Função composta e função inversa

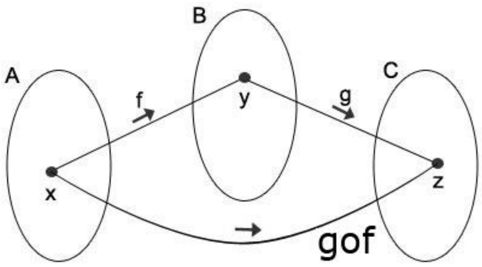
Resumo

Função composta

Função composta é aquela que tem como abscissa a imagem de outra função.

$$h(x) = g[f(x)] = g \circ f$$

Ou seja, a abscissa de g(x) é a imagem de f(x).
Observe como isso funciona:



Condição de existência

Para que haja a função composta da função **g** com a função **f**, o domínio de **g** deve ser igual ao contradomínio de **f**.
Repare que no esquema anterior, f tem como domínio o conjunto A e contradomínio o conjunto B. Já a função g tem como domínio o conjunto B e contradomínio o conjunto C. Ou seja, o domínio de **g** é igual ao contradomínio de **f**.

Determinação da função composta

Partimos do exemplo de duas funções f(x) = x + 1 e g(x) = 2x
Calcular f[g(x)] significa encontrar a lei de formação da função composta de g com f. Tendo como base as funções do exemplo, usamos o passo a passo abaixo:

- Partimos de f(x) = x + 1
- Em seguida, substituímos x por g(x):

$$f[g(x)] = g(x) + 1$$

- Enfim, como g(x) = 2x, temos:

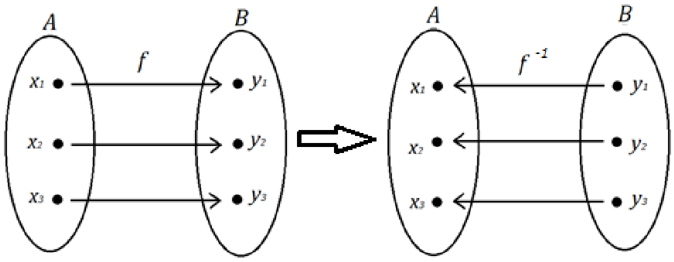
$$g[f(x)] = 2x + 1.$$

Função inversa

Definimos função inversa (f^{-1}) de uma função f do seguinte modo:

$$\forall (a,b) \in f \Leftrightarrow \exists\ (b,a) \in f^{-1}$$

Ou seja, para todo par ordenado (a, b) pertencente à função f, existe um par ordenado (b, a) correspondente na função inversa f^{-1}.



Condição de existência

A relação inversa de f: A → B é uma função f^{-1}: B → A, se e somente se, f é uma função bijetora.

Lei de formação

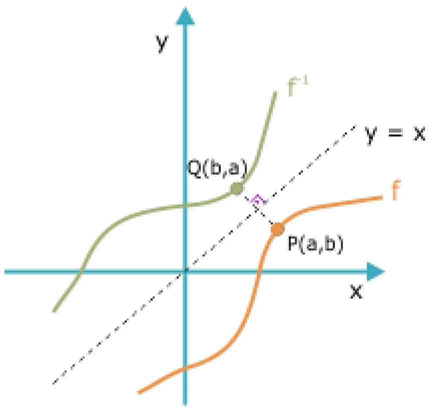
Para encontrarmos a lei de formação de uma função inversa, devemos seguir os seguintes passos:

I. Na lei de formação de f, devemos trocar o y por x e o x por y.
II. Depois, devemos isolar o novo y.

Ex: Vamos achar a inversa de f(x) = x + 1.
y = x + 1
x = y + 1 (trocando x por y e y por x)
y = x − 1 = f^{-1}(x)

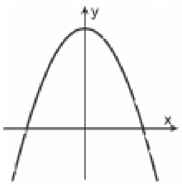
Gráfico

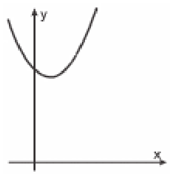
O gráfico de uma f^{-1} é simétrico ao gráfico de f em relação à reta y = x, chamada de função identidade.

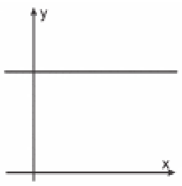


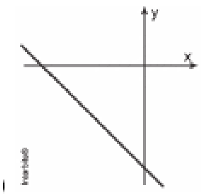
Exercícios

1. A função f tem lei de formação f(x)=3-x e a função g tem lei de formação $g(x)=3x^2$. Um esboço do gráfico da função f(g(x)) é dado por:

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Em $f(x) = x + a,\ \ f(g(x)) = \frac{\operatorname{sen} x + a^2 + a}{a+1}$ e $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}.$ uma disciplina o número de alunos reprovados por ano é descrito pela função g(t), em que t é dado em anos. Considerando $f(g(t)) = \sqrt{2t+1}$ e $f(t) = \sqrt{t-2},$ é possível afirmar que a função g(t) é:

a) $g(t) = 2t + 3$

b) $g(t) = \sqrt{2t+3}$

c) $g(t) = 2t - 3$

d) $g(t) = \sqrt{2t-3}$

3. A função real de variável real definida por $f(x)=\frac{2x+3}{4x+1}$, para $x \neq -\frac{1}{4}$ é invertível. Sua inversa g pode ser expressa na forma $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, onde a, b,c e d são inteiros.
Nessas condições a soma a+b+c+d é um número inteiro múltiplo de:

a) 6
b) 5
c) 4
d) 3

4. Sejam f e g funções reais de variáveis real definidas por $f(x)=2^x$ e $g(x)=x^2-2x+1$. o valor da função composta f(g(x)) no elemento x=2 é igual a:

a) 1
b) 8
c) 2
d) 4

5. Sabe-se que a função $f(x)=\frac{x+3}{5}$ é invertível. Assim $f^{-1}(3)$ é:

a) 3
b) 4
c) 6
d) 12

6. Sendo $f: A \to B$ tal que $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ uma função real inversível, seu conjunto imagem é:

a) $\mathbb{R}-\{1\}$
b) $\mathbb{R}-\{-1\}$
c) $\mathbb{R}-\{-2\}$
d) $\mathbb{R}-\{0\}$
e) $\mathbb{R}-\{2\}$

7. Se a função $f: \mathbb{R}-\{2\} \to \mathbb{R}^*$ é definida por $f(x)=\frac{5}{2-x}$ e f^{-1} sua inversa, então $f^{-1}(-2)$ é igual a:

a) $-\frac{1}{2}$
b) $\frac{9}{2}$
c) $-\frac{9}{2}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{5}{4}$

8. Considere as funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = x^3$, definidas para todo número real x. O número de soluções da equação f(g(x))=g(f(x))

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

9. O polinômio do 2° grau f(x) que verifica a identidade f(x+1)=x²-7x+6 é:

a) $F(x) = x^2 - 14x + 9$
b) $F(x) = x^2 + 9x + 14$
c) $F(x) = x^2 - 5x$
d) $F(x) = x^2 - 9x + 14$

10. Dadas as funções f(x)=2x-1 e g(x)=x²+3x+c, o maior valor inteiro de c tal que a equação g(f(x))=0 apresente raízes reais é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

Gabarito

1. a

Tem-se que

$$f(g(x)) = 3 - 3x^2$$
$$= -3(x^2 - 1)$$
$$= -3(x-1)(x+1).$$

A função $f \circ g$ é quadrática, seu gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e seus zeros são -1 e 1.

Portanto, segue que só pode ser a alternativa [A].

2. a

Aplicando $g(t)$ em $f(t)$ temos:

$$f(t) = \sqrt{t-2} \Rightarrow f(g(t)) = \sqrt{g(t)-2} \Leftrightarrow \sqrt{2t+1} = \sqrt{g(t)-2}$$

Elevando ambos lados ao quadrado para extrair as raízes temos:

$$2t+1 = g(t)-2 \Rightarrow g(t) = 2t+3$$

3. c

Se $f(x) = \frac{2x+3}{4x+1}$, então

$$y = \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow 4xy + y = 2x+3$$
$$\Leftrightarrow x(4y-2) = -y+3$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{y-3}{-4y+2}.$$

Portanto, temos $g(x) = \frac{x-3}{-4x+2}$ e, assim, desde que $1 - 3 - 4 + 2 = -4$, podemos afirmar que a soma $a+b+c+d$ é um número inteiro múltiplo de 4.

4. c

Queremos calcular $f(g(2))$. Assim, como $g(2) = 2^2 - 2.2 + 1 = 1$ segue que $f(g(2)) = 2^1 = 2$.

5. a

Calculando:

$$f\left(\frac{2}{3}x - 3\right) = x+1$$
$$\frac{2}{3}x - 3 = -1 \Rightarrow x = 3$$
$$f\left(\frac{2}{3}x - 3\right) = f(3) = 3+1 \Rightarrow f(-1) = 4$$

6. e

Lembrando que é possível definir tantas funções quanto queiramos por meio da lei $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$, vamos supor que o domínio de f seja o conjunto dos números reais x, tal que $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} y=\frac{2x-1}{x+1} &\Rightarrow yx+y=2x-1 \\ &\Rightarrow x(y-2)=-(y+1) \\ &\Rightarrow x=\frac{y+1}{2-y}. \end{aligned}$$

Portanto, sendo $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2-x}$ a lei da inversa de f, podemos afirmar que a imagem de f é o conjunto dos números reais y tal que $y \in \mathbb{R}-\{2\}$.

7. b

Impondo $f(x)=-2$, temos

$$-2=\frac{5}{2-x} \Leftrightarrow 2x-4=5 \Leftrightarrow x=\frac{9}{2}.$$

Portanto, segue que $f^{-1}(-2)=\frac{9}{2}$.

8. c

Calculando:

$$f(g(x))=f(x^3)=(3)^{x^3}$$

$$g(f(x))=g(3^x)=\left(3^x\right)^3$$

$$\left(3^x\right)^3=(3)^{x^3} \to x^3=3x \to x^3-3x=0 \to x\cdot\left(x^2-3\right)=0 \to \left\langle \begin{array}{l} x'=0 \\ x''=\sqrt{3} \\ x'''=-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

9. d

Tem-se que a inversa da função $g(x)=x+1$ é a função $g^{-1}(x)=x-1$. Logo, vem

$$\begin{aligned} F(x) &= (x-1)^2-7(x-1)+6 \\ &= x^2-2x+1-7x+7+6 \\ &= x^2-9x+14. \end{aligned}$$

10. b

Tem-se que

$$\begin{aligned} g(f(x))=0 &\Leftrightarrow (2x-1)^2+3(2x-1)+c=0 \\ &\Leftrightarrow 4x^2+2x+c-2=0. \end{aligned}$$

A equação terá raízes reais desde que seu discriminante seja positivo, ou zero, isto é,

$$4-16c+32 \geq 0$$
$$16c \geq -36$$
$$16c \leq 36$$
$$c \leq \frac{9}{4}$$