Múltiplos e Divisores: MMC e MDC

Objetivo
Reconhecer os múltiplos e divisores de um número e a partir de técnicas encontrar o máximo divisor comum e o mínimo multiplo comum. E resolver os problemas sobre MDC e MMC apresentados nos exercícios.

Se liga
Para essa aula é importante que relembrar o conceito de divisibilidade. Caso tenha dúvidas, basta clicar **aqui** (caso não seja direcionado, pesquise pela aula "Divisibilidade" na biblioteca).

Curiosidade
Na curiosidade de hoje, explicaresmos o porquê de não ser interessante pedir o menor divisor natural comum de dois números. Note que 1 é divisor de todo número natural, logo, ele sempre seria o menor comum.
Pensando agoro no conceito de múltiplo, não faz sentido questionar o maior múltiplo comum entre dois números, já que o conjunto dos múltiplos de um número é infinito. Assim esse conceito de maior não se aplica.

Teoria

MMC (Mínimo Múltiplo Comum) e **MDC (Máximo Divisor Comum)** são conceitos fundamentais para a matemática. Para entendê-los, precisamos conhecer os conceitos de divisores e múltiplos. Divisores são quocientes da divisão exata entre dois números.

Exemplo: 5 é divisor de 10 porque 10 dividido por 5 é uma divisão exata (o resto é igual a 0).

O número de divisores de um número é limitado, sendo sempre o menor número o 1 e o maior ele mesmo.

Um número é dito **primo** se possuir como divisores apenas dois divisores naturais o 1 e ele mesmo. Por isso, para sabermos o máximo divisor comum entre dois números ou mais, precisamos conhecer o maior número que divide esses números ao mesmo tempo.

Exemplo: Para sabermos o MDC entre 10 e 20 precisamos conhecer os divisores de 10 e 20.

Os de 10 são: 1,2,5 e 10 e de 20 são: 1,2,4,5,10,20. Logo o conjunto de divisores comuns é {1,2,10}, assim o MDC é 10, ou seja, é o maior número que divide os dois números ao mesmo tempo.

Observação: Caso os números a e b possuam $\mathrm{MDC}(a,b) = 1$, eles são primos entre si.

Um processo prático é fatorar os dois números simultaneamente em fatores primos e ver quais números dividem eles ao mesmo tempo. O produto entre eles será o MDC.

$$\begin{array}{rr|l} 20 & 10 & 2 \\ 10 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & \end{array} \Rightarrow 2.5 = 10$$

Então, o MDC (20,10) = 10

Já o conceito de múltiplo de um número natural se refere ao produto desse número por outro número natural, incluindo o zero. Vale lembrar que o zero é múltiplo de todos os números (o produto de qualquer número por 0 é igual a 0).

Por exemplo: os múltiplos de 5 são: 0,5,10,15... Note que o 5 é divisor de 10 e o 10 é múltiplo de 5 e que o conjunto dos múltiplos é infinito. Para descobrirmos o mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números, basta conhecer o primeiro número que sejam múltiplos dos números ao mesmo tempo.

Exemplo: Para descobrirmos o MMC entre 6 e 8 analisaremos seus múltiplos. Os de 6 são: 0,6,12,18,24,... e os de 8 são 0,8,16,24,... Assim o conjunto dos múltiplos em comum é {0,24,..} assim o MMC é 24.

O processo prático é parecido com o do MDC, porém fatoraremos os números em fatores primos até chegarmos a 1. O produto entre eles será o MMC.

$$\begin{array}{rr|l} 8 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array} \Rightarrow 2.2.2.3 = 24$$

Então o MMC(8,6) = 24.

Há uma propriedade que relaciona o MDC(x,y) e o MMC(x,y), e ela nos diz o seguinte:

$$\text{MMC}\,(x, y) \times \text{MDC}\,(x, y) = x \times y$$

Exercícios de fixação

1. Se o máximo divisor comum entre 2 e 3 é igual a 1, podemos afirmar que:
- **a)** 2 e 3 são primos entre si.
- **b)** 2 e 3 são ímpares.
- **c)** 2 é divisor de 3.

2. Assinale a alternativa onde só tenha múltiplo de 5
- **a)** {0,5,10,15,20,25,30,35,40,45...}
- **b)** {0,1,5}
- **c)** {2,4,5,10,15,30}

3. O MMC(2,3) é:
- **a)** 5
- **b)** 6
- **c)** 7

4. O MMC(2,8) =
- **a)** 6
- **b)** 7
- **c)** 8

5. Seja A = 120, B = 160, x = mmc (A,B) e y = mdc (A,B), então o valor de x + y é igual a:
- **a)** 460
- **b)** 480
- **c)** 500
- **d)** 520
- **e)** 540

Exercícios de vestibulares

1. Numa linha de produção, certo tipo de manutenção é feito na máquina A a cada 3 dias, na máquina B a cada 4 dias e na máquina C a cada 6 dias. Se no dia 2 de dezembro foi feita a manutenção nas três máquinas, a próxima vez em que a manutenção das três ocorreu no mesmo dia foi:

a) 5 de dezembro.
b) 6 de dezembro.
c) 8 de dezembro.
d) 14 de dezembro.
e) 26 de dezembro.

2. A soma de dois números naturais diferentes é 68. Ambos são múltiplos de 17. A diferença entre o maior número e o menor é:

a) 35
b) 34
c) 33
d) 32
e) 31

3. Três funcionários fazem plantões nas seções em que trabalham: um a cada 10 dias, outro a cada 15 dias, e o terceiro a cada 20 dias, inclusive aos sábados, domingos e feriados. Se no dia 18/05/02 os três estiveram de plantão, a próxima data em que houve coincidência no dia de seus plantões foi:

a) 18/11/02
b) 17/09/02
c) 18/08/02
d) 17/07/02
e) 18/06/02

4. Três ciclistas percorrem um circuito saindo todos ao mesmo tempo, do mesmo ponto, e com o mesmo sentido. O primeiro faz o percurso em 40 s, o segundo em 36 s e o terceiro em 30 s. Com base nessas informações, depois de quanto tempo os três ciclistas se reencontrarão novamente no ponto de partida pela primeira vez, e quantas voltas terá dado o primeiro, o segundo e o terceiro ciclistas, respectivamente?

a) 5 minutos, 10 voltas, 11 voltas e 13 voltas.

b) 6 minutos, 9 voltas, 10 voltas e 12 voltas.

c) 7 minutos, 10 voltas, 11 voltas e 12 voltas.

d) 8 minutos, 8 voltas, 9 voltas e 10 voltas.

e) 9 minutos, 9 voltas, 11 voltas e 12 voltas.

5. O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

1. cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
2. todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
3. não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é

a) 2.

b) 4.

c) 9.

d) 40.

e) 80.

6. Nas últimas eleições, três partidos políticos tiveram direito, por dia, a 90 s, 108 s e 144 s de tempo gratuito de propaganda na televisão, com diferentes números de aparições. O tempo de cada aparição, para todos os partidos, foi sempre o mesmo e o maior possível. A soma do número das aparições diárias dos partidos na TV foi de:

a) 15

b) 16

c) 17

d) 19

e) 21

7. Em uma floresta, existem 4 espécies de insetos, A, B, C e P, que têm um ciclo de vida semelhante. Essas espécies passam por um período, em anos, de desenvolvimento dentro de seus casulos. Durante uma primavera, elas saem, põem seus ovos para o desenvolvimento da próxima geração e morrem. Sabe-se que as espécies A, B e C se alimentam de vegetais e a espécie P é predadora das outras 3. Além disso, a espécie P passa 4 anos em desenvolvimento dentro dos casulos, já a espécie A passa 8 anos, a espécie B passa 7 anos e a espécie C passa 6 anos. As espécies A, B e C só serão ameaçadas de extinção durante uma primavera pela espécie P, se apenas uma delas surgirem na primavera junto com a espécie P. Nessa primavera atual, todas as 4 espécies saíram dos casulos juntas.

Qual será a primeira e a segunda espécies a serem ameaçadas de extinção por surgirem sozinhas com a espécie predadora numa próxima primavera?

a) A primeira a ser ameaçada é a espécie C e a segunda é a espécie B.

b) A primeira a ser ameaçada é a espécie A e a segunda é a espécie B.

c) A primeira a ser ameaçada é a espécie C e a segunda é a espécie A.

d) A primeira a ser ameaçada é a espécie A e a segunda é a espécie C.

e) A primeira a ser ameaçada é a espécie B e a segunda é a espécie C.

8. Uma gerente de loja e seu assistente viajam com frequência para São Paulo e voltam no mesmo dia. A gerente viaja a cada 24 dias e o assistente, a cada 16 dias, regularmente. Em um final de semana, eles viajaram juntos. Depois de x viagens da gerente e y viagens do assistente sozinhos, eles viajaram juntos novamente. O menor valor de x + y é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

9. Na tabela abaixo, estão indicadas três possibilidades de arrumar n cadernos em pacotes:

Nº de pacotes	Nº de cadernos por pacotes	Nº de cadernos que sobram
X	12	11
Y	20	19
Z	18	17

Se n é menor do que 1200, a soma dos algarismos do maior valor de n é

a) 12

b) 17

c) 21

d) 26

e) 33

10. Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em peças de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m. Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

a) 105 peças.

b) 120 peças.

c) 210 peças.

d) 243 peças.

e) 420 peças

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. **A**
   Caso os números a e b possuam $\mathbf{MDC(a, b) = 1}$, eles são primos entre si. Portanto, se MDC(2,3) = 1, eles são primos.

2. **A**
   Os múltiplos de 5 são M(5) = {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...}

3. **B**
   O mmc(2,3) = 6, lembrando que o MMC entre dois números primos entre si é igual à multiplicação entre eles

4. **C**
   O MMC(2,8) = 8, lembrando que o MMC entre números que são múltiplos é sempre o maior entre eles.

5. **D**
   Para encontrarmos o MMC(A,B) e o MDC(A,B) temos que fatorar 120 e 160
   Sabemos

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{120, 160} & \mathbf{2} \\ \mathbf{60, 80} & \mathbf{2} \\ \mathbf{30, 40} & \mathbf{2} \\ \mathbf{15, 20} & \mathbf{2} \\ \mathbf{15, 10} & \mathbf{2} \\ \mathbf{15, 5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5, 5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1, 1} & \end{array}$$

   Podemos perceber que o MMC(120,160)=480 e o MDC(120,160)=40

$$x + y = 480 + 40 = 520$$

Exercícios de vestibulares

1. **D**
   Como o mmc(3, 4, 6) = 12, a próxima manutenção será realizada após 12 dias. Ou seja, no dia 14 de dezembro.

2. B

Temos dois números, x e y cuja soma é 68. Além disso, $\boldsymbol{x = 17k}$ e $\boldsymbol{y = 17m}$, por serem ambos múltiplos de 17. Assim, temos:

$$\boldsymbol{17k + 17m = 68}$$
$$\boldsymbol{17(k + m) = 68}$$
$$\boldsymbol{k + m = 4}$$

Assim, k = m = 2 ou k e m podem ser a dupla 1 e 3, e vice-versa. No primeiro caso, k = m = 2, temos que x e y são iguais e, assim, a diferença entre eles é 0, que não se encontra entre as alternativas e também porque $\boldsymbol{x \neq y}$. Dessa maneira, só nos resta k = 1 e m = 3.

$$\boldsymbol{17 \cdot 3 + 17 \cdot 1 = 68}$$
$$\boldsymbol{51 + 17 = 68}$$

Portanto

$$\boldsymbol{51 - 17 = 34}$$

A resposta é 34.

3. D

Para acharmos a próxima data teremos que fazer o MMC entre 10,15 e 20.

$$\begin{array}{r|l} 10, 15, 20 & 2 \\ 5, 15, 10 & 2 \\ 5, 15, 5 & 3 \\ 5, 5, 5 & 5 \\ 1, 1, 1 & \overline{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60} \end{array}$$

Então o MMC (10,15,20) = 60.
Logo, a próxima data que acontecerá a coincidência será após 60 dias. Portanto, 17/07/02.

4. B

Como o mmc(30, 36, 40) = 360 segundos = 6 minutos.
1° ciclista:

$$\frac{360\ s}{40\ s} = 9^{\underline{a}}\ volta$$

2° ciclista:

$$\frac{360\ s}{36\ s} = 10^{\underline{a}}\ volta$$

3° ciclista:

$$\frac{360\ s}{30\ s} = 12^{\underline{a}}\ volta$$

Portanto, a alternativa correta é a letra b.

5. C

O número mínimo de escolas beneficiadas ocorre quando cada escola recebe maior número possível de ingressos. Logo, sendo o número máximo de ingressos igual ao máximo divisor comum de $400 = 2^4 \cdot 5^2$ e $320 = 2^6 \cdot 5$, temos $\text{MDC}(400,320) = 2^4 \cdot 5 = 80$.

Portanto, como

$\frac{400}{80} = 5$ e $\frac{320}{80} = 4$

Segue que a resposta é 5 + 4 = 9.

6. D

O MDC entre o tempo de aparição de cada politico é:

MDC (90, 108, 144) = 18

Encontrado o tempo de aparição de cada político, 18 segundos, é preciso agora descobrir quantas aparições cada um deles realizou.

90: 18 = 5 aparições

108:18 = 6 aparições

144: 18 = 8 aparições

Somando as aparições de cada um, encontramos 5 + 6 + 8 = 19 aparições.

7. D

Espécie P: 4 anos no casulo

Espécie A: 8 anos no casulo
Espécie B: 7 anos no casulo
Espécie C: 6 anos no casulo
MMC (4,8) = 8
MMC (4,7) = 28 anos
MMC (4,6) = 12 anos
A primeira a ser ameaçada é a espécie A e a segunda é a espécie C.

8. C

A gerente viaja a cada 24 dias e a secretária, a cada 16 dias. Seja n o dia em que as duas viajaram juntas pela primeira vez. Assim, a segunda viagem da gerente foi 24 dias após o dia n. Já a terceira viagem da gerente, deu-se 48 dias após o dia n, e assim em diante. Para secretária, sua segunda viagem foi 16 dias após n. Já sua terceira viagem, 32 dias após o dia n, enquanto a quarta viagem deu-se 48 dias após o dia n, e assim em diante. Como podemos ver a gerente e a secretária viajara, juntas no dia n e voltaram a viajar juntas 48 dias após n. Nesse meio tempo, é claro ver que a gerente realizou apenas uma viagem desacompanhada, enquanto a secretária realizou 2. Assim, x = 1 e y = 2. Por fim, x + y = 1 + 2 = 3.

9. B

De acordo com a tabela, temos:

$$n = 12x + 11 \Rightarrow n + 1 = 12(x + 1)$$
$$n = 20y + 19 \Rightarrow n + 1 = 20(x + 1)$$
$$n = 18z + 17 \Rightarrow n + 1 = 18(x + 1)$$

MMC(12, 20, 18) = 180

Concluímos então que, n + 1 é o maior múltiplo de 180 que é menor que 1200. Portanto, $n + 1 = 1080 \Rightarrow n = 1079$. A soma dos algarismos de *n* será dada por: $1 + 0 + 7 + 9 = 17$.

10. E

Sendo $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5, 810 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5$ *e* $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$, vem que o máximo divisor comum desses números é $2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$. Contudo, se o comprimento das novas peças deve ser menor do que 200 centímetros, então queremos o maior divisor comum que seja menor do que 200, ou seja, iremos desconsiderar o 2 e ficar apenas com $3^3 \cdot 5 = 135$.

Em consequência, a resposta é:

$$40 \cdot \frac{540}{135} + 30 \cdot \frac{810}{135} + 10 \cdot \frac{1080}{135} = 420$$