



**1ª
SÉRIE**

CANAL SEDUC-PI1



PROFESSOR (A):

**Henrique
Gomes**



DISCIPLINA:

Matemática



CONTEÚDO:

**Função
Modular**



TEMA GERADOR:

**Arte na
Escola**



DATA:

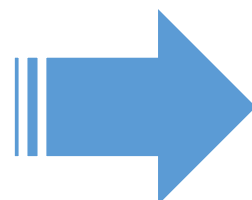
11.10.2019



FUNÇÃO MODULAR

1. Módulo de um número real

O **módulo** ou **valor absoluto** de um número real r , é representado por $|r|$ e definido da seguinte maneira:


$$|r| = \begin{cases} r, & \text{se } r \geq 0 \\ -r, & \text{se } r < 0 \end{cases}$$

Então:

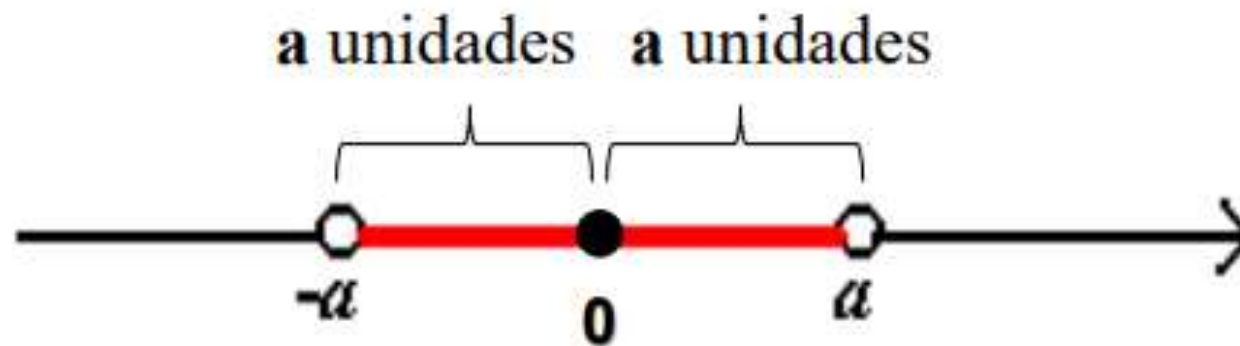
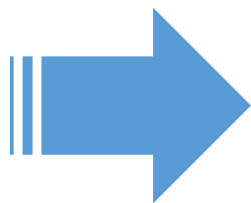
- Se r é positivo ou zero, $|r|$ é igual ao próprio r .
- Se r é negativo, $|r|$ é igual a $-r$.



FUNÇÃO MODULAR

1. Módulo de um número real

- O **módulo** de um número real é **sempre positivo ou nulo**, nunca é negativo.
- Geometricamente, o **módulo** de um número indica, na reta real, a **distância** desse número ao zero. Assim:





FUNÇÃO MODULAR

1. Módulo de um número real

Propriedades:

➤ 1º) Para todo $r \in \mathbb{R}$, temos que $|r| = |-r|$.

Exemplos:

a) $|7| = |-7| = 7$

b) $|-4| = |4| = 4$

c) $|1/2| = |-1/2| = 1/2$

➤ 2º) Para todo , temos $|r^2| = |r|^2 = r^2$.

Exemplos:

a) Para $r = 6 \rightarrow r^2 = 36$, $|r^2| = |36|$ e $|r|^2 = |6|^2 = 6^2 = 36$

b) Para $r = -5 \rightarrow r^2 = 25$, $|r^2| = |25|$ e $|r|^2 = |-5|^2 = 5^2 = 25$



FUNÇÃO MODULAR

1. Módulo de um número real

Propriedades:

➤ 3º) Para todo r e x pertencentes a $\mathbb{R}$, $|r \cdot x| = |r| \cdot |x|$

Exemplo:

$$\begin{aligned} \text{a) } r = 2 \text{ e } x = 3 &\rightarrow |2 \cdot 3| = |2| \cdot |3| = 2 \cdot 3 = 6 \\ &|2 \cdot 3| = |6| = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } r = -2 \text{ e } x = 5 &\rightarrow |-2 \cdot 5| = |-2| \cdot |5| = 2 \cdot 5 = 10 \\ &|-2 \cdot 5| = |-10| = 10 \end{aligned}$$



FUNÇÃO MODULAR

1. Módulo de um número real

Propriedades:

➤ 4º) Para todo r e x pertencentes a $\mathbb{R}$, $|r + x| \leq |r| + |x|$

Exemplos:

$$\text{a) } r = 2 \text{ e } x = 3 \rightarrow |2 + 3| \leq |2| + |3|$$

$$|5| \leq 2 + 3$$

$$5 \leq 5$$

$$\text{b) } r = -4 \text{ e } x = 7 \rightarrow |-4 + 7| \leq |-4| + |7|$$

$$|3| \leq 4 + 7$$

$$3 \leq 11$$



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

1. Qual o valor de: $|-2 + 3|$?

a) 2

b) 3

c) 1

d) 0

e) -1

$$|-2 + 3| = |1| = 1.$$



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

2. Os valores de $|2|$, $|0|$ e $|-80|$ são, respectivamente:

a) -2 , 0 e -80 .

b) 2 , 0 e -80 .

c) -2 , 0 e 80 .

d) 2 , 0 e 80

$$|2| = 2$$

$$|0| = 0$$

$$|-80| = 80$$



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

3. Qual o valor de $|7 - \sqrt{70}|$?

a) $7 - \sqrt{10}$

b) $\sqrt{70} - 7$

c) $\sqrt{10}$

d) 7

e) - 7

É um
NÚMERO
NEGATIVO!

$$|7 - \sqrt{70}| =$$

$$-7 + \sqrt{70} =$$

$$\sqrt{70} - 7$$

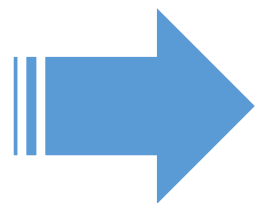


FUNÇÃO MODULAR

2. Função Modular

AQUI!

Chamamos de **função modular** a função f , de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que f apresenta o módulo na sua lei de formação. A função modular mais elementar é dada por $f(x) = |x|$, que pode ser reescrita por:



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (\text{NEGATIVO})$$

Observe, então, que a função modular é uma função definida por duas sentenças.

**1ª
SÉRIE**

CANAL SEDUC-PI1



PROFESSOR (A):

**Henrique
Gomes**



DISCIPLINA:

Matemática



CONTEÚDO:

**Função
Modular**



TEMA GERADOR:

**Arte na
Escola**



DATA:

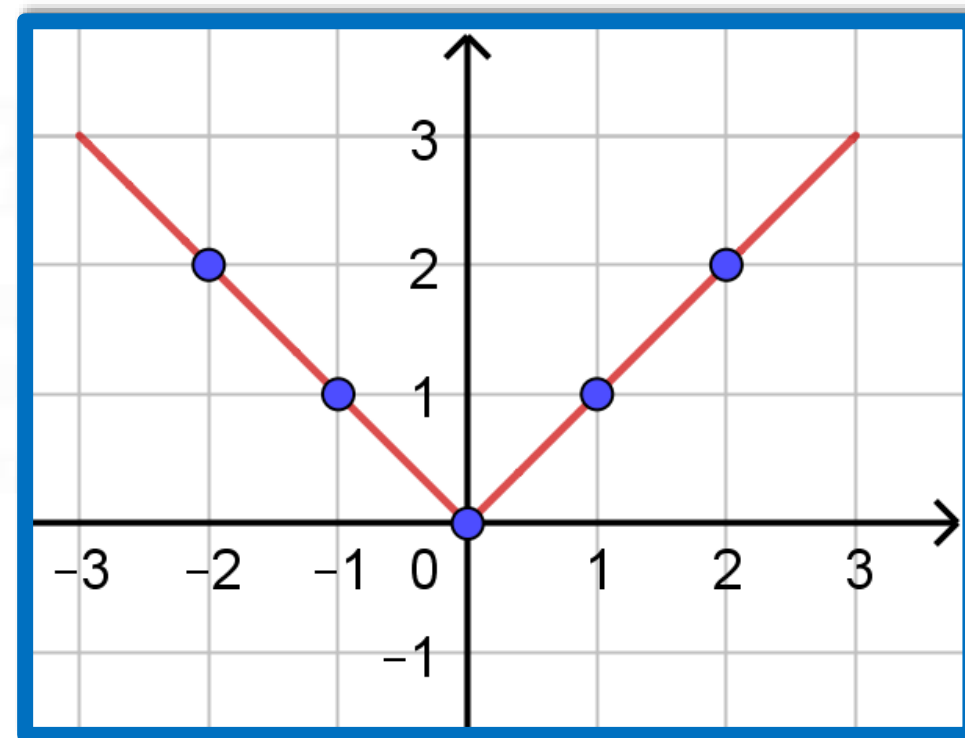
18.10.2019



FUNÇÃO MODULAR

3. Gráfico da Função Modular $f(x) = |x|$

Atribuimos valores para x (qualquer valor)	Calculamos o valor de $y = f(x)$	Obtemos um par ordenado (x, y)
x	$y = f(x) = x $	(x, y)
-2	$y = f(-2) = -2 = 2$	$(-2, 2)$
-1	$y = f(-1) = -1 = 1$	$(-1, 1)$
0	$y = f(0) = 0 = 0$	$(0, 0)$
1	$y = f(1) = 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$y = f(2) = 2 = 2$	$(2, 2)$

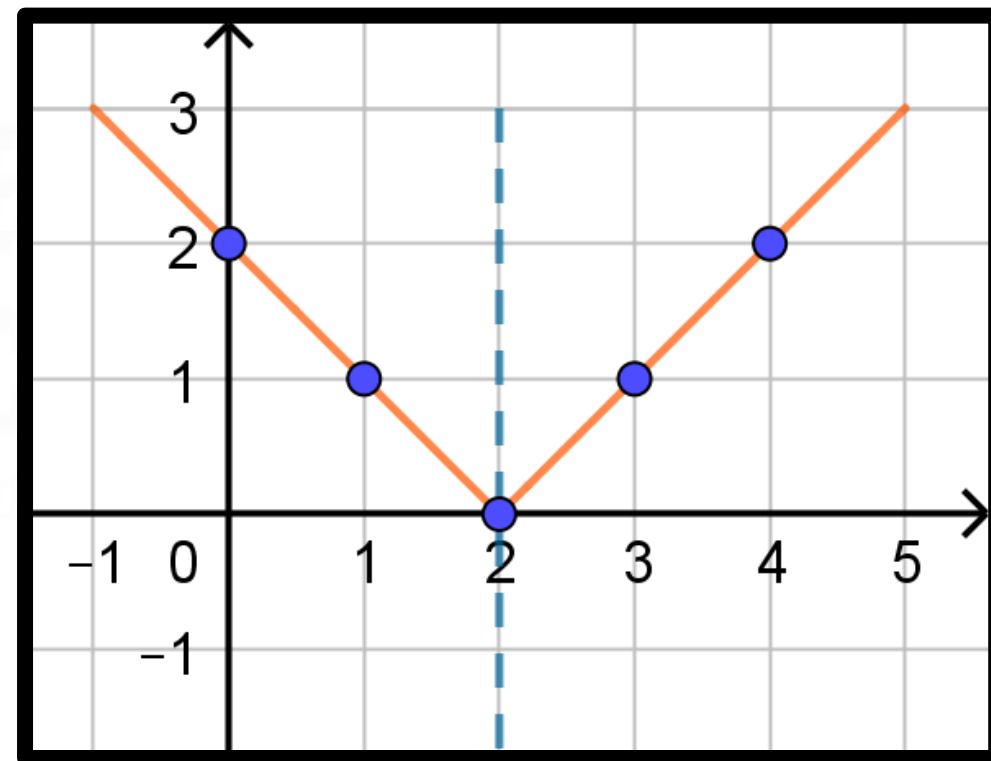




FUNÇÃO MODULAR

4. Gráfico da Função Modular $f(x) = |x - 2|$

Atribuímos valores para x (qualquer valor)	Calculamos o valor de $y = f(x)$	Obtemos um par ordenado (x, y)
x	$y = x - 2 $	(x, y)
0	$y = 0 - 2 = 2$	(0, 2)
1	$y = 1 - 2 = 1$	(1, 1)
2	$y = 2 - 2 = 0$	(2, 0)
3	$y = 3 - 2 = 1$	(3, 1)
4	$y = 4 - 2 = 2$	(4, 2)

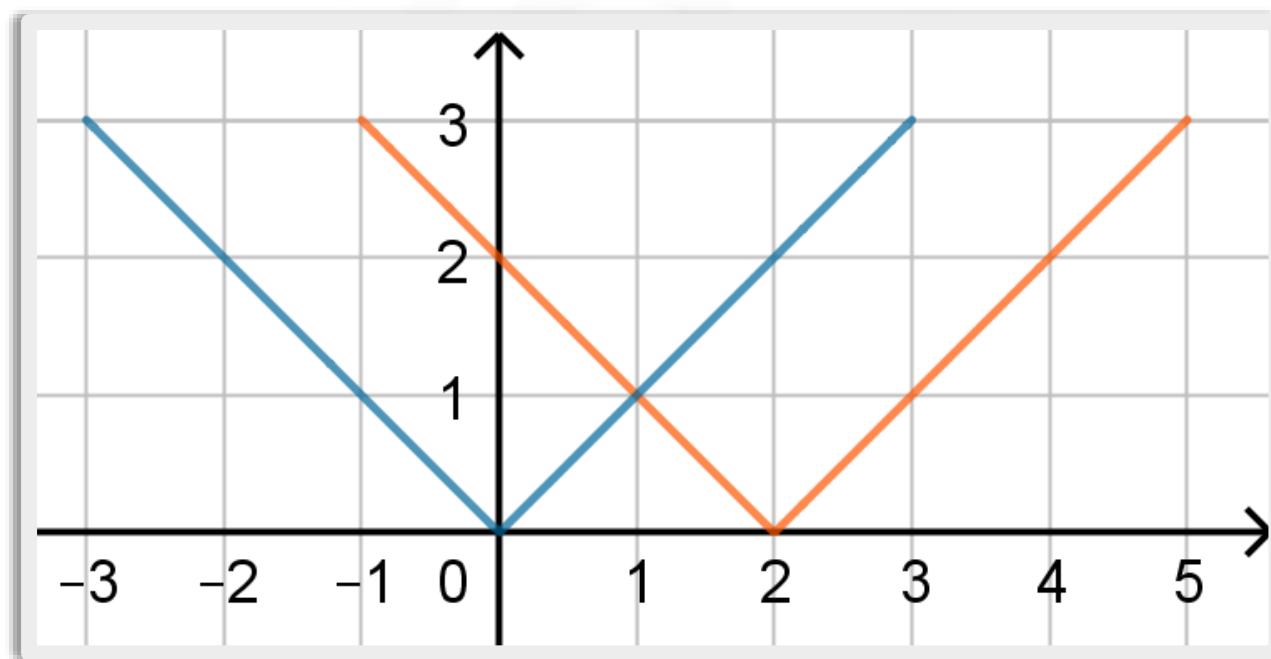




FUNÇÃO MODULAR

5. Comparando os gráficos de $f(x) = |x|$ e $f(x) = |x - 2|$

Comparando os dois gráficos vistos:



■ $f(x) = |x|$

■ $f(x) = |x - \underline{2}|$

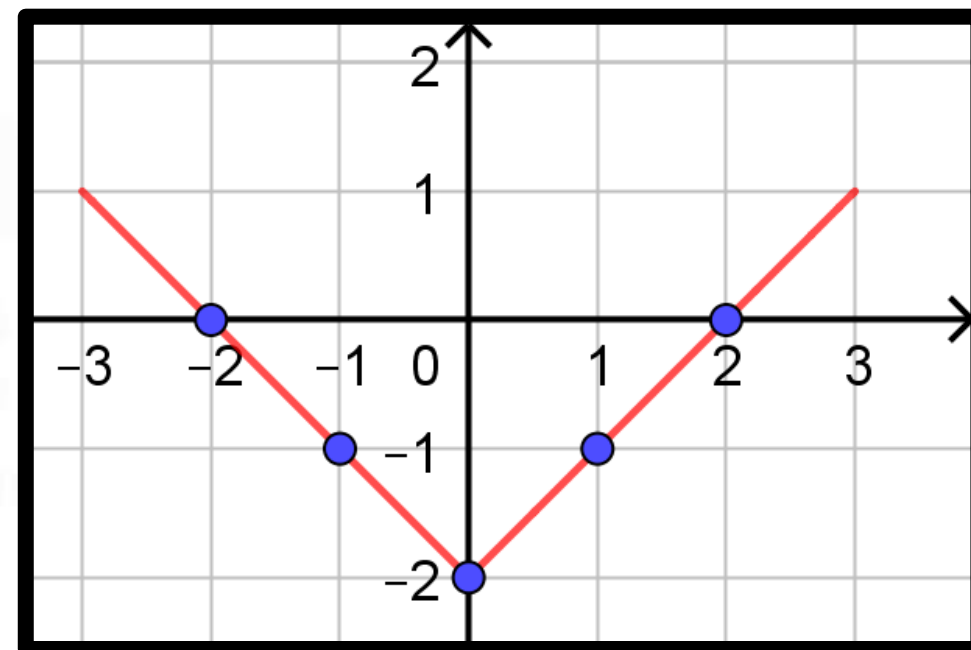
Deslocamento horizontal para a direita em **2** unidades.



FUNÇÃO MODULAR

6. Gráfico da Função Modular $f(x) = |x| - 2$

Atribuímos valores para x (qualquer valor)	Calculamos o valor de $y = f(x)$	Obtemos um par ordenado (x, y)
x	$y = x - 2$	(x, y)
-2	$Y = -2 - 2 = 0$	$(-2, 0)$
-1	$Y = -1 - 2 = -1$	$(-1, -1)$
0	$Y = 0 - 2 = -2$	$(0, -2)$
1	$Y = 1 - 2 = -1$	$(1, -1)$
2	$Y = 2 - 2 = 0$	$(2, 0)$

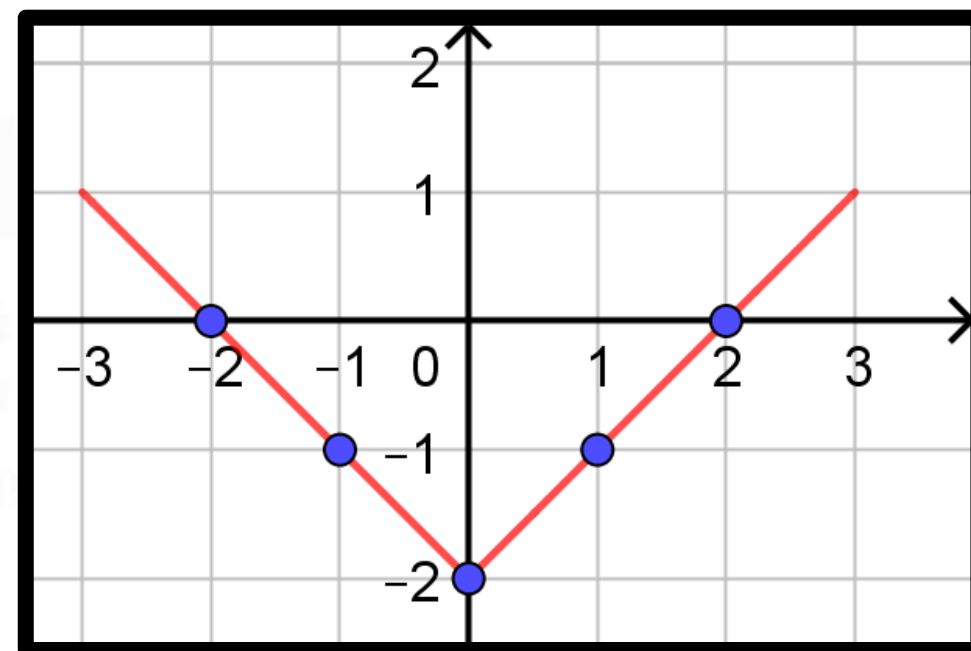




FUNÇÃO MODULAR

6. Gráfico da Função Modular $f(x) = |x| - 2$

<u>Atribuímos</u> valores para x (qualquer valor)	Calculamos o valor de $y = f(x)$	Obtemos um par ordenado (x, y)
x	$y = x - 2$	(x, y)
-2	$Y = -2 - 2 = 0$	$(-2, 0)$
-1	$Y = -1 - 2 = -1$	$(-1, -1)$
0	$Y = 0 - 2 = -2$	$(0, -2)$
1	$Y = 1 - 2 = -1$	$(1, -1)$
2	$Y = 2 - 2 = 0$	$(2, 0)$





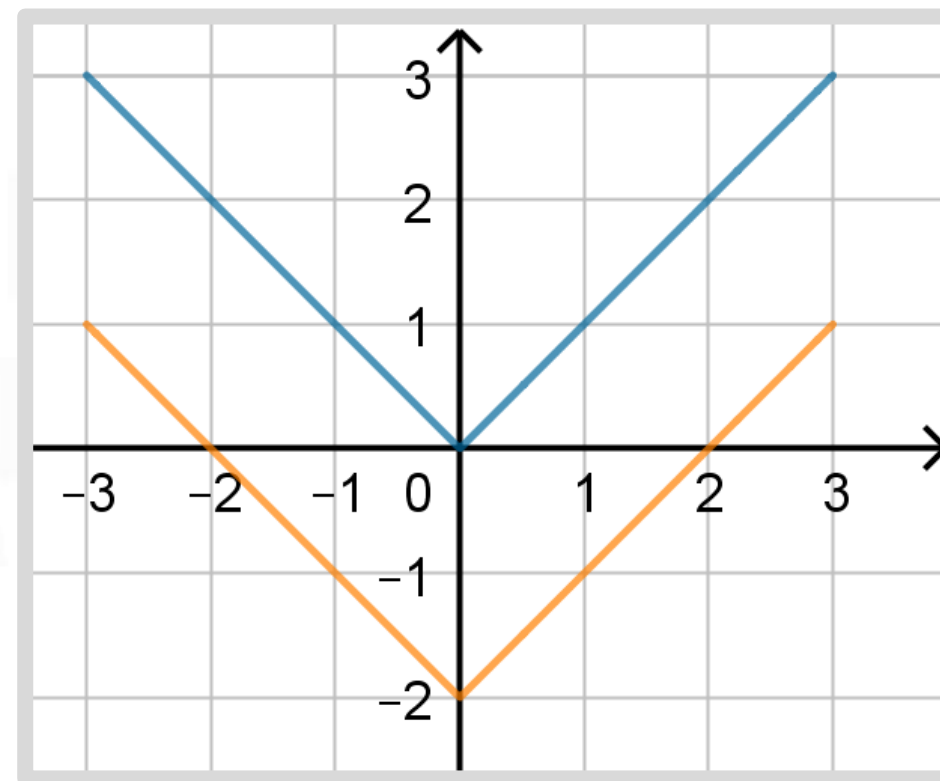
FUNÇÃO MODULAR

7. Comparando os gráficos de $f(x) = |x|$ e $f(x) = |x| - 2$

Comparando os dois gráficos vistos:

■ $f(x) = |x|$

■ $f(x) = |x| - 2$



Deslocamento vertical para baixo em 2 unidades.



FUNÇÃO MODULAR

8. Gráficos - Generalizando

De modo geral podemos perceber que:

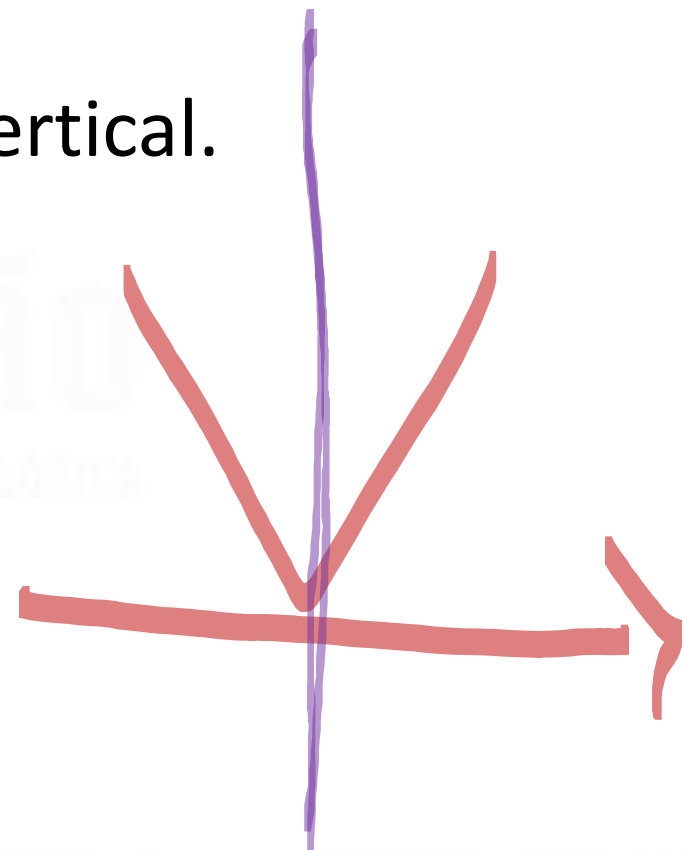
- O gráfico de uma função $f(x) = |x| + k$ é semelhante ao de $f(x) = |x|$, porém **transladado para cima** (quando $k > 0$) **ou para baixo** (quando $k < 0$). O número de unidades do deslocamento é o valor absoluto de k .
- O gráfico de uma função $f(x) = |x + m|$ é semelhante ao de $f(x) = |x|$, porém **transladado para a direita** (quando $m > 0$) **ou para a esquerda** (quando $m < 0$). O número de unidades do deslocamento é o valor absoluto de m .



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

4. É verdade que o gráfico de $f(x) = |x|$, é:

- a) uma reta que passa pela origem.
- b) duas semirretas simétricas em relação ao eixo vertical.**
- c) duas semirretas que passam por (1, 0)
- d) uma reta que passa por (1, 0)
- e) duas semirretas representadas abaixo do eixo x.

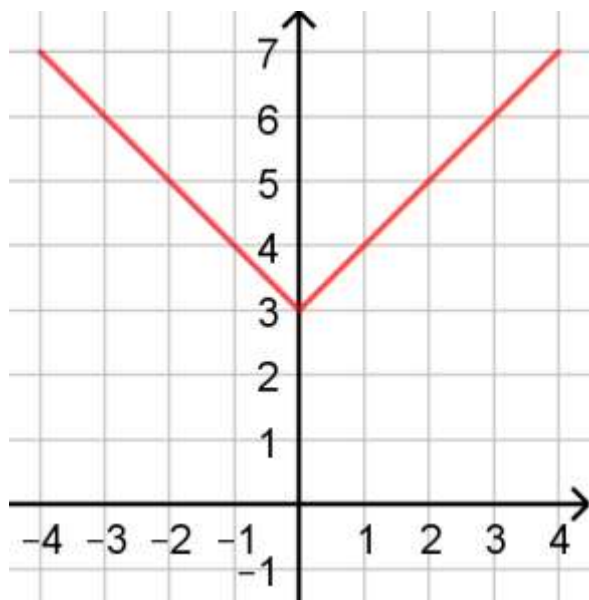




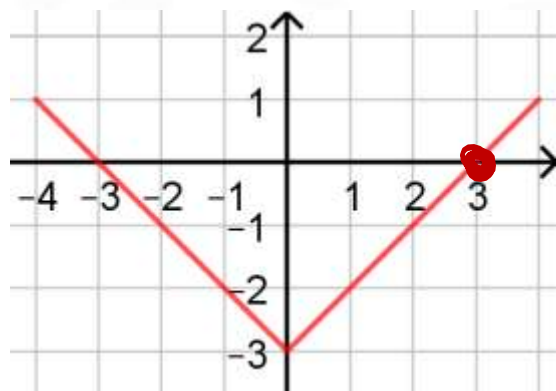
→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

5. O gráfico que melhor representa a função $y = |x| + 3$ é

a) ✓

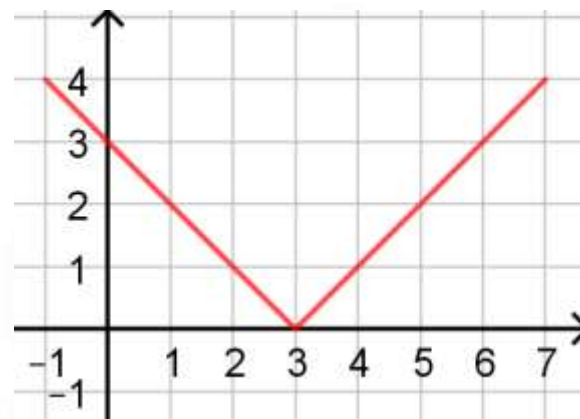


b)



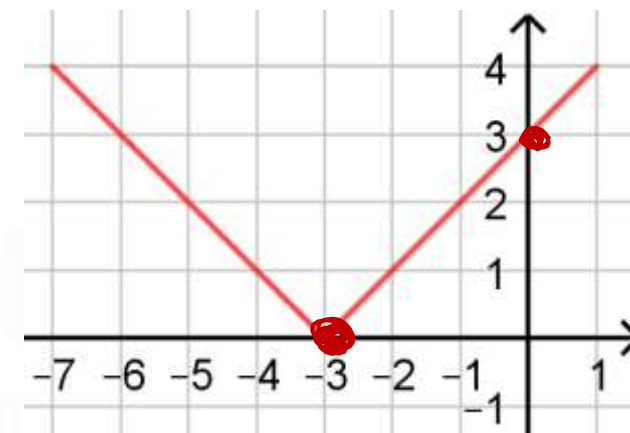
$(3; 0)$

c)



$(3; 0)$

d)



$(0; 3)$ ✓
 $(-3; 0)$ ✓



FUNÇÃO MODULAR

9. Equação Modular

Toda a equação que contiver a incógnita em um módulo num dos membros será chamada equação modular.

➤ Exemplos:

a) $|x - 3| = 10$

b) $2 \cdot |x| - 4x = 5$

c) $|x|^2 - 5|x| + 6 = 0$

d) $|x - 2| + |x - 3| = 6$

**1ª
SÉRIE**

CANAL SEDUC-PI1



PROFESSOR (A):

**Henrique
Gomes**



DISCIPLINA:

Matemática



CONTEÚDO:

**Função
Modular**



TEMA GERADOR:

**Arte na
Escola**



DATA:

25.10.2019



FUNÇÃO MODULAR

10. Resolução de Equações Modulares

Exemplo 1: $|x| = 5$

AQUI!

- O que queremos aqui é saber qual é o número x cujo módulo seja igual a 5.
- Pela definição de módulo, esse número x pode ser 5 ou -5, pois ambos têm módulo igual a 5.
- Assim, podemos dizer que "desmembramos" a equação em duas, para "tirarmos" o módulo.


$$|x| = 5 \rightarrow x = -5 \text{ ou } x = 5 \rightarrow S = \{-5, 5\}$$



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

6. Sabendo que $|a| = 2$ e $|b| = 5$, pode-se afirmar que

- a) $a + b = 7$
- b) $b - a = 3$
- c) $|a - b| = 3$
- d) ab é sempre igual a 10.
- e) $|ab|$ é sempre igual a 10.



FUNÇÃO MODULAR

10. Resolução de Equações Modulares

Exemplo 2: $|x - 1| = 4$

- Do mesmo modo devemos desmembrar a equação:

$$|x - 1| = 4$$

$$x - 1 = -4$$

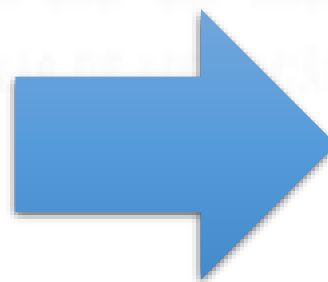
$$x = -4 + 1$$

$$x = -3$$

$$x - 1 = 4$$

$$x = 4 + 1$$

$$x = 5$$



Portanto, o
conjunto solução
dessa equação é:
 $S = \{-3, 5\}$



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

7. As soluções da equação $|2x - 5| = 1$ são

- a) Positivas.
- b) Negativas.
- c) Uma positiva e outra negativa.
- d) Dois números pares positivos.
- e) Dois números primos negativos.



FUNÇÃO MODULAR

10. Resolução de Equações Modulares

Exemplo 3: $|x + 1| = 2x - 1$

Nesse caso temos que:

- Verificar a condição de existência;
- Desmembrar a equação;
- Verificar quais dos valores obtidos servirão de solução para a equação.

$$|x + 1| = 2x - 1$$

Condição de Existência:

$$2x - 1 \geq 0$$

$$2x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$x + 1 = -(2x - 1)$$

$$x + 1 = -2x + 1$$

$$x + 2x = 1 - 1$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

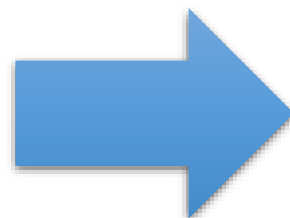
Não serve

$$x + 1 = 2x - 1$$

$$x - 2x = -1 - 1$$

$$-x = -2$$

$$x = 2$$



Portanto, o conjunto solução dessa equação é: $S = \{2\}$



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

8. Qual a solução de: $|x - 5| = 2x - 4$?

- a) $\{3\}$
- b) $\{-1\}$
- c) $\{-1, 3\}$
- d) $\{-1, -3\}$
- e) Essa equação não tem solução.



FUNÇÃO MODULAR

10. Resolução de Equações Modulares

Exemplo 4: $|x^2 - 5x + 8| = 2$

$$x^2 - 5x + 8 = -2$$

$$x^2 - 5x + 10 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 10$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10$$

$$\Delta = 25 - 40 = -15$$

Não tem soluções reais.

$$x^2 - 5x + 8 = 2$$

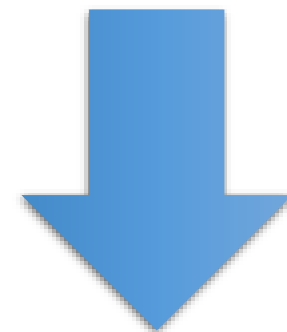
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = 3 \end{cases}$$



Portanto, o conjunto solução dessa equação é:
 $S = \{2, 3\}$



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

9. Uma das raízes da equação $|x^2 - 4x + 6| = 3$ é

- a) 1
- b) 5
- c) 7
- d) 10
- e) 12



FUNÇÃO MODULAR

10. Resolução de Equações Modulares

Exemplo 5: $|x|^2 - 7|x| + 12 = 0$

- Basta usar a técnica da substituição para facilitar a resolução, fazendo $|x| = y$.

$$|x|^2 - 7|x| + 12 = 0$$

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -7 \quad c = 12$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12$$

$$\Delta = 49 - 48 = 1$$

$$y = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$$

$$y = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$y' = 3 \text{ e } y'' = 4$$

Como $y = |x|$, temos:

Logo:

- $|x| = 3 \rightarrow x = -3 \text{ e } x = 3$

- $|x| = 4 \rightarrow x = -4 \text{ e } x = 4$

$$S = \{-4, -3, 3, 4\}$$



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

10. Qual a solução de: $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$?

- a) $\{3, -5\}$
- b) $\{-3, 3\}$
- c) $\{-3, -5\}$
- d) $\{5, -5\}$
- e) $\{-5, -5\}$



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

11. Qual o conjunto solução da equação $|x|^2 - 10|x| + 16 = 0$?

- a) $S = \{-8, -2, 2, 8\}$.
- b) $S = \{-2, 2\}$.
- c) $S = \{2, 8\}$.
- d) $S = \{-6, -3, 3, 6\}$.
- e) $S = \{-8, 8\}$.



FUNÇÃO MODULAR

10. Resolução de Equações Modulares

Exemplo 6: $|x + 1| = |3x - 7|$

- Se, para eliminar cada módulo, desmembrarmos em dois casos, teremos quatro equações, porém com dois pares de equações repetidas. Assim, para facilitarmos a resolução, consideraremos dois casos.

$$|x + 1| = |3x - 7|$$

$$x + 1 = 3x - 7$$

$$x - 3x = -7 - 1$$

$$-2x = -8$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$x + 1 = -(3x - 7)$$

$$x + 1 = -3x + 7$$

$$x + 3x = 7 - 1$$

$$4x = 6$$

$$x = 1,5$$

**Logo:** $S = \{1,5; 4\}$



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

12. Seja $W = \{x \in \mathbb{R}; |3x + 1| = |x - 2|\}$. A soma dos elementos de W é

- a) $-5/4$
- b) $-3/4$
- c) $1/4$
- d) $7/4$



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

13. O conjunto de soluções da equação $|x - 1| + |x - 2| = 3$ é

- a) $\{0,1\}$
- b) $\{0,3\}$
- c) $\{1,3\}$
- d) $\{3\}$
- e) $\{ \}$

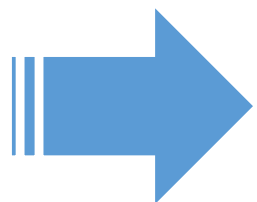


FUNÇÃO MODULAR

11. Inequação Modular

As **inequações modulares** são todas as **relações de desigualdade** em que a incógnita se encontra dentro de módulos.

- Seja “a” um número real:



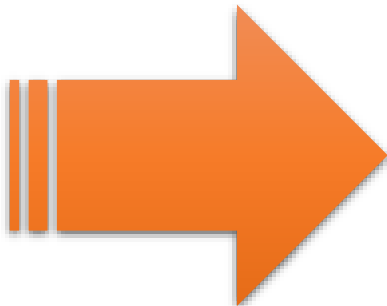
$ X < a$	$\rightarrow$	$-a < X < a$	
$ X \leq a$	$\rightarrow$	$-a \leq X \leq a$	
$ X > a$	$\rightarrow$	$X < -a$ ou $X > a$	
$ X \geq a$	$\rightarrow$	$X \leq -a$ ou $X \geq a$	



FUNÇÃO MODULAR

11. Inequação Modular

Observando a imagem abaixo, percebemos um **padrão** das **consequências da definição de módulo**:



$ x < a$	→	$-a < x < a$	
$ x \leq a$	→	$-a \leq x \leq a$	
$ x > a$	→	$x < -a$ ou $x > a$	
$ x \geq a$	→	$x \leq -a$ ou $x \geq a$	

- Sempre que o **sinal da desigualdade é menor** em relação ao módulo ($<$), a região de valores que representa a solução da inequação está **dentro dos limites** a e $-a$.
- Sempre que o **sinal de desigualdade é maior** em relação ao módulo ($>$), a região de valores que representa a solução da inequação está **fora dos limites** a e $-a$.



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

14. O conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $|x - 2| < 3$ é

- a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$
- b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$
- c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 5\}$
- d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$
- e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2\}$



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

15. O conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $|2x - 5| > 1$ é

- a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$
- b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$
- c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
- d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$
- e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$



➔ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

16. Multiplicando os valores inteiros de x que satisfazem simultaneamente as desigualdades $|x - 2| \leq 3$ e $|3x - 2| > 5$, obtemos:

- a) 12
- b) 60
- c) - 12
- d) - 60
- e) 0



➔ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

17. A soma dos números naturais que pertencem ao conjunto solução da inequação $|x - 4| \geq x$ é igual a:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 6
- e) 10



→ FUNÇÃO MODULAR – Exercício de Fixação

18. Considere as desigualdades definidas por:

$$|x + 5| \leq 2 \text{ e } |y - 4| \leq 1$$

representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Qual das regiões sombreadas dos gráficos abaixo melhor representa a região do plano cartesiano determinada pela interseção das desigualdades?

