Equação e Inequação do 2° Grau – Teoria

Candidato segue um resumo sobre resolução e discussão de equações e inequações do 2° grau.
Bons Estudos!

Equação do 2° Grau

Uma **Equação do 2° Grau** é sentença aberta do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \ .$$

Onde $a \in IR^*$, $b \, e \, c \in IR$.

Uma **Solução** de uma **Equação do 2° Grau** é um valor da variável **x** que dá valor **verdadeiro** à sentença.

Ex.1: $x = 3$ é uma solução para a equação $x^2 - 7x + 12 = 0$, pois, $(3)^2 - 7(3) + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$.

O **Conjunto Solução** ou **Conjunto Verdade** de uma **Equação** é o conjunto de todos os da variável que dão à sentença valor verdadeiro.

O **Conjunto Solução** ou **Conjunto Verdade** de uma **Equação do 1° Grau** é um conjunto com no máximo 2 elementos.

Solução:

Sejam $a \in IR^*$, $b \, e \, c \in IR$ então

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0$$

Fazendo $b^2 - 4ac = \Delta$ temos

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Discussão da equação:

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ A equação não possui raízes reais $\Leftrightarrow S = \{\ \}$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ A equação possui duas raízes reais e iguais, pois $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} \Leftrightarrow S = \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ A equação possui duas raízes reais e desiguais, pois $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left|x + \dfrac{b}{2a}\right| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \Leftrightarrow$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ou

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow S = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

Exemplo:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Temos

$a = 1$

$b = -5$

$c = 6$

$\Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) \Leftrightarrow \Delta = 1 > 0$

Logo

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(1)} = 3$$

ou

$$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(1)} = 2$$

$\Leftrightarrow S = \{2,3\}$.

Exemplo:

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$a = 1$

$b = -8$

$c = 16$

$\Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(1)(16) \Leftrightarrow \Delta = 0$

Logo

$$x_1 = x_2 = \frac{-(-8) + \sqrt{0}}{2(1)} = 4$$

$\Leftrightarrow S = \{4\}$.

Exemplo:

$x^2 - x + 1 = 0$

$a = 1$

$b = -1$

$c = 1$

$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) \Leftrightarrow \Delta = -3 < 0 \Leftrightarrow S = \{\ \}.$

Inequação do 2° Grau

Uma **Inequação do 2° Grau** é sentença aberta que pode ser dos seguintes tipos:

$$ax^2 + bx + c < 0,$$
$$ax^2 + bx + c \le 0,$$
$$ax^2 + bx + c > 0,$$
$$ax^2 + bx + c \ge 0.$$

Onde $a \in IR^*$, $b\, e\, c \in IR$.

Repare que uma **Inequação do 2° Grau** nada mais é do que uma análise de sinal de uma **Função do 2° Grau,** ou seja,

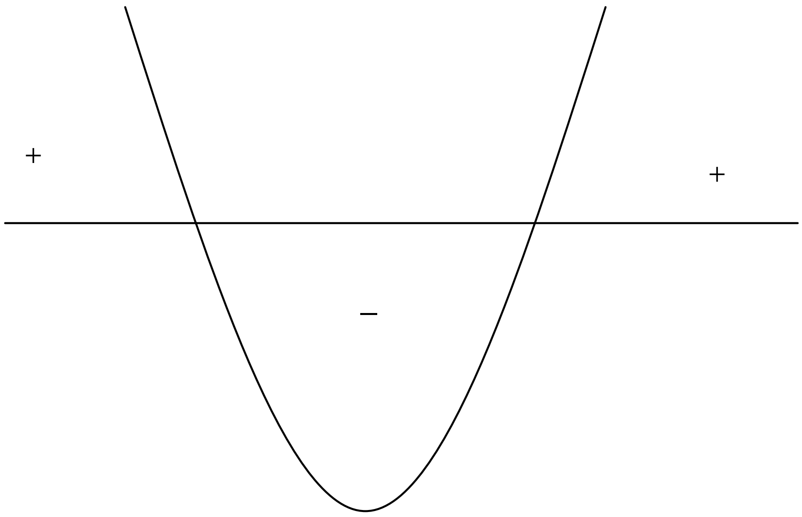
$$f : IR \to IR$$
$$x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

A análise do sinal de uma **Função do 2° Grau** é feita de acordo com o sinal do parâmetro a e do Δ.

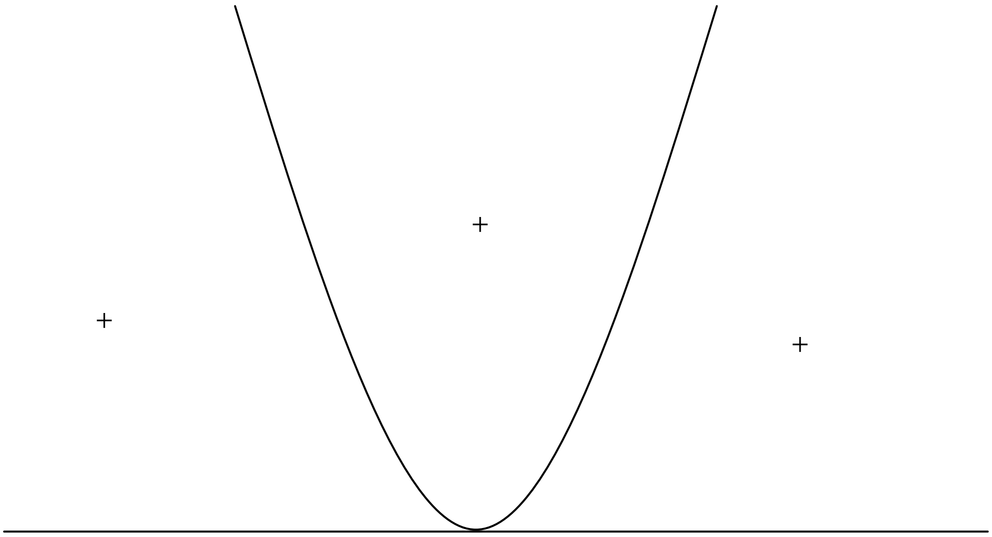
$1°$ Caso:

$a > 0$

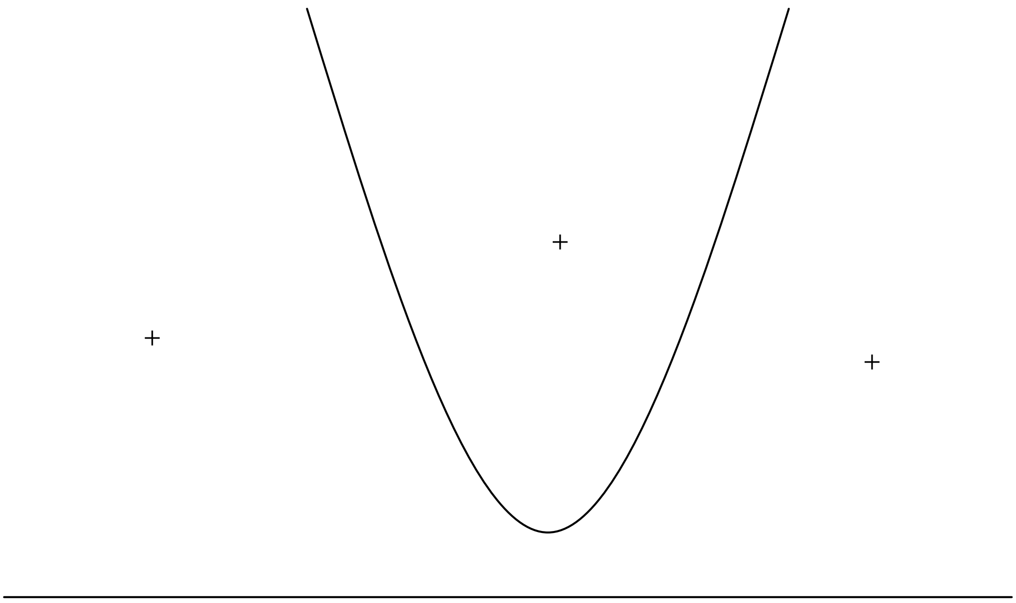
1.1. $a > 0$ e $\Delta > 0$:



1.2. $a > 0$ e $\Delta = 0$:

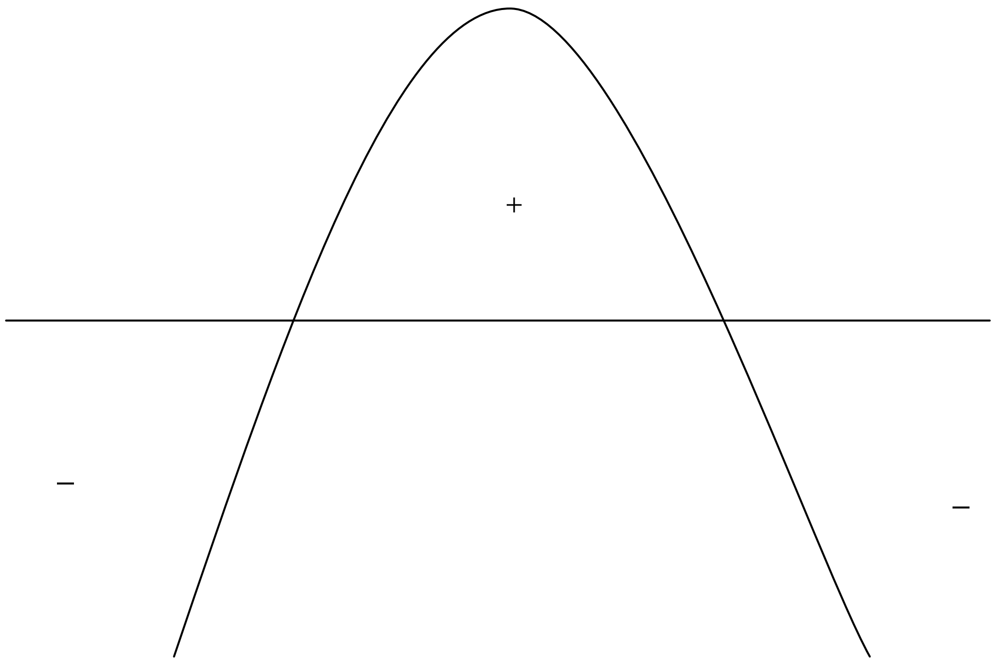


1.3. $a > 0$ e $\Delta < 0$:

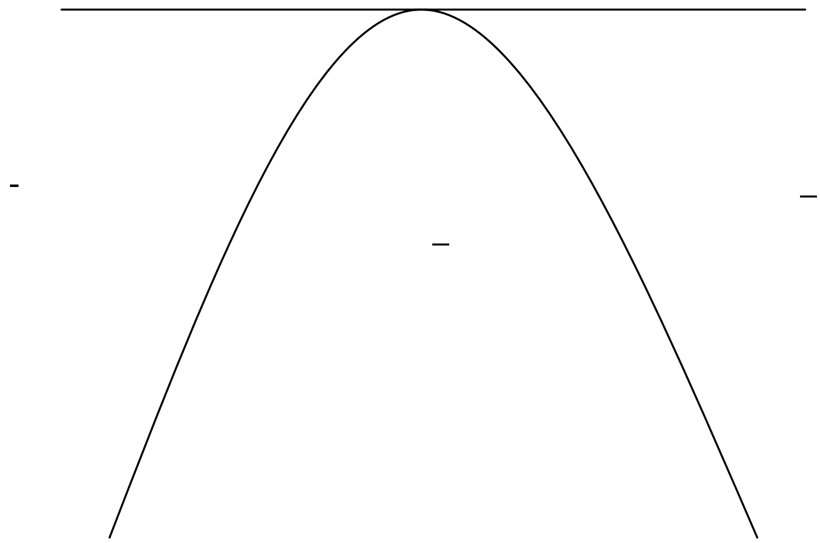


2° Caso:
$a < 0$

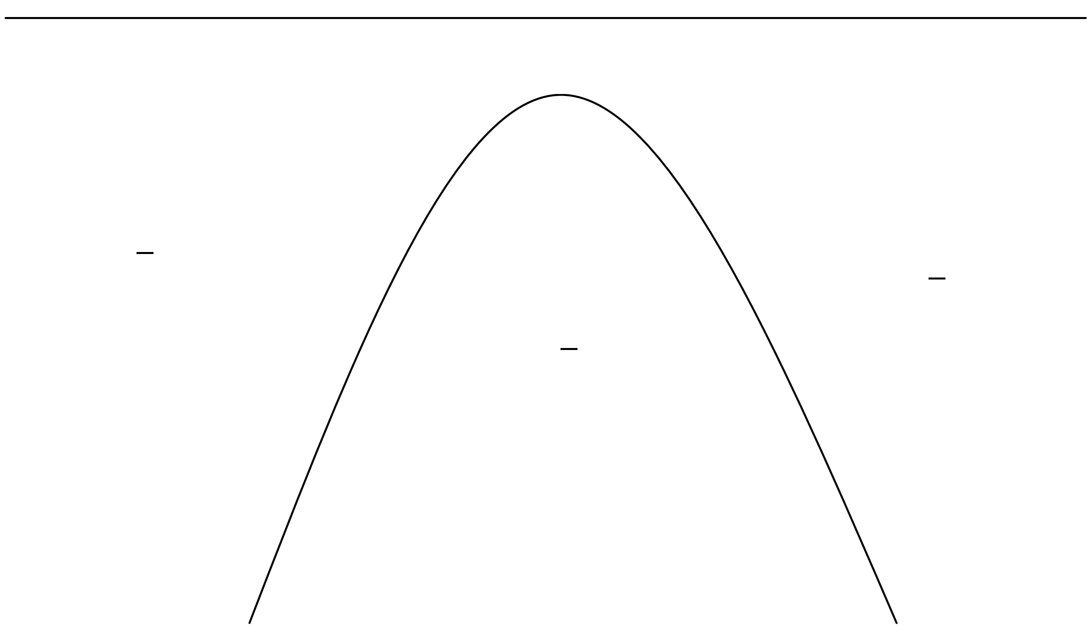
2.1. $a < 0$ e $\Delta > 0$:



2.2. $a < 0$ e $\Delta = 0$:



2.3.. $a < 0$ e $\Delta < 0$:



Logo podemos concluir que:

Se $\Delta > 0$ a Função do 2° Grau tem o sinal oposto ao sinal do parâmetro **a** no intervalo compreendido pelas raízes e o mesmo sinal do parâmetro **a** nos intervalos complementares ao intervalo compreendido pelas raízes.

Se $\Delta = 0$ a Função do 2° Grau tem o mesmo sinal que o sinal do parâmetro **a** para todo número real exceto nas raízes.

Se $\Delta < 0$ a Função do 2° Grau tem o mesmo sinal que o sinal do parâmetro **a** para todo número real.

Uma **Solução** de uma **Inequação do 2° Grau** é um valor da variável **x** que dá valor **verdadeiro** à sentença.

Exemplo:
$x = 3$ É uma solução para a inequação $x^2 - x + 12 > 0$, pois, $(3)^2 - (3) + 12 = 18 > 0$.

O **Conjunto Solução** ou **Conjunto Verdade** de uma **Inequação** é o conjunto de todos os da variável que dão à sentença valor verdadeiro.

Exemplo:
$x^2 - 5x + 6 < 0$
Temos
$a = 1 > 0$
$\Delta = 1 > 0$
Raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$
Então $2 < x < 3 \Leftrightarrow S = \left]2, 3\right[$.

Exemplo:

$x^2 - 5x + 6 \leq 0$

Temos

$a = 1 > 0$

$\Delta = 1 > 0$

Raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

Então $2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow S = [2,3]$.

Exemplo:

$x^2 - 5x + 6 > 0$

Temos

$a = 1 > 0$

$\Delta = 1 > 0$

Raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

Então $-\infty < x < 2$ ou $3 < x < +\infty \Leftrightarrow S =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$..

Exemplo:

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$

Temos

$a = 1 > 0$

$\Delta = 1 > 0$

Raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

Então $-\infty < x \leq 2$ ou $3 \leq x < +\infty \Leftrightarrow S =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$.

Exemplo:

$x^2 - 6x + 9 \geq 0$

Temos

$a = 1 > 0$

$\Delta = 0$

Raízes $x_1 = x_2 = 3$

Então $x \in IR \Leftrightarrow S = IR$

Exemplo:

$x^2 - 6x + 9 > 0$

Temos

$a = 1 > 0$

$\Delta = 0$

Raízes $x_1 = x_2 = 3$

Então $x \neq 3 \Leftrightarrow S =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$.

Exemplo:

$x^2 - 6x + 9 \leq 0$

Temos

$a = 1 > 0$

$\Delta = 0$

Raízes $x_1 = x_2 = 3$

Então $x = 3 \Leftrightarrow S = \{3\}$

Exemplo:

$x^2 - 6x + 9 < 0$

Temos

$a = 1 > 0$

$\Delta = 0$

Raízes $x_1 = x_2 = 3$

Então $S = \{\ \}$.

Exemplo:

$x^2 - x + 1 < 0$

Temos

$a = 1 > 0$

$\Delta = -3 < 0$

Então $S = \{\ \}$.

Exemplo:

$x^2 - x + 1 \leq 0$

Temos

$a = 1 > 0$

$\Delta = -3 < 0$

Então $S = \{\ \}$.

Exemplo:

$x^2 - x + 1 > 0$

Temos

$a = 1 > 0$

$\Delta = -3 < 0$

Então $S = IR$.

Exemplo:

$x^2 - x + 1 \geq 0$

Temos

$a = 1 > 0$

$\Delta = -3 < 0$

Então $S = IR$.

Discussão de Equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$

Seja $ax^2 + bx + c = 0$ onde a, b e $c \in IR$, então

$a \neq 0 \Rightarrow$ A equação $ax^2 + bx + c = 0$ é uma equação do 2° grau, basta resolver conforme feito anteriormente.

$a = 0 \Rightarrow$ A equação $ax^2 + bx + c = 0$ se reduz a $bx + c = 0$, a discussão é feita conforme a discussão de uma equação da forma $ax + b = 0$. Veja o artigo **Equação e Inequação do 1° grau – Teoria.**

Relação entre coeficientes e raízes

Sejam a, b e $c \in IR$ e $a \neq 0$, então

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2)$$

Onde x_1 e x_2 são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Importante:
A identidade acima é um fato geral independente do grau da equação polinomial e do fato das raízes serem reais ou não. A noção de identidade foi explicada no artigo **Fatoração e Produtos Notáveis - Teoria**.

Temos

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$ax^2 + bx + c \equiv ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a x_1 x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = -a(x_1 + x_2) \\ c = a x_1 x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$S = -\dfrac{b}{a}$ e $P = \dfrac{c}{a}$.

Acima S representa a soma das raízes e P o produto das mesmas.

1. (CN 1999) Sobre a equação: $1999x^2 - 2000x - 2001 = 0$, a afirmação correta é:
(A) Tem duas raízes reais de sinais contrários, mas não simétricas.
(B) Tem duas raízes simétricas.
(C) Não tem raízes reais.
(D) Tem duas raízes positivas.
(E) Tem duas raízes negativas.

2. (CN 1995) Considere a equação do 2º grau em x tal que $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais com "a" diferente de zero. Sabendo que 2 e 3 são as raízes dessa equação, podemos afirmar que:
(A) 13a + 5b + 2c = 0
(B) 9a + 3b – c = 0
(C) 4a – 2b = 0
(D) 5a – b = 0
(E) 36 a + 6b + c = 0

3. **(CN 1989)** Um aluno, ao tentar determinar as raízes x^1 e x^2 da equação $ax^2 + bx + c = 0$, a.b.c. $\neq 0$, explicitou x da seguinte forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

Sabendo-se que não teve erro de contas, encontrou como resultado
(A) x_1 e x_2
(B) $-x_1$ e $-x_2$
(C) x_1^{-1} e x_2^{-1}
(D) $c.x_1$ e $c.x_2$
(E) $a.x_1$ e $a.x_2$

4. Sejam a, b e $c \in IR$ e $a \neq 0$, x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Prove que:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{S}{P}$, $c \neq 0$

b) $x_1{}^2 + x_2{}^2 = S^2 - 2P$

c) $\frac{1}{x_1{}^2} + \frac{1}{x_2{}^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}$, $c \neq 0$

d) $x_1{}^3 + x_2{}^3 = S^3 - 3SP$

e) $\frac{1}{x_1{}^3} + \frac{1}{x_2{}^3} = \frac{S^3 - 3SP}{P^3}$, $c \neq 0$

5. Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - x + 10 = 0$. Verifique que:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{10}$, $c \neq 0$

b) $x_1{}^2 + x_2{}^2 = -19$

c) $\frac{1}{x_1{}^2} + \frac{1}{x_2{}^2} = -\frac{19}{100}$, $c \neq 0$

d) $x_1{}^3 + x_2{}^3 = -29$

e) $\frac{1}{x_1{}^3} + \frac{1}{x_2{}^3} = -\frac{29}{1000}$, $c \neq 0$

6. **(CN 1994)** Calcule a soma dos cubos das raízes da equação $x^2 + x - 1 = 0$.
(A) 1
(B) –4
(C) –3
(D) –8
(E) –6

7. (CN 1992) Sendo m e n as raízes da equação $x^2 - 10x + 1 = 0$, o valor da expressão $\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3}$ é:

(A) 970
(B) 950
(C) 920
(D) 900
(E) 870

8. (CN 1990) As raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são iguais a m e n. Assinale a equação cujas raízes são m^3 e n^3 .
(A) $a^3x^2 - b(3ac + b^2)\ x + c^3 = 0$
(B) $ax^2 - b(3ac - b^2)x + c = 0$
(C) $a^3x^2 + b(b^2 - 3ac)x + c = 0$
(D) $a^3x^2 + b(b^2 - 3ac)x - c^3 = 0$
(E) $a^3x^2 + b(b^2 + 3ac)x + c^3 = 0$

9. (CN 1988) As raízes da equação $2x^2 - x - 16 = 0$ são r e s, (r > s). O valor da expressão $\frac{r^2 - s^4}{r^3 + r^2s + rs^2 + r^3}$, é

(A) $\frac{\sqrt{129}}{2}$
(B) $\frac{\sqrt{127}}{2}$
(C) $\frac{127}{4}$
(D) $\frac{129}{4}$
(E) impossível calcular.

10. (CN 1993) A soma das raízes da equação de raízes reais $mx^4 + nx^2 + p = 0$, $m \neq 0$ é :
(A) 0
(B) $-\frac{n}{m}$
(C) $-\frac{2n}{m}$
(D) $\frac{p}{m}$
(E) $-\frac{p}{m}$

11. (CN 2010) A menor raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $abc \neq 0$, é a média geométrica entre "m" e a maior raiz. A maior raiz é a média geométrica entre "n" e a menor raiz. Pode-se afirmar que "m + n é xpresso por:

(A) $\dfrac{3abc - b^3}{a^2c}$

(B) $\dfrac{3abc + b^3}{a^2c}$

(C) $\dfrac{3abc - b^3}{c^2a}$

(D) $\dfrac{abc + b^3}{c^2a}$

(E) $\dfrac{abc - b^3}{a^2c}$

12. (CN 1989) O maior valor inteiro que verifica a inequação $x.(x+1).(x-4)<2.(x-4)$ é :
(A) 1
(B) negativo
(C) par positivo
(D) ímpar maior que 4
(E) primo

13. (CN 1997) O número de soluções inteiras da inequação abaixo é: $\dfrac{x^2 - 6x + 10}{x^2 - 1} < 0$

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) infinito.

14. (CN 1996) A soma e o produto das raízes reais da equação $(x^2 - 5x + 6)^2 - 5(x^2 - 5x + 6) + 6 = 0$, são respectivamente:
(A) 6 e 8
(B) 7 e 10
(C) 10 e 12
(D) 15 e 16
(E) 15 e 20

15. Resolva a equação

$$(x^2 - 6x + 6)^2 + (x^2 - 6x + 6) - 2 = 0$$

Em IR .

16. a, b e $c \in IR$ e $a \neq 0$, x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Prove que:

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-1} = 0$$

Onde $S_n = x_1^n + x_2^n$, $n \in IN$, $n \geq 1$.

17. Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - x + 10 = 0$. Prove que $x_1^5 + x_2^5 = 451$.

Gabarito

1. C
2. A
3. C
4.
5.
6. B
7. A
8. C
9. A
10. A
11. A
12. E
13. B
14. C
15.
16.
17.