Lista de Função Inversa, Bijeção e Paridade
Extensivo Alfa
Professor: Leandro (Pinda)

Colégio Nomelini

1. (Udesc 2013) A função f definida por $f(x)=1+x^2$ é uma função bijetora, se os conjuntos que representam o domínio (D(f)) e a imagem (Im(f)) são:

a) $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=[1,+\infty[$

b) $D(f)=]-\infty,0]$ e $Im(f)=\mathbb{R}$

c) $D(f)=\mathbb{R}$ e $Im(f)=\mathbb{R}$

d) $D(f)=[0,+\infty[$ e $Im(f)=[0,+\infty[$

e) $D(f)=[0,+\infty[$ e $Im(f)=[1,+\infty[$

2. (Epcar (Afa) 2011) Considere as funções reais f e g tal que $f(x)=x^2+1$ e que existe a composta de **g** com **f** dada por $(gof)(x)=\sqrt{\left(x^2+1\right)^2}$. Sobre a função *g*, é incorreto afirmar que ela é

a) par.
b) sobrejetora.
c) tal que $g(x)\geq 0 \forall x\in\mathbb{R}$
d) crescente se $x\in[1,+\infty[$

3. (Uft 2010) Seja a um número real e $f:]-\infty,\infty[\rightarrow[a,\infty[$ uma função definida por f(x) = m^2x^2 + 4mx + 1, com $m\neq 0$. O valor de a para que a função f seja sobrejetora é:

a) - 4
b) - 3
c) 3
d) 0
e) 2

4. (Uepb 2012) Sejam

I. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+2}$

II. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x\neq 0$

III. $f(x)=\dfrac{2}{x}$, $x\neq 0$

III. $f(x)=(x+1)+(x-1)$

Classificando cada uma das funções reais acima em par, ímpar ou nem par nem ímpar, temos, respectivamente:

a) par, par, ímpar, ímpar
b) nem par nem ímpar, par, ímpar, ímpar
c) par, ímpar, par, ímpar
d) ímpar, par, ímpar, ímpar
e) par, par, ímpar, nem par nem ímpar

5. (Ita 2010) Sejam f, g: $R\rightarrow R$ tais que f é par e g é impar. Das seguintes afirmações:

I. f . g e impar,
II. f o g e par,
III. g o f e impar,

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) todas.

6. (Espm 2017) O conjunto imagem de uma função inversível é igual ao domínio de sua inversa. Sendo $f:A\rightarrow B$ tal que $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ uma função real inversível, seu conjunto imagem é:

a) $\mathbb{R}-\{1\}$
b) $\mathbb{R}-\{-1\}$
c) $\mathbb{R}-\{-2\}$
d) $\mathbb{R}-\{0\}$
e) $\mathbb{R}-\{2\}$

7. (Mackenzie 2017) Se a função $f:\mathbb{R}-\{2\}\rightarrow\mathbb{R}^*$ é definida por $f(x)=\dfrac{5}{2-x}$ e f^{-1} a sua inversa, então $f^{-1}(-2)$ é igual a

a) $-\dfrac{1}{2}$
b) $\dfrac{9}{2}$
c) $-\dfrac{9}{2}$
d) $\dfrac{1}{2}$
e) $\dfrac{5}{4}$

8. (Eear 2017) Sabe-se que a função $f(x)=\dfrac{x+3}{5}$ é invertível. Assim, $f^{-1}(3)$ é

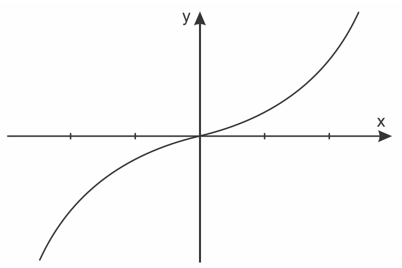
a) 3
b) 4
c) 6
d) 12

9. (Uece 2017) A função real de variável real definida por $f(x)=\dfrac{2x+3}{4x+1}$, para $x\neq-\dfrac{1}{4}$ é invertível. Sua inversa g pode ser expressa na forma $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, onde a, b, c e d são números inteiros.

Nessas condições, a soma $a+b+c+d$ é um número inteiro múltiplo de

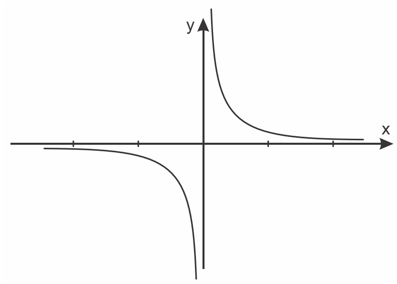
a) 6.
b) 5.
c) 4.
d) 3.

10. (Unicamp 2016) Considere o gráfico da função $y = f(x)$ exibido na figura a seguir.

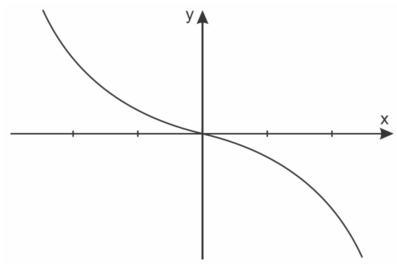


O gráfico da função inversa $y = f^{-1}(x)$ é dado por

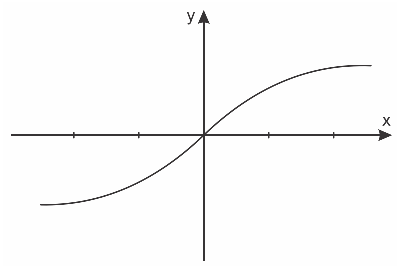
a)



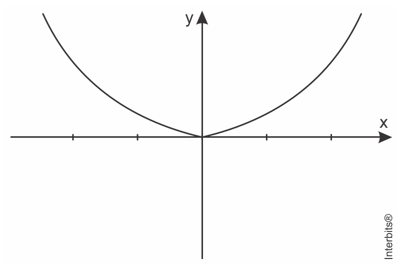
b)



c)



d)



11. (Uece 2016) A função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ é invertível. Se f^{-1} é sua inversa, então, o valor de $[f(0) + f^{-1}(0) + f^{-1}(-1)]^2$ é

a) 1.
b) 4.
c) 9.
d) 16.

12. (Ifce 2016) Se $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^3+1}{2}$ possui inversa

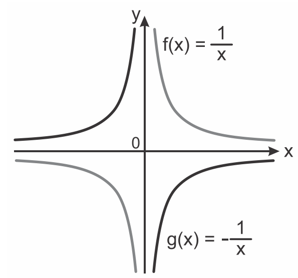
a) $f^{-1}(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{2x+1}}$.
b) $f^{-1}(x) = \frac{2}{x^3+1}$.
c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x+1}$.
d) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x-1}$.
e) $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2}$.

13. (Uern 2015) Considerando as funções $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = -2x + 1$, o valor de k, com $k \in \mathbb{R}$, tal que $f(g(k))^{-1} = 1$ é

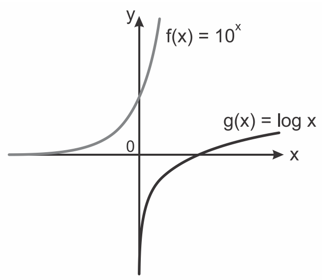
a) 3.
b) 2.
c) –1.
d) –5.

14. (Upf 2015) Assinale a opção que apresenta o gráfico de duas funções reais inversas.

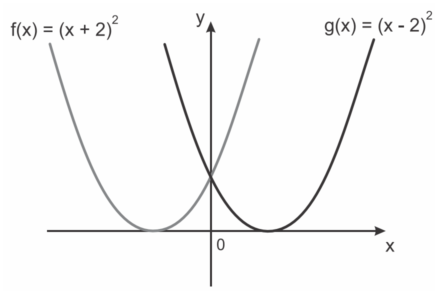
a)



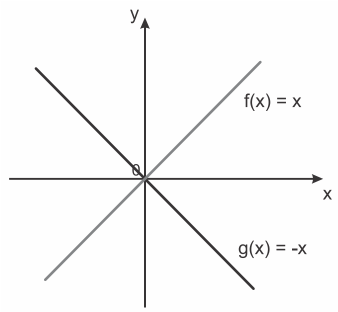
b)



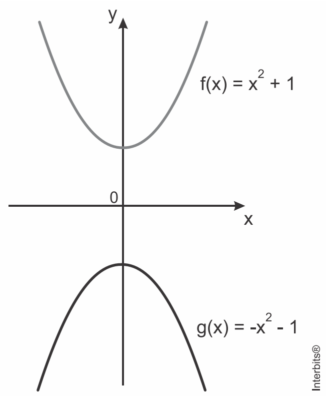
c)



d)



e)



15. (Espcex (Aman) 2015) Considere a função bijetora $f:[1,+\infty) \rightarrow (-\infty,3]$, definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ e seja (a,b) o ponto de intersecção de f com sua inversa. O valor numérico da expressão $a+b$ é

a) 2.
b) 4.
c) 6.
d) 8.
e) 10.

Gabarito

Resposta da questão 1:
[E]

Lembrando que uma função está bem definida apenas quando se conhece o domínio, o contradomínio e a lei de formação, vamos supor que o contradomínio da função seja o conjunto $\mathbb{R}_+$, e que o enunciado pede o maior subconjunto dos números reais para o qual f está definida.

Desse modo, como f é uma função quadrática bijetiva, segue-se que $D(f) = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ e, sendo y_V a ordenada do vértice do gráfico de f, $Im(f) = [y_V, +\infty[= [1, +\infty[.$

Resposta da questão 2:
[B]

$g(f(x)) = \sqrt{(f(x))^2} = |f(x)|$
portanto $g(x) = |x|$

g(x) não é sobrejetora, pois seu conjunto imagem é $\left[0, +\infty\right[$ e seu contradomínio é o conjunto dos números reais.

Resposta da questão 3:
[B]

a deverá ser o **y** do vértice.

Portanto, s = $\dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-((4m)^2 - 4.m^2.1)}{4.m^2} = \dfrac{-12m^2}{4m^2} = -3$

Resposta da questão 4:
[B]

[I] f não é par nem ímpar. De fato, como $f(-x) = \dfrac{-x-2}{(-x)^2+2} = -\dfrac{x+2}{x^2+2}$, segue-se que $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$. Portanto, f não é par nem ímpar.

[II] f é par. Com efeito, $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2} = \dfrac{1}{x^2} = f(x)$. Por conseguinte, f é par.

[III] f é ímpar. De fato, $f(-x) = \dfrac{2}{-x} = -\dfrac{2}{x} = -f(x)$. Portanto, f é ímpar.

[IV] f é ímpar. De fato, $f(-x) = 2 \cdot (-x) = -2x = -f(x)$. Por conseguinte, f é ímpar.

Resposta da questão 5:
[D]

I. f(-x).g(-x) = - f(x).g(x) (função ímpar)
II.f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) (função par)
III.g(f(-x)) = g(f(x)) (função par)

Apenas I e II estão corretas.

Resposta da questão 6:
[E]

Lembrando que é possível definir tantas funções quanto queiramos por meio da lei $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$, vamos supor que o domínio de f seja o conjunto dos números reais x, tal que $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} y=\frac{2x-1}{x+1} &\Rightarrow yx+y=2x-1 \\ &\Rightarrow x(y-2)=-(y+1) \\ &\Rightarrow x=\frac{y+1}{2-y}. \end{aligned}$$

Portanto, sendo $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2-x}$ a lei da inversa de f, podemos afirmar que a imagem de f é o conjunto dos números reais y tal que $y \in \mathbb{R}-\{2\}$.

Resposta da questão 7:
[B]

Impondo $f(x)=-2$, temos

$$-2=\frac{5}{2-x} \Leftrightarrow 2x-4=5 \Leftrightarrow x=\frac{9}{2}.$$

Portanto, segue que $f^{-1}(-2)=\frac{9}{2}$.

Resposta da questão 8:
[D]

Se f possui inversa, então queremos calcular x tal que $f(x)=3$. Assim, vem

$$\frac{x+3}{5}=3 \Leftrightarrow x=12.$$

Resposta da questão 9:
[C]

Se $f(x)=\frac{2x+3}{4x+1}$, então

$$\begin{aligned} y=\frac{2x+3}{4x+1} &\Leftrightarrow 4xy+y=2x+3 \\ &\Leftrightarrow x(4y-2)=-y+3 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{y-3}{-4y+2}. \end{aligned}$$

Portanto, temos $g(x)=\frac{x-3}{-4x+2}$ e, assim, desde que $1-3-4+2=(-1)\cdot(4)$, podemos afirmar que a soma $a+b+c+d$ é um número inteiro múltiplo de 4.

Resposta da questão 10:
[C]

Lembrando que o gráfico de uma função e o de sua inversa são simétricos em relação à reta $y=x$, segue-se que o gráfico de $y=f^{-1}(x)$ é o da alternativa [C].

Resposta da questão 11:
[C]

Tem-se que

$$y = \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = x + 2$$
$$\Rightarrow (y-1)x = 2y + 2$$
$$\Rightarrow x = \frac{2y+2}{y-1}.$$

Portanto, sendo $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, a inversa de f é $f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$, com $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}.$

Daí, como $f(0) = -1$, $f^{-1}(0) = -2$ e $f^{-1}(-1) = 0$, vem

$$[f(0) + f^{-1}(0) + f^{-1}(-1)]^2 = (-1 + (-2) + 0)^2 = 9.$$

Resposta da questão 12:
[D]

Determinando a função inversa da função $f(x) = \dfrac{x^3+1}{2}$, temos:

$$x = \frac{\left[f^{-1}(x)\right]^3 + 1}{2} \Leftarrow \left[f^{-1}(x)\right]^3 = 2x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x-1}$$

Resposta da questão 13:
[D]

Calculando $f(g(x))$, tem-se:

$$f(g(x)) = 3 \cdot (-2x + 1) - 2$$
$$f(g(x)) = -6x + 3 - 2 \to f(g(x)) = -6x + 1$$

Calculando a inversa de $f(g(x))$, tem-se:

$$x = -6y + 1 \to y = \frac{1-x}{6} \to f(g(x))^{-1} = \frac{1-x}{6}$$

Por fim, substituindo k e resolvendo a equação proposta no enunciado, tem-se:

$$f(g(k))^{-1} = 1 \to \frac{1-k}{6} = 1 \to 1 - k = 6 \to k = -5$$

Resposta da questão 14:
[B]

Sabendo que o gráfico de uma função e sua inversa são simétricos em relação à reta $y = x$, podemos concluir que a única possibilidade, dentre as apresentadas, é $f(x) = 10^x$ e $g(x) = \log x$.

Resposta da questão 15:
[B]

Os pontos comuns de uma função com a sua inversa são da forma (a, a), portanto, para determinar estes pontos devemos considerar $f(x) = x$ na função dada. Daí, temos:

$$x = -x^2 + 2x + 2 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \notin [1, +\infty) \text{ ou } x = 2.$$

Logo, o ponto (a, b) pedido é $(2, 2)$ e $2 + 2 = 4.$