Módulo Equações e Inequações do Primeiro Grau

Inequações.

7° ano/E.F.

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Equações e Inequações do Primeiro Grau.
Inequações.

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine o conjunto solução das inequações abaixo, sabendo que o conjunto universo é o conjunto dos números racionais ($U = \mathbb{Q}$).

a) $x + 7 > 10$.

b) $2x + 5 < 11$.

c) $3x - 4 \leq 9$.

d) $8 + 4x \geq 20$.

e) $8 - 3x < 12 - x$.

f) $3 \cdot (x + 2) - 5 \cdot (2x - 1) > 0$.

g) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{4} < \dfrac{3}{10} - \dfrac{5x}{2}$.

h) $3 \cdot (x + \dfrac{1}{5}) + \dfrac{x}{3} < 2$.

Exercício 2. Qual o maior valor inteiro para x na inequação $\dfrac{2x-1}{5} \leq 2$?

Exercício 3. Quantas soluções inteiras e positivas tem a inequação $2x + 7 \leq x + 12$?

2 Exercícios de Fixação

Exercício 4. Determine o conjunto solução das inequações abaixo, sabendo que o conjunto universo é o conjunto dos números racionais ($U = \mathbb{Q}$).

a) $-x + 7 > 1$.

b) $2x + 5 < 8x - 1$.

c) $3x - \dfrac{1}{2} \leq 0$.

d) $7 \cdot (2 - x) - 4 \cdot (2x - 3) > 1$.

e) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3} < \dfrac{3}{4} - \dfrac{x}{5}$.

f) $3 \cdot (3 + \dfrac{x}{5}) + \dfrac{x-4}{3} < 3$.

Exercício 5. Quantas soluções pares e positivas tem a inequação $\dfrac{1-3x}{2} - x > \dfrac{x+1}{3} - 10$?

Exercício 6. Dada a fração $\dfrac{3a+16}{5a-4}$, determine a para que esta fração seja imprópria.

Exercício 7. Quantas soluções inteiras tem a inequação $7 < 2x - 1 \leq 13$?

Exercício 8. Determine o conjunto solução da inequação $\dfrac{1}{3} < \dfrac{x}{2} + 3 < \dfrac{13}{3}$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

Exercício 9. Determine a maior medida inteira, em centímetros, para o comprimento de um retângulo, sabendo que essa medida é o dobro da medida da largura e que o perímetro deve ter no máximo 37cm.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 10. Resolva as seguintes inequações sendo $U = \mathbb{Q}$.

a) $(x - 5)^2 \leq 0$.

b) $x^2 \leq 9$.

c) $x^2 + 13 \geq 0$.

Exercício 11. Determine os possíveis valores racionais de x nas inequações abaixo.

a) $(2x - 4) \cdot (15 - 3x) \geq 0$.

b) $\dfrac{5+2x}{1-x} \leq 0$.

Exercício 12. Os números racionais x e y são tais que $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Prove que

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1.$$

Respostas e Soluções.

1.

a)

$$\begin{aligned} x+7 &> 10 \\ x+7-7 &> 10-7 \\ x &> 3. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x > 3\}$.

b)

$$\begin{aligned} 2x+5 &< 11 \\ 2x+5-5 &< 11-5 \\ \frac{2x}{2} &< \frac{6}{2} \\ x &< 3. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x < 3\}$.

c)

$$\begin{aligned} 3x-4 &\leq 9 \\ 3x-4+4 &\leq 9+4 \\ \frac{3x}{3} &\leq \frac{13}{3} \\ x &\leq \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x \leq \frac{13}{3}\}$.

d)

$$\begin{aligned} 8+4x &\geq 20 \\ 8+4x-8 &\geq 20-8 \\ \frac{4x}{4} &\geq \frac{12}{4} \\ x &\geq 3. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x \geq 3\}$.

e)

$$\begin{aligned} 8-3x &< 12-x \\ -3x+x &< 12-8 \\ -2x &< 4 \\ 2x &> -4 \\ \frac{2x}{2} &> \frac{-4}{2} \\ x &> -2. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x > -2\}$.

f)

$$\begin{aligned} 3\cdot(x+2) - 5\cdot(2x-1) &> 0 \\ 3x+6-10x+5 &> 0 \\ -7x &> -11 \\ 7x &< 11 \\ x &< \frac{11}{7}. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x < \frac{11}{7}\}$.

g)

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} + \frac{1}{4} &< \frac{3}{10} - \frac{5x}{2} \\ \frac{20x}{5} + \frac{20}{4} &< \frac{60}{10} - \frac{100x}{2} \\ 4x+5 &< 6-50x \\ 4x+50x &< 6-5 \\ 54x &< 1 \\ x &< \frac{1}{54}. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x < \frac{1}{54}\}$.

h)

$$\begin{aligned} 3\cdot(x+\frac{1}{5}) + \frac{x}{3} &< 2 \\ 3x + \frac{3}{5} + \frac{x}{3} &< 2 \\ 45x + \frac{45}{5} + \frac{15x}{3} &< 30 \\ 45x+9+5x &< 30 \\ 50x &< 21 \\ x &< \frac{21}{50}. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x < \frac{21}{50}\}$.

2.

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{5} &\leq 2 \\ 5\cdot\frac{2x-1}{5} &\leq 5\cdot 2 \\ 2x-1 &\leq 10 \\ 2x &\leq 11 \\ x &\leq \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Como x deve ser menor ou igual a $\frac{11}{2} = 5,5$, seu maior valor inteiro é 5.

3.

$$\begin{aligned} 2x+7 &\leq x+12 \\ 2x-x &\leq 12-7 \\ x &\leq 5. \end{aligned}$$

Temos que as soluções inteiras e positivas são $\{1,2,3,4,5\}$, portanto são 5 soluções inteiras e positivas.

4.

a)

$$\begin{aligned} -x+7 &> 1 \\ -x &> 1-7 \\ -x &> -6 \\ x &< 6. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x < 6\}$.

b)

$$\begin{aligned} 2x+5 &< 8x-1 \\ 2x-8x &< -1-5 \\ -6x &< -6 \\ 6x &> 6 \\ x &> 1. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x > 1\}$.

c)

$$\begin{aligned} 3x-\frac{1}{2} &\leq 0 \\ 3x &\leq \frac{1}{2} \\ \frac{3x}{3} &\leq \frac{1}{6} \\ x &\leq \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x \leq \frac{1}{6}\}$.

d)

$$\begin{aligned} 7\cdot(2-x)-4\cdot(2x-3) &> 1 \\ 14-7x-8x+12 &> 1 \\ -7x-8x &> 1-14-12 \\ -15x &> -25 \\ 15x &< 25 \\ x &< \frac{25}{15} \\ x &< \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x < \frac{5}{3}\}$.

e)

$$\begin{aligned} \frac{x}{2}+\frac{1}{3} &< \frac{3}{4}-\frac{x}{5} \\ \frac{60x}{2}+\frac{60}{3} &< \frac{180}{4}-\frac{60x}{5} \\ 30x+20 &< 45-12x \\ 30x+12x &< 45-20 \\ 42x &< 25 \\ x &< \frac{25}{42}. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x < \frac{25}{42}\}$.

f)

$$\begin{aligned} 3\cdot(3+\frac{x}{5})+\frac{x-4}{3} &< 3 \\ 9+\frac{3x}{5}+\frac{x-4}{3} &< 3 \\ 15\cdot 9+\frac{15\cdot 3x}{5}+\frac{15\cdot(x-4)}{3} &< 15\cdot 3 \\ 135+9x+5(x-4) &< 45 \\ 135+9x+5x-20 &< 45 \\ 9x+5x &< 45-135+20 \\ 14x &< -70 \\ x &< -\frac{70}{14} \\ x &< -5. \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{Q}, x < -5\}$.

5.

$$\begin{aligned} \frac{1-3x}{2}-x &> \frac{x+1}{3}-10 \\ \frac{6(1-3x)}{2}-6x &> \frac{6(x+1)}{3}-60 \\ 3(1-3x)-6x &> 2(x+1)-60 \\ 3-9x-6x &> 2x+2-60 \\ -9x-6x-2x &> 2-60-3 \\ -17x &> -61 \\ 17x &< 61 \\ x &< \frac{61}{17}. \end{aligned}$$

Como queremos as soluções pares e positivas, temos $x = 2$, pois $4 > 61/17$. Logo, há apenas uma solução par e positiva.

6. Para que a fração seja imprópria, o numerador deve ser menor que o denominador. Temos então:

$$\begin{aligned} 3a+16 &< 5a-4 \\ 3a-5a &< -4-16 \\ -2a &< -20 \\ 2a &> 20 \\ a &> 10. \end{aligned}$$

Assim, concluimos que a fração será imprópria para qualquer valor de a maior que 10.

7.

$$\begin{aligned} 7 < {} & 2x-1 && \leq 13 \\ 7+1 < {} & 2x && \leq 13+1 \\ 8 < {} & 2x && \leq 14 \\ 4 < {} & x && \leq 7. \end{aligned}$$

Temos então que as soluções inteiras para inequação são 5, 6 e 7, ou seja, três soluções.

8.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} < {} & \frac{x}{2}+3 && < \frac{13}{3} \\ \frac{1}{3}-3 < {} & \frac{x}{2} && < \frac{13}{3}-3 \\ \frac{1}{3}-\frac{9}{3} < {} & \frac{x}{2} && < \frac{13}{3}-\frac{9}{3} \\ -\frac{8}{3} < {} & \frac{x}{2} && < \frac{4}{3} \\ 2(-\frac{8}{3}) < {} & 2\cdot\frac{x}{2} && < 2\cdot\frac{4}{3} \\ -\frac{16}{3} < {} & x && < \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{Q}, -\frac{16}{3} < x < \frac{8}{3}\}$.

9. Chamando a medida da largura de x, a medida do comprimento vale $2x$. Como o perímetro máximo é 37, temos:

$$\begin{aligned} 2x+x+2x+x &\leq 37 \\ 6x &\leq 37 \\ \frac{6x}{3} &\leq \frac{37}{3} \\ 2x &\leq \frac{37}{3}. \end{aligned}$$

Como o comprimento deve ser inteiro e menor que $\frac{37}{3}$cm, seu valor máximo é $\frac{36}{3} = 12$cm.

10. (Extraído da Vídeo Aula)

a) $(x-5)^2 \leq 0$ significa que $(x-5)^2 = 0$ ou $(x-5)^2 < 0$. Como o segundo caso é impossível, então $(x-5)^2 = 0$, segue que $x-5 = 0$, ou seja, $x = 5$.

b) Se $x^2 \leq 9$, então x pode ser qualquer racional, desde que $-3 \leq x \leq 3$.

c) Se $x^2 + 13 \geq 0$ e sabemos que $x^2 \geq 0$, então x pode ser qualquer racional.

11. (Extraído do Vídeo Aula)

a) Se $(2x-4)\cdot(15-3x) \geq 0$, então, além do fato de qualquer um dos termos poder ser zero, e isso ocorre para $x = 2$ e $x = 5$ (1), temos dois casos: no primeiro caso, ambos os termos devem ser positivos, ou seja, $2x-4 > 0$, donde $x > 2$, e $15-3x > 0$, donde $x < 5$, segue que $2 < x < 5$ (2); no segundo caso, ambos os termos devem ser negativos, ou seja, $2x-4 < 0$, donde $x < 2$, e $15-3x < 0$, donde $x > 5$, segue que $x < 2$ e $x > 5$, mas isso é impossível. Temos então, de (1) e (2) que $x \in \mathbb{Q}$, tal que $2 \leq x \leq 5$.

b) Se $\frac{5+2x}{1-x} \leq 0$, então temos dois casos, com o numerador podendo ser zero em ambos: $5+2x \geq 0$, donde $x \geq \frac{-5}{2}$, e $1-x < 0$, donde $x > 1$, segue que $x > 1$ (1); $5+2x \leq 0$, donde $x \leq \frac{-5}{2}$, e $1-x > 0$, donde $x < 1$, segue que $x \leq \frac{-5}{2}$ (2). De (1) e (2), temos que $x \in \mathbb{Q}$, tal que $x \leq \frac{-5}{2}$ ou $x > 1$.

12. (Extraído da Olimpíada do Leningrado) Suponha, sem perda de generalidade, que $x \geq y$, então:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x} &\leq \frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+y} \\ &= \frac{x+y}{1+y} \\ &\leq \frac{1+y}{1+y} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Elaborado por Cleber Assis e Tiago Miranda
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com