JUROS COMPOSTOS

Até agora, estudamos sistemas de juros em que a taxa incidia exclusivamente sobre o capital inicial. Este regime é chamado de "Juros Simples". No entanto, existe uma outra modalidade de aplicação de juros que que, ao final de cada período, os juros são somados ao capital inicial gerando assim, um novo capital para o período subsequente. Dizemos que os juros são capitalizados e a este regime, chamados de "Juros Compostos".

CÁLCULO DO MONTANTE

Consideremos um capital C e uma taxa de juros i. Vamos calcular o montante obtido a juros compostos depois de n períodos de tempo.

Momento 0

$$M_0 = C$$

#PraCegoVer: M0 é igual a C

No momento incial, o capital é o montante.

Momento 1

$$M_1 = C + C \cdot i$$

#PraCegoVer: M1 é igual a C mais C vezes i

O montante ao final do primeiro momento é o capital acrescido do juros ($C \cdot i$)

$$M_1 = C(1 + i)$$

#PraCegoVer: M1 é igual a C vezes (1 + i)

Colocando C em evidência

Momento 2

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i$$

#PraCegoVer: M2 é igual a M1 + M1 vezes i

Como M_1 é o novo capital, utilizamos este valor para determinar o montante em M_2

$$M_2 = M_1(1 + i)$$

#PraCegoVer: M2 é igual a M1 vezes (1 mais i)

Aqui colocamos M_1 em evidência

$$M_2 = C(1 + i)(1 + i)$$

#PraCegoVer: M2 é igual a C vezes (1 mais i) vezes (1 mais i)

Aqui substituímos M_1 por $C(1 + i)$

$$M_2 = C(1 + i)^2$$

#PraCegoVer: M2 é igual a C vezes (1 mais i) elevado ao quadrado

Aqui transformar o produto de dois termos iguais em uma potência

Momento 3

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i$$

#PraCegoVer: M3 é igual a M2 + M2 vezes i

Aqui vamos seguir os mesmos passos do caso acima

$$M_3 = M_2(1 + i)$$

#PraCegoVer: M3 é igual a M2 vezes (1 mais i)

Colocamos M_2 em evidência

$$M_3 = C(1 + i)^2(1 + i)$$

#PraCegoVer: M3 é igual a C vezes (1 mais i) elevado ao quadrado vezes (1 + i)

Substituindo M_2 por $C(1 + i)^2$

$$M_3 = C(1 + i)^3$$

#PraCegoVer: M3 é igual a C vezes (1 mais i) elevado ao cubo

Aqui transformar o produto de potências de mesma base em uma potência

Vamos destacar agora, só as "fórmulas finais" de cada momento para fazermos uma generalização

Momento 0	$M_0 = C$
Momento 1	$M_1 = C(1+i)$
Momento 2	$M_2 = C(1+i)^2$
Momento 3	$M_3 = C(1+i)^3$
Momento 4	
⋮	

É fácil perceber como será um momento genérico que aqui trataremos por **Momento n**.

$$M_n = C(1+i)^n$$

#PraCegoVer: MN é igual a C vezes (1 mais i) elevado a n

Como não há possibilidade de confusão, eliminamos o índice e escrevemos simplesmente:

$$M = C(1+i)^n$$

#PraCegoVer: M é igual a C vezes (1 mais i) elevado a n

Esta fórmula permite encontrar o montante gerado a partir de um **capital *C*** aplicado a juros compostos de **taxa *i*** por ***n* períodos**.

Exemplos

Ex.1: Um capital de \$6.000 foi aplicado a juros compostos com taxa de 2% a.m. durante 3 meses.

a) Qual o montante?

b) Qual o total de juros auferidos?

Resolução:

a) C = \$6.000

i = 2% a.m.

n = 3 meses

M = ?

$$M = C(1+i)^n$$ #PraCegoVer: M é igual a C vezes (1 mais i) elevado a n

$$M = 6.000(1+0{,}02)^3$$ #PraCegoVer: M é igual a 6000 vezes (1 mais 0,02) elevado a 3

$$M = 6.000 \cdot 1{,}02^3$$ #PraCegoVer: M é igual a 6000 vezes 1,02

$$M = 6.000 \cdot 1{,}061208$$ #PraCegoVer: M é igual a 6000 vezes 1,061208

$$M = 6.367{,}25$$ #PraCegoVer: M é igual a 6367,25

Assim, o montante depois de 3 meses será de \$6.367,25.

b) Para encontrar os juros auferidos, basta subtrair do montante final, o capital inicial. Assim, o juros do período foram de

\$6.367,25 - \$6.000 = \$367,25

Ex.2: Qual o capital que, aplicado a juros compostos com taxa de 2,5% a.m. produz um montante de \$3.500 após um ano?

Resolução:

M = \$3.500

i = 2,5%a.m.

n = 12

C = ?

$$M = C(1+i)^n$$ #PraCegoVer: M é igual a C vezes (1 mais i) elevado a n

$$3.500 = C(1+0{,}025)^{12}$$ #PraCegoVer: 3500 é igual a C vezes (1 mais 0,025) elevado a 12

$$3.500 = C(1{,}025)^{12}$$ #PraCegoVer: 3500 é igual a C vezes 1,025 elevado a 12

$$3.500 = C \cdot 1{,}3449$$ #PraCegoVer: 3500 é igual a C vezes 1,3449

$$C = \frac{3500}{1{,}3449}$$ #PraCegoVer: C é igual a 3500 dividido por 1,3449

$$C = 2.602{,}45$$ #PraCegoVer: C é igual a $2602,45

Ex.3: Um capital de $2.500 foi aplicado a juros compostos durante 4 meses produzindo um montante de $3.500. Qual a taxa mensal de juros?

Resolução:

M = $3.500

i = ?

n = 4 meses

C = $2.500

$$M = C(1+i)^n$$ #PraCegoVer: M é igual a C vezes (1 mais i) elevado a n

$$3.500 = 2.500(1+i)^4$$ #PraCegoVer: 3500 é igual a 2500 vezes (1 mais i) elevado a 4

$$(1+i)^4 = \frac{3500}{2500}$$ #PraCegoVer: (1 mais i) elevado a 4 é igual a 3500 dividido por 2500

$$(1+i)^4 = 1{,}4$$ #PraCegoVer: (1 mais i) elevado a 4 é igual a 1,4

$$(1+i) = \sqrt[4]{1{,}4}$$ #PraCegoVer: 1 ais i é igual à raiz quarta de 1,4

$$(1+i) = 1{,}0878$$ #PraCegoVer: 1 mais i é igual a 1,0878

$$i = 0{,}0878 = 8{,}78\%$$ #PraCegoVer: i é igual a 0,0878 que é igual a 8,78%

Assim, a taxa de juros procurada é de 8,78% ao mês.

Ex.4: Durante quanto tempo, um capital de $1.000 deve ser aplicado a juros compostos, à taca de 10% a.a. para gerar um montante de $1.610,51?

Resolução:

C = $1.000

M = $1.650,51

i = 10 a.a.

n = ?

Obs: a unidade de tempo está em ANOS então o período será encontrado em ANOS.

$$M = C(1+i)^n$$ #PraCegoVer: M é igual a C vezes (1 mais i) elevado a n

$$1.650{,}51 = 1.000(1+0{,}1)^n$$ #PraCegoVer: 1650,51 é igual a mil vezes (1 mais 0,1) elevado a n

$$(1{,}1)^n = 1{,}65051$$ #PraCegoVer: (1,1) elevado a n =e igual a 1,65051

$$Ln(1{,}1)^n = Ln(1{,}65051)$$ #PraCegoVer: Logaritmo natural de (1,1) elevado a n é igual ao logaritmo natural de 1,65051

$$n \cdot Ln(1{,}1) = Ln(1{,}65051)$$ #PraCegoVer: n vezes o logaritmo natural de (1,1) é igual ao logaritmo natural de 1,65051

$$n = \frac{Ln(1{,}65051)}{Ln(1{,}1)}$$ #PraCegoVer: n é igual ao logaritmo natural de 1,65051 dividido pelo logaritmo natural de 1,1

$$n = \frac{0{,}476551}{0{,}09531} = 5$$ #PraCegoVer: n é igual a 0,476551 dividido por 0,09531 que é igual a 5

Ex.5: Uma duplicata de $6.000 foi descontada num banco à taxa de desconto comercial de 2% a.m., 4 meses antes do vencimento.

a) Qual o valor atual da duplicata?

b) Qual a taxa mensal de juros compostos da operação?

Resolução: a)

$$D = N \cdot d \cdot n$$

#PraCegoVer: D é igual a N vezes d vezes n

$$D = 6.000 \cdot 0{,}02 \cdot 4$$

#PraCegoVer: 6000 vezes 0,02 vezes 4

$$D = 480$$

#PraCegoVer: D é igual a 480

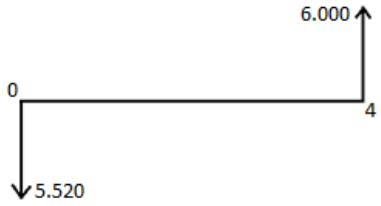
$$V_d = 6.000 - 480$$

#PraCegoVer: Valor descontada é igual a 6000 menos 480

$$V_d = 5.520$$

#PraCegoVer: Valor descontado é igual a 5520

b) Sob o ponto de vista do banco, o fluxo de caixa pode ser representado pela figura abaixo:



Assim, a taxa mensal de juros compostos *i* é dada por:

$$M = C(1+i)^n$$

#PraCegoVer: M é igual a C vezes (1 mais i) elevado a n

$$6.000 = 5.520(1+i)^4$$

#PraCegoVer: 6000 é igual a 5520 vezes (1 mais i) elevado a 4

$$(1+i)^4 = \frac{6.000}{5.520}$$

#PraCegoVer: (1 mais i) elevado a 4 é igual a 6000 dividido por 5520

$$(1+i)^4 = 1{,}087$$

#PraCegoVer: (1 mais i) elevado a 4 é igual a 1,087

$$(1+i) = 1{,}0211$$

#PraCegoVer: 1 mais i é igual a 1,0211

$$i = 0{,}0211 = 2{,}11\%$$

#PraCegoVer: i é igual a 0,0211 que é igual a 2,11%

Assim, a taxa de juros compostos mensal da operação é de 2,11 % a. m.

Exercícios

1) Qual o montante de uma aplicação de $50.000 a juros compostos, pelo prazo de 6 meses à taxa de 2% a.m.?

2) Obtenha o montante das aplicações abaixo, considerando o regime de juros compostos:

	Capital	Taxa	Prazo
a)	$80.000	36% a.a.	2 anos
b)	$65.000	3% a.m	1 ano
c)	$35.000	7% a. t.	1,5 anos

3) Um capital de $7.000 foi aplicado a juros compostos, durante um ano e meio, à taxa de 2,5% a.m.. Calcule os juros auferidos no período.

4) Uma pessoa aplica hoje $4.000 e aplicará $12.000 daqui a 3 meses num fundo que rende juros compostos de 2,6% a.m.. Qual o montante daqui a 6 meses?

5) Qual o capital que, aplicado a juros compostos, durante 9 anos, à taxa de 10%a.a., produz um montante de $175.000?

6) Um capital de $3.000 foi aplicado a juros compostos durante 10 meses, gerando um montante de $3.500. Qual a taxa mensal?

7) Um capital foi aplicado a juros compostos durante 10 meses, rendendo juros igual ao capital aplicado. Qual foi a taxa mensal de juros?

Respostas:

01)	$56.308,12
02)	a) $147.968 b) $92.674,46 c) $52.525,56
03)	$3.917,61
04)	$17.626,54
05)	$74.217,08
06)	1,55%a.m.
07)	7,18% a.m.