Revisa Goiás

Matemática

Agosto | 2023

3ª Série

Estudante

SEDUC
Secretaria de Estado
da Educação

GOVERNO DE GOIÁS
O ESTADO QUE DÁ CERTO

Semana 1

▶ Função exponencial

Relembrando

Equação exponencial

Uma equação exponencial é uma sentença aberta expressa por uma igualdade, que possui termos em que a incógnita aparece no expoente. Exemplos:

$3^x = 81$	$4^x + 4^{x+1} = 20$
$4^x - 2^x = 20$	$9^x = 7 \cdot (3^x)$
$2^{x^2-4} = 8^{-x}$	

Para determinar a(s) raiz(es) de uma equação exponencial, utilizam-se as propriedades da potenciação, e o fato de que $a^x = a^y$, se e somente se $x = y$. Em alguns casos, a equação possui termos de diferentes bases, mas, geralmente, a aplicação das propriedades de potências permite obter potências da mesma base na equação. Exemplos:

Propriedades

$3^x=8^1$ $3^x=3^4$ $x=4$	$4^x + 4^{x+1} = 20$ $4^x + 4^x \cdot 4^1 = 20$ $4^x \cdot (1 + 4^1) = 20$ $4^x \cdot 5 = 20$ $4^x = 4 \rightarrow x = 1$	$2^{x^2-4} = 8^{-x}$ $2^{x^2-4} = (2^3)^{-x}$ $2^{x^2-4} = 2^{-3x}$ $x^2 - 4 = -3x$ $x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x' = 4$ ou $x'' = -1$

Quando não for possível, é preciso recorrer a outros métodos que serão estudados posteriormente. Exemplos:

$$4^x - 2^x = 20$$
$$(2^2)^x - 2^x = 20$$
$$(2^x)^2 - 2^x = 20$$

→ Chamando 2^x de y, tem-se:

$$y^2 - y = 20$$
$$y^2 - y - 20 = 0$$
$$(y-5) \cdot (y+4) = 0$$
$$y' = 5 \text{ ou } y'' = -4$$

Tem-se assim que: $2^x = 5$ ⚠ ou $2^x = -4$(não convém)
Para o caso utilizam-se outros métodos que serão estudados posteriormente.

$$9^x = 7 \cdot (3^x)$$
$$\frac{9^x}{3^x} = 7$$
$$\left(\frac{9}{3}\right)^x = 7$$
$$3^x = 7 \text{ ⚠}$$

→ Para o caso 3x = 7, utilizam-se outros métodos que serão estudados posteriormente.

Função exponencial

Considere um número real $\boldsymbol{a}$ maior que zero e diferente de **1**. Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = a^x$ é denominada função exponencial de base $\boldsymbol{a}$. Exemplos:

$f(x) = 2^x$	$y = 3^x$	$f(x) = (0,2)^x$
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y = 10^x$	$f(x) = \sqrt{2}^x$

As restrições para que a base $\boldsymbol{a}$ seja maior que zero e diferente de **1** são necessárias pelos seguintes motivos:

- Para $\boldsymbol{a}$ e **x** negativo, não existiria $\boldsymbol{a^x}$.

Exemplo: $(f(x) = 0^{-x} \rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{0}\right)^x \rightarrow f(x) = \nexists)$.

- Para $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{x}$ não inteiro, também não existiria $\boldsymbol{a^x}$.

Exemplo: $(f(x) = (-2)^x \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{-2} = \nexists \ em \ \mathbb{R})$.

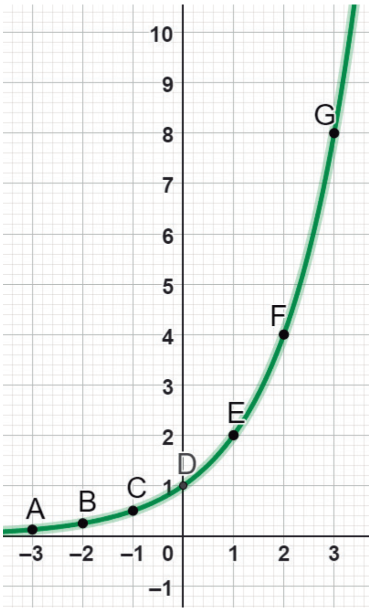
- Para $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{1} \in \mathbb{R}$, $a^x = 1$, ou seja, função constante.

Gráfico da função exponencial

Para relembrar como se comporta o gráfico de uma função exponencial, analise os seguintes exemplos:

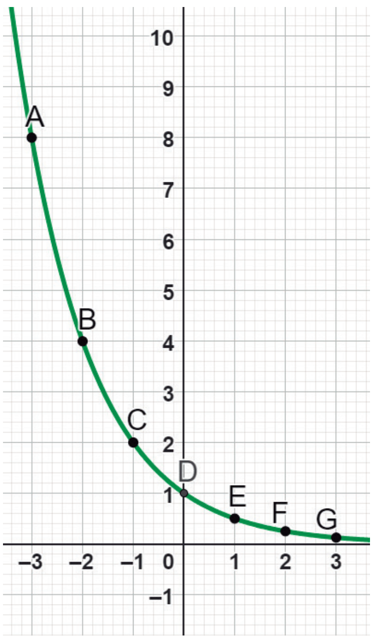
1º) $f(x) = 2^x$

Ponto	x	$f(x) = 2^x$
A	-3	$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
B	-2	$2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
C	-1	$2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
D	0	$2^0 = 1$
E	1	$2^1 = 2$
F	2	$2^2 = 4$
G	3	$2^3 = 8$



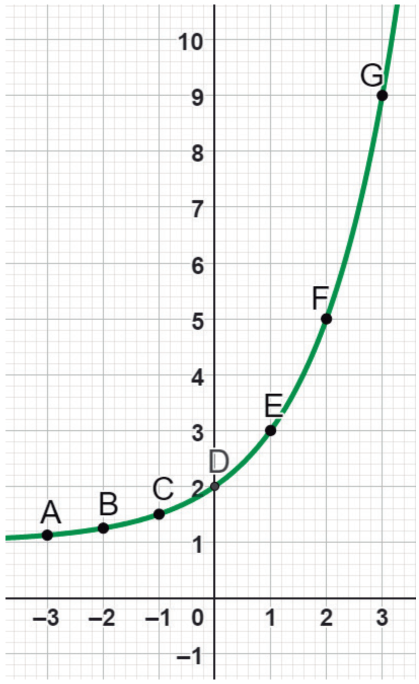
2º) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Ponto	x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
A	-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$
B	-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$
C	-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$
D	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
E	1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$
F	2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$
G	3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$



3º) $f(x) = 2^x + 1$

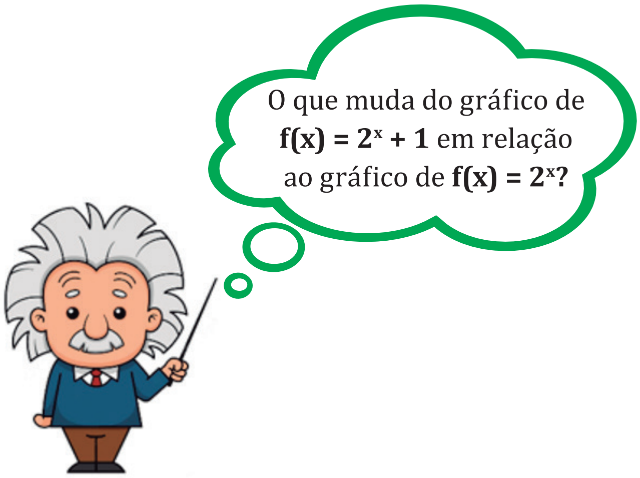
Ponto	x	$f(x) = 2^x + 1$
A	-3	$2^{-3} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}$
B	-2	$2^{-2} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$
C	-1	$2^{-1} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
D	0	$2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$
E	1	$2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$
F	2	$2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
G	3	$2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$



Pelos exemplos dados, verifica-se que:

- O domínio dessas funções é o conjunto dos números reais: $D(f) = \mathbb{R}$;
- O contradomínio é o conjunto dos números reais positivos: $CD(f) = R_+^*$;
- O conjunto imagem também é o conjunto dos números reais positivos: $Im(f) = R_+^*$;
- A função exponencial é sobrejetiva: $CD(f) = Im(f)$;
- A função exponencial é injetiva: Se $x_1 = x_2$, então e $(x_1) = f(x_2)$ e se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- A função exponencial é bijetiva (sobrejetiva e injetiva), logo, admite função inversa;
- O gráfico é uma figura chamada curva exponencial;

- Para $a > 0$ a função é crescente e para $0 < a < 1$ a função é decrescente;
- A função exponencial é ilimitada superiormente.



1. Associe a segunda coluna de acordo com a primeira.

(I) Equação do 1° grau
(II) Equação do 2° grau
(III) Equação exponencial

( ) $x + 1 = x^2 - 2$
( ) $xy + 1 = 0$
( ) $2^x = 4$
( ) $s - 2 = 3$
( ) $x + y = 2$
( ) $5^{x+2} = 125$
( ) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{625}\right)$
( ) $(4^{3-X})^{2-X} = 1$

2. Associe a segunda coluna de acordo com a primeira.

(I) Função polinomial do 1° grau
(II) Função polinomial do 2° grau
(III) Função exponencial

( ) $f(t) = t^2 - 2$
( ) $f(x) = 2^x$
( ) $y = x + \frac{1}{2}$
( ) $y = 2 - 5^{x+2}$
( ) $x + f(x) = 2$
( ) $s = -2t^2 + t - 1$
( ) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = y$
( ) $(3^{1-x})^{1+x} = y$

3. Observe os gráficos e as funções a seguir e depois faça o que se pede sobre eles.

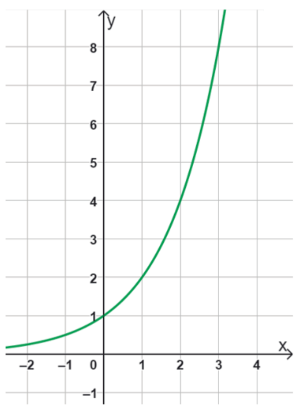


Gráfico I

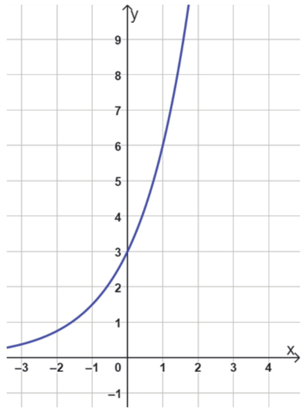


Gráfico II

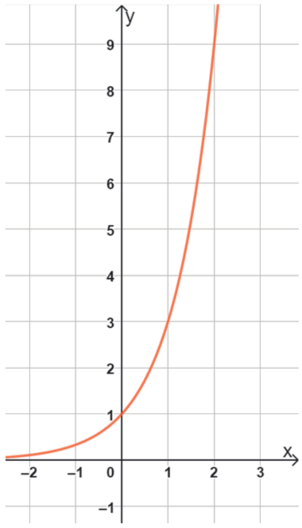


Gráfico III

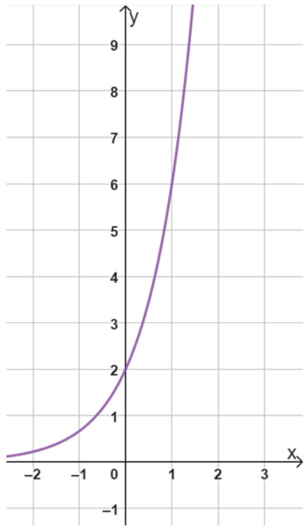


Gráfico IV

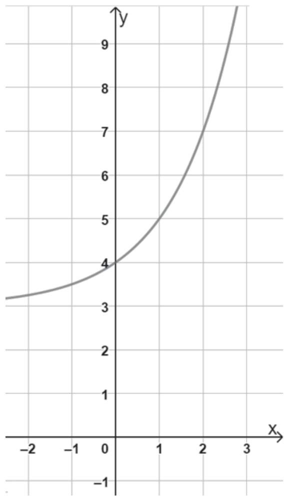


Gráfico V

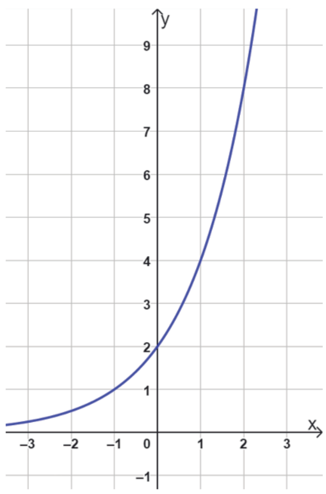


Gráfico VI

Funções
Função I: $y = 3 \cdot 2^x$
Função III: $f(x) = 2^x$
Função V: $y = 2 \cdot 3^x$
Função II: $f(x) = 2^{x+1}$

Função IV: $y = 3^x$	
Função VI: $f(x) = 3 + 2^x$	

a) Escreva as bases de cada função.

Função I: base:
Função III: base:
Função V: base:
Função II: base:
Função IV: base:
Função VI: base:

b) Marque a opção que corresponde a essas bases:

- ( ) as bases são menores do que zero.
- ( ) as bases estão entre zero e um.
- ( ) as bases são maiores do que um.

c) Os gráficos são crescentes ou decrescentes?

d) Relacione as funções aos seus respectivos gráficos.

Gráfico I •	• $y = 3 \cdot 2^x$
Gráfico II •	• $f(x) = 2^x$
Gráfico III •	• $y = 2 \cdot 3^x$
Gráfico IV •	• $f(x) = 2^{x+1}$
Gráfico V •	• $y = 3^x$
Gráfico VI •	• $f(x) = 3 + 2^x$

4. Observe os gráficos e as funções a seguir e depois faça o que se pede sobre eles.


Gráfico I

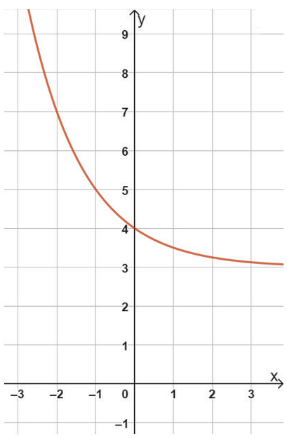


Gráfico II

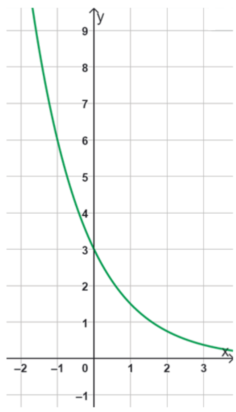


Gráfico III

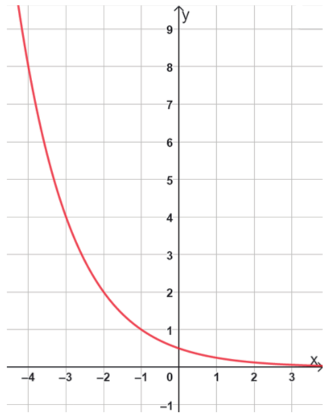


Gráfico IV

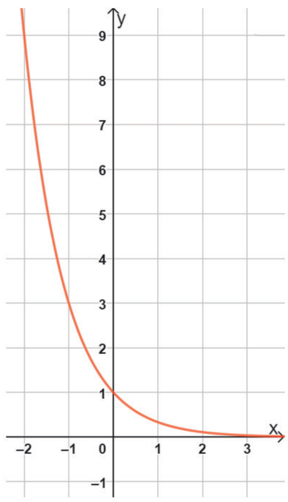


Gráfico V

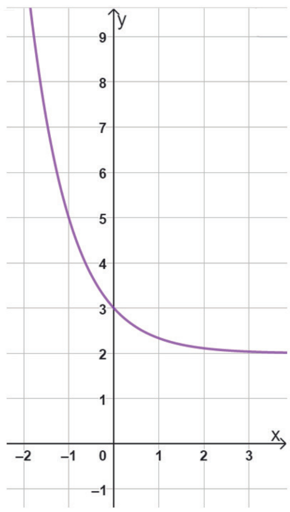


Gráfico VI

Funções
$f(x) = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)$
$y = \left(\frac{1}{3}\right)$
$f(x) = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$
$f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

a) Escreva as bases de cada função.

Função I: base:
Função III: base:
Função V: base:
Função II: base:
Função IV: base:
Função VI: base:

b) Marque a opção que corresponde a essas bases:

- ( ) as bases são menores do que zero.
- ( ) as bases estão entre zero e um.
- ( ) as bases são maiores do que um.

c) Os gráficos são crescentes ou decrescentes?

d) Relacione as funções aos seus respectivos gráficos.

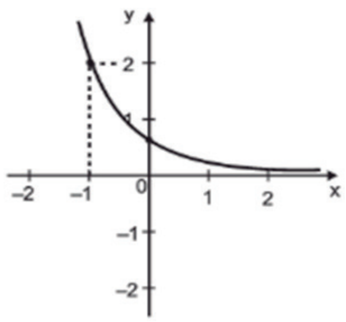
Gráfico I •	• $f(x) = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$
Gráfico II •	• $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$
Gráfico III •	• $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
Gráfico IV •	• $fy = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
Gráfico V •	• $f(x) = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$
Gráfico VI •	• $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

5. Observe a função exponencial a seguir.

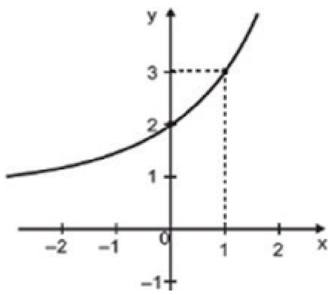
$$y = 2^x - 1$$

O gráfico que corresponde a essa função é

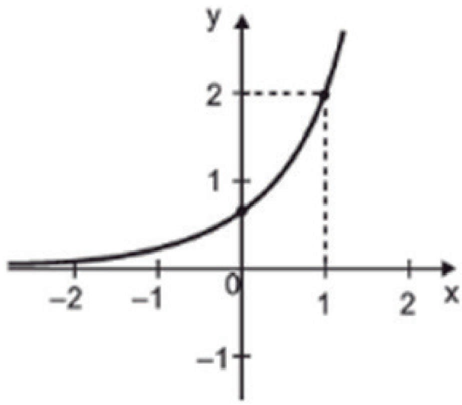
(A)



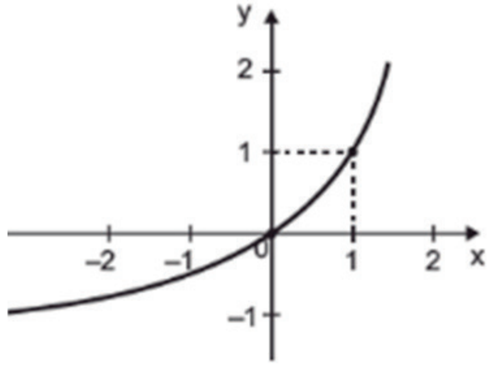
(B)



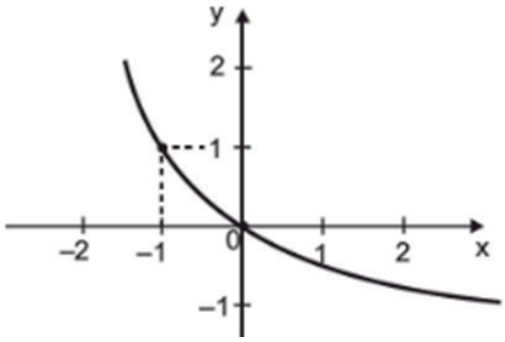
(C)



(D)



(E)



► Função logarítmica

Relembrando

Logaritmo

A qual número se deve elevar o número 2 para se obter 16?

Para responder essa pergunta, pode-se utilizar uma equação exponencial, estudada anteriormente:

$$2^x = 16 \rightarrow 2^x = 2^4 \rightarrow x = 4$$

Esse valor, o número 4, é denominado logaritmo do número 16 na base 2, e é representado por $\log_2 16$. Veja:

$$\log_2 16 = 4 \leftrightarrow 2^4 = 16$$

Generalizando:

Sejam os números reais positivos **a** e ***b***, com ***a* ≠ 1**. Se ***b* = *a*^c**, então o expoente c é o logaritmo de ***b*** na base ***a***, ou seja:

$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$, com ***a*** e ***b*** positivos e ***a* ≠ 1**, onde:
c **: logaritmo**
***a*: base do logaritmo**
***b*: logaritmando**

Exemplos:

$$\log_3 243 = 5 \leftrightarrow 3^5 = 243$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3 \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

$$\log_{\sqrt{3}} 3 = 2 \leftrightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

$$\log_{13} 1 = 0 \leftrightarrow 13^0 = 1$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3 \leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Quando a base do logaritmo for 10, pode-se omitir a sua escrita. Por exemplo: $\log_{10} 100 = \log 100$. Os logaritmos de base 10 são chamados de logaritmos decimais ou logaritmos de Briggs.

Consequências da definição de logaritmo:

1ª) $\log_a 1 = 0$ pois $a^0 = 1$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$;

2ª) $\log_a a = 1$ pois $a^1 = a$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$;

3ª) $\log_a a^n = n$ pois $a^n = a^n$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$ e qualquer que seja n;

4ª) $a^{\log_a N} = N$, com $N > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$;

5ª) $\log_a x = \log_a y \leftrightarrow x = y$, com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Propriedades operatórias dos logaritmos:

Logaritmo de um produto
$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$
Logaritmo de um quociente.
$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
Logaritmo de uma potência.
$\log_a M^N = N \cdot \log_a M$
Mudança de base.
$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$
Consequências da mudança de base
$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \rightarrow \log_b a \cdot \log_a b = 1$

Voltando às equações exponenciais estudadas anteriormente, utiliza-se a definição de logaritmo aqui estudada.

$$4^x - 2^x = 20$$
$$(2^2)^x - 2^x = 20$$
$$(2^x)^2 - 2^x = 20$$

→ Chamando 2x de y, tem-se:

$$y^2 - y = 20$$
$$y^2 - y - 20 = 0$$
$$(y - 5) \cdot (y + 4) = 0$$
$$y' = 5 \text{ ou } y'' = -4$$

→ Tem-se assim que: $2^x = 5$ ou $2^x = -4$ (não convém)

→ Para o caso $2^x = 5$ tem-se que $x = \log_2 5$

$$9^x = 7 \cdot (3^x)$$
$$\frac{9^x}{3^x} = 7$$
$$\left(\frac{9}{3}\right)^x = 7$$
$$3^x = 7$$

→ Para o caso $3^x = 7$ tem-se que $x = \log_3 7$

Para logaritmos como esses, dispõem-se de três formas de cálculo:

- Calculadora;
- Tabelas de valores ou tabela de logaritmos (anexo);
- Por meio de alguns logaritmos dados.

Exemplo: Dado $\log 2 = 0{,}3$, calcule $\log_2 5$:

$$\log_2 5 = \log_2 \left(\frac{10}{2}\right) = \log_2 10 - \log_2 2 = \log_2 10 - \log_2 2 = \log_2 10 - 1$$

$$= \frac{\log 10}{\log 2} - 1 = \frac{1}{\log 2} - 1 = \cdots$$

(O valor de log 2 foi dado no enunciado, mas poderia ser obtido por meio de uma tabela ou calculadora pela tecla [log])

$$\dots \cong \frac{1}{0,3} - 1 \cong \frac{10}{3} - \frac{3}{3} \cong \frac{7}{3} \cong 2,333\ \dots$$

Observação: geralmente, as calculadoras só calculam logaritmos naturais ou decimais. Assim, utilizando as propriedades dos logaritmos, pode-se mudar suas bases, como foi feito no exemplo.

Função logarítmica

Anteriormente, foi mostrada que a função exponencial é bijetiva, ou seja, ela possui uma função inversa.

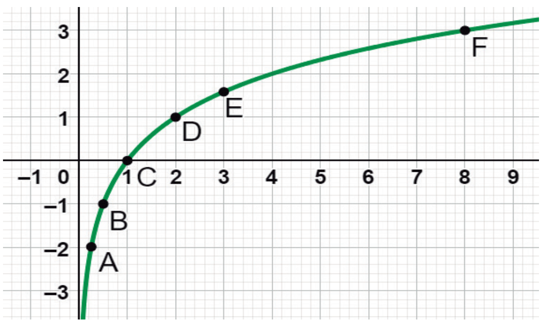
A função inversa da função exponencial $f(x) = a^x$ tal que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é a função logarítmica $g(x) = \log_a x$ tal que $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

$f(x) = a^x \to f(\log_a x) = a^{\log_a x} \to f(\log_a x) = x$
$g(x) = \log_a x \to g(a^x) = \log_a a^x \to g(a^x) = x$
Observe que a função composta $f(g(x)) = g(f(x))$, o que confirma que é inversa à $g(x)$.

Exemplos:

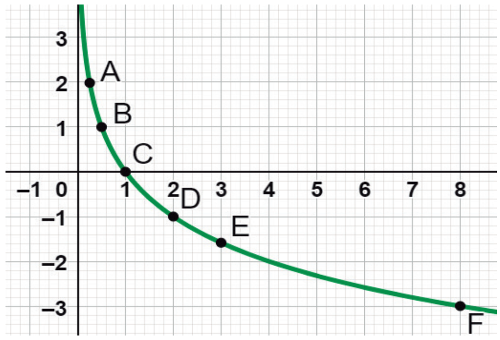
1º) $f(x) = \log_2 x$

Ponto	A	B	C	D	E	F
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	8
$f(x) = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

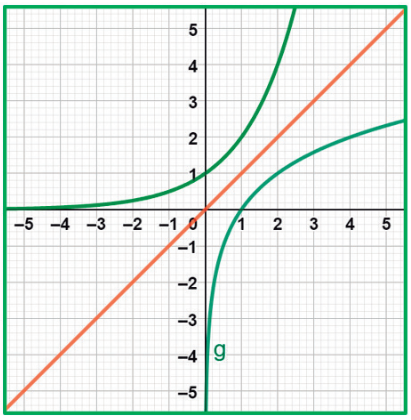


2º) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Ponto	A	B	C	D	E	F
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	8
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2	-3



Importante!



Vimos que a função $f(x) = a^x$ e a função $g(x) = \log_a x$ são duas funções inversas. Assim, os gráficos de $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$ são simétricos em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes I e III).

Anexo:

Logaritmos decimais (base 10)			
x	log(x)	x	log(x)
1	0	26	1,414973
2	0,30103	27	1,431364
3	0,477121	28	1,447158
4	0,60206	29	1,462398
5	0,69897	30	1,477121
6	0,778151	31	1,491362
7	0,845098	32	1,50515
8	0,90309	33	1,518514
9	0,954243	34	1,531479
10	1	35	1,544068
11	1,041393	36	1,556303
12	1,079181	37	1,568202
13	1,113943	38	1,579784
14	1,146128	39	1,591065
15	1,176091	40	1,60206

16	1,20412	41	1,612784
17	1,230449	42	1,623249
18	1,255273	43	1,633468
19	1,278754	44	1,643453
20	1,30103	45	1,653213
21	1,322219	46	1,662758
22	1,342423	47	1,672098
23	1,361728	48	1,681241
24	1,380211	49	1,690196
25	1,39794	50	1,69897

6. Associe a segunda coluna de acordo com a primeira.

(I) Equação do 1° grau
(II) Equação do 2° grau
(III) Equação exponencial
(IV) Equação logarítmica

( ) $\log(2x+1) = \log 10$
( ) $-1 = xy$
( ) $3^x = 27$
( ) $\log 42 = \log 2x$
( ) $x + y = 3$
( ) $4^{x+2} = 256$
( ) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = \left(\frac{1}{7776}\right)$
( ) $(7^{3-x})^x = 0$
( ) $\log x = \log 3$

7. Faça as seguintes associações:

(I) Função polinomial do 1° grau
(II) Função polinomial do 2° grau
(III) Função exponencial
(IV) Função logarítmica

( ) $f(x) = log_5\,(x+9)$
( ) $y = log_5\,(x+9)$
( ) $y = 3^x + 2$
( ) $f(x) = log_{x^2}\,(\frac{1}{2} - x)$
( ) $f(x) = log_{18}\,2^x$
( ) $f(x) = 4^{x+2}$
( ) $y = x^2 + 1$
( ) $x + f(x) = 2x$
( ) $y = log_7\,(x^2 - 2x + 1)$

8. Observe as funções e os gráficos a seguir e depois faça o que se pede sobre eles.

• Funções

i) $y = \log_2 (x)$
ii) $y = \log_2 (x+1)$
iii) $y = \log_2 (x-1)$
iv) $y = 1 + \log_2 (x)$
v) $y = -1 + \log_2 (x)$

• Gráficos

Gráfico 1

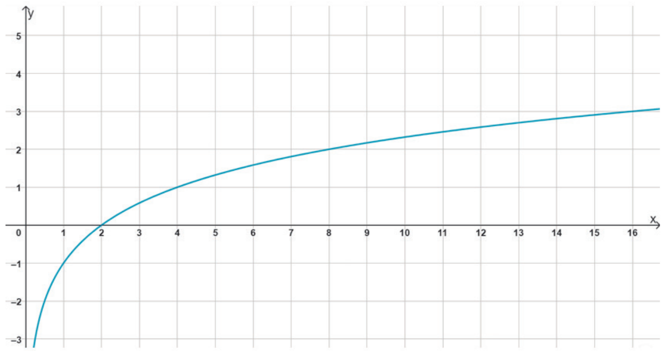


Gráfico 2

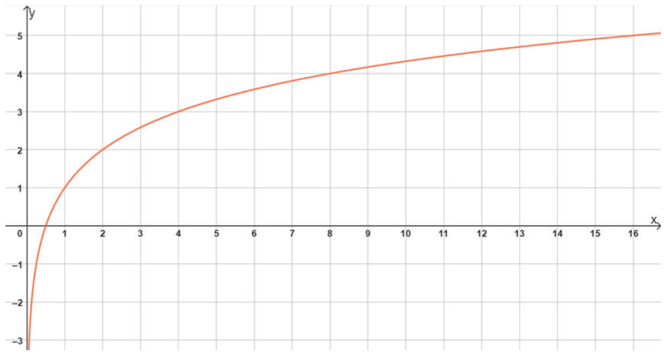


Gráfico 3

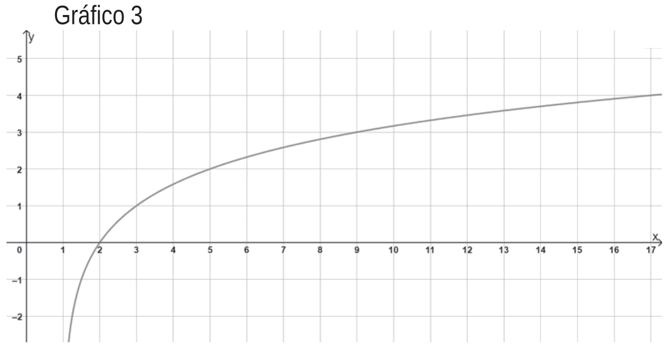


Gráfico 4

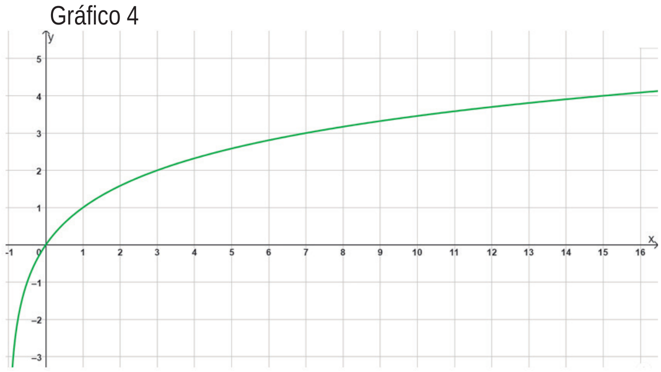
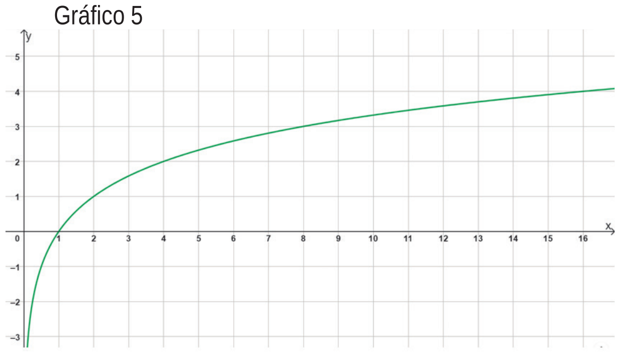


Gráfico 5



a) Qual é a base das funções dadas?
b) Preencha os quadros a seguir referentes às cinco funções dadas.

Função i) $y = \log_2 (x)$	
Para x igual a	y é igual a
1	
2	
4	
8	

Função ii) $y = \log_2 (x+1)$	
Para x igual a	y é igual a
0	
1	
3	
7	

Função iii) $y = \log_2 (x-1)$	
Para x igual a	y é igual a
2	
5	
9	
17	

Função iv) $y = 1 + \log_2 (x)$	
Para x igual a	y é igual a
$\frac{1}{2}$	
1	
4	
8	

Função v) $y = -1 + \log_2 (x)$	
Para x igual a	y é igual a
1	
2	
4	
8	

c) Os gráficos representam funções:
• ( ) exponenciais.
• ( ) polinomial do 1° grau.
• ( ) polinomial do 2° grau.
• ( ) logarítmica.

d) Esses gráficos correspondem às funções crescentes ou decrescentes?

e) De acordo com a letra b), relacione as funções dadas aos seus respectivos gráficos.

	Funções	Gráficos
i)	$y = \log_2 (x)$	
ii)	$y = \log_2 (x+1)$	
iii)	$y = \log_2 (x-1)$	
iv)	$y = 1 + \log_2 (x)$	
v)	$y = -1 + \log_2 (x)$	

9. Observe as funções e os gráficos a seguir e depois faça o que se pede sobre eles.

• Funções

i) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$

ii) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x)$

iii) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

iv) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

v) $y = 1 + \log_{\frac{1}{3}}(x)$

vi) $y = -1 + \log_{\frac{1}{2}}(x)$

• **Gráficos**

Gráfico 1

Gráfico 2

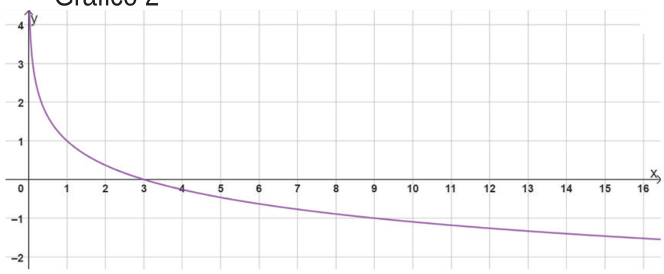


Gráfico 3

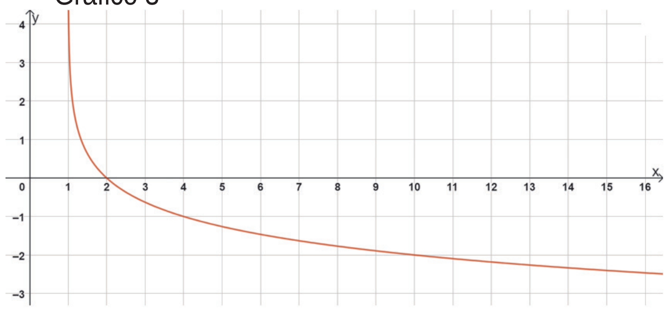


Gráfico 4

Gráfico 5

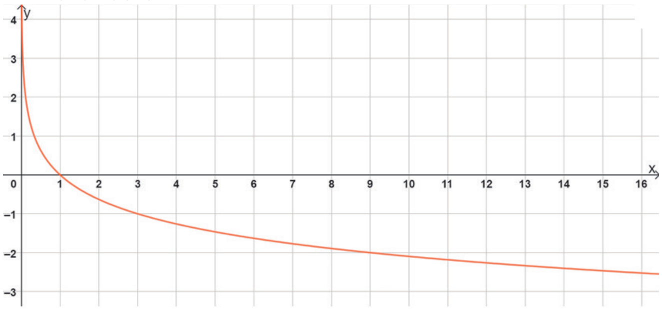


Gráfico 6

a) Qual é a base das funções dadas?

b) Preencha os quadros a seguir referentes às cinco funções dadas.

Função i) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$	
Para x igual a	y é igual a
1	
4	
8	
16	

Função ii) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x)$	
Para x igual a	y é igual a
1	
3	
9	
27	

Função iii) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$	
Para x igual a	y é igual a
0	
1	
3	
7	

Função iv) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$	
Para x igual a	y é igual a
2	
4	
10	
28	

Função v) $y = 1 + \log_{\frac{1}{3}}(x)$	
Para x igual a	y é igual a
1	
3	
9	
27	

Função vi) $y = -1 + \log_{\frac{1}{2}}(x)$	
Para x igual a	y é igual a
$\frac{1}{2}$	
1	
4	
8	

c) Os gráficos representam funções:

- ( ) exponenciais.
- ( ) polinomial do 1° grau.
- ( ) polinomial do 2° grau.
- ( ) logarítmica.

d) Esses gráficos correspondem às funções crescentes ou decrescentes?

e) De acordo com a letra b), relacione as funções dadas aos seus respectivos gráficos.

	Funções	Gráficos
i)	$y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$	
ii)	$y = \log_{\frac{1}{3}}(x)$	

iii)	$y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$	
iv)	$y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$	
v)	$y = 1 + \log_{\frac{1}{3}}(x)$	
vi)	$y = -1 + \log_{\frac{1}{2}}(x)$	

10. Observe o exemplo a seguir.
Como se determina a lei de formação da função inversa?

Exemplo: $y = 3^x$

Trocando x por y → $x = 3^y$

Aplicando logaritmo de base 3 dos dois lados:

$$\log_3 x = \log_3 3^y$$

$$\log_3 x = y \log_3 3$$

$$\log_3 x = y \cdot 1$$

$$\log_3 x = y$$
$$y = \log_3 x$$

Então a inversa da função $y = 3^x$ é a função $y = \log_3 x$.

Determine as funções inversas das funções a seguir.

a) $f(x) = 2^x$

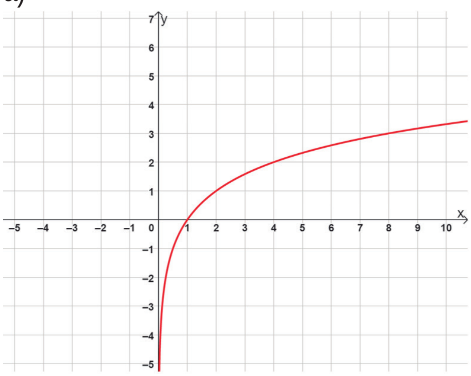
b) $y = 3 \cdot 2^x$

c) $f(x) = 2^{x+1}$

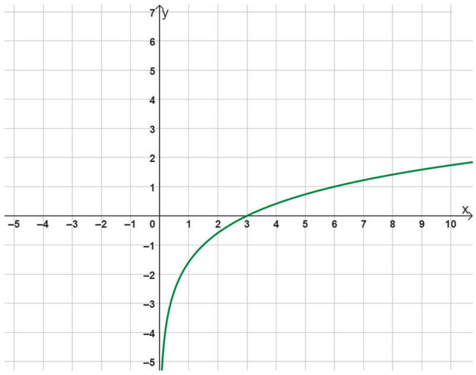
d) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

11. Observando os gráficos das atividades envolvendo funções exponenciais e logarítmicas, represente, no plano cartesiano a seguir, as funções e suas respectivas inversas da atividade 10.

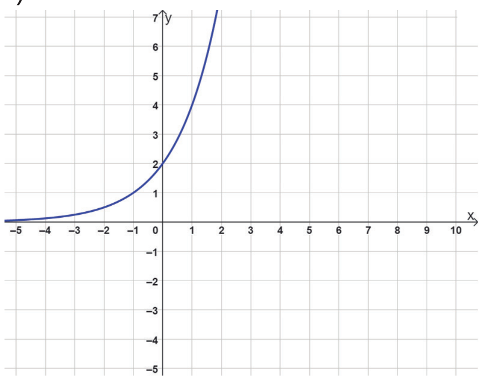
a)



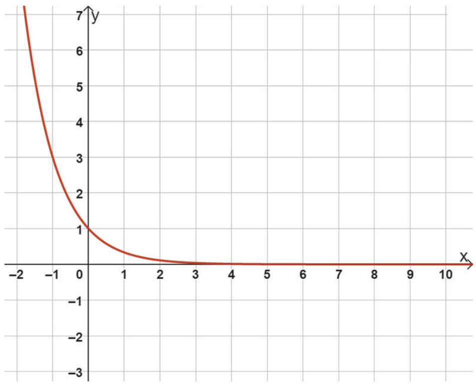
b)



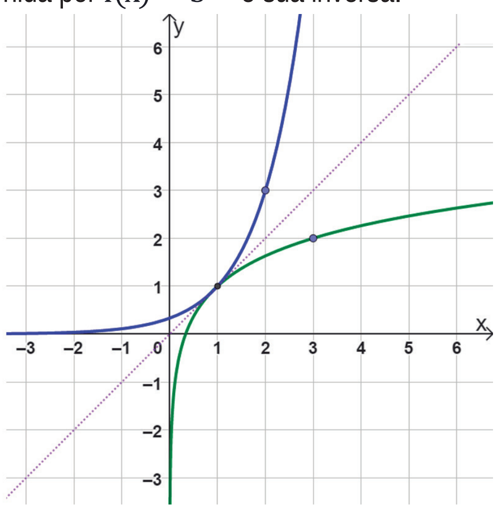
c)



d)



12. No gráfico, a seguir, está representada a função definida por $f(x) = 3^{x-1}$ e sua inversa.



A inversa dessa função representada nesse plano cartesiano $f^{-1}(x) = y$ é

(A) $y = \log_{(x-1)}(3)$
(B) $y = \log_3(x-1)$
(C) $y = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)}(x-1)$
(D) $y = 1 + \log_3(x)$
(E) $y = -1 + \log_3(x)$

13. (ENEM 2020) A Lei de Zipf, batizada com o nome do linguista americano George Zipf, é uma lei empírica que relaciona a frequência (f) de uma palavra em um dado texto com o seu ranking (r). Ela é dada por

$$f = \frac{A}{r^B}$$

O ranking da palavra é a sua posição ao ordenar as palavras por ordem de frequência. Ou seja, $r = 1$ para a palavra mais frequente, $r = 2$ para a segunda palavra mais frequente e assim sucessivamente. A e B são constantes positivas.

Disponível em: http://klein.sbm.org.br. Acesso em: 12 ago. 2020 (adaptado).

Com base nos valores de $X = \log(r)$ e $Y = \log(f)$, é possível estimar valores para A e B.
No caso hipotético em que a lei é verificada exatamente, a relação entre Y e X é

(A) $Y = \log(A) - B \cdot X$
(B) $Y = \dfrac{\log(A)}{X + \log(B)}$
(C) $Y = \dfrac{\log(A)}{B} - X$
(D) $Y = \dfrac{\log(A)}{B \cdot X}$
(E) $Y = \dfrac{\log(A)}{X^B}$

14. (ENEM 2019) Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é $h = 5 \cdot \log_2(t+1)$ em que t é o tempo contado em dia e h a altura da planta em centímetro.
A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dia, ela alcançará sua altura máxima?

(A) 63.
(B) 96.
(C) 128.
(D) 192.
(E) 255.

15. (ENEM 2018) Em março de 2011, um terremoto de 9,0 graus de magnitude na escala Richter atingiu o Japão matando milhares de pessoas e causando grande destruição. Em janeiro daquele ano, um terremoto de 7,0 graus na escala Richter atingiu a cidade de Santiago Del Estero, na Argentina. A magnitude de um terremoto, medida pela escala Richter, é $R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, em que A é a amplitude do movimento vertical do solo, informado em um sismógrafo, A_0 é uma amplitude de referência e log representa o logaritmo na base 10.

Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado).

A razão entre as amplitudes dos movimentos verticais dos terremotos do Japão e da Argentina é

(A) 1,28.
(B) 2,0.
(C) 10^{97}.
(D) 100.
(E) $10^9 - 10^7$.

Semana 2

► Problemas envolvendo função exponencial

Relembrando

Como resolver problemas envolvendo função exponencial

Você precisa saber que os problemas se classificam em:

- Exercício de reconhecimento: o estudante deve identificar ou lembrar um conceito, um fato específico, uma definição, uma propriedade etc.
- Problemas-padrão: a solução do problema já está contida no próprio enunciado, e a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, identificando as operações ou algoritmos necessários para resolvê-lo.
- Problemas-processo ou heurísticos: são problemas cuja solução envolve operações que não estão contidas no enunciado.
- Problemas de aplicação: são aqueles que retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos. São também chamados de situações-problema.

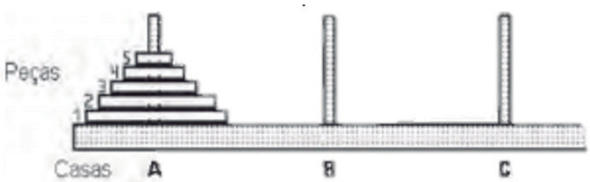
Como resolver uma equação exponencial

Conhecendo as propriedades de potência, para resolver uma equação exponencial, utilizam-se essas propriedades para igualar as bases nos dois membros da igualdade. Quando as bases são iguais, pela propriedade de igualdade de potência, os expoentes são iguais. Igualando-se os expoentes, basta resolver a equação polinomial gerada.

16. (ENEM 2013) Em um experimento, uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida. Neste experimento, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo

(A) afim.
(B) seno.
(C) cosseno.
(D) logarítmica crescente.
(E) exponencial.

17. (ENEM 2011) A torre de Hanói é um jogo que tem o objetivo de mover todos os discos de uma haste para outra, utilizando o menor número possível de movimento, respeitando-se as regras.



As regras são:
1- um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor;
2- pode-se mover um único disco por vez;
3- um disco deve estar sempre em uma das três hastes ou em movimento.

Disponível em: http://www.realidadevirtual.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Disponível em: http://www.imeusp.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Usando a torre de Hanói e baseando-se nas regras do jogo, podemos montar uma tabela entre o número de peças (X) e o número mínimo de movimentos (Y):

Número de peças	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15

A relação entre (X) e (Y) é

(A) $Y = 2^X - 1$

(B) $Y = 2^{X-1}$

(C) $Y = 2^X$

(D) $Y = 2X - 1$

(E) $Y = 2X - 4$

18. (ENEM 2021) Um laboratório realizou um teste para calcular a velocidade de reprodução de um tipo de bactéria. Para tanto, realizou um experimento para observar a reprodução de uma quantidade x dessas bactérias por um período de duas horas. Após esse período, constava no habitáculo do experimento uma população de 189 440 da citada bactéria. Constatou-se, assim, que a população de bactérias dobrava a cada 0,25 hora.

A quantidade inicial de bactérias era de

(A) 370.
(B) 740.
(C) 1 480.
(D) 11 840.
(E) 23 680.

19. (ENEM 2020) Enquanto um ser está vivo, a quantidade de carbono 14 nele existente não se altera. Quando ele morre, essa quantidade vai diminuindo. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5 730 anos, ou seja, num fóssil de um organismo que morreu há 5 730 anos haverá metade do carbono 14 que existia quando ele estava vivo. Assim, cientistas e arqueólogos usam a seguinte fórmula para saber a idade de um fóssil encontrado: $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-t/5730}$ em que t é o tempo, medido em ano, $Q(t)$ é a quantidade de carbono 14 medida no instante t e Q_0 é a quantidade de carbono 14 no ser vivo correspondente. Um grupo de arqueólogos, numa de suas expedições, encontrou 5 fósseis de espécies conhecidas e mediram a quantidade de carbono 14 neles existente. Na tabela temos esses valores juntamente com a quantidade de carbono 14 nas referidas espécies vivas.

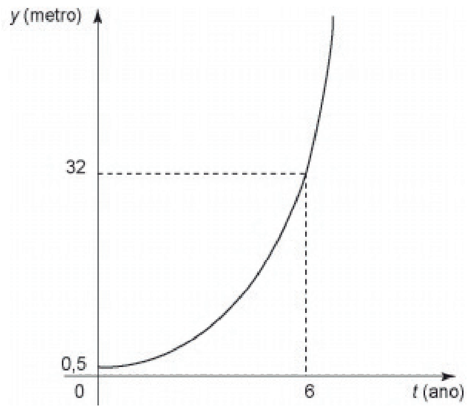
Fóssil	Q_0	$Q(t)$
1	128	32
2	256	8
3	512	64
4	1 024	512
5	2 048	128

O fóssil mais antigo encontrado nessa expedição foi

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

20. (ENEM 2015) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1\,800 \cdot (1{,}03)^t$.
De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional de empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais,
(A) 7 416,00.
(B) 3 819,24.
(C) 3 709,62.
(D) 3 708,00.
(E) 1 909,62.

21. (ENEM 2016) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$ na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1 . O gráfico representa a função y.



Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio.
O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a
(A) 3.
(B) 4.
(C) 6.
(D) $\log_2 7$.
(E) $\log_2 15$.

22. (ENEM 2016) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:
$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$ em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.
Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será
(A) reduzida a um terço.
(B) reduzida à metade.
(C) reduzida a dois terços.
(D) duplicada.
(E) triplicada.

23. (ENEM 2015) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere a quantidade anual de produtos fabricados no ano de funcionamento da indústria.
Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t \geq 1$?
(A) $P(t) = 0{,}5 \cdot {}^{t-1} + 8\,000$
(B) $P(t) = 50 \cdot {}^{t-1} + 8\,000$
(C) $P(t) = 4\,000 \cdot t^{-1} + 8\,000$
(D) $P(t) = 8\,000 \cdot (0{,}5)^{t-1}$
(E) $P(t) = 8\,000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$