Capítulo 14

Funções inversas

Objetivos de aprendizagem

- Relações definidas parametricamente.
- Relações inversas e funções inversas.

Algumas funções e gráficos podem ser definidos parametricamente, enquanto alguns outros podem ser entendidos como inversas das funções que já conhecemos.

Relações definidas parametricamente

Uma maneira de definir funções, ou de forma mais generalizada, relações, é definir *os dois* elementos do par ordenado (x, y) em termos de outra variável t, chamada de **parâmetro**. Ilustraremos com um exemplo.

EXEMPLO 1 Definição de uma função parametricamente

Considere o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) definidos pelas equações

$$x = t + 1$$
$$y = t^2 + 2t$$

onde t é um número real qualquer.

(a) Encontre os pontos determinados por $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ e 3.

(b) Encontre uma relação algébrica entre x e y (isto é chamado muitas vezes de "eliminação do parâmetro"). Temos y como uma função de x?

(c) Esboce o gráfico da relação no plano cartesiano.

SOLUÇÃO

(a) Substitua cada valor de t nas fórmulas que definem x e y para encontrar o ponto que esse valor de t determina parametricamente.

t	$x = t + 1$	$y = t^2 + 2t$	(x, y)
-3	-2	3	$(-2, 3)$
-2	-1	0	$(-1, 0)$
-1	0	-1	$(0, -1)$
0	1	0	$(1, 0)$
1	2	3	$(2, 3)$
2	3	8	$(3, 8)$
3	4	15	$(4, 15)$

(b) Podemos encontrar a relação entre x e y algebricamente pelo método da substituição. Podemos começar com t em termos de x para obtermos $t = x - 1$. Substituir na expressão $y = t^2 + 2t$.

$$y = t^2 + 2t$$
$$y = (x - 1)^2 + 2(x - 1)$$
$$= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2$$
$$= x^2 - 1$$

Isso é consistente com os pares ordenados que já havíamos encontrado na tabela. Como t varia em todo o conjunto dos números reais, obteremos todos os pares ordenados da relação $y = x^2 - 1$, o que faz de fato y ser definido como função de x.

(c) Desde que a relação definida parametricamente consista em todos os pares ordenados na relação, podemos obter o gráfico esboçando a parábola, como na Figura 14.1.

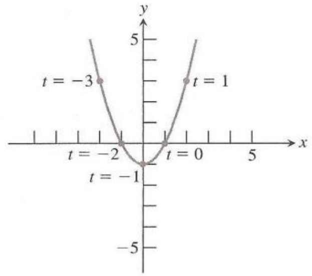


Figura 14.1 Gráfico de $y = x^2 - 1$.

EXEMPLO 2 Definição de uma função parametricamente

Considere o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) definidos pelas equações

$$x = t^2 + 2t$$
$$y = t + 1$$

onde t é um número real qualquer.

(a) Encontre os pontos determinados por $t = -3, 2, -1, 0, 1, 2$ e 3.

(b) Esboce o gráfico da relação no plano cartesiano.

(c) y é uma função de x?

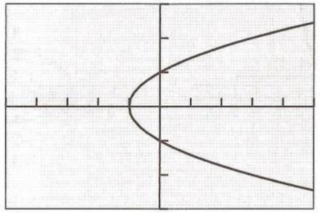
(d) Encontre uma relação algébrica entre x e y.

SOLUÇÃO

(a) Substitua cada valor de t nas fórmulas que definem x e y para encontrar o ponto que esse valor de t determina parametricamente.

t	(x, y)
-3	$(3, -2)$
-2	$(0, -1)$
-1	$(-1, 0)$
0	$(0, 1)$
1	$(3, 2)$
2	$(8, 3)$
3	$(15, 4)$

(b) Podemos obter o gráfico manualmente ou conferi-lo na Figura 14.2.



[−5, 5] por [−3, 3]

Figura 14.2 Gráfico de uma parábola no modo paramétrico.

(c) y não é uma função de x. No item (a) já vemos que existem pares ordenados diferentes com valores de x iguais; além disso, no item (b) vemos que o gráfico falha no teste da reta vertical (como vimos no Capítulo 7).

(d) De forma análoga ao que foi feito no Exemplo 1, temos $x = y^2 - 1$.

Relações inversas e funções inversas

O que acontece quando invertemos as coordenadas de todos os pares ordenados na relação? Obviamente obtemos outra relação, já que existe um outro conjunto de pares ordenados; mas qual semelhança observamos com a relação original? Se a relação original é uma função, a nova relação também será uma função?

Podemos ter idéia do que ocorre analisando os exemplos 1 e 2. Os pares ordenados no Exemplo 2 podem ser obtidos simplesmente invertendo as coordenadas dos pares ordenados no Exemplo 1 (isso porque as definições de x e y estão trocadas nos dois exemplos). Dizemos que a relação no Exemplo 2 é a *relação inversa* da relação no Exemplo 1.

DEFINIÇÃO Relação inversa

O par ordenado (a, b) pertence a uma relação se e somente se o par ordenado (b, a) está na **relação inversa**.

Estudaremos a conexão entre uma relação e sua inversa. Teremos interesse em analisar relações inversas e o que ocorre para serem *funções*. Observe que o gráfico da relação inversa no Exemplo 2 falha no teste da reta vertical (visto no Capítulo 7) e, portanto, não é o gráfico de uma função. A questão que temos é: podemos predizer esta falha apenas considerando o gráfico da relação original? A Figura 14.3 sugere que sim.

O gráfico da inversa na Figura 14.3(b) falha no teste da reta vertical porque temos dois valores diferentes de y para o mesmo valor de x. Isto é uma conseqüência direta do fato de que a relação original na Figura 14.3(a) possui dois valores diferentes de x com o mesmo valor de y. O gráfico da inversa falha no teste da reta *vertical* precisamente porque o gráfico original falha no teste da reta *horizontal* (apesar de esse "teste" não ter sido citado anteriormente, ele tem as mesmas idéias do teste da reta vertical, do qual falaremos a respeito logo a seguir). Isto nos dá um teste para relações cujas inversas são funções.

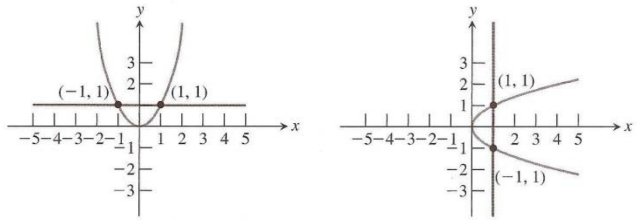


Figura 14.3 (a) Relação original e o teste da linha horizontal. (b) Relação inversa e o teste da linha vertical.

Teste da linha horizontal

A inversa de uma relação é uma função se e somente se cada linha horizontal intersecciona o gráfico da relação original no máximo em um ponto.

EXEMPLO 3 Aplicação do teste da linha horizontal

Quais dos gráficos de (1) a (4) na Figura 14.4 são gráficos de

(a) relações que são funções?

(b) relações que têm inversas que são funções?

SOLUÇÃO

(a) Os gráficos (1) e (4) são gráficos de funções porque satisfazem o teste da linha vertical. Já os gráficos (2) e (3) não são gráficos de funções porque falham no teste da linha vertical.

(b) Os gráficos (1) e (2) são gráficos de relações cujas inversas são funções porque satisfazem o teste da linha horizontal. Os gráficos (3) e (4) falham no teste da linha horizontal, assim suas relações inversas não são funções.

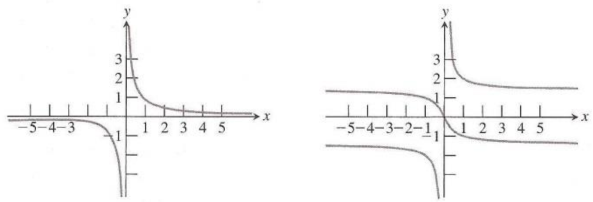
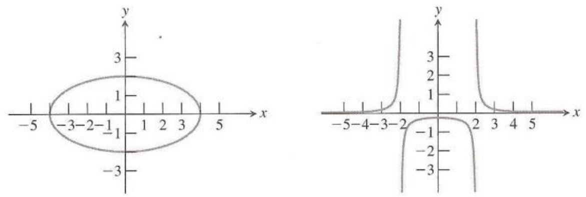


Figura 14.4 Gráficos do Exemplo 3.



(3) (4)

Figura 14.4 Gráficos do Exemplo 3.

Uma *função* cuja inversa é uma função tem o gráfico que satisfaz tanto o teste da reta horizontal como o teste da reta vertical [tal como o Gráfico (1) do Exemplo 3]. Tal função é **bijetora**, desde que todo x seja a primeira coordenada de um único y e todo y seja a única segunda coordenada de um único x.

DEFINIÇÃO Função inversa

Se f é uma função bijetora com domínio A e imagem B, então a **função inversa de** f, denotada por f^{-1}, é a função com domínio B e imagem A definida por

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{se e somente se} \quad f(a) = b$$

O que é uma função bijetora

Para definirmos isso, daremos outras definições antes.

Uma função f de A em B é **injetora** se quaisquer dois elementos distintos do domínio de f (que é o conjunto A) possuem imagens diferentes em B.

Uma função f de A em B é **sobrejetora** se seu conjunto imagem for igual ao seu contradomínio, isto é, se seu conjunto imagem resultar em todo o conjunto B (B é o contradomínio).

Uma função f de A em B é **bijetora** se for injetora e sobrejetora.

CUIDADO SOBRE A NOTAÇÃO DE FUNÇÃO

O símbolo f^{-1} deve ser lido como "função inversa" e jamais deve ser confundido com a recíproca de f. Se f é uma função, o símbolo f^{-1} pode somente significar a inversa de f. A recíproca de f deve ser escrita como $1/f$.

EXEMPLO 4 Verificação da função inversa algebricamente

Encontre uma equação para $f^{-1}(x)$ se $f(x) = x/(x+1)$

SOLUÇÃO

O gráfico de f na Figura 14.5 sugere que f seja bijetora. A função original satisfaz a equação $y = x/(x+1)$. Se, de fato, f é bijetora, então a inversa f^{-1} irá satisfazer a equação $x = y/(y+1)$ (observe que apenas trocamos x por y e y por x).

Se resolvermos esta nova equação escrevendo y em função de x, então teremos uma fórmula para $f^{-1}(x)$:

$$x = \frac{y}{y+1}$$

$$x(y+1) = y$$

$$xy + x = y$$

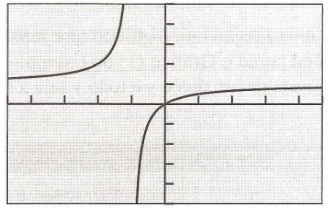
$$xy - y = -x$$

$$y(x-1) = -x$$

$$y = \frac{-x}{x-1}$$

$$y = \frac{x}{1-x}$$

Portanto, $f^{-1}(x) = x/(1-x)$.



$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-5, 5]$

Figura 14.5 O gráfico de $f(x) = x/(x+1)$.

Muitas funções não são bijetoras e, assim, não têm funções inversas. O último exemplo mostrou uma maneira de encontrar a função inversa; porém, dependendo do caso, o desenvolvimento algébrico pode tornar-se difícil. O que ocorre é que acabamos encontrando poucas inversas dessa forma.

É possível usar o gráfico de f para produzir um gráfico de f^{-1} sem nenhum desenvolvimento algébrico, bastando utilizar a seguinte propriedade geométrica: os pontos (a, b) e (b, a) são simétricos no plano cartesiano com relação à reta $y = x$. Os pontos (a, b) e (b, a) são **reflexões** um do outro com relação à reta $y = x$.

EXEMPLO 5 Verificação da função inversa graficamente

O gráfico de uma função $y = f(x)$ é demonstrado na Figura 14.6. Esboce o gráfico da função $y = f^{-1}(x)$. Podemos dizer que f é uma função bijetora?

SOLUÇÃO

Observe que não precisamos encontrar uma fórmula para $f^{-1}(x)$. Tudo o que precisamos para fazer isso é encontrar a reflexão do gráfico dado com relação à reta $y = x$. Isso pode ser feito geometricamente.

Imagine um espelho ao longo da reta $y = x$ e desenhe a reflexão do gráfico dado no espelho (veja a Figura 14.7).

Uma outra maneira para visualizar esse processo é imaginar o gráfico desenhado numa janela de vidro. Imagine esse vidro girando ao redor da reta $y = x$, de modo que os valores *positivos* de x ocupem os lugares dos valores *positivos* de y. O gráfico de f então passará a ser o gráfico de f^{-1}. Desde que a inversa de f tenha um gráfico que satisfaça os testes da reta vertical e da reta horizontal, f é uma função bijetora.

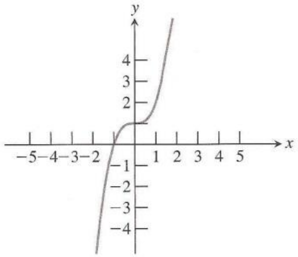


Figura 14.6 O gráfico de uma função bijetora.

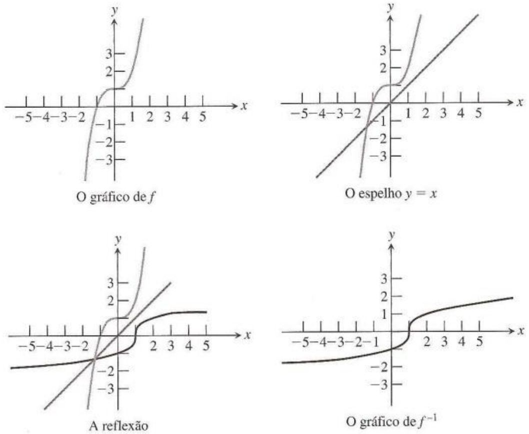


Figura 14.7 Reflexão do gráfico com relação à reta $y = x$.

Existe uma conexão natural entre inversas e composição de funções e isso dá uma idéia do que uma inversa faz: desfaz a ação da função original.

A regra da composição para função inversa

Uma função f é bijetora com função inversa g se e somente se:
$f(g(x)) = x$ para todo x no domínio da função g, e
$g(f(x)) = x$ para todo x no domínio de f.

EXEMPLO 6 Verificação de funções inversas

Mostre algebricamente que $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ são funções inversas.

SOLUÇÃO

Vamos usar a regra citada anteriormente

$$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-1}) = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$$g(f(x)) = g(x^3 + 1) = \sqrt[3]{(x^3 + 1) - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

Desde que essas equações sejam verdadeiras para todo x, a regra garante que f e g são inversas. Saiba que essas funções têm como gráficos os utilizados no Exemplo 5.

Algumas funções são importantes de modo que precisamos estudar suas inversas, mesmo não sendo funções bijetoras. Um bom exemplo é a função da raiz quadrada, que é a "inversa" da função quadrática. A inversa não dá a função quadrática *completa*, pois se for dessa forma, ela falha no teste da reta horizontal. A Figura 14.8 mostra que a função $y = \sqrt{x}$ é realmente a inversa de $y = x^2$ com um "domínio restrito", isto é, definida somente para $x \geq 0$.

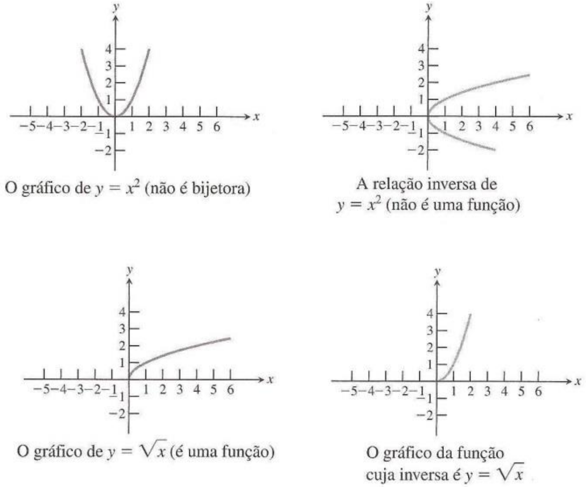


Figura 14.8 A função $y = x^2$ com domínio não restrito e também restrito.

A questão do domínio adiciona um refinamento para o método algébrico, que está resumido a seguir:

Como encontrar uma função inversa algebricamente

Dada uma fórmula para uma função f, proceda da seguinte maneira para encontrá-la:

1. Determine que existe uma função f^{-1} verificando que f é bijetora. Estabeleça restrições sobre o domínio de f, de modo que ela seja bijetora.
2. Troque x e y na fórmula $y = f(x)$.
3. Resolva isolando y para obter $y = f^{-1}(x)$. Veja que o domínio de f^{-1} é uma conseqüência do primeiro procedimento.

EXEMPLO 7 Verificação de uma função inversa

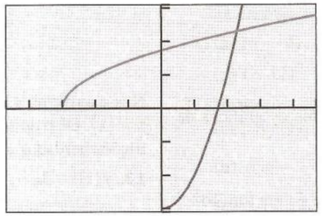
Mostre que $f(x) = \sqrt{x+3}$ tem uma função inversa e encontre uma regra para $f^{-1}(x)$. Estabeleça quaisquer restrições sobre os domínios de f e de f^{-1}.

SOLUÇÃO

O gráfico de f satisfaz o teste da reta horizontal, assim f tem uma função inversa (Figura 14.9). Observe que f tem domínio $[-3, +\infty[$ e imagem $[0, +\infty[$.
Para encontrar f^{-1}, escrevemos

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+3} && \text{onde } x \geq -3,\ y \geq 0 \\ x &= \sqrt{y+3} && \text{onde } y \geq -3,\ x \geq 0 \\ x^2 &= y+3 && \text{onde } y \geq -3,\ x \geq 0 \\ y &= x^2 - 3 && \text{onde } y \geq -3,\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Assim, $f^{-1}(x) = x^2 - 3$ com um domínio restrito dado por $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ (foi herdado da imagem da função f). A Figura 14.9 mostra as duas funções.



$[-4,7; 4,7]$ por $[-3,1; 3,1]$

Figura 14.9 O gráfico de $f(x) = \sqrt{x+3}$ e sua inversa.

Revisão Rápida

Nos exercícios 1 a 10, resolva a equação para y.

1. $x = 3y - 6$

2. $x = 0{,}5y + 1$

3. $x = y^2 + 4$

4. $x = y^2 - 6$

5. $x = \dfrac{y-2}{y+3}$

6. $x = \dfrac{3y-1}{y+2}$

7. $x = \dfrac{2y+1}{y-4}$

8. $x = \dfrac{4y+3}{3y-1}$

9. $x = \sqrt{y+3},\ y \geq -3$

10. $x = \sqrt{y-2},\ y \geq 2$

Exercícios

Nos exercícios 1 a 4, encontre o par (x, y) para o valor do parâmetro.

1. $x = 3t$ e $y = t^2 + 5$ para $t = 2$

2. $x = 5t - 7$ e $y = 17 - 3t$ para $t = -2$

3. $x = t^3 - 4t$ e $y = \sqrt{t+1}$ para $t = 3$

4. $x = |t + 3|$ e $y = 1/t$ para $t = -8$

Nos exercícios 5 a 8:

(a) Encontre os pontos determinados por $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ e 3.

(b) Encontre uma relação algébrica entre x e y e determine se as equações paramétricas determinam y como uma função de x.

(c) Esboce o gráfico no plano cartesiano.

5. $x = 2t$ e $y = 3t - 1$

6. $x = t + 1$ e $y = t^2 - 2t$

7. $x = t^2$ e $y = t - 2$

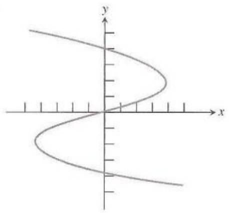
8. $x = \sqrt{t}$ e $y = 2t - 5$

Nos exercícios 9 a 12 são mostrados os gráficos de relações.

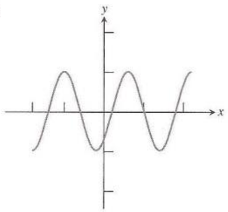
(a) A relação é uma função?

(b) A relação tem uma inversa que é uma função?

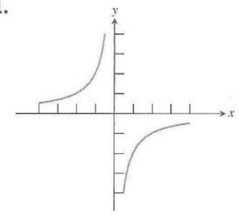
9.



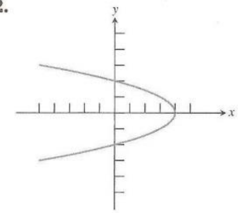
10.



11.



12.



Nos exercícios 13 a 22, encontre uma fórmula para $f^{-1}(x)$. Dê o domínio de f^{-1}, incluindo todas as restrições herdadas de f.

13. $f(x) = 3x - 6$

14. $f(x) = 2x + 5$

15. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

16. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

17. $f(x) = \sqrt{x-3}$

18. $f(x) = \sqrt{x+2}$

19. $f(x) = x^3$

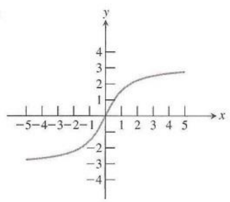
20. $f(x) = x^3 + 5$

21. $f(x) = \sqrt[3]{x+5}$

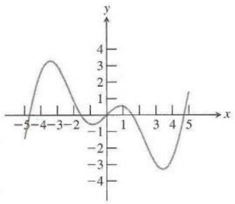
22. $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

Nos exercícios 23 a 26, determine se a função é bijetora. Se for, esboce o gráfico da função inversa.

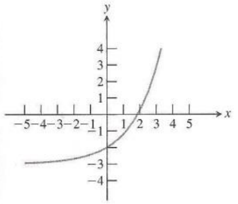
23.



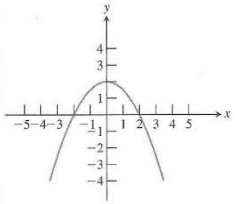
24.



25.



26.



Nos exercícios 27 a 32, confirme que f e g são inversas mostrando que $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$.

27. $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

28. $f(x) = \dfrac{x+3}{4}$ e $g(x) = 4x - 3$

29. $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

30. $f(x) = \dfrac{7}{x}$ e $g(x) = \dfrac{7}{x}$

31. $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

32. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ e $g(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

33. A fórmula para converter a temperatura Celsius x em temperatura Kelvin é $k(x) = x + 273{,}16$. A fórmula para converter a temperatura Fahrenheit x em temperatura Celsius é $c(x) = \dfrac{5(x-32)}{9}$.

(a) Encontre uma fórmula para $c^{-1}(x)$. Para que é usada essa fórmula?

(b) Encontre $(k \circ c)(x)$. Para que é usada essa fórmula?

34. Verdadeiro ou falso Se f é uma função bijetora com domínio A e imagem B, então f^{-1} é uma função bijetora com domínio B e imagem A. Justifique sua resposta.

35. Múltipla escolha Qual par ordenado está na *inversa* da relação dada por $x^2y + 5y = 9$?

(a) $(2, 1)$ **(b)** $(-2, 1)$ **(c)** $(-1, 2)$

(d) $(2, -1)$ **(e)** $(1, -2)$

36. Múltipla escolha Qual par ordenado não está na *inversa* da relação dada por $xy^2 - 3x = 12$?

(a) $(0, -4)$ **(b)** $(4, 1)$ **(c)** $(3, 2)$

(d) $(2, 12)$ **(e)** $(1, -6)$

37. Múltipla escolha Qual função é a *inversa* da função $f(x) = 3x - 2$?

(a) $g(x) = \dfrac{x}{3} + 2$

(b) $g(x) = 2 - 3x$

(c) $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$

(d) $g(x) = \dfrac{x-3}{2}$

(e) $g(x) = \dfrac{x-2}{3}$

38. Múltipla escolha Qual função é a *inversa* da função $f(x) = x^3 + 1$?

(a) $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

(b) $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$

(c) $g(x) = x^3 - 1$

(d) $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

(e) $g(x) = 1 - x^3$