



Função Exponencial

1 - Definição

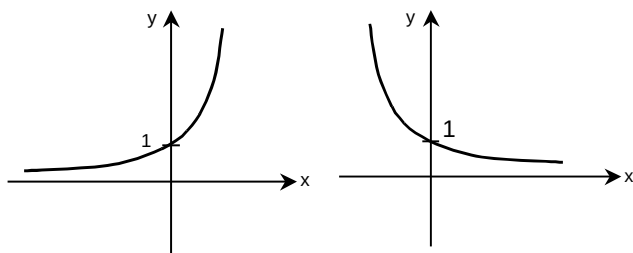
É toda função da forma $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

2 - A Função Exponencial será Crescente quando $a > 1$ e Decrescente quando $0 < a < 1$.

3 - Gráfico da Função Exponencial

1º CASO) $a > 1$

2º CASO) $0 < a < 1$

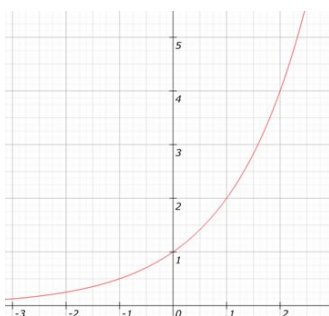


4 - O domínio da função exponencial é o conjunto dos números reais e o conjunto imagem é o conjunto dos números reais positivos ($D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}_+^*$).

Exemplos

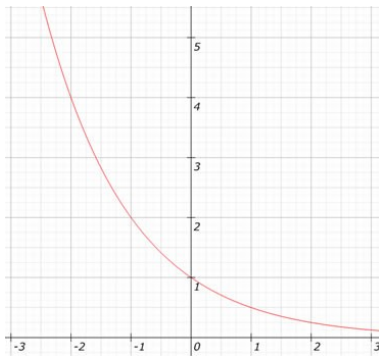
1º) $f(x) = 2^x$.

x	$f(x) = 2^x$
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



Exemplo: $f(x) = (1/2)^x$

x	$f(x) = (1/2)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8



EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Equação fundamental: Sendo a base $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

Outras equações exponenciais: Equações exponenciais sofisticadas se transformam na equação fundamental, através de algum artifício algébrico:

- propriedades das potências e raízes;
- fatoração;
- substituição de variáveis.

Relembrando algumas propriedades de potenciação:

Definição: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}} ; n \neq 0$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left[\frac{a}{b} \right]^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a^{-n}) = \frac{1}{a^n}$$

Outros exemplos:

$$\checkmark \quad 2^{x-3} = 32$$

$$2^{x-3} = 2^5$$

$$x - 3 = 5$$

$$x = 5 + 3$$

$$x = 8$$

$$\checkmark \quad (0,25)^x = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{25}{100}\right)^x = 2^{1/2}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^{1/2}$$

$$\frac{1}{2}^{2x} = 2^{1/2}$$

$$2^{-2x} = 2^{1/2}$$

$$-2x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-1}{4}$$

INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

1ª Hipótese: Se $a > 1$, então

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$$

2ª Hipótese: Se $0 < a < 1$, então

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$$

LISTA DE EXERCÍCIOS DE FUNÇÃO EXPONENCIAL - GABARITO

1. Se $f(x) = 16^{1+1/x}$, então $f(-1) + f(-2) + f(-4)$ é igual a:

a. 11

b. 13

c. 15

d. 17

e. nda

$$\begin{aligned} f(-1) &= 16^{1+\frac{1}{-1}} = 16^{1-1} = 16^0 = 1 \\ f(-2) &= 16^{1+\frac{1}{-2}} = 16^{1-\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4 \\ f(-4) &= 16^{1+\frac{1}{-4}} = 16^{1-\frac{1}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{(2^3)^4} = 2^3 = 8 \\ f(-1) + f(-2) + f(-4) &= 1 + 4 + 8 = 13. \end{aligned}$$

2. Se $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{para } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \\ -x & , x > 1 \\ x & \end{cases}$ então $f(0) - f(3/2)$ é igual a:

- a. $5/2$
- b. $5/3$
- c. $1/3$**
- d. $-1/2$
- e. $-2/3$

$$f(0) = 2^0 = 1; (1^a \text{ sentença})$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}; (2^a \text{ sentença})$$

$$f(0) - f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}.$$

3. Se $y = 10^x$ é um número entre 1000 e 100 000, então x está entre:

- a. -1 e 0
- b. 2 e 3
- c. 3 e 5**
- d. 5 e 10
- e. 10 e 100

$$1000 = 10^3$$

$$100000 = 10^5$$

$$1000 < y^x < 100000 \Rightarrow 10^3 < y^x < 10^5 \Rightarrow 3 < x < 5.$$

4. Seja a função $f(x) = a^x$. É correto afirmar que:

- a. ela é crescente se $x > 0$
- b. ela é crescente se $a > 0$
- c. ela é crescente se $a > 1$**
- d. ela é decrescente se $a \neq 1$
- e. ela é decrescente se $0 < x < 1$

Se a base de uma potência é maior que 1, aumentando os expoentes o valor também aumenta. Logo a função exponencial é crescente se $a > 1$.

5. Assinale a afirmação correta:

- a. $(0,57)^2 > (0,57)^3$**
- b. $(0,57)^7 < (0,57)^8$
- c. $(0,57)^4 > (0,57)^3$
- d. $(0,57)^{0,57} > (0,57)^{0,50}$
- e. $(0,57)^{-2} < 1$

A desigualdade $a^m < a^n$, $a > 1$, é verdadeira quando $m < n$.

Se $a < 1$, será verdadeira de $m > n$.

6. Os números reais x são soluções da inequações $25^{1-x} < 1/5$ se, e somente se:

- a. $x > -3/2$
- b. $x > 3/2$**
- c. $-3/2 < x < 3/2$
- d. $x < 3/2$
- e. $x < -3/2$

$$25^{1-x} < \frac{1}{5} \Rightarrow (5^2)^{1-x} < 5^{-1} \Rightarrow 5^{2-2x} < 5^{-1}$$

$$2-2x < -1 \Rightarrow -2x < -3$$

$$2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}.$$

7. Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$. Então $f(a+1) - f(a)$ é igual a:

- a. 2
- b. 1
- c. $f(a)$**

$$f(a+1) - f(a) = 2^{a+1} - 2^a = 2^a \cdot 2 - 2^a$$

$$2^a \cdot 2 - 2^a = 2^a (2 - 1) = 2^a \cdot 1 = 2^a = f(a).$$

- d. $f(1)$
- e. $2.f(a)$

8. Os valores de $a \in \mathbb{R}$ que tornam a função exponencial $f(x) = (a - 3)^x$ decrescente são:

- a. $0 < a < 3$
- b. $3 < a < 4$**
- c. $a < 3$ e $a \neq 0$
- d. $a > 3$ e $a \neq 4$
- e. $a < 3$

A função será decrescente se:

$0 < (a - 3) < 1$ (adicionando +3 nos membros, temos:

9. A expressão $\frac{2^{3+x} - 2^{x-3}}{2^x + 2^{x-3}}$ é igual a:

- a. 2^x
- b. 2^{-x}
- c. 2^{-3}

d. 7

e. 8

$$\frac{2^{3+x} - 2^{x-3}}{2^x + 2^{x-3}} = \frac{2^3 \cdot 2^x - 2^x \cdot 2^{-3}}{2^x + 2^x \cdot 2^{-3}} = \frac{2^x (2^3 - 2^{-3})}{2^x (1 + 2^{-3})} = \frac{(2^3 - 2^{-3})}{(1 + 2^{-3})} = \frac{8 - \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{63}{8}}{\frac{9}{8}} = \frac{63}{8} \cdot \frac{8}{9} = 7.$$

10. Se $f(x) = 4^{x+1}$ e $g(x) = 4^x$, a solução da inequação $f(x) > g(2 - x)$ é:

- a. $x > 0$
- b. $x > 0,5$**
- c. $x > 1$
- d. $x > 1,5$
- e. $x > 2$

$$4^{x+1} > 4^{2-x} \Rightarrow x+1 > 2-x$$

$$2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2} = 0,5$$

11. A solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+5x+1} \geq \frac{1}{2}$, é:

- a. $x \leq 0$
- b. $-5 \leq x \leq 0$**
- c. $x \geq 0$
- d. $x \leq -5$ ou $x \geq 0$
- e. nda

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+5x+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^1 \Rightarrow x^2 + 5x + 1 \leq 1 \Rightarrow x^2 + 5x \leq 0 \Rightarrow x(x+5) \leq 0.$$

12. Assinale a única afirmação correta:

- a. $0,21^2 > 0,21^3$**
- b. $0,21^{0,21} > 0,21^{0,20}$
- c. $0,21^7 < 0,21^8$
- d. $0,21^4 > 0,21^3$
- e. $0,21^{-2} < 1$

A desigualdade $a^m < a^n$, $a > 1$, é verdadeira quando $m < n$.

Se $a < 1$, será verdadeira de $m > n$.

2ª Etapa de Exercícios com Gabarito.

1. (JAMBO/PV) A função real definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$:

- a) só assume valores positivos.
- b) assume valores positivos somente se $x > 0$.

- c) assume valores negativos para $x < 0$.
 d) é crescente para $0 < a < 1$.
 e) é decrescente para $a > 1$.
2. (JAMBO/PV) As funções $y = a^x$ e $y = b^x$, com $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq b$, têm gráficos que se encontram em:
- a) 1 ponto
 b) 2 pontos
 c) 4 pontos
 d) nenhum ponto
 e) infinitos pontos
5. (JAMBO/PV) A solução de $2^{\frac{48}{x}} = 8$ é:
- a) um múltiplo de 16;
 b) um múltiplo de 9;
 c) um número primo;
 d) um divisor de 8;
 e) um primo com 48.
6. (JAMBO/PV) Se $3^{x^2-3x} = \frac{1}{9}$, então os valores de x são:
- a) 1 e 3
 b) 2 e 3
 c) 1 e 2
 d) 1 e 4
 e) 2 e 4
7. (JAMBO/PV) Para se verificar a igualdade $2\sqrt{4^{2x^2+3}} = 256$, x deve valer:
- a) 0
 b) +1
 c) -1
 d) ± 1
 e) $\pm \sqrt{2}$
8. (JAMBO/PV) A soma dos valores de x que resolvem a equação $4^{x+2} - 2^{x^2-4x+1} = 0$ é:
- a) 6
 b) 4
 c) 0
 d) 3
 e) n.d.a.
9. (JAMBO/PV) A solução da equação $\left(\frac{9}{16}\right)^{x-3} = \left(\frac{12}{9}\right)^x$ é um número racional x , tal que:
- a) $-1 \leq x < 0$
 b) $0 \leq x < 1$
 c) $1 \leq x < 2$
 d) $2 \leq x < 3$
 e) $3 \leq x < 4$
10. (JAMBOPV) Se o número real k é a solução da equação $4^{x-1} = \frac{3^{2x}}{9}$, então:
- a) $k \geq 8$
 b) $5 \leq k < 8$
 c) $3 \leq k < 5$

- d) $0 \leq k < 3$ e) $k < 0$

12. (JAMBO/PV) A solução da equação $2^{x-1} - 2^{x+2} = -56$ é um número:

- a) primo
b) múltiplo de 3
c) divisível por 4
d) múltiplo de 5
e) divisível por

12. (JAMBO/PV) O conjunto solução de $2^{x^2} < 2$ é:

- a) $\mathbb{R}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

- d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

13. (JAMBO/PV) A solução da desigualdade $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4} \leq 8^{x+2}$ é o conjunto dos x reais, tais que:

- a) $-2 \leq x \leq -1$
b) $-1 \leq x \leq 2$
c) $x \leq -2$ ou $x \geq -1$
d) $x \leq -1$ ou $x \geq 2$
e) $-2 \leq x \leq 2$

14. (JAMBO/PV) O conjunto solução da inequação $5^{(x^2-3x+2)} > 1$ é:

- a) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ e } x > 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

15. (JAMBO/PV) O domínio da função definida por $y = \frac{1}{\sqrt{4^{x+2} - 4^{-x}}}$ é:

- a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
d) $D = \emptyset$
e) n.d.a.

16. (JAMBO/PV) Determine o domínio da função:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} - 2^{-x}}}$$

- a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\}$

Gabarito -2ª etapa

1. A
2. A
3. A
4. C
5. D
6. A
7. C

8. E
9. A
10. D
11. C
12. D
13. C
14. D
15. C
16. A

Mais alguns **EXERCÍCIOS**

1) **Resolva as seguintes equações exponenciais:**

a) $3^{x-5} = 27^{1-x}$ R=2 b) $10^{1-x} = \frac{1}{10}$ R= 2 c) $9^{x-2} = \sqrt{27}$ R = $\frac{11}{4}$

d) $5^{2x-1} = 1$ R = $\frac{1}{2}$ e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \frac{125}{8}$ R= -2 f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4}$ R= - $\frac{2}{3}$

g) $10^{1-4x} = 0,001$ R = 1 h) $6 \cdot 7^{-x+2} = 294$ R = 0 i) $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} = 4$ R = $\frac{5}{4}$

j) $4^x = \sqrt[3]{32}$ R = $\frac{5}{6}$ l) $(0,2)^{x-2} = 1$ R = 2 m) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{9}{4}\right)^{1+2x}$ R = - $\frac{1}{3}$

n) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4+x} = 9^{x+3}$ o) $5^{2-x} = \frac{1}{125}$ R = 5 p) $16^{2x} = 8^{x+2}$ R = $\frac{6}{5}$

q) $(0,5)^{2x} = 2^{1-3x}$ R = 1 r) $8^{2-x} = (0,25)^{x+1}$ R = 8 s) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} = \sqrt[4]{9}$ R = $\frac{5}{2}$

2. Certa substância radioativa desintegra-se de modo que, decorrido o tempo t, em anos, a quantidade ainda não desintegrada da substância é $S = S_0 \cdot 2^{-0,25t}$, em que S_0 representa a quantidade de substância que havia no início. Qual é o valor de t para que a metade da quantidade inicial desintegre-se?

3. Suponha que o crescimento de uma cultura de bactérias obedece à lei $N(t) = m \cdot 2^{t/2}$, na qual N representa o número de bactérias no momento t, medido em horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, determine o número de bactérias depois de 8 horas.

4. Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas. Assim, o número n de bactérias após t horas é dado pela função $N(t) = m \cdot 2^{t/3}$. Nessas condições, determine o tempo necessário para a população ser de 51.200 bactérias.

5. (FIC / FACEM) A produção de uma indústria vem diminuindo ano a ano. Num certo ano, ela produziu mil unidades de seu principal produto. A partir daí, a produção anual passou a seguir a lei $y = 1000 \cdot (0,9)^x$. O número de unidades produzidas no segundo ano desse período recessivo foi de: R: 12. D

- a) 900
- b) 1000
- c) 180
- d) 810
- e) 90