Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Campo Mourão
Wellington José Corrêa

1ª Lista de Cálculo Diferencial e Integral I

Curso: Bacharelado em Ciências da Computação

DAMAT, 2015

Nome: ____

1 *Determinar no conjunto dos números reais, o conjunto solução das seguintes desigualdades:*

(a) $4 - 2x < 7 + 5x \leq 14.$

(b) $x + 1 > 4$ *ou* $x + 2 < 4.$

(c) $-1 \leq 2x - 5 \leq 7.$

(d) $|3 + 4x| \leq 9.$

(e) $|3x + 2| \geq 5.$

(f) $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{1}{4}$

2 *Encontre o domínio das funções a seguir.*

(a) $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 9}$

(b) $f(t) = \sqrt[3]{2t - 1}$

(c) $g(t) = \sqrt{3 - t} - \sqrt{2 + t}$

(d) $f(u) = \dfrac{u+1}{1 + \frac{1}{u+1}}$

3 *Verifique se a função abaixo é par, ímpar ou nenhuma das duas.*

(a) $f(s) = s^2 + 2s + 2$

(b) $g(x) = 5x^7 + 1$

(c) $h(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

(d) $\sqrt[3]{x}\,.$

(e) x^6

4 *Nos itens (a),(b) e (c) dados abaixo, defina as funções compostas*

(a) $f \circ g$ *(b)* $g \circ f$ *(c)* $f \circ f$ *(d)* $g \circ g\,;$

(i) $f(x) = x - 2$ *e* $g(x) = x + 7\,.$

(ii) $g(x) = x - 5$ *e* $g(x) = x^2 - 1\,.$

(iii) $f(x) = 2x - 3$ *e* $g(x) = \dfrac{x+3}{2}\,.$

5 *Esboce no plano cartesiano, os gráficos das seguintes regiões e funções :*

(a) $y = x + 2.$

(b) $\{(x, y)\,/\,y \leq x + 2\}.$

(c) $\{(x, y)\,/\,y > x + 2\}.$

(d) $y = x^2 - 10x + 21.$

(e) $y = x^2 + x + 5.$

(f) $\{(x, y)\,/\,x^2 + y^2 = 25\}.$

(g) $\{(x, y)\,/\,(x - 3)^2 + (y - 1)^2 < 9\}.$

(h) $\{(x, y)\,/\,x^2 + y^2 < 9 \quad e \quad y \leq x\}.$

(i)

$$f(x) = \begin{cases} -3; & x \leq -1 \\ 1; & -1 < x \leq 2 \\ 4; & x > 2 \end{cases}$$

(j)

$$f(x) = \begin{cases} x + 2; & x < 0 \\ 1 - x; & x \geqslant 0 \end{cases}$$

(k)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4; \; x \leq 3 \\ 2x - 1; \; x < 3 \end{cases}$$

(l) $f(x) = |2x + 1|$

(m) $g(x) = |x^2 - 5x + 6|$

(n) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

(o) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

6 *Encontre $f^{-1}(x)$, onde*

(a) $f(x) = 2x - 1$

(b) $f(x) = x^3 + 2$

(c) $f(x) = 2^x$

(d) $f(x) = \ln(x + 3)$

(e) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$.

7 *Estudos mostram que o peso aproximado do cérebro de uma pessoa é diretamente proporcional ao seu peso corporal, e uma pessoa com 68 kg tem um cérebro com peso aproximado de 1,8 kg. Sendo assim determine:*

(a) A expressão o número de quilos do peso aproximado do cérebro de uma pessoa como função do seu peso corporal.

(b) O peso aproximado do cérebro de uma pessoa cujo peso corporal é de 80 quilos.

(c) O peso do seu cérebro.

8 *Uma caixa aberta deve ser feita de uma folha de papelão medindo 16 por 30 cm, destacando - se quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando - se os lados conforme figura abaixo:*

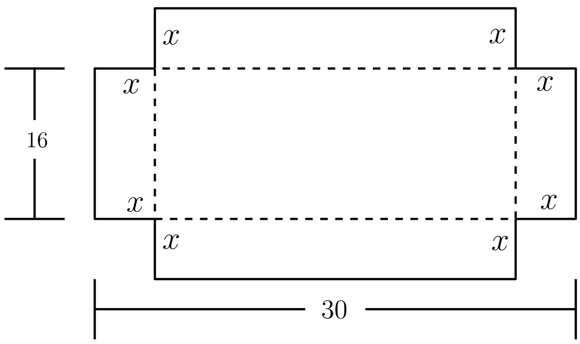


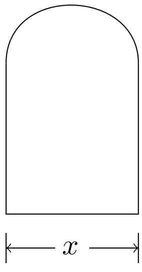
Figura 1:

(a) Expresse o volume V da caixa em função da variável x.

(b) Determine o domínio de V.

(c) Qual é o tamanho dos quadrados para se obter uma caixa com o maior volume?

9 *Uma janela normanda tem o formato de um retângulo em cima do qual se coloca um semicírculo. Se o perímetro da janela for de 30 m, expresse a área A da janela como uma função de sua largura x.*



10 *Uma fábrica produz açúcar a uma taxa de 4 toneladas por hora. Depois de uma hora, o depósito contém 12 toneladas de açúcar. Escreva uma equação para relacionar a quantidade de açúcar no depósito e o tempo de processamento, supondo que nenhuma quantidade de açúçar foi removida.*

11 *Os químicos usam o pH (potencial de hidrogênio) de uma solução para medir sua acidez ou basicidade. O pH é dado pela fórmula*

$$pH = -\log[H^+]$$

onde $[H^+]$ *é a concentração de íons de hidrogênio em moles por litros. O pH refere-se a uma medida que indica se uma solução líquida é ácida* $(pH < 7)$*, neutra* $(pH = 7)$*, ou básica/alcalina* $(pH > 7)$*. Encontre o pH aproximado de cada um dos seguintes e determine o tipo de solução.*

(a) Sangue: $[H^+] = 3,98\,\times\,10^{-8}$;

(b) cerveja: $[H^+] = 6,31\,\times\,10^{-5}$;

(c) café: $1,2, \times 10^{-6}$;

12 *Use a definição de pH do exercício anterior para encontrar* $[H^+]$ *da solução que tem pH igual a*

(a) 2,44

(b) 8,06

13 *Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias após t horas é* $n = f(t) = 100\,\cdot\,2^{t/3}$.

(a) Qual o tamanho da população após 15 horas?

(b) Encontre a função inversa e explique seu significado.

(c) Quando a população atingirá 50. 000 bactérias?

14 (Decaimento Radioativo) *Substâncias radioativas decaem exponencialmente. O teste do carbono - 14 (C-14) é um método bastante conhecido pelos antropólogos para estabelecer a idade de fósseis de plantas e animais. O professor Willard Libby, que ganhou o Prêmio Nobel em Química em 1960, propôs essa teoria. Pode-se mostrar que o decaimento exponencial é*

$$Q(t) = Q_0\,\mathrm{e}^{-0,00012\,t}$$

onde Q_0 *é a quantidade de C-14 presente originalmente. Suponha que um crânio encontrado em um local de escavações arqueológicas tem um décimo da quantidade de C-14 que possuía originalmente. Determine a idade aproximada do crânio.*

15 (Juros compostos) *A fórmula dos juros compostos é dada por*

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m\,t} \tag{1}$$

onde A é o montante aculumado ao final de t anos; P é o valor principal; r eá taxa de juros nominal anual; m é o número de períodos de conversão ao ano e t é prazo (em número de anos).

(a) Encontre o montante acumulado após 3 anos se R\$1.000,00 são investidos a juros de 8% ao ano composto:

(i) anualmente

(ii) semestramente

(iii) trimestralmente

(iv) anualmente

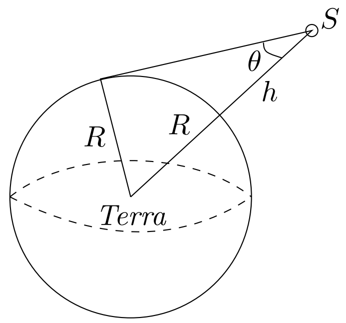
(v) diariamente

(b) Quanto tempo levará para que R\$10.000,00 se tornem R\$15.000,00 se o investimento for aplicado a 12% ao ano compostos trimestralmente?

16 *Um satélite de observação terrestre S tem sensores de horizonte que podem medir o ângulo θ mostrado na figura abaixo. Seja R o raio da Terra (suposta esférica) e h a distância entre o satélite e a superfície da Terra.*

(a) Mostre que $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{R}{R+h}$.

(b) Obtenha θ até o grau mais próximo para um satélite que está a 10.000 km da superfície (use $R =$ 6.378 km).



17 *Verifique as identidades:*

(a) $x^2 - a^2 = (x-a)\cdot(x+a)$.

(b) $x^3 - y^3 = (x-y)\cdot(x^2 + x\cdot y + y^2)$.

(c) $a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})\cdot(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a\cdot b} + \sqrt[3]{b^2})$.

18 *Prove a conhecida "fórmula de Bhaskara (1114 – 1185), isto é, dada a equação do segundo grau* $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, *onde* $a \neq 0$, b *e* c *são números reais dados, temos as raízes deste polinômio podem ser expressas de maneira unificada pela fórmula:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}.$$

Nota: é preciso ser dito que a fórmula acima não foi descoberta por Bhaskara. Conforme o mesmo relatou no século 12, a mencionada fórmula fora encontrada um século antes pelo matemático hindu Sridhara (991 – ?) e publicada em uma hora que não chegou ao conhecimento de todos.

19 *Considere o polinômio do segundo grau* $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, *onde* $a \neq 0$, b *e* c *são reais dados.*

(a) Verifique que

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right) - \frac{\Delta}{4\,a^2}\right], \quad \textit{onde } \Delta = b^2 - 4\,a\,c.$$

(b) Conclua do item (a) que, se $\Delta \geqslant 0$, *as raízes de* $a\,x^2 + b\,x + c$ *são dadas pela fórmula*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a}.$$

(c) Tome $\Delta \geqslant 0$ *e considere* $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$ *e* $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}$ *as raízes de* $a\,x^2 + b\,x + c$. *Verifique que*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

(d) Sejam x_1 e x_2 dados no item (c). Verifique que

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,\cdot\,(x - x_2)\,.$$

20 *Considere dois números reais positivos. Demonstre que "a média geométrica destes dois números é menor ou igual à média aritmética destes". Em outras palavras,*

$$\sqrt{x\,\cdot\,y} \leq \frac{x+y}{2},\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+\,.$$

21 *Prove que*

(a) se $x < y$, então,

$$x < \frac{1}{2}(x+y) < y.$$

(b) Se $a, b \geq 0$, então,

$$a\,\cdot\,b \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

(c) Se $a, b \geq 0$ e $\varepsilon > 0$, então,

$$a\,\cdot\,b \leq \frac{1}{\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2.$$

(d) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, então,

$$(-x)\,\cdot\,y = x\,\cdot\,(-y) = -(x\,\cdot\,y) \qquad e \qquad (-x)\,\cdot\,(-y) = x\,\cdot\,y\,.$$

(e) $|x+y| \leq |x| + |y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

(f) $|x| - |y| \leq \big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$.

(g) Dado $a \neq 0$, tem-se $a^0 = 1$.

(h) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $c, d \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, tem-se

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\,\cdot\,d}{b\,\cdot\,c}\,.$$

(i) $x < y \Leftrightarrow y^{-1} \leq x^{-1}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+$.

(j) Se $0 < a < b$, então, $a^2 < b^2$.

Sucesso!!!

Respostas

1

(a) $-\frac{3}{7} < x \leq -\frac{7}{5}$;

(b) $x < 2$ ou $x > 3$;

(c) $-3 < x \leq 1$;

(d) $-\frac{13}{3} < x \leq \frac{5}{3}$;

(e) $x \leq -\frac{7}{3}$ ou $x \geq 1$;

(f) $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$.

2

(a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

(b) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$

(c) $\operatorname{Dom} g = [-2, 3]$

(d) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$

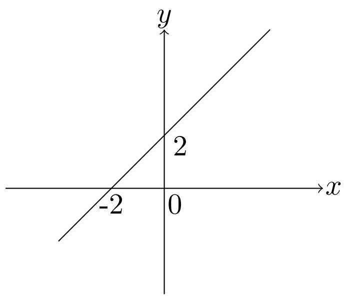
3 (a), (b) e (c) não são pares e nem ímpares. (d) Ímpar. (e) Par.

4

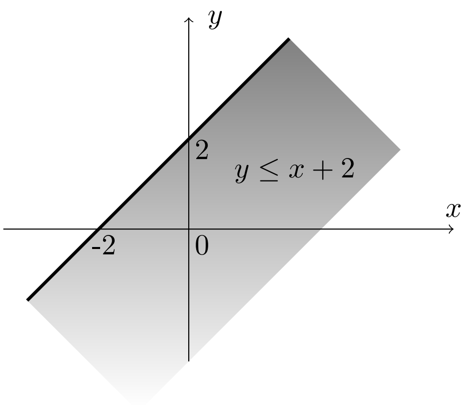
(i) : $(a)\, x+5$, $(b)\, x+5$, $(c)\, x-4$, $(d)\, x+14$;

(ii) : $(a)\, x^2-6$, $(b)\, x^2-10x+24$, $(c)\, x-10$, $(d)\, x^4-2x^2$;

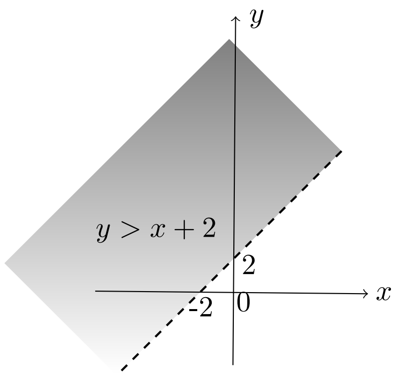
(iii) : $(a)\, x$, $(b)\, x$, $(c)\, 4x-9$, $(d)\, \frac{x+9}{4}$;



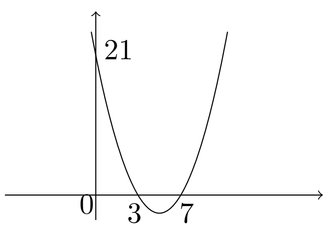
5 (a)



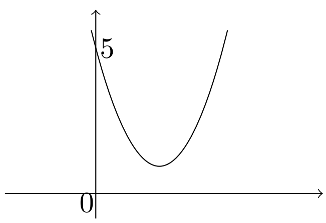
(b)



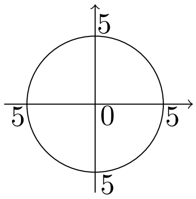
(c)



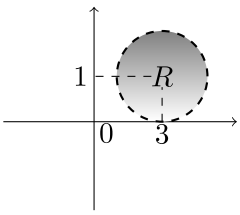
(d)



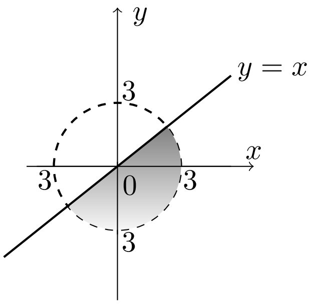
(e)


5
5
0
5
5

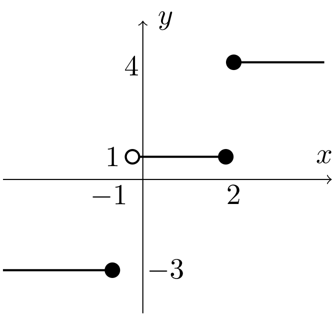
(f)


1
R
0
3

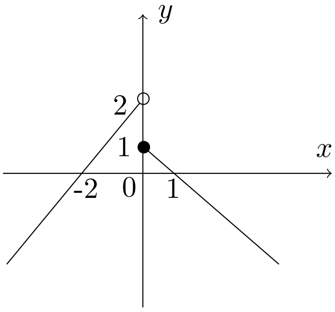
(g)


y
y = x
3
x
3
0
3
3

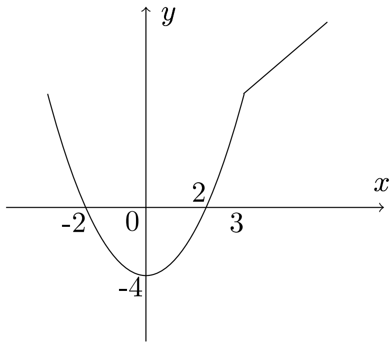
(h)


y
4
1
x
−1
2
−3

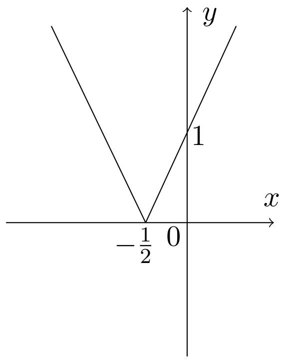
(i)


y
2
1
x
-2
0
1

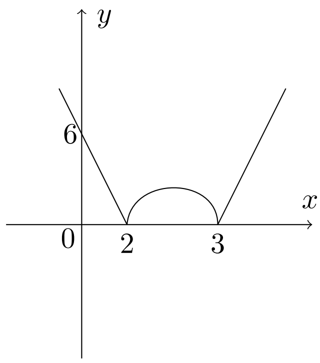
(j)


y
2
x
-2
0
3
-4

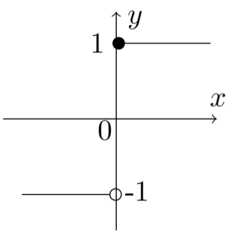
(k)


y
1
x
−1/2
0

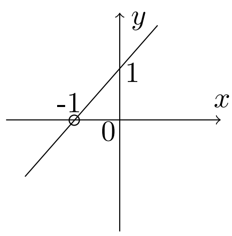
(l)


y
6
x
0
2
3

(m)


y
1
x
0
-1

(n)


y
1
-1
x
0

(o)

6

(a) $\dfrac{x+1}{2}$

(b) $\sqrt[3]{x-2}$

(c) $\log_2 x$

(d) $e^x - 3$

(e) $\dfrac{x+3}{x-2}$.

7 (a) $f(x) = \dfrac{9}{340}\,x$; (b) 2,1 kg .

8 (a) $V(x) = (16-2x)\,(30-2x)x$; (b) $\operatorname{Dom} V(x) = [0,8]$; (c) $x = \frac{10}{3}$

9 $A(x) = 15x - x^2\left(\dfrac{\pi+4}{8}\right)$.

10 A equação da reta é $y = 4x + 8$.

11 (a) básica; (b) ácida; (c) ácida.

12 (a) $8,71 \times 10^{-9}$; (b) $3,63 \times 10^{3}$.

13 (a) 3.200; (b) $f^{-1}(n) = \dfrac{3}{\ln 2}\,\ln\left(\dfrac{n}{100}\right)$ e seu significado é calcular o tempo decorrido quando há n bactérias; (c) após cerca de 26, 9 horas.

14 Aproximadamente 19.200 anos.

15 (a): (i) $A = 1.259,71$; (ii) $A = 1.265,32$; (iii) $A = 1.268,24$; (iv) $A = 1.270,24$; (v)$A = 1.271,22$; (b) aproximadamente 3,43 anos.

16 (b) $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{R}{R+h}\right) \approx 23°$.

17 Para o item (c), faça $x = \sqrt[3]{a}$ e $y = \sqrt[3]{b}$ e use o item (b).

18 **Sugestão:** fazendo uso da equação original, a reescreva como $a\,x^2 + b\,x = -c$. Multiplique - a por $4\,a$ e depois some e subtraia um termo conveniente de modo a obter no lado esquerdo da igualdade resultante o polinômio $(2\,a\,x + b)^2$.

20 **Sugestão**: use o fato que $(u-v)^2 \geqslant 0$, para todos u e v reais. Disto, tome $u = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{y}$ e, conclua o desejado.

21 **Sugestões:** (a) basta somar x em ambos os lados da desigualdade $x < y$ para obter a primeira desigualdade. Para obter a segunda, repita o procedimento somando y lado a lado na desigualdade $x < y$; (b): use a desigualdade $(a-b)^2 \geqslant 0$; (c): recorra ao item (b); (d): para a primeira e a segunda igualdade, use o fato que $(-x)\cdot y + (x \cdot y) = 0$ e $x \cdot (-y) + (x \cdot y) = 0$. Para a última igualdade, veja que esta que é uma aplicação das anteriores; (e): empregue a definição de módulo; (f): use o item anterior para $|x| = |(x-y)| + |y|$ e $|y| = |(y-x)| + |x|$ e conclua novamente fazendo uso da definição de módulo; (g): use propriedades de potenciação; (h): multiplique o numerador e o denominador do quociente $(a/b)/(c/d)$ por um fator conveniente; (i): multiplique a desigualdade $x < y$ por y^{-1} e depois por x^{-1}; (j): procedimento análogo ao item anterior.