LOGARITMO

Sejam dois números reais a e b, tais que $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Chama-se logaritmo de a na base b e representa-se por $\log_b a$ ao número x, tal que $b^x = a$. Assim, se precisamos calcular o valor de um logaritmo, basta fazer assim: $\log_b a = x \Rightarrow a = b^x$, que chegamos na equação exponencial e podemos resolver com facilidade.

a → logaritmando

$\log_b a = x$ → logaritmo (que é o resultado)

b → base

Exemplo:
Calcular $\log_3 729$

Basta igualar a x, assim: $\log_3 729 = x$, daí, por definição, o logaritmando é igual à base elevado ao resultado x, veja:

$\log_3 729 = x \Rightarrow 729 = 3^x$ fatoramos 729 e encontramos $729 = 3^6$, logo:

$\log_3 729 = x \Rightarrow 729 = 3^x \Rightarrow 3^6 = 3^x$ e nessa igualdade, temos que se as bases são iguais, então seus expoentes também são iguais, logo, $x = 6$

$\log_3 729 = x \Rightarrow 729 = 3^x \Rightarrow 3^6 = 3^x \Rightarrow x = 6$

Vejam as questões:

Questão 01
Calcule o valor do logaritmo:

a) $\log_4 32$ b) $\log_{10} 0,01$ c) $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2}$

Questão 02
Calcule o valor do logaritmo:

a) $\log_4 16$ b) $\log_5 125$

c) $\log_3 27$ d) $\log_6 36$

Questão 03
Calcule o valor do logaritmo:

a) $\log_3 \frac{1}{9}$ b) $\log_2 \frac{1}{32}$

c) $\log_3 \frac{1}{27}$ d) $\log_5 \frac{1}{125}$

Questão 04

Calcule o valor do logaritmo:

a) $\log_{27} 81$ b) $\log_{125} 25$ c) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{81}$

d) $\log_{0,125} 4$ e) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{25}{4}$ f) $\log_{0,2} 0,008$

g) $\log_{0,25} \sqrt{32}$ h) $\log_{\sqrt[5]{729}} \sqrt[3]{81}$ i) $\log_{\sqrt[3]{25}} \sqrt{125}$

CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO

À partir da definição de logaritmo, podemos estabelecer as seguintes situações:

1) $\log_k 1 = 0$
2) $\log_k k = 1$
3) $\log_k k^m = m$
4) $k^{\log_k a} = a$
5) se $\log_k a = \log_k b$, então $a = b$

Vamos ver algumas questões:

Questão 01

Calcule o valor de:

a) $\log_7 1$ b) $\log_{\sqrt{13}} 1$ c) $\log_{\frac{2}{3}} 1$

Questão 02

Calcule o valor de:

a) $\log_7 1$ b) $\log_{23} 23$ c) $\log_{\frac{2}{3}} 1$ d) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5}$

Questão 03

a) $\log_7 7^3$ b) $\log_5 5^{-13}$ c) $\log_{0,02} 0,02^7$ d) $\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^{-5}$

Questão 04

Calcule o valor de:

a) $3^{\log_3 2}$ b) $2^{1+\log_2 5}$

Questão 05

Calcule o valor de x:

a) $\log_6 x = \log_6 8$
b) $\log_6 (2x) = \log_6 8$
c) $\log_3 8^x = \log_3 16$
d) $\log x^2 = \log x$
e) $\log_{\frac{1}{5}} (x-1) = \log_{\frac{1}{5}} 3$

SISTEMAS DE LOGARITMOS

Os logaritmos possuem infinitas bases, mas duas se destacam pelo grande uso, que são:

- **Sistema de logaritmos decimais:** quando a base do logaritmo é 10, escrevemos $\log_{10} A$. Para maior comodidade, podemos omitir a escrita da base, assim $\log A$. Nesse caso, já sabemos que se trata de um logaritmo de um número A, na base 10.

- **Sistema de logaritmos neperianos ou logaritmo natural:** recebe esse nome em homenagem ao seu criador John Nepper. A base desse logaritmo é o número "*e*" , um número irracional, cujo valor é $e = 2,71828...$
  Podemos escrever assim $\log_e A$. Também, para maior comodidade, podemos omitir a escrita da base e escrever $\ln A$. Nesse caso, já sabemos que se trata de um logaritmo neperiano de A, ou simplesmente, logaritmo de A na base "*e*".

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA
Para existir um logaritmo $\log_b a$, é necessário que $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$.

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS
1) $\log_k (A \cdot B) = \log_k A + \log_k B$
2) $\log_k \left(\frac{A}{B}\right) = \log_k A - \log_k B$
3) $\log_k A^n = n \cdot \log_k A$

COLOGARITMO: $co\log_k A = -\log_k A$

MUDANÇA DE BASE:
Em muitos casos, na resolução de uma equação logarítmica ou mesmo ao usar uma calculadora, precisamos mudar a base do logaritmo e procedemos assim:

$$\log_B A = \frac{\log_k A}{\log_k B}$$

Vamos ver algumas questões que envolvem esses casos e ainda a resolução de equações:

Questão 01
Resolver as equações:

a) $\log_4 x = 2$
b) $\log_x 81 = 4$
c) $\log_6 (x^2 - x) = 1$
d) $\log_4 (x^2 + 3x - 1) = \log_4 (5x - 1)$
e) $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$
f) $\log_2 (x+2) + \log_2 (x-2) = 5$
g) $\log_2 (x-8) - \log_2 (x+6) = 3$
h) $2 \cdot \log_7 x = \log_7 (3x) + \log_7 6$
i) $\log_2 (x+3) + co\log_2 (x-1) = 1$
j) $\log_2 x + \log_8 x = 8$
k) $\log_x 5 + \log_{25} x = \frac{3}{2}$

EXERCÍCIOS

Questão 01

$\log_4 16$ é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

Questão 02

O valor de $\log_{0,01} \sqrt[3]{0,1}$ é:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{2}$

Questão 03

Seja $\left[-(-2)^2 - \log_3 9\right] \cdot \left[(-2+5)^0 - \sqrt[3]{-8}\right]^{-1}$.

O valor dessa expressão é:

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{6}{5}$ c) 6 d) -2

Questão 04

O valor da expressão $\dfrac{-(-2)^2 - \sqrt[3]{-27}}{(-3+5)^0 - \log_2 4}$ é:

a) -7
b) -1
c) 1
d) 2
e) 7

Questão 05

Simplificando $\dfrac{2^6}{\log_3 81}$, encontramos:

a) 16
b) 12
c) 8
d) 4

Questão 06

O valor da expressão $\log_2 64 - \log_3 27$ é igual a:

a) 3
b) 13
c) 17
d) 31

Questão 07

Se $2^m = 3$, então $\log_2 54$ é igual a:

a) $2m + 3$
b) $3m + 1$
c) $m + 6$
d) $m + 3$

Questão 08

Se $a = \ln\sqrt{x}$ e $b = e^2$, então b^a é igual a:

a) x
b) $\ln x$
c) $2\sqrt{x}$
d) $\ln\sqrt{x}$

Questão 09

Se $\log_4(x+2) + \log_2(x+2) = 3$, o valor de *x* é igual a:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Questão 10

A soma dos valores reais de *x* que satisfazem a equação $3 \cdot \log_8^2 x = \log_2 x$ é:

a) 1 b) 3 c) 7 d) 9

Questão 11

O valor do pH é um número aproximado entre 0 e 14 que indica se uma solução é acida (pH < 7), neutra (pH = 7) ou básica / alcalina (pH > 7).

Em química, define-se o pH de uma solução como o logaritmo decimal (base 10) do inverso da respectiva concentração de H_3O^+ *(íon hidroxônio), ou ainda, que o pH de uma solução aquosa é definido pela expressão* $pH = -\log[H^+]$ *em que* $[H^+]$ *indica a concentração, em mol/L, de íons de hidrogênio na solução.*

Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que nela, a concentração de Hidrogênio era $[H^+] = 5,4 \cdot 10^{-8}$ mol/L.
Para calcular o pH dessa solução ele usou os valores aproximados de 0, 30 para log 2 e 0, 48 para log 3. Então, o valor que o pesquisador obteve para o log dessa solução foi:

a) 7, 26
b) 7, 32
c) 7, 58
d) 7, 74

Questão 12

O cérebro humano contém um líquido cuja concentração de H_3O^+ é igual a $4,8 \cdot 10^{-8}$ mol/L (em média). Qual será o pH desse líquido?

Questão 13

Qual é o pH de uma solução cuja concentração de H_3O^+ é $4,5 \cdot 10^{-5}$ mol/L?

Questão 14

Os biólogos consideram que, ao chegar a 100 indivíduos, a extinção de uma espécie animal é inevitável. A população de uma determinada espécie animal, ameaçada de extinção diminui segundo a função $f(t) = k \cdot a^t$, na qual, k e a são números reais e $f(t)$ indica o número de indivíduos dessa espécie no instante t (t em anos). Atualmente (instante $t = 0$) existem 1.500 indivíduos da espécie e estima-se que, daqui a 10 anos, haverá 750. Caso nenhuma providência seja tomada, mantido tal decrescimento exponencial, daqui a quantos anos será atingido o nível de população que os biólogos consideram como irreversível para a extinção?

Questão 15

Num país africano, uma espécie de camelos está sendo dizimada por uma peste. O número de camelos é dado, em função do tempo, pela lei $C(t) = C_0 \cdot e^{-0,4t}$ (t em anos e C_0 é o número atual de camelos)

a) Explique o que significa $C(0) = 5.000$ e determine C_0.
b) O Ministério da Agricultura, através do seu Departamento de Veterinária, está desenvolvendo um medicamento que erradicará a peste e prevê que ficará pronto daqui a 10 anos. Quantos camelos serão salvos?
c) O Governo decretará que a espécie de camelos estará em vias de extinção quando o número de camelos for inferior a 200. Se essa tendência se mantiver, daqui a quanto tempo isso acontecerá?

Questão 16

Num lago onde não existiam peixes, foi lançada determinada quantidade com 1 ano de idade. O número de peixes vivos após t anos é dado por $N(t) = 5.000 \cdot e^{-0,1t}$.

a) Quantos peixes foram lançados no lago?
b) Ao fim de quantos anos existirão 3.000 peixes no lago?
c) Se o modelo matemático continuar, qual o número de peixes após muitos anos?

Questão 17

O número de pinheiros de um certo pinhal é dado de acordo com a lei $N(t) = 100 \cdot e^{0,3t}$.

a) Quantos pinheiros havia no início da contagem?
b) Quantos pinheiros havia 9 anos depois?
c) Ao fim de quantos anos existirão 5.000 árvores?
d) Se nada for feito, em contrário, o que irá acontecer com o número de pinheiros, ao fim de muitos anos?

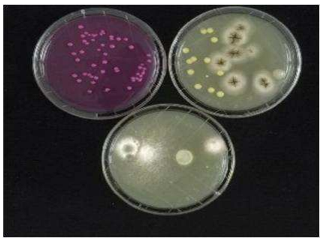
Questão 18

A "massa vegetal" de uma floresta varia com o tempo t e pode ser dada por $Mv(t) = \sqrt[3]{e^t}$. Tomando para unidade de massa vegetal, a que existe no começo de 1900, início da contagem do tempo (t = 0), e para unidade de tempo, o século:

a) Calcule a massa vegetal existente no início de 1.500.
b) Determine a massa vegetal prevista para o começo de 2.050. De quanto será o seu aumento em relação a 1.900?
c) Em que ano a massa vegetal será o dobro da que existia em 1.900?

Questão 19

A massa m (em gramas) de uma cultura de bolor sujeita a um certo conjunto de condições ambientais aumenta de acordo com a fórmula $m(t) = \dfrac{1}{0,4 + 0,6e^{-t}}$, em que t representa o tempo (em dias).



a) Qual é a massa inicial da cultura?
b) Qual é a massa da cultura depois de 15 dias?
c) Resolva a equação $m(t) = 2$ e explique o seu significado.
d) Explique a forma como evolui o crescimento da massa da cultura.
e) Escreva a equação que exprime t em função de *m*.

Questão 20

A população de um certo vírus cresce de tal forma que a sua dimensão ao fim de t dias é dada por $D(t) = D_0 \cdot 2^{k \cdot t}$, em que D_0 representa a dimensão inicial da população.

a) Para D_0 = 1.000 a população duplica ao fim de 20 dias. Qual deve ser o valor de k?
b) Qual é a dimensão da população ao fim de 15 dias?
c) Qual é a dimensão da população ao fim de 25 dias?
d) Determine, aproximadamente, ao fim de quanto tempo teremos $D(t) = 2.750$.
e) O que significa a condição $D(t) < 1.500$? Resolva.

Questão 21

Segundo uma pesquisa, após x meses da constatação de uma epidemia, o número de pessoas por ela atingida é dada pela fórmula $f(x) = \dfrac{20.000}{2 + 15 \cdot 4^{-2x}}$. Daqui a quanto tempo, aproximadamente, o número de pessoas atingidas por essa epidemia será de 2.000?

Questão 22

Os átomos de um elemento químico radioativo possuem uma tendência a se desintegrarem (emitindo partículas e se transformando em outro elemento). Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Suponhamos que certa quantidade de um elemento radioativo com inicialmente m_0 gramas de massa se decomponha segundo a equação matemática: $m(t) = m_0 \cdot 10^{\frac{-t}{70}}$, onde $m(t)$ é a quantidade de massa radioativa no tempo *t* (em anos). Determine quantos anos demorará para que esse elemento se decomponha até atingir um oitavo da massa inicial.

Questão 23

A radioatividade de um composto decresce de acordo com a fórmula $A(t) = A_0 \cdot e^{-0,2t}$, onde A_0 é a quantidade de composto inicialmente presente e t é o tempo em segundos após a observação inicial. Sabe-se que inicialmente havia 20 gramas do composto.

a) Quantos gramas do composto haverá 10 segundos depois da observação inicial?
b) Quanto tempo terá que decorrer para que a quantidade do composto se reduza à metade?

Questão 24

A partir de um certo ano, a população de uma cidade passou a crescer de acordo com a função $P = 50.000 \cdot (1,02)^n$, onde *n* representa os anos e *P*, o número de habitantes. Sabendo que $\log 1,02 = 0,009$, faça uma previsão de quando essa cidade atingirá 500.000 habitantes.

Questão 25

A expressão $M = C \cdot (1 + i)^n$ permite calcular o montante *M*, resultante da aplicação do capital *C* a juros compostos, à taxa *i* num período de tempo *n*. Nessas condições, se o capital de R$ 8.000, 00 for aplicado a juros compostos à taxa de 12% ao ano, após quanto tempo de aplicação serão obtidos juros no valor de R$ 7.000, 00?

Questão 26

Um capital de R$ 50.000, 00 foi colocado numa caderneta de poupança que rende 2,5% ao mês. Admitindo não haver retiradas, após quanto tempo o saldo dessa aplicação será de R$ 122.070, 31?

Questão 27

Em quanto tempo R$ 2.000, 00 produziu um montante de R$ 2.205, 00 em regime de capitalização composta a 5% ao mês?

Questão 28

Um investimento de R$ 50.000, 00 dá um juro de 7% ao ano. Capitalizando continuamente e após *t* anos, o investimento terá um valor de $50.000 \cdot e^{0,07t}$. Ao fim de quantos anos, aproximadamente, o investimento terá duplicado de valor?

Questão 29

O valor (v) de um imóvel em minha cidade varia segundo a lei $v(t) = 60.000 \cdot (0,9)^t$, em reais, onde t é o número de anos contados a partir de hoje.

O imóvel valerá R$ 35.429, 40 daqui a:

a) 4 anos
b) 5 anos
c) 6 anos
d) 7 anos

Questão 30

A magnitude dos tremores de terra é habitualmente medida na escala Richter. Nesta escala, a magnitude M de um abalo sísmico está relacionada com a energia liberada E (em ergs), da seguinte forma $M = \dfrac{\log E - 11,8}{1,5}$ (Fórmula de Gutenberg e Richter)

a) Um dos tremores de terra mais famoso ocorreu em S. Francisco, nos Estados Unidos, em 1906 e liberou $1,496 \times 10^{24}$ ergs de energia. Qual foi a sua magnitude na escala Richter?
b) Qual a energia liberada por um sismo de magnitude 8, 5 na escala Richter?
c) Exprima a variável E em função de M.

Questão 31

A magnitude M de um sismo e a energia total E liberada por esse sismo, estão relacionadas pela equação $\log E = 5,24 + 1,44M$ (a energia E é medida em Joule)

O terremoto de 4,9 graus na escala Richter no norte de Minas Gerais é o primeiro a registrar uma morte, segundo o Obsis (Observatório Sismológico de Brasília), da UnB (Universidade de Brasília).

Folha online

Qual foi a energia, em Joules, liberada por esse sismo?

Questão 32

As indicações R_1 e R_2, na escala Richter, de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula $R_2 - R_1 = \log\left(\dfrac{M_2}{M_1}\right)$, onde M_1 e M_2 medem as energias liberadas pelos respectivos terremotos, sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Considerando que ocorreram dois terremotos, um correspondente a $R_1 = 6$ e outro correspondente a $R_2 = 4$, determine a razão entre as energias liberadas pelos mesmos.

Questão 33

As indicações R_1 e R_2, na escala Richter, de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula $R_2 - R_1 = \log N$, onde N mede a razão entre as energias liberadas pelos dois terremotos, sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Supondo que houve um terremoto, correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 5$, então o valor de $\frac{1}{N}$ é igual a:

a) $\log \frac{8}{5}$ b) $\frac{8}{5}$ c) 3 d) $\log_3 10$ e) 10^3

Questão 34

A intensidade I de um terremoto, medido na escala Richter, é um número que varia de $I = 0$ até $I = 8,9$, para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula $I = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{E_0}$ onde E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh.

a) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?
b) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

Questão 35

A altura média do tronco de uma certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático: $h(t) = 1,5 + \log_3 (t+1)$, com $h(t)$ em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o corte foi de:

a) 9
b) 8
c) 5
d) 4
e) 2

Questão 36

Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (dado em kg), pela relação $A(p) = -0,52 + 0,55 \cdot \ln(p)$.

a) O Paulinho tem 1, 4 m de altura. Admitindo que a altura e o peso do Paulinho estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso?
b) Verifique que, para qualquer valor de p, a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (com duas casas decimais).

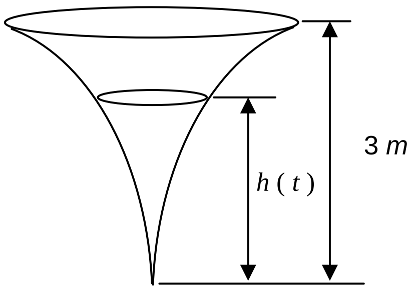
Questão 37

A figura abaixo representa um reservatório com três metros de altura. Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado. O reservatório fica vazio ao fim de 14 horas.

Admita que a altura, em metros, da água no reservatório, *t* horas após ter começado a ser esvaziado, é dada por $h(t) = \log_2 (a - bt)$, com $t \in [0, 14]$, onde *a* e *b* são constantes reais e positivas.

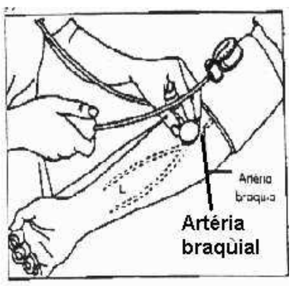
a) Calcule o valor de *a* e de *b*.

b) Prove que a taxa de variação média de *h* no intervalo $[6, 11]$ é $-0,2$. Interprete esse valor no contexto da situação acima.



Questão 38

O coração é uma "bomba" muscular no homem pode exercer uma pressão manométrica máxima de cerca de 120 mmHg (120 tor ou 12) no sangue durante a contração (pressão sistólica), e de cerca de 80 mmHg (80 tor ou 8) durante a relaxação (pressão diastólica). A pressão sanguínea, então, é aquela exercida pelo sangue contra a parede dos vasos sanguíneos. A pressão arterial (PA) é medida com o aparelho de pressão (esfigmomanômetro), cujo manguito (braçadeira) deve se adaptar ao braço, logo acima da dobra do cotovelo. Com esse aparelho nós obtemos a pressão máxima (sistólica) e a pressão mínima (diastólica).



A fórmula empírica $P(x) = 40 + 25 \cdot \ln (x + 1)$, é válida para *x* entre 0 e 65, calcula aproximadamente a pressão sistólica do sangue de uma pessoa, medida em milímetros de mercúrio como função da idade *x* da pessoa medida em anos.

Considerando $\ln 2 = 0,70$, a medida da pressão sistólica, em centímetros de mercúrio, calculada pela fórmula acima para uma pessoa com 15 anos de idade é:

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

Questão 39

Ao nível do mar, a pressão atmosférica é de 760 mm Hg. Essa pressão varia com a altura de acordo com a fórmula $h = 18.400 \cdot \log \frac{750}{p}$ (*h* em metros e *p* em milímetros de mercúrio). Sabendo que $\log 3 = 0,5$, aproximadamente, a que altura do nível do mar a pressão é de 250 mm Hg?

Questão 40

A pressão atmosférica *P*, em polegadas de mercúrio (1 polegada = 25, 4 mm), é dada por $P(h) = 30 \cdot 10^{-0,09h}$, onde *h* é a altura, em milhas (1 milha = 1609 metros), acima do nível do mar.

a) Calcule a pressão atmosférica a 3 km acima do nível do mar.
b) Determine um valor aproximado da altura de uma montanha sabendo que no cume, a pressão atmosférica é de 505 mm de mercúrio.

Questão 41

O álcool no sangue de um motorista alcançou o nível de 2 gramas por litro logo depois de ele ter bebido uma considerável quantidade de cachaça.

Considere que esse nível decresce de acordo com a fórmula matemática $N(t) = 2 \cdot (0,5)^t$, onde *t* é o tempo medido em horas a partir do momento em o nível é constatado. Quanto tempo deverá o motorista esperar antes de dirigir seu veículo, se o limite permitido de álcool no sangue para dirigir com segurança é de 0, 8 grama por litro?

Mais cedo ou mais tarde, qualquer marca ou produto presente no mercado necessita de propaganda para aumentar a procura, evitar perda de mercado, ou para se manter vivo e saudável junto ao consumidor. As técnicas de comunicação constituem uma poderosa ferramenta, podendo influenciar a atitude dos consumidores face ao produto/marca. As campanhas de propaganda servem, sobretudo, para conquistar ou manter a posição de liderança, assim como para diferenciar e aumentar o nível de conhecimento de produtos ou serviços num mercado cada vez mais competitivo. A propaganda constitui, assim, um instrumento de ajuda às empresas para vender, ao mesmo tempo em que permite aos consumidores aumentarem o conhecimento sobre os produtos e saberem distingui-los.

Fonte SEBRAE - SP

Questão 42

Em certo país com população A (em milhões de habitantes) é noticiado pela TV a implantação de um novo plano econômico pelo governo. O número de pessoas que já sabiam da notícia após $t \geq 0$ horas é dado pela fórmula $f(t) = \dfrac{A}{1 + 4e^{-\frac{A}{2} \cdot t}}$. Sabe-se também que decorrida 1 hora da divulgação do plano, 50% da população já estava ciente da notícia.

a) Qual foi a porcentagem da população que tomou conhecimento do plano no instante em que foi noticiado?
b) Qual a população do país?
c) Após quanto tempo, 80% da população estava ciente do plano?

Questão 43

Uma empresa de detergentes lançou um novo produto no mercado e não obteve o êxito esperado. Para minorar as baixas vendas do produto, a empresa investiu numa campanha publicitária. Após *t* dias do início da campanha publicitária, o número *V*, em milhares de vendas do novo produto é dado pela expressão $V(t) = k \cdot e^{0,2t}$.

a) Calcule o valor de *k*, sabendo que dois dias após o início da campanha o número de vendas era de 746. Indique o valor de *k* encontrado.
b) A campanha publicitária termina quando o número de vendas atingir a produção máxima da empresa, que corresponde a 10.000 unidades. Quantos dias durou a campanha?

Questão 44

Numa padaria, os biscoitos saem do forno a 180º C. Sabendo que a temperatura se reduz à metade ao fim de 20 minutos e que a expressão que dá a temperatura *T* em graus centígrados é do tipo $T(t) = 18 + a \cdot e^{-k \cdot t}$ (*t* em horas, *k* > 0).

a) Calcular o valor de *a* e de *k*.
b) Quanto tempo é preciso esperar para embalar os biscoitos, sabendo que eles só podem ser embalados abaixo de 30º C?

Questão 45

Quando o pão sai do forno, a sua temperatura é de aproximadamente 100º C. Para arrefecer, é colocado em tabuleiros numa sala em que a temperatura é de 23º C. Passados 3 minutos a sua temperatura é de aproximadamente 74º C. Depois de sair do forno, ao fim do tempo *t*, em minutos, a temperatura do pão é dada por $T(t) = 23 + 77 \cdot e^{-k \cdot t}$.

a) Calcule o valor de *k*.
b) Qual será a temperatura do pão meia hora depois de sair do forno?
c) Para embrulhar o pão, é conveniente que este esteja a uma temperatura inferior a 40º C. Paulo entrou na padaria no momento em que o pão saindo do forno. Ele quer comprar pão, mas como já está atrasado para ir para a escola, diz que só pode esperar entre 3 e 5 minutos. Será que o Paulo irá levar o pão?

Questão 46

Foi criada uma zona industrial onde inicialmente trabalhavam 1.000 pessoas. A expressão que rege o número de milhares de postos de trabalho é $N(t) = \dfrac{a}{1+2e^{-0,5t}}$ em função do tempo *t* em anos.

a) Determine o valor de *a*.
b) Determine ao fim de quantos meses o número de trabalhadores ultrapassa 2.000.

Questão 47

Os veterinários usam pentobarbitol de sódio para anestesiar animais. Suponha que a dose *d* (em miligramas) necessária para anestesiar um cachorro de 20 kg, durante um tempo t (em horas) é dada por $d(t) = 600 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$.

a) Qual a dose necessária para anestesiar um cachorro com o peso indicado, durante 90 minutos?
b) Durante quanto tempo ficará anestesiado um cachorro de 20 kg, se lhe for aplicada uma dosagem de 0, 9 gramas?

Questão 48

Um petroleiro, que navegava no oceano Atlântico, encalhou numa rocha e sofreu um rombo no casco. Em consequência disso, começou a derramar óleo.

Admita que, às *t* horas do dia seguinte ao acidente, a área em km^2, de óleo espalhado sobre o oceano, é dada por $A(t) = 16 \cdot e^{0,1t}$, $t \in [0, 24]$.

a) Verifique que para qualquer valor de *t*, $\dfrac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

b) Admita que a mancha de óleo é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou. Sabendo que esse local se encontra a 7 km da costa, determine a que horas, do dia seguinte ao acidente, a mancha de óleo atingirá a costa.

RESPOSTAS

Página 1

1. a) $\frac{5}{2}$
   b) -2
   c) $-\frac{3}{4}$

2. a) 2
   b) 3
   c) 3
   d) 2

3. a) -2
   b) -5
   c) -3
   d) -3

4. a) $\frac{4}{3}$
   b) $\frac{2}{3}$
   c) 4
   d) $-\frac{2}{3}$
   e) -2
   f) 3
   g) $-\frac{5}{4}$
   h) $\frac{10}{9}$
   i) $\frac{9}{4}$

Página 2

1. a) 0
   b) 0
   c) 0

2. a) 0
   b) 1
   c) 0
   d) 1

3. a) 3
   b) –13
   c) 7
   d) –5

4. a) 2
   b) 10

5. a) 8
   b) 4
   c) $\frac{4}{3}$
   d) 0 e 1
   e) 4

Página 3

1. a) 16
   b) 3
   c) –2 e 3
   d) 2
   e) $\frac{1}{8}$ e 27
   f) 6

Página 4 – Exercícios – testes

1. B
2. C
3. D
4. C
5. A
6. A
7. B
8. A
9. A
10. D
11. A
12. 7,92
13. 4,34
14. 7 anos
15. a) $C_0 = 5.000$, que é o número atual de camelos
    b) 91
    c) 8 anos

16. a) 5.000
    b) 5 anos
    c) 0

17. a) 100
    b) 1,487
    c) 13
    d) crescerá infinitamente

18. a) 0,26
    b) 1,65 e 0,65
    c) 2.110

19. a) 1 g
    b) 2,5 g
    c) 1d 19h
    d) à medida que o tempo passa, a massa tende a 2,5 g
    e) $t = \ln\frac{0,6m}{1-0,4m}$

20. a) $k = \frac{1}{20}$
    b) 1.682
    c) 2.378
    d) 29 dias
    e) é o mesmo que perguntar: durante quanto tempo a dimensão desse vírus é inferior a 1.500, logo para $t < 11$ dias.

21. 7 dias
22. *t* = 63 anos
23. 3,5 s
24. 111 anos
25. 5a 6m 18 d
26. 3 anos
27. 2 meses
28. 10 anos
29. B
30. a) 8,25
    b) $3,5481 \times 10^{24}$ ergs
    c) $E = 10^{1,5M} + 11,8$

31. d
32. $\frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{100}$
33. E
34. a) $7 \cdot 10^9$
    b) $10\sqrt{10}$

35. B
36. a) 33 kg
    b) 0,3813

37. a) Provar
    b) Provar – No intervalo de tempo considerado, entre às 6h e 11h, após o início do vazamento, a altura da água no reservatório diminuiu à razão de 0,2m (20cm) por hora.

38. E
39. 9.200m
40. a) 717,8 mm de mercúrio
    b) 3.195m

41. 1h 20min
42. a) 20% de A
    b) 2.772.589 habitantes
    c) 2h

43. a) *k* = 500
    b) 15 dias

44. a) provar
    b) no mínimo 1 hora

45. a) *k* = 0,14
    b) 24º C
    c) não levará o pão

46. a) 3.000
    b) 2a 9 m

47. a) 778 mg
    b) 2h 20min

48. a) 1,1 significa que a área da mancha espalhada sobre o oceano, cresce à razão de 1,1 km por hora, ou ainda, a área da mancha cresce 10% por hora.
    b) 2h 38 min