INEQUAÇÕES

1. Inequação

Vamos supor que, na nossa escola, a média mínima para aprovação automática seja 60 e que essa média, em cada matéria, seja calculada pela expressão:

$$\frac{A+B+C+D}{4}$$

na qual, as letras A, B, C e D representam as notas do primeiro, segundo, terceiro e quarto bimestre, respectivamente. Se as notas de um aluno, em Matemática, fossem 68, 60 e 70 nos três primeiros bimestres, respectivamente, então para ser aprovado automaticamente, sua nota D do último bimestre, deverá satisfazer a desigualdade:

$$\frac{68+60+70+D}{4} \geq 60$$

Essa desigualdade é chamada de **Inequação**.

Após resolver a inequação acima, o aluno descobre que para obter aprovação em Matemática, sua nota deverá ser no mínimo igual a 42. Nesse módulo, iremos resolver inequações semelhantes a que foi apresentada e outras mais detalhadas.

2. Inequação do 1º Grau

Inequações do primeiro grau são aquelas que podem ser expressas sob a forma:

ax + b > 0

(ou com as relações ≥, <, ≤, ou ≠), em que a e b são **constantes reais** (a≠ 0) e x é a **variável** ou **incógnita**.

A resolução desse tipo de inequação é fundamentada nas propriedades das desigualdades, descritas a seguir:

- Adicionando ou subtraindo um mesmo número a ambos os membros de uma desigualdade, a desigualdade se mantém.
- Dividindo ou multiplicando ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número positivo, a desigualdade se mantém.
- Dividindo ou multiplicando ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número negativo, a desigualdade inverte o sentido.

Exercícios Resolvidos

ER.01) Ache o conjunto solução da inequação

5x – 8 < 3x + 12

Resolução:

Resolvendo a inequação de 1º grau, temos:

1) Adicionando 8 a cada membro da inequação:

5x – 8 + 8 < 3x + 12 + 8 ➔ 5x < 3x + 20

2) Subtraindo 3x de cada membro da última inequação obtida:

5x – 3x < 3x – 3x + 20 ➔ 2x < 20

3) Dividindo ambos os membros da última desigualdade obtida por 2:

$$\frac{2x}{2} < \frac{20}{2} \quad ➔ \quad \boxed{x < 10}$$

Logo, o conjunto solução será $S = \{x \in \Re \mid x < 10\}$.

ER.02) Determinar o maior número inteiro que satisfaz a desigualdade:

$$1 - \frac{11t}{2} > \frac{7}{6} - 2t$$

Resolução:

Para facilitar a resolução podemos eliminar os denominadores, multiplicando ambos os membros da inequação pelo m.m.c.(2, 6) = 6:

$$6.\left(1-\frac{11t}{2}\right) > 6.\left(\frac{7}{6}-2t\right) \quad ➔ \quad 6 – 33t > 7 – 12t$$

Subtraindo 6 e adicionando 12 t a ambos os membros da inequação resultante, teremos:

6 – 6 – 33t + 12t > 7 – 6 – 12t + 12t ➔ – 21t > 1

Multiplicando ambos os membros da inequação por (– 1) teremos:

– 21t .(– 1) > 1.(– 1) ➔ 21t < – 1

Observe que a desigualdade mudou de sentido. Agora, dividindo ambos os membros da inequação resultante por 21, obtemos:

$$\frac{21t}{21} < -\frac{1}{21} \quad ➔ \quad \boxed{t < -\frac{1}{21} \quad \text{ou} \quad t < -0{,}047}$$

Assim, o maior número inteiro que satisfaz essa desigualdade é o número – 1.

Exercícios Propostos

EP.01) Determine o conjunto solução das seguintes inequações do primeiro grau:

a) 9x – 5.(3 – 2x) > 7x + 9

b) $1-\frac{2-3n}{4} \leq \frac{n}{2}-\frac{1}{4}$

c) $\frac{3x}{5}-\frac{1}{3} \neq \frac{x}{6}+2$

d) – 3.(2x – 5) > 1 – 6x

e) – 3.(2x – 5) < 1 – 6x

EP.02) Qual o menor número inteiro que satisfaz a inequação $\frac{1+7x}{5} > x - \frac{2}{3}$?

EP.03) Duas pequenas fábricas de calçados, A e B, têm fabricado, respectivamente, 3000 e 1100 pares de sapatos por mês. Se, a partir de Janeiro, a fábrica A aumentar sucessivamente a produção em 70 pares por mês e a fábrica B aumentar sucessivamente a produção em 290 pares por mês, a produção da fábrica B superará a produção da fábrica A a partir de qual mês?

EP.04) O custo C, em reais, da produção de x exemplares de um livro é dado por C(x) = 2000 + 3,5x. Se cada exemplar é vendido por 8 reais, quantos exemplares, no mínimo, devem ser vendidos para que a editora não tenha prejuízo?
a) 438
b) 442
c) 445
d) 450
e) 455

3. Inequação do 2º Grau

São denominadas inequações do 2º grau toda inequação que pode ser escrita na forma:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

(ou com as relações ≥, <, ≤, ou ≠), em que **a, b** e **c** são **constantes reais** (**a**≠ 0) e x é a **variável** ou **incógnita**.

A resolução desse tipo de inequação é fundamentada nas mesmas propriedades das desigualdades, conforme foram descritas para a resolução de inequações do 1º grau, além do estudo do sinal do trinômio do 2º grau.

3.1. Método de Resolução de Inequações do 2º Grau

Para resolver uma inequação do 2º grau, seguiremos os procedimentos descritos abaixo:

Dada a inequação $ax^2+bx+c \begin{matrix}\ge\\ \le\\ >\\ <\end{matrix} 0$, devemos:

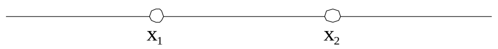
1) Igualar a expressão do 1º membro da inequação a zero.

$$ax^2+bx+c=0$$

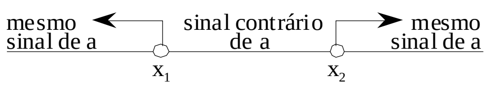
2) Determinar as raízes da equação obtida.

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow \begin{cases}\text{raiz } x_1\\ \text{raiz } x_2\end{cases}$$

3) Representar as raízes na reta dos Reais (ℜ) ordenadamente.



4) Fora do intervalo compreendido entre as raízes assinalamos o mesmo sinal do coeficiente de x^2, ou seja, **a** (mesmo sinal de **a**) e no intervalo compreendido entre as raízes assinalamos o sinal contrário do coeficiente de x^2, ou seja, a (sinal contrário de a)
Então:



Este é o **gráfico da variação do sinal**.

5) A solução deverá ser de acordo com o sinal da inequação.

$$\text{Se } \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{sinal } + \\ < 0 \rightarrow \text{sinal } - \end{cases}$$

Exercício Resolvido

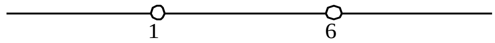
ER.03) Resolver, no conjunto R, a inequação do segundo grau $x^2 - 7x + 6 > 0$.
Resolução:

Seguindo os procedimentos descritos, teremos:
1) Equação: $x^2 - 7x + 6 = 0$
2) Raízes: $x^2 - 7x + 6 = 0$, com a = 1, b = – 7 e c = 6.

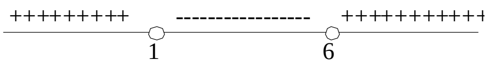
➢ $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4.1.6 \Rightarrow \Delta = 25$

➢ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{7 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

3) Reta:



4) Sinais: Como neste caso **a** = 1 > 0
O **gráfico da variação do sinal** será:



5) Como queremos $x^2 - 7x + 6 > 0$, então a solução será fora do intervalo compreendido entre as raízes, ou seja,

$$S = \{x \in \Re \mid x < 1 \text{ ou } x > 6\}$$

Exercício Proposto

EP.05) Resolva as seguintes inequações:
a) $-x^2 - x + 12 \le 0$
b) $2x^2 - 7x + 3 < 0$
c) $x^2 + 4x + 4 \ge 0$
d) $9x^2 - 12x + 4 < 0$
e) $x^2 - 4x + 4 \ge 0$

4. Sistema de inequações

Para resolver um sistema de inequações, devemos resolver cada inequação separadamente e, em seguida, fazer a intersecção das soluções encontradas, obtendo a solução final do sistema.

Exercício Proposto

EP.06) Resolver, no conjunto dos reais, os seguintes sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} 2x+1 > 3x-2 \\ x^2 - 6x + 8 \le 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2x^2 \ge 0 \\ x^2 - x - 2 \le 0 \end{cases}$

5. Inequação do tipo produto

Inequações do tipo $(x+3).(-7x) > 0$, $(x^2+5x+3).(-2x) \le 0$, onde temos um produto de duas expressões e uma desigualdade, são chamadas de inequações do tipo produto.

Para resolver esse tipo de inequação, devemos:
i)fazer o **gráfico da variação do sinal** de cada expressão.
ii)multiplicar os sinais obtendo o **gráfico da variação do sinal** do produto.
iii)achar a solução de acordo com o sinal da inequação.

Exercício Resolvido

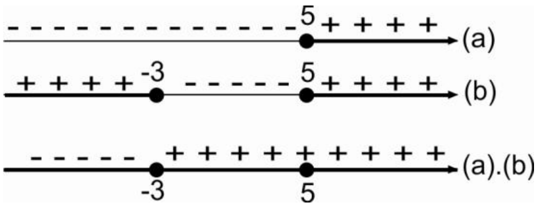
ER.04) Resolver a inequação definida por
$(x - 5)(x^2 - 2x - 15) \le 0$.

Resolução:

Fazendo os **gráficos da variação do sinal:**

(a) $x - 5 \ge 0 \Rightarrow x \ge 5$.
(b) $x^2 - 2x - 15 \ge 0$
$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 5}$.

Assim, multiplicando os sinais:



Logo, como queremos $(x - 5).(x^2 - 2x - 15) \le 0$, teremos:

$$\boxed{S = \{x \in R \mid x \le -3 \quad \text{ou} \quad x = 5\}}$$

Exercício Proposto

EP.07) Resolver, no conjunto dos números reais, as inequações:

a) $(2x - 1).(x - 2) \ge 0$

b) $(-x^2 + 4x - 3).(2x - 1) \le 0$

6. Inequação do tipo quociente

Inequações do tipo $\frac{x+3}{2-7x} > 0$, $\frac{x^2+5x+3}{1-2x} \le 0$, onde temos um quociente de duas expressões e uma desigualdade, são chamadas de inequações do tipo quociente.Deixar, sempre, zero no lado direito!!!!!
Para resolver esse tipo de inequação, devemos:
i)fazer o **gráfico da variação do sinal** de cada expressão.
ii)multiplicar os sinais obtendo o **gráfico da variação do sinal** do quociente.
iii)achar a solução de acordo com o sinal da inequação.
(lembre-se: denominador não pode ser zero)

Exercício Resolvido

ER.05) Determine o conjunto de todos os valores reais de x que satisfazem à desigualdade $\frac{-x^2+2}{-x^2+2x-2} \le 1$.

Resolução:

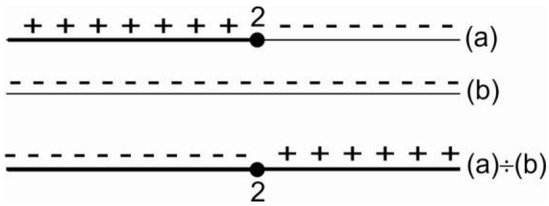
Deixando zero no lado direito:

$\frac{-x^2+2}{-x^2+2x-2} \le 1 \Rightarrow \frac{-x^2+2}{-x^2+2x-2} - 1 \le 0 \Rightarrow$
$\frac{-x^2+2-(-x^2+2x-2)}{-x^2+2x-2} \le 0 \Rightarrow \frac{-x^2+2+x^2-2x+2}{-x^2+2x-2} \le 0$
$\Rightarrow \frac{-2x+4}{-x^2+2x-2} \le 0$

Fazendo os **gráficos da variação do sinal:**
(a) $-2x + 4 \ge 0 \Rightarrow -2x \ge -4 \Rightarrow 2x \le 4 \Rightarrow x \le 2$.

(b) $-x^2 + 2x - 2 > 0$
$-x^2 + 2x - 2 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (2)^2 - 4.(-1).(-2) \Rightarrow \Delta = 4 - 8 \Rightarrow \Delta = -4$

Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais; portanto, a parábola não tem ponto em comum com o eixo *O*x.
Como a < 0, então a curva está totalmente abaixo do eixo x, ou seja, qualquer que seja o valor de x, a inequação somente assume valores negativos.
Assim, dividindo os sinais:



Logo, como queremos $\frac{-2x+4}{-x^2+2x-2} \le 0$, o conjunto solução será:

$$\boxed{S = \{x \in R \mid x \le 2\}}$$

Exercício Proposto

EP.08) Resolver, no conjunto dos números reais, as inequações:

a) $\frac{x}{x-1} < 0$

b) $\frac{4x}{2x-1} \ge -x$ (Passe –x para a esquerda e tire o mínimo para ficar com zero do lado direito)

Exercícios Complementares

EC.01) Determine o conjunto solução das seguintes inequações do primeiro grau:

a) $4y - 5 < 2.(y + 3) + 5y$

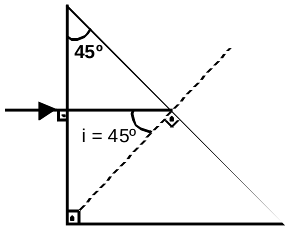
b) $4k - \frac{3.(k+2)}{4} < \frac{1}{2} + 2.(1-3k)$

c) $4.(y - 1) - 5y < 1 - 3.(2 - y)$

d) $\frac{4y}{9} - \frac{1}{2} \geq \frac{3y}{4} + \frac{1}{3}$

e) $\frac{t}{6} - \frac{1}{3} > \frac{3}{2} + \frac{2t}{9}$

EC.02) Um prisma óptico, cuja secção principal é um triângulo retângulo isósceles, conforme figura abaixo, encontra-se imerso no ar ($n_{ar} = 1$). Qual a condição à qual o índice de refração n_p do prisma deve obedecer para que o raio luminoso com um ângulo de incidência $\hat{i}$ = 45º indicado sofra reflexão total?



(Dica: use $n_p > n_{ar}.\frac{\text{sen}\,90°}{\text{sen}\,\hat{i}}$)

a) $n_p > \sqrt{2}$

b) $n_p < \sqrt{2}$

c) $n_p = \sqrt{2}$

d) não pode ser calculado com as informações dadas

EC.03) Um cristal possui índice de refração $n_{cristal}$ = 2,0. Qual o valor do ângulo de incidência ($\hat{i}$) de um raio de luz vindo do cristal para o ar de índice de refração n_{ar} = 1,0; para que ocorra a reflexão total?
(Dica: use $n_{cristal}$. sen $\hat{i}$ > n_{ar} . sen 90º)

EC.04) Resolva as seguintes inequações:

a) $x^2 - 7x + 10 \geq 0$
b) $-3x^2 - 4x + 4 > 0$
c) $2x - 4x^2 \leq 0$
d) $x^2 > 9$
e) $x.(x - 4) < x - 4$
f) $(x - 2)^2 > 2.\left(x - \frac{1}{2}\right)$

EC.05) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ x^2 - 5x \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 < 0 \\ -x^2 + 3x \geq 0 \end{cases}$

EC.06) (PUC-RJ) A solução da inequação $(x-2).(x^2+3x+10) > 0$ é:

a) x < – 2 ou 2 < x < 5
b) – 2 < x < 2 ou x > 5
c) – 2 < x < 2
d) x > 2
e) x < 5

EC.07) (F.C.Chagas-SP) Os valores de x que satisfazem a inequação $\frac{-2x^2+3x+2}{x-2} \leq 0$ são tais que:

a) $x \leq -\frac{1}{2}$
b) x > 2
c) $-\frac{1}{2} \leq x < 2$
d) $x \leq -\frac{1}{2}$ ou x > 2
e) $x \geq -\frac{1}{2}$ e $x \neq 2$

EC.08) (Fuvest-SP) O conjunto solução de $(x^2+7x-15).(x^2+1) < 0$ é:
a) ∅
b) [3; 5]
c) R
d) [– 1; 1]
e) R_+

EC.09) (PUC-MG) A solução da inequação $\frac{3}{3-2x-x^2} < 1$ é o conjunto de valores de x, tais que:
a) – 3 < x < – 2 ou 0 < x < 1
b) x < – 3 ou – 2 < x < 0 ou x > 1
c) x < – 2 ou x > 0
d) – 3 < x < 1
e) x < – 3 ou x > 0
Dica:
Passe 1 para a esquerda e tire o mínimo para ficar com zero do lado direito)

Exercícios Adicionais

EA.01) Resolva as inequações

a) $(x^2 - 7x^2 + 10)(x^2 - 10x + 21) \geq 0$

b) $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 10x + 21} \geq 0$

c) $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 10x + 21} < 0$

d) $(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 10x + 21) \leq 0$

e) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 5x + 4} \leq 0$

f) $(x^2 - 4x + 4)(- x^2 + 6x - 9) \geq 0$

g) $\dfrac{x \ + 2x + 3}{x - 4} \geq 0$

h) $\dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} \leq 0$

i) $\dfrac{3x - 11}{x^2 - 10x + 21} \leq -1$

j) $\dfrac{x - 1}{x - 2} > \dfrac{x - 3}{x - 4}$

EA.02) Da trigonometria sabemos que senx ≥ 1 e senx ≤ −1, ∀x. Com base nisto ache os valores de t para os quais existe x tal que:

a) $\text{sen}x = \dfrac{t + 1}{2t + 1}$

b) $\text{sen}x = \dfrac{2t + 1}{t - 1}$

EA.03) Da trigonometria sabemos que secx ≤ −1 ou secx ≥ 1. Com base nisto ache os valores de t para os quais existe x tal que

a) $\sec x = \dfrac{t + 1}{t - 1}$

b) $\sec x = \dfrac{2t - 1}{t + 1}$

EA.04) Ache os domínios das seguintes funções de ℝ em ℝ

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$

b) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x - 12}$

c) $f(x)\sqrt{\dfrac{x - 1}{x - 3}}$

d) $\sqrt[6]{\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - x - 12}}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 7x + 9}{x^2 - 16}}$

EA.05) Do estudo dos logaritmos sabemos que as “condições de existência” de $f(x) = \log_b a$ são a > 0, b > 0 e b ≠ 1. Com base nisto ache as condições de existência de:

a) $f(x) = \log_{(x^2 - 4)}(x^2 - 9)$

b) $f(x) = \log_{(x^2 + 1)}(x^2 - 6x + 9)$

c) $f(x) = \log_{2x}(x^2 + 5x + 10)$

d) $f(x) = \log_{(5x - x^2)}(10 - x^2 + 3x)$

e) $f(x) = \log_{(5x - x^2)}(-9x - x^2 - 14)$

GABARITO

Exercícios Propostos

EP.01) a) x > 2 b) $n \leq -3$ c) $x \neq \dfrac{70}{13}$

d) ℝ e) Ø

EP.02) x = – 2

EP.03) Setembro

EP.04) C

EP.05) a) $S = \{x \in R \mid x \leq -4 \text{ ou } x \geq 3\}$

b) $S = \left\{x \in R \mid \dfrac{1}{2} < x < 3\right\}$

c) $S = \{x \in R \mid x \neq -2\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = R$

EP.06) a) $S = \{x \in R \mid 2 \leq x < 3\}$ b) $S = \left\{x \in R \mid 0 \leq x \leq \dfrac{3}{2}\right\}$

EP.07) a) $S = \left\{x \in R \mid x \leq \dfrac{1}{2} \text{ ou } x \geq 2\right\}$

b) $S = \left\{x \in R \mid \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3\right\}$

EP.08) a) $S = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}$

b) $S = \left\{x \in R \mid -\dfrac{3}{2} \leq x \leq 0 \text{ ou } x > \dfrac{1}{2}\right\}$

GABARITO

Exercícios Complementares

EC.01) a) $y > -\frac{11}{3}$ b) $k < \frac{16}{37}$ c) $y > \frac{1}{4}$

d) $y \le -\frac{30}{11}$ e) $t < -33$

EC.02) A

EC.03) $30^\circ < \hat{\imath} < 150^\circ$

EC.04) a) $S = \{x \in R \mid x \le 2 \text{ ou } x \ge 5\}$

b) $S = \left\{x \in R \mid -2 < x < \frac{2}{3}\right\}$

c) $S = \left\{x \in R \mid x \le 0 \text{ ou } x \ge \frac{1}{2}\right\}$

d) $S = \{x \in R \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$

e) $S = \{x \in R \mid 1 < x < 4\}$

f) $S = \{x \in R \mid x < 1 \text{ ou } x > 5\}$

EC.05) a) $S = \{x \in R \mid 1 < x \le 5\}$ b) $S = \{x \in R \mid 0 \le x < 2\}$

EC.06) A

EC.07) E

EC.08) C

EC.09) B

GABARITO

Exercícios Adicionais

EA.01) a) $x \ge 2$ ou $3 \le x \le 5$ ou $x > 7$

b) $x \ge 2$ ou $3 < x \le 5$ ou $x > 7$

c) $2 \le x < 3$ ou $5 \le x < 7$

d) $2 \le x \le 3$ ou $5 \le x < 7$

e) $1 < x < 4$

f) $X = 2$ ou $x = 3$

g) $X < -2$ ou $x > 2$

h) $\emptyset$

i) $2 \le x < 3$ ou $5 \le x < 7$

j) $x \le -\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2} \ge x < 2$ ou $x > 4$

EA.02) a) $t \le -\frac{2}{3}$ ou $t > -\frac{1}{2}$

b) $-2 \le t \le 0$

EA.03) a) $t \le 0$ e $t \ne 1$

b) $t < -1$ ou $-1 < t \le 0$ ou $t \ge 2$

EA.04) a) $x \le -2$ ou $x \ge 4$

b) $x \le -3$ ou $x \ge 5$

c) $x \le 1$ ou $x \ge 3$

d) $x < -3$ ou $-2 \le x < 4$ ou $x \ge 5$

e) $x \ne 1$

f) $x \ne \pm 4$

EA.05) a) $x < 3$ ou $x > -3$

b) $x \ne 3$ e $x \ne 0$

c) $x > 0$ e $x \ne \frac{1}{2}$

d) $-2 < x < 3$

e) $\emptyset$