LOGARITMOS

Definição: Seja a, b e x três números reais. Dizemos que x representa o *logaritmo de a na base b* ($\log_b a$) se, e somente se, $b^x = a$.

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Aqui *a é o logaritmando, b a base e x é o logaritmo.* O $log_b\, a$ só existe quando $a, b > 0$ e $b \neq 1$.

Exemplo 1: Usando a definição, calcule:

a) $\log_2 8$ d) $\log_{3/4} 16/9$

b) $\log_3 1/81$ e) $\log_{\sqrt{2}} 1/8$

c) $\log_{1/3} 1/9$ f) $\log 0{,}0001$

Exemplo 2: Calcule k em cada caso:

a) $\log_k 16 = 2$ b) $\log_3 k = 5$

Consequências da Definição: como os logaritmos são baseados em potências, alguns logaritmos terão um resultado facilmente determinado. Vejamos alguns casos:

1. Quando o logaritmando é 1.

$$\boxed{\log_a 1 = 0}, \forall\, a \in \mathbb{R}, com\ a > 0.$$

2. Quando a base e o logaritmando são iguais.

$$\boxed{\log_a a = 1}, \forall\, a \in \mathbb{R}, com\ a > 0\ e\ a \neq 1.$$

3. O logaritmo é o expoente de uma potência cuja base coincide com a base do logaritmo.

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}, com\ a, b > 0\ e\ a \neq 1.$$

4. Igualdade de logaritmos com a mesma base.

$$\boxed{\log_b a = \log_b c} \Leftrightarrow \boxed{a = c}, \forall\, a, b, c > 0, \text{sendo } b \neq 1.$$

Exemplo 3: Determine o valor de:

a) $\log_5 1$ e) $2^{\log_2 3}$

b) $\log_{\sqrt{5}} 1$ f) $5^{\log_5 7}$

c) $\log_7 7$ g) $9^{\log_3 5}$

d) $\log 10$ h) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_7 9}$

Propriedades Operatórias dos logaritmos

1. **Logaritmo de um Produto**: transforma-se em soma de logaritmos com a mesma base.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

2. **Logaritmo de um Quociente**: transforma-se em uma diferença de logaritmos com a mesma base.

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

3. **Logaritmo de Uma Potência**: transforma-se em um produto.

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

Exemplo 4: Usando as propriedades operatórias e considerando $\log 2 = 0{,}30$, $\log 3 = 0{,}48$ e $\log 5 = 0{,}70$, determine os valores de:

a) $\log 50$ c) $\log 180$ e) $\log 300$

b) $\log 80$ d) $\log 225$ f) $\log 1500$

Exemplo 5: Dados $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ e $\log 5 = k$, escreva a expressão que representa:

a) $\log 0{,}5$ b) $\log \sqrt{6}$ c) $\log \sqrt[3]{25}$

Exemplo 6: Considere que $\log_4(a - b) = m$ e $a + b = 32$. Qual o valor de $\log_4(a^2 - b^2)$?

Mudança de Base

Às vezes convém mudar a base um logaritmo para efetuar certos cálculos. Para tal usa-se a propriedade a seguir:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Outra Propriedade importante: $\log_y x \cdot \log_x x = 1$.

Exemplo 7: Mude para a base 2.

a) $\log_5 7$ b) $\log_3 8$ c) $\log_4 5$

Exemplo 8: Dado $\log_n m = 3$, determine o valor de:

a) $\log_m n$ b) $\log_{m^2} n$ c) $\log_{m^3} n^2$

Exemplo 9: Sendo $\log_8 x = k$, determine o valor de $\log_x 16$.

Exemplo 10: Calcule:

a) $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$

b) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_8 25$

Equações Logarítmicas

Para resolver uma equação com logaritmo usamos as propriedades operatórias, a definição, e, especialmente, a quarta consequência. É necessário sempre verificar se o valor obtido satisfaz a condição de existência.

Exemplo 11: Resolva as equações:

a) $\log_4(3x + 2) = \log_4(2x + 5)$

b) $\log_2(4x^2 - 14x + 1) = \log_2(3x^2 - 4x - 20)$

c) $\log_{(x-2)}(2x^2 - 11x + 16) = 2$

d) $\log x + \log(x - 21) = 2$

e) $\log(x + 1) - \log(2x) = 2$