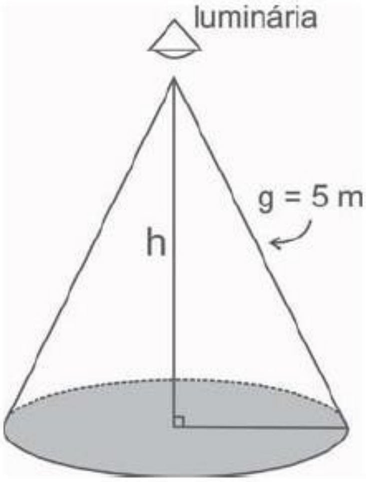
Exercícios sobre cones

Exercícios

1. Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28,26m2, considerando π = 3,14 , a altura h será igual a:

a) 3 m.
b) 4 m.
c) 5 m.
d) 9 m.

2. Deseja-se construir um cone circular reto com 4 cm de raio da base e 3cm de altura. Para isso, recorta-se, em cartolina, um setor circular para a superfície lateral e um círculo para a base. Determine a medida do ângulo central do setor circular.

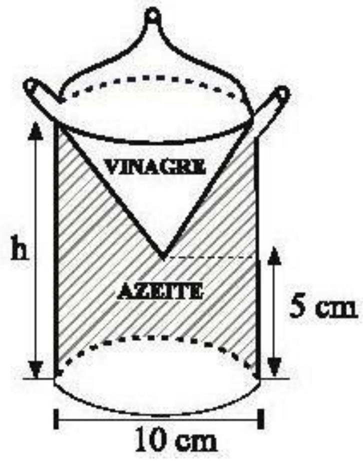
3. Determine a área lateral e o volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo de catetos 6 cm e 8 cm em torno do seu maior cateto:

4. Calcule o volume de um cone equilátero, sabendo que sua geratriz mede 8cm:

5. As bases de um tronco de cone circular reto são círculos de raio 6 cm e 3cm. Sabendo-se que a área lateral do tronco é igual à soma das áreas das bases, calcule:

a) a altura do tronco de cone.
b) o volume do tronco de cone.

6. A figura representa um galheteiro para a colocação de azeite e vinagre em compartimentos diferentes, sendo um cone no interior de um cilindro.



Considerando h como a altura máxima de líquido que o galheteiro comporta e a razão entre a capacidade total de azeite e vinagre igual a 5, o valor de h é

a) 7 cm
b) 8 cm
c) 10 cm
d) 12 cm
e) 15 cm

Gabarito

1. **B**

Se a área a ser iluminada mede 28,26 m² e r é o raio da área circular iluminada, então

$$\pi \cdot r^2 = 28,26 \Rightarrow r \cong \sqrt{\frac{28,26}{3,14}} \Rightarrow r \cong 3 \text{ m}$$

Portanto, como g = 5m e r = 3m, segue que h = 4m.

2. Chamaremos o ângulo central do setor circular de α.

Se o raio é 4 e a altura é 3, a geratriz desse cone será 5 (por ser o triângulo pitagórico 3, 4, 5)

Então podemos descobrir α atraves da seguinte fórumla:

$$\alpha = \frac{r}{g} \cdot 360°$$

$$\alpha = \frac{4}{5} \cdot 360°$$

$$\alpha = 288°$$

3. O exercício diz que o triângulo tem catetos 6 e 8, portanto é o triangulo 3, 4, 5 multiplicado por 2, sendo assim a hipotenusa vale 10. Ao rotacionar esse triângulo teremos um cone de raio igual a 6, altura igual a 8 e geratriz igual a 10. O exercício pede a área lateral e o volume, então vamos calcular:

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g$$

$$A_L = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi cm^2$$

A área lateral é igual a $60\pi cm^2$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi cm^3$$

O volume é igual a $96\pi cm^3$.

4. Como o cone é equilátero, a geratriz e o diâmetro da base foram um triângulo equilátero. Portanto, a geratriz é igual ao diâmetro, ou seja, a geratriz é o dobro do raio. Nesse caso, como a geratriz vale 8 cm, o raio da base vale 4 cm.

A altura de um triângulo equilátero pode ser calculada pela fórmula: $h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$ então a altura desse cone pode ser dada por $h = 4\sqrt{3}$

Já temos o raio da base e a altura, agora podemos calcular o volume através da fórmula:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$
$$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3}}{3}$$
$$V = \frac{64\pi\sqrt{3}}{3} \ \text{cm}^2$$

5. Primeiro vamos chamar a área da base do triângulo maior (o de raio 6) de área da base grande (A_{BG})

E vamos chamar a área da base do triângulo menor (o de raio 3) de área da base pequena (A_{BP})

O exercício diz que área lateral do tronco é igual a soma das áreas das bases, ou seja, $A_{LT} = A_{BG} + A_{BP}$

Calculando os dados que temos:

$$A_{BG} = 36\pi \text{cm}^2$$
$$A_{BP} = 9\pi \text{cm}^2$$
$$A_{LT} = 45\pi \text{cm}^2$$

Podemos ver que a área lateral do tronco, é a área lateral do cone grande menos a área lateral do cone pequeno $(A_{LT} = A_{LG} - A_{LP})$

Por semelhança de triângulo, tem-se que a geratriz do cone maior é o dobro da geratriz do cone menor.

Entao podemos calcular:

$$A_{LG} = \pi \cdot 6 \cdot 2g$$
$$A_{LP} = \pi \cdot 3 \cdot g$$
$$A_{LT} = A_{LG} - A_{LP}$$
$$45\pi = 9\pi \cdot g$$
$$g = \frac{45}{9}$$
$$g = 5 \text{ cm} \quad \text{e, portanto, } 2g = 10 \text{ cm}$$

Temos então que os triângulos dos dois cones são triãngulos pitagóricos, o do cone pequeno é o 3, 4, 5 (portanto a altura do cone pequeno é 4 cm) e o do cone grante é 6, 8, 10 (portanto a altura do cone grande é 8 cm).

a) Se a altura do tronco é dada pela subtração da altura de um cone pelo outro, então a altura do tronco é igual a 4 cm.

b) O volume do tronco é igual ao volume do cone grande menos o volume do cone pequeno:

$$V_T = V_G - V_P$$

$$V_T = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 8}{3} - \frac{\pi \cdot 9 \cdot 4}{3}$$

$$V_T = 96\pi - 12\pi$$

$$V_T = 84\pi \text{ cm}^3$$

6. C

Temos que:

$$V_{VINAGRE} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (h-5)$$

e

$$V_{AZEITE} = V_{CILINDRO} - v_{VINAGRE}$$

$$V_{AZEITE} = \pi \cdot 5^2 \cdot h \;\; - \;\; \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (h-5)$$

O exercício nos diz que

$$\frac{V_{AZEITE}}{V_{VINAGRE}} = 5 \rightarrow V_{AZEITE} = 5 \cdot V_{VINAGRE}$$

$$5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (h-5) = \pi \cdot 5^2 \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (h-5)$$

$$6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (h-5) = \pi \cdot 5^2 \cdot h$$

$$2h - 10 = h$$

$$h = 10 \text{ cm}$$