^{-t/5730}$ .

11.b. A múmia tem cerca de 2948 anos.

12.a.  $\log(4) + \log(x)$ .

12.b.  $4 + 3\log_2(x)$ .

12.c.  $\log_3(y) + 3\log_3(x)$ .

12.d.  $\frac{\log_2(x) + \log_2(y)}{2}$ .

12.e.  $3 - 2\log_2(x)$ .

12.f.  $\log_2(x) - 5\log_2(w) - 3\log_2(z)$ .

12.g.  $\log_5(x + 2) - \frac{\log_5(x^2 + 1)}{2}$ .

12.h.  $\frac{3}{2}\log_3(x)$ .

12.i.  $\frac{2}{3}\log_3(x) + \frac{1}{3}\log_3(w)$ .

12.j.  $\frac{1}{3}\ln(y) - \frac{4}{3}\ln(w)$ .

12.k.  $\frac{1}{2}\log_2(x) + \frac{1}{2}\log_2(x + 1)$ .

13.a.  $\log(30)$ .

13.b.  $\log_2(x/y)$

13.c.  $\log_2(25x^3)$ .

13.d.  $\log_2 \sqrt{\frac{x}{z^3}}$ .

13.e.  $\log_4 \left( \frac{1}{x^2} \right)$ .

13.f.  $\log_2 \sqrt[3]{x}$ .

13.g.  $\log_2 \left( \frac{y^2 \sqrt{x}}{\sqrt[3]{z}} \right)$ .

13.h.  $\log_2 \left( \sqrt[3]{\frac{(x-1)^4}{x+1}} \right)$ .

14.a. Basta usar  $a = 1$  e  $b = 1$ .

14.b. Basta usar  $a = 2$  e  $b = 1$ .

15.a.  $\log_2(3) \approx 1,584963$ .

15.b.  $\log_5(2) \approx 0,4306766$ .

15.c.  $\log_8(24) \approx 1,528321$ .

15.d.  $\log_6(1/12) \approx -1,386853$ .

16. Em 20 anos.

17.a. Avião:  $I = 10^4 W/m^2$ , tráfego:  $I = 10^{-4} W/m^2$ .

17.b. O ruído do avião tem intensidade igual a  $10^8$  vezes a intensidade do ruído do tráfego.

18. A partir de 3 anos,  $A(t) \geq B(t)$ .

19.a.  $\log_5 [(x+1)\sqrt{x-1}]$ .

19.b.  $\log_2 \left[ \frac{\sqrt{(2x+3)^3}}{x+2} \right]$ .

19.c.  $\log_{10} \left[ \frac{4(x+3)^2}{\sqrt{x^7}} \right]$ .

20.a.  $x = -3$ .

20.b.  $x = 5$ .

20.c.  $x = \frac{-1-3\log_3 2}{1-2\log_3 2}$ .

20.d. Não há solução.

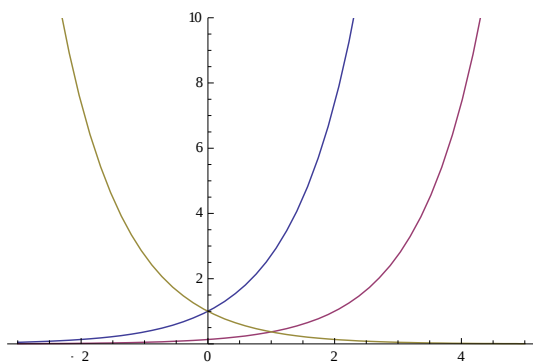
20.e.  $x = 40/11$ .

20.f.  $x = 3$ .

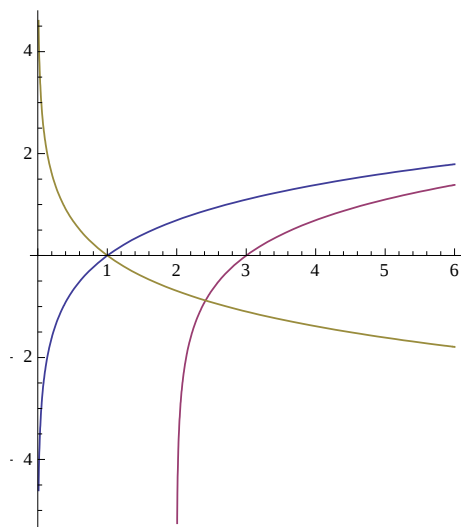
20.g.  $x = \frac{1+\sqrt{9+4e}}{2}$ .

21.  $x < -2$  ou  $x > 1/7$ .

22.



23.



24.a.  $P(t) = 170.000.000 e^{0,0111t}$ .

24.b. Aproximadamente 207.640.000 habitantes.

25.a.  $a = 120$ .  $b = -\ln(2)$ .

25.b. 3 m.

26.a.  $[H^+] = 3,162 \times 10^{-11}$  mol/l.

26.b. O suco de limão.

27.a.  $p(t) = F(0,81)^t$ .

27.b. 15 anos.

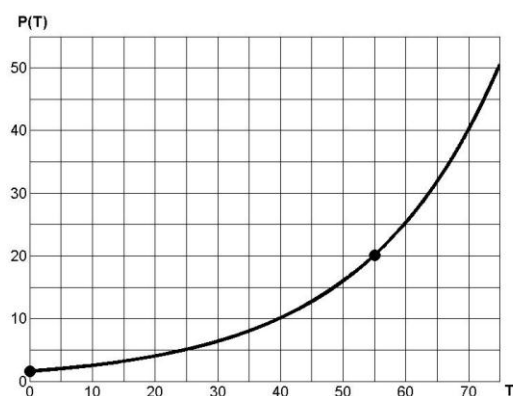
28.a.  $P(t) = \frac{1000}{1+9e^{-t \cdot \ln(3)/3}}$ .

28.b. 12 meses.

29.a.  $a = 54$  e  $b = -1/90$ .

29.b. 360 minutos.

30.a.



30.b.  $a = 1,6$  e  $b = 1/50$ .

31. Letra c.