Potenciação

<u>Definição</u>: Calcular a potência n de um número real a equivale a multiplicar a, por ele mesmo, n vezes. A notação da operação de potenciação é equivalente a:

$$a^n = \underbrace{a.a.a....a}_{\text{n vezes}}$$

Exemplos: $2^4 = 16$; $7^2 = 49$

<u>Propriedades:</u>

1) $a^m.a^n = a^{m+n}$ Exemplo: $3^3.3^2 = 3^5$;

2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; a \neq 0$ $Exemplo: \dfrac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2}$

3) $a^0 = 1$ $Exemplo: \dfrac{4^2}{4^2} = 4^{2-2} = 4^0 = 1$

4) $(a^m)^n = a^{m.n}$ Exemplo: $(3^2)^3 = 3^{2.3} = 3^6$

5) $a^{m^n} = a^{\overbrace{m.m.m...m}^{\text{n vezes}}}$ Exemplo: $3^{2^3} = 3^8$

6) $(a.b)^n = a^n.b^n$ Exemplo: $(5.2)^3 = 5^3.2^3 = 125.8 = 1000$

7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}; b \neq 0$ Exemplo: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3}$

8) $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}; b \neq 0$ Exemplo: $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

9) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, n > 0$ Exemplo: $\sqrt[5]{6^8} = 6^{\frac{8}{5}}$

OBS:

$0^{12} = 0$; $1^{100} = 1$; $(-3)^2 = 9$; $-3^2 = -9$; $(-3)^3 = -27$; $8^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{8^4}\right) = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16$

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{3^2}{2^2}} = \dfrac{1}{\dfrac{9}{4}} = 1.\dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{9}$; $\dfrac{1}{(-7)^{-3}} = (-7)^3$

4.8 Função exponencial

Definição: A função f: IR →IR dada por f(x)=a^x ($a \neq 1$; $a>0$) é denominada função exponencial de base a e definida para todo x real.

Exemplos:

$$f(x)=3^x,\ f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-x},\ f(x)=5^x,\ f(x)=\left(\sqrt{5}\right)^x,\ f(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x$$

<u>Domínio</u>: IR

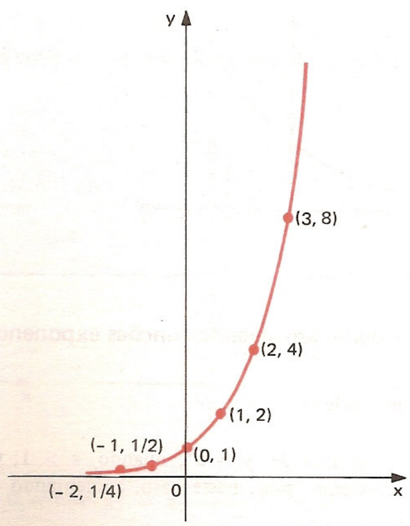
<u>Imagem</u>: IR_+^*

<u>Gráfico</u>: Vamos construir os gráficos de algumas funções exponenciais e observar algumas de suas propriedades. O gráfico da função exponencial apresenta dois tipos de comportamento: um, quando a>1, e outro quando 0<a<1.

Exemplo1: f(x)=2^x, a>1

x aumenta ↓ ; y aumenta ↓

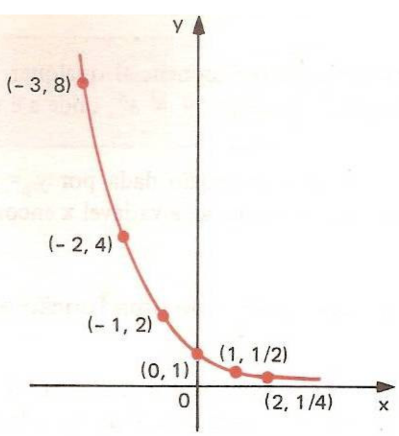
x	y
- 2	1/4
- 1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



Exemplo 2: $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, onde 0<a<1

x aumenta ↓ ; y diminui ↓

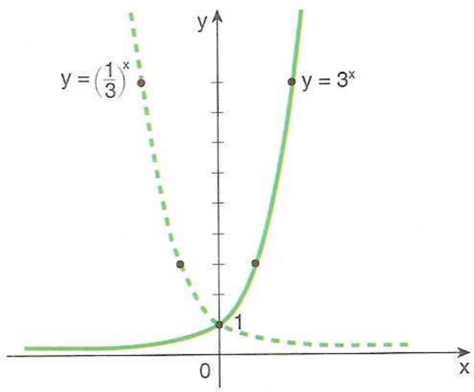
x	y
- 3	8
- 2	4
- 1	2
0	1
1	1/2
2	1/4



Exemplo 3: Vamos construir no mesmo diagrama os gráficos das funções

$y=3^x \, e \quad y=\left(\frac{1}{3}\right)^x.$

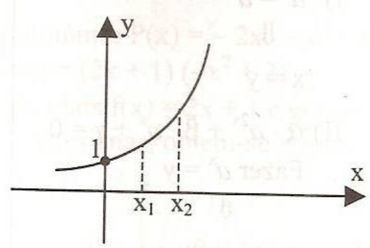
x	3^x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
–3	1/27	27
–2	1/9	9
–1	1/3	3
0	1	1
1	3	1/3
2	9	1/9
3	27	1/27



Caso geral:

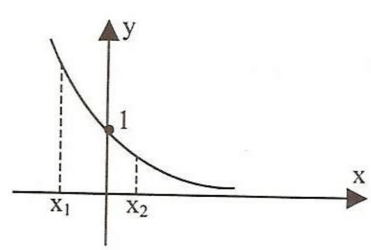
A função exponencial pode ser crescente ou decrescente:

$f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$



$$\boxed{a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ (mantém a desigualdade).}}$$

$f(x) = a^x$ é decrescente se $0 < a < 1$



$$\boxed{a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ (troca a desigualdade)}}$$

Note que se $a > 0$, então $a^x > 0$ para todo $x \in R$, isto é o conjunto imagem da função $y = a^x$ é R_+^*

Propriedades:

1. $f(x)=a^x \rightarrow f(0)=a^0=1$, isso significa que o par ordenado (0;1) pertence a toda função exponencial.
2. Como $a>0$ e $a\neq 1$, temos duas possibilidades: $a>1$ ou $0<a<1$

   2.1) a > 1

   No gráfico de $y=a^x$, quando $a>1$, vemos que a função exponencial é crescente, pois, nesse caso, aumentando o valor de x, sempre aumenta o valor de y.

   $$\boxed{\text{Quando } a>1\text{, temos: } x_1 > x_2 \leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}}$$

   Exemplo: $4>3 \leftrightarrow 2^4 > 2^3$

   2.2) $0<a<1$

   No gráfico de $y=a^x$, quando $0<a<1$, vemos que essa função exponencial é decrescente, pois, nesse caso, aumentando o valor de x, sempre diminui o valor de y.

   $$\boxed{\text{Quando } 0<a<1\text{, temos: } x_1 > x_2 \leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}}$$

   Exemplo: $7>4 \leftrightarrow (1/3)^7 < (1/3)^4$

3. Como $a>0$ e $a\neq 1$, então $a^x>0$, $\forall x \in IR$. Daí, $Im(f)=IR_+^*$ (a função exponencial é estritamente positiva)
4. Na representação gráfica da função exponencial, temos uma reta horizontal assíntota (y=0), que representa o limite inferior da função.
5. Essa propriedade é muito útil na resolução de equações exponenciais.

   $$\boxed{\text{Quando } 1\neq a>0\text{, temos } a^{x_1} = a^{x_2} \leftrightarrow x_1 = x_2}$$

Exercícios:

1) Os gráficos das funções $f(x) = 4^X$ e $g(x) = (2/3)^X$ têm um ponto comum. Qual?

2) Faça o esboço do gráfico da função $f(x) = 2^X + 1$.

3) Dê o conjunto imagem da função anterior.

Exercícios propostos

1) Dê o conjunto-imagem da função $g(x) = (1/2)^{-x} + 3$.

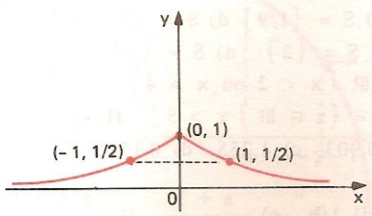
Faça o esboço do gráfico da função f definida por:

2) $f(x) = \begin{cases} (1/2)^x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ 2^x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

Respostas:

1) $I = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 3\}$

2)



Equações exponenciais

São equações em que a incógnita é um expoente. Resolvem-se estas equações utilizando-se propriedades da potenciação. Existem duas situações:

Considere $0 < a \neq 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{I) } a^x = a^y \\ \qquad \Downarrow \\ \quad x = y \\ \text{II) } \alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot a^x + \gamma = 0 \\ \quad \text{Fazer } a^x = y \\ \qquad \Downarrow \\ \quad \alpha \cdot y^2 + \beta y + \gamma = 0 \end{array}}$$

Exercícios:

Resolva as equações:

a) $2^{x+1} = 16^{-1}$

b) $\dfrac{1}{5^{-x}} = \sqrt{125}$

c) $(2^x)^x = 512$

. Resolva a equação $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$

. Resolva a equação $3^x + 3^{3-x} = 28.$

Exercícios propostos:

1) . Resolva as equações:

a) $5^{-x+1} = 1$

b) $3^{2x+7} = -9$

2) . Resolva as equações:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3}$

b) $27^{x+1} = 9^{-x+5}$

c) $\left(\frac{2}{7}\right)^x = \frac{49}{4}$

d) $2^{x^2-4} = 0$

3) . Resolva a equação $2^{x-1} + 1 = 2^{2-x}$

4) Resolva as equações:

a) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = \frac{13}{3}$

b) $2^x + 3^x + 1 = 0$

c) $4^{x+1} - 4 \cdot 3^x = 0$

5) . Resolva as equações:

a) $(2^x)^2 = 16$

b) $2^{x^2} = 16$

c) $(3^x)^2 = 3^{x^2}$

Respostas

1) a) S={1} b) S=∅
2) a) S={-1} b) S={7/5} c) S={-2} d) S=∅
3) S={1}
4) a) S={-1} b) S=∅ c)S={0}
5) a) S={2} b) S={-2,2} c)S={0,2}

Inequação exponencial

Uma inequação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma potência. Um método usado para resolver inequações exponencias consiste em reduzir ambos os membros da inequação a potências de mesma base a (0<a≠1) e daí resolver conforme a base:

- $a > 1$
  $a^x > a^y$
  $\Downarrow$ (mantém)
  $x > y$
- $0 < a < 1$:
  $a^x > a^y$
  $\Downarrow$ (inverte)
  $x < y$

Exemplos:

Exemplos:

1) $2^{x+3} < 16$

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > \frac{1}{81}$

Exercícios:

1) Resolva as inequações:

a) $5^x > 5^7$
b) $0{,}01^x > 0{,}01^3$

2) Encontre os valores reais de x tais que:

a) $16 > 2^x > 1$

b) $\frac{1}{3} \leqslant 3^x < \sqrt[3]{81}$

3) Dê o domínio da função $f(x) = \sqrt{8^x - \frac{1}{2}}$.

Exercícios propostos:

1) Resolva as inequações:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{8}$

b) $\sqrt{3}^{\,x-1} < \sqrt{3}^{\,3x+5}$

c) $2^{x+3} < 8$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+6} < 27^2$

e) $0{,}1^x > 100$

f) $\sqrt{2}^{\,x+1} \leqslant \sqrt{8}$

g) $\sqrt{7^x} > 0$

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} < -3$

2) Dê o domínio das funções:

a) $f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^x}$

b) $g(x) = \frac{x}{2^x - 8}$

c) $f(x) = \sqrt{16^x - 2}$

d) $g(x) = \sqrt{64 - (0{,}5)^x}$

3) Resolva a inequação $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$.

4) Considere a função $g(x) = 3^{-x^2}$.
a) Qual é o maior valor possível de g(x)?
b) Qual deve ser o valor de x para que g(x) tenha esse valor máximo?
c) Qual é o conjunto-imagem da função g?
d) Quais são as imagens de $x = 1$ e $x = -1$?

Respostas:

1) a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$ b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$ c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -6\}$ e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$ f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$
g) $S = \mathbb{R}$ h) $S = \phi$

2) a) $D = \mathbb{R}_+$ b) $D = \mathbb{R} - \{3\}$ c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1/4\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -6\}$

3) $S=\{x \in IR/ 1<x<3\}$

4) a) 1 b) 0 c) $I = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y \leqslant 1\}$ d) $g(1) = g(-1) = 1/3$

Função logarítmica

Logaritmos na base 10

O princípio básico na resolução de equações e inequações exponenciais foi a comparação de potências com mesma base. Esse princípio, no entanto, é inadequado para resolver uma equação exponencial do tipo: $10^x = 2$. Na resolução dessa equação, a dificuldade está em escrever o número 2 sob a forma de potência com base 10. Com estudos feitos até aqui, não sabemos qual é o valor de x nem como determiná-lo. Para solucionar este e outros problemas, vamos estudar os logaritmos.

Definição: Sendo a e b números reais positivos, com a≠1, chama-se logaritmo de b na base a o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Na expressão $\log_a b = x, temos$:

- a é a base do logaritmo;
- b é o logaritmando;
- x é o logaritmo.

Exemplos:

$\log_2 4 = 2, \quad \text{pois} \quad 2^2 = 4$

$\log_3 81 = 4, \quad \text{pois} \quad 3^4 = 81$

$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \quad \text{pois} \quad 2^{-3} = \frac{1}{8}$

$\log_7 7 = 1, \quad \text{pois} \quad 7^1 = 7$

$\log_5 1 = 0, \quad \text{pois} \quad 5^0 = 1$

$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{pois} \quad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3, \quad \text{pois} \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$

Exemplo2: Calcule, através da definição:

a) $\log_{\sqrt[3]{9}} 3$

b) $\log_{16} 0{,}25$

OBS: As restrições para a (0<a≠1) e para b (b>0), colocadas na definição, garantem a existência e a unicidade de $\log_a b$.

Consequências

Aplicando a definição do logaritmo obtém-se as seguintes conseqüências:

- $\log_a 1=0$, pois $a^0=1$
- $\log_a a=1$, pois $a^1=a$
- $\log_a a^{\alpha}=\alpha$, pois $a^{\alpha}=a^{\alpha}$
- $a^{\log_a b}=b$, pois o logaritmo de b na base a é justamente o expoente que se deve dar a base a para que a potência fique igual a b.
- $b=c \quad \leftrightarrow \quad \log_a b=\log_a c \quad (b>0;c>0)$

<u>Sistemas de logaritmos</u>

O conjunto formado por todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base a ($0<a\neq1$) é chamado sistema de logaritmos de base **a**. Por exemplo, o conjunto formado por todos os logaritmos de base 3 dos números reais positivos é o sistema de logaritmos de base 3.
Existem dois sistemas de logaritmos que são os mais utilizados em Matemática:

a) o sistema de logaritmos decimais, que é o de base 10. Esse sistema foi desenvolvido pelo matemático inglês Briggs (1536-1630). Indicaremos com $\log_{10}x$ ou $\log x$, o logaritmo decimal de x.
b) O sistema de logaritmos neperianos, que é o de base e (e é um número irracional que vale 2,71828,,,) e cuja origem será explicada em Cálculo. O nome neperiano deriva de John Napier (1550-1617), matemático escocês, autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos. Representaremos o logaritmo neperiano de x com $\log_e x$ ou $\ln x$.

Exercício proposto

Calcule pela definição os seguintes logaritmos

a) $\log_3 9$
b) $\log_2 128$
c) $\log_5 625$
d) $\log 1000$
e) $\log_8 16$

$\log_{\frac{1}{4}} 32 =$

$\log_9 \frac{1}{27}$

$\log_{\sqrt[3]{7}} 49$

$\log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt[4]{5}$

Propriedades

$$\log_a(A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$$
$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$
$$\log_a A^m = m \cdot \log_a A$$

Observação:

$$\log_a \sqrt[m]{A} = \log_a A^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \cdot \log_a A$$

Exemplo 1:

Sendo $\log_{10}2 = 0{,}301$ e $\log_{10}3 = 0{,}477$. Calcule log15.

Solução:

$$\log_{10}15 = \log_{10}\frac{30}{2} = \log_{10}30 - \log_{10}2 =$$
$$= \log_{10}(3 \cdot 10) - \log_{10}2 = \log_{10}3 + \log_{10}10 - \log_{10}2 =$$
$$= 0{,}477 + 1 - 0{,}301 = 1{,}176$$

Exemplo:

Sendo $\log 8 = a$ e $\log 3 = b$, vamos calcular $\log 2$ e $\log \sqrt[3]{18}$ em função de a e b:

Exercícios propostos

1) Desenvolva, aplicando as propriedades operatórias dos logaritmos (suponha a, b e c reais positivos):

a) $\log_5\left(\frac{5a}{bc}\right)$ b) $\log\left(\frac{b^2}{10a}\right)$ c) $\log_3\left(\frac{ab^2}{c}\right)$ d) $\log_2\left(\frac{8a}{b^3c^2}\right)$

2) Supondo a, b e c reais positivos, desenvolva:

a) $\log_2\left(\frac{b^2\sqrt{a}}{c}\right)$ b) $\log\sqrt{\frac{ab^3}{c^2}}$ c) $\log_3\left(\frac{ab^3}{c \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)$ d) $\log\frac{\sqrt[4]{a^2b}}{\sqrt[3]{10c}}$

3) Supondo x, y e b reais positivos e sabendo que $\log_b x = 2$ e $\log_b y = 3$, qual é o valor de:

a) $\log_b(x^2y^3)$ b) $\log_b\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{by}\right)$

Respostas

1)
a) $1 + \log_5 a - \log_5 b - \log_5 c$
b) $2 \log b - 1 - \log a$
c) $\log_3 a + 2 \log_3 b - \log_3 c$
d) $3 + \log_2 a - 3 \log_2 b - 2 \log_2 c$

2)
a) $2 \log_2 b + \frac{1}{2} \log_2 a - \log_2 c$

b) $\frac{1}{2} \log a + \frac{3}{2} \log b - \log c$

c) $\frac{1}{3} \log_3 a + 3 \log_3 b - \log_3 c$

d) $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{4} \log b - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \log c$

3)
a) 13 b) $\frac{-7}{2}$

Mudança de base

Dado $\mathbf{log_b N}$ para fazer uma mudança de base utiliza-se a relação

$$\boxed{\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}}$$

(mudança para a base a)

Exemplos:

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}$$

Esse é o modo de calcular $\log_2 5$ conhecendo $\log_{10} 5$ e $\log_{10} 2$.

$$\log_5 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 5}$$

Esse é o modo de calcular $\log_5 7$ conhecendo os logaritmos decimais de 7 e de 5.

$$\log_{100} 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 100} = \frac{\log_{10} 7}{2}$$

Esse é o modo de calcular $\log_{100} 7$ conhecendo $\log_{10} 7$.

Exercícios propostos

Escreva em base 10 os seguintes logaritmos:

a) $\log_2 7$ b) $\log_{100} 3$

Escreva em base 4 os seguintes logaritmos:

a) $\log_2 9$ b) $\log_5 8$

Função logarítmica

A função f: $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por **f(x)= log$_a$x** ($a \neq 1$; $a > 0$) é denominada função logarítmica na base ***a*** e definida para todo **x** real positivo e não nulo.

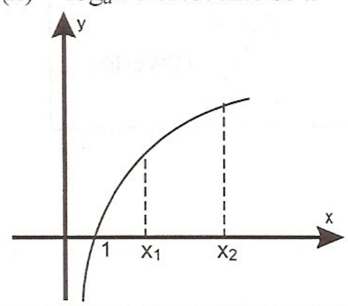
OBS:

1) y=$\log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. O significado dessa expressão é que a função logarítimica e a função exponencial são inversas uma da outra.
2) f(x)=$\log_a x \rightarrow f(1)=\log_a 1=0$. Isso significa que o par ordenado (1;0) pertence a toda função logarítmica.
3) Como a>0 e a≠1, temos duas possibilidades: a>1 ou 0<a<1.

a) Seja a>1

$x_1 < x_2 \rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Daí, f é crescente.

f(x) = log$_a$x é crescente se $a > 1$

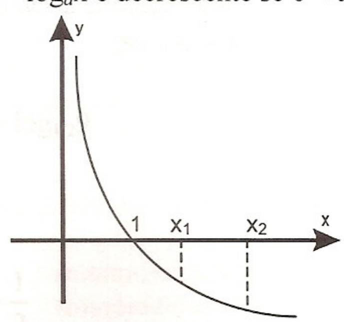


$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$
(mantém a desigualdade)

b) Seja 0<a<1

$x_1 < x_2 \rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Daí, f é decrescente.

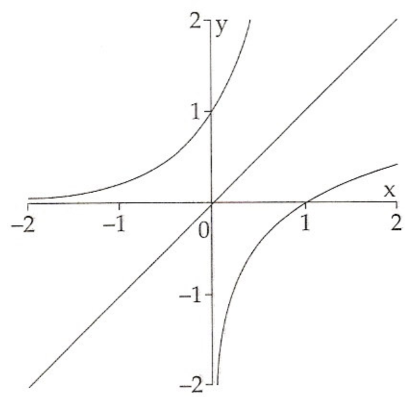
f(x) = log$_a$x é decrescente se $0 < a < 1$



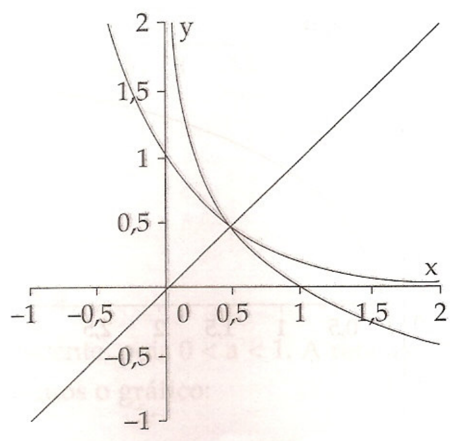
$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$
(troca a desigualdade)

O conjunto imagem da função logaritmo é igual ao domínio da função exponencial que é sua inversa; portanto, $I_m = \mathbb{R}$.

Observemos os gráficos de $y = \log_5 x$ e $y = 5^x$.



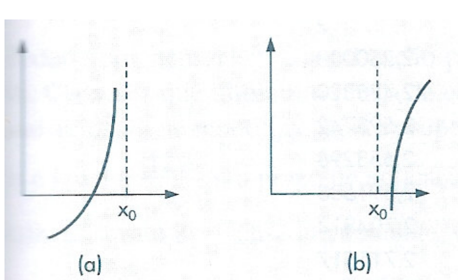
Observe, também, os gráficos de $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.



Essas funções são simétricas em relação à reta y=x.

Assíntotas horizontais e verticais a uma curva

Assíntotas verticais: paralelas ao eixo y.



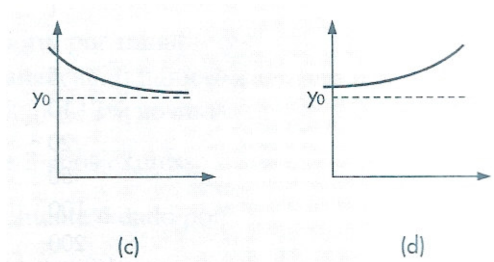
Assíntotas verticais

A reta x=a é uma assíntota vertical do gráfico da função f(x) se pelo menos uma das seguintes condições ocorrer:

1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ 2) $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ 3) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ 4) $_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

Exemplo: função tangente

Assíntotas horizontais: paralelas ao eixo x.



A reta y=b é uma assíntota horizontal do gráfico da função f(x) se pelo menos uma das seguintes condições ocorrer:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

Exemplo: f(x)=e^x

OBS: Na representação gráfica da função logarítmica, temos uma assíntota vertical x=0.

Exercício

Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico das seguintes funções:

a) log x
b) $\log_{1/6}$x

Equações logarítmicas

São equações que envolvem logaritmos. Para resolvê-las, seguimos os passos seguintes:

1. Primeiramente, estabelecemos as condições de existência, encontrando os valores de x para os quais existem todos os logaritmos mencionados na equação; para isso, os logaritmandos devem ser positivos e as bases, positivas e diferentes de 1 (conforme a definição de logaritmo)

2. Resolver a equação. Aplicamos a definição e as propriedades dos logaritmos para obter os valores de x que, se satisfazerem as condições de existência, serão soluções da equação. Existem dois casos a resolver:

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a f(x) = \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x) = a^{\alpha} \\ \log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) \end{array}}$$

Exemplo 1:

$\log_2(3x + 1) = 4$

$3x + 1 = 2^4$

$x = 5$

Restrição: $3x + 1 > 0 \therefore x > -\frac{1}{3}$

Então $S = \{5\}$

Exemplo 2:

$\log(x + 2) + \log(x - 2) = \log 3x$

$\log(x + 2)(x - 2) = \log 3x$

$(x + 2)(x - 2) = 3x$

$x^2 - 4 = 3x$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

Raízes: 4 e -1

Restrições:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \therefore x > -2 \\ x - 2 > 0 \therefore x > 2 \end{cases}$$

-1 não convém, então $S = \{4\}$

Exercícios propostos:

1) Resolva as equações logarítmicas:

a)$\log_4 x^2 = 3$ $\quad b)\log_x 81 = 2$ $\quad c)\log_x 16 = 4$ $\quad d)\log_x (3x) = 2$ $\quad e)\log_x\left(\frac{1}{81}\right) = 2$

f)$\log_{x+1} 9 = 2$ $\quad g)\log_{x-2} 4 = 2$ $\quad h)\log_2(\log_4 x) = -1$

2) Resolva as equações:

a)$\log_{11}(7x-2) = \log_{11} 5$ $\quad b)\log_x (3x) = 2$ $\quad c)\log_7(3x-4) - \log_7 x = 0$

d)$\log_3(2x-3) + \log_3\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

3) Dê o domínio das funções:

a) f(x)= $\log_4(x^2 - 6x + 8)$
b) g(x)=$\log_{x^2-4x+4} 72$
c)h(x)=$\log_{x-3}(x^2 - 7x + 10)$

Respostas dos exercícios

1) a) S={-8,8} b) S={9} c)S={2} d)S={3} e)S={1/9} f)S={2}
g) S={4} h) S={2}

2) a) S={1} b) S=ϕ c)S={2} d)S={3}

3) a) D={x∈IR/x<2 ou x>4} b)D={x∈IR/x ≠ 1, x ≠ 2, x ≠ 3} c)D={x∈IR/x>5}

Inequação logarítmica

São inequações que envolvem funções logarítmicas.

- $a > 1$
  $\log_a x > \log_a y$
  $\Downarrow$ (mantém)
  $x > y$
- $0 < a < 1$:
  $\log_a x > \log_a y$
  $\Downarrow$ (inverte)
  $x < y$

Exemplos:

(I) $\log_3(2x + 1) > \log_3 7$

$2x + 1 > 7$

$x > 3$

Restrição:

$2x + 1 > 0 \therefore x > -\dfrac{1}{2}$

fazendo a interseção desta condição com a solução temos

S= $]3, +\infty[$

(II) $\log_{1/2}(2x + 1) > \log_{1/2} 9$

$2x + 1 < 9$

$x < 4$

Restrição:

$2x + 1 > 0 \therefore x > -\dfrac{1}{2}$

fazendo a interseção temos

S= $]-\dfrac{1}{2}, 4[$

Exercícios propostos

1) Resolva as inequações:

a) $\log_3(x+6) > \log_3 11$ $\quad$ $b)\log_{1/5}(2x-1) < -2$

c)$\log_8(4x-6) < \log_8 18$ $\quad$ $d)\log_5(x-7) > 2.\log_5 6$

e)$\log_{0,21}(x-3) > \log_{0,21} 7$ $\quad$ $f)\log_2(x-4) > 3$

f) $\log_3(x+2) < 2$ $\quad$ $h)\log_{0,5}(4x-1) < 0$

Respostas:

1)a) S={x∈IR/x > 5} b)S={x∈IR/x>13}
c)S={x∈IR/3/2<x<6} d)S={x∈IR/x>43}
e)S={x∈IR/3<x<10} f)S={x∈IR/x>12}
g)S={x∈IR/-2<x<7} h)S={x∈IR/x>1/2}