Luiz Roberto Dante
Fernando Viana

VOLUME I

1º ANO

Ensino Médio
Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

PNLD EM 2026 – 2029 – CATEGORIA 1 – MATERIAL DE DIVULGAÇÃO

CÓDIGO DA COLEÇÃO:
0111P26010120814

DO SEU JEITO

Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

editora ática

MANUAL DO PROFESSOR

Ensino Médio
Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

DO SEU JEITO Matemática

Luiz Roberto Dante

Livre-docente em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp-SP), *campus* Rio Claro.

Doutor em Psicologia da Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).

Licenciado em Matemática pela Unesp-SP, *campus* Rio Claro.

Pesquisador em Ensino e Aprendizagem da Matemática pela Unesp-SP, *campus* Rio Claro.

Atuou como professor do Ensino Fundamental e do Ensino Médio na rede pública de ensino.

Autor de materiais didáticos e paradidáticos de Matemática para estudantes e professores da Educação Básica.

Fernando Viana

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB).

Licenciado e mestre em Matemática pela UFPB.

Professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB).

Professor do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e de cursos pré-vestibulares há mais de 20 anos.

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

1ª edição, São Paulo, 2024.

editora ática

editora ática

Direção executiva de negócio e editorial: Flavia Alves Bravin

Direção de negócio: Volnei Korzenieski

Direção editorial: Lidiane Vivaldini Olo

Gerência de conteúdo: Alice Ribeiro Silvestre

Edição: Pamela Hellebrekers Seravalli (ger.), Marina Muniz Campelo, Juliana Aparecida Bomjardim Soares, Marília Kerr (assist.), Julia Lima Souza e Daniela Gratner Schuck

Produção editorial: Renata Galdino

Revisão: Letícia Bento Pieroni (ger.), Carlos Eduardo Sigrist (coord.), Anderson Félix (líder de projeto), Ana Paula C. Malfa, Bruno Freitas, Daniela Lima, Gabriela M. Andrade, Heloísa Schiavo, Luciana B. Azevedo, Luiz Gustavo Bazana e Vanessa P. Santos

Arte: Fernanda Costa da Silva (ger.), Erika Tiemi Yamauchi e Kleber de Messas (coord.), Thainá Fidelis Antenucci Cezar (ed. arte), Art Junior Studio e Diagrami (diagramação)

Digital: Daniela Teves Nardi (ger.), Rafael Pereira de Paula Freitas (coord. produção multimídia), Daniella dos Santos Di Nubila (coord. produção digital) e Rogério Fábio Alves (coord. conteúdo digital e publicação)

Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano, Hector Gómez, Luis Moura, Paulo Manzi, Tiago Donizete Leme e WYM Design

Cartografia: Fernanda Costa da Silva (ger.), Eric Fuzii (coord.) e Alexandre Bueno

Design: Fernanda Costa da Silva (ger.), Erik Taketa (coord.), Luis Vassallo (proj. gráfico) e Talita Guedes (capas)

Licenciamentos: Flávio Matuguma

Licenciamento e iconografia: Roberta Bento (ger.), Iron Mantovanello (coord.), Alice Matoso, Claudia Balista, Douglas Cometti, Mariana Valeiro, Paula Squaiella, Roberta Freire, Thaisi Albarracin Lima (pesquisa e licenciamento), Fernanda Crevin (tratamento de imagens), Beatriz Alves dos Santos, Daniel Scucuglia, Ligia Dona, Liliane Rodrigues, Raísa Maris Reina, Sabrina Regina de Marinho e Sueli Ferreira (analista de licenciamento)

Foto de capa: ViDi Studio/stock.adobe.com, sibillin/Shutterstock e Kaspars Grinvalds/Shutterstock

Pré-impressão: Michel Shimamoto (coord.), Alessandro de Oliveira Queiroz, Camilla Félix Cianelli Chaves, Debora Fernandes, Diego Rodrigues de Lima, Fernanda de Oliveira, Lucas Meireles dos Santos e Valmir da Silva Santos

Todos os direitos reservados por Editora Ática S.A.

Alameda Santos, 960, 4º andar, setor 1
Cerqueira César – São Paulo – SP – CEP 01418-002
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
atendimento@aticascipione.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Dante, Luiz Roberto
Do seu jeito : Matemática : área de Matemática e suas Tecnologias : volume 1 : Ensino médio / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2024.

ISBN 978-65-2670-270-3 – aluno
ISBN 978-65-2670-271-0 – professor

1. Matemática (Ensino médio) I. Viana, Fernando

CDD 510.7

24-4414

Angélica Ilacqua - Bibliotecária - CRB-8/7057

2024
Código da obra CL 721782
CAE 876642 (AL) / 876643 (PR)
1ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Envidamos nossos melhores esforços para localizar e indicar adequadamente os créditos dos textos e imagens presentes nesta obra didática. Colocamo-nos à disposição para avaliação de eventuais irregularidades ou omissões de créditos e consequente correção nas próximas edições. As imagens e os textos constantes nesta obra que, eventualmente, reproduzam algum tipo de material de publicidade ou propaganda, ou a ele façam alusão, são aplicados para fins didáticos e não representam recomendação ou incentivo ao consumo.

Impressão e acabamento

Apresentação

Querido estudante,

Ao elaborar esta coleção de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, consideramos o que há de mais moderno no processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento.

Nosso objetivo com a coleção é proporcionar a você condições necessárias para compreender e aplicar as principais ideias e ferramentas da Matemática no seu nível de ensino, atribuindo-lhes significado e possibilitando a resolução de problemas do mundo real. Além disso, a coleção foi concebida de modo a dar espaço para que você escolha os próprios meios de aprender e de ser protagonista do seu processo de aprendizagem, desenvolvendo a educação de maneira integral.

Todos os conceitos essenciais, próprios do Ensino Médio, foram explorados ao longo dos Volumes de maneira simples, intuitiva e compreensível para sua aprendizagem. As resoluções mecanizadas e o formalismo excessivo foram evitados; mantivemos, porém, o rigor necessário, coerente com o nível para o qual a coleção é proposta.

Na abertura de cada Unidade, apresentamos uma imagem relacionada aos conteúdos que você vai estudar, com o objetivo de lhe dar uma percepção de alguns dos temas que estarão presentes. Esperamos que isso instigue sua curiosidade!

Em seguida, em cada capítulo, há situações contextualizadas e, muitas vezes, integradas, que expressam os conteúdos e temas estudados. Nelas você pode analisar e investigar a utilização da Matemática de maneira simples, espontânea e eficiente, além de refletir sobre a presença e a importância dela no cotidiano.

No decorrer de cada capítulo, apresentamos textos, atividades e problemas significativos, que abordam fatos históricos e contextualizam a construção dos conteúdos estudados, bem como expõem e promovem a resolução de problemas relacionados a situações reais ou a outras áreas do conhecimento, explorando as tecnologias digitais – tão presentes em nossa vida – para proporcionar o desenvolvimento do pensamento computacional.

Desse modo, esta coleção de Matemática engloba todas as competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como as competências específicas e as habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias previstas para o Ensino Médio.

Sugestões e críticas para o aprimoramento deste trabalho serão sempre consideradas. Seja muito bem-vindo ao estudo da Matemática e suas Tecnologias que esta coleção lhe proporciona!

Forte abraço,

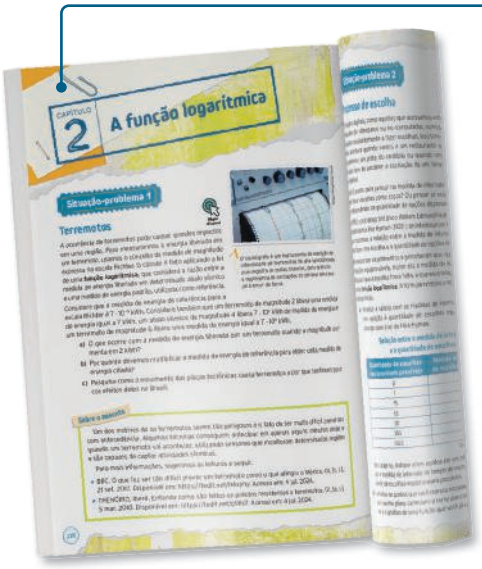
Os autores

Conheça seu livro

Este Volume está organizado em Unidades e capítulos. Nele você encontrará textos, boxes e seções. Conheça a seguir a estrutura deste Volume.

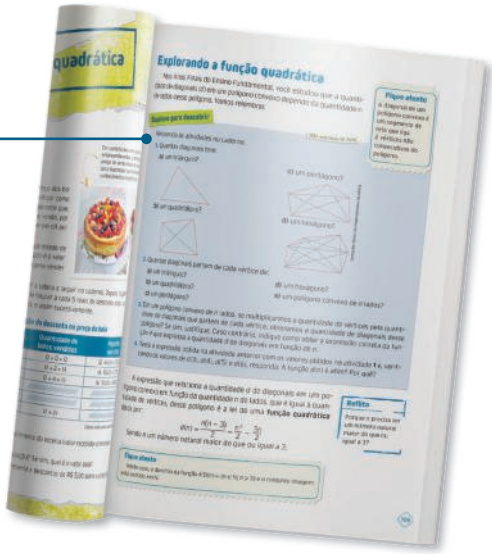
UNIDADE

Na **abertura** de cada Unidade, apresentamos uma imagem relacionada a um ou mais conteúdos ou temas abordados no decorrer dela. O texto e as questões apresentados propõem reflexões sobre os assuntos da Unidade e buscam introduzir, direta ou indiretamente, os conteúdos que serão estudados.



CAPÍTULO

Na **abertura** de cada capítulo, você encontra algumas **situações-problema** e questões relacionadas a elas que permitem investigações e explorações, preparando-o para os conteúdos do capítulo.



EXPLORE PARA DESCOBRIR

Atividades de exploração, experimentação, verificação e sistematização dos conteúdos apresentados no capítulo são indicadas nesse boxe, possibilitando que você formule ideias e crie estratégias de compreensão e de resolução de problemas.

FIQUE ATENTO

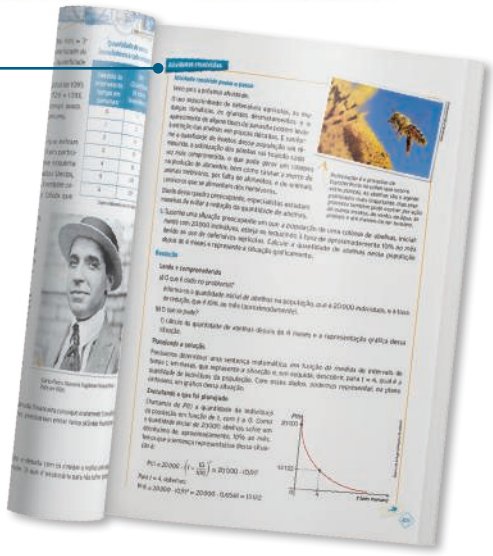
Boxe em que retomamos definições ou nomenclaturas, destacamos pontos importantes do conteúdo em estudo e apresentamos dicas que podem auxiliá-lo no seu estudo.

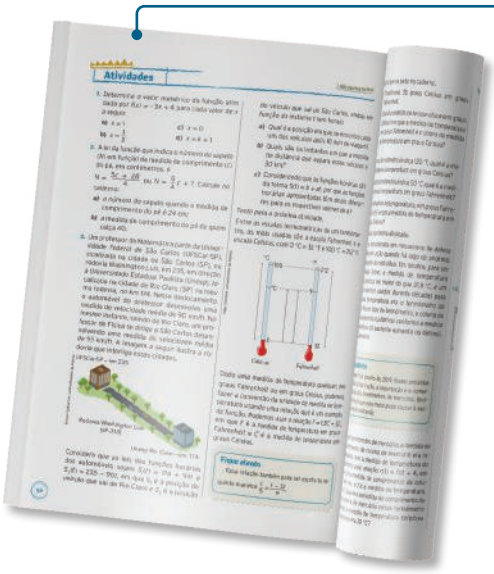
REFLITA

Questionamentos e reflexões sobre o conteúdo apresentado são propostos nesse boxe.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

Acompanhe a resolução detalhada de atividades e problemas, bem como exemplificações de estratégias de resolução e o passo a passo da resolução de um problema.



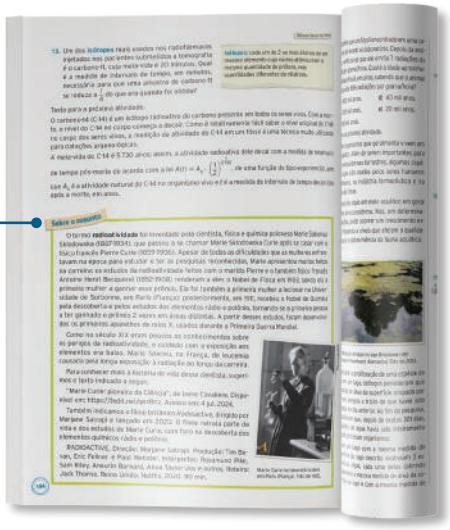


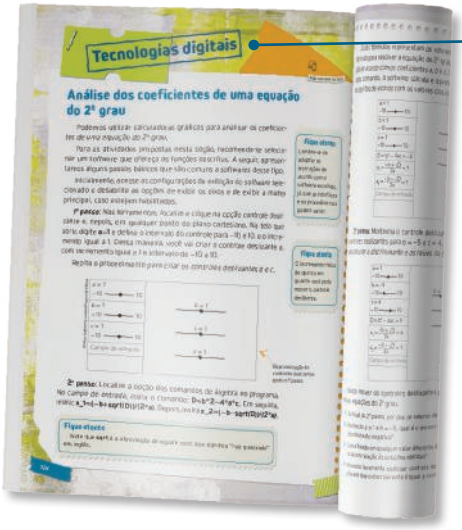
ATIVIDADES

Aqui você encontra atividades e problemas envolvendo contextos cotidianos, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, para você aplicar e aprofundar os conteúdos estudados. Há também atividades que visam à elaboração de perguntas e problemas.

SOBRE O ASSUNTO

Indicamos nesse boxe informações e curiosidades relacionadas aos conteúdos estudados, bem como sugestões de textos, vídeos, simuladores, museus, visitas, entre outros, para complementar e aprofundar seus estudos ou mesmo realizar pesquisas.





TECNOLOGIAS DIGITAIS

Nessa seção, propomos a utilização de diversas tecnologias, como calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* livres. Elas são muito úteis para fazer explorações e simulações de figuras geométricas, calcular medidas estatísticas, construir e manipular representações gráficas, organizar dados em planilhas, entre outras muitas utilidades.

CONEXÕES

Temas relevantes e atuais que relacionam diferentes áreas do conhecimento são explorados na seção. Apresentamos uma seleção de atividades que oferecem oportunidades de interpretação de textos e imagens, podendo incluir aplicação, pesquisa, ampliação e debate do tema da seção.

ALÉM DA SALA DE AULA

Nessa seção, propomos diferentes projetos interdisciplinares a serem compartilhados com a comunidade escolar. Cada projeto oferece mais de uma possibilidade de produto final, permitindo que você tenha autonomia para escolher a proposta mais relevante de acordo com sua realidade e seus objetivos.

ENEM E VESTIBULARES

Aqui propomos questões recentes e diversificadas do Enem e de vestibulares de todas as regiões do Brasil relacionadas aos conteúdos estudados no capítulo.

CONTEÚDOS E APRENDIZAGENS

Nessa seção, os principais conceitos estudados na Unidade são reapresentados de modo visual, atrativo e organizado. Em seguida, são propostas perguntas para que você reflita sobre o próprio aprendizado.

ÍCONES

Os ícones que acompanham algumas atividades e seções indicam a oportunidade de você explorar questões de Educação financeira, utilizar tecnologias digitais durante seu aprendizado, realizar as propostas coletivamente em dupla ou em grupo, além de expor oralmente suas respostas e opiniões.

Educação financeira | **Tecnologias digitais** | **Dupla** | **Grupo** | **Oral**

Sumário

O trabalho com a BNCC 11

Unidade 1: Conjuntos e função afim 12

Capítulo 1: Conjuntos 14

A noção de conjunto e os conjuntos numéricos 16

Explorando a noção de conjunto 17

Formalizando o conceito de conjunto 17

Conjuntos numéricos 18

- O conjunto dos números naturais 18
- O conjunto dos números inteiros 19
- O conjunto dos números racionais 20
- O conjunto dos números irracionais 22
- O conjunto dos números reais 23

Relação de inclusão entre conjuntos 26

Operações com conjuntos 27

- União ou reunião de conjuntos 27
- Intersecção de conjuntos 28
- Diferença entre conjuntos 29

Complementar de um conjunto 30

Número de elementos da união de conjuntos 30

Conexões: Armazenamento de dados na nuvem 33

Capítulo 2: A ideia de função 35

Explorando a ideia de função 37

Formalizando a ideia de função 40

- A ideia de função por meio de conjuntos 40
- Definição e notação de função 41
- Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função 42

Gráfico de funções 43

Formalizando os conceitos de função injetiva, função sobrejetiva e função bijetiva 44

- Função injetiva 44
- Função sobrejetiva 45
- Função bijetiva ou correspondência biunívoca 46

Explorando a ideia de função inversa 47

Formalizando a definição de função inversa 47

Capítulo 3: A função afim 51

Um pouco da história das funções 52

Explorando a função afim 53

Formalizando a definição de função afim 54

Valor de uma função afim 55

- Valor inicial 55

Taxa de variação média da função afim 58

- Propriedade 59

Tecnologias digitais: Construção do gráfico da função afim 64

Gráfico da função afim 67

Tecnologias digitais: Análise dos coeficientes da função afim 69

- Traçado do gráfico da função afim 70

Conexões: A função afim e as flautas rikbaktsas 77

Função linear e proporcionalidade 79

Zero da função afim 83

- Interpretação geométrica 83

Estudo do sinal da função afim 84

Além da sala de aula: Edifícios sustentáveis 87

Capítulo 4: Funções definidas por mais de uma sentença 90

Explorando a função definida por mais de uma sentença 91

Formalizando o conceito de função definida por mais de uma sentença 92

Gráfico da função definida por mais de uma sentença 95

Tecnologias digitais: Construção do gráfico da função definida por mais de uma sentença 97

Enem e vestibulares 102

Conteúdos e aprendizagens 105

Unidade 2: Função quadrática 106

Capítulo 1: A função quadrática 108

Explorando a função quadrática 109

Formalizando a definição de função quadrática 110

Valor ou imagem da função quadrática em um ponto 111

Conexões: Funcionamento de um chuveiro elétrico 112

Explorando as raízes de uma equação do 2º grau 114

Formalizando o conceito de zeros de uma função quadrática 115

Determinação das raízes de uma equação do 2º grau 115

Tecnologias digitais: Análise dos coeficientes de uma equação do 2º grau 124

Capítulo 2: Análises algébrica e gráfica da função quadrática 126

Explorando o gráfico da função quadrática 128

Formalizando o gráfico da função quadrática 129

Tecnologias digitais: Construção do gráfico de uma função quadrática 130

Construção do gráfico de uma função quadrática 134

Características da função definida por $f(x) = ax^2$, com a real e $a \neq 0$ 135

Características da função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$ 138

Características da função definida por $f(x) = ax^2 + k$, com a e k reais e $a \neq 0$ 144

Vértice da parábola, conjunto imagem e valor máximo ou mínimo da função quadrática 146

Além da sala de aula: Funções lineares e funções quadráticas na cultura de berinjela 152

Enem e vestibulares 155

Conteúdos e aprendizagens 157

Unidade 3: Função exponencial 158

Capítulo 1: Potenciação e radiciação 160

Explorando a operação de potenciação 162

Formalizando a operação de potenciação 163

Potência com expoente natural 163

Potência com expoente inteiro 165

Potência com expoente racional 165

Potência com expoente irracional 167

Potência com expoente real 167

Formalizando o conceito de notação científica 168

Algarismos significativos em medidas 171

Explorando a operação de radiciação 173

Um pouco da história da radiciação 173

Formalizando a operação de radiciação 174

Conexões: Os Palikur e os métodos de medição 179

Capítulo 2: A função exponencial 181

Formalizando a definição de função exponencial 182

Tecnologias digitais: Construção do gráfico de uma função exponencial 183

Gráfico da função exponencial 185

Algumas características da função exponencial 186

Ampliando a ideia de função exponencial 190

Tecnologias digitais: Influência dos coeficientes *a*, *b* e *c* em funções do tipo $f(x) = b \cdot a^x + c$ 196

Conexões: Golpes em investimentos financeiros 198

Além da sala de aula: Anticoncepcional e meia-vida 204

Enem e vestibulares 206

Conteúdos e aprendizagens 209

Unidade 4: Função logarítmica 210

Capítulo 1: Logaritmo 212

Explorando a resolução de equações exponenciais 213

Formalizando o conceito de logaritmo de um número 213

- Consequências da definição de logaritmo 215
- Propriedades operatórias dos logaritmos 217
- Mudança de base de um logaritmo 219

Capítulo 2: A função logarítmica 226

Formalizando a definição de função logarítmica 228

- **Tecnologias digitais: Construção do gráfico de uma função logarítmica** 230

Gráfico da função logarítmica 234

Algumas características da função logarítmica 236

- **Além da sala de aula: Poluição sonora** 242

Enem e vestibulares 246

Conteúdos e aprendizagens 249

Unidade 5: Sequências e progressões 250

Capítulo 1: Sequências 252

Explorando a ideia de sequência 253

Formalizando a definição de sequência como uma função 254

Capítulo 2: Progressão aritmética 258

Formalizando o conceito de progressão aritmética 260

Explorando o termo geral de uma progressão aritmética 261

Formalizando a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética 261

Progressão aritmética e função 268

Explorando a soma dos termos de uma progressão aritmética finita 269

Formalizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética finita 271

Capítulo 3: Progressão geométrica 273

Formalizando o conceito de progressão geométrica 274

Explorando o termo geral de uma progressão geométrica 275

Formalizando a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica 275

Progressão geométrica e função 279

Explorando a soma dos termos de uma progressão geométrica finita 281

Formalizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica finita 281

- **Conexões: Os boatos e as *fake news*** 283

Um pouco da história das progressões geométricas 286

Explorando a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita 288

Formalizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita 289

Enem e vestibulares 291

Conteúdos e aprendizagens 293

Respostas 294

Lista de siglas 306

Referências bibliográficas comentadas 307

Transcrição de áudios 310

Objetos Educacionais Digitais (OEDs)

Armazenamento em nuvem 33

Funções 37

Modelagem de situações por funções 54

Alguns dos pontos mais altos do Brasil 63

Flautas musicais 77

Danças 127

Raízes quadradas 161

Notação científica 168

IST – Infecções Sexualmente Transmissíveis 169

Prática de pesquisa 170

Indicadores ácido-base 224

Os principais terremotos da História 226

Transcrição de áudios 310

O trabalho com a BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece o que cada estudante precisa aprender em cada etapa da Educação Básica, de maneira a estabelecer um currículo básico comum a todos os estudantes brasileiros.

Com o propósito de estabelecer uma educação de qualidade e com equidade, a BNCC foi elaborada considerando critérios claros, focados nos conhecimentos e nas habilidades essenciais para o desenvolvimento dos estudantes na sociedade do século XXI.

Nesta coleção, trabalhamos ao longo dos 3 Volumes todas as competências e habilidades da BNCC e os Temas Contemporâneos Transversais. A seguir apresentamos aqueles que são trabalhados em cada Unidade deste Volume.

Para conhecer os textos correspondentes aos códigos indicados, consulte o documento oficial disponível em: https://tedit.net/pot336 (acesso em: 4 ago. 2024).

Volume 1				
Unidade	**Competência geral da Educação Básica (CG)**	**Competência específica de Matemática e suas Tecnologias (CEMAT)**	**Habilidade de Matemática e suas Tecnologias (EM13MAT)**	**Tema Contemporâneo Transversal (TCT)**
Unidade 1	CG01, CG03, CG04, CG05, CG07, CG09	CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05	EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT302, EM13MAT314, EM13MAT315, EM13MAT401, EM13MAT404, EM13MAT407, EM13MAT501, EM13MAT506, EM13MAT510	*Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Alimentar e Nutricional*; *Educação Ambiental*; *Educação Financeira*; *Educação Fiscal*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Saúde*
Unidade 2	CG01, CG02, CG04, CG09	CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05	EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT314, EM13MAT315, EM13MAT402, EM13MAT502, EM13MAT503, EM13MAT506	*Ciência e Tecnologia*; *Educação Alimentar e Nutricional*; *Educação Ambiental*; *Educação para o Consumo*; *Saúde*
Unidade 3	CG01, CG02, CG04, CG09	CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05	EM13MAT101, EM13MAT102, EM13MAT103, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT304, EM13MAT305, EM13MAT308, EM13MAT313, EM13MAT314, EM13MAT316, EM13MAT403, EM13MAT406, EM13MAT407, EM13MAT510, EM13MAT511	*Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Ambiental*; *Educação Financeira*; *Educação Fiscal*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Saúde*; *Vida Familiar e Social*
Unidade 4	CG01, CG02, CG04, CG09	CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05	EM13MAT101, EM13MAT102, EM13MAT103, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT304, EM13MAT305, EM13MAT308, EM13MAT313, EM13MAT314, EM13MAT316, EM13MAT403, EM13MAT406, EM13MAT407, EM13MAT510, EM13MAT511	*Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Ambiental*; *Educação Financeira*; *Educação Fiscal*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Vida Familiar e Social*; *Saúde*
Unidade 5	CG01, CG02, CG04, CG09	CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05	EM13MAT103, EM13MAT311, EM13MAT314, EM13MAT315, EM13MAT401, EM13MAT405, EM13MAT507, EM13MAT508	*Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Ambiental*; *Educação Financeira*; *Educação Fiscal*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Saúde*; *Vida Familiar e Social*

UNIDADE 1

Conjuntos e função afim

Do total de água doce superficial do planeta, 12% estão em território brasileiro. Essa característica permite ao país figurar entre os países com as maiores hidrelétricas do mundo, destacando-se as usinas nacionais de Tucuruí e Belo Monte, além da usina binacional de Itaipu, que pertence ao Brasil e ao Paraguai. Em 2023, Itaipu foi classificada como a segunda maior usina geradora de energia limpa e renovável do planeta, sendo que a primeira é a usina Três Gargantas, localizada na China.

Fonte dos dados: ITAIPU BINACIONAL. Disponível em: https://tedit.net/fr5ul9. FLIPAR. Brasil tem 3 das 10 maiores hidrelétricas do mundo! Veja o *ranking*. *Correio Braziliense*, Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://tedit.net/yvzo0y. Acesso em: 22 jul. 2024.

Imagem da estrutura de concreto da represa da Hidrelétrica Itaipu Binacional e do fluxo de água passando pelas comportas abertas, em Foz do Iguaçu (PR). A Usina Hidrelétrica de Itaipu é produtora de energia limpa e renovável e pertence ao Brasil e ao Paraguai. Foto de 2023.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta abertura encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Professor, ressalte para os estudantes que os dados apresentados na tabela são uma estimativa. Isso significa que eles são fundamentados na análise de evidências atuais e, por isso, podem estar sujeitos a alterações no futuro.

Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

JHVEPhoto/Alamy/Fotoarena

- No caderno, faça um esquema para organizar as usinas citadas no texto de acordo com o país ao qual elas pertencem.
- No ano de 2023, a Itaipu Binacional produziu aproximadamente 84 000 GWh. Considerando essa produção energética anual, vamos estimar a produção energética acumulada de Itaipu nos 10 anos seguintes a 2023.

  Para isso, copie e complete a tabela a seguir no caderno, considerando 2023 o ano zero. Depois, converse com os colegas sobre cada item.

Estimativa da produção energética acumulada de Itaipu

Ano após 2023	Produção acumulada a partir de 2023 (em GWh)	Proporção entre a produção acumulada e a quantidade inicial (2023)
0 (2023)	84 000	1
1 (2024)	168 000	2
2	252 000	3
3	336 000	4
4		5
	504 000	
		7
		8
		9
9		
10		

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual. Dados elaborados para fins didáticos.

CAPÍTULO 1

Conjuntos

Situação-problema 1

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Esta situação-problema **1** favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Alimentar e Nutricional*.

Lbecks/Shutterstock

Julia Khvoshch/Alamy/Fotoarena

Pastel integral e salada de frutas são opções saudáveis de lanches.

Alimentação saudável

Buscando oferecer uma alimentação saudável, uma escola fez uma pesquisa com os estudantes para descobrir a preferência deles entre salada de frutas ou pastel integral de batata-doce. A nutricionista responsável decidiu que um mesmo estudante poderia responder que gosta de apenas 1 alimento ou dos 2, porém não fez essa diferenciação nas anotações. A pesquisa foi feita com 100 estudantes, dos quais 50 responderam que gostavam de salada de frutas e 80 gostavam de pastel integral. Todos escolheram ao menos 1 das opções.

Em uma pesquisa de opinião, pode ocorrer de o entrevistado ter mais de uma preferência. Isso significa que responder que gosta de algo não exclui a possibilidade de gostar de mais de uma coisa. Nesses casos, como podemos determinar a quantidade de pessoas para cada possibilidade de resposta? Para interpretar os resultados em situações como essa, podemos utilizar a **teoria dos conjuntos**.

a) O que você percebe considerando o total de respostas obtidas em relação ao total de estudantes?
A quantidade de respostas (50 + 80 = 130) é maior do que a quantidade total de estudantes (100).

b) Analisando os dados apresentados, quantos estudantes escolheram as 2 opções?
130 − 100 = 30; logo, 30 estudantes.

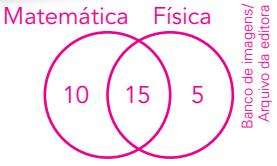
c) Converse com os colegas sobre quais estratégias vocês usaram para descobrir, considerando os dados obtidos, a quantidade de estudantes que preferem apenas salada de frutas, quantos preferem apenas o pastel integral de batata-doce e quantos gostam das 2 opções de lanche.
Resposta pessoal.

Situação-problema 2

Rawpixel.com/Shutterstock

Estudantes organizando uma feira de Ciências.

a) Exemplo de resposta: Organização em um diagrama de Venn.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Feira de Ciências

Os estudantes do Ensino Médio de uma escola decidiram realizar uma feira de Ciências com 2 destaques: Matemática e Física. Em uma turma, 25 estudantes vão participar da feira na parte de Matemática, 20 vão participar na parte de Física e, entre todos eles, 15 se inscreveram nas 2 partes. A **teoria dos conjuntos** considera que, se um mesmo estudante participará da feira nas partes de Matemática e de Física, ele também deve ser contado entre aqueles que participarão das feiras na parte de Matemática e na parte de Física separadamente, além daqueles que participarão de apenas 1 dessas opções.

a) Pense um pouco sobre essa situação-problema e, no caderno, utilize um esquema para representar as quantidades de estudantes que vão participar da feira apenas na parte de Matemática, apenas na parte de Física e em ambas as partes.

b) Utilize o esquema que você construiu e responda: Qual é a quantidade total de inscritos para a feira? 10 + 15 + 5 = 30; logo, 30 estudantes.

c) Considerando que 3 estudantes não vão participar da feira, qual é a quantidade de estudantes da turma? 30 + 3 = 33; logo, 33 estudantes.

Professor, ressalte aos estudantes que as balanças de cozinha e as balanças disponíveis para uso em farmácias, por exemplo, medem a massa de um objeto, geralmente expressa pelas unidades de medida quilograma (kg) e/ou grama (g); e que peso, comumente confundido com massa, refere-se à ação da força da gravidade terrestre sobre a massa de um objeto e é expressa, geralmente, em newton (N).

A noção de conjunto e os conjuntos numéricos

Usamos os números para contar, medir, ordenar ou codificar em diferentes situações. Neste capítulo, vamos recordar e aprofundar o que você já estudou sobre alguns conjuntos numéricos: dos números naturais ($\mathbb{N}$), dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), dos números racionais ($\mathbb{Q}$) e dos números reais ($\mathbb{R}$). Você também conhecerá um pouco a linguagem dos conjuntos.

Dirceu Portugal/Fotoarena

Na caixa de um quebra-cabeça, é possível identificar a quantidade de peças sem ter que abri-la.

As imagens não estão representadas em proporção.

Balanças de cozinha são úteis para medir a massa de alimentos em gramas ou quilogramas.

TanyaLovus/Shutterstock

Karim SAHIB/AFP

Rayssa Leal celebra o 1º lugar feminino no Mundial de *Skate Street* de 2023, em Sharjah (Emirados Árabes).

A numeração da camisa no vôlei é usada para identificar e codificar as jogadoras. Foto de 2022.

EvrenKalinbacak/Shutterstock

Reflita

Não escreva no livro

Em quais outras situações você usa números? Troque ideias com um colega.

Resposta pessoal.

Professor, ao apresentar o diagrama de Venn, caso perceba a necessidade, explique aos estudantes que curvas entrelaçadas são aquelas em que o contorno passa por cima dele mesmo. Além disso, comente que podemos representar cada um dos elementos em um diagrama de Venn ou apenas representar a quantidade de elementos de cada conjunto.

Explorando a noção de conjunto

A seguir, explore uma situação matemática que envolve conjuntos.

Explore para descobrir

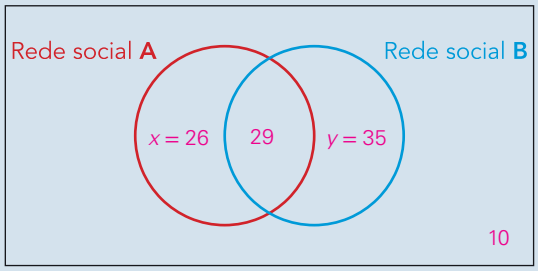
1. Considere x o número de pessoas que acessam apenas a rede social **A** e y o número de pessoas que acessam apenas a rede social **B**.

Não escreva no livro

1. Imagine que uma pesquisa tenha sido realizada com 100 pessoas de uma cidade para estudar o uso de redes sociais na sociedade. Dos entrevistados, 55 têm conta na rede social **A** e 64 têm conta na rede social **B**. A pesquisa também revelou que 29 pessoas utilizam as 2 redes sociais e que 10 pessoas não participam de nenhuma delas.

a) Organize os dados dessa pesquisa copiando e completando o esquema a seguir no caderno. Se quiser, utilize incógnitas para indicar os valores desconhecidos.

Pessoas entrevistadas



WYM Design/Arquivo da editora

Fique atento

Esse esquema é uma maneira de representar conjuntos usando curvas fechadas não entrelaçadas e é chamado de **diagrama de Venn**, em homenagem ao criador dele, o matemático inglês John Venn (1834-1923).

b) Utilize o esquema para calcular quantas pessoas acessam apenas a rede social **A**.
$x + 29 = 55 \Rightarrow x = 55 - 29 \Rightarrow x = 26$; logo, 26 pessoas.

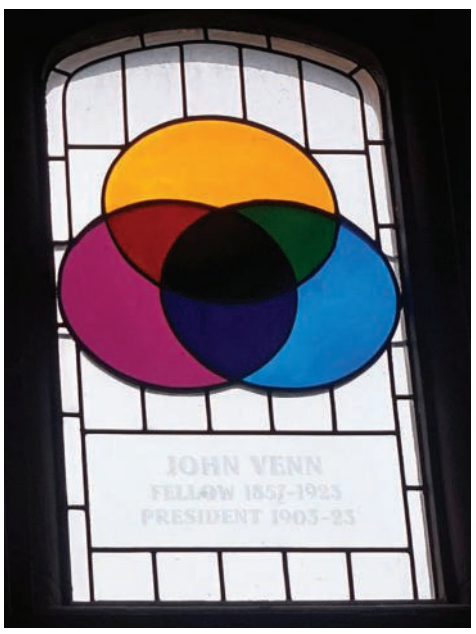
c) Utilize o esquema para calcular quantas pessoas acessam apenas a rede social **B**.
$y + 29 = 64 \Rightarrow y = 64 - 29 \Rightarrow y = 35$; logo, 35 pessoas.

d) Refaça o esquema no caderno indicando os valores desconhecidos.

e) Verifique os resultados dos itens anteriores calculando a soma do total de pessoas indicado no esquema. $26 + 29 + 35 + 10 = 100$

Formalizando o conceito de conjunto

Na situação do *Explore para descobrir*, se considerarmos que o conjunto A é o conjunto das pessoas que acessam a rede social **A**, cada pessoa desse conjunto é um **elemento**. A notação utilizada para indicar o **número de elementos** de um conjunto A é $n(A)$. Então, $n(A) = 55$.



Heidi Meyer/Acervo da fotógrafa

Uma das janelas da Faculdade de Gonville e Caius (na Universidade de Cambridge, Inglaterra) homenageia John Venn, que foi estudante e professor dessa instituição. Foto de 2016.

Acompanhe exemplos de como utilizar essa notação.

a) Sendo $B = \{x, y, z\}$, podemos dizer que $n(B) = 3$.

b) O conjunto M dos números pares de 1 a 10 é $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Podemos dizer que $n(M) = 5$.

c) O conjunto D dos números primos de 1 a 10 é $D = \{2, 3, 5, 7\}$. Podemos dizer que $n(D) = 4$.

Um objeto x qualquer pode ser elemento de determinado conjunto A. Nesse caso, dizemos que x **pertence** a A e escrevemos $x \in A$. Considerando que y não é um elemento do conjunto A, dizemos que y **não pertence** a A e escrevemos $y \notin A$.

Professor, assim como no sinal de diferente (≠), o traço oblíquo (/) que cruza o sinal correspondente a "**não** pertence" indica uma negação.

Analise a seguir exemplos dessa notação.

a) Sendo $B = \{x, y, z\}$, podemos escrever $x \in B$ e $m \notin B$.

b) Sendo $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, podemos escrever $6 \in M$ e $20 \notin M$.

c) Sendo $D = \{2, 3, 5, 7\}$, podemos dizer que $7 \in D$ e $10 \notin D$.

Um conjunto A pode ser **subconjunto** de determinado conjunto B se todo elemento de A também for elemento de B. Indicamos assim: $A \subset B$. (Lê-se "A é um subconjunto de B", ou "A está contido em B", ou "A é parte de B".)

Já quando pelo menos um dos elementos de A não pertence simultaneamente a B, ou seja, quando A não é subconjunto de B, indicamos assim: $A \not\subset B$.

Acompanhe os exemplos.

a) Sendo $B = \{x, y, z\}$, $C = \{x, y\}$ e $D = \{a, y\}$, podemos escrever $C \subset B$ e $D \not\subset B$.

b) Sendo $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $N = \{2, 8, 10\}$, podemos escrever $N \subset M$.

Conjuntos numéricos

O conjunto dos números naturais

Os números naturais surgiram da necessidade de contar elementos. O **conjunto dos números naturais** ($\mathbb{N}$) é representado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$$

O 1º elemento desse conjunto é o número 0. O **sucessor** do 0 é o 1, o sucessor do 1 é o 2, e assim por diante. Representa-se o sucessor de um número natural qualquer n por $n + 1$. Como sempre podemos obter o sucessor de um número natural, dizemos que o conjunto dos números naturais é **infinito**, isto é, tem uma quantidade infinita de elementos. Tal fato é representado pelas reticências (...) no final da representação dos elementos desse conjunto.

Atualmente, além das contagens, os números naturais são usados nos códigos, nas ordenações e, também, para expressar medidas de grandezas.

Fique atento

- $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais, pois a letra **N** é a inicial das palavras **número** e **natural**.
- Os números naturais constituem o modelo matemático para a contagem.

Professor, se julgar oportuno, relembre com os estudantes alguns exemplos de situações em que os números são utilizados: 225 milhões de habitantes (contagem); o Código de Endereçamento Postal (CEP) da cidade de Bujari, no Acre, é 69926-000 (código); segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o 1º estado brasileiro em medida de área é o Amazonas e o 2º é o Pará (ordenação); 8 horas (medidas de grandezas).

Reflita

Não escreva no livro

- Qualquer número natural tem um único sucessor? Sim.
- Números naturais diferentes têm sucessores diferentes? Sim.
- O número 0 é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro? Sim.
- Existe um número natural que é maior do que todos os outros? Não.

Um subconjunto importante de $\mathbb{N}$ é o conjunto $\mathbb{N}^*$, obtido excluindo-se o número 0 de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

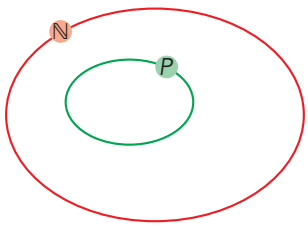
Outro subconjunto de $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais pares (P):

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$$

Ou:

$$P = \{2n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

Indicamos assim: $P \subset \mathbb{N}$. (Lê-se "P é um subconjunto de $\mathbb{N}$", ou "P está contido em $\mathbb{N}$", ou "P é parte de $\mathbb{N}$".)



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Em $\mathbb{N}$ é sempre possível efetuar a adição e a multiplicação, ou seja, a soma e o produto de 2 números naturais sempre resultam em um número natural. Já a subtração de 2 números nem sempre é possível no conjunto dos números naturais; $3 - 4$, por exemplo, não resulta em um número natural. Daí a necessidade de ampliar o conjunto $\mathbb{N}$ introduzindo-se os números negativos e criando outro conjunto.

Fique atento

Sempre que queremos excluir o 0 de um conjunto, colocamos o asterisco (*) no símbolo que o representa, por exemplo, $\mathbb{N}^*$.

Professor, ressalte para os estudantes que os conjuntos representados $\mathbb{N}$ e P têm infinitos elementos, apesar de, aqui, serem representados por regiões limitadas no plano. Se achar oportuno, para abordar a questão, proponha o seguinte desafio: "Quem tem mais elementos: $\mathbb{N}$ ou P?". É esperado que os estudantes percebam que comparar conjuntos com infinitos elementos é uma questão complexa e que ambos os conjuntos são compostos de infinitos elementos.

O conjunto dos números inteiros

Reunindo os números naturais e os números inteiros negativos, obtemos o **conjunto dos números inteiros** ($\mathbb{Z}$), que é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Fique atento

A letra **Z** é inicial da palavra *Zahl*, que significa "número" em alemão.

Os números inteiros também são utilizados para indicar medidas de algumas grandezas, como a temperatura.

Pedro Moraes/Shutterstock

Termômetro de rua indicando a medida de temperatura –2 °C na cidade de Curitiba (PR). Foto de 2021.

Não escreva no livro

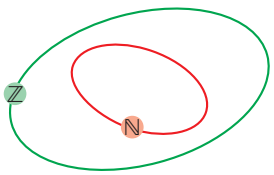
Reflita

Você conhece uma grandeza, além da temperatura, que para ser medida necessita do uso dos números inteiros?

Exemplo de resposta: Carga elétrica e força peso.

Destacamos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

- $\mathbb{N}$, pois $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Acompanhe a representação no diagrama.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Reflita

- Existe número natural que não é inteiro?

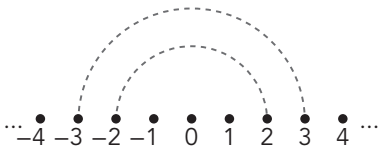
Não, todo número natural é inteiro.

- Existe número inteiro que não é natural?

Sim, os números inteiros negativos não são números naturais.

- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ ou $\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

Na representação a seguir, perceba que há uma simetria em relação ao 0.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

O **oposto** ou **simétrico** de 3 é –3, bem como o oposto de –3 é 3. Podemos escrever:

$$3 + (-3) = -3 + 3 = 0$$

No conjunto $\mathbb{Z}$ é sempre possível efetuar a adição, a multiplicação e a subtração, ou seja, a soma, o produto e a diferença de 2 números inteiros resultam sempre em um número inteiro. E todas as propriedades das operações em $\mathbb{N}$ continuam válidas em $\mathbb{Z}$.

Já a divisão de 2 números inteiros nem sempre resulta em um número inteiro. Acompanhe alguns exemplos:

a) $(-8) \div (+2) = -4 \rightarrow$ é possível em $\mathbb{Z}$.

b) $(-7) \div (+2) = ? \rightarrow$ não é possível em $\mathbb{Z}$.

Assim, foi necessário ampliar o conjunto $\mathbb{Z}$ criando outro conjunto.

O conjunto dos números racionais

Ao acrescentarmos as frações não aparentes positivas ou negativas ao conjunto $\mathbb{Z}$, obtemos o **conjunto dos números racionais** ($\mathbb{Q}$). São exemplos de números racionais:

$$-2,\ -\frac{3}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1,\ \frac{5}{3},\ 2,\ \text{etc.}$$

Fique atento

- A designação **racional** surgiu porque $\frac{a}{b}$ é uma razão entre os inteiros a e b, com $b \neq 0$. A letra **Q**, que representa o conjunto dos números racionais, é a primeira letra da palavra **quociente**.
- Fração aparente é aquela que indica um número inteiro. Por exemplo:

$$\frac{12}{4} = 3;\ -\frac{8}{2} = -4;\ \text{etc.}$$

Perceba que todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Acompanhe os exemplos.

$$-2 = -\frac{6}{3} \quad 1 = \frac{2}{2} \quad 2 = \frac{10}{5} \quad -\frac{3}{4} \quad \frac{2}{3} \quad 0 = \frac{0}{2}, \text{ etc.}$$

Podemos, então, escrever:

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de 0.

Simbolicamente, indicamos assim:

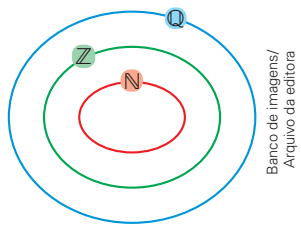
$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

lê-se "tal que"

A restrição $b \neq 0$ é necessária, pois $\frac{a}{b}$, divisão de a por b, só tem significado se b não for 0.

Se $b = 1$, temos $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$, o que implica que $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, temos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Professor, incentive os estudantes a relacionarem a linguagem usual com a linguagem simbólica. Por exemplo, $a \in \mathbb{Z}$ significa "a pertence ao conjunto dos números inteiros", ou seja, "a é um número inteiro".

Agora, com os números racionais, podemos efetuar divisões que eram impossíveis só com números inteiros.

Acompanhe os exemplos.

a) $17 : 9 = \frac{17}{9}$, ou $1\frac{8}{9}$, ou $1,\overline{8}$, ou 1,888...

b) $(-7) : (+2) = \frac{-7}{+2} = \frac{-35}{+10} = -3,5$

Professor, destaque para os estudantes que, neste caso, as reticências (...) foram usadas para representar um número com infinitas casas decimais. Existem muitas situações em que é utilizada a notação 1,888... para denotar a dízima periódica $1,\overline{8}$. É importante ressaltar que essa representação nem sempre é a mais adequada, uma vez que não fica claro qual é a parte que se repete.

O conjunto dos números irracionais

Por muito tempo, acreditou-se que os números racionais eram suficientes para medir o comprimento de todos os segmentos de reta, ou seja, que todos os segmentos de reta eram **comensuráveis**. Os discípulos de Pitágoras (570 a.C.-497 a.C.), filósofo e matemático grego, também acreditavam nisso, mas foram eles próprios que descobriram que o lado e a diagonal de um quadrado não são segmentos de reta comensuráveis.

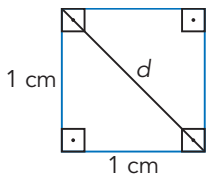
Professor, retome com os estudantes que segmentos de reta comensuráveis se referem a pares de segmentos de reta com medidas de comprimento a e b, respectivamente, sendo que há um segmento de reta de medida de comprimento u tal que a e b são múltiplos de u.

Ao medir o comprimento da diagonal de um quadrado, que é um polígono convexo, cujo lado tem medida de comprimento igual a 1 cm, obtemos um número que não é racional.

Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}$$

Banco de imagens/ Arquivo da editora



Professor, se julgar adequado, nesse momento, proponha o seguinte desafio aos estudantes: "Por que as extremidades da diagonal de um polígono convexo precisam ser consideradas em vértices não consecutivos?". Espera-se que eles percebam que, caso os vértices fossem consecutivos, o segmento de reta que os une seria um dos lados do polígono.

Fique atento

A diagonal de um polígono convexo é o segmento de reta que tem extremidades em 2 vértices não consecutivos do polígono.

Da relação $d = \sqrt{2}$ podemos perguntar: Qual número, elevado ao quadrado, resulta em 2? Com o uso de uma calculadora ou planilha eletrônica, podemos obter parte da representação decimal desse número fazendo aproximações sucessivas.

$\sqrt{2} = ?$ $\begin{cases} 1^2 = 1 \text{ (menor do que 2)} \\ 2^2 = 4 \text{ (maior do que 2)} \end{cases}$ $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2.

$\sqrt{2} = ?$ $\begin{cases} (1{,}4)^2 = 1{,}96 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}5)^2 = 2{,}25 \text{ (maior do que 2)} \end{cases}$ $\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5.

$\sqrt{2} = ?$ $\begin{cases} (1{,}41)^2 = 1{,}9881 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}42)^2 = 2{,}0164 \text{ (maior do que 2)} \end{cases}$ $\sqrt{2}$ está entre 1,41 e 1,42.

Professor, destaque aos estudantes que, quanto mais casas decimais considerarmos nas aproximações sucessivas de $\sqrt{2}$, menor será o erro de nossa aproximação. Assim, $\sqrt{2}$ está mais próximo de 1,4 do que de 1 e mais próximo de 1,41 do que de 1,4.

Professor, se necessário, relembre os estudantes que uma representação decimal exata é aquela em que o número tem uma quantidade finita de casas decimais após a vírgula, já uma dízima periódica é uma representação que tem um padrão de algarismos que se repetem indefinidamente após a vírgula.

Se continuarmos esse processo de aproximações, não chegaremos a uma representação decimal exata nem a uma dízima periódica.

A seguir, demonstraremos que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Supondo que $\sqrt{2}$ pudesse ser um número racional, então ele poderia ser escrito na forma de fração irredutível entre 2 números inteiros a e b, com $b \neq 0$. Dessa maneira, teríamos:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Elevando os 2 membros da igualdade ao quadrado, temos:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2$$

Dessa relação, podemos concluir que o termo a^2 é par e, consequentemente, a também é par.

Como a é par, podemos escrever como $2 \cdot c$, com $c \neq 0$. E, substituindo na relação anterior, obtemos:

$$2b^2 = a^2 \Rightarrow 2b^2 = (2c)^2 \Rightarrow 2b^2 = 4c^2 \Rightarrow b^2 = 2c^2$$

Dessa relação, podemos concluir que o termo b^2 é par e, consequentemente, b também é par.

Mas, se a é par e b também é par, a fração proposta inicialmente não é irredutível, e, com essa contradição, mostramos que $\sqrt{2}$ não pode ser um número racional, ou seja, é irracional.

Os números que não admitem uma representação decimal exata nem uma representação na forma de dízima periódica são chamados **números irracionais**. O número $\sqrt{2}$ é irracional, pois a representação decimal dele apresenta infinitas casas decimais não periódicas.

Há infinitos números irracionais. Alguns exemplos são: $\sqrt{3}$, $-\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{7}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660254$ e π.

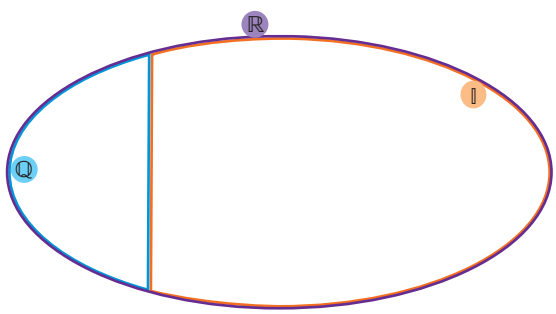
O **conjunto dos números irracionais** é denotado por $\mathbb{I}$.

Professor, caso os estudantes não percebam o porquê da implicação "Se a^2 é par, então a é par", ressalte que o conjunto dos números pares pode ser representado por $P = \{2n;\ n \in \mathbb{N}\}$ e, nesse caso, temos $n = b^2$. Além disso, um número ímpar multiplicado por outro número ímpar sempre vai gerar outro número ímpar (por exemplo, $3 \times 3 = 9$), enquanto um número par pode ser gerado pela multiplicação de 2 números pares ou pela multiplicação de um número par por um ímpar (por exemplo, $2 \times 6 = 6$, $4 \times 2 = 8$). Como o número a está multiplicado por ele mesmo e $2b^2$ é par, então a única possibilidade é que a seja par também.

O conjunto dos números reais

Considerando a união (denotada por $\cup$) do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais, obtemos o **conjunto dos números reais**, que é denotado por $\mathbb{R}$ e está representado no diagrama a seguir.

Professor, o conceito de união é introduzido brevemente para definir o conjunto dos números reais e será definido formalmente mais adiante neste capítulo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, temos:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Os números racionais não são suficientes para "preencher" todos os pontos da reta numérica; contudo, o conjunto $\mathbb{R}$ pode ser entendido como o modelo aritmético de uma reta, enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de $\mathbb{R}$. Isso porque, a cada ponto da reta corresponde um único número real e, reciprocamente, a cada número real corresponde um único ponto da reta.

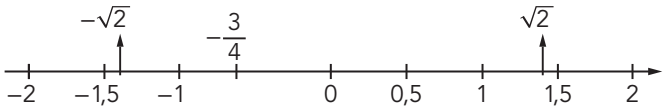
Professor, propomos que faça explorações com os estudantes para que eles percebam que considerando os números reais é possível "preencher" todos os pontos da reta numérica. É interessante comentar o fato de que, entre quaisquer 2 números reais, há sempre outro número real (encontrando o ponto médio entre eles).

Assim, temos a **reta real** orientada, que é representada desta maneira: em uma reta, escolhemos uma origem (e associamos a ela o 0), um sentido de percurso (no geral para a direita) e uma unidade de medida de comprimento.

Por exemplo, considere alguns números naturais, números inteiros, números racionais e números irracionais localizados na reta real a seguir.

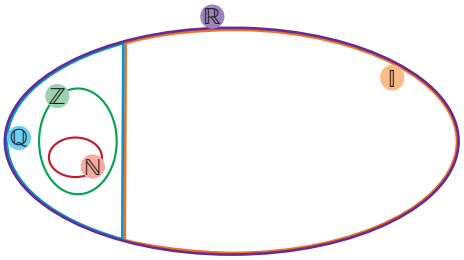
Professor, a localização dos números irracionais, assim como de alguns números racionais, é feita de maneira aproximada na reta real. Por exemplo, o número irracional $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ está localizado, nesta reta real, próximo do ponto correspondente ao número racional 1,4.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora



O diagrama a seguir relaciona os conjuntos numéricos estudados até aqui.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



Professor, quando 2 conjuntos não têm elementos em comum, dizemos que eles são **disjuntos**. Se julgar oportuno, comente com os estudantes que adiante eles vão estudar classificações de conjuntos.

- $\mathbb{N}$ é parte de $\mathbb{Z}$;

  $\mathbb{Z}$ é parte de $\mathbb{Q}$;

  $\mathbb{Q}$ é parte de $\mathbb{R}$.

  Indicamos essas relações por:

  $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- $\mathbb{I}$ é parte de $\mathbb{R}$. Indicamos essa relação assim:

  $$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

- $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ não têm elementos comuns.

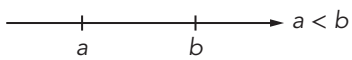
Observação: Com os números reais, toda equação do tipo $x^2 = a$, com $a \in \mathbb{N}$, pode ser resolvida.

Desigualdades entre números reais

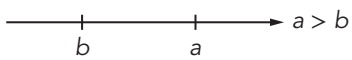
Dados 2 números reais quaisquer a e b, ocorre uma, e somente uma, das seguintes possibilidades:

$$a < b \text{ ou } a = b \text{ ou } a > b$$

Geometricamente, a desigualdade $a < b$ significa que a está à esquerda de b na reta real orientada:



A desigualdade $a > b$ significa que a está à direita de b na reta real orientada:



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Quando ocorre a igualdade $a = b$, significa que a e b ocupam a mesma posição na reta real orientada.

Aritmeticamente, vamos analisar a desigualdade $a < b$ entre números reais com alguns exemplos de dízimas não periódicas:

a) 2,195… < 3,189…, pois 2 ⩽ 3;

b) 4,128… < 4,236…, pois 4 = 4 e 0,1 < 0,2;

c) 3,267… < 3,289…, pois 3 = 3; 0,2 = 0,2 e 0,06 < 0,08, e assim por diante.

Algebricamente, $a < b$ se, e somente se, a diferença $d = b - a$ é um número positivo, ou seja, vale $a < b$ se, e somente se, existe um número real positivo d tal que $b = a + d$.

Uma vez definida essa relação de ordem dos números reais, dizemos que eles estão ordenados. Usamos também a notação $a \leqslant b$ para dizer que $a < b$ ou $a = b$. Assim:

$a \leqslant b$ (lê-se "a é menor do que ou igual a b").

$b \geqslant a$ (lê-se "b é maior do que ou igual a a").

Atividades

Professor, se julgar oportuno, incentive os estudantes a criarem mais itens para a atividade **2**. Depois, oriente-os a trocarem os itens com os colegas para que um resolva o criado pelo outro.

Não escreva no livro

1. Escreva no caderno, usando chaves, os seguintes subconjuntos de $\mathbb{N}$.

a) $M(6)$: conjunto dos múltiplos de 6. $M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \ldots\}$

b) $D(6)$: conjunto dos divisores de 6. $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$

c) A: conjunto dos números primos menores do que 20. $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

d) C: conjunto dos números naturais quadrados perfeitos. $C = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots\}$

2. Represente no caderno o conjunto formado pelos possíveis valores de x em cada item.

a) $x \in \mathbb{N}$ e $x < 3$. $\{0, 1, 2\}$

b) $x \in \mathbb{Z}$ e $x \geqslant -2$. $\{-2, -1, 0, 1, \ldots\}$

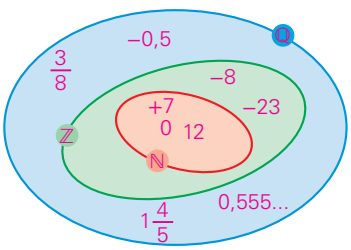
c) $x \in \mathbb{N}$ e $x \leqslant +1$. $\{0, 1\}$

d) $x \in \mathbb{Z}$ e $-2 < x \leqslant 3$. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

e) $x \in \mathbb{N}$ e $x < 0$. Não existe valor para x.

f) $x \in \mathbb{Z}$ e $x < 0$. $\{\ldots, -3, -2, -1\}$

3. Copie e complete o diagrama no caderno, colocando nele os símbolos dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ de maneira adequada.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Depois, distribua os seguintes números nos conjuntos adequados.

-8	$+7$	$\frac{3}{8}$	$-0,5$	12	0	-23	$1\frac{4}{5}$	$0,\overline{5}$

Professor, antes de pedir aos estudantes que resolvam a atividade **5**, garanta que eles se lembram de como alternar entre as representações decimal e fracionária de um número racional e como determinar a fração geratriz de decimais periódicos.

4. No caderno, classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta.

a) Todo número natural representa a quantidade de elementos de algum conjunto finito.

b) Existe um número natural que é maior do que todos os demais.

c) Todo número natural tem sucessor em $\mathbb{N}$.

d) Todo número natural tem antecessor em $\mathbb{N}$.

5. No caderno, coloque em ordem crescente os números reais: $0{,}25 < \frac{1}{2} < 0{,}\overline{52} < 0{,}\overline{5} < \frac{6}{10} < \frac{4}{5}$

$$\frac{6}{10};\ 0{,}\overline{5};\ \frac{1}{2};\ \frac{4}{5};\ 0{,}\overline{52};\ 0{,}25$$

6. Considerando os números reais entre $-\sqrt{3}$ e $+\sqrt{5}$, converse com um colega sobre as perguntas a seguir, responda a elas caderno e justifique sua resposta. As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

a) Quantos números naturais existem entre esses números? E números inteiros?

b) Quantos números racionais existem entre esses números? E números irracionais?

7. Com um colega, façam no caderno o que se pede a seguir.

a) Efetuem cada operação.

- $2 + 4$ 6
- $4 + 8$ 12
- $10 + 12$ 22
- $6 + 10$ 16
- $100 + 200$ 300
- $26 + 60$ 86

b) Notem que só foram usados números pares nas operações do item **a**. Há algum padrão que pode ser percebido em todos os resultados dessas operações?
Todos os resultados são números pares.

c) Conjecturem uma regra para esse padrão (uma hipótese sobre o padrão analisado). Algo do tipo: "sempre que..." ou "toda...".
Toda soma de 2 números pares é um número par.

d) Sabendo que qualquer número par p sempre pode ser escrito na forma $p = 2n$, em que n é natural, tentem provar no caderno a conjectura obtida no item **c**.
A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

4. As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Relação de inclusão entre conjuntos

Relembre a relação de subconjunto.

Dados os conjuntos A e B, se todo elemento de A for também elemento de B, então A está contido em B (A é subconjunto de B) e podemos escrever $A \subset B$. A relação $A \subset B$ é chamada **relação de inclusão**.

A relação de inclusão apresenta 3 propriedades básicas. Considere os conjuntos A, B e C quaisquer de determinado universo U.

- Propriedade reflexiva: $A \subset A$.
- Propriedade antissimétrica: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.
- Propriedade transitiva: Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Analise a seguir alguns exemplos em que essa relação ocorre.

a) Sendo os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{2\}$, como $2 \in A$, então $B \subset A$.

b) Sejam P, o conjunto dos habitantes de Piauí; B, o conjunto dos habitantes do Brasil; e S, o conjunto dos habitantes do continente americano. Podemos dizer que todo habitante do Piauí também é habitante do Brasil ($P \subset B$) e, também, que todo habitante do Brasil também é habitante do continente americano ($B \subset S$). Então, todo habitante do Piauí também é habitante do continente americano ($P \subset S$).

Fique atento

Em cada situação, todos os conjuntos são subconjuntos de um mesmo conjunto, que é chamado de **conjunto universo** e indicado por U. Esse conjunto pode mudar de acordo com a situação apresentada; por exemplo, o conjunto universo em uma situação que considera as cidades brasileiras pode ser um estado, um país ou até mesmo o planeta Terra. Geralmente esse conjunto é representado nos diagramas com formato retangular.

Operações com conjuntos

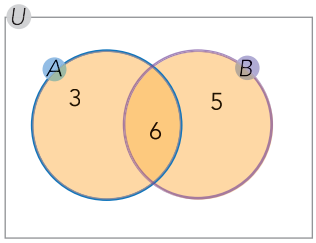
União ou reunião de conjuntos

Dados 2 conjuntos A e B, a **união** ou **reunião** $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos de A e os elementos de B:

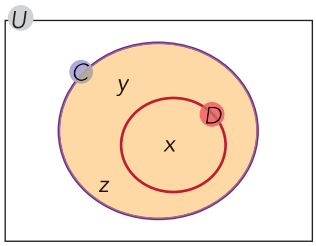
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Analise os exemplos a seguir, em que a parte pintada dos conjuntos representa a união deles.

a) $A = \{3, 6\}$ e $B = \{5, 6\}$, então $A \cup B = \{3, 5, 6\}$. Nesse caso, temos que $n(A \cup B) = 3$.

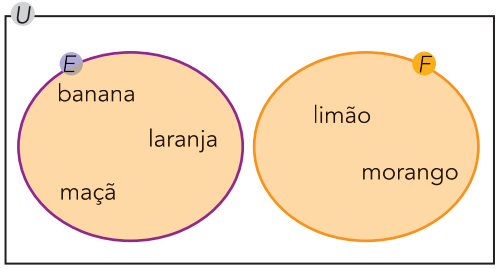


b) $C = \{x, y, z\}$ e $D = \{x\}$, então $C \cup D = \{x, y, z\}$.



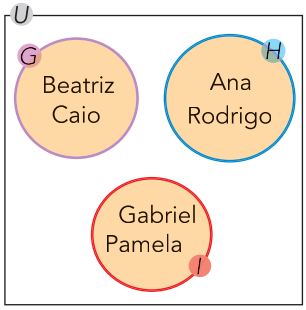
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c) E = {banana, laranja, maçã} e F = {limão, morango}, então $E \cup F$ = {banana, laranja, limão, maçã, morango}.



Banco de imagens/Arquivo da editora

d) G = {Beatriz, Caio}, H = {Ana, Rodrigo} e I = {Gabriel, Pamela}, então $G \cup H \cup I$ = {Ana, Beatriz, Caio, Gabriel, Pamela, Rodrigo}.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

O "ou" que aparece na definição não é o "ou" de exclusão usado comumente em frases como "Vamos ao cinema ou ao teatro.".

Esse termo significa que, se x pertence a $A \cup B$, então ou x pertence a A, ou x pertence a B, ou x pertence a ambos.

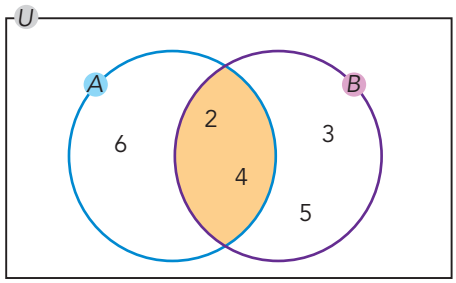
Intersecção de conjuntos

Dados 2 conjuntos A e B, a **intersecção** $A \cap B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B:

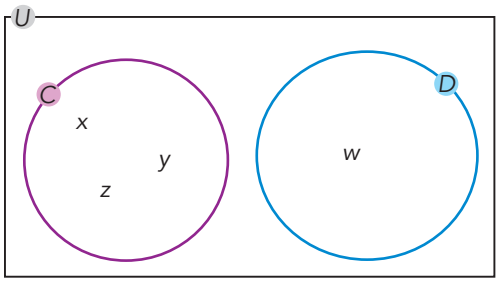
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Analise os exemplos a seguir, em que a parte pintada dos conjuntos representa a intersecção deles.

a) $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, então $A \cap B = \{2, 4\}$. Nesse caso, temos que $n(A \cap B) = 2$.



b) $C = \{x, y, z\}$ e $D = \{w\}$, então $A \cap B = \varnothing$. Nesse caso, temos que $n(A \cap B) = 0$.

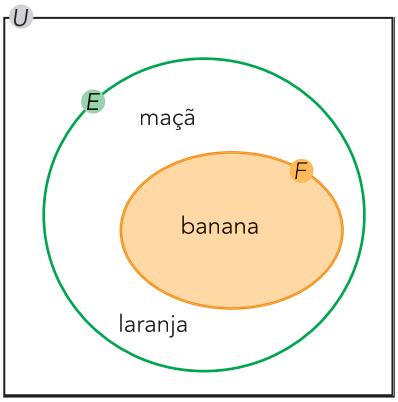


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

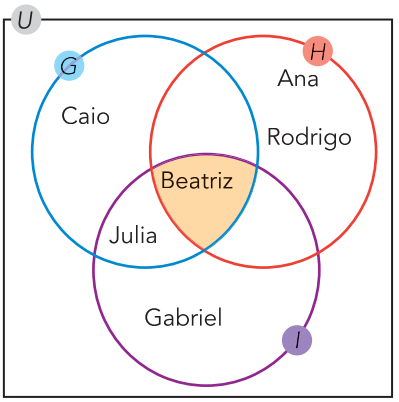
Fique atento

Podemos representar o **conjunto vazio** usando o símbolo ∅ ou { }. O conjunto vazio é um conjunto que não possui nenhum elemento, e ele é um subconjunto de qualquer outro conjunto.

c) $E = \{\text{banana, laranja, maçã}\}$ e $F = \{\text{banana}\}$, então $E \cap F = \{\text{banana}\}$.



d) $G = \{\text{Beatriz, Caio, Júlia}\}$, $H = \{\text{Ana, Beatriz, Rodrigo}\}$ e $I = \{\text{Beatriz, Gabriel, Júlia}\}$, então $G \cap H \cap I = \{\text{Beatriz}\}$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observações

Professor, ressalte com os estudantes que os conjuntos $C = \{x, y, z\}$ e $D = \{w\}$ exemplificados anteriormente são disjuntos.

- $x \in (A \cap B)$ quando as 2 afirmações $x \in A$ e $x \in B$ são simultaneamente verdadeiras.
- Se $A \cap B = \varnothing$, então os conjuntos A e B são chamados **disjuntos**.

Propriedades da união e da intersecção de conjuntos

Dados 3 conjuntos A, B e C, valem as propriedades a seguir.

- Propriedade comutativa:

  $A \cup B = B \cup A$

  $A \cap B = B \cap A$

- Propriedade associativa:

  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

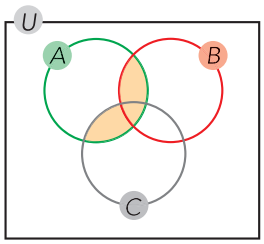
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- Propriedade distributiva:

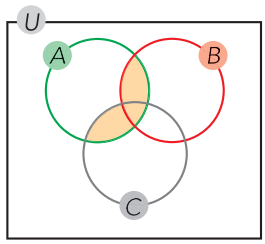
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Professor, se julgar oportuno, proponha aos estudantes que forneçam exemplos que representem as propriedades estudadas. A seguir apresentamos alguns que podem auxiliá-lo.
Comutativa: Conjunto A: {maçã, banana} e conjunto B: {banana, laranja}; $A \cup B = B \cup A \Rightarrow$ {banana, laranja, maçã} = {laranja, maçã, banana}.
Associativa: Conjunto A: {maçã, banana}, conjunto B: {banana, laranja} e conjunto C: {uva, amora}; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, pois $(A \cup B) \cup C$ = {maçã, banana, laranja} ∪ {uva, amora} = {maçã, banana, laranja, uva, amora} e $C = A \cup (B \cup C)$ = {maçã, banana} ∪ {banana, laranja, uva, amora} = {maçã, banana, laranja, uva, amora}.
Distributiva: Conjunto A: {maçã, banana}, conjunto B: {banana, laranja} e conjunto C: {uva, amora};
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, pois $A \cap (B \cup C)$ = {maçã, banana} ∩ {banana, laranja, uva, amora} = {banana} e $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ = = {banana} ∪ { } = {banana}.



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

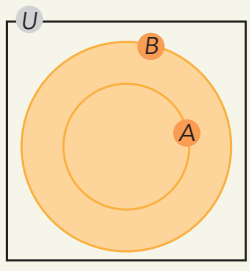
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Propriedade distributiva.

Fique atento

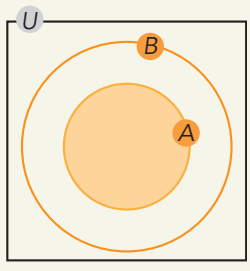
Quando um conjunto A está contido em um conjunto B (escrevemos $A \subset B$), isto é, quando todos os elementos de A pertencem a B, podemos dizer que:

- $A \cup B = B$;



$A \cup B = B$

- $A \cap B = A$.



$A \cap B = A$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro

Reflita

Constate a veracidade das propriedades da união e da intersecção de conjuntos representando os conjuntos por diagramas, como foi feito com a propriedade distributiva.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Diferença entre conjuntos

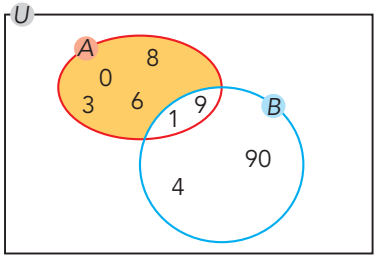
Dados 2 conjuntos A e B, a **diferença** $A - B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A, mas que não pertencem a B:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Analise os exemplos a seguir, em que a parte pintada representa a diferença entre os conjuntos.

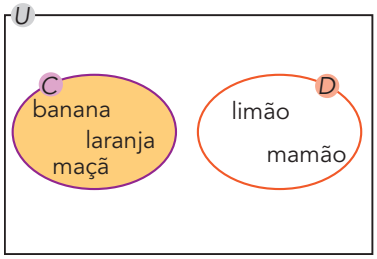
a) $A = \{0, 1, 3, 6, 8, 9\}$ e $B = \{1, 4, 9, 90\}$, então $A - B = \{0, 3, 6, 8\}$.

Temos que $n(A - B) = 4$.



b) $C = \{\text{banana, laranja, maçã}\}$ e $D = \{\text{limão, mamão}\}$, então $C - D = \{\text{banana, laranja, maçã}\}$.

Professor, ressalte para os estudantes que, para calcular $A - B$, o conjunto B não precisa estar contido no conjunto A.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

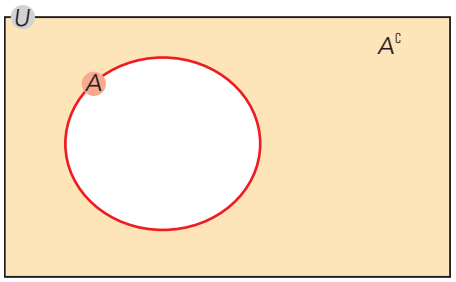
Complementar de um conjunto

Professor, ressalte aos estudantes que, para encontrar o complementar de um conjunto B em relação a um conjunto A, o conjunto B precisa estar contido no conjunto A.

Dado o conjunto universo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e o conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$, sabendo que $A \subset U$, dizemos que o complementar de A em relação a U é $\{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$, ou seja, é o conjunto formado pelos elementos de U que não pertencem a A.

Dado um conjunto A, subconjunto de um conjunto universo U, chamamos de **complementar** de A em relação a U o conjunto formado pelos elementos de U que não pertencem a A.

Indicamos $\complement_U^A$ ou $A^{\complement}$ ou $\overline{A}$ e lê-se "complementar de A em relação a U".



Banco de imagens/Arquivo da editora

O conjunto complementar de A está indicado pela parte pintada no diagrama.

Dessa definição, temos as 2 propriedades a seguir dados os conjuntos A e B quaisquer de determinado conjunto universo U.

- O complementar do complementar de um conjunto A é o próprio conjunto A: $\left(A^{\complement}\right)^{\complement} = A$ para todo $A \subset U$.
- Se um conjunto está contido em outro, então o complementar dele contém esse outro: se $A \subset B$, então $B^{\complement} \subset A^{\complement}$.

Utilizando essas propriedades, podemos concluir que: $A \subset B \Leftrightarrow B^{\complement} \subset A^{\complement}$.

Número de elementos da união de conjuntos

Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{2, 3, 5, 7\}$. Podemos dizer que $n(A) = 5$ e $n(B) = 4$.

Como a intersecção dos conjuntos A e B é o conjunto $A \cap B = \{3, 5, 7\}$, o número de elementos desse conjunto é $n(A \cap B) = 3$. Como a união dos conjuntos A e B é o conjunto $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, o número de elementos desse conjunto é $n(A \cup B) = 6$.

Perceba, nesse exemplo, que $n(A) + n(B) = 9$ e que $n(A \cup B) = 6$, então $n(A \cup B) \neq n(A) + n(B)$. Isso ocorre porque há 3 elementos comuns aos conjuntos A e B (de fato, $n(A \cap B) = 3$).

Assim:

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & = & 5 & + & 4 & - & 3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ n(A \cup B) & = & n(A) & + & n(B) & - & n(A \cap B) \end{array}$$

Os matemáticos já provaram que, de modo geral:

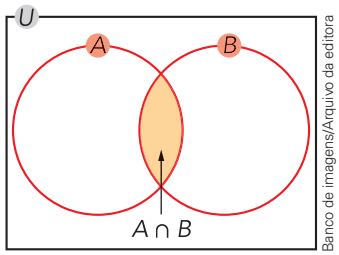
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Fique atento

No caso particular de $A \cap B = \varnothing$, temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, pois $n(A \cap B) = 0$.

Analise a demonstração.

Perceba que $n(A)$ inclui $n(A \cap B)$ e $n(B)$ também inclui $n(A \cap B)$:



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$n(A \cup B) = [n(A) - n(A \cap B)] + n(A \cap B) + [n(B) - n(A \cap B)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Atividades

Não escreva no livro

8. a) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$; o conjunto dos números naturais não nulos é parte do conjunto dos números naturais. $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{N}^*$; o conjunto dos números naturais não é parte do conjunto dos números naturais não nulos.

8. Usando os símbolos $\subset$ e $\not\subset$, relacione os conjuntos numéricos no caderno e justifique suas respostas.

a) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^*$.

b) $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

9. Dados os conjuntos $A = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 9\}$ e $C = \{0, 3, 6, 9, 10\}$, determine no caderno:

a) $A \cup B$; $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) $A \cap B$; $\{4, 5, 6\}$

c) $(A \cap B) \cup C$; $\{0, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$

d) $A \cap (B \cap C)$. $\{6\}$

10. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $B = \{b, d, g, h, i\}$, determine no caderno:

a) $A - B$; $\{a, c, e, f\}$

b) $B - A$. $\{h, i\}$

11. Com os conjuntos numéricos indicados, efetue no caderno as operações de união e intersecção.

a) $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

b) $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

12. No caderno, determine:

a) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}$

b) $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}$

c) $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}) \cap \mathbb{N}$; $\varnothing$

d) $(\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}) \cap \mathbb{N}$. $\mathbb{N}$

8. b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; o conjunto dos números racionais é parte do conjunto dos números reais. $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$; o conjunto dos números reais não é parte do conjunto dos números racionais.

13. No caderno, classifique cada item em verdadeiro ou falso e justifique.

a) Se A tem 3 elementos e B tem 4 elementos, então $A \cup B$ tem 7 elementos.

b) Se A tem 2 elementos e B tem 3 elementos, então $A \cap B$ tem 2 elementos.

c) Se $A \cap B = \varnothing$, A tem 5 elementos e B tem 4 elementos, então $A \cup B$ tem 9 elementos.

13. a) Falso; pode haver elementos comuns entre A e B. Por isso, temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

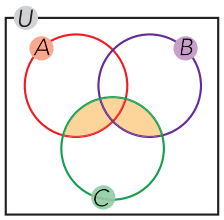
b) Falso; contraexemplo: se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, então $n(A \cap B) = 1$.

c) Verdadeiro; temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 5 + 4 - 0 = 9$.

14. Indique no caderno, utilizando a linguagem matemática, a parte destacada em laranja em cada diagrama.

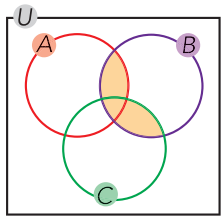
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a)



$(A \cup B) \cap C$ ou $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

b)



$(A \cap B) \cup (B \cap C)$ ou $(A \cup C) \cap B$.

15. Um professor de Língua Portuguesa sugeriu para uma turma a leitura dos livros *Helena*, de Machado de Assis, e *Iracema*, de José de Alencar. Do total de estudantes, 20 leram *Helena*, 15 leram só *Iracema*, 10 leram os 2 livros e 15 não leram nenhum deles.

a) Quantos estudantes leram *Iracema*?
10 + 15 = 25; logo, 25 estudantes.

b) Quantos estudantes leram apenas *Helena*?
20 − 10 = 10; logo, 10 estudantes.

c) Qual é a quantidade de estudantes dessa turma? 10 + 10 + 15 + 15 = 50; logo, 50 estudantes.

16. Em um levantamento entre 100 estudantes sobre cursos de idiomas, foram obtidos os seguintes resultados: 41 estudam inglês, 29 estudam francês, 26 estudam espanhol, 15 estudam inglês e francês, 8 estudam francês e espanhol, 19 estudam inglês e espanhol e 5 estudam os 3 idiomas.

a) Quantos estudantes não estudam nenhum desses idiomas?

b) Quantos estudantes estudam apenas 1 desses idiomas?

17. Uma pesquisa mostrou que 33% dos entrevistados acompanham os vídeos do canal **A**, 29% acompanham o canal **B**, 22% acompanham o canal **C**, 13% acompanham os canais **A** e **B**, 6% acompanham os canais **B** e **C**, 14% acompanham os canais **A** e **C** e 6% acompanham os vídeos dos 3 canais.

a) Qual porcentagem dos entrevistados não acompanha nenhum dos canais? 43%

b) Qual porcentagem acompanha os canais **A** e **B** e não acompanha o canal **C**? 7%

c) Qual porcentagem acompanha pelo menos 1 canal? 57%

18. Em uma pesquisa feita com 1000 famílias para verificar a audiência dos programas em plataformas de *streaming*, foram obtidos os seguintes resultados: 510 famílias assistem ao programa **A**, 305 assistem ao programa **B** e 386 assistem ao programa **C**.

Sabe-se ainda que 180 famílias assistem aos programas **A** e **B**, 60 assistem aos programas **B** e **C**, 25 assistem aos programas **A** e **C** e 10 famílias assistem aos 3 programas.

Stock-Asso/Shutterstock

Serviços de *streaming* permitem que as pessoas assistam a qualquer programa disponível no catálogo no momento que desejarem.

a) Quantas famílias não assistem a nenhum desses programas? 54 famílias.

b) Quantas famílias assistem somente ao programa **A**? 315 famílias.

c) Quantas famílias não assistem nem ao programa **A**, nem ao programa **B**?
365 famílias.

19. Em uma turma, 30 estudantes acertaram a primeira questão de uma prova e 25 estudantes acertaram a segunda questão dessa prova. A prova continha apenas 2 questões, e todos os estudantes da turma acertaram pelo menos 1 questão.

a) Qual é o máximo de estudantes que essa turma pode ter? Em qual situação?
30 + 25 = 55; logo, 55 estudantes.

b) Qual é o mínimo de estudantes que essa turma pode ter? Em qual situação?
25 + 5 = 30; logo, 30 estudantes.

20. A, B e C são conjuntos tais que $n(A \cap B) = 8$, $n(C) = 10$, $n(A - C) = 7$, $n(A \cap B \cap C) = 5$, $n(B \cap C) = 6$, $n(B) = 12$ e $n(A \cap C) = 7$.

Determine no caderno o número de elementos de cada conjunto a seguir.

a) $B - C$ 6 elementos.

b) A 14 elementos.

c) $A \cup B$ 18 elementos.

d) $A \cup B \cup C$
20 elementos.

16. a) 100 − (12 + 11 + 4 + 10 + 14 + 3 + 5) = 100 − 59 = 41; logo, 41 estudantes.
b) 12 + 11 + 4 = 27; logo, 27 estudantes.

Conexões

Armazenamento de dados na nuvem

Vídeo

O disquete foi um dos primeiros dispositivos portáteis de armazenamento de dados, e, por isso, ele ainda é usado para representar o botão "salvar" em diversos *softwares*.

O CD começou a ser desenvolvido na década de 1970 e só começou a ser vendido a partir de 1982.

As imagens não estão representadas em proporção.

HD

Tipo	Magnético
Introduzido em	1956
Medida de capacidade inicial	3,75 MB
Tamanho do dispositivo	Médio

Disquete

Tipo	Magnético
Introduzido em	1971
Medida de capacidade inicial	80 KB
Tamanho do dispositivo	Médio

CD

Tipo	Óptico
Introduzido em	1982
Medida de capacidade inicial	700 MB
Tamanho do dispositivo	Médio

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

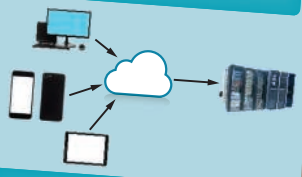
SD

Tipo	*Flash*
Introduzido em	1999
Medida de capacidade inicial	Até 2 GB
Tamanho do dispositivo	Pequeno

Pen drive

Tipo	*Flash*
Introduzido em	2000
Medida de capacidade inicial	8 MB
Tamanho do dispositivo	Pequeno

Nuvem



Tipo	Magnético ou *flash*
Introduzido em	2006
Medida de capacidade inicial	Indefinida
Tamanho do dispositivo	N/A

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Educação Digital, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Educação Digital.

Os primeiros *pen drives* tinham capacidade de 8 MB, mas já existem modelos de mais de 1 TB.

Os serviços de armazenamento em nuvem como conhecemos atualmente começaram a se popularizar em 2006, mas são um conceito que vem sendo desenvolvido desde 1960.

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Não escreva no livro

A necessidade de armazenar informações e mantê-las protegidas sempre foi um grande desafio na área das tecnologias da informação. Ao longo do tempo, foram desenvolvidos dispositivos cada vez menores e mais potentes para atender às demandas da sociedade.

Essas mudanças, no entanto, não ocorrem linearmente. O avanço da tecnologia se dá de maneira muito dinâmica, e muitos aspectos além dos que foram citados (como medida de velocidade de transferência, preço e durabilidade) contribuem para que um dispositivo seja considerado superior a outro para determinados usos. Enquanto algumas tecnologias se tornam obsoletas com a chegada de outras, como aconteceu com a substituição do disquete pelo CD e do CD pelo *pen drive* ou pelo armazenamento em nuvem, outras permanecem relevantes por muitas décadas e continuam sendo aprimoradas. O HD, por exemplo, surgiu em 1956 e é utilizado até hoje.

Apesar dos avanços na tecnologia de armazenamento de dados, ainda existem desafios a superar. Com uma sociedade cada vez mais conectada, há cada vez mais a necessidade de compartilhar dados com outros usuários e de acessar documentos em diferentes dispositivos, como *notebooks*, *smartphones* e *tablets*, além do desejo de minimizar a possibilidade de perda dos dados devido a um problema com o dispositivo.

Dessa maneira, o armazenamento em nuvem tem se popularizado. A nuvem de armazenamento de dados, ou *cloud*, é uma maneira de armazenar dados remotamente, utilizando grandes servidores disponibilizados por empresas em vez do armazenamento local do dispositivo. Assim, da perspectiva do usuário, os dados não são acessados por meio de um dispositivo externo, mas pela internet.

Fonte dos dados: LAWS, David. The storage engine: a timeline of milestones in storage technology. *Computer History Museum*, Mountain View, 24 nov. 2015. Disponível em: https://tedit.net/46ipvd. Acesso em: 13 jun. 2024.

Conecte com o texto

1. a) Representando o conjunto de arquivos na pasta **A** como A e o conjunto de arquivos na pasta **B** como B, temos:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 2000 = 1400 + 1000 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 400$
Logo, 400 arquivos.

1. Imagine que uma pessoa mantenha 2000 arquivos em pastas na nuvem, sendo armazenados 1400 arquivos na pasta **A** e 1000 arquivos na pasta **B**.

a) Quantos arquivos estariam nas 2 pastas ao mesmo tempo?

b) Quantos arquivos estariam apenas na pasta **A** e quantos estariam apenas na pasta **B**? No caderno, monte um diagrama que represente essa situação.

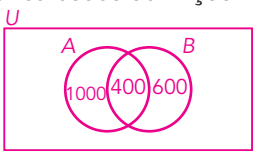
Pesquise e debata

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

2. Pesquise algumas empresas que oferecem armazenamento em nuvem e descubra até qual medida de capacidade de armazenamento de dados os serviços são gratuitos. Converse com os colegas sobre a importância de ter esse serviço de maneira gratuita. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

3. Faça uma pesquisa sobre o uso da nuvem por empresas e órgãos governamentais. Depois, debata com os colegas o movimento de passar a usar exclusivamente esses serviços no armazenamento de dados. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

1. b) $n(A) = 1400 \Rightarrow x + n(A \cap B) = 1400 \Rightarrow x + 400 = 1400 \Rightarrow x = 1000$
$n(B) = 1000 \Rightarrow y + n(A \cap B) = 1000 \Rightarrow y + 400 = 1000 \Rightarrow x = 600$
Logo, 1000 arquivos apenas na pasta **A** e 600 arquivos apenas na pasta **B**.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

CAPÍTULO 2

A ideia de função

Não escreva no livro

Situação-problema 1

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Fábricas e máquinas

dpa picture alliance/Alamy/Fotoarena

Fábricas são locais em que bens são produzidos com ou sem a ajuda de máquinas. Fábrica de automóveis em São Bernardo do Campo (SP). Foto de 2024.

Atualmente, várias fábricas têm máquinas que possibilitam a criação de diferentes produtos a custos considerados acessíveis. Essas máquinas, que podem ser robôs, são programadas para realizar tarefas específicas.

Considere uma fábrica em que existe uma máquina que realiza alguns procedimentos e transforma parte da fruta em purê e parte em suco.

a) Ao colocar uma laranja na máquina, qual será o produto final? Purê de laranja e suco de laranja.

b) Ao colocar uma maçã na máquina, qual será o produto final? Purê de maçã e suco de maçã.

c) Considere que a máquina produza 1 kg de purê de maçã ao colocar 10 maçãs de tamanho médio nela. Quantas maçãs são necessárias para produzir 2 kg de purê de maçã? E 1,5 kg?

d) Converse com um colega sobre quais seriam os processos necessários para a máquina fazer essa transformação. Exemplo de resposta: Retirar cascas e caroços, processar a fruta e separar o purê do suco.

c) Se 10 maçãs geram 1 kg de purê, então 1 maçã gera 100 g de purê, que corresponde a 0,1 kg. Assim, são necessárias 20 maçãs para produzir 2 kg de purê e, para produzir 1,5 kg, são necessárias 15 maçãs.

Não escreva no livro

Situação-problema 2

Professor, esta situação-problema favorece o desenvolvimento do TCT *Saúde*.

Dose de medicamentos

Leka Sergeeva/Shutterstock

Os medicamentos líquidos, geralmente administrados em gotas, são uma opção para pessoas que têm dificuldade de engolir cápsulas ou comprimidos.

Muitos medicamentos líquidos são administrados em gotas, de maneira que, para crianças, a quantidade de gotas é calculada de acordo com a medida de massa. Isso ocorre porque os órgãos das crianças ainda estão em desenvolvimento, e, por isso, é necessário recomendar doses mais específicas. Essas recomendações costumam ser dadas para crianças com até 30 kg de medida de massa; acima disso, a dosagem costuma ser única para qualquer pessoa.

Dessa maneira, quanto maior for a medida de massa de uma criança com até 30 kg, maior deverá ser a quantidade de medicação administrada a ela. Assim, podemos dizer que a quantidade de gotas de um remédio é dada em **função** da medida de massa da criança.

Considere que a bula de um remédio antitérmico recomende que a dosagem seja de 2 gotas para cada quilograma de massa da criança.

a) Qual deve ser a quantidade de gotas desse medicamento que uma criança com medida de massa igual a 5 kg deve tomar? E uma criança com 10 kg? A criança de 5 kg deve tomar 10 gotas ($2 \cdot 5 = 10$) e a criança de 10 kg deve tomar 20 gotas ($2 \cdot 10 = 20$).

b) Qual operação matemática você utilizou para calcular a resposta do item **a**? Operação de multiplicação.

c) Escreva no caderno uma relação que indique como uma pessoa pode calcular a dosagem desse remédio, em gotas, a partir da medida de massa de uma criança, em quilogramas. Multiplicar a medida de massa por 2.

Fique atento

Nunca tome medicamentos por conta própria, pois o uso de medicamentos sem prescrição médica pode causar riscos à saúde.

Sobre o assunto

A dosagem correta e o horário de administração de medicamentos são importantes não só para que o indivíduo não sofra uma *overdose*, mas também para evitar outros problemas, como o desenvolvimento de superbactérias.

Para mais informações sobre esse assunto, leia a matéria "Entenda o que são superbactérias e a ameaça global da resistência a antibióticos", publicada pela CNN Brasil. Disponível em: https://tedit.net/rxe4nv. Acesso em: 23 jul. 2024.

Depois, converse com os colegas sobre medidas que podem ser tomadas para que isso seja evitado.

Explorando a ideia de função

Podcast Transcrição de áudio

A ideia de função está presente quando relacionamos os valores de 2 grandezas variáveis. Lembre-se da abertura desta Unidade, em que estimamos a produção acumulada de energia elétrica, em GWh, para os 10 anos posteriores a 2023. Acompanhe outros exemplos a seguir.

a) Quantidade de gasolina e preço a pagar

Em determinada cidade, o preço da gasolina é R$ 6,00 por litro. A tabela a seguir relaciona a quantidade de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles.

Compra de gasolina

Quantidade de gasolina (em litros)	Preço a pagar (em reais)
1	6,00
2	12,00
3	18,00
4	24,00
⋮	⋮
40	240,00
x	$6x$

Dados elaborados para fins didáticos.

Não escreva no livro

Reflita

- Qual seria o preço de 10 litros de gasolina? $10 \cdot 6 = 60$; logo, R$ 60,00.
- Quantos litros de gasolina poderiam ser comprados com R$ 78,00?

$78 = 6x \Rightarrow x = 13$; logo, 13 litros.

A quantidade de litros x de gasolina corresponde a um preço a pagar p. Dizemos que o preço p, em reais, é dado em função da quantidade de litros de gasolina x. A **fórmula** que relaciona p com x é, nesse caso, $p = 6x$.

Também podemos usar a notação $f(x)$ no lugar de p. Assim, nesse caso, teríamos $f(x) = 6x$. Com essa notação, fica evidente que, conforme x varia, o valor de $f(x)$ varia.

Fique atento

Podemos chamar essa fórmula de **lei da função**, **lei de correspondência** ou, ainda, **lei de formação da função**.

b) Medida de comprimento do lado do quadrado e medida de perímetro do quadrado

A tabela a seguir relaciona a medida de comprimento ℓ do lado de um quadrado, em centímetros, e a medida de perímetro P desse quadrado, também em centímetros.

Medidas do quadrado

Medida de comprimento ℓ do lado (em cm)	Medida de perímetro P (em cm)
1	4
2	8
2,5	10
3	12
4,1	16,4
⋮	⋮
ℓ	4ℓ

Dados elaborados para fins didáticos.

Fique atento

Perímetro é o comprimento do contorno de uma figura geométrica plana.

Professor, nesses exemplos, a função está sendo representada por uma tabela ou por uma lei da função.

Suponha que temos um quadrado cuja medida de comprimento do lado é ℓ. Lembre-se de que a medida de perímetro do quadrado depende da medida de comprimento do lado dele. Dizemos que a medida de perímetro de um quadrado é dada em função da medida de comprimento do lado dele. Para cada valor dado para a medida de comprimento do lado, há **um único** valor correspondente para a medida de perímetro. Ainda, temos que, nesse caso, a medida de perímetro P corresponde a 4 vezes a medida de comprimento do lado ℓ. Podemos representar assim:

$$P = 4\ell \text{ (lei da função)}$$

Também podemos usar $f(\ell)$ no lugar de P. Assim, $f(\ell) = 4\ell$.

Como a medida de perímetro do quadrado depende da medida de comprimento do lado, a medida de perímetro é a **variável dependente** dessa função, e a medida de comprimento do lado é a **variável independente**.

Fique atento

- Algoritmos são sequências finitas de passos ou regras simples e ordenadas, elaboradas para obter soluções gerais de determinados problemas, sendo escritas de maneira clara e objetiva.

c) A "máquina" de dobrar

Analise a seguir a representação de uma "máquina" que recebe um número como entrada e devolve como saída o dobro desse número.

Paulo Manzi/Arquivo da editora

O algoritmo a seguir foi construído para explicar o funcionamento interno da "máquina" a partir dos números que entram.

1. A entrada é o 1º número digitado pelo usuário. Esse será o x.

2. Considere a variável n, sendo $n = 2 \cdot x$.

3. A saída é o valor de n.

Analisando o algoritmo que representa o funcionamento da "máquina" de dobrar, temos $n = 2 \cdot x$, que é a fórmula matemática da função.

Também podemos usar $f(x)$ no lugar de n. Assim, $f(x) = 2x$.

Não escreva no livro

Reflita

- Qual é a medida de perímetro de um quadrado cuja medida de comprimento do lado é 3,5 cm?
  $4 \cdot 3{,}5 = 14$; logo, 14 cm.
- Qual é a medida de comprimento do lado de um quadrado cuja medida de perímetro é 22 cm?
  $22 : 4 = 5{,}5$; logo, 5,5 cm.

Professor, uma explicação sobre o que são algoritmos encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

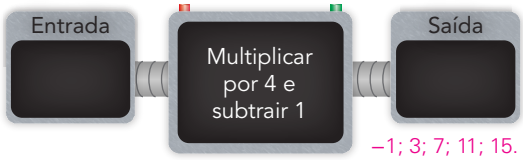
Professor, amplie a atividade **2** questionando os estudantes: "Uma 'máquina' que adiciona 1 e triplica o resultado faz o mesmo que a citada no enunciado? Justifique.". Espera-se que eles percebam que essa máquina não faria o mesmo. Na máquina do enunciado, para $x = 4$, temos $(3 \cdot 4) + 1 = 13$; na outra máquina, para $x = 4$, temos $(4 + 1) \cdot 3 = 15$.

Atividades

Não escreva no livro

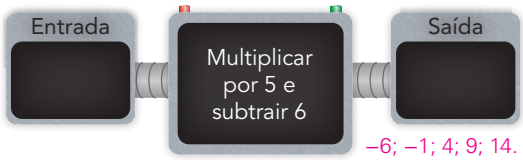
1. Represente no caderno cada uma das 3 máquinas apresentadas a seguir. Em seguida, coloque cada um dos números do conjunto {0, 1, 2, 3, 4} na entrada de cada máquina e, respeitando as operações indicadas, determine os resultados que serão apresentados na saída.

a)



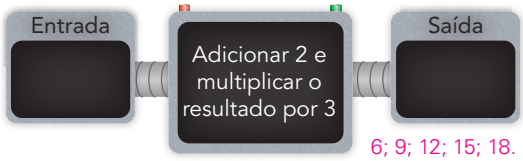
−1; 3; 7; 11; 15.

b)



−6; −1; 4; 9; 14.

c)



6; 9; 12; 15; 18.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Invente uma "máquina" de triplicar e adicionar 1, parecida com as da atividade anterior. Escreva no caderno a lei da função e um algoritmo que a máquina poderia utilizar.

Resposta pessoal.

3. Analise na tabela a medida de comprimento do lado (em cm) de uma região quadrada e a medida de área A (em cm^2).

a) A medida de área A e a medida de comprimento ℓ do lado da região quadrada.

Medidas da região quadrada

Medida de comprimento ℓ do lado (em cm)	1	3	4	5,5	10	...	x
Medida de área A (em cm^2)	1	9	16	30,25	100	...	x^2

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Quais são as variáveis dessa situação?

b) Qual é a variável dependente?

c) Qual é a variável independente?

A medida de área A.

A medida de comprimento ℓ do lado.

5. d) O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

d) Qual é a lei da função que associa a medida de comprimento do lado com a medida de área da região quadrada? $A = \ell^2$

e) Quanto mede a área da região quadrada cujo lado tem medida de comprimento de 12 cm? $A = 12^2 = 144$; logo, 144 cm².

f) Qual é a medida de comprimento do lado da região quadrada cuja área mede 169 cm²?

$169 = \ell^2 \Rightarrow \ell = 13$; logo, 13 cm.

4. Expresse no caderno a lei da função f que associa cada número real x:

a) à terça parte dele; $f(x) = \frac{x}{3}$

b) ao dobro dele diminuído de 3; $f(x) = 2x - 3$

c) à metade dele adicionada com 3; $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

d) ao cubo dele adicionado com o quadrado dele. $f(x) = x^3 + x^2$

5. Um fabricante vende um produto por R$ 0,80 a unidade. O custo total desse produto é composto de uma taxa fixa de R$ 40,00 mais o custo de produção de R$ 0,30 por unidade.

a) Qual é a quantidade de unidades que o fabricante deve vender para não ter lucro nem prejuízo (receita menos despesa)?

80 unidades.

Fique atento

Receita é a quantia recebida ou obtida com a venda de um ou mais produtos (ou serviços). Se a receita é maior do que o custo, há lucro. Se é menor, há prejuízo.

b) $L(200) = 0{,}5 \cdot 200 - 40 = 60 > 0$; logo, lucro.

b) Se vender 200 unidades desse produto, o fabricante terá lucro ou prejuízo?

c) Muitos aspectos podem influenciar o custo de produção de um produto. Alguns exemplos são a qualidade da matéria-prima e o valor da mão de obra, ou seja, o salário pago aos funcionários que participam do processo de produção dele. No caderno, cite outros exemplos.

Resposta pessoal.

d) No caderno, elabore mais uma pergunta utilizando a situação do enunciado.

Professor, na atividade **3** há uma oportunidade interessante para questionar os estudantes quanto a outros cenários que envolvem área e perímetro. Peça a eles que considerem uma região retangular não quadrada com variações nas medidas de comprimento dos lados de maneira não proporcional. Pergunte se podemos dizer que sempre que a medida de área dessa região aumentar, a medida de perímetro aumentará também. Espera-se que eles encontrem contraexemplos que indiquem que essa afirmação é falsa.

Formalizando a ideia de função

A ideia de função por meio de conjuntos

É possível representar uma função utilizando a notação de conjuntos. Para isso, considere os exemplos a seguir.

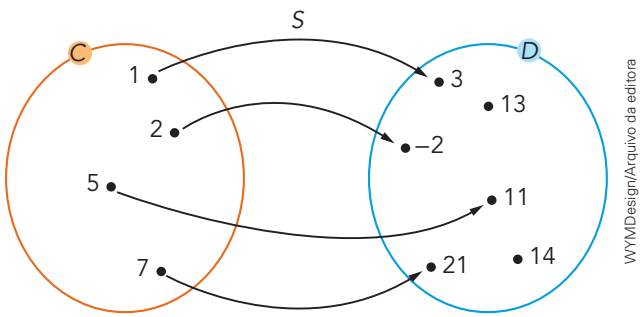
a) Considere os conjuntos A e B tais que:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e } B = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 25, 30\}.$$

A tabela a seguir apresenta uma relação R entre esses 2 conjuntos: cada número pertencente a A está associado ao quádruplo do próprio número, que pertence a B.

A	*B*
0	0
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20

b) Analise o diagrama de uma relação S entre os conjuntos C e D.



WYMDesign/Arquivo da editora

Note que, nessa representação, cada valor pertencente a C está associado a um **único valor** de D.

Nos 2 exemplos anteriores, as relações estabelecidas entre A e B e entre C e D são tais que:

- todo elemento do 1º conjunto tem um correspondente no 2º conjunto;
- cada elemento do 1º conjunto corresponde a um único elemento no 2º conjunto.

Como as relações apresentadas nos 2 exemplos satisfazem essas 2 condições, podemos dizer que, no 1º exemplo, temos uma **função de *A* em *B*** e, no 2º exemplo, temos uma **função de *C* em *D***.

Definição e notação de função

Dados 2 conjuntos não vazios A e B, uma **função f de A em B** é uma relação que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Nessas condições, usamos as seguintes notações:

$$f\colon A \to B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B$$

Nos 2 casos, lê-se: "f é uma função de A em B".

Além disso, se a função f relaciona o elemento x de A com o elemento y de B, então podemos escrever $f\colon x \mapsto y$ ou, mais comumente:

$$f(x) = y$$

(Lê-se: "f de x é igual a y".)

Podemos usar as 2 notações para descrever a função apresentada no exemplo **a**:

$$f\colon A \to B$$
$$x \mapsto 4x$$

Porque cada elemento de A está associado ao quádruplo dele em B.

Reflita

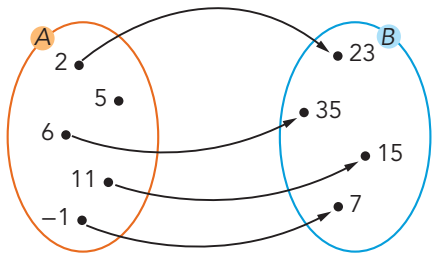
Por que foi utilizado o termo "$4x$" nessa expressão?

Atividades

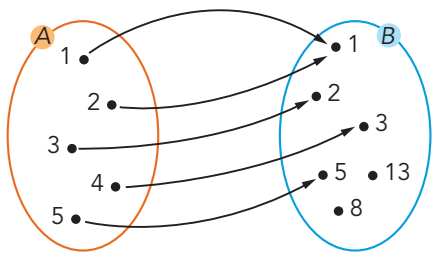
Não escreva no livro

6. Para cada item a seguir, avalie se o diagrama apresentado representa uma função de A em B. Caso não represente uma função, justifique. As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

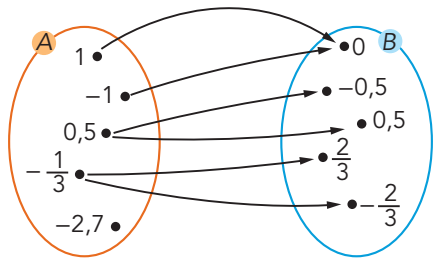
a)



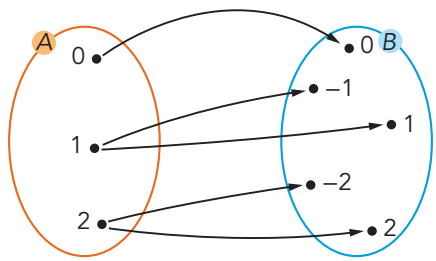
b)



c)



d)



Ilustrações: WYMDesign/Arquivo da editora

7. Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e a relação f de A em B dada por $f(x) = 2x - 1$. As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

a) Utilizando um diagrama, represente no caderno a relação f de A em B.

b) A relação f é uma função de A em B? Justifique.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

8. No caderno, faça o que se pede em cada item.

a) Escreva 2 conjuntos numéricos não vazios quaisquer G e H de modo que exista uma função de G em H. Resposta pessoal.

b) Crie uma tabela e um diagrama que representem essa função de G em H.

A resposta depende dos conjuntos escritos pelos estudantes no item **a**.

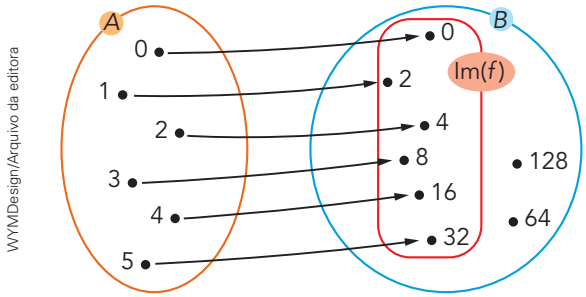
Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Ao definirmos uma função f de A em B, os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, de **domínio** da função f (indicamos por **D(f)**) e **contradomínio** da função f (indicamos por **CD(f)**).

Além disso, para cada $a \in A$, o elemento $b \in B$ tal que $f(a) = b$ é chamado **imagem** de a pela função f. Já o conjunto formado pelas imagens de todos os elementos de A é chamado de **conjunto imagem** de f e é indicado por **Im(f)**.

Analise os exemplos a seguir.

a) Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{0, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$ e a função f de A em B, representada no diagrama.



WYMDesign/Arquivo da editora

Perceba que o domínio de f é o conjunto A e o contradomínio de f é o conjunto B. O conjunto imagem de f é formado pelas imagens dos elementos de A, portanto $\text{Im}(f) = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\} = \{0, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

b) Considere uma função f de domínio $\mathbb{N}^*$ e contradomínio $\mathbb{Z}$ que relaciona cada elemento do domínio ao próprio oposto.

Perceba que:

- como todo elemento de $\mathbb{N}^*$ é um número natural não nulo, o oposto de cada elemento será um número inteiro negativo;
- todo inteiro negativo é o oposto de um número natural não nulo.

Por isso, toda imagem de um elemento do domínio de f (ou seja, do conjunto $\mathbb{N}^*$) pertence ao conjunto dos números inteiros negativos, denotado por $\mathbb{Z}_-^*$; e todo elemento de $\mathbb{Z}_-^*$ é imagem de um elemento de $\mathbb{N}^*$. Portanto, $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}_-^*$.

Fique atento

Em toda função f de A em B, temos que Im(f) está contido em B, ou seja, é um subconjunto de B, ou está contido em B. Indicamos essa relação assim: $\text{Im}(f) \subset B$.

Não escreva no livro

Reflita

Por que 64 e 128 não pertencem a Im(f)?

Porque não são imagem de um elemento do domínio de f.

Reflita

Como pode ser expressa a lei dessa função f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$?

$f(x) = -x$

Fique atento

No capítulo anterior, você estudou que $\mathbb{Z}$ é usado para representar o conjunto dos números inteiros. Temos que $\mathbb{Z}_-$ representa o conjunto dos números inteiros não positivos (todos os números inteiros negativos e o 0) e $\mathbb{Z}^*$ representa o conjunto dos números inteiros não nulos (todos os números inteiros com exceção do 0). Assim, $\mathbb{Z}_-^*$ representa o conjunto dos números inteiros estritamente negativos (apenas os números inteiros negativos, desconsiderando o 0 e os números inteiros positivos).

Atividades

Não escreva no livro

9. Considere a função g: $A \to B$, em que $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 4, 12, 20, 24\}$ e $g(x)$ é o quádruplo de x para todo $x \in A$.

a) Construa no caderno o diagrama que representa essa função. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Determine D(g), CD(g) e Im(g). D(g) = {1, 3, 5}; CD(g) = {1, 4, 12, 20, 24}; Im(g) = {4, 12, 20}.

c) Determine $g(3)$. $g(x) = 4x \Rightarrow g(3) = 4 \cdot 3 = 12$

d) Determine x para $g(x) = 20$. $g(x) = 20 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$

e) Para $g(x) = 4$, determine o valor de x. $g(x) = 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$

Gráfico de funções

Vamos analisar uma situação que pode ser modelada por uma função.

Para fazer a manutenção de uma piscina, é necessário esvaziá-la parcial ou totalmente, para depois preenchê-la com a quantidade de água retirada. A medida de intervalo de tempo necessária para realizar esse procedimento depende da vazão com que a água da piscina escoa pelos ralos.

Para a manutenção da piscina de uma residência, os ralos foram destampados, iniciando o esvaziamento dela. Após a abertura dos ralos, notou-se que foram retirados 1200 L de água em 1 h e que, em 2 h, já haviam sido esvaziados 2400 L.

Sabe-se que a vazão é constante – isto é, que o processo ocorre com uma taxa de variação constante entre a medida de volume de água esvaziada e a medida de intervalo de tempo decorrida – e que a piscina inicialmente tinha 6000 L.

A tabela a seguir apresenta a relação entre a medida de intervalo de tempo decorrido, em horas, e a medida de volume de água restante, em litros.

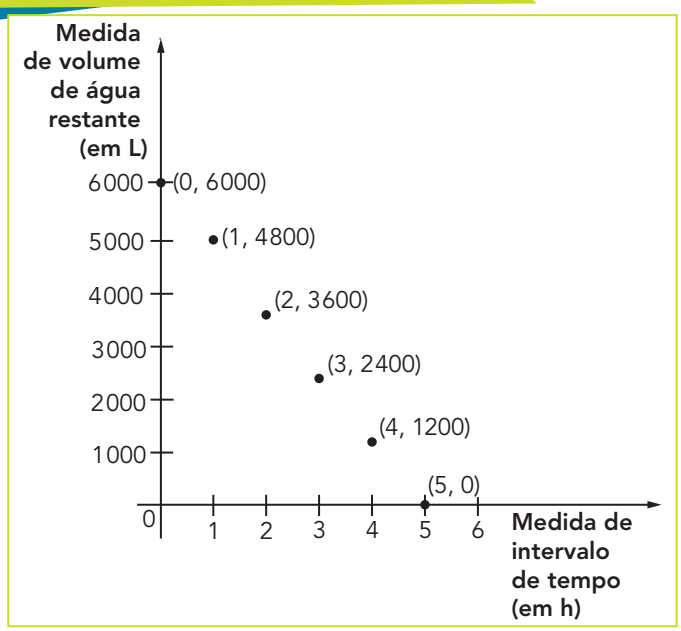
Podemos indicar essas medidas em um plano cartesiano e analisar como elas se comportam.

Vazão de esvaziamento de uma piscina

Medida de intervalo de tempo (em h)	Medida de volume de água restante (em L)
0	6000
1	4800
2	3600
3	2400
4	1200
5	0

Dados elaborados para fins didáticos.

Vazão de esvaziamento de uma piscina

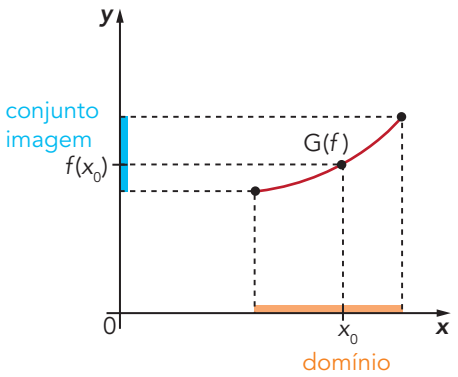


WYMDesign/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Dada uma função $f: A \to B$, o gráfico dela é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), para $x \in A$, $y \in B$ e $y = f(x)$, ou seja, $G(f) = \{(x, y); x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$.

Analise o gráfico e perceba que o domínio da função corresponde ao intervalo destacado em laranja no eixo x e o conjunto imagem dessa função corresponde ao intervalo destacado em azul no eixo y. A curva representada em vermelho, por sua vez, é composta dos infinitos pares ordenados que pertencem ao gráfico de f neste exemplo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Formalizando os conceitos de função injetiva, função sobrejetiva e função bijetiva

Função injetiva

Uma função $f: A \to B$ é **injetiva** (ou **injetora**) quando elementos diferentes de A são transformados por f em elementos diferentes de B, ou seja, não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A. Denotamos assim:

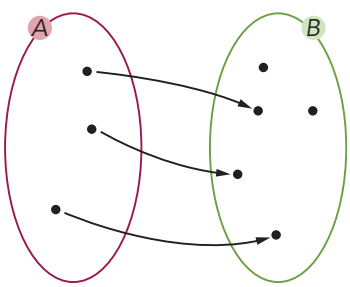
$$f: A \to B \text{ é injetiva quando: } x_1 \neq x_2 \text{ em } A \Rightarrow f(x_1) \neq (x_2) \text{ em } B.$$

Disso, obtemos:

$$f: A \to B \text{ é injetiva quando: } f(x_1) = f(x_2) \text{ em } B \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ em } A.$$

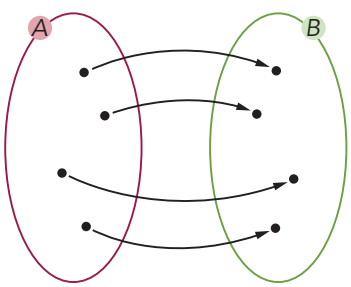
Professor, mostre essas definições para os estudantes por meio da exploração dos diagramas apresentados a seguir.

Acompanhe alguns exemplos da ideia de injetividade de funções usando conjuntos.



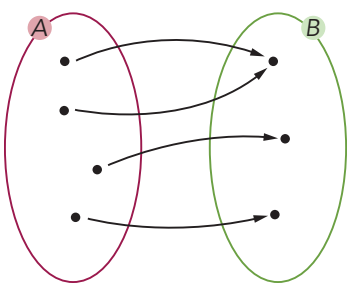
Função injetiva.

Não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A ou não há 2 elementos em A que estejam associados a um mesmo elemento de B.



Função injetiva.

Não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A.



Função não injetiva.

Há 1 elemento em B que é imagem de 2 elementos distintos de A.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Escolha alguns valores para x e, no caderno, mostre que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$ não é injetiva.

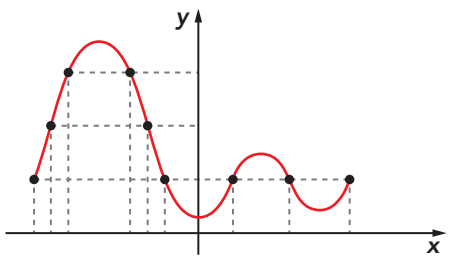
Exemplo de resposta: Para $x = 1$, temos $f(1) = 1^2 - 1 = 0$, e para $x = -1$, temos $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$. Nesse caso, para 2 valores diferentes de x, encontramos um mesmo valor $f(x)$ para a função, então ela não é injetiva.

Professor, se os estudantes apresentarem dificuldades em chegar a uma conclusão após as explorações que criarem, dê a eles uma dica: Escolha 2 números opostos e calcule o valor de $f(x)$ para cada um deles.

Também podemos verificar se uma função é injetiva analisando o gráfico dela em um plano cartesiano. Sabemos que, se a função é injetiva, não há elemento do conjunto imagem que seja imagem de mais de um elemento do domínio. Assim, imaginando linhas horizontais intersectando o gráfico, essas linhas só podem intersectar o gráfico uma única vez para cada valor de y.

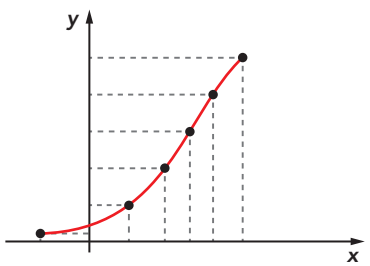
Acompanhe os exemplos a seguir. Considere que as curvas apresentadas são a totalidade do gráfico das respectivas funções.

a) As linhas horizontais intersectam o gráfico mais de uma vez.



Então, a função não é injetiva.

b) As linhas horizontais nunca intersectam o gráfico mais de uma vez.



Então, a função é injetiva.

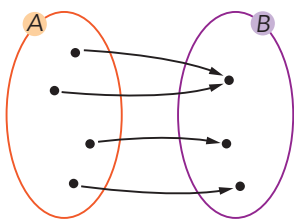
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Função sobrejetiva

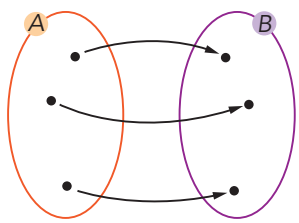
Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) quando, para qualquer elemento $y \in B$, encontramos um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Ou seja, f é sobrejetiva quando todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A, isto é, quando $\text{Im}(f) = B$, ou seja, o conjunto imagem $\text{Im}(f)$ coincide com o contradomínio $\text{CD}(f)$ da função.

$f: A \to B$ é sobrejetiva quando $\text{Im}(f) = B$.

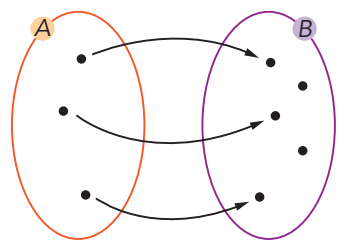
Acompanhe alguns exemplos da ideia de sobrejetividade de funções usando conjuntos.



Função sobrejetiva.
$\text{Im}(f) = B$



Função sobrejetiva.
$\text{Im}(f) = B$



Função não sobrejetiva.
Há elementos em B sem correspondente em A; logo, $\text{Im}(f) \neq B$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Agora, acompanhe os exemplos.

a) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 2$ é sobrejetiva, pois todo elemento de $\mathbb{R}$ é imagem de um elemento de $\mathbb{R}$ por essa função. Por exemplo: para a imagem $f(x) = 5$, temos que $x = 3$; para a imagem $f(x) = 0$, temos que $x = -2$.

b) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$ é sobrejetiva, pois o domínio é $\mathbb{R}$, o contradomínio é $\mathbb{R}_+$ e o conjunto imagem também é $\mathbb{R}_+$.

Reflita

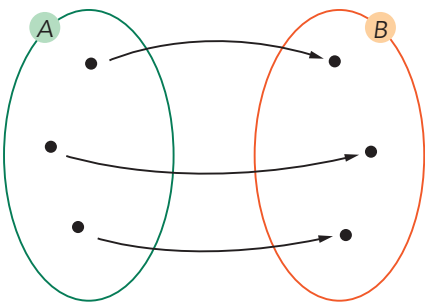
Não escreva no livro

Explique por que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não é sobrejetiva.

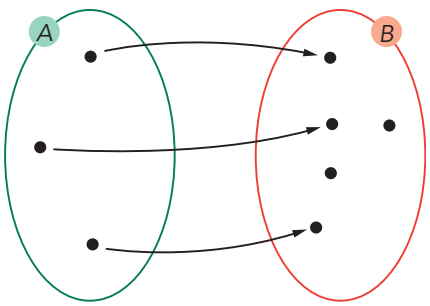
Porque, por exemplo, $-1 \in \mathbb{R}$, mas não existe valor real de x tal que $x^2 = -1$, ou seja, -1 não pertence ao conjunto imagem de f e $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}$.

Função bijetiva ou correspondência biunívoca

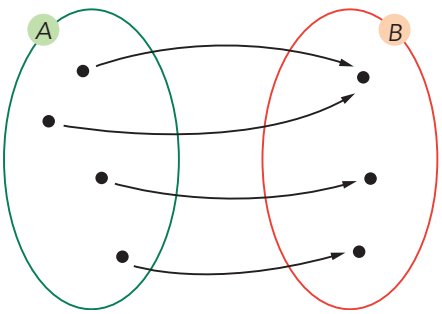
Uma função $f: A \to B$ é **bijetiva** (ou **bijetora**) se ela for, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva. Quando isso ocorre, dizemos que há uma bijeção, ou uma correspondência biunívoca, entre A e B.



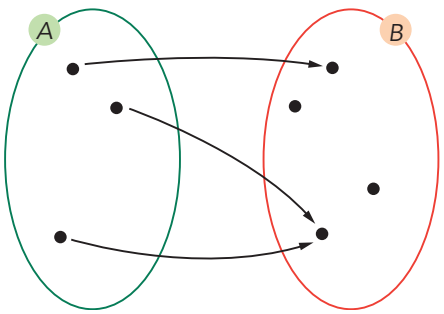
Função bijetiva.



Função não bijetiva.
É injetiva, mas não é sobrejetiva.



Função não bijetiva.



Função não bijetiva.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Reflita

Pense e justifique por que os 2 últimos exemplos de conjuntos A e B não representam funções bijetivas. A terceira função é sobrejetiva, mas não é injetiva, pois há 1 elemento em B que é imagem de 2 elementos distintos de A. A quarta função não é injetiva (há 1 elemento em B que é imagem de 2 elementos distintos de A) nem sobrejetiva (há elementos em B que não pertencem ao conjunto imagem da função).

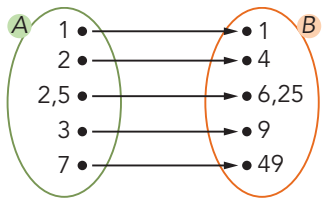
Professor, se julgar oportuno, peça aos estudantes que criem diagramas de funções, diferentes das apresentadas, com funções injetivas, funções sobrejetivas e funções bijetivas.

Explorando a ideia de função inversa

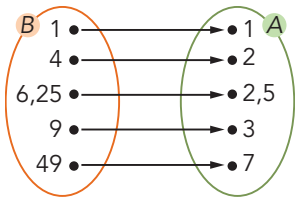
Quando relacionamos a medida de comprimento ℓ do lado de um quadrado com a medida de área A da região limitada por ele, podemos pensar em 2 funções bijetivas.

- Uma função que, a cada medida de comprimento do lado, associa uma medida de área: $A(\ell) = \ell^2$.
- Uma função que, a cada medida de área, associa a medida de comprimento do lado: $\ell(A) = \sqrt{A}$.

Chamando de f e g as funções citadas, respectivamente, podemos escolher alguns valores e estabelecer os conjuntos apresentados no diagrama a seguir.



$f: A \to B$
$f(x) = x^2$
$D(f) = \{1; 2; 2{,}5; 3; 7\}$
$Im(f) = \{1; 4; 6{,}25; 9; 49\}$



$g: B \to A$
$g(x) = \sqrt{x}$
$D(g) = \{1; 4; 6{,}25; 9; 49\}$
$Im(g) = \{1; 2; 2{,}5; 3; 7\}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

As funções f e g são chamadas de **funções inversas**. Perceba que, quando isso ocorre, temos:

- $D(f) = Im(g)$;
- $D(g) = Im(f)$;
- f é bijetiva e g é bijetiva.

Formalizando a definição de função inversa

Dada uma função bijetiva $f: A \to B$, denominamos **função inversa** de f a função $g: B \to A$ tal que, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$.

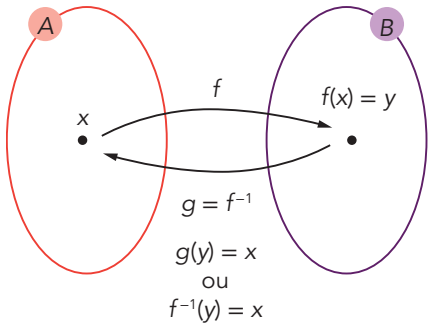
Ou, de modo equivalente:

A função $g: B \to A$ é a **inversa da função** $f: A \to B$ quando temos $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.

Fique atento

Só existe função inversa de uma função bijetiva.

De modo geral, se f é bijetiva, temos a situação representada no diagrama a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$g: B \to A$ é a função inversa da função $f: A \to B$, pois temos $g(y) = g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e temos $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$.

É comum indicar a função g, inversa de f, por f^{-1}.

$$f: A \to B \quad \text{e} \quad f^{-1}: B \to A$$

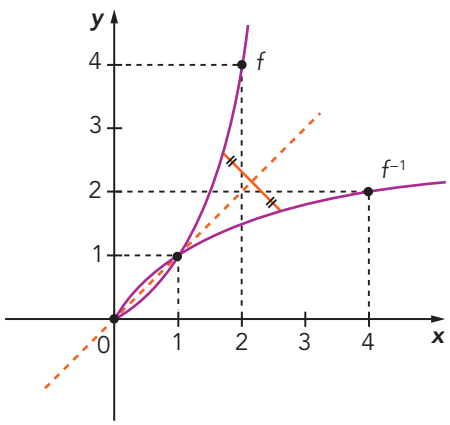
Assim, no exemplo das funções inversas apresentado anteriormente, podemos escrever:

$$f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Analise a representação gráfica das funções f e g em um mesmo plano cartesiano, considerando $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ e $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

x	$y = f(x)$
0	0
1	1
2	4

x	$y = f^{-1}(x)$
0	0
1	1
4	2



Banco de imagens/Arquivo da editora

O gráfico da função f e o gráfico da função inversa $g = f^{-1}$ são simétricos em relação à reta que representa a bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano. É possível provar que isso ocorre em todos os casos de 2 funções inversas.

Analise agora outro exemplo: Seja $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = 8x - 1$. Para determinar a função h^{-1}, que é a inversa de h, podemos substituir $h(x)$ por y:

$$y = 8x - 1$$

Depois, trocamos x e y e isolamos o novo y:

$$x = 8y - 1 \Rightarrow 8y = x + 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{8}$$

Logo, $h^{-1}(x) = \frac{x+1}{8}$.

Fique atento

f^{-1} não é o mesmo que $\frac{1}{f}$. Acompanhe um exemplo:

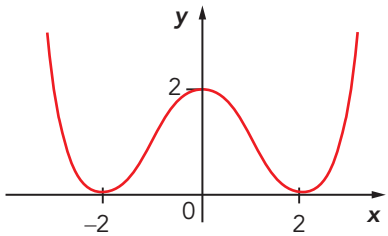
Considerando a função f dada por $f(x) = 2x$, a inversa dela é $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

Temos que $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x}$ e que $\frac{x}{2} \neq \frac{1}{2x}$.

Professor, ressalte aos estudantes que a bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta que divide o ângulo formado pelos eixos desse quadrante, que tem medida de abertura de 90°, em 2 ângulos com medida de abertura de 45° cada, conforme indicado pela reta vermelha tracejada apresentada. Se julgar oportuno, peça a eles que forneçam exemplos de funções inversas.

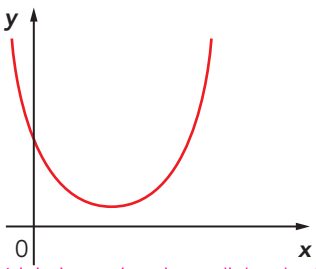
10. Analise os gráficos de funções a seguir e identifique quais representam funções injetivas. Considere apenas o domínio em que o gráfico está sendo apresentado. Alternativas **c** e **d**.

a)



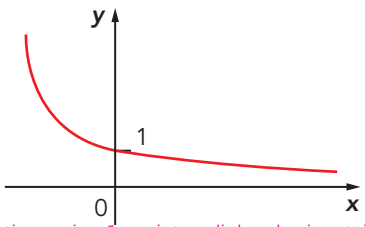
Não é injetiva, pois existem linhas horizontais que intersectam o gráfico mais de uma vez.

b)



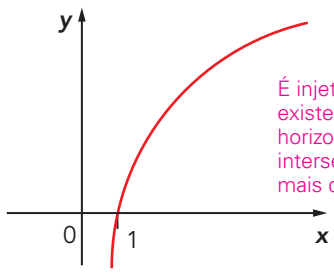
Não é injetiva, pois existem linhas horizontais que intersectam o gráfico mais de uma vez.

c)



É injetiva, pois não existem linhas horizontais que intersectam o gráfico mais de uma vez.

d)



É injetiva, pois não existem linhas horizontais que intersectam o gráfico mais de uma vez.

11. Verifique se as seguintes funções são ou não sobrejetivas. **a)** Como Im(f) = $\mathbb{R}$, a função é sobrejetiva.

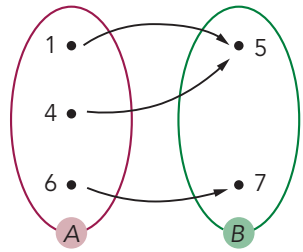
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 1$.

b) $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 4$.

b) Não é sobrejetiva, pois existem elementos de $\mathbb{R}$ que não são imagens de nenhum elemento do domínio $\{-1, 0, 1, 2\}$. Por exemplo, $12 \in \mathbb{R}$ e não é imagem de nenhum elemento do domínio.

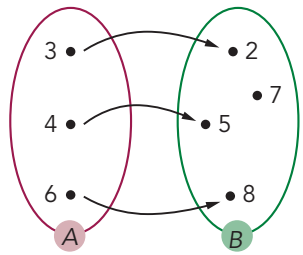
12. Verifique se as funções representadas são sobrejetivas, injetivas ou bijetivas.

a) $f: A \to B$



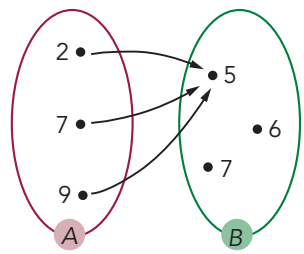
É sobrejetiva; não é injetiva, pois $f(1) = f(4) = 5$; então, não é bijetiva.

b) $f: A \to B$



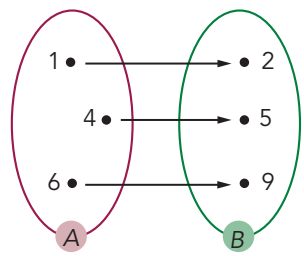
É injetiva; não é sobrejetiva, pois 7 pertence a B, mas não é imagem de nenhum elemento de A; então, não é bijetiva.

c) $f: A \to B$



Não é sobrejetiva, pois 6 pertence a B, mas não é imagem de nenhum elemento de A; não é injetiva, pois $f(2) = f(7) = f(9) = 5$; então, não é bijetiva.

d) $f: A \to B$



É sobrejetiva; é injetiva; então, é bijetiva.

e) Não é sobrejetiva, pois –2 pertence ao contradomínio de f, mas não é imagem de nenhum elemento do domínio; não é injetiva, pois $f(-1) = f(1) = 1$; então, não é bijetiva.

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$.

f) $f: \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x + 2$.

g) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$.

É injetiva; é sobrejetiva; então, é bijetiva.

f) É injetiva; não é sobrejetiva, pois 6 pertence ao contradomínio de f, mas não é imagem de nenhum elemento do domínio; então, não é bijetiva.

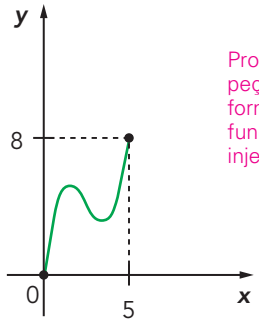
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

13. Analisando os gráficos das funções a seguir, identifique quais funções são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas.

a) $f\colon [0, 5] \to [0, 8]$

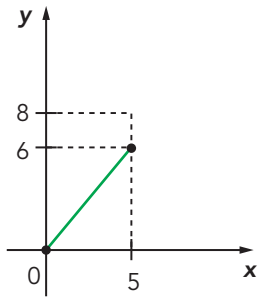
É sobrejetiva; não é injetiva; então, não é bijetiva.



Professor, se julgar oportuno, peça aos estudantes que forneçam exemplos de funções que não são bijetivas, injetivas ou sobrejetivas.

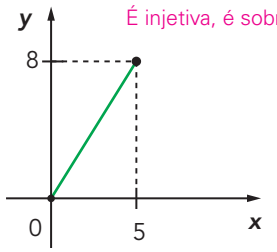
b) $f\colon [0, 5] \to [0, 8]$

É injetiva, não é sobrejetiva; então, não é bijetiva.



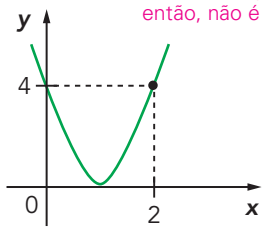
c) $f\colon [0, 5] \to [0, 8]$

É injetiva, é sobrejetiva; então, é bijetiva.



d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Não é sobrejetiva; não é injetiva; então, não é bijetiva.



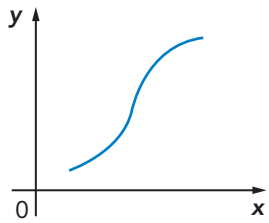
14. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida pela lei $f(x) = -6x + 2$.

a) Determine $f^{-1}(x)$. $f^{-1}(x) = \frac{2 - x}{6}$

b) O que podemos dizer a respeito dos gráficos de f e f^{-1}? São simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

15. Seja f a função cujo gráfico está representado a seguir.

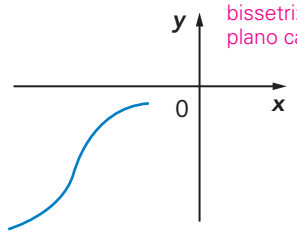


Banco de imagens/Arquivo da editora

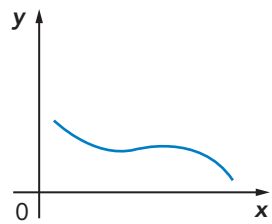
Qual gráfico melhor representa a função inversa da função f?

Sabemos que o gráfico de f^{-1} deve ser simétrico ao gráfico de f em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano. Alternativa **e**.

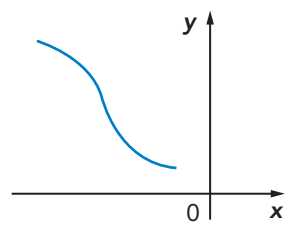
a)



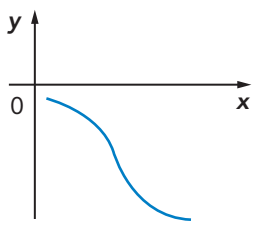
b)



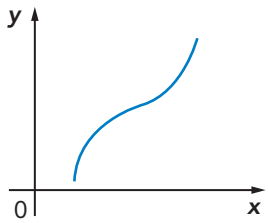
c)



d)



e)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

CAPÍTULO 3

A função afim

Não escreva no livro

Situação-problema

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Combustível em automóveis

Um automóvel pode percorrer determinada medida de distância de acordo com a quantidade de combustível que há no tanque dele. A autonomia (medida de distância máxima percorrida utilizando o tanque cheio de combustível) é dada, entre outros fatores, em **função** da quantidade de litros de combustível existente no tanque. Considerando que o carro terá a mesma performance em todos os instantes do deslocamento, assumimos que a **taxa de variação** entre a medida de distância e a quantidade de combustível é constante; então, podemos classificar essa função como **função afim**.

Joa Souza/Shutterstock

Quando planejam viagens, os motoristas costumam utilizar a quantidade de quilômetros rodados por litro como referência para estimar a quantidade de combustível necessária para percorrer o trajeto.

Suponha que determinado veículo percorra 12 km com 1 litro de combustível e nenhum outro fator interfira na autonomia desse veículo.

a) Sabendo que no tanque do carro há 45 litros de combustível, qual será, aproximadamente, a medida de distância máxima que ele poderá percorrer sem precisar reabastecer?

b) Qual foi a operação matemática que você utilizou para responder ao item anterior?

c) Considerando que esse veículo tem x litros de combustível no tanque, qual expressão indica a medida de distância máxima, em quilômetros, que pode ser percorrida sem necessidade de reabastecimento? $x \cdot 12$

$45 \cdot 12 = 540$; logo, 540 km.

Operação de multiplicação.

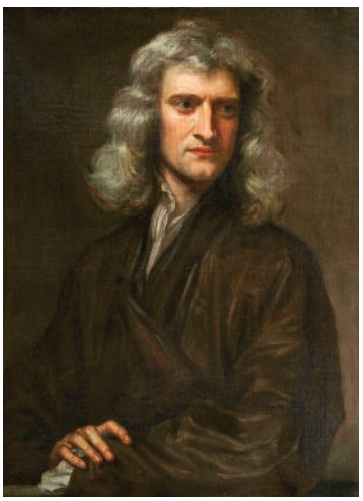
Um pouco da história das funções

Uma das maneiras elementares de relacionar 2 grandezas y e x é por meio de uma relação do tipo $y = ax + b$, na qual a e b são números reais. Esse tipo de relação é conhecido como **função afim**. A situação apresentada na abertura deste capítulo é um exemplo de cenário que pode ser representado por uma função afim.

No início do estudo das funções, que se estabeleceu mais formalmente a partir das contribuições de matemáticos como o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e o inglês Isaac Newton (1643-1727), não havia muita precisão na definição desse conceito.

Wikipedia/Wikimedia Commons/Museu Herzog Anton Ulrich, Brunswick, Alemanha.

Retrato de Gottfried Leibniz, de Christoph Bernhard Francke, antes de 1729 (óleo sobre tela de 81 cm × 66 cm).



Wikipedia/Wikimedia Commons/Instituto Isaac Newton, Cambridge, Inglaterra.

Retrato de Isaac Newton, de Godfrey Kneller, 1689 (óleo sobre tela, de 96 cm × 84 cm).

As imagens não estão representadas em proporção.

Ao longo dos séculos seguintes, diversos matemáticos continuaram estudando e aprimorando o conceito de função. A definição que utilizamos atualmente para as funções surgiu apenas no século XX, em 1934, elaborada por um grupo de matemáticos fundado nesse mesmo ano, cujo objetivo era propor uma nova maneira de se estudar Matemática.

Esse grupo de matemáticos, na maioria franceses, decidiu que o trabalho seria coletivo, sem menção a autores individuais. Para assinar os trabalhos, livros e teses por eles publicados, foi criado um pseudônimo, Nicolas Bourbaki.

A principal proposta dos matemáticos que assinavam o nome Nicolas Bourbaki era tratar os estudos matemáticos de maneira mais rigorosa. Esse tratamento mais padronizado estava alicerçado na **teoria dos conjuntos**. Dessa maneira, o conceito de função ficou associado ao conceito dos conjuntos chamados de domínio, contradomínio e conjunto imagem, como os conhecemos atualmente.

Não escreva no livro

Reflita

De acordo com os fatos apresentados no texto, é possível atribuir o desenvolvimento do conceito de função a um único indivíduo? Por quê?

Fontes dos dados: ZUFFI, Edna Maura. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. *Hipátia:* Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, Campos do Jordão, v. 1, n. 1, p. 1-10, dez. 2016. Disponível em: https://tedit.net/99u9j8. ESQUINCALHA, Agnaldo da Conceição. Nicolas Bourbaki e o Movimento Matemática Moderna. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, Rio de Janeiro, v. 2, n. 3, p. 28-37, set./dez. 2012. Disponível em: https://tedit.net/y0ii7u. Acesso em: 19 jun. 2024.

As funções afins, que são o foco deste capítulo, têm grande aplicação no cotidiano, conforme você vai estudar nos tópicos a seguir.

Reflita: Não, pois, desde o início dos estudos das funções até os dias atuais, muitos matemáticos diferentes contribuíram para esse desenvolvimento.

4. Exemplo de resposta: Sendo p o valor da corrida e d a medida de distância percorrida, então $p(d) = 2 + 2{,}5d$ e $p(d) = 12 + 2d$.

Professor, nas atividades **3** e **4** os estudantes também podem apresentar a lei de cada função de diferentes maneiras, não sendo obrigatório o uso da representação algébrica.

Explorando a função afim

Nos últimos anos, em diversas cidades do Brasil e do mundo, cresceu a quantidade de aplicativos de transporte privado que conectam motoristas particulares a passageiros.

Em alguns casos, esses aplicativos estabelecem o preço da corrida de acordo com um **valor fixo inicial** mais um **valor variável**, que depende linearmente da medida de distância percorrida e é determinado pelo **valor por quilômetro rodado**.

2. Sim. Valor variável: 12,5 − 10 = 2,5; temos 3,75 : 2,5; logo, o valor por quilômetro rodado é R$ 1,50 e o valor fixo inicial é R$ 8,00 (pois 23 − 10 · 1,5 = 8).

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Para as atividades a seguir, considere que os valores cobrados nos aplicativos de transporte privado **A**, **B** e **C** dependem apenas do valor fixo inicial e do valor por quilômetro rodado. Faça as atividades com um colega.

1. Considerem que, em um aplicativo **A**, o valor fixo inicial é R$ 6,00 e o valor variável é R$ 1,50.

a) Quanto custará uma viagem de 4 km de medida de distância? 6 + 4 · 1,50 = 6 + 6 = 12; logo, R$ 12,00.

b) E uma viagem de 12 km de medida de distância? 6 + 12 · 1,50 = 6 + 18 = 24; logo, R$ 24,00.

c) Quantos quilômetros foram percorridos em uma viagem que custou R$ 45,00? 45 − 6 = 39; assim, temos 39 : 1,50 = 26; logo, 26 km.

2. Em um aplicativo **B**, uma viagem de 10 km custa R$ 23,00 e uma viagem de 12,5 km custa R$ 26,75. Com essas informações, é possível calcular o valor fixo inicial cobrado por esse aplicativo? E o valor por quilômetro rodado? Em caso positivo, calculem esses valores.

3. Utilizando a resposta da atividade anterior, escrevam no caderno a lei da função que relaciona a medida de distância percorrida, em quilômetros, ao valor da viagem, em reais, no aplicativo **B**.

Exemplo de resposta: Sendo p o valor da corrida e d a medida de distância percorrida, temos $p(d) = 8 + 1{,}5d$.

4. Em um aplicativo **C**, uma viagem de 20 km custa R$ 52,00. Escrevam no caderno as leis de pelo menos 2 funções que poderiam ser a função que relaciona a medida de distância percorrida, em quilômetros, ao valor da viagem, em reais.

5. Um aplicativo que pratique um valor inicial fixo menor do que outro é necessariamente mais vantajoso do ponto de vista financeiro? Justifiquem a resposta. Não; justificativa pessoal.

MVelishchuk/Shutterstock

Professor, sugerimos que este tópico seja trabalhado em conjunto com o professor de Física, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Formalizando a definição de função afim

Vídeo

A situação-problema da abertura deste capítulo, sobre o consumo de combustível, apresenta pares de grandezas cujos valores podem ser relacionados por meio de uma função afim: medida de comprimento percorrida pelo veículo com a quantidade de litros de combustível.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada **função afim** quando existem 2 números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Os números reais a e b são chamados **coeficientes** da função.

Assim, a função afim pode ser apresentada com a seguinte notação:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax + b$$

Podemos facilitar a escrita de $f: x \mapsto ax + b$ escrevendo que a função f é dada pela lei $f(x) = ax + b$. Mas devemos estar sempre atentos para não confundir a função $f: x \mapsto ax + b$ com o número real $f(x)$, que é o valor assumido pela função no ponto x.

Analise alguns exemplos a seguir.

a) $f(x) = 2x + 1$ (temos: $a = 2$ e $b = 1$)

b) $f(x) = \pi x - 4$ (temos: $a = \pi$ e $b = -4$)

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 5$ $\left(\text{temos: } a = -\frac{1}{3} \text{ e } b = 5\right)$

d) $f(x) = 4{,}3x$ ($a = 4{,}3$ e $b = 0$)

e) $f(x) = 6$ (temos: $a = 0$ e $b = 6$)

f) $f(x) = 0$ (temos: $a = 0$ e $b = 0$)

Dependendo dos valores dos coeficientes a e b na lei da função afim, ela admite também outras classificações.

Uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$, com a e b números reais e $a \neq 0$, é chamada **função polinomial do 1º grau**.

Uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$, com b sendo um número real e $b \neq 0$, é chamada **função constante não nula**.

A função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ é chamada **função constante nula** (ou **função nula**).

Não escreva no livro

Reflita

- Na função afim que é constante nula, quais são os valores dos coeficientes a e b? $a = 0$ e $b = 0$.
- Dos exemplos, quais são funções polinomiais do 1º grau? Exemplos **a**, **b**, **c** e **d**.
- Como as demais funções podem ser classificadas?

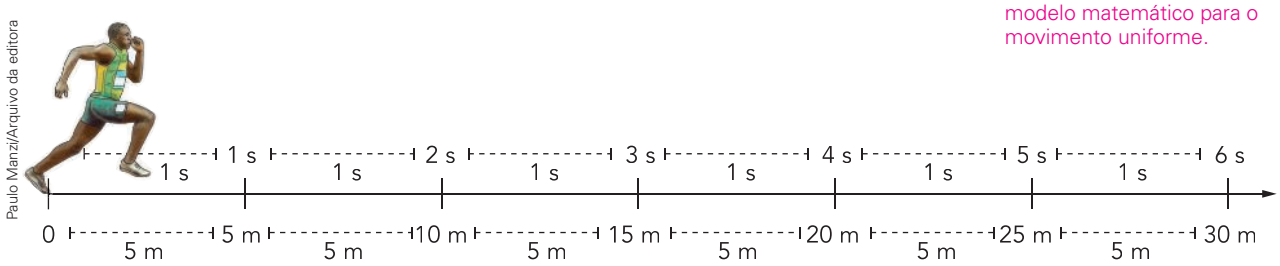
A função do exemplo **e** é uma função constante não nula e a do exemplo **f** é uma função nula.

Uma aplicação comum das funções afins é no estudo do movimento de corpos. Consideremos um ponto que se movimenta sobre um eixo: em cada instante t, a posição é dada pela função S, que é dada pela equação horária de posição. Um movimento será chamado **movimento uniforme** quando o ponto se desloca sempre no mesmo sentido e, além disso, em intervalos de tempo com mesma medida, percorre espaços de mesma medida.

Nessa situação, S é uma função afim definida por $S(t) = vt + b$. Nessa expressão, o coeficiente v é chamado **velocidade** e o coeficiente b é a **posição inicial**, dada pela expressão $b = S(0)$.

A posição do ponto no eixo é dada por $S(t) = vt + b$, mas o espaço (S) que ele percorreu é dado por $S = vt$. Por exemplo, analise a seguir a representação de um atleta correndo com medida de velocidade constante.

Professor, como a função afim pode ser usada para descrever a variação da posição em função do intervalo de tempo em um movimento uniforme, dizemos que esse tipo de função constitui o modelo matemático para o movimento uniforme.



Nesse percurso, ele desenvolve um movimento uniforme. Durante todo o trajeto percorre 5 metros a cada 1 segundo, ou seja, a medida de velocidade é 5 m/s. Então, a função horária que descreve esse movimento é: $S(t) = 5t$, sendo $b = 0$.

Fique atento

Quando não estiver explicitado o domínio e o contradomínio da função afim, considere sempre o conjunto dos números reais como domínio e contradomínio, ou restrições desses conjuntos se a situação exigir. Neste caso, por exemplo, temos a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Na função associada ao movimento uniforme, temos S: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Valor de uma função afim

O **valor numérico** de uma função afim f dada por $f(x) = ax + b$, para $x = x_0$, é dado por $f(x_0) = ax_0 + b$.

Por exemplo, na função afim dada por $f(x) = 5x + 1$, podemos determinar alguns valores dessa função.

a) $f(1) = 5 \cdot 1 + 1 = 5 + 1 = 6$. Logo, $f(1) = 6$.

b) $f(-3) = 5 \cdot (-3) + 1 = -15 + 1 = -14$. Logo, $f(-3) = -14$.

c) $f\left(\frac{1}{5}\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$. Logo, $f\left(\frac{1}{5}\right) = 2$.

d) $f(x + h) = 5 \cdot (x + h) + 1 = 5x + 5h + 1$. Logo, $f(x + h) = 5x + 5h + 1$.

Valor inicial

Em uma função afim f dada por $f(x) = ax + b$, o número $b = f(0)$ é chamado **valor inicial** da função f.

Analise alguns exemplos de leis de funções e o valor inicial de cada uma delas.

a) O valor inicial de $f(x) = -2x + 3$ é 3, pois $f(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3$.

b) O valor inicial de $f(x) = 5x + 1$ é 1, pois $f(0) = 5 \cdot 0 + 1 = 1$.

c) O valor inicial de $f(x) = 7x$ é 0, pois $f(0) = 7 \cdot 0 = 0$.

Professor, na atividade **3**, se julgar oportuno, pergunte aos estudantes por que eles obtiveram 2 instantes no item **b**. Espera-se que eles percebam que em um instante a medida de distância entre eles é 30 km, enquanto eles se aproximam um do outro; e, em outro instante, essa é a medida de distância entre eles enquanto se afastam um do outro.

Atividades

Não escreva no livro

1. Determine o valor numérico da função afim dada por $f(x) = -3x + 4$ para cada valor de x a seguir.

a) $x = 1$ $f(1) = -3 \cdot 1 + 4 = 1$

b) $x = \frac{1}{3}$ $f\left(\frac{1}{3}\right) = -3 \cdot \frac{1}{3} + 4 = 3$

c) $x = 0$ **c)** $f(0) = -3 \cdot 0 + 4 = 4$

d) $x = k + 1$ **d)** $f(k + 1) = -3(k + 1) + 4 = -3k + 1$

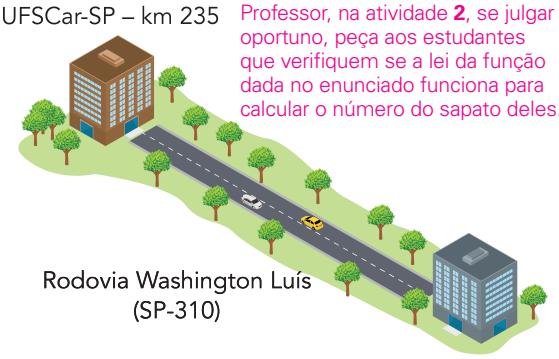
2. A lei da função que indica o número do sapato (N) em função da medida de comprimento (c) do pé, em centímetros, é $N = \frac{5c + 28}{4}$ ou $N = \frac{5}{4}c + 7$. Calcule no caderno:

a) o número do sapato quando a medida de comprimento do pé é 24 cm; $N = \frac{5}{4} \cdot 24 + 7 = 37$.

b) a medida de comprimento do pé de quem calça 40. $40 = \frac{5c + 28}{4} \Rightarrow 160 - 28 = 5c \Rightarrow c = 26{,}4$; logo, 26,4 cm.

3. Um professor de Matemática parte da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar-SP), localizada na cidade de São Carlos (SP), na rodovia Washington Luís, km 235, em direção à Universidade Estadual Paulista (Unesp), localizada na cidade de Rio Claro (SP) na mesma rodovia, no km 174. Nesse deslocamento, o automóvel do professor desenvolve uma medida de velocidade média de 90 km/h. No mesmo instante, saindo de Rio Claro, um professor de Física se dirige a São Carlos desenvolvendo uma medida de velocidade média de 93 km/h. A imagem a seguir ilustra a rodovia que interliga essas cidades.

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora



Professor, na atividade **2**, se julgar oportuno, peça aos estudantes que verifiquem se a lei da função dada no enunciado funciona para calcular o número do sapato deles.

Considere que as leis das funções horárias dos automóveis sejam $S_1(t) = 174 + 93t$ e $S_2(t) = 235 - 90t$, em que S_1 é a posição do veículo que sai de Rio Claro e S_2 é a posição do veículo que sai de São Carlos, ambas em função do instante t (em horas).

a) Qual é a posição em que se encontra cada um dos veículos após 10 min de viagem? km 189,5 e km 220.

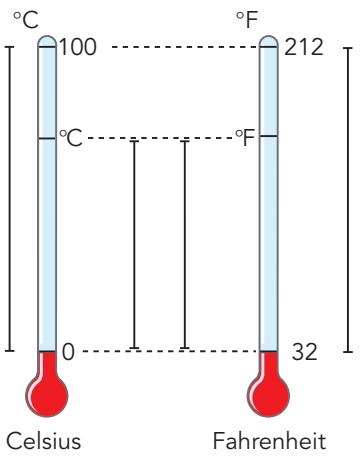
b) Quais são os instantes em que a medida de distância que separa esses veículos é 30 km? $\frac{91}{183}$ h e $\frac{31}{183}$ h.

c) Considerando que as funções horárias são da forma $S(t) = b + at$, por que as funções horárias apresentadas têm sinais diferentes para os respectivos valores de a? Porque os veículos estão se movimentando em direções opostas.

Texto para a próxima atividade.

Entre as escalas termométricas de um termômetro, as mais usadas são a escala Fahrenheit e a escala Celsius, com 0 °C = 32 °F e 100 °C = 212 °F.

Tiago Donizete Lemes/Arquivo da editora



Dada uma medida de temperatura qualquer, em graus Fahrenheit ou em graus Celsius, podemos fazer a conversão da unidade de medida de temperatura usando uma relação que é um exemplo de função. Podemos usar a relação $F = 1{,}8C + 32$, em que F é a medida de temperatura em graus Fahrenheit e C é a medida de temperatura em graus Celsius.

Fique atento

Essa relação também pode ser escrita da seguinte maneira: $\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}$.

Professor, se julgar oportuno, peça aos estudantes que justifiquem por que essa relação pode ser escrita da maneira indicada no *Fique atento*. Se necessário, explique que, utilizando essa forma, é possível resolver em função de C.

$F = 1{,}8C + 32 \Rightarrow 1{,}8C = F - 32 \Rightarrow C = \frac{F - 32}{1{,}8} \Rightarrow \frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}$

Professor, na atividade **9**, reforce com os estudantes que, nessas escalas termométricas, temos as unidades de medida **graus Celsius**, **graus Fahrenheit** e **Kelvin** (nesta última escala, por ser uma escala absoluta, a unidade de medida é apenas Kelvin, e não "graus Kelvin").

4. Faça o que se pede no caderno.

a) Transforme 35 graus Celsius em graus Fahrenheit. 95 °F

b) Qual é a medida de temperatura (em graus Celsius) em que a medida de temperatura em graus Fahrenheit é o dobro da medida de temperatura em graus Celsius? 160 °C

5. Se um termômetro indica 120 °F, qual é a medida dessa temperatura em graus Celsius? Aproximadamente 48,9 °C.

6. Se um termômetro indica 50 °C, qual é a medida dessa temperatura em graus Fahrenheit? 122 °F

7. Qual medida de temperatura, em graus Fahrenheit, é 5 vezes a medida de temperatura em graus Celsius? 50 °F

Texto para a próxima atividade.

A febre é considerada um mecanismo de defesa que entra em ação quando há algo de anormal no organismo do indivíduo. Em adultos, para ser considerada febre, a medida de temperatura corporal precisa ser maior do que 37,8 °C, e um dos instrumentos usados durante décadas para medir essa temperatura era o termômetro de mercúrio. Nesse tipo de termômetro, a coluna de mercúrio aumenta ou diminui conforme a medida de temperatura do paciente aumenta ou diminui, respectivamente. Professor, termômetros de mercúrio foram muito populares há alguns anos, mas o uso deles foi substituído pelo de termômetros digitais.

Fique atento

Desde 1º de janeiro de 2019, foram proibidas no Brasil a fabricação, a importação e a comercialização dos termômetros de mercúrio, devido aos riscos que esse metal pode causar à saúde e ao meio ambiente.

8. Em um termômetro de mercúrio, a medida de comprimento da coluna de mercúrio era relacionada com a medida de temperatura do organismo pela relação $c(t) = 0{,}1t + 4$, em que c é a medida de comprimento da coluna, em cm, e t é a medida de temperatura, em °C. Qual era a medida de comprimento de uma coluna de mercúrio nesse termômetro quando a medida de temperatura corpórea do paciente era 39 °C?

$c(t) = 0{,}1t + 4 \Rightarrow c(39) = 0{,}1 \cdot 39 + 4 = 3{,}9 + 4 = 7{,}9$; logo, 7,9 cm.

9. Além das escalas termométricas Celsius, pertencente ao sistema métrico e usada na maioria dos países do mundo, e Fahrenheit, mais comumente usada nos países de língua inglesa, a escala Kelvin também é muito usada para representar medidas de temperatura, especialmente em cálculos de Química e Física. É possível relacionar a escala Kelvin com as outras escalas pelas funções dadas por:

$T_K = T_C + 273°$ e $T_K = 5 \cdot \left(\frac{T_F - 32}{9}\right) + 273$, nas quais T_F, T_K e T_C representam as medidas de temperatura nas escalas Fahrenheit, Kelvin e Celsius, respectivamente.

A partir dessas informações, responda no caderno: Qual é a medida de temperatura, em graus Fahrenheit, de um objeto cuja temperatura, em Kelvin, mede 328 K? Alternativa **c**.

a) 129 °F **c)** 131 °F **e)** 133 °F

b) 130 °F **d)** 132 °F

10. Reúna-se com um colega e leiam a tirinha.

© Armandinho, de Alexandre Beck/Acervo do cartunista

BECK, Alexandre. *Armandinho Doze*. Florianópolis: Belas-Letras, 2019. p. 26.

a) Converse com o colega e expliquem o que o menino entendeu da conversa dos responsáveis. Depois expliquem o que realmente aconteceu. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Pesquise em jornais, revistas e *sites* de notícias manchetes que associam palavras como "subir", "crescer", "descer", "cair" as temperaturas. Por que você acha que essas associações são comumente utilizadas e por que elas não são conceitualmente corretas? A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

c) Utilizem uma das manchetes que vocês encontraram para elaborar um problema que envolva as escalas Celsius e Fahrenheit. Depois, troquem com outra dupla para que uma resolva o problema elaborado pela outra. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Professor, na atividade **10**, tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade.

Professor, se julgar oportuno, peça aos estudantes que verifiquem se a taxa de variação da função afim dada por $f(x) = 5x + 2$ é 5. Para isso, eles devem considerar o acréscimo de 1 unidade em x: $f(x + 1) = 5(x + 1) + 2 = 5x + 7 = (5x + 2) + 5$
Ou seja, $f(x)$ de fato aumenta 5 unidades ao acrescentar 1 unidade em x.

Taxa de variação média da função afim

Dados x e $x + h$ números reais, com $h > 0$, o número $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ é chamado **taxa de variação média da função f no intervalo $[x, x + h]$**.

Considerando a função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, a taxa de variação média em relação a x é dada pelo número:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} = \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Assim, a taxa de variação média, em relação a x, de uma função afim qualquer definida por $f(x) = ax + b$ é a.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$$

Fique atento

A notação de intervalo $[x, x + h]$ indica todos os números reais que são maiores do que ou iguais a x e que são menores do que ou iguais a $x + h$. Também podemos indicar esse intervalo como $x \leqslant t \leqslant x + h$, com $t \in \mathbb{R}$.

Perceba, nos próximos exemplos, o uso dos colchetes abertos e fechados e a inclusão ou não dos extremos do intervalo.

- $[2, 6]$: intervalo fechado à esquerda e à direita, ou $2 \leqslant t \leqslant 6$.
- $]2, 6]$: intervalo aberto à esquerda e fechado à direita, ou $2 < t \leqslant 6$.
- $]2, 6[$: intervalo aberto à esquerda e à direita, ou $2 < t < 6$.
- $[2, 6[$: intervalo fechado à esquerda e aberto à direita, ou $2 \leqslant t < 6$.

Observações

- Como a taxa de variação média de uma função afim é constante, podemos dizer apenas **taxa de variação**.
- A taxa de variação da função afim pode ser interpretada como a variação em $f(x)$ que cada aumento de 1 unidade em x causou. Exemplos: a taxa de variação da função afim dada por $f(x) = 5x + 2$ é 5, ou seja, cada acréscimo de 1 unidade em x faz $f(x)$ aumentar 5 unidades; a taxa de variação da função definida por $g(x) = -3x + 2$ é -3, ou seja, cada acréscimo de 1 unidade em x faz $g(x)$ diminuir 3 unidades.
- A taxa de variação da função afim pode ser obtida conhecendo-se 2 dos valores da função, $f(x_1)$ e $f(x_2)$:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ para } x_1 \neq x_2.$$

Propriedade

Uma função afim é **crescente** ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$), ou seja, $f(x)$ aumenta se x aumenta, quando a taxa de variação a é positiva; e é **decrescente** ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$), ou seja, $f(x)$ diminui se x aumenta, quando a taxa de variação a é negativa.

No caso da função afim **constante** (nula ou não nula), na qual $a = 0$, temos:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Atividades

Não escreva no livro

11. Determine a taxa de variação de cada uma das funções afins com as leis dadas a seguir e indique se é uma função crescente, decrescente ou constante.

a) $f(x) = 6x - 5$ $a = 6$; função crescente.

b) $f(x) = 10$ $a = 0$; função constante.

c) $f(x) = -12 + 4x$ $a = 4$; função crescente.

d) $f(x) = -5x + 1$ $a = -5$; função decrescente.

12. Considere as funções afins dadas por $f(x) = 3x + \frac{2}{3}$ e $g(x) = 2x + \frac{3}{4}$. Qual delas tem valor inicial maior? E qual tem taxa de variação maior? $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, logo, a função g tem maior valor inicial; $3 > 2$, logo, a função f tem maior taxa de variação.

13. Escreva no caderno, para cada item, a lei da função afim definida por $f(x) = ax + b$ sabendo que:

a) $f(1) = 5$ e $f(-3) = -7$; $f(x) = 3x + 2$

b) $f(-1) = 7$ e $f(2) = 1$. $f(x) = -2x + 5$

Professor, se julgar oportuno, após a realização da atividade **14**, peça aos estudantes que, em duplas, criem exemplos de leis de funções afins em diferentes situações e contextos. Depois, peça que compartilhem as funções que criaram com os colegas.

14. Escreva no caderno a lei da função afim em cada item sabendo que:

a) a taxa de variação é 3 e o valor inicial é 1; $f(x) = 3x + 1$

b) o valor inicial é 10 e, para cada unidade aumentada em x, a função aumenta 2 unidades; $f(x) = 2x + 10$

c) para cada unidade aumentada em x, a função diminui 1 unidade, e o valor inicial é 3; $f(x) = -x + 3$

d) a taxa de variação é -2 e $f(2) = 5$. $f(x) = -2x + 9$

15. Na produção automatizada de peças, uma indústria tem custo fixo de R$ 8,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida. Sendo x a quantidade de unidades produzidas, junte-se com um colega e façam o que se pede em cada item.

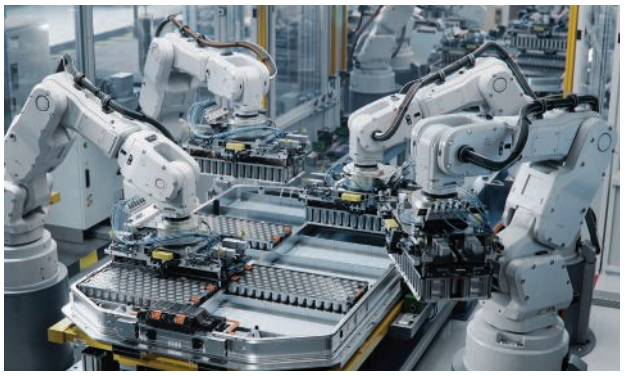
a) Escrevam no caderno a lei da função afim que fornece o custo total de x peças. $f(x) = 8 + 0{,}50x$

b) Indiquem a taxa de variação dessa função e o valor inicial. 0,50 e 8.

c) Calculem o custo de 100 peças. $f(x) = 8 + 0{,}50x \Rightarrow f(100) = 8 + 0{,}50 \cdot 100 = 58$; logo, R$ 58,00.

d) No caderno, elaborem um problema que envolva o conceito de função afim. Depois, troquem com outra dupla para que uma resolva o problema elaborado pela outra.

O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.



IM Imagery/Shutterstock

Produção automatizada de peças.

17. a) A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade.

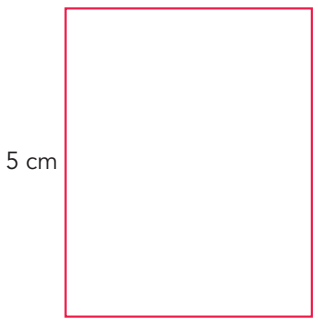
Não escreva no livro

16. Uma aplicação financeira **A**, feita no mês de fevereiro de 2023, variou linearmente de acordo com a medida de intervalo de tempo de aplicação. A instituição financeira emitia todos os dias, às 10 horas, uma mensagem no aplicativo informando o lucro acumulado até aquele instante. No dia 10 de fevereiro, o lucro acumulado registrado foi R$ 150,00 e, em 20 de fevereiro, foi R$ 280,00.

a) Qual é a taxa de variação média do lucro dessa aplicação (em reais) em função da medida de intervalo de tempo (em dias)? R$ 13,00 por dia.

b) Uma aplicação financeira **B**, também iniciada em fevereiro de 2023, variou linearmente ao longo do tempo. No dia 10 de fevereiro, o lucro acumulado registrado foi R$ 100,00 e, em 20 de fevereiro, foi R$ 250,00. Qual das duas aplicações é a mais vantajosa? A aplicação **B**.

17. Com um colega, considerem o retângulo representado.



WYM Design/Arquivo da editora

a) Calculem a medida de perímetro do retângulo quando a medida de comprimento da largura for 1 cm, 1,5 cm, 2 cm, 3 cm e 4 cm e, no caderno, construam uma tabela associando cada medida de comprimento da largura à medida de perímetro do retângulo.

b) Escrevam no caderno a lei da função que expressa a medida de perímetro desse retângulo em função de x. $f(x) = 10 + 2x$

c) Informem qual é a taxa de variação dessa função e qual é o valor inicial. A taxa de variação é 2 e o valor inicial é $f(0) = 10$.

18. Na manutenção de um aquário, um dos procedimentos que deve ser feito semanalmente é a troca parcial de água (TPA), com a substituição de 20% a 30% da medida de volume de água do aquário.

Marcelo vai realizar a TPA do aquário, que está inicialmente cheio, com 60 litros de água. Para isso, vai usar uma mangueira que retira parte da água, de maneira contínua, com vazão de 2 litros por minuto.

Qual das alternativas a seguir descreve a expressão que representa a medida de volume de água (em litros), ainda no aquário, em função da medida de intervalo de tempo (em minutos)?

a) $V(t) = 2t + 60$

b) $V(t) = -2t + 60$

c) $V(t) = 2t - 60$ O valor inicial é $b = 60$ e a taxa de variação é $a = -2$.

d) $V(t) = -2t - 60$ Portanto, $V(t) = -2t + 60$.

e) $V(t) = 60t - 2$ Alternativa **b**.

hedgehog94/Shutterstock

Homem fazendo a troca parcial de água em um aquário.

As imagens não estão representadas em proporção.

19. Leia o trecho a seguir e faça o que se pede no caderno.

Assim como observado para o total de trabalhadores plataformizados, a média de horas habitualmente trabalhadas por semana no trabalho principal dos motoristas de aplicativo (47,9 horas) também superava a média dos que não trabalhavam por aplicativos de transporte de passageiros (40,9 horas). "É uma diferença de sete horas na jornada semanal, ou 17,1% a mais, ao passo que a diferença no rendimento médio era de apenas 1,7% a mais. Isso resulta em menor rendimento/hora para os plataformizados", explica o analista. O rendimento/hora dos motoristas de aplicativo era de R$ 11,80, enquanto o dos motoristas que não usam aplicativo era R$ 13,60.

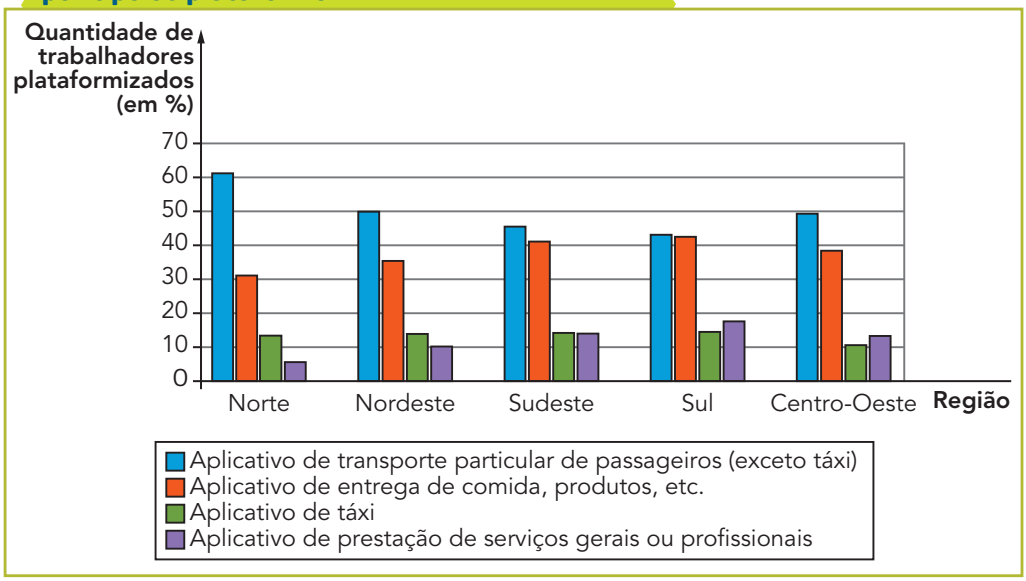
BELANDI, Caio. Em 2022, 1,5 milhão de pessoas trabalharam por meio de aplicativos de serviços no país. *Agência IBGE Notícias*, 2023. Estatísticas Sociais. Disponível em: https://tedit.net/6p5tsb. Acesso em: 10 jul. 2024.

a) Determine a lei da função f que descreve, em média, quanto um motorista plataformizado recebe, em reais, por x horas trabalhadas. $f(x) = 11{,}80x$

b) Analise os gráficos a seguir, que representam a porcentagem de trabalhadores plataformizados por tipo de plataforma e por regiões do país em que atuam.

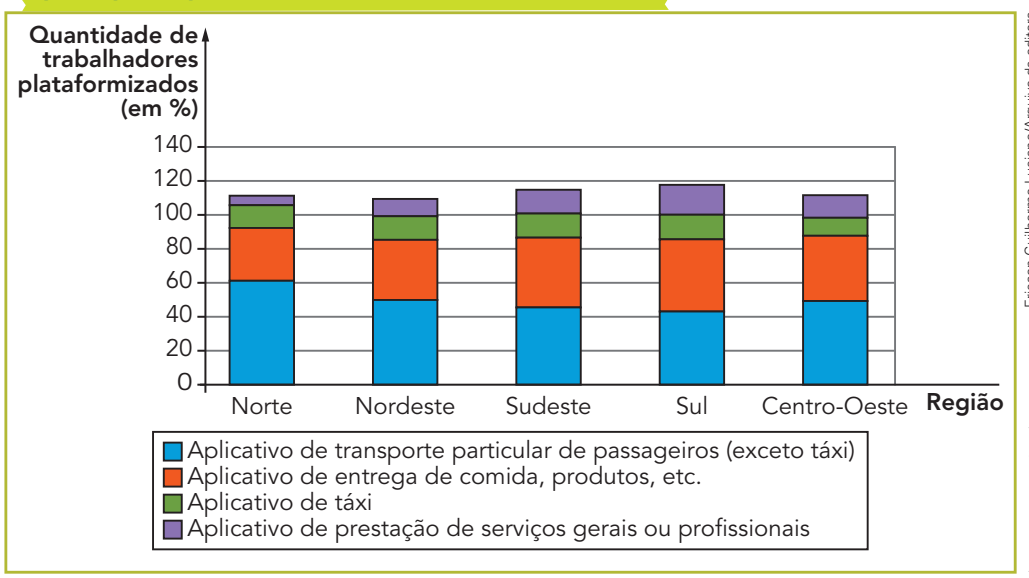
Resposta esperada: O primeiro gráfico é mais adequado, pois a disposição dos dados a respeito de cada tipo de aplicativo, estando lado a lado, permite que o leitor consiga determinar e comparar os valores com mais facilidade.

Porcentagem de trabalhadores plataformizados por tipo de plataforma



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Porcentagem de trabalhadores plataformizados por tipo de plataforma



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados dos gráficos: BELANDI, Caio. Em 2022, 1,5 milhão de pessoas trabalharam por meio de aplicativos de serviços no país. *Agência IBGE Notícias*, 2023. Estatísticas Sociais. Disponível em: https://tedit.net/6p5tsb. Acesso em: 2 jul. 2024.

No caderno, responda justificando sua resposta: Qual dos gráficos você considera mais adequado para a representação desse tipo de dado?

c) Um conceito ligado à plataformização é a uberização, que é a autogestão de trabalho realizada por profissionais que trabalham com plataformas de serviços, como as de motoristas. Pesquise o conceito de plataformização do trabalho. Depois, converse com os colegas a respeito dos prós e dos contras dessa modalidade de prestação de serviços. Respostas pessoais.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. O acesso proposto no boxe *Sobre o assunto* pode ser realizado em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

Sobre o assunto

Em 2022, a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (Pnad Contínua), do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), incluiu o módulo de Teletrabalho e Trabalho por Meio de Plataformas Digitais, coletando pela primeira vez dados a respeito de trabalhadores plataformizados, ou seja, aqueles que utilizam plataformas digitais para exercer ocupações, como motorista de passageiros ou entregador de alimentos.

Com dados como esses, é possível, por exemplo, pautar a partir de fontes confiáveis o debate a respeito da necessidade de regularização de trabalhadores plataformizados.

Acesse o documento completo em: https://tedit.net/xkx4fy. Acesso em: 2 jul. 2024.

fongbeerredhot/Shutterstock

De acordo com a pesquisa, os motociclistas entregadores plataformizados recebem, em média, R$ 8,70 por hora trabalhada, enquanto os que não trabalham com plataformas recebem R$ 11,90.

Não escreva no livro

20. O preço do aluguel de 3 modelos de carro popular é dado por uma taxa fixa, como indicado no quadro a seguir, além de uma cobrança de R$ 0,75 por quilômetro rodado.

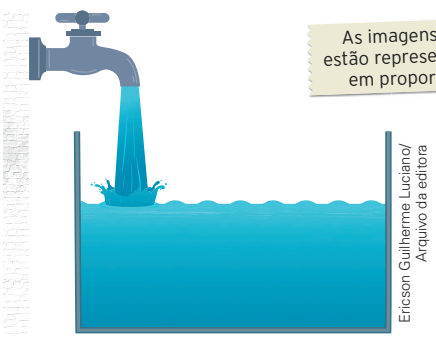
Modelo	Taxa fixa
A	Taxa fixa de R$ 75,00
B	Taxa fixa de R$ 90,00
C	Taxa fixa de R$ 105,00

a) Escreva no caderno a lei da função afim que expressa o preço do aluguel de cada modelo de carro, chamando de x a quantidade de quilômetros rodados.

$f_A(x) = 75 + 0{,}75x$; $f_B(x) = 90 + 0{,}75x$; $f_C(x) = 105 + 0{,}75x$.

b) Qual é a taxa de variação de cada função? 0,75 em todas as funções.

21. Um tanque estava inicialmente com 10 litros de água. A torneira que abastece esse tanque foi aberta, enchendo-o de água com vazão de 5 litros por segundo.



As imagens não estão representadas em proporção.

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

a) Escreva no caderno a lei da função afim que representa a quantidade de água $f(t)$, em litros, nesse tanque após t segundos.

b) Qual é a taxa de variação da função afim obtida? 5

c) Qual é o valor inicial da função afim obtida? 10

d) Modifique os valores apresentados na situação do enunciado para elaborar um novo problema. Depois, troque-o com um colega e resolva o problema elaborado por ele.

22. Um poluente produzido pela queima de combustíveis fósseis é o dióxido de enxofre (SO_2). Uma pesquisa demonstrou que a quantidade aproximada de peixes mortos em certo rio, por semana, é dada por uma função afim da concentração C de SO_2 na água.

Quantidade de peixes mortos de acordo com a concentração de SO_2

Quantidade de peixes mortos	Concentração (em µg/m³)
106	401
109	500

Dados elaborados para fins didáticos.

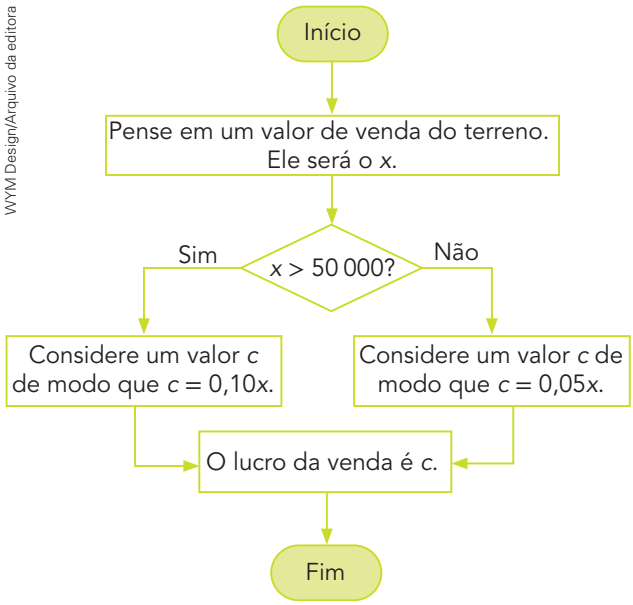
Sabendo que a quantidade de mortes acima de 115 pode levar a problemas de reprodução da espécie, qual é a concentração máxima de SO_2 na água do rio para que a reprodução da espécie não seja prejudicada? 698 µg/m³

21. a) $f(t) = at + b$, assim, $a = 5$ e $b = 10$, portanto $f(t) = 10 + 5t$.

d) O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

23. Sabendo que o lucro de uma imobiliária depende do valor de venda dos terrenos, ela utiliza um programa de computador que efetua o cálculo desse valor. O funcionamento desse programa está descrito no fluxograma a seguir.

WYM Design/Arquivo da editora



a) Escreva no caderno a lei da função que expressa o lucro, em reais, quando o valor de venda de um terreno é superior a R$ 50.000,00. $c = 0{,}10x$

b) Escreva a lei que expressa o lucro, em reais, quando o valor de venda do terreno é inferior ou igual a R$ 50.000,00. $c = 0{,}05x$

c) Utilizando o fluxograma, responda: Se um terreno for vendido por R$ 25.000,00, qual será o lucro? E se for vendido por R$ 60.000,00?

Texto para a próxima atividade.

Ao nível do mar (medida de altitude 0), a água ferve a 100 °C. Entretanto, quanto mais alto estivermos, menor será a medida de temperatura de ebulição da água. No topo do monte Everest, por exemplo, que está a quase 9 000 m de medida de altitude, a água ferve a 70 °C, aproximadamente. Essa relação pode ser expressa pela função $t(a) = -\frac{a}{300} + 100$, em que t é a medida de temperatura de ebulição da água, em °C, e a é a medida de altitude, em m, em que se encontra a água a ser fervida.

23. c) Se ele for vendido por R$ 25.000,00, o lucro será de 5% do valor de venda, que é R$ 1.250,00. Se for vendido por R$ 60.000,00, o lucro será de 10% do valor de venda, que é R$ 6.000,00.

24. Suponha que um grupo de pessoas tenha chegado ao topo do pico da Neblina, com cerca de 3 000 m de medida de altitude. Qual é, aproximadamente, a medida de temperatura de ebulição da água no pico da Neblina? E na região do mar Morto, que fica em uma profunda depressão, onde a medida de altitude é −430 m (430 m abaixo do nível do mar)?

90 °C; aproximadamente 101,43 °C.

André Dib/Pulsar Imagens

O pico da Neblina, que fica no município de Santa Isabel do Rio Negro (AM), é o ponto mais alto do Brasil. Por isso, tanto o pico quanto o parque ao redor, o Parque Nacional do Pico da Neblina, são visitados anualmente por turistas. Foto de 2022.

Carrossel de imagens

25. O proprietário de uma fábrica de chinelos verificou que, quando se produziam 600 pares de chinelos por mês, o custo mensal da empresa era R$ 14.000,00 e, quando se produziam 900 pares, o custo mensal era R$ 15.800,00. Sabendo que a função que representa a relação entre o custo mensal (C) e a quantidade de chinelos produzidos a cada mês (x) é uma função afim.

a) Obtenha C em função de x. $C(x) = 6x + 10\,400$

b) Se a capacidade máxima de produção da empresa é 1200 chinelos por mês, qual é o custo mensal máximo? R$ 17.600,00

c) É sempre vantajoso que uma empresa produza o máximo de sua capacidade? Quais aspectos devem ser considerados para definir a quantidade de produtos que serão produzidos por mês?

Resposta pessoal.

Tecnologias digitais

Construção do gráfico da função afim

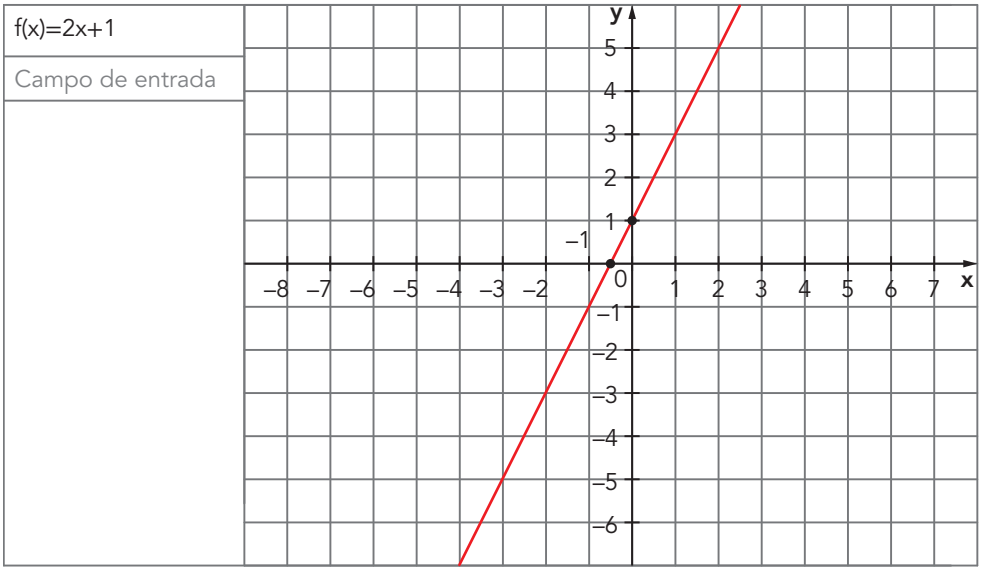
Estudamos anteriormente que, dada uma função $f\colon A \to B$, o gráfico dela é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), para $x \in A$, $y \in B$ e $y = f(x)$, ou seja, $G(f) = \{(x, y); x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$. Assim, o gráfico de uma função pode ser representado no plano cartesiano.

Para representar gráficos de funções afins no plano cartesiano e explorá-los antes de formalizações, podemos recorrer a *softwares* de Geometria dinâmica. Essas ferramentas são úteis para visualizar e manipular graficamente conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais interativo e intuitivo.

Para as atividades propostas a seguir, sugerimos selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que permita a construção de gráficos de funções afins.

No *software* selecionado, represente o gráfico da função afim dada por $f(x) = 2x + 1$ e destaque pontos relevantes. Para isso, apresentamos a seguir alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* de Geometria dinâmica.

1º passo: Insira a lei da função **f(x)=2*x+1** no campo de entrada. Note que o símbolo * geralmente representa a operação de multiplicação nesse tipo de *software*.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção em um *software* de Geometria dinâmica.

Fique atento

Lembre-se de adaptar as instruções de acordo com o *software* escolhido, já que as interfaces e os procedimentos podem variar.

Professor, oriente os estudantes na escolha do *software on-line* ou aplicativo para a construção dos gráficos de funções afins de modo que o programa escolhido apresente todas as funcionalidades necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir. Auxilie-os também nas explorações iniciais do programa e na identificação das ferramentas e das configurações disponíveis, além de como acessá-las.

Fique atento

Geralmente, para mover a representação nos *softwares* de Geometria dinâmica, basta clicar em algum ponto da tela e arrastar. Além disso, você pode ampliar ou reduzir a imagem usando as ferramentas de *zoom* disponíveis nos *softwares* ou simplesmente utilizando o *scroll* do *mouse* (a "rodinha" que geralmente está na parte superior da maioria dos *mouses*).

2º passo: Insira, uma por vez, as coordenadas dos pontos:

A(–2, –3), **B(–1, –1)**, **C(–1/2, 0)**, **D(0, 1)** e **E(1, 3)**

Perceba que todos os pontos pertencem ao gráfico da função, que é uma reta.

Professor, caso os estudantes apresentem dificuldade para identificar o conjunto de dados correto, destaque que a taxa de uma função afim é constante, o que pode ser observado apenas no conjunto de dados **2**, que apresenta uma taxa de variação constante igual a 2.

1. Considere as tabelas a seguir, que mostram 2 conjuntos de dados distintos.

Conjunto de dados 1

x	0	1	2	3	4
y	1	2	5	10	17

Conjunto de dados 2

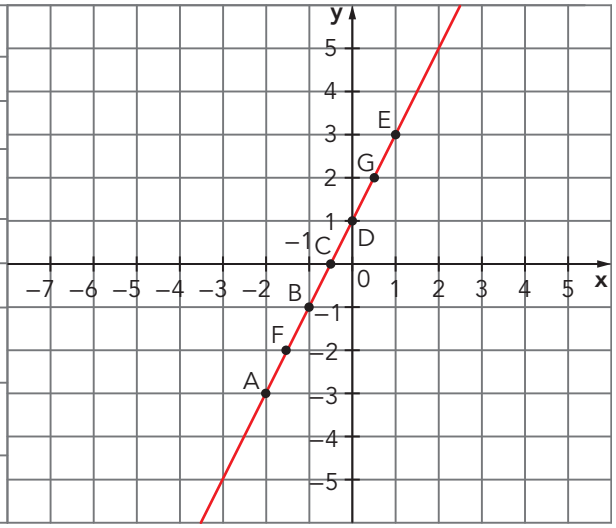
x	0	1	2	3	4
y	1	3	5	7	9

Usando um *software*, construa um gráfico para representar cada um dos conjuntos de dados apresentados. Para isso, insira as coordenadas de cada um dos pontos indicados no conjunto de dados como indicado no 2º passo. Depois, responda: Qual dos 2 conjuntos de dados representa uma relação que pode ser modelada por uma função afim? Qual é a lei dessa função? O conjunto de dados **2**; $f(x) = 2x + 1$.

3º passo: Agora vamos criar pontos de uma maneira diferente; insira os comandos **F(–3/2, f(–3/2))** e **G(1/2, f(1/2))** para criar os pontos $F = \left(-\frac{3}{2}, f\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$ e $G = \left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

Os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* não dependem da função, enquanto os pontos *F* e *G* são dependentes. Tente clicar, segurar e arrastar os pontos para fora da reta e perceba que com os primeiros você conseguirá, mas com os últimos, não.

$f(x)=2x+1$
$A=(-2,-3)$
$B=(-1,-1)$
$C=\left(-\frac{1}{2},0\right)=(-0,5,0)$
$D=(0,1)$
$E=(1,3)$
$F=\left(-\frac{3}{2},f\left(-\frac{3}{2}\right)\right)=(-1,5,-2)$
$G=\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=(0,5,2)$



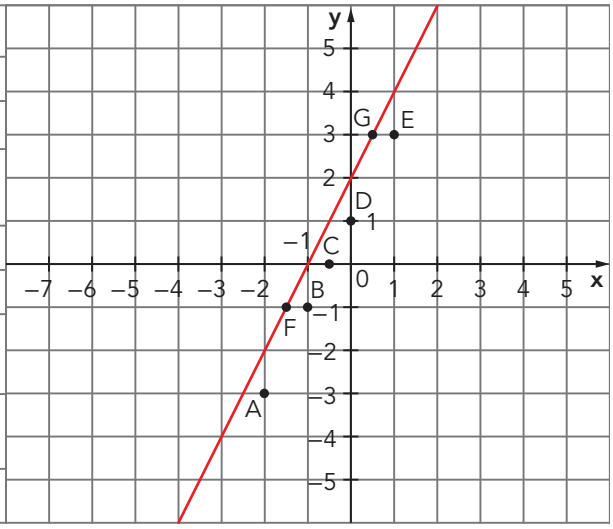
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção, no *software* de Geometria dinâmica, após o 3º passo.

4º passo: Agora, vamos alterar a lei da função f para analisar o comportamento do gráfico da nova função e dos pontos inseridos anteriormente.

Para isso, substitua o coeficiente b (valor inicial) de 1 por 2 na lei da função.

$f(x)=2x+2$
$A=(-2,-3)$
$B=(-1,-1)$
$C=\left(-\frac{1}{2},0\right)=(-0,5,0)$
$D=(0,1)$
$E=(1,3)$
$F=\left(-\frac{3}{2},f\left(-\frac{3}{2}\right)\right)=(-1,5,-1)$
$G=\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=(0,5,3)$



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção, no *software* de Geometria dinâmica, após o 4º passo.

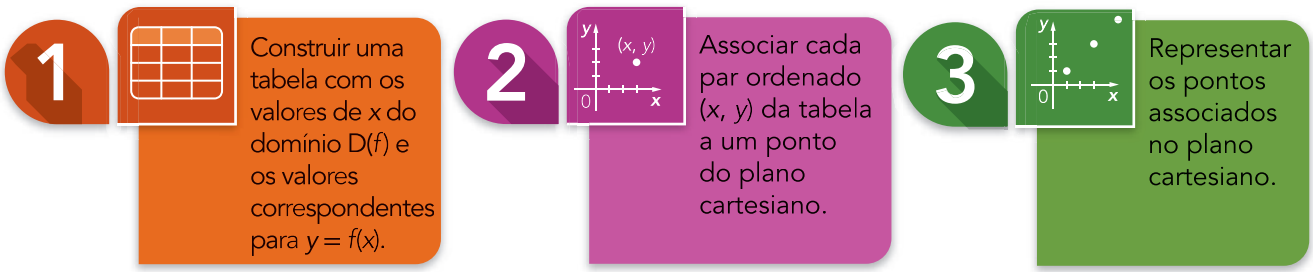
Você vai perceber que os pontos que foram inseridos no *software* na forma $(x, f(x))$, que são os pontos F e G, continuaram pertencendo ao gráfico da função f depois da alteração da lei dela. Já os pontos que não foram inseridos dessa maneira (os pontos A, B, C, D e E) não mudaram de posição e, por isso, não são mais pontos pertencentes ao gráfico da função f.

2. Qual valor devemos adicionar à ordenada dos pontos A, B, C, D e E após o 4º passo da atividade para que esses pontos pertençam ao gráfico da função definida por $f(x) = 2x + 2$? 1 unidade.

3. Por qual valor deve ser trocado o coeficiente b (valor inicial) em $f(x) = 2x + 2$ para que o gráfico de f passe pela origem (0, 0) do plano cartesiano? Represente em um *software* de Geometria dinâmica o gráfico da função f depois dessa modificação e verifique sua resposta. Por 0.

Gráfico da função afim

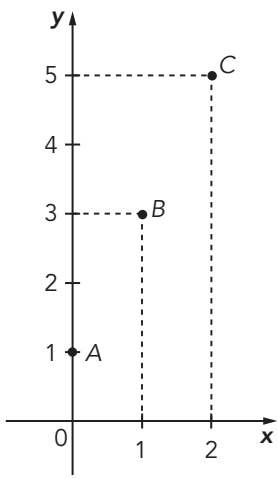
Para representar no plano cartesiano o gráfico de uma função afim f de domínio discreto e limitado (isto é, D(f) é formado por uma quantidade limitada de valores), podemos seguir os seguintes passos:



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Por exemplo, acompanhe a representação do gráfico da função dada por $f(x) = 2x + 1$, sendo o domínio D(f) = {0, 1, 2}.

x	$y = f(x) = 2x + 1$
0	1
1	3
2	5

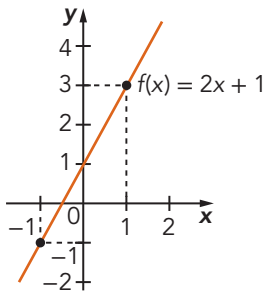


Banco de imagens/Arquivo da editora

No caso de uma função afim de domínio real, dada por $f(x) = ax + b$, é possível demonstrar que o gráfico dela é uma **reta**. Como toda reta é determinada por 2 pontos distintos pertencentes a ela, para representar o gráfico de uma função afim de domínio real, basta escolher 2 pontos distintos do domínio e seguir os passos citados, representando uma reta que passe pelos pontos marcados após o 3º passo.

Por exemplo, para representar o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$, como, nesse caso, $D(f) = \mathbb{R}$, podemos escolher 2 valores arbitrários de x e determinar os valores correspondentes de y:

x	$y = f(x) = 2x + 1$
–1	–1
1	3



Banco de imagens/Arquivo da editora

O gráfico é o conjunto de todos os pontos (x, y), com x real e $y = 2x + 1$, resultando na reta representada.

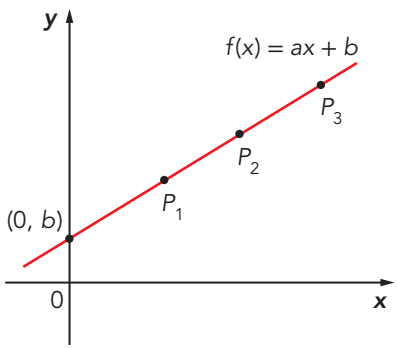
O coeficiente a, que é a **taxa de variação** da função f, também é conhecido como **declividade**, **inclinação** ou **coeficiente angular** da reta em relação ao eixo x.

O coeficiente b, que é o **valor inicial** da função f, também é conhecido como **coeficiente linear** da reta.

Reflita Não escreva no livro

Por que os gráficos dos 2 exemplos são diferentes se a lei de ambas as funções é $f(x) = 2x + 1$?

Porque, no 1º exemplo, $D(f) = \{0, 1, 2\}$ e, no 2º exemplo, $D(f) = \mathbb{R}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Geometricamente, b é a ordenada do ponto onde a reta, que é gráfico da função dada pela lei $f(x) = ax + b$, intersecta o eixo y. Perceba que, para $x = 0$, temos $f(0) = a \cdot 0 + b = b$.

Atividades

Não escreva no livro

26. Considere uma situação em que os pontos $A(13, 50)$, $B(26, 78)$, $C(42, 150)$ e $D(84, 250)$ pertencem ao gráfico de uma função f. Podemos afirmar que o gráfico dessa função é uma reta? Justifique sua resposta.

26. Não, pois não há uma taxa de variação constante que permita relacionar todos os pontos. Ao representar esses pontos no plano cartesiano, verificamos que os pontos B e C não pertencem à reta que passa pelos pontos A e D.

27. Um professor particular de História cobra um valor fixo de R$ 12,50 e um adicional de R$ 30,00 por hora de aula.

Depois de calcular os valores referentes a aulas de 1 até 7 horas e organizar esses dados em uma tabela, ele tentou representá-los em um plano cartesiano com a expectativa de obter uma reta. Você concorda que ele vai obter uma reta? Justifique sua resposta.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

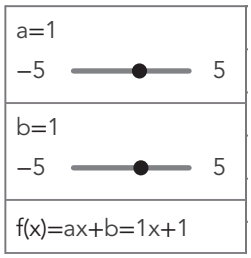
Tecnologias digitais

Não escreva no livro

Análise dos coeficientes da função afim

Vamos utilizar novamente um *software* de Geometria dinâmica, agora para explorar os coeficientes de funções afins.

1º passo: Nas ferramentas do *software*, localize e selecione o controle deslizante. Ao inserir o controle deslizante, defina o parâmetro *a* com valor inicial igual a 1 e variando de −5 a 5. Insira outro controle deslizante para um novo parâmetro *b*, também com valor inicial igual a 1 e variando de −5 a 5. Depois, insira o comando: **f(x)=ax+b** no campo de entrada. Essa operação deve criar o gráfico da função de lei $f(x) = ax + b$. Como tanto *a* quanto *b* são iguais a 1, o gráfico exibido será da função dada por $f(x) = x + 1$.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção, no *software* de Geometria dinâmica, após o 1º passo.

2º passo: Utilize o controle deslizante de *a* e altere gradualmente o valor dele. Analise o que acontece com o gráfico da função. Repita a operação para o controle deslizante de *b* (utilize um controle deslizante por vez). As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

1. Considere a representação que você fez da função afim dada por $f(x) = ax + b$.

a) O que ocorre no gráfico da função *f* quando modificamos o valor do coeficiente *a*, de modo que assuma valores negativos, valores positivos e valores nulos?

b) E o que ocorre no gráfico da função *f* quando modificamos o valor do coeficiente *b*, de modo que assuma valores negativos, valores positivos e valores nulos?

2. Uma pessoa, ao pesquisar na internet o preço de alguns livros, encontrou os produtos que queria em 2 lojas virtuais distintas. O valor dos livros era o mesmo, porém em cada loja o cálculo do valor do frete era diferente. Na loja **A**, pagava-se o valor fixo de R$ 5,00 mais R$ 3,00 por livro comprado. Na loja **B**, pagava-se o valor fixo de R$ 10,00 mais R$ 2,00 por livro.

a) Qual é a lei da função que relaciona o preço do frete, em reais, com a quantidade de livros adquiridos em cada uma das lojas? Loja **A**: $P_A(x) = 3x + 5$; loja **B**: $P_B(x) = 2x + 10$.

b) Para comprar 4 livros, qual valor de frete é mais barato: na loja **A** ou na loja **B**?

c) Usando o *software* de Geometria dinâmica, represente o gráfico das 2 funções em um mesmo plano cartesiano, identifique o ponto de intersecção das 2 retas e interprete como esse ponto pode ser utilizado para analisar em quais situações comprar em cada uma das lojas é mais vantajoso financeiramente.

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Traçado do gráfico da função afim

Vamos representar os gráficos de algumas funções afins, dadas por $f(x) = ax + b$, no plano cartesiano.

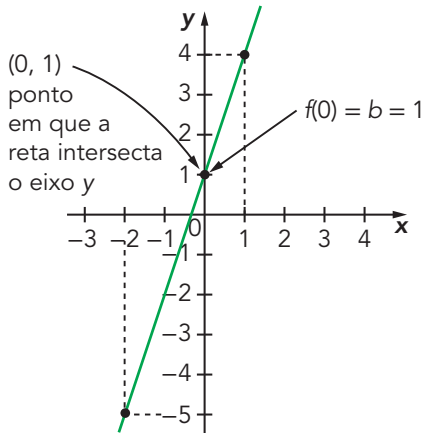
Como o gráfico da função afim é uma reta e, para representar uma reta, basta conhecermos 2 pontos distintos pertencentes a ela, determinamos 2 pontos distintos da função e representamos a reta.

Analise alguns exemplos.

a) $f(x) = 3x + 1$

x	$f(x)$
-2	$3 \cdot (-2) + 1 = -5$
1	$3 \cdot (1) + 1 = 4$

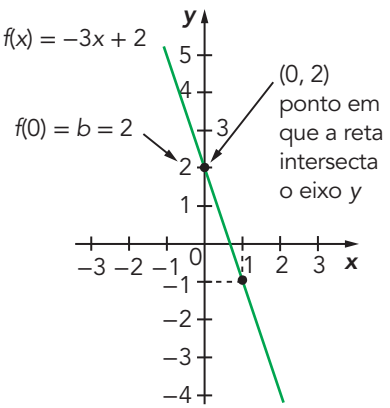
Nesse caso, temos $a = 3$ (e $a > 0$); portanto, a função f é crescente e o gráfico da função é **ascendente** ("sobe" da esquerda para a direita).



b) $f(x) = -3x + 2$

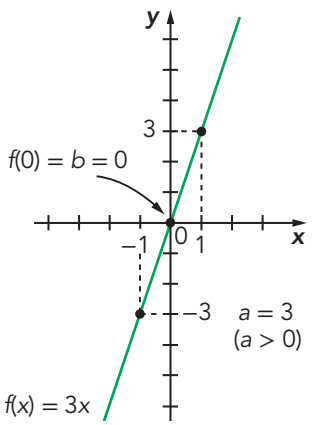
x	$f(x)$
0	$-3 \cdot (0) + 2 = 2$
1	$-3 \cdot (1) + 2 = -1$

Nesse caso, temos $a = -3$ (e $a < 0$), então a função é decrescente e o gráfico da função é **descendente** ("desce" da esquerda para a direita).



c) $f(x) = 3x$

x	$f(x)$
-1	-3
1	3



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

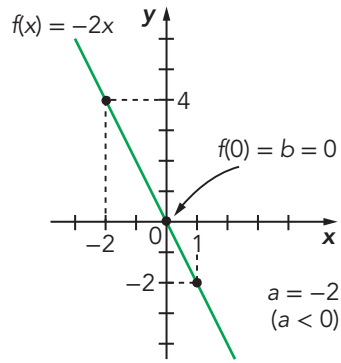
Fique atento

A **função linear**, dada pela lei $f(x) = ax$, com $a \neq 0$, é um caso particular de função afim. A função do exemplo **c** é uma função linear.

O gráfico de uma função linear é uma reta não vertical que passa pela origem (0, 0).

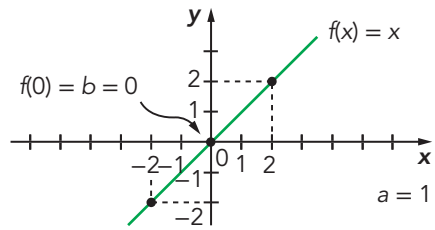
d) $f(x) = -2x$

x	$f(x)$
-2	4
1	-2



e) $f(x) = x$

x	$f(x)$
-2	-2
2	2



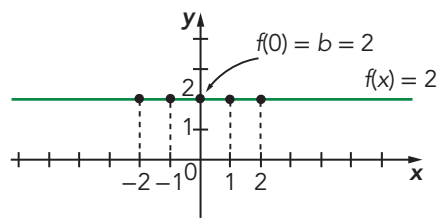
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

A função do exemplo **c** é a **função identidade**, ela é dada pela lei $f(x) = x$ e é um caso particular da função afim. A função identidade também é uma função linear.

f) $f(x) = 2$

x	$f(x)$
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2



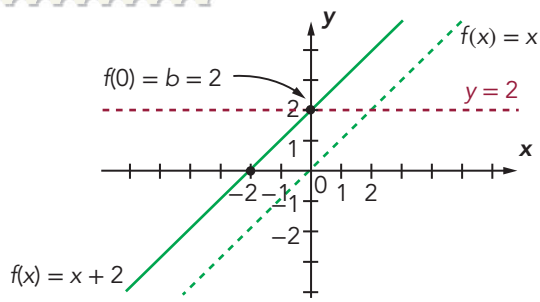
Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

A função do exemplo **f** é uma **função constante**. O gráfico da função constante é uma reta paralela ou coincidente com o eixo x e que passa pelo ponto $(0, b)$. Nesse caso, $\text{Im}(f) = \{b\}$.

g) $f(x) = x + 2$

x	$f(x)$
-2	0
0	2



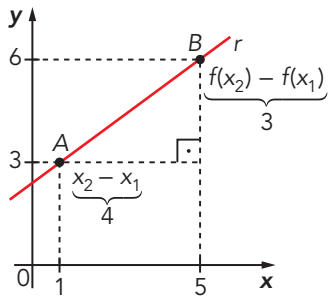
Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

1. Calcule e indique no caderno a taxa de variação da função cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos $A(1, 3)$ e $B(5, 6)$. Verifique se essa função afim é crescente ou decrescente.

Resolução

Sabemos que: $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, para $x_1 \neq x_2$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Em $A(1, 3)$, temos $f(1) = 3$ e, em $B(5, 6)$, temos $f(5) = 6$.

Assim, $a = \dfrac{6 - 3}{5 - 1} = \dfrac{3}{4}$.

Portanto, a taxa de variação de f é $\dfrac{3}{4}$.

Como $\dfrac{3}{4} > 0$, a função é crescente.

2. Um motociclista percorre uma estrada movimentando-se de acordo com a função horária dada por $S(t) = 100t - 50$, em que $S(t)$ representa a posição (em km) e t representa a medida de intervalo de tempo (em h) dele. Depois de quantas horas o motociclista passa pelo marco do quilômetro zero (km 0)?

Resolução

Para que o motociclista passe pelo marco do km 0, devemos ter $S(t) = 0$. Logo:

$$0 = 100t - 50 \Rightarrow 100t = 50 \Rightarrow t = \frac{50}{100} \Rightarrow t = 0{,}5$$

O motociclista passa pelo quilômetro zero depois de 0,5 h.

Interpretação

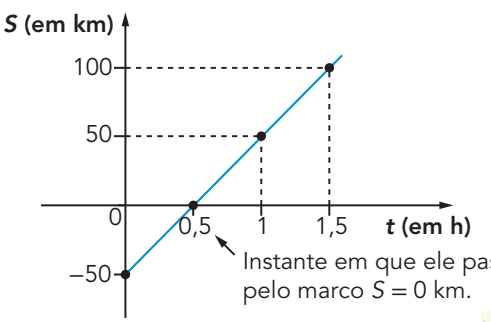
A função dada por $S(t) = 100t - 50$ é uma função afim cuja lei é do tipo $S(t) = vt + S(0)$.

Quando $t = 0$, temos $S(0) = -50$ km, que representa a posição inicial que o motociclista ocupava no início do movimento (estava 50 km antes do marco km 0). Ele se movimentava com medida de velocidade constante de 100 km/h para a frente (velocidade positiva), isto é, $v = 100$ km/h.

Para que ele chegue ao marco do km 0 partindo do marco −50 km, ele precisa percorrer uma medida de distância de 50 km. Como ele se desloca com medida de velocidade constante de 100 km/h, temos:

$$\begin{array}{ccc} 100 \text{ km} & \times & 1 \text{ h} \\ 50 \text{ km} & & t \end{array}$$

$$t = 0{,}5 \text{ h}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Graficamente, temos:

3. A tabela a seguir fornece a posição $S(t)$, em km, ocupada por um veículo em relação ao km 0 da estrada em que se desloca em movimento uniforme, para vários instantes t (em h).

Deslocamento de um veículo

t (em h)	0	2	4	6	8	10
$S(t)$ (em km)	50	100	150	200	250	300

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Qual é a lei da função horária que descreve a posição desse veículo em função da medida de intervalo de tempo?

b) Em que instante o veículo ocupará a posição $S(t) = 500$ km?

Resolução

a) Pelo enunciado, a medida de velocidade do veículo é constante (movimento uniforme). Como $v = \frac{S}{t}$, temos $v = \frac{50 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 25$ km/h. No início ($t = 0$), o veículo ocupa a posição inicial $S(0) = 50$. Como o movimento é uniforme, podemos descrever a posição por uma função afim dada por $S(t) = vt + S(0)$. Assim, $S(t) = 25t + 50$.

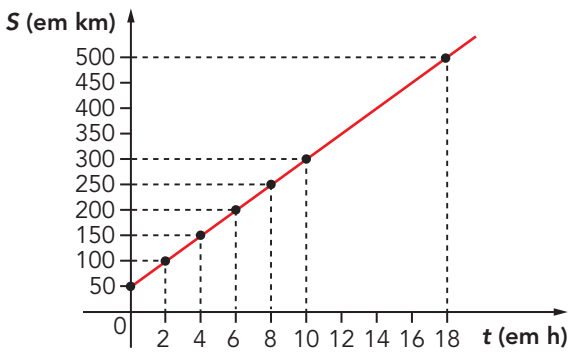
Basta substituir t por alguns valores da tabela para verificar se a posição $S(t)$ corresponde ao valor calculado.

b) Para encontrar o instante em que o veículo ocupa a posição $S = 500$ km, fazemos:

$$S(t) = 25t + 50 \Rightarrow 500 = 25t + 50 \Rightarrow 25t = 450 \Rightarrow t = \frac{450}{25} = 18$$

Ou seja, $t = 18$ h. Logo, $S = 500$ km após 18 h do início do movimento.

Graficamente, temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

O gráfico da função afim dada por $S(t) = vt + S(0)$ é uma reta que intersecta o eixo S em $(0, S(0)) = (0, 50)$. Prolongando a reta até a posição $S(t) = 500$ km, obtemos $t = 18$.

Atividades

Não escreva no livro

28. Represente no caderno, em um plano cartesiano, o gráfico de cada função dada.

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = x + 3$

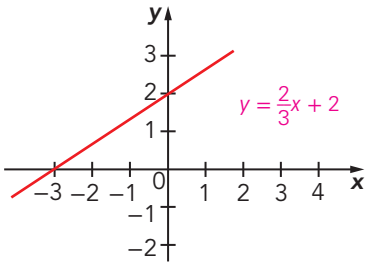
c) $f(x) = -2x + 5$

d) $f(x) = -2 - 2x$

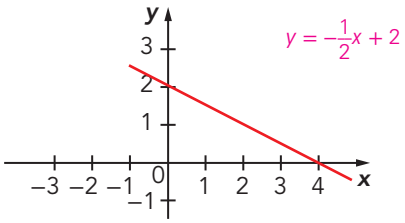
Os gráficos encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

29. Dados os gráficos das funções afins de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, escreva no caderno a lei $f(x) = ax + b$ correspondente a cada item.

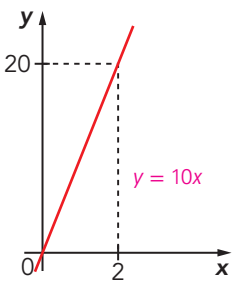
a)



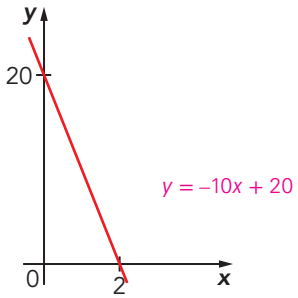
b)



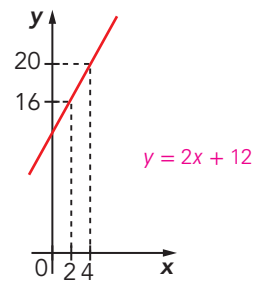
c)



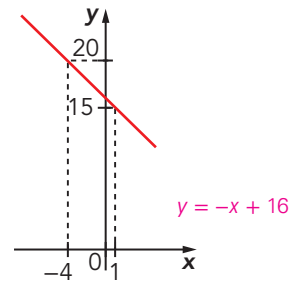
d)



e)



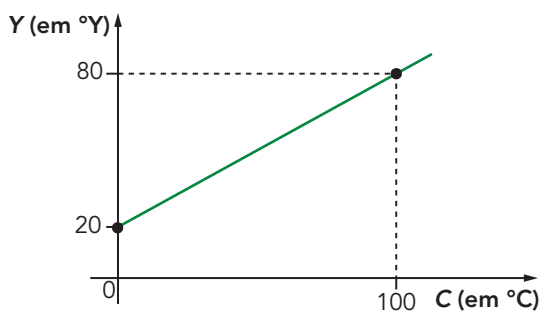
f)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

30. O custo de um produto é calculado pela lei $c = 10 + 20q$, na qual c indica o custo (em reais) e q, a quantidade produzida (em unidades). Utilize régua milimetrada e represente no caderno o gráfico de c em função de q. Depois, compare com o gráfico de um colega para analisar as representações. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

31. Em uma viagem, Pedro verifica em um termômetro local que a medida de temperatura máxima para aquele dia seria 36,8 °Y. Curioso para saber a medida dessa temperatura na escala Celsius, Pedro fez a leitura de 2 medidas de temperatura com termômetros graduados em °Y e °C e, sabendo a relação entre essas escalas termométricas se tratar de uma função afim, construiu o gráfico a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

34. d) $V(t) = 60t$; nesse caso, a vazão vai corresponder à taxa de variação para esvaziar a piscina, mas apresentada com o sinal contrário. Isso ocorre porque, nesse caso, o valor refere-se à vazão para encher a piscina, que deve estar inicialmente vazia.

De acordo com os valores expressos no gráfico, qual é a lei da função que representa a relação termométrica entre a medida de temperatura na escala Y e na escala Celsius? (Considere Y a medida de temperatura na escala Y e C a medida de temperatura na escala Celsius.) Alternativa **c**.

a) $Y = C + 20$

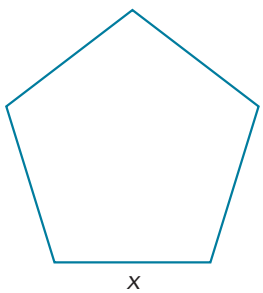
b) $Y = 0{,}06C + 20$

c) $Y = 0{,}6C + 20$

d) $Y = 20C + 0{,}6$

e) $Y = 0{,}6C - 20$

32. A seguir está representado um pentágono regular cujo comprimento do lado mede x.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) A resposta depende dos valores utilizados pelos estudantes.

a) Construa no caderno uma tabela associando a medida de comprimento (x) do lado à respectiva medida de perímetro (p) do pentágono regular para pelo menos 4 valores de x.

b) Se a medida de comprimento do lado dobra ou triplica, o que acontece, respectivamente, com a medida de perímetro? Justifique. A medida de perímetro dobra e triplica, respectivamente.

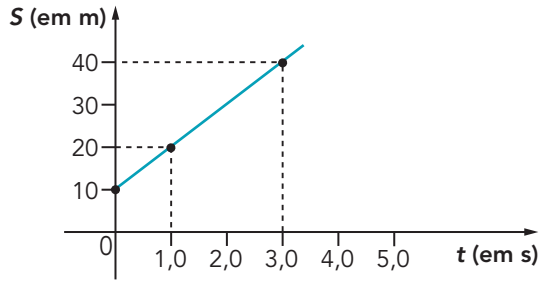
c) Determine a lei de formação da função que fornece a medida de perímetro p do pentágono regular em função da medida de comprimento x do lado. $p(x) = 5x$

d) Represente no caderno o gráfico da função p cuja lei foi determinada no item anterior. O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

e) Como é chamado esse tipo de variação que você analisou da medida de perímetro em relação à medida de comprimento do lado do pentágono?

f) A função p é uma função linear? E é uma função identidade? Sim; não.

33. Analise o gráfico da posição S de um ponto material; essa posição é dada em função da medida de intervalo de tempo t.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Determine no caderno:

a) a medida de velocidade desse ponto material; $v = 10$ m/s

b) a lei da função do movimento desse ponto material; $S = 10t + 10$

c) a posição desse ponto material no instante $t = 3{,}0$ s. $S = 10 \cdot 3 + 10 = 30 + 10 = 40$; logo, 40 m.

34. A medida de volume V, em litros, de água de uma piscina que está sendo esvaziada é dada pela lei $V(t) = -60t + 4\,320$, em que t é a medida de intervalo de tempo em horas.

a) Calcule a medida de volume de água contida na piscina exatamente 3 horas e meia depois que começou a ser esvaziada.
$t = 3{,}5 \Rightarrow V(3{,}5) = -60 \cdot (3{,}5) + 4\,320 = -210 + 4\,320 = 4\,110$; logo, 4 110 L.

b) Determine a medida de intervalo de tempo necessária para a piscina esvaziar totalmente. $V(t) = 0 \Rightarrow -60t + 4\,320 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 60t = 4\,320 \Rightarrow t = 72$; logo 72 h.

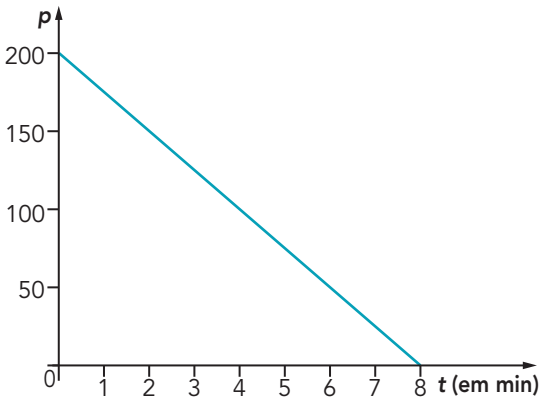
c) Construa no caderno um gráfico que represente essa situação.
O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

d) Considerando que a vazão da bomba que esvazia essa piscina seja a mesma da usada para enchê-la, determine a lei da função que representa o enchimento dessa piscina. Justifique sua resposta.

e) Modifique a situação indicada no enunciado. Para isso, escolha uma nova medida de volume inicial para a piscina, em litros, e uma nova taxa de esvaziamento, em litros por hora. Em seguida escreva no caderno o novo enunciado utilizando esses valores e faça o que é pedido nos itens **a**, **b** e **c** considerando o novo enunciado. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

32. e) Variação linear ou variação constante.
Professor, reforce aos estudantes que uma variação constante é diferente de uma função constante, ou seja, diferente de uma função definida por $f(x) = 0$.

35. Em uma situação de emergência, um estabelecimento retira todos os convidados em segurança, de maneira organizada, usando uma única saída de emergência, em apenas 8 minutos. O gráfico a seguir é de uma função afim da quantidade de pessoas (p) dentro do estabelecimento em função da medida de intervalo de tempo (t), em minutos.



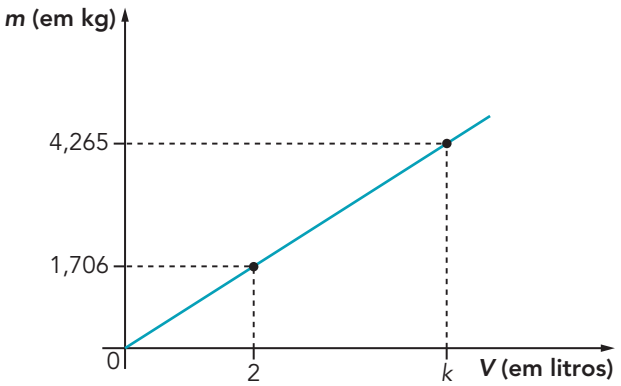
Banco de imagens/Arquivo da editora

Quantas pessoas ainda estavam no interior do estabelecimento após 5 minutos de evacuação?

a) 100 **b)** 90 **c)** 80 **d)** 75 **e)** 60

Alternativa **d**.

36. O gráfico a seguir representa a relação entre a medida de massa e a medida de volume do óleo *diesel*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

nexusseveri/Adobe Stock

O engenheiro alemão Rudolf Diesel (1858-1913) inventou um meio mecânico para explorar a reação química originada da mistura de óleo e do oxigênio presente no ar. Por esse motivo, em homenagem a ele, o óleo *diesel* recebeu esse nome.

a) Determine a medida de densidade (isto é, a razão entre a medida de massa e a medida de volume) desse óleo, em quilogramas por litro. 0,853 kg/L

b) Calcule o valor da abscissa k. $k = 5$

c) Escreva no caderno a lei da função que modela essa situação. $y = 0{,}853x$

d) Elabore outro problema que trate de massa, volume e densidade e que também seja modelado pelo gráfico de uma função afim. Depois, troque com um colega e tente resolver o problema elaborado por ele. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

37. Uma torneira enche um tanque em 10 horas e uma outra, em 12 horas. Com o tanque completamente vazio, as 2 torneiras são abertas.

a) Calcule a fração do tanque que essas 2 torneiras, juntas, terão enchido ao final de cada uma das 5 primeiras horas. $\frac{11}{60}, \frac{22}{60}, \frac{33}{60}, \frac{44}{60}, \frac{55}{60}$.

b) No caderno, represente graficamente o que é pedido no item **a** e represente nesse gráfico a medida de intervalo de tempo em que o tanque ficará cheio. O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Conexões

A função afim e as flautas rikbaktsas

Infográfico clicável

Héctor Gomez/ Arquivo da editora

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Diversidade Cultural* e *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*. Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

1

A bacia do rio Juruena, situada no noroeste mato-grossense, abriga a comunidade indígena Rikbaktsa. *Rik* pode ser traduzido como "o ser humano", *bak* é um reforço do prefixo anterior e *tsa* indica o plural; dessa maneira, o nome Rikbaktsa significa "os seres humanos". Os indígenas dessa comunidade são habilidosos no uso das canoas e por isso são conhecidos na região como "canoeiros".

2

A educação nas aldeias é organizada em escolas indígenas e os estudantes aprendem os conteúdos previstos no currículo nacional. Dos professores das escolas, os mais antigos foram educados no internato jesuítico de Utiariti, enquanto os mais novos foram educados pelos mais velhos até o nível de Educação Básica e tiveram formação profissional na Faculdade Indígena Intercultural do *campus* da Universidade Estadual de Mato Grosso (Unemat-MT). Esse processo de educação no internato jesuítico ocorreu durante uma ocupação de jesuítas em conjunto com organizações que tinham interesse em explorar os recursos naturais do território dos Rikbaktsa, iniciada em 1957. Apenas na década de 1970, por reivindicação dos Rikbaktsa, os missionários reconheceram o direito dos indígenas à própria cultura, como parte do movimento de decolonialidade.

3

No entanto, muitos professores e estudantes não se identificam com os conteúdos e contextos culturais utilizados na faculdade e nas escolas para o ensino de Matemática, já que eles retratam uma realidade distinta daquela que os Rikbaktsa conhecem. Esse fato tende a ser responsável por algumas dificuldades no ensino e na aprendizagem dos conteúdos de Matemática.

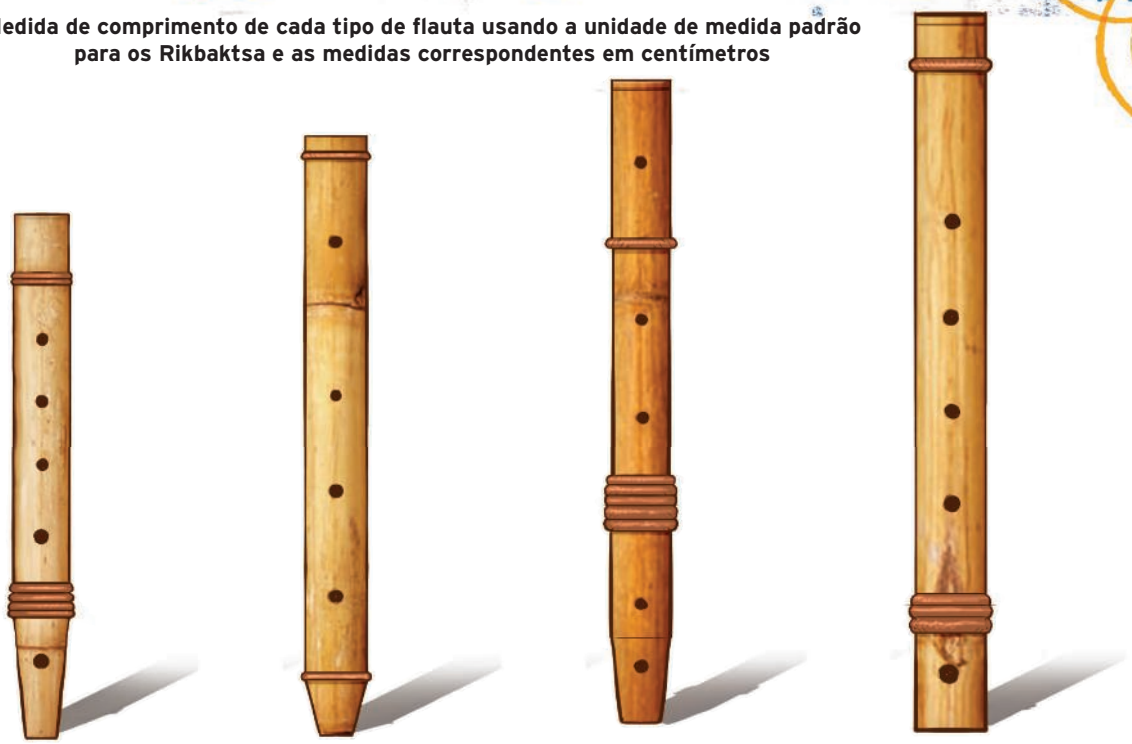
4

Dentro dos conceitos da Etnomatemática, pesquisadores da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) fizeram a proposta de contextualizar o ensino da função afim, um dos conteúdos que aparecem nos livros, a partir da construção das flautas usadas pelos Rikbaktsa, transformando assim o estudo da função afim da Matemática no estudo da "função das flautas".

5

Os Rikbaktsa produzem flautas que são utilizadas no cotidiano da comunidade. Essas flautas podem ser feitas de bambu, taquara ou ossos de aves, como o gavião-real, e podem conter 3 ou 4 orifícios. Dentre as diferentes flautas produzidas, ressaltamos 4 tipos: *izowy*, *tsapukte*, *ilharaiktsa* e *izowytsik*. Cada tipo de flauta também tem diferentes medidas de comprimento e, dessa maneira, o som que emite é distinto. Quanto maior a medida de comprimento da flauta, mais grave é o som emitido.

Medida de comprimento de cada tipo de flauta usando a unidade de medida padrão para os Rikbaktsa e as medidas correspondentes em centímetros



Héctor Gomez/Arquivo da editora

Izowytsik	*Iharaiktsa*	*Tsapukte*	*Izowy*
Em palmos: 4.	Em palmos: 4,5.	Em palmos: 5.	Em palmos: 5,5.
Em centímetros: 68.	Em centímetros: 76,5.	Em centímetros: 85.	Em centímetros: 93,5.

Fontes dos dados: MATTOS, José Roberto Linhares de; POLEGATTI, Geraldo Aparecido. Um encontro etnomatemático na educação escolar indígena: a função das flautas dos Rikbaktsa. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. *Anais* [...]. Curitiba: PUC-PR, 2013. Disponível em: https://tedit.net/k5pqik. RIKBAKTSÁ. In: Povos Indígenas no Brasil. São Paulo: Instituto Socioambiental, 2021. Disponível em: https://tedit.net/i5dk2j. Acesso em: 24 jun. 2024.

Serge Pierre Guiraud/Acervo do fotógrafo

Indígena rikbaktsa tocando flauta na terra indígena Japuíra (MT). Foto de 2009.

Conecte com o texto

1. Considerando x a medida de comprimento da flauta, em palmos, e $f(x)$ a medida de comprimento da flauta, em centímetros, como poderíamos escrever a lei $f(x) = ax + b$ utilizando os dados apresentados? Dica: Para facilitar a resolução, elabore uma tabela com os dados apresentados. $f(x) = 17x$
2. Represente no caderno o gráfico dessa função. O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
3. O que representa, na prática, o coeficiente a dessa função? A medida de comprimento aproximada do palmo do artesão, em centímetros.

Pesquise e debata

Professor, se julgar oportuno, peça aos estudantes que elaborem problemas contextualizados envolvendo as funções modeladas. Após essa modelagem, eles podem compartilhar com a turma as funções modeladas e os problemas elaborados.

4. Pense como os pesquisadores e procure na sua comunidade contextos que podem ser modelados por uma função afim. Descreva a situação e, se for possível coletar dados, modele a função. Resposta pessoal.
5. Pesquise mais o que significa decolonialidade e como esse conceito é importante para fortalecer as culturas indígenas e orientar as práticas educacionais nas aldeias. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Sobre o assunto

Para conhecer mais sobre os Rikbaktsa, sugerimos o *site* Povos Indígenas no Brasil, disponível em: https://tedit.net/7g3eog. Acesso em: 24 jun. 2024.

Função linear e proporcionalidade

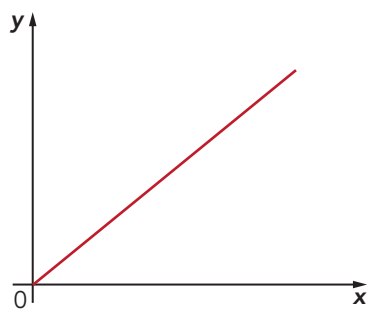
Conforme estudamos, uma **função linear** é uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O gráfico dessa função, no plano cartesiano, é uma reta não vertical (o gráfico representa uma função) e não horizontal ($a \neq 0$) que passa pela origem (0, 0).

Em geral, os problemas que envolvem proporcionalidade podem ser resolvidos por meio de uma função linear; por isso, afirmamos que a função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

Vamos supor que uma grandeza y seja função da grandeza x, ou seja, $y = f(x)$. Dizemos que y é **diretamente proporcional** a x se as seguintes condições forem satisfeitas:

- y é uma função crescente de x;
- se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y também ficará multiplicado por n, ou seja, $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo valor de x do domínio da função e todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Nessas condições, as grandezas y e x podem ser relacionadas por uma função linear $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, tal que $y = f(x) = ax$, com $a > 0$. O coeficiente a é chamado de **coeficiente de proporcionalidade**.



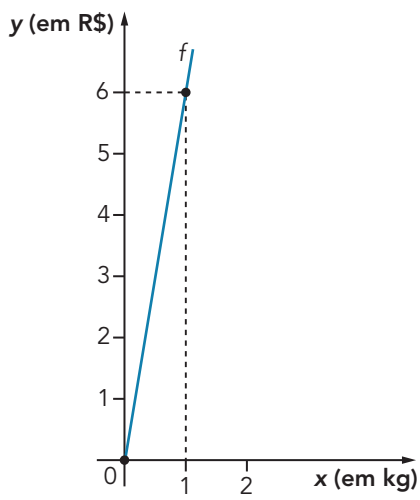
Banco de imagens/Arquivo da editora

O gráfico dessa função no plano cartesiano é, então, uma semirreta com origem no ponto (0, 0) do plano, como apresentado.

Analise alguns exemplos de situações que envolvem proporcionalidade direta.

a) Se 1 quilograma de feijão custa R$ 6,00, então x quilogramas custam $y = f(x) = 6x$. Perceba que $f(x) = 6x$ é a lei de uma função crescente ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$) e que 1 kg custa R$ 6,00, 2 kg custam R$ 12,00, 3 kg custam R$ 18,00, e assim por diante.

Duplicando a quantidade de quilogramas, duplicamos o preço; triplicando a quantidade de quilogramas, triplicamos o preço; etc., ou seja, o preço a pagar é diretamente proporcional à quantidade de quilogramas que compramos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesse caso, o coeficiente de proporcionalidade é 6, pois $\frac{6}{1} = \frac{12}{2} = \frac{18}{3}$, etc.

Note também que, nesse caso, $f(1) = 6$; $f(2) = 12$; $f(3) = 18$; $f(4) = 24$, etc. e que, por exemplo:

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = f(3 \cdot 1) = 18 \\ 3 \cdot f(1) = 3 \cdot 6 = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow f(3 \cdot 1) = 3 \cdot f(1)$$

O gráfico de f está representado no plano cartesiano.

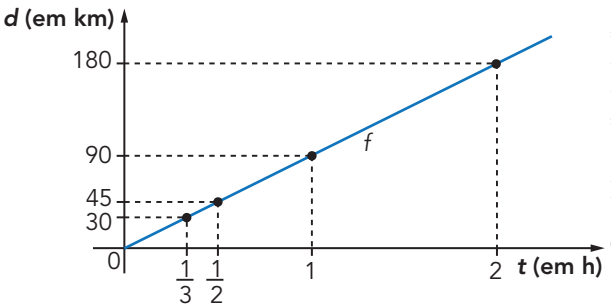
b) Um motorista mantém o carro em uma rodovia a uma medida de velocidade constante de 90 km/h no piloto automático. Analise na tabela alguns valores dessa situação.

Deslocamento de um veículo

t (em h)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	t
d (em km)	30	45	90	180	$d = 90t$

Dados elaborados para fins didáticos.

O modelo matemático dessa situação é a função linear $d: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por $d = 90t$. Note, no gráfico apresentado, que a função é crescente e que, duplicando a medida de intervalo de tempo, duplicamos a medida de distância; triplicando a medida de intervalo de tempo, triplicamos a medida de distância; e assim sucessivamente, ou seja, a medida de distância percorrida é diretamente proporcional à medida de intervalo de tempo.



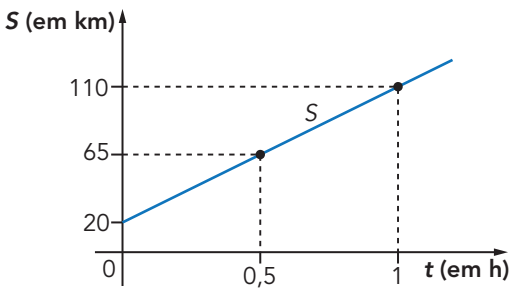
Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesse caso, o coeficiente de proporcionalidade é 90.

Perceba que: $d(2) = d(2 \cdot 1) = 2 \cdot d(1)$.
$\downarrow$ 180 $\downarrow$ 90

No segundo gráfico, note que, se esse veículo estivesse na posição 20 km no início do percurso, a equação horária da posição seria dada por $S(t) = 90t + 20$.

Apesar de a representação gráfica dessa função ser uma semirreta, ela não passa na origem do plano cartesiano, e S e t não são grandezas diretamente proporcionais. De fato, ao passarmos de $t = 0{,}5$ h para $t = 1$ h, a posição S não dobra, pois vai de $S = 65$ km para $S = 110$ km.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

4. Um pesquisador fez uma tabela e indicou a medida de distância real, em quilômetros, e a medida de distância em determinado mapa, em centímetros, entre algumas cidades.

Medida de distância entre algumas cidades

y: medida de distância no mapa (em cm)	2	3	5
x: medida de distância real (em km)	5	7,5	12,5

Dados elaborados para fins didáticos.

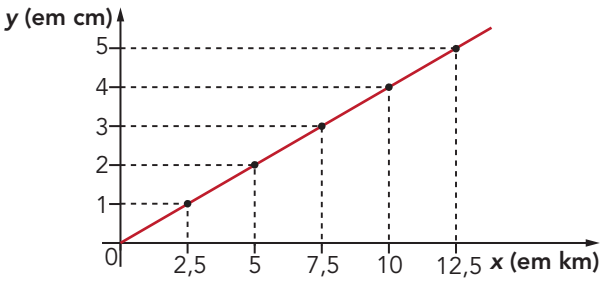
a) Represente no caderno o gráfico da função que relaciona y em função de x e escreva a lei da função.

b) Considere 2 cidades que têm medida de distância de 9 km uma da outra. Qual é a medida de distância entre elas no mapa?

c) Qual é a escala desse mapa?

Resolução

a) Representando os valores da tabela no plano cartesiano com um gráfico, percebemos que temos uma função linear.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{7{,}5 - 2{,}5} = \frac{2}{5}$$

De acordo com o gráfico, $b = 0$.

Logo, podemos escrever a lei da função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, que é do tipo $f(x) = y = ax + b$:

$$y = \frac{2}{5}x + 0 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x$$

b) Para $x = 9$, temos $y = \frac{2}{5} \cdot 9 = \frac{18}{5} = 3{,}6$.

Portanto, a medida de distância no mapa é 3,6 cm.

c) Determinar a escala do mapa significa descobrir a medida de distância real x, em quilômetros, que corresponde a uma medida de distância $y = 1$ cm no mapa. Então:

$$1 = \frac{2}{5}x \Rightarrow 5 = 2x \Rightarrow x = 2{,}5$$

Temos que 2,5 km = 2500 m = 250 000 cm.

Portanto, a escala é 1 : 250 000.

39. As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual. Professor, se necessário, retome com os estudantes os conceitos relacionados ao cálculo de juros simples que foram estudados nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Não escreva no livro

Atividades

38. O preço de venda de um livro é R$ 50,00 por unidade. A receita total $f(x)$ obtida com a venda de livros como esse pode ser calculada em função da quantidade x de livros vendidos.

a) Escreva no caderno a lei dessa função. $f(x) = 50x$, com $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$.

b) Essa função é linear? Sim.

c) A quantidade de livros vendidos é diretamente proporcional à receita total? Sim.

d) Nessa situação, suponha que o lucro, em reais, pela venda de x livros seja dado por $L(x) = 50x - 200$. O lucro é diretamente proporcional à quantidade de livros vendidos? Justifique.

Não, pois, por exemplo, o lucro na venda de 10 livros é de R$ 300,00 (temos $L(10) = 300$), mas, dobrando a quantidade de livros vendidos, obtemos um lucro de R$ 800,00 (temos $L(20) = 800$), que não é o dobro de R$ 300,00.

Prostock-studio/Shutterstock

O hábito da leitura traz diversos benefícios para o cérebro.

39. Considere uma aplicação financeira com uma taxa de juros mensal de 0,5% e um capital inicial variando de R$ 0,00 a R$ 10.000,00. Podemos descrever essa relação utilizando a função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = 1{,}005x$, em que $f(x)$ é o montante final depois de 1 mês e x é o capital inicial.

a) No caderno, represente o gráfico dessa função.

b) Analisando o gráfico dessa função, é possível dizer que o capital inicial é proporcional ao montante final? Justifique sua resposta de acordo com os elementos do gráfico.

41. a) Como $0 \leqslant P \leqslant 1$ e $0 \leqslant N \leqslant 10$, temos $0 \leqslant N \cdot P \leqslant 10$. Portanto, o domínio é o intervalo [0, 10].
b) Sim, pois a relação entre Ideb e N é dada pela lei Ideb $= P \cdot N$ e, mantendo P constante, essa relação é uma função linear.
c) Ideb $= 6{,}5 \cdot 0{,}55 = 3{,}575$; logo, o Ideb é 3,575.

Não escreva no livro

40. Uma empresa de transporte particular **A** cobra um valor fixo de R$ 3,50 mais R$ 2,10 por quilômetro rodado.

a) Sim; $f(x) = 3{,}50 + 2{,}10x$, com $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

a) É possível determinar a lei de formação dessa função, considerando que $f(x)$ é o valor cobrado e x é a quantidade de quilômetros rodados? Em caso afirmativo, escreva a lei no caderno.

b) Represente o gráfico dessa função utilizando um *software* de Geometria dinâmica. Caso julgue necessário, retome o 1º passo da seção *Tecnologias digitais*: "Construção do gráfico da função afim". A resposta depende do *software* utilizado pelos estudantes.

c) Analisando o gráfico representado, é possível dizer que o valor cobrado, em reais, é proporcional à quantidade de quilômetros rodados? Justifique sua resposta. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

d) Suponha que um cliente deseje percorrer 15 km e receba o orçamento da empresa **B**, que propõe a ele que pague um valor fixo de R$ 32,00 para realizar a viagem. No entanto, o ponto de desembarque do transporte dessa empresa também é fixo e fica a cerca de 3 km do destino desse cliente. Determine qual opção é mais barata: a da empresa **A** ou a da **B**. Depois, determine qual delas, na sua opinião, é mais vantajosa, considerando todas as informações, e justifique sua resposta. As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Texto para a próxima atividade.

O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), iniciativa do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), é um índice usado para medir a qualidade da educação no país.

De maneira simplificada, podemos dizer que o Ideb de uma unidade escolar para certa etapa de ensino é estabelecido de acordo com 2 subíndices.

- Índice N: média de proficiência nas disciplinas de Língua Portuguesa e de Matemática da etapa de ensino na unidade escolar, em determinados exames nacionais, padronizada de 0 a 10.
- Índice P: subíndice de acordo com a taxa de aprovação dos estudantes na etapa escolar, padronizado de 0 a 1.

Com esses 2 dados, o Ideb é calculado pela seguinte expressão:

$$I = N \cdot P$$

Perceba que o Ideb varia de 0 a 10 e, quanto maior o Ideb, melhor é considerada a qualidade da educação na unidade escolar para a etapa de ensino.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Nota técnica – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – Ideb*. Brasília, DF: Inep. Disponível em: https://tedit.net/5akxiv. Acesso em: 11 jul. 2024.

41. Considerando as informações do texto, responda a cada item no caderno.

a) Qual é o domínio dos valores possíveis do Ideb?

b) Mantendo P constante, a relação entre o Ideb de uma unidade escolar e a média N das notas é diretamente proporcional?

c) Suponha que, em uma unidade escolar, na etapa do Ensino Médio, a média de proficiência nas disciplinas de Língua Portuguesa e de Matemática seja igual a 6,5, e que 55% dos estudantes foram aprovados no fim do ano letivo nessa etapa. De acordo com esses dados, qual é o Ideb dessa escola para o Ensino Médio?

42. Elabore no caderno um problema sobre compra e venda de um produto cuja resolução necessite do uso de uma função afim.

Depois, troque com um colega para que você resolva o problema que ele elaborou e ele resolva o que você criou.

O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Reflita: b) $f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$

c) $f(8) = 8 - 8 = 0$

Zero da função afim

O valor de x para o qual a função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax + b$ se anula, ou seja, para o qual $f(x) = 0$, denomina-se **zero da função afim**. Para determinar o zero de uma função afim basta determinar o valor real de x que satisfaz a equação $ax + b = 0$.

Fique atento

O zero de uma função f qualquer é raiz da equação obtida ao fazer $f(x) = 0$.

Considere alguns exemplos.

a) O zero da função afim f definida por $f(x) = 2x + 5$ é $x = -\frac{5}{2}$, pois $-\frac{5}{2}$ é raiz da equação $2x + 5 = 0$.

b) O zero da função afim f definida por $f(x) = 2x - 4$ é $x = 2$, pois 2 é raiz da equação $2x - 4 = 0$.

c) O zero da função afim f definida por $f(x) = x - 8$ é $x = 8$, pois 8 é raiz da equação $x - 8 = 0$.

d) Qualquer número real r é zero da função constante nula f definida por $f(x) = 0$, pois a equação $f(r) = 0$ é sempre verdadeira, independentemente do valor de r.

e) A função constante não nula f definida por $f(x) = -5$ não tem zero, pois não há número real r tal que $f(r) = 0$.

Não escreva no livro

Reflita

Confira o valor do zero de cada função dos exemplos **b** e **c**.

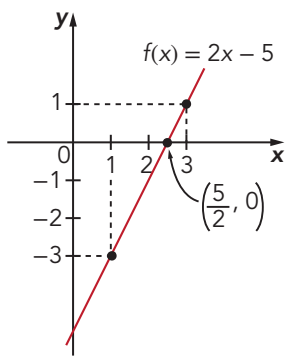
Interpretação geométrica

Geometricamente, o zero da função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ é a **abscissa** do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo x.

Por exemplo, dada a função afim definida por $f(x) = 2x - 5$, temos:

$$2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ (zero da função)}$$

x	y
1	−3
3	1



Banco de imagens/Arquivo da editora

Logo, a reta, isto é, o gráfico dessa função, intersecta o eixo x no ponto $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

Reflita

- Na função do exemplo, o que acontece com o valor de $f(x)$ quando $x > \frac{5}{2}$? E quando $x < \frac{5}{2}$?
- Qual é a intersecção do gráfico da função constante nula com o eixo x? E qual é a intersecção do gráfico da função constante não nula com esse eixo? Como isso se relaciona com os zeros (se existirem) dessas funções?

$f(x) > 0$; $f(x) < 0$.

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Estudo do sinal da função afim

Analise a situação a seguir.

Um vendedor de maçãs tem um gasto fixo mensal de R$ 300,00. Como cada maçã será vendida a R$ 2,00, ele deseja saber quantas maçãs devem ser vendidas para que haja lucro no final do mês.

Perceba que o lucro é dado em função da quantidade x de maçãs vendidas, e a lei da função é $f(x) = 2x - 300$, com $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Para resolver a questão do comerciante, devemos determinar os valores reais de x tais que $f(x) > 0$, ou seja, resolver $2x - 300 > 0$.

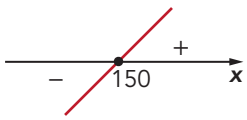
Estudando o sinal: $\underbrace{2x - 300}_{f(x)} > 0$

Como $a = 2$ (temos $a > 0$), a função é crescente.

$2x - 300 = 0 \Rightarrow 2x = 300 \Rightarrow x = 150$ (zero da função)

Dispositivo prático:

Banco de imagens/ Arquivo da editora



- $x > 150 \Rightarrow f(x) > 0$ (haverá lucro)
- $x = 150 \Rightarrow f(x) = 0$ (não haverá lucro nem prejuízo)
- $x < 150 \Rightarrow f(x) < 0$ (haverá prejuízo)

Sendo S o conjunto solução, temos: $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 150\}$.

Não escreva no livro

Reflita

O dispositivo prático mostra um esboço do gráfico da função f e da intersecção dele com o eixo x do plano cartesiano. Qual é o significado dos sinais + e – nesse dispositivo?

O sinal + significa $f(x) > 0$, e o sinal – significa $f(x) < 0$.

Outro modo é resolvendo a inequação $2x - 300 > 0$. Inequações são sentenças matemáticas que expressam uma desigualdade e apresentam pelo menos 1 incógnita.

O conjunto solução de uma inequação é o conjunto de valores que, quando atribuídos à incógnita, tornam a desigualdade verdadeira. Analise como resolver essa inequação:

$$2x - 300 > 0 \text{ em } \mathbb{N}$$
$$2x > 300 \Rightarrow x > 150$$
$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 150\}$$

Assim, o comerciante deve vender mais de 150 maçãs para que tenha lucro no fim da venda.

Reflita

Por que o conjunto solução S dessa inequação é um subconjunto de $\mathbb{N}$, e não de $\mathbb{R}$?

Porque a inequação trata de quantidade de maçãs que, necessariamente, deve ser um número natural.

Fique atento

Em uma inequação, o sinal da desigualdade só se altera quando multiplicamos ou dividimos ambos os lados por um número negativo (se for $<$, troca-se por $>$, se for $>$, troca-se por $<$; isso vale também para $\leqslant$ e $\geqslant$).

Por exemplo, acompanhe a seguir a resolução da inequação $-5x + 10 < 7$ em $\mathbb{R}$.

$$-5x + 10 < 7 \Rightarrow -5x + 10 + (-10) < 7 + (-10) \Rightarrow -5x < -3 \Rightarrow -5x \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) > -3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow x > \frac{3}{5}$$

Portanto, o conjunto solução dessa inequação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{5}\right\}$.

Atividades resolvidas

5. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $-\frac{2x}{3}+\frac{4(12-x)}{9}>10$.

Resolução

1º modo: $-\frac{2x}{3}+\frac{4(12-x)}{9}>10 \Rightarrow -\frac{2x}{3}+\frac{4(12-x)}{9}-10>0$

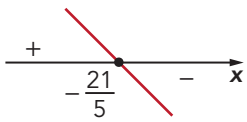
Seja a função $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-\frac{2x}{3}+\frac{4(12-x)}{9}-10$. Então, o conjunto solução da inequação dada é igual ao conjunto de valores de $x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)>0$. Desenvolvendo a lei de f, temos:

$$f(x)=-\frac{2x}{3}+\frac{4(12-x)}{9}-10=-\frac{6x}{9}+\frac{48}{9}-\frac{4x}{9}-\frac{90}{9}=-\frac{10x}{9}-\frac{42}{9}$$

Logo, f é uma função afim decrescente $\left(\text{pois } a=-\frac{10x}{9}<0\right)$ e temos:

$$f(x)=0 \Rightarrow -\frac{10x}{9}-\frac{42}{9}=0 \Rightarrow x=-\frac{21}{5}$$

Dispositivo prático:



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Portanto, $f(x)>0 \Rightarrow x<-\frac{21}{5}$ e o conjunto solução da inequação $-\frac{2x}{3}+\frac{4(12-x)}{9}>10$ é $S=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\; x<-\frac{21}{5}\right\}$.

2º modo: $-\frac{2x}{3}+\frac{4(12-x)}{9}>10 \Rightarrow \left(-\frac{2x}{3}+\frac{4(12-x)}{9}\right)\cdot(9)>(10)\cdot(9) \Rightarrow$

$\Rightarrow -3\cdot 2x+4(12-x)>90 \Rightarrow -6x+48-4x>90 \Rightarrow (-6x+48-4x)-(48)>(90)-(48) \Rightarrow$

$\Rightarrow -10x>42 \Rightarrow (-10x)\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)<(42)\cdot\left(-\frac{1}{10}\right) \Rightarrow x<-\frac{42}{10} \Rightarrow x<-\frac{21}{5}$

O conjunto solução dessa inequação é $S=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\; x<-\frac{21}{5}\right\}$.

6. Na fabricação de uma peça de carro, um fabricante tem um custo mensal, em reais, dado por $C(x)=250x+13\,000$, e receita mensal, em reais, dada por $R(x)=900x$, a depender da quantidade x de peças. Qual é a quantidade mínima de peças que ele deve vender mensalmente para conseguir um lucro maior do que ou igual a R$ 26.000,00 no mês?

Resolução

Pelo enunciado, o lucro mensal, em reais, é dado por:

$$L(x)=R(x)-C(x)=(900x)-(250x+13\,000)=650x-13\,000$$

Para que o lucro seja maior do que ou igual a R$ 26.000,00 no mês, devemos ter $L(x)\geqslant 26\,000$.

$$L(x)\geqslant 26\,000 \Rightarrow 650x-13\,000\geqslant 26\,000 \Rightarrow 650x-39\,000\geqslant 0$$

A função $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=650x-39\,000$ é crescente (pois $a=650$) e tem como zero da função o número $x=\frac{39\,000}{650}=60$. Logo: $L(x)\geqslant 26\,000 \Rightarrow f(x)>0 \Rightarrow x\geqslant 60$.

Portanto, o fabricante deve vender, no mínimo, 60 peças no mês para conseguir um lucro mensal de pelo menos R$ 26.000,00.

Professor, na atividade **45**, destaque aos estudantes que um plano de saúde empresarial é um benefício concedido por empresas para os funcionários. Pelo plano, o beneficiário tem acesso ao sistema privado de saúde a um custo reduzido em comparação ao valor praticado para o público geral, pois a empresa subsidia total ou parcialmente o valor do plano.

Não escreva no livro

Atividades

43. Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações usando o processo que julgar mais conveniente.

a) $3 - 4x > x - 7$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

b) $\frac{x}{4} - \frac{3(x-1)}{10} \leqslant 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -14\}$

44. Um comerciante teve uma despesa de R$ 230,00 na compra de certa mercadoria. Como vai vender cada unidade dessa mercadoria por R$ 5,00, o lucro final será dado em função das x unidades vendidas.

a) Qual é a lei da função f que indica o lucro que o comerciante terá? $f(x) = 5x - 230$, com $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

b) Para quais valores de x temos $f(x) < 0$? Como x pode ser interpretado nesse caso? $x < 46$; o comerciante terá prejuízo se vender menos do que 46 unidades.

c) Para qual valor de x haverá um lucro de R$ 315,00? $x = 109$

d) Para quais valores de x o lucro será maior do que R$ 280,00? $x > 102$

e) Para quais valores de x o lucro estará entre R$ 100,00 e R$ 180,00? $66 < x < 82$

45. Uma pessoa vai escolher um plano de saúde empresarial entre 2 opções. Em cada opção, paga-se um valor fixo (a taxa de inscrição) mais um valor por consulta, como é mostrado a seguir.

a) Plano **A**: $f(x) = 50x + 100$, com $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; plano **B**: $g(x) = 40x + 180$, com $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Ericson Guilherme Luciano/ Arquivo da editora

Plano A	
Inscrição	R$ 100,00
Cada consulta	R$ 50,00

Plano B	
Inscrição	R$ 180,00
Cada consulta	R$ 40,00

O gasto total de cada plano é dado em função da quantidade x de consultas. Determine:

a) a lei da função correspondente ao valor gasto em cada plano, em função de x;

b) qual das funções tem a maior taxa de variação e como isso poderia ser interpretado; O plano **A**, o que significa que o custo aumenta mais rapidamente no plano **A**.

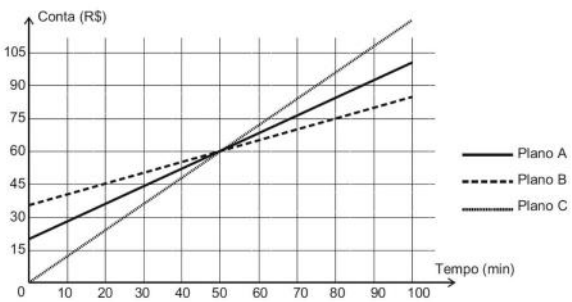
45. c) O plano **A** é mais econômico para $x < 8$; o **B**, para $x > 8$; e eles são equivalentes para $x = 8$.

c) em quais condições é possível afirmar que o plano **A** é mais econômico; o plano **B** é mais econômico; os 2 planos são equivalentes.

d) se algo deve mudar nessa análise considerando a seguinte informação: após ler os contratos de ambos os planos, o cliente descobriu que uma consulta que ele deve realizar 3 vezes ao ano, que geralmente custa R$ 100,00, não é coberta pelo plano **B**, apenas pelo plano **A**.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

46. (Enem) Na intenção de ampliar suas fatias de mercado, as operadoras de telefonia apresentam diferentes planos e promoções. Uma operadora oferece três diferentes planos baseados na quantidade de minutos utilizados mensalmente, apresentados no gráfico. Um casal foi à loja dessa operadora para comprar dois celulares, um para a esposa e outro para o marido. Ela utiliza o telefone, em média, 30 minutos por mês, enquanto ele, em média, utiliza 90 minutos por mês.



Reprodução/Enem, 2018.

Com base nas informações do gráfico, qual é o plano de menor custo mensal para cada um deles? Alternativa **d**.

a) O plano **A** para ambos.

b) O plano **B** para ambos.

c) O plano **C** para ambos.

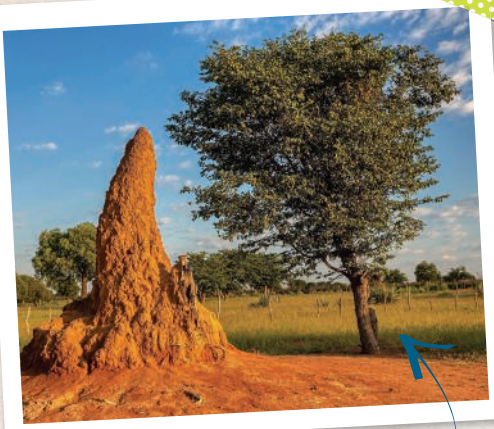
d) O plano **B** para a esposa e o plano **C** para o marido.

e) O plano **C** para a esposa e o plano **B** para o marido.

Além da sala de aula

Edifícios sustentáveis

O Eastgate Centre, localizado em Harare, no Zimbábue, foi uma das edificações construídas com os princípios da Biomimética – área da ciência que estuda fenômenos e processos da natureza para inspirar projetos de inovação em várias áreas do conhecimento –, tendo como referência as estruturas dos imensos cupinzeiros africanos para manter a temperatura interna agradável.

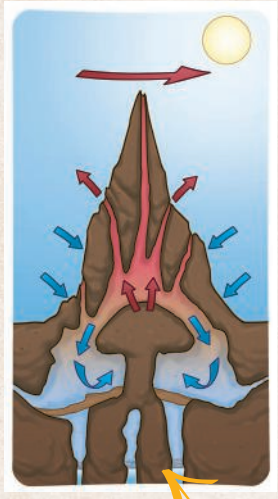


Zoonar GmbH/Alamy/Fotoarena

O cupinzeiro africano é formado pelos cupins da espécie *Macrotermes*. Ele pode ter medida de comprimento da altura de aproximadamente 8 metros, comportando uma população de em média 2 milhões de cupins. Namíbia, África. Foto de 2020.

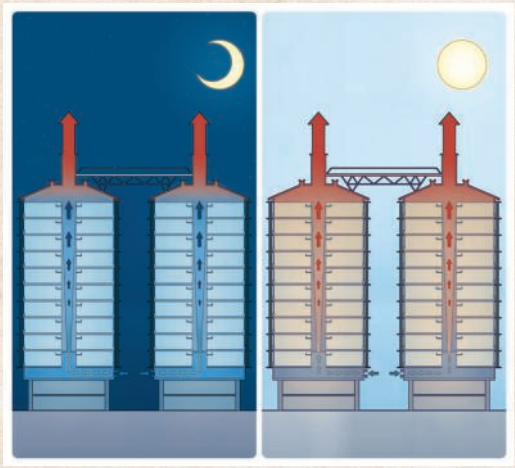
Os cupins são incríveis construtores: podem formar um cupinzeiro em pouquíssimo tempo e conseguem regular a medida de temperatura interna para cultivar fungos para a própria alimentação. Esses fungos devem ser mantidos a 30 °C e a medida de temperatura em Zimbábue pode variar de 1,6 °C durante a noite a 40 °C durante o dia. O segredo para a manutenção da medida de temperatura interna é a abertura de novos túneis e o fechamento de túneis antigos a fim de que o ar noturno entre e circule na parte inferior do monte, passe por galerias úmidas e suba para o topo até sair do cupinzeiro.

Assim como o cupinzeiro, o edifício Eastgate Centre, idealizado pelo arquiteto Mick Pearce (1938-), vale-se de túneis por onde entra o ar noturno, com medida de temperatura mais baixa, e circula por câmaras (no caso do edifício, salas comerciais) durante o dia, quando a medida de temperatura externa é mais elevada. O ar aquecido é canalizado para as chaminés no topo do prédio, por onde é eliminado. As trocas de ar com o ambiente externo são reguladas e acontecem 10 vezes durante a noite e 2 vezes durante o dia.



Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

Esquema mostrando a circulação de ar frio (em azul) e ar quente (em vermelho) dentro de um cupinzeiro.



Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

No corte transversal do Eastgate Centre é possível analisar a estrutura que permite as trocas de calor durante o dia e a noite.

As imagens não estão representadas em proporção.

A fim de absorver menos calor, a estrutura do prédio é feita de concreto, que tem calor específico 1,00 J/kg · K, e com formatos curiosos, como se fossem dentes, que reduzem a incidência de luz nas pequenas janelas. São 2 torres, lado a lado, e o vão entre elas permite a circulação do ar. Sob o piso das salas há uma área oca por onde circula o ar fresco. Quando o ar esquenta, é direcionado para dutos verticais que cuidam da exaustão pelas chaminés.

Anucha Palama/Shutterstock

Cupim da espécie *Macrotermes*.

Fique atento

Calor específico é a quantidade de calor necessária para que 1 unidade de medida de massa de uma substância sofra uma variação de 1 unidade de medida de temperatura. Assim, para um material como o concreto, que tem calor específico de 1,00 J/kg · K, é necessário 1 joule (1 J) de medida de calor para aumentar em 1 Kelvin (1 K) a medida de temperatura de 1 kg de concreto.

Quanto maior for o calor específico de uma substância, maior será a quantidade de calor necessária para que a medida de temperatura dela aumente, mantendo a medida de massa constante.

Geralmente, no mês de novembro, quando os dias e as noites são nublados em Harare, a medida de temperatura máxima dentro de um escritório do Eastgate Centre não excede 26 °C. Mas durante 2 semanas do ano, em 1998, foi percebido o pico de temperatura com medidas entre 27 °C e 28 °C, às 16 h. E a menor medida de temperatura durante o ano todo não foi menor do que 19 °C.

Esse empreendimento sustentável tem custo de energia elétrica 35% menor do que o de um prédio convencional na mesma cidade, uma vez que não utiliza sistema de ar condicionado, apenas ventiladores de exaustão ligados em horários determinados para auxiliar na circulação do ar, como em um cupinzeiro.

Sobre o assunto

See How Termites Inspired a Building That Can Cool Itself | Decoder

Disponível em: https://tedit.net/1e56dj. Acesso em: 24 jun. 2024.

Assista ao vídeo "Veja como cupins inspiraram um prédio que pode se resfriar sozinho", em tradução livre, para entender como o projeto estrutural do Eastgate Centre permite que o prédio seja resfriado sem o uso de ar-condicionado. Nas configurações do vídeo, é possível ativar as legendas em português geradas por tradução automática.

Indo além: Escola sustentável

Projetos de construções como o Eastgate Centre são essenciais para o desenvolvimento de um futuro mais sustentável. O projeto desse edifício em particular é conhecido por sua eficiência energética, mas existem outras iniciativas que visam à economia de água e de outros recursos. Que tal pensar em um projeto sustentável para a construção da sua escola?

nepool/Shutterstock

As construções que consideram a sustentabilidade nos projetos são chamadas de construções verdes.

Etapas

1. Organização

Reúnam-se em grupos de 3 a 5 estudantes.

2. Pesquisa

Pesquisem edificações sustentáveis, sejam elas fundamentadas em Biomimética ou não. Avaliem a relação custo-benefício do consumo de recursos nessas construções, como energia elétrica e água, identificando os fatores que impactam essa relação.

3. Desenvolvimento

- Coleta de dados: coletem dados sobre o consumo de energia elétrica ou de água da escola em que estudam e criem gráficos que representem esse consumo em função do tempo.
- Análise de dados: de acordo com as pesquisas realizadas e os dados coletados no contexto escolar, pensem em maneiras de intervir na redução do consumo de energia elétrica ou de água na escola ao longo do tempo.
- Desenvolvimento de proposta de melhoria para o prédio da escola: considerando os estudos e as análises realizadas, desenvolvam uma proposta de melhoria sustentável para a construção da escola e descrevam como isso pode impactar o cotidiano, mostrando essa mudança nos gráficos criados durante a etapa de coleta de dados.

4. Produto final

Opção 1: Relatório detalhado do projeto

Elaboração e entrega de um relatório abrangente contendo a proposta de projeto desenvolvida. O relatório deve incluir:

- introdução e contexto do projeto;
- objetivos e justificativas;
- metodologia utilizada;
- detalhamento da proposta;
- resultados esperados;
- conclusão e recomendações;
- anexos (se necessário).

Opção 2: Apresentação do projeto para a comunidade escolar e/ou para o município.

Os grupos devem organizar uma maneira criativa e informativa de exposição que pode incluir:

- murais informativos;
- sessões de apresentação oral;
- exposição de materiais visuais, como maquetes, cartazes ou infográficos;
- utilização de recursos digitais, como vídeos ou apresentações multimídia.

CAPÍTULO 4

Funções definidas por mais de uma sentença

Situação-problema

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Esta situação-problema favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Financeira* e *Educação Fiscal*.

Imposto de renda

Sladkaya/Shutterstock

Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta no item **b** pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

Todo ano, diversas pessoas físicas precisam declarar, entre outras informações, os valores recebidos no ano anterior.

Os impostos são valores cobrados das pessoas ou das empresas, pelo governo, para que as instituições públicas funcionem e garantam à população educação, saúde, segurança, iluminação, infraestrutura, entre outros serviços.

Um dos impostos mais importantes no Brasil é o Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF), também chamado de imposto de renda, que é recolhido pela Receita Federal. O valor do imposto que uma pessoa deve pagar por ano é calculado de acordo com os rendimentos dela. Quanto maior o rendimento, maior é o valor.

A porcentagem dos rendimentos a pagar ao governo é definida por faixas com alíquotas diferentes para cada uma delas. Por exemplo, considerando as alíquotas de 2024, quem tem rendimentos mensais de até R$ 2.259,20 é isento de pagar imposto de renda. Quem receber mais do que esse valor, até o limite de R$ 2.826,65, terá uma alíquota de 7,5% de imposto a pagar e uma parcela a deduzir de R$ 169,44. Quem estiver na faixa salarial entre R$ 2.826,66 e R$ 3.751,05 pagará 15% menos a parcela de R$ 381,44. Rendimentos entre R$ 3.751,06 e R$ 4.664,68 terão alíquota de 22,5% menos a parcela de R$ 662,77. E, acima desse valor, a alíquota é 27,5% menos a parcela de R$ 896,00.

a) A relação entre os rendimentos mensais de uma pessoa e a alíquota é representada por uma função afim? Justifique. Não; a justificativa encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Você já tinha ouvido falar do IRPF? Pesquise a importância desse imposto e converse com os colegas sobre o assunto. Resposta pessoal; exemplo de resposta: Os recursos arrecadados com o imposto de renda são destinados a diferentes setores do país, como educação, segurança e saúde, sendo importantes para a saúde financeira do governo e para os investimentos nesses setores que são de suma importância.

Explorando a função definida por mais de uma sentença

Existem funções que são formadas por mais de uma sentença. Vamos explorar funções desse tipo.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Para uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos:

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

- $f(0) = -8$;
- $f(1) = -3$;
- $f(2) = 2$;
- $f(3) = 1{,}5$;
- $f(4) = 1$;
- $f(5) = 0{,}5$.

1. No caderno, identifique os pontos da forma $(x, f(x))$, para $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, represente-os em um plano cartesiano e responda: f é uma função afim? Justifique.

2. Seja $g\colon]-\infty, 2] \to \mathbb{R}$ uma função tal que $g(x) = f(x)$, para $x \in D(g)$. Utilizando essas informações e as informações do enunciado, responda e justifique: Por que podemos afirmar que g **poderia ser** uma função afim?

3. Sabendo que g é, de fato, uma função afim, represente no mesmo plano cartesiano da atividade **1** o gráfico de g e indique a lei dessa função.

4. Seja $h\colon [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função tal que $h(x) = f(x)$, para $x \in D(h)$. Com base nessas informações e nas informações do enunciado, responda e justifique: Por que podemos afirmar que h **poderia ser** uma função afim?

5. Sabendo que h é, de fato, uma função afim, represente no mesmo plano cartesiano da atividade **1** o gráfico de h e indique a lei dessa função.

6. Então, podemos estabelecer que:

- $g(x) = f(x)$, para $x \in D(g) =]-\infty, 2]$;
- $h(x) = f(x)$, para $x \in D(h) = [2, +\infty[$;
- $D(f) = \mathbb{R}$.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Como podemos interpretar a união dos gráficos de g e h? E como podemos expressar a lei da função f definida nessa união das funções f e g?

Professor, se julgar oportuno, expanda a atividade perguntando aos estudantes: "Por que o verbo está na forma condicional 'poderia ser' e não no presente 'é'?". Espera-se que eles notem que o domínio de g é o intervalo $]-\infty, 2]$ e, analisando apenas os pontos conhecidos, podemos dizer que g poderia ser uma função afim, mas só poderíamos afirmar que g é uma função afim se conhecêssemos todos os pontos no domínio.

Fique atento

O símbolo ∞ pode ser utilizado para denotar intervalos. Analise alguns exemplos a seguir.

- A notação $]-\infty, 2]$ corresponde a $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$, que representa o intervalo dos números reais menores do que ou iguais a 2.
- A notação $]-\infty, 2[$ corresponde a $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$, que representa o intervalo dos números reais menores do que 2.
- A notação $[2, +\infty[$ corresponde a $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$, que representa o intervalo dos números reais maiores do que ou iguais a 2.
- A notação $]2, +\infty[$ corresponde a $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, que representa o intervalo dos números reais maiores do que 2.

Podemos denotar $+\infty$ ou, apenas, ∞.

Professor, neste caso da função f, podemos indicar os 2 intervalos fechados $x \leqslant 2$ e $x \geqslant 2$ nas sentenças, pois $f(2) = g(2) = h(2) = 2$. Caso essas igualdades não fossem verdadeiras para $x = 2$, a lei da função f seria definida por um intervalo aberto e outro fechado $\left(\text{por exemplo, } f(x) = \begin{cases} g(x), \text{ se } x < 2 \\ h(x), \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}\right)$. Ainda neste tópico há outros exemplos em que isso ocorre.

Formalizando o conceito de função definida por mais de uma sentença

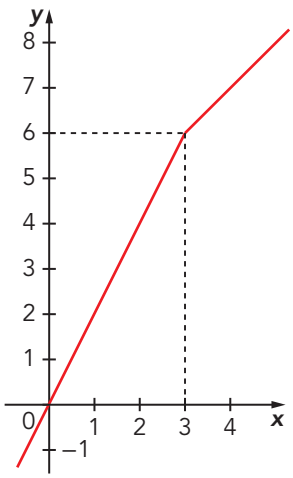
No *Explore para descobrir* do tópico anterior, foi trabalhada a função f, que, como você deve ter concluído nas atividades **1** a **6**, não é uma função afim. Também deve ter percebido que a função f pode ser expressa usando as leis das 2 funções g e h. Assim, a lei dessa função f pode ser expressa da seguinte maneira:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), \text{ se } x \leqslant 2 \\ h(x), \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Funções como essa são chamadas **funções definidas por mais de uma sentença**. Em funções desse tipo, a lei da função depende do valor de x, como ocorre no caso de f, em que $f(x)$ é dada por uma lei se $x \leqslant 2$ e é dada por outra lei se $x \geqslant 2$.

Perceba que, nesse caso, cada uma das funções g e h, que definem a função f, é uma função afim; por isso, essa função f também é chamada **função afim por partes**.

Analise a representação gráfica de outro exemplo de função definida por mais de uma sentença.

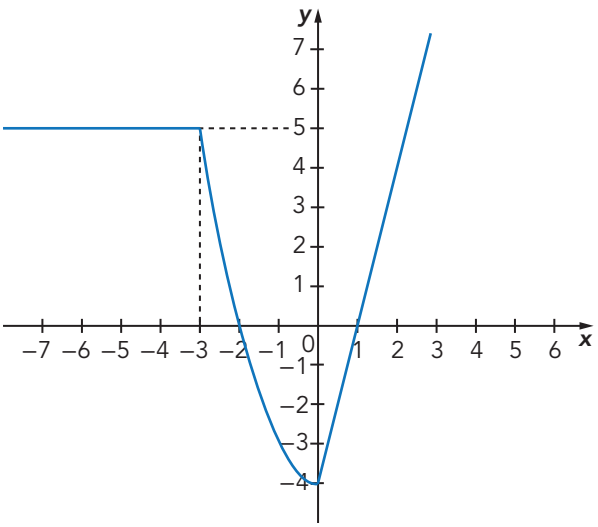


WYM Design/Arquivo da editora

Essa função é dada pela lei

$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x < 3 \\ x + 3, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$ e também é uma função afim por partes.

Contudo, existem funções definidas por mais de uma sentença cujas partes do gráfico não coincidem apenas com funções afins. Analise o exemplo na representação gráfica a seguir.



WYM Design/Arquivo da editora

A lei dessa função é:

$$f(x) = \begin{cases} 5, \text{ se } x < -3 \\ x^2 - 4, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4x - 4, \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

Perceba que:

- para $x < -3$, o gráfico de f coincide com parte da representação gráfica de uma função constante não nula definida pela lei $g(x) = 5$;
- para $-3 \leqslant x \leqslant 0$, o gráfico de f coincide com parte da representação gráfica de uma função definida por $h(x) = x^2 - 4$, que é uma função polinomial do 2º grau;
- para $x > 0$, o gráfico de f coincide com parte do gráfico de uma função polinomial do 1º grau (que é também uma função afim) definida pela lei $i(x) = 4x - 4$.

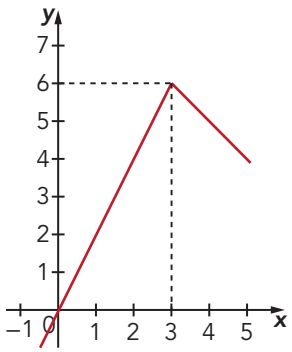
Professor, os estudantes vão estudar funções polinomiais do 2º grau na próxima Unidade.

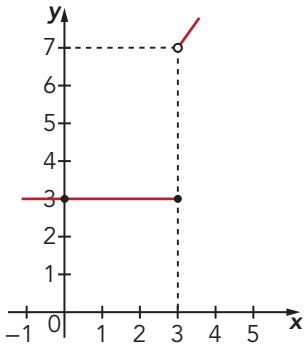
Acompanhe mais alguns exemplos de funções definidas por mais de uma sentença.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x < 3 \\ -x + 9, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ se } x > 3 \\ 3, \text{ se } x \leqslant 3 \end{cases}$

Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora





Reflita

Não escreva no livro

- Qual é o domínio da função f dada no exemplo **a**? E qual é o conjunto imagem de f?
- Qual é o valor de $f(3)$ para a função f dada no exemplo **b**? $f(3) = 3$

$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) =]-\infty, 6]$.

Fique atento

Lembre-se de que, para toda função afim do tipo $f(x) = ax + b$, com a e $b \in \mathbb{R}$, temos:

- para $a > 0$, a função é crescente;
- para $a < 0$, a função é decrescente;
- para $a = 0$, a função é constante.

O ponto preenchido ou sólido no gráfico indica que o valor correspondente está incluído na função ou no intervalo. O ponto não preenchido ou vazio indica que o valor correspondente está excluído da função ou do intervalo.

Atividades resolvidas

1. Considere a tabela de tarifa de consumo de água residencial em Manaus, apresentada a seguir.

Tarifa de consumo de água residencial em Manaus

Faixa de consumo (em m^3)	Tarifa de água (em R\$/m^3)
0 a 10	5,414
11 a 20	10,491
21 a 30	16,017
31 a 40	21,818
41 a 60	25,174
Acima de 60	28,703

Fonte dos dados: ÁGUAS DE MANAUS. *Legislação e tarifas*. Disponível em: https://tedit.net/5igee7. Acesso em: 11 jul. 2024.

Fique atento

O consumo de água é medido por instrumentos chamados hidrômetros. Geralmente esses instrumentos podem ser calibrados para apresentarem apenas valores inteiros, para facilitar os cálculos do consumo de água e do valor cobrado, além de apresentarem menor custo de fabricação e manutenção.

No caderno, escreva a lei da função t que relaciona o consumo c de água, em m^3, em uma residência em Manaus com o valor cobrado por esse consumo, em reais.

Resolução

Devido ao modo como o valor cobrado é pago dependendo da faixa de consumo, a função t deve ser expressa por mais de uma sentença.

- Se $0 \leqslant c < 11$, o valor cobrado é de $5{,}414c$.
- Se $11 \leqslant c < 21$, o valor cobrado pelos primeiros 10 m^3 de água é $10 \cdot 5{,}414 = 54{,}14$, e o valor restante, correspondente ao consumo restante de $c - 10$, é $(c - 10) \cdot 10{,}491 = 10{,}491c - 104{,}91$, totalizando $(54{,}14) + (10{,}491c - 104{,}91) = 10{,}491c - 50{,}77$.
- Se $21 \leqslant c < 31$, o valor cobrado pelos primeiros 20 m^3 de água, conforme a expressão do item anterior, é $10{,}491 \cdot 20 - 50{,}77 = 159{,}05$, e o valor restante, correspondente ao consumo restante de $c - 20$, é $(c - 20) \cdot 16{,}017 = 16{,}017c - 320{,}34$, totalizando $(159{,}05) + (16{,}017c - 320{,}34) = 16{,}017c - 161{,}29$.
- Se $31 \leqslant c < 41$, o valor cobrado pelos primeiros 30 m^3 de água, conforme a expressão do item anterior, é $16{,}017 \cdot (30) - 161{,}29 = 319{,}22$, e o valor restante, correspondente ao consumo restante de $c - 30$, é $(c - 30) \cdot 21{,}818 = 21{,}818c - 654{,}54$, totalizando $(319{,}22) + (21{,}818c - 654{,}54) = 21{,}818c - 335{,}32$.
- Se $41 \leqslant c < 61$, o valor cobrado pelos primeiros 40 m^3 de água, conforme a expressão do item anterior, é $21{,}818 \cdot (40) - 335{,}32 = 537{,}4$, e o valor restante, correspondente ao consumo restante de $c - 40$, é $(c - 40) \cdot 25{,}174 = 25{,}174c - 1006{,}96$, totalizando $(537{,}4) + (25{,}174c - 1006{,}96) = 25{,}174c - 469{,}56$.
- Se $c \geqslant 61$, o valor cobrado pelos primeiros 60 m^3 de água, conforme a expressão do item anterior, é $25{,}174 \cdot (60) - 469{,}56 = 1040{,}88$, e o valor restante, correspondente ao consumo restante de $c - 60$, é $(c - 60) \cdot 28{,}703 = 28{,}703c - 1722{,}18$, totalizando $(1040{,}88) + (28{,}703c - 1722{,}18) = 28{,}703c - 681{,}3$.

Portanto, a lei de t é dada por:

$$t(c) = \begin{cases} 5{,}414c, \text{ se } 0 \leqslant c < 11 \\ 10{,}491c - 50{,}77, \text{ se } 11 \leqslant c < 21 \\ 16{,}017c - 161{,}29, \text{ se } 21 \leqslant c < 31 \\ 21{,}818c - 335{,}32, \text{ se } 31 \leqslant c < 41 \\ 25{,}174c - 469{,}56, \text{ se } 41 \leqslant c < 61 \\ 28{,}703c - 681{,}3, \text{ se } c \geqslant 61 \end{cases}$$

Atividades

Não escreva no livro

1. Considere a função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 5, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 9, \text{ se } 1 < x \leqslant 6 \\ -x + 15, \text{ se } x > 6 \end{cases}$$

Calcule o que é pedido em cada item.

a) $f(0)$ $f(0) = 4 \cdot 0 + 5 = 5$

b) $f(-1)$ $f(-1) = 4 \cdot (-1) + 5 = 1$

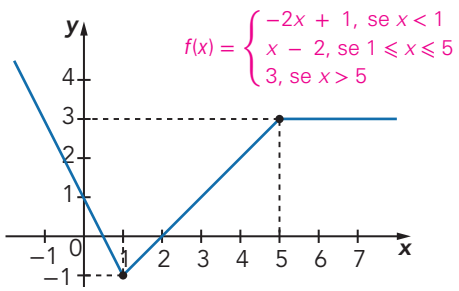
c) $f(1)$ $f(1) = 4 \cdot 1 + 5 = 9$

d) $f(5)$ $f(5) = 9$

e) $f(10)$ $f(10) = -10 + 15 = 5$

f) $f(6)$ $f(6) = 9$

2. Analise o gráfico a seguir, de uma função definida por mais de uma sentença, e, no caderno, escreva a lei dessa função.



WYM Design/Arquivo da editora

Professor, sugira aos estudantes que pesquisem as tarifas de consumo de água no município em que vivem e escrevam a lei da função que modela a situação, promovendo a integração entre os conhecimentos matemáticos dos estudantes e a realidade deles.

3. As tarifas de consumo de água mensal para uso residencial de uma cidade estão mostradas na tabela apresentada. Perceba que, caso o consumo seja entre 0 m^3 e 10 m^3, há o pagamento de uma tarifa fixa de R$ 35,85; para as demais medidas de volume, os valores são cobrados conforme o consumo em cada faixa indicada na tabela.

Tarifa de consumo de água residencial mensal

Faixa de consumo (em m^3)	Tarifa de água (em R$)
0 a 10	35,85 por mês
11 a 20	5,62 por m^3
21 a 50	14,00 por m^3
Acima de 50	15,43 por m^3

Fonte dos dados: COMPANHIA DE SANEAMENTO BÁSICO DO ESTADO DE SÃO PAULO. *Comunicado – 1/23*. São Paulo: Sabesp, 2023. Disponível em: https://tedit.net/t5qzne. Acesso em: 11 jul. 2024.

a) Escreva no caderno a lei da função que modela a relação entre o consumo de água e a tarifa a pagar. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Converse com os colegas e responda no caderno: Por que o valor da tarifa aumenta em faixas de consumo maiores? Exemplo de resposta: Para incentivar a economia de água.

Professor, no item **b** da atividade **3**, promova e modere a conversa entre os estudantes. Pergunte: "Vocês acham que essa iniciativa gera incentivo para a economia de água?"; "Alguém é prejudicado ou beneficiado por essa iniciativa?"; "Vocês acham que o custo para fornecer grandes volumes de água é o mesmo que para fornecer volumes menores?".

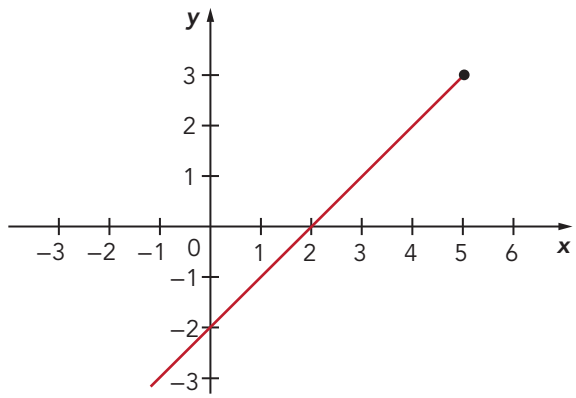
Gráfico da função definida por mais de uma sentença

Acompanhe, nos exemplos a seguir, como representar gráficos de funções definidas por mais de uma sentença no plano cartesiano.

a) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ se } x \leqslant 5 \\ 3, \text{ se } x > 5 \end{cases}$.

Primeiro representamos no plano cartesiano o gráfico da função dada por $g(x) = x - 2$, considerando a parte em que $x \leqslant 5$.

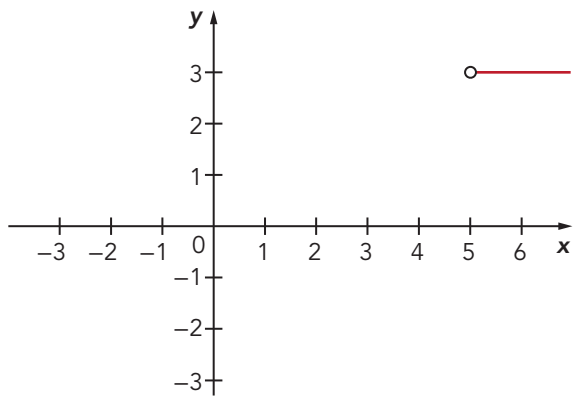
Perceba que o domínio dessa função é $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 5\}$ e o conjunto imagem é $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 3\}$.



Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora

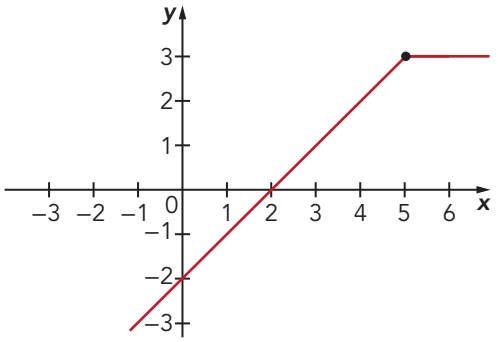
Depois, representamos no plano cartesiano o gráfico da função dada por $h(x) = 3$, mas considerando apenas a parte em que $x > 5$.

Perceba que o domínio dessa função é $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$ e o conjunto imagem é $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 3\}$.



Por fim, podemos reunir as partes dos 2 gráficos no mesmo plano cartesiano.

O domínio dessa função é o conjunto dos números reais, como anteriormente explicitado. O conjunto imagem da função é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 3\}$.



WYM Design/Arquivo da editora

b) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

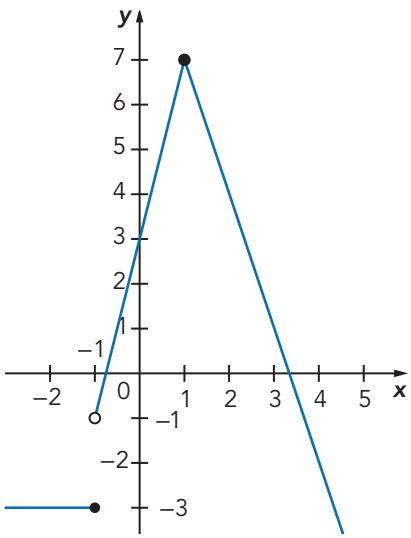
$$f(x) = \begin{cases} -3, \text{ se } x \leqslant -1 \\ 4x + 3, \text{ se } -1 < x \leqslant 1 \\ -3x + 10, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

Primeiro representamos no plano cartesiano a parte do gráfico da função dada por $g(x) = -3$, em que $x \leqslant -1$.

Em seguida, representamos no plano cartesiano a parte do gráfico da função dada por $h(x) = 4x + 3$, em que $-1 < x \leqslant 1$.

Depois, representamos no plano cartesiano a parte do gráfico da função dada por $j(x) = -3x + 10$, em que $x > 1$.

Por fim, podemos reunir as 3 partes dos gráficos das funções no mesmo plano cartesiano. O domínio dessa função é o conjunto dos números reais, como anteriormente explicitado. O conjunto imagem da função é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 7\}$.



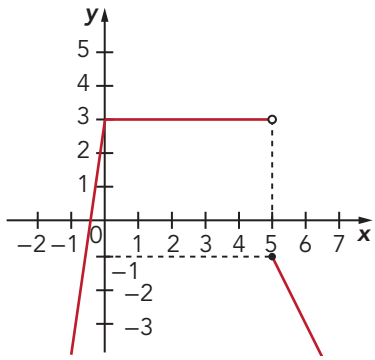
WYM Design/Arquivo da editora

c) Considere a função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 7x + 3, \text{ se } x < 0 \\ 3, \text{ se } 0 \leqslant x < 5 \\ -2x + 9, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$

Analise a representação gráfica dessa função.

Nesse caso, temos $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) =]-\infty, 3]$.



WYM Design/Arquivo da editora

Tecnologias digitais

Construção do gráfico da função definida por mais de uma sentença

Acompanhe como utilizar o ***software* livre** LibreOffice para representar o gráfico da função dada pela lei $f(x) = \begin{cases} -6x - 9, \text{ se } x \leqslant -1 \\ x - 2, \text{ se } -1 < x \leqslant 6, \\ 4, \text{ se } x > 6 \end{cases}$ definida por mais de uma sentença, no plano cartesiano.

A instalação é simples: acesse o *site* https://tedit.net/7rguto (acesso em: 11 jul. 2024), clique em **Baixe já**, escolha a versão compatível com o computador que estiver usando e siga os passos para finalizar a instalação do programa.

Ao abrir o LibreOffice, clique em **Planilha Calc**. Perceba que a planilha eletrônica é formada por linhas (**1**, **2**, **3**, **4**, ...) e colunas (**A**, **B**, **C**, **D**, ...).

Primeiro, vamos criar uma tabela para analisar alguns valores de x e os respectivos valores de $f(x)$.

1º passo: A coluna **A** será formada pelos valores da variável independente x, e a coluna **B**, pelos valores da variável dependente $f(x)$. Preencha as células A1 e B1 com **x** e **f(x)**, respectivamente.

2º passo: Preencha a célula A2 com o valor −2. Em seguida, clique com o botão esquerdo do *mouse* no quadradinho no canto inferior direito dessa célula e arraste-o até a linha A12; isso fará com que os valores da primeira coluna da tabela variem nas células de −2 a 8.

3º passo: Na célula B2, digite a seguinte fórmula: **=SE(A2<=−1;−6*A2−9;SE(A2<=6;A2−2;4))**. Essa fórmula utiliza o comando **Se** para representar a lei de f nos 3 intervalos definidos e, assim, calcular o valor da variável dependente para o valor de x preenchido na célula A2.

Em seguida, clique e arraste o quadradinho do canto inferior direito da célula B2 até a linha **12** da coluna para que a fórmula seja replicada para os demais valores de x.

	A	B
1	x	f(x)
2	-2	3
3	-1	-3
4	0	-2
5	1	-1
6	2	0
7	3	1
8	4	2
9	5	3
10	6	4
11	7	4
12	8	4

Detalhe da tela do LibreOffice Calc após o 3º passo.

Reprodução/LibreOffice

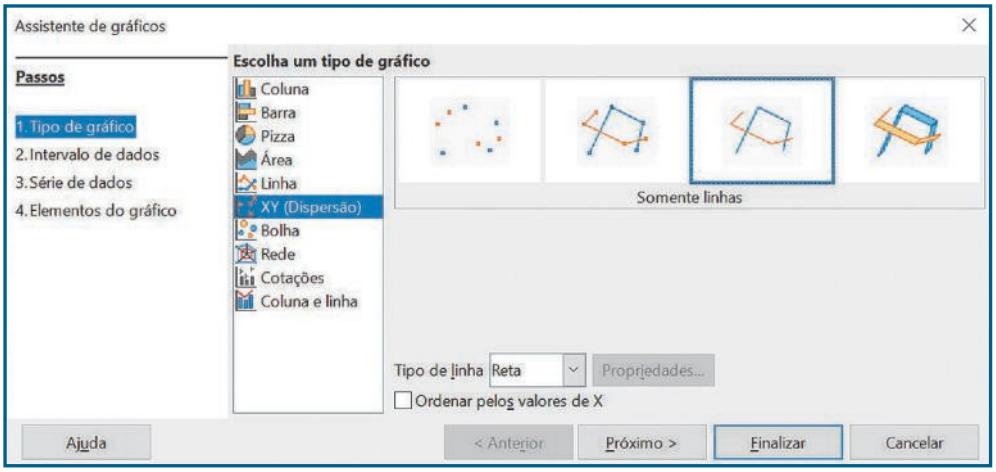
***software* livre:** Qualquer programa gratuito de computador cujo código-fonte é disponibilizado para permitir o uso, o estudo, a cópia e a redistribuição.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

4º passo: Agora, vamos representar no plano cartesiano o gráfico da função *f*. Para isso, selecione a tabela construída e, no menu **Inserir**, clique na opção **Gráfico**. Na janela **Assistente de gráficos**, selecione a opção **XY (Dispersão)** e **Somente linhas**, conforme as referências visuais.

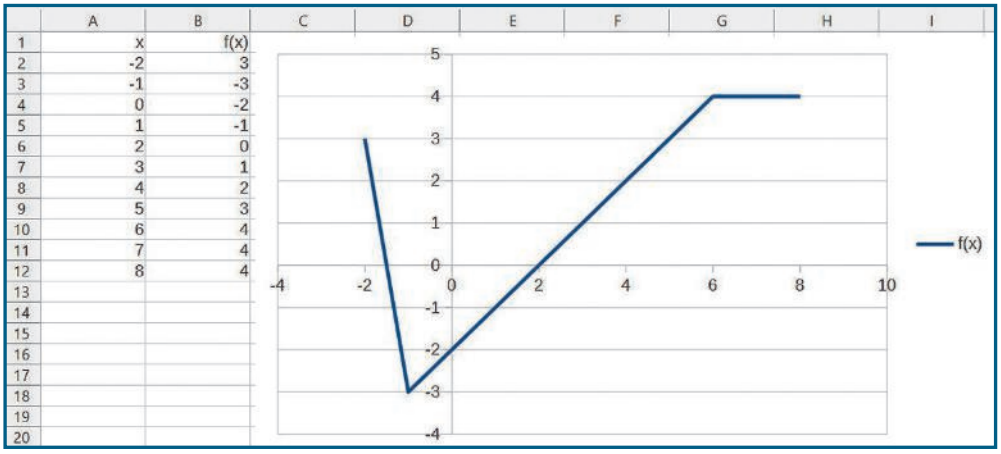
Reprodução/LibreOffice



Detalhe da tela do LibreOffice Calc durante o 4º passo.

Depois, clique em **Finalizar** e o gráfico será construído automaticamente.

Reprodução/LibreOffice



Detalhe da tela do LibreOffice Calc após o 4º passo.

Perceba que, neste caso, construímos o gráfico da função *f* apenas para os valores de −2 a 8 do domínio, ou seja, no intervalo [−2, 8] contido no domínio da função.

1. Analise o código que você escreveu no LibreOffice.

a) Qual é a lei da função *f*?

b) Agora analise as sentenças da função *f* e indique no caderno quais são crescentes, decrescentes ou constantes. Justifique sua resposta.

2. Considere a função *k* dada por $k(x) = \begin{cases} 2x + 4, \text{ se } x < 0 \\ -x + 4, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$. Escreva no caderno a fórmula que retorna o valor de $k(x)$ no LibreOffice, dado o valor de *x* inserido na célula A1 da planilha. **=SE(A1<0;2*A1+4;SE(A1>=0;−1*A1+4)**

3. Crie uma função definida por mais de uma sentença e peça a um colega para que represente o gráfico dela no LibreOffice. Depois, represente no LibreOffice o gráfico da função que ele criou. Resposta pessoal.

1. a) $f(x) = \begin{cases} -6x - 9, \text{ se } x \leqslant -1 \\ x - 2, \text{ se } -1 < x \leqslant 6 \\ 4, \text{ se } x > 6 \end{cases}$

Professor, destaque para os estudantes que as 3 sentenças são funções afins nos respectivos intervalos considerados.

1. b) A primeira sentença é de uma função decrescente, pois $a = -6 < 0$; a segunda, de uma função crescente, pois $a = 1 > 0$; a terceira, de uma função constante, pois $a = 0$.

Professor, na atividade **2**, oriente os estudantes a testar na planilha eletrônica o código que escreveram.

Atividades

Texto para a próxima atividade.

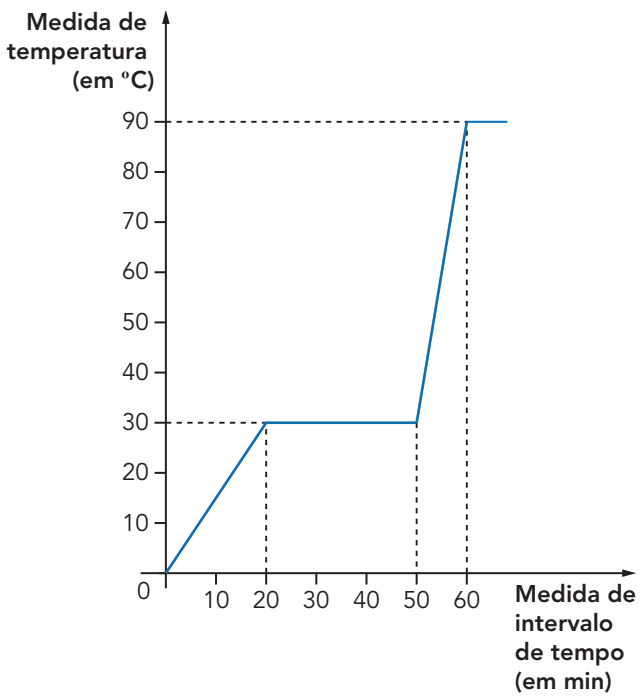
A matéria pode se apresentar principalmente em 3 estados físicos (ou fases): sólido, líquido e gasoso (há outros menos conhecidos, como o plasma e o coloide). Ela pode passar de um estado a outro mediante alterações na temperatura, e essas mudanças de estado recebem nomes específicos. Por exemplo:

- fusão: mudança de sólido para líquido;
- ebulição: mudança de líquido para gasoso (vaporização tumultuosa, com formação de bolhas).

Se a matéria formada por uma única substância no estado sólido é aquecida, a medida de temperatura aumenta até que se inicie a fusão e permanece constante até que toda a matéria passe para o estado líquido. Em seguida, se a matéria continua sendo aquecida, a medida de temperatura aumenta novamente até atingir o ponto de ebulição e permanece constante até toda a matéria passar para o estado gasoso, quando então volta a subir.

4. Suponha que determinada substância, inicialmente no estado sólido, tenha a curva de aquecimento mostrada na representação gráfica.

Curva de aquecimento de uma substância



WYM Design/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

De acordo com essa curva, indique, no caderno, a afirmação correta. Alternativa **c**.

a) O ponto de ebulição é alcançado quando a medida de temperatura atinge 30 °C.

b) Entre 50 min e 60 min, temos uma função afim f: [50, 60] → ℝ tal que $f(t) = 6t + 270$.

c) A medida de intervalo de tempo em que a substância está somente no estado líquido é 10 min.

5. O aquecedor de uma estufa é ligado quando a medida de temperatura chega a 0 °C. Sabendo que essa medida de temperatura, em graus Celsius, varia linearmente com a medida de intervalo de tempo, em minutos, verificou-se que:

- transcorridos 5 minutos, a medida de temperatura era 10 °C;
- passados exatamente mais 5 minutos, um mecanismo foi acionado, fazendo a variação da medida de temperatura em relação à medida de intervalo de tempo continuar linear, mas em uma proporção diferente;
- transcorridos 10 minutos, a medida de temperatura era 40 °C e, a partir daí, o aquecedor foi regulado para que a temperatura permanecesse constante;
- o aquecedor foi desligado 20 minutos depois de acionado.

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

a) No caderno, utilize régua milimetrada e represente um gráfico que mostre essa variação das medidas de temperatura durante os 20 minutos em que o aquecedor esteve ligado.

b) No caderno, indique a lei da função f que determina essa variação das medidas de temperatura obedecendo às condições indicadas.

c) Determine, no caderno, a medida de temperatura aos 2 minutos, aos 8 minutos e aos 12 minutos.

d) Em qual intervalo de tempo a temperatura e o tempo decorrido são diretamente proporcionais? Justifique.

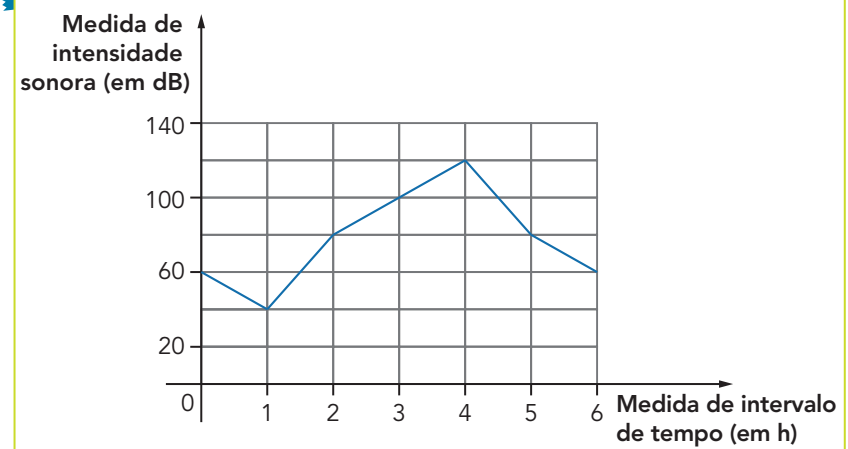
6. O decibel (dB) é uma unidade de medida de intensidade sonora. Ao longo de 6 horas, uma pessoa foi exposta a diferentes intensidades sonoras, como mostra o gráfico a seguir.

Analise o gráfico e responda aos itens no caderno.

a) Durante quantas horas a medida de intensidade sonora foi decrescente ao longo do intervalo de tempo indicado no gráfico?
3 h: entre 0 h e 1 h e entre 4 h e 6 h.

b) Qual era a medida de intensidade sonora a que essa pessoa estava submetida quando transcorreram 3 horas e 15 minutos? 105 dB

Intensidade sonora em relação ao tempo



WYM Design/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Texto para a próxima atividade.

Segundo a Receita Federal, o Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF):

> incide sobre a renda e os proventos de contribuintes residentes no País ou residentes no exterior que recebam rendimentos de fontes no Brasil. Apresenta alíquotas variáveis conforme a renda dos contribuintes, de forma que os de menor renda não sejam alcançados pela tributação.

BRASIL. Subsecretaria de Tributação e Contencioso. IRPF (Imposto sobre a renda das pessoas físicas). *Receita Federal*, 10 jul. 2015 [atualizada em: 22 jun. 2023]. Disponível em: https://tedit.net/josysz. Acesso em: 28 jun. 2024.

O cálculo do IRPF mensal, em 2024, foi feito de acordo com a renda do contribuinte, conforme a tabela a seguir.

Tabela de incidência mensal

Base de cálculo (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir do IRPF (em R$)
Até 2.259,20	-	-
De 2.259,21 até 2.826,65	7,5	169,44
De 2.826,66 até 3.751,05	15	381,44
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	662,77
Acima de 4.664,68	27,5	896,00

BRASIL. Subsecretaria de Tributação e Contencioso. IRPF (Tributação de 2024). *Receita Federal*, 4 maio 2023 [atualizado em: 9 fev. 2024]. Disponível em: https://tedit.net/josysz. Acesso em: 26 jun. 2024.

Para saber como calcular o IRPF mensal, acompanhe o exemplo a seguir. Um contribuinte ganha R$ 4.250,00 de salário bruto mensal. Consultando a tabela, percebe-se que, sobre esse valor, incide uma alíquota de 22,5%, e 22,5% de R$ 4.250,00 é R$ 956,25. Consultando a terceira coluna da tabela, a parcela a deduzir desse valor é R$ 662,77. Portanto, o cálculo do IRPF para esse contribuinte será R$ 956,25 − R$ 662,77 = R$ 293,48.

Professor, a atividade **7** favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Financeira* e *Educação Fiscal*.

7. Note que, conforme a tabela, contribuintes que ganham até R$ 2.259,20 estão isentos do IRPF.

No caderno, faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Considere um contribuinte que ganha x reais mensais. Como estamos lidando com valores monetários, na prática, x é um número racional com 2 casas decimais (ou uma aproximação racional). Considerando que seria possível calcular o IRPF para qualquer valor de x pertencente a $\mathbb{R}_+^*$, determine a lei de uma função $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ que fornece o IRPF pago mensalmente por esse contribuinte. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Em qual(is) intervalo(s) essa função é constante? Em qual(is) intervalo(s) essa função é crescente? $0 < x \leqslant 2\,259{,}20$; $x \geqslant 2\,259{,}20$.

c) Represente o gráfico de f. O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

d) Converse com os colegas e responda no caderno: Por que as alíquotas são maiores para as faixas salariais maiores? Para que os contribuintes de menor renda paguem valores menores de IRPF em relação ao salário bruto.

8. Na seção *Tecnologias digitais* deste capítulo, você utilizou o comando **Se** no LibreOffice para obter o gráfico da função dada pela lei:

$$f(x) = \begin{cases} -6x - 9, \text{ se } x \leqslant -1 \\ x - 2, \text{ se } -1 < x \leqslant 6 \\ 4, \text{ se } x > 6 \end{cases}$$

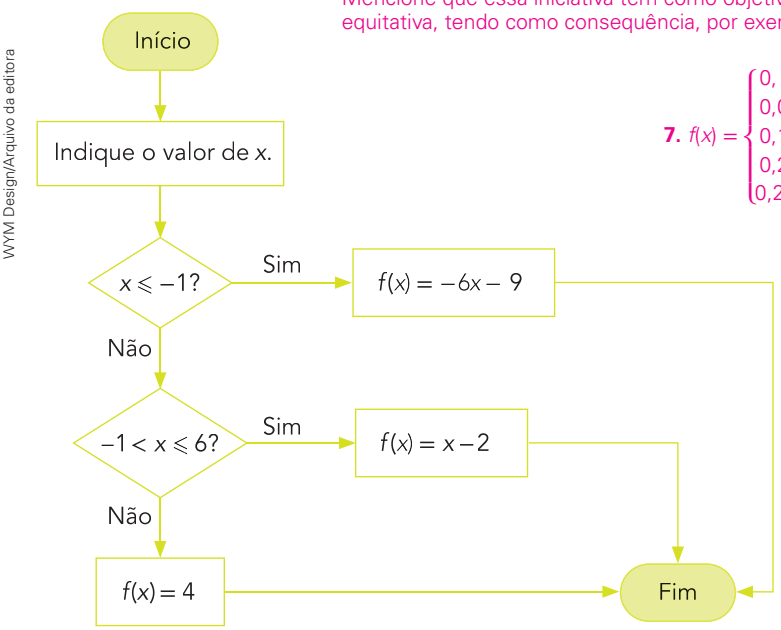
O comando completo utilizado foi o seguinte:

=SE(A2<=−1;−6*A2−9;SE(A2<=6;A2−2;4))

Analisemos como a sintaxe do comando **Se** do programa foi utilizada apresentando o algoritmo dele em um fluxograma.

Professor, no item **d** da atividade **7**, promova e modere a conversa entre os estudantes. Mencione que essa iniciativa tem como objetivo promover uma carga tributária mais equitativa, tendo como consequência, por exemplo, a redistribuição de renda.

WYM Design/Arquivo da editora



7. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leqslant 2\,259{,}20 \\ 0{,}075x - 169{,}44, \text{ se } 2\,259{,}20 < x \leqslant 2\,826{,}65 \\ 0{,}15x - 381{,}44, \text{ se } 2\,826{,}65 < x \leqslant 3\,751{,}05 \\ 0{,}225x - 662{,}77, \text{ se } 3\,751{,}05 < x \leqslant 4\,664{,}68 \\ 0{,}275x - 896, \text{ se } x > 4\,664{,}68 \end{cases}$

a) Como seria a fórmula utilizada no programa para retornar o valor da variável dependente da função f dada por $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \leqslant 0 \\ x, \text{ se } 0 < x \leqslant 4 \\ 2x - 6, \text{ se } x > 4 \end{cases}$, considerando um valor de x preenchido na célula A1? **=SE(A1<=0;2;SE(A1<=4;A1;2*A1−6))**

b) Construa no caderno um fluxograma que represente o funcionamento do comando do item anterior. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Enem e vestibulares

1. (Unifor-CE)

Reprodução/Unifor, 2022.

Disponível em: <www.somatematica.com.br>. Acesso em 10 out. 2021.

A temática da tirinha são os números racionais e os números irracionais, sobre os quais podemos afirmar que: Alternativa **c**.

a) existem números que são racionais e irracionais ao mesmo tempo, chamados números perfeitos.

b) tanto dízimas periódicas quanto dízimas não periódicas podem ser representadas na forma de fração.

c) somente os números racionais podem ser escritos na forma de fração ou de dízimas periódicas.

d) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

e) os números irracionais não fazem parte do conjunto dos números reais.

2. (UEG-GO) Em uma pesquisa sobre turismo, foi feito o levantamento sobre viagens realizadas em 2021, por motivo de lazer, para cidades do Brasil e do exterior. A tabela a seguir mostra o resultado.

Tipo de viagem	Nº de Entrevistados
Brasil	589
Exterior	260
Brasil e Exterior	57
Não viajaram	14

Quantas pessoas foram entrevistadas nessa pesquisa? Alternativa **b**.

a) 778 **c)** 849 **e)** 920

b) 806 **d)** 863

3. (Unisc-RS) A empresa WXYZSE Soluções Empreendedoras quer saber quais são os esportes preferidos de seus colaboradores. Para isso contratou uma pesquisa que apresentou o seguinte resultado: 32 jogam futebol, 27 treinam voleibol, 19 praticam golfe, 7 jogam futebol e voleibol, 5 treinam voleibol e golfe, 8 praticam golfe e futebol, 1 joga os três esportes.

Com base nessas informações, quantos colaboradores trabalham nessa empresa? Alternativa **a**.

a) 59 **c)** 50 **e)** 61

b) 51 **d)** 69

4. (Enem) Um grupo sanguíneo, ou tipo sanguíneo, baseia-se na presença ou ausência de dois antígenos, A e B, na superfície das células vermelhas do sangue. Como dois antígenos estão envolvidos, os quatro tipos sanguíneos distintos são:

- Tipo A: apenas o antígeno A está presente;
- Tipo B: apenas o antígeno B está presente;
- Tipo AB: ambos os antígenos estão presentes;
- Tipo O: nenhum dos antígenos está presente.

Disponível em: http://saude.hsw.uol.com.br. Acesso em: 15 abr. 2012 (adaptado).

Foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas e, após análise laboratorial, foi identificado que em 100 amostras está presente o antígeno A, em 110 amostras há presença do antígeno B e em 20 amostras nenhum dos antígenos está presente.

Dessas pessoas que foram submetidas à coleta de sangue, o número das que possuem o tipo sanguíneo A é igual a: Alternativa **a**.

a) 30.

b) 60.

c) 70.

d) 90.

e) 100.

5. **(UFPR)** Uma fábrica de calçados possui um custo fixo mensal de R$ 20.000,00 relacionado a pagamentos de salários, aluguel e outras despesas fixas. Sabendo que, a cada par de calçados produzido, essa fábrica fatura R$ 28,00, a expressão que descreve o lucro mensal, em reais, em função do número x de calçados produzidos é: Alternativa **b**.

a) $20\,000x - 28$.
b) $28x - 20\,000$.
c) $28x + 20\,000$.
d) $-28x + 20\,000$.
e) $-20\,000x + 28$.

6. **(Unicamp-SP)** Uma empresa que instala cercas de arame em terrenos trabalha com os seguintes preços: R$ 160,00 de custo inicial mais R$ 15,00 por metro de arame utilizado. A função que nos fornece o custo de cercamento de um terreno com x metros de perímetro, passando duas voltas de arame ao redor do referido terreno, é: Alternativa **d**.

a) $f(x) = 120 + 15x$.
b) $f(x) = 160 + 15x$.
c) $f(x) = 120 + 30x$.
d) $f(x) = 160 + 30x$.

7. **(Enem)** Uma pessoa chega ao hotel no qual fez uma pré-reserva com diária no valor de R$ 210,00. Como a confirmação da reserva não foi feita, quando chegou ao hotel não havia quarto disponível. Dessa forma, o recepcionista apresentou-lhe algumas opções de hotéis com diárias mais baratas, mas localizados a certa distância desse hotel, conforme apresentado.

$\mathbf{H}_1$: diária de R$ 180,00 e distância de 7 km;

$\mathbf{H}_2$: diária de R$ 200,00 e distância de 1,6 km;

$\mathbf{H}_3$: diária de R$ 199,00 e distância de 4,5 km;

$\mathbf{H}_4$: diária de R$ 190,00 e distância de 1,5 km;

$\mathbf{H}_5$: diária de R$ 205,00 e distância de 1,2 km.

Para se locomover até um outro hotel, essa pessoa utiliza um táxi que cobra R$ 2,50 por quilômetro rodado mais taxa fixa de R$ 6,00.

Sua escolha será em função do menor custo, composto pelo valor da diária mais a locomoção de táxi. O hotel escolhido foi o:

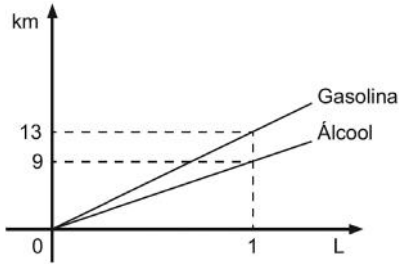
a) $\mathbf{H}_1$.
b) $\mathbf{H}_2$.
c) $\mathbf{H}_3$.
d) $\mathbf{H}_4$. Alternativa **d**.
e) $\mathbf{H}_5$.

8. **(Enem)** Uma microempresa especializou-se em produzir um tipo de chaveiro personalizado para brindes. O custo de produção de cada unidade é de R$ 0,42 e são comercializados em pacotes com 400 chaveiros, que são vendidos por R$ 280,00. Além disso, essa empresa tem um custo mensal fixo de R$ 12.800,00 que não depende do número de chaveiros produzidos.

Qual é o número mínimo de pacotes de chaveiros que devem ser vendidos mensalmente para que essa microempresa não tenha prejuízo no mês?

a) 26
b) 46
c) 109
d) 114
e) 115
Alternativa **e**.

9. **(Enem)** O rendimento de um carro bicombustível (abastecido com álcool ou gasolina), popularmente conhecido como carro *flex*, quando abastecido com álcool é menor do que quando abastecido com gasolina, conforme o gráfico, que apresenta o rendimento médio dos carros populares.



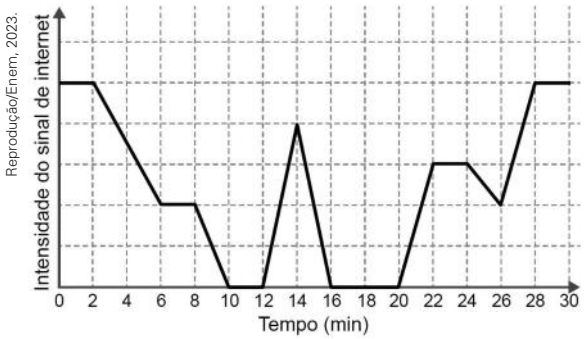
Reprodução/Enem, 2021.

Suponha que um cidadão fez uma viagem, cujo percurso foi de 1009 km, em um carro popular *flex*, tendo abastecido o carro nos primeiros 559 km com gasolina e, no restante do percurso, com álcool. Considere que no momento do abastecimento não havia mais combustível no tanque.

Qual o valor mais próximo do rendimento médio do carro ao concluir todo o percurso de 1009 km? Alternativa **c**.

a) 9,90 km/L
b) 10,43 km/L
c) 10,84 km/L
d) 11,00 km/L
e) 12,11 km/L

10. **(Enem)** Uma pessoa caminha por 30 minutos e utiliza um aplicativo instalado em seu celular para monitorar a variação da intensidade do sinal de internet recebido pelo aparelho durante o deslocamento. Chegando ao seu destino, o aplicativo forneceu este gráfico:



Reprodução/Enem, 2023.

Por quantos minutos, durante essa caminhada, o celular dessa pessoa ficou sem receber sinal de internet?

a) 6
b) 8
c) 10
d) 14
e) 24

Alternativa **a**.

11. **(Uece)** Um equipamento eletrônico utilizado por uma indústria tem seu valor monetário continuamente reduzido em função do uso e do surgimento de novas tecnologias, dentre outros fatores. Se o valor monetário do equipamento decresce linearmente com o tempo, sabendo-se que foi adquirido há três anos pelo valor de R$ 180.000,00 e que hoje está avaliado em R$ 135.000,00, é correto afirmar que o valor monetário do equipamento daqui a dois anos será:

> Uma função real de variável real decresce linearmente se é do tipo $f(x) = ax + b$, com a e b números reais constantes e $a < 0$.

Alternativa **a**.

a) R$ 105.000,00.
b) R$ 115.000,00.
c) R$ 108.000,00.
d) R$ 112.000,00.

12. **(UPE)** No mês de setembro, uma loja de roupas teve um lucro [$L(y)$] de R$ 40.200,00, em função do que foi investido (y), como representado na expressão $L(y) = 8y + 200$. Quanto deverá ser o investimento em reais no mês de outubro, para que o lucro obtido quadruplique, considerando essa mesma expressão para o lucro?

a) R$ 20.000,00
b) R$ 20.035,00
c) R$ 20.045,00
d) R$ 20.075,00
e) R$ 20.100,00

Alternativa **d**.

13. **(UFJF-MG)** Um tanque é abastecido por uma torneira e o volume de água, em milhares de litros, em seu interior é dado por $V_1(t) = 3t + 13$, com t contado em horas a partir do instante $t = 0$ em que a torneira é aberta.

No instante t_1, em que o volume de água atinge a capacidade máxima do tanque, a torneira é automaticamente fechada e, imediatamente, um registro é aberto permitindo que a água acumulada nesse tanque abasteça caixas-d'água menores. A partir do momento em que esse registro é aberto, o volume d'água no tanque passa a ser descrito pela função $V_2(t) = -2t + 58$, para $t \geqslant t_1$, até que o tanque esteja completamente vazio.

a) Calcule a capacidade máxima do tanque. 40 000 L
b) Em quanto tempo o tanque estará vazio depois de fechada a torneira e aberto o registro? 20 h

14. **(FGV-SP)** Para celebrar uma festa, o centro acadêmico de uma faculdade escolhe entre dois lugares cujos preços são:

Salão A	Salão B
R$ 1.000,00 mais R$ 5,00 por pessoa	R$ 200,00 mais R$ 10,00 por pessoa

A capacidade máxima de ambos os lugares é de 300 pessoas. O centro não tem ainda o número de pessoas que irá à festa.

a) Para que número de pessoas é indiferente o salão a ser escolhido pelo centro acadêmico? 160 pessoas.
b) Represente [no caderno] graficamente em um mesmo par de eixos cada uma das duas funções que expressa o preço de cada salão em função do número de pessoas que irá à festa. Que salão deve ser escolhido caso o número de pessoas presentes na festa seja maior do que o número obtido no item **a**?

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Conteúdos e aprendizagens

Não escreva no livro

JHVEPhoto/Alamy/Fotoarena

A Usina Hidrelétrica de Itaipu é binacional e está localizada no rio Paraná, na fronteira entre o Brasil e o Paraguai.

Função afim

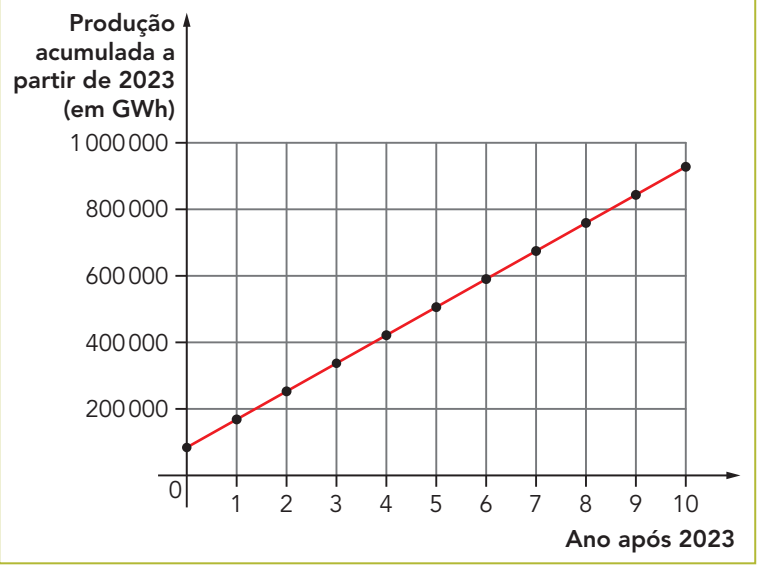
$f(x) = ax + b$

a e b devem ser números reais (a e $b \in \mathbb{R}$).

O coeficiente a define se a função será

- crescente
  - Exemplo: $f(x) = 70\,000x + 70\,000$
- ou
- decrescente
  - Retirada da água de uma piscina em função da medida de intervalo de tempo.
- ou
- constante → $f(x) = 10$

Estimativa da produção energética acumulada de Itaipu



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

- Compreendo a influência dos coeficientes a e b em funções dadas por $f(x) = ax + b$?
- Consigo determinar o zero de uma função afim?
- Consigo converter representações algébricas de funções afins em representações gráficas e vice-versa?
- Consigo identificar a relação entre função linear e grandezas diretamente proporcionais?

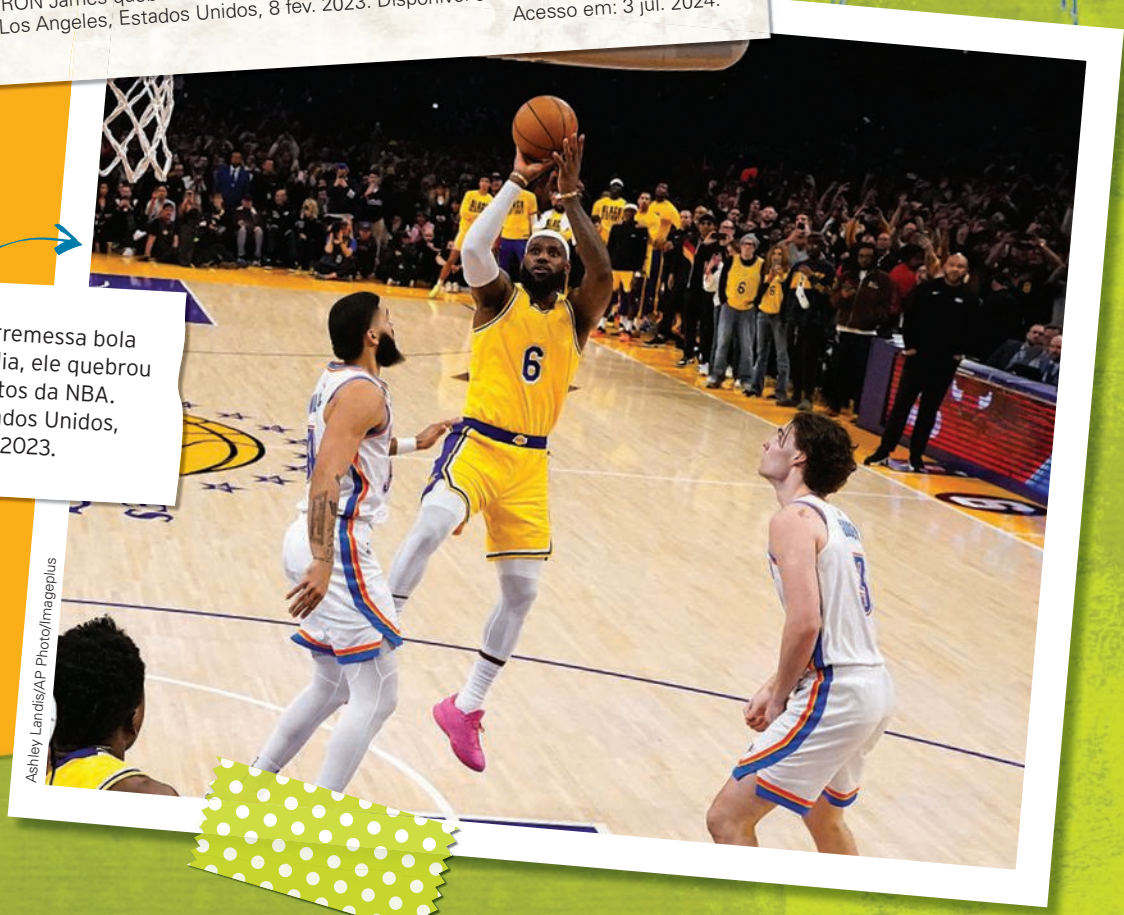
Respostas pessoais.

UNIDADE 2

Função quadrática

No dia 7 de fevereiro de 2023, o jogador de basquete estadunidense LeBron James (1984-) quebrou o recorde de pontuação realizada por um jogador na National Basketball Association (NBA – Associação Nacional de Basquetebol, em português). O recorde pertencia ao atleta estadunidense Kareem Abdul-Jabbar (1947-). Faltando 10,9 segundos para o final do 3º tempo, LeBron realizou um arremesso e acertou uma bola de 2 pontos.

Fonte dos dados: LEBRON James quebra recorde histórico e é o maior pontuador da NBA em todos os tempos. *GE*, Los Angeles, Estados Unidos, 8 fev. 2023. Disponível em: https://tedit.net/yeiimo. Acesso em: 3 jul. 2024.

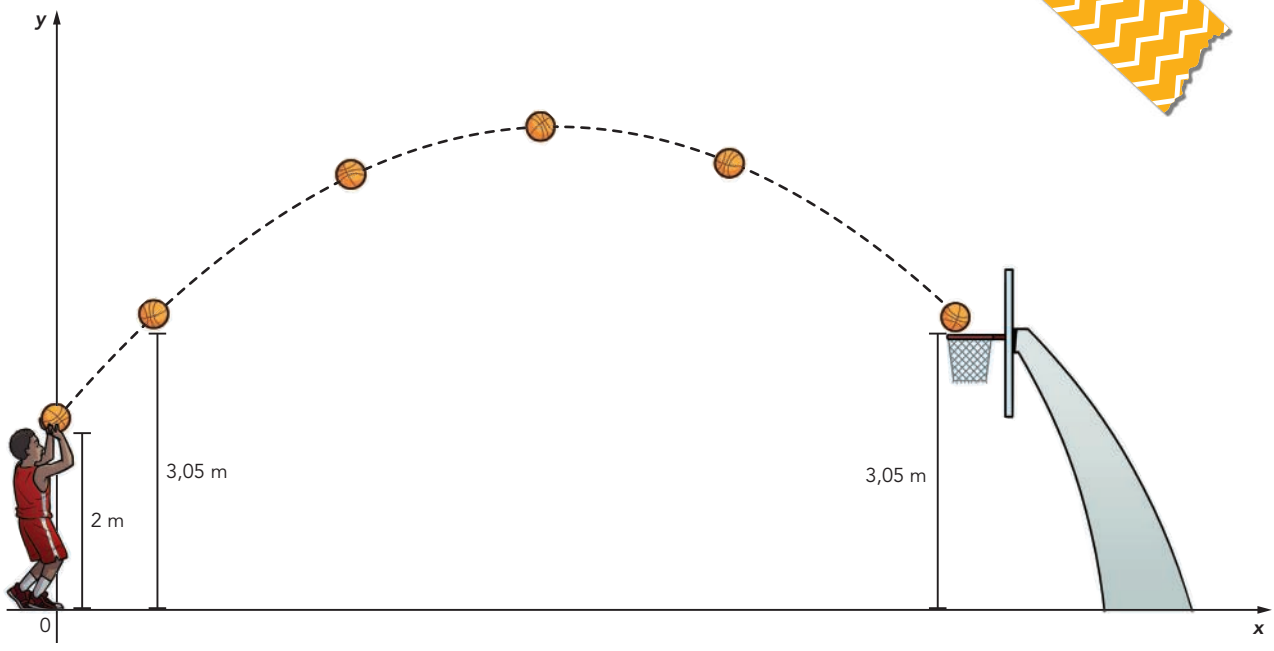


Ashley Landis/AP Photo/Imageplus

LeBron James arremessa bola ao cesto. Nesse dia, ele quebrou o recorde de pontos da NBA. Los Angeles, Estados Unidos, 7 de fevereiro de 2023.

Em um jogo de basquete, o objetivo é lançar a bola de maneira que ela passe por um aro, que fica a 3,05 m de medida de altura. No lance livre, o jogador precisa arremessar a bola estando atrás de uma linha que fica a 4,6 m de medida de distância da tabela.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta abertura encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.



Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

- Quando a bola estava posicionada para o arremesso, qual era o valor de x, que indica a posição da bola? $x = 0$
- A que medida de altura do solo estava a bola nesse momento? 2 m

CAPÍTULO 1

A função quadrática

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação-problema

Preço de venda de um bolo

Em confeitarias e em outros empreendimentos, a definição do preço de venda ideal de um produto para maximizar lucros envolve vários conhecimentos algébricos.

Katalin Barta/Shutterstock

Uma confeitaria quer dar um desconto no preço dos bolos. Para isso, decide fazer um teste para verificar como ocorre o rendimento. O proprietário da loja percebe que, vendendo um bolo a 60 reais, ele geralmente vende, por dia, 12 bolos. A cada 5 reais de desconto que ele dá por bolo, ele passa a vender mais 2 bolos por dia.

Além disso, ele sabe que, ao multiplicar a quantidade de bolos vendidos pelo preço de venda, o resultado é o valor total arrecadado nas vendas e que não vale a pena vender um bolo por menos de R$ 10,00.

a) Com um colega, copiem e completem a tabela a seguir no caderno. Depois, façam algumas simulações de quanto a confeitaria iria faturar a cada 5 reais de desconto dado no preço do bolo: 5 reais, 10 reais, 15 reais, 20 reais, e assim sucessivamente.

$20 \cdot 40{,}00 = 800{,}00$

$18 \cdot 45{,}00 = 810{,}00$

Receita em função do desconto no preço do bolo

Desconto (em R$)	Preço do bolo (em R$)	Quantidade de bolos vendidos	Receita (em R$)
0,00	60,00	$12 + 0 = 12$	$12 \cdot 60{,}00 = 720{,}00$
5,00	55,00	$12 + 2 = 14$	$14 \cdot 55{,}00 = 770{,}00$
10,00	50,00	$12 + 4 = 16$	$16 \cdot 50{,}00 = 800{,}00$
15,00			
20,00			
$5x$	$60 - 5x$	$12 + 2x$	

40,00

45,00

$12 + 8 = 20$

$12 + 6 = 18$

Dados elaborados para fins didáticos.

$(12 + 2x) \cdot (60 - 5x) = -10x^2 + 60x + 720$

b) O que vocês podem notar sobre o crescimento da receita (valor recebido) conforme o aumento do desconto por bolo? Até um desconto de R$ 15,00, conforme o desconto aumenta, a receita também aumenta. A partir de R$ 15,00, quanto mais o desconto aumenta, mais a receita diminui.

c) Existe uma receita máxima nessa simulação? Se sim, qual é o valor dela? Sim; R$ 810,00.

d) Qual é a expressão algébrica que representa x descontos de R$ 5,00 sobre o preço de venda do bolo? $-10x^2 + 60x + 720$

Explorando a função quadrática

Nos Anos Finais do Ensino Fundamental, você estudou que a quantidade de diagonais (d) em um polígono convexo depende da quantidade n de lados desse polígono. Vamos relembrar.

Fique atento

A diagonal de um polígono convexo é um segmento de reta que liga 2 vértices não consecutivos do polígono.

Explore para descobrir

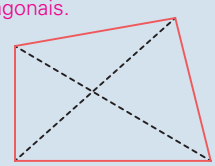
Não escreva no livro

Responda às atividades no caderno.

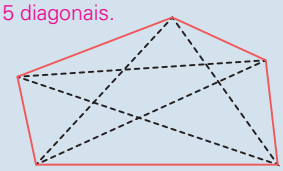
1. Quantas diagonais tem:

a) um triângulo?
Nenhuma.

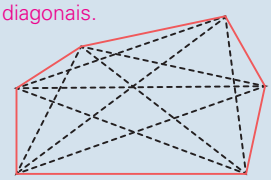
b) um quadrilátero?
2 diagonais.



c) um pentágono?
5 diagonais.



d) um hexágono?
9 diagonais.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Professor, no item **a**, destaque para os estudantes que um triângulo não tem nenhuma diagonal pois, unindo quaisquer 2 vértices dele, obtemos um dos lados do triângulo. Se julgar oportuno, peça aos estudantes que justifiquem suas respostas em função da quantidade n de lados de cada polígono.

2. Quantas diagonais partem de cada vértice de:

a) um triângulo? Nenhuma.

b) um quadrilátero? 1 diagonal.

c) um pentágono? 2 diagonais.

d) um hexágono? 3 diagonais.

e) um polígono convexo de n lados?
$(n - 3)$ diagonais.

3. Em um polígono convexo de n lados, se multiplicarmos a quantidade de vértices pela quantidade de diagonais que partem de cada vértice, obteremos a quantidade de diagonais desse polígono? Se sim, justifique. Caso contrário, indique como obter a expressão correta da função d que expressa a quantidade d de diagonais em função de n. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
Professor, se necessário, relembre aos estudantes a definição de polígono convexo.

4. Teste a expressão obtida na atividade anterior com os valores obtidos na atividade **1** e, verificando os valores de $d(3)$, $d(4)$, $d(5)$ e $d(6)$, responda: A função $d(n)$ é afim? Por quê?
A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

A expressão que relaciona a quantidade d de diagonais em um polígono convexo em função da quantidade n de lados, que é igual à quantidade de vértices, desse polígono é a lei de uma **função quadrática** dada por:

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2}$$

Sendo n um número natural maior do que ou igual a 3.

Reflita

Porque n precisa ser um número natural maior do que ou igual a 3?

É necessário que $n \geqslant 3$ pois é preciso ao menos 3 lados para formar um polígono.

Fique atento

Neste caso, o domínio da função é $D(n) = \{n \in \mathbb{N}; n \geqslant 3\}$ e o conjunto imagem está contido em $\mathbb{N}$.

Formalizando a definição de função quadrática

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada **função quadrática**, ou **função polinomial do 2º grau**, quando existem 3 números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Escrevemos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

Reflita

Por que a função quadrática também recebe o nome de função polinomial do 2º grau?

Devido ao expoente 2 do x, ou seja, x está elevado ao quadrado.

Lembre-se de que podemos facilitar a escrita de $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ escrevendo que a lei da função f é $f(x) = ax^2 + bx + c$. Mas esteja sempre atento para não confundir a função $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ com o número real $f(x)$, que é o valor assumido pela função no ponto x.

Analise alguns exemplos de funções quadráticas ou polinomiais do 2º grau. Os números reais a, b e c são chamados de **coeficientes** da função.

a) $f(x) = -x^2 + 100x$, em que $a = -1$, $b = 100$ e $c = 0$.

b) $f(x) = 3{,}5x^2 - 2x + 1$, em que $a = 3{,}5$, $b = -2$ e $c = 1$.

c) $f(x) = x^2 - \pi$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -\pi$.

d) $f(x) = \frac{13}{20}x^2$, em que $a = \frac{13}{20}$, $b = 0$ e $c = 0$.

Analise algumas funções que **não** são quadráticas.

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = 2^x$

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

Professor, não é necessário que os estudantes identifiquem o tipo de função representada nesses exemplos de funções que não são quadráticas, porém pode ser que alguns deles o façam. A função do exemplo **a** é afim, a do exemplo **b** é exponencial e a do exemplo **c** é polinomial do 3º grau.

Reflita

Por que essas funções não são quadráticas?

Porque não podem ser escritas na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

Não escreva no livro

Atividades

1. Escreva no caderno as leis de 3 exemplos de função quadrática, indicando os valores dos coeficientes a, b e c. Resposta pessoal.

2. Quais das seguintes funções são quadráticas? As funções dos itens **a** e **d**.

a) $f(x) = 2x^2$

b) $f(x) = 2x + 1$

c) $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$

d) $f(x) = 3x(x - 1)$

3. Para quais valores de t as seguintes funções são quadráticas? Justifique sua resposta.

a) $f(x) = tx^2 + 2x + 5$

b) $f(x) = -5x^t + 2x + 5$

4. As leis das funções a seguir podem ser escritas na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determine, em cada uma delas, os valores de a, b e c.

a) $f(x) = 2x^2$
$a = 2$, $b = 0$ e $c = 0$.

b) $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$
$a = 2$, $b = -12$ e $c = 23$.

c) $f(x) = (x + 2)(x - 3)$
$a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$.

Professor, se julgar oportuno, peça aos estudantes que criem exemplos de funções quadráticas, inclusive relacionadas a contextos criados por eles.

Fique atento

Quando não estiver explicitado o domínio e o contradomínio da função quadrática, considere sempre o conjunto dos números reais como domínio e contradomínio, ou restrições desses conjuntos se a situação exigir.

3. a) Para $t \in \mathbb{R}$ e $t \neq 0$, pois, em toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, são necessários a, b e c reais e $a \neq 0$ para que a função seja quadrática.

b) Para $t = 2$, para que seja uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

Valor ou imagem da função quadrática em um ponto

Se a lei da função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $f(x) = ax^2 + bx + c$, então 2 situações são importantes.

- Dado um valor $x_0 \in \mathbb{R}$, calcular $f(x_0)$.

  Por exemplo, se $f(x) = x^2 - 5x + 6$, para calcular o valor dessa função no ponto $x = 4$, ou seja, para calcular $f(4)$, fazemos $f(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2$. Logo, $f(4) = 2$.

- Obter o valor $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

  Se $f(x) = x^2 - 5x + 6$, para obtermos $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, precisamos resolver $x^2 - 5x + 6 = 0$, que é um tipo de equação que será estudada neste capítulo. Os valores que satisfazem essa equação são chamados de **zeros** da função f, quando a equação está relacionada à função f, ou **raízes** dessa equação.

Reflita

Verifique, por meio de substituição, se 2 e 3 são raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$
$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$
Portanto, 2 e 3 são raízes da equação.

Professor, se julgar oportuno, na atividade **8**, demonstre que a medida de área de um trapézio é dada por $A = \frac{(B + b)h}{2}$, em que B é a medida de comprimento da base maior, b é a medida de comprimento da base menor e h é a medida de comprimento da altura do trapézio.

Não escreva no livro

Atividades

5. Para cada item a seguir, calcule $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ e $f(5)$.

a) $f(x) = -2x^2$ $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = -8$, $f(3) = -18$, $f(4) = -32$ e $f(5) = -50$.

b) $f(x) = 3x^2 - 5x$ $f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 12$, $f(4) = 28$ e $f(5) = 50$.

6. Quando variamos a medida de comprimento ℓ do lado de uma região quadrada, a medida de área também varia. Essa relação pode ser expressa pela função A descrita pela lei $A(\ell) = \ell^2$.

a) Calcule $A(10)$, $A(1{,}5)$ e $A\left(2\sqrt{3}\right)$. $A(10) = 100$; $A(1{,}5) = 2{,}25$; $A\left(2\sqrt{3}\right) = 12$.

b) Calcule ℓ tal que $A(\ell) = 256$. $A(\ell) = 256 \Rightarrow \ell^2 = 256 \Rightarrow \ell = 16$

7. Gerador é um aparelho que transforma qualquer tipo de energia em energia elétrica. Se a medida de potência P (em watts) que certo gerador lança em um circuito elétrico é dada pela relação $P(i) = 20i - 5i^2$, em que i é a medida de corrente elétrica que atravessa o gerador, determine a medida de potência P, em watts, quando $i = 3$ ampères.

$P(3) = 20 \cdot 3 - 5 \cdot (3)^2 = 60 - 45 = 15$; logo, a medida de potência é 15 watts.

8. A medida de área A de uma região limitada por um trapézio é dada por $A = \frac{(B + b)h}{2}$, em que B e b são, respectivamente, as medidas de comprimento da base maior e da base menor e h é a medida de altura. Em uma região limitada por um trapézio, a medida de área também pode ser dada em função da medida de comprimento x da base menor por uma lei do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Junte-se a um colega e façam, no caderno, o que é pedido em cada item.

a) Determine a lei da função que indica a medida de área do trapézio sabendo que a medida de comprimento da base maior é 6, da base menor é x e da altura é $x + 2$.

b) Identifique os coeficientes a, b e c da lei que você determinou. $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$ e $c = 6$.

c) Calcule a medida de área dessa região. Não é possível, pois não se sabe o valor de x.

8. a) $f(x) = \frac{(6 + x)(x + 2)}{2} = \frac{x^2}{2} + 4x + 6$

Conexões

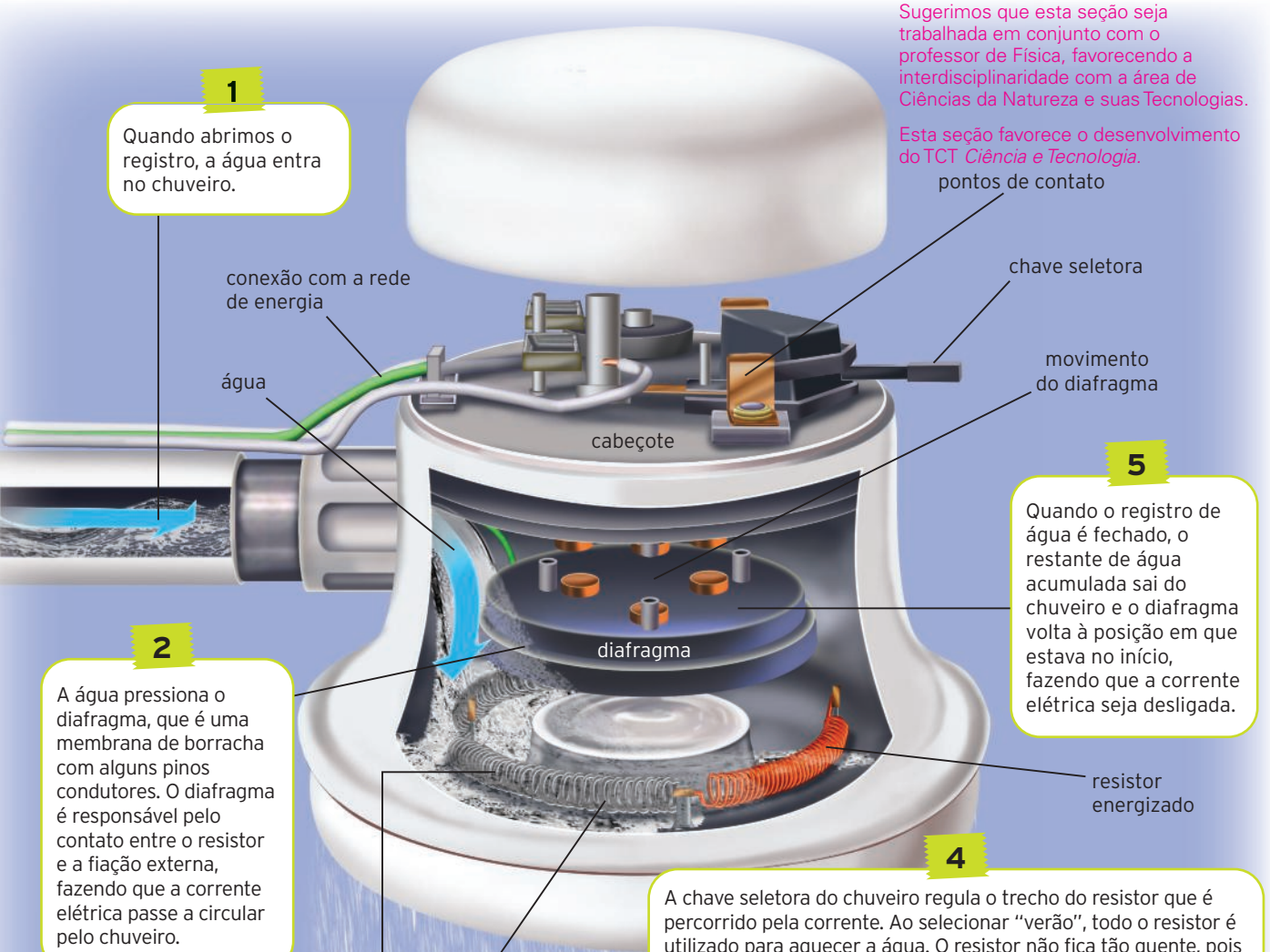
Funcionamento de um chuveiro elétrico

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Física, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

Luis Moura/Arquivo da editora



1

Quando abrimos o registro, a água entra no chuveiro.

2

A água pressiona o diafragma, que é uma membrana de borracha com alguns pinos condutores. O diafragma é responsável pelo contato entre o resistor e a fiação externa, fazendo que a corrente elétrica passe a circular pelo chuveiro.

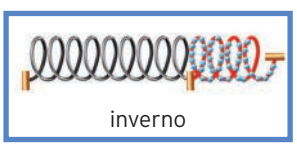
3

A corrente elétrica percorre o resistor, que é uma peça metálica que esquenta quando a corrente elétrica passa por ela. Dessa maneira, o resistor superaquece e transfere parte desse calor para a água que passa por dentro do chuveiro.

4

A chave seletora do chuveiro regula o trecho do resistor que é percorrido pela corrente. Ao selecionar "verão", todo o resistor é utilizado para aquecer a água. O resistor não fica tão quente, pois os elétrons que estão na corrente elétrica têm um maior caminho para circulação. Ao selecionar "inverno", uma parte menor do resistor é ativada, fazendo com que a água saia mais quente do chuveiro. Nessa posição, como os elétrons têm um caminho menor para percorrer, mas a medida de corrente elétrica permanece a mesma, o choque entre os elétrons é maior, gerando mais calor e fazendo com que a água se aqueça mais.

verão


inverno

5

Quando o registro de água é fechado, o restante de água acumulada sai do chuveiro e o diafragma volta à posição em que estava no início, fazendo que a corrente elétrica seja desligada.

Fonte dos dados: LOPES, Reinaldo José. Como funciona o chuveiro elétrico? *Superinteressante*, São Paulo, 18 abr. 2011 [atualizado em: 22 fev. 2024]. Disponível em: https://tedit.net/0mph6l. Acesso em: 3 jul. 2024.

Não escreva no livro

Os resistores têm a função de limitar a medida de corrente elétrica em um circuito e, assim, regular a tensão para um valor adequado ao aparelho a ser ligado, evitando que este queime. Comumente chamados **resistências**, os resistores, por esquentarem durante o uso, também receberam a funcionalidade, em alguns aparelhos, de aquecer o meio no qual estão, como em secadores de cabelos, chuveiros elétricos e fornos elétricos.

Sergiy Kuzmin/Shutterstock

Diferentes tipos de resistores. As faixas coloridas seguem um código referente à medida de resistência de cada um, que é constante.

As imagens não estão representadas em proporção.

Ilustrações: Luis Moura/Arquivo da editora

Forno elétrico, secador de cabelo e chuveiro elétrico.

Esse fenômeno de transformação de energia elétrica em térmica é chamado **efeito joule**. A elevação da medida de temperatura ocorre com a passagem da corrente elétrica, quando os elétrons colidem com os átomos do condutor, que passam a vibrar intensamente. A medida de potência elétrica (P), em watts (W), desenvolvida em um aparelho que usa o efeito joule é dada por $P = \frac{U^2}{R}$, sendo U a medida de tensão elétrica, em volts (V), a que o aparelho é submetido e R a medida de resistência do resistor, em ohms (Ω).

Conecte com o texto

Professor, na atividade **3**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

1. Considere a lei da função, que indica a medida de potência elétrica, apresentada no texto. Depois, responda no caderno: No caso de um aparelho com medida de resistência constante, como podemos classificar a função que relaciona a medida de potência do aparelho à medida de tensão elétrica a que ele é submetido?

Função quadrática ou função polinomial do 2º grau.

2. Um chuveiro elétrico que não tem variação de medida de resistência foi ligado a uma tomada de 110 V e, depois, em uma tomada de 220 V. Sabendo que a medida de resistência é 50 Ω, com qual medida de potência ele operou em cada uma das opções de tensão elétrica, de medidas 110V e 220V?

242 W e 968 W, respectivamente.

Pesquise e debata

3. Pesquise o funcionamento das lâmpadas incandescentes, fluorescentes e de LED e responda: Por que as lâmpadas incandescentes são consideradas menos eficientes quando comparadas às outras duas?

A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

4. Pesquise o funcionamento dos chuveiros a gás e elabore um pequeno texto no caderno listando as vantagens e as desvantagens dessa opção em relação aos chuveiros elétricos. Depois, debata com os colegas qual é, em sua opinião, a opção mais vantajosa.

A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Professor, na atividade **4**, promova e modere o debate entre os estudantes. Proponha uma roda de conversa para que eles compartilhem as vantagens e desvantagens listadas. Crie na lousa uma lista com as vantagens e outra com as desvantagens de cada escolha.

Sobre o assunto

O texto "Sete aparelhos elétricos com consumo surpreendente de eletricidade – e como reduzi-lo", disponível em: https://tedit.net/oca5is (acesso em: 3 jul. 2024) apresenta o consumo médio estimado, em watts, de alguns eletrodomésticos em comparação ao consumo de lâmpadas de 60 W.

Professor, proponha aos estudantes que façam no caderno um resumo das informações apresentadas no texto. Promova uma roda de conversa para que cada um compartilhe com a turma o que achou das estratégias de economia. Pergunte se já aplicam alguma dessas estratégias no cotidiano deles.

Explorando as raízes de uma equação do 2º grau

Em muitas situações modeladas por funções quadráticas, é comum precisarmos recorrer a equações do 2º grau para resolvê-las. Essas equações são da forma $y = ax^2 + bx + c$, em que os coeficientes a, b e c são números reais, com $a \neq 0$; c é chamado de termo independente da equação, pois é o termo que não é multiplicado por x ou x^2.

Antes de fazer o estudo dos zeros das funções quadráticas, vamos conhecer a origem histórica das equações do 2º grau.

The Picture Art Collection/Alamy/Fotoarena

Foto do tablete Plimpton 322, coleção Plimpton da Biblioteca da Universidade de Columbia, Estados Unidos.

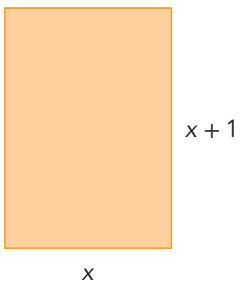
Muito do que conhecemos da Matemática desenvolvida pelos antigos babilônios (que viviam onde hoje fica o Iraque) provém da análise de tabletes de argila feitos por eles. Entre esses documentos históricos, está o tablete Plimpton 322, produzido entre 1820 a.C. e 1762 a.C.

Além do Plimpton 322, outros tabletes babilônios foram descobertos por pesquisadores e, em alguns deles, foram encontrados problemas que, se traduzidos para termos matemáticos atuais, são equivalentes a equações do 2º grau. Acredita-se que esses problemas tinham como objetivo descobrir medidas de comprimento de figuras geométricas.

Atividades

Não escreva no livro

9. Vamos adaptar as ideias utilizadas pelos babilônios para a linguagem atual, de modo a obter a raiz real positiva da equação do 2º grau $x \cdot (x + 1) = 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 + x = 6$, que representa o cálculo da medida de área da região retangular ilustrada.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) No caderno, siga os passos indicados para obter a raiz real positiva.

1º passo: Calcule metade do coeficiente de x na equação dada. $1 \div 2 = \frac{1}{2}$

2º passo: Eleve o valor obtido ao quadrado. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

3º passo: Multiplique o 2º membro da equação $x^2 + x = 6$ pelo coeficiente de x^2. Depois, adicione esse produto ao resultado do passo anterior. $6 \cdot 1 + \frac{1}{4} = \frac{24}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

4º passo: Calcule a raiz quadrada do valor obtido no passo anterior. $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

5º passo: Do resultado do passo anterior, subtraia metade do coeficiente de x. $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

6º passo: Divida o valor obtido no passo anterior pelo coeficiente de x^2. $\frac{2}{1} = 2$

7º passo: Verifique que o resultado obtido no 6º passo é o valor de x. Para $x = 2$, temos: $2^2 + 2 = 6$. Logo, x é raiz da equação $x^2 + x = 6$.

b) Repita os passos anteriores, para obter uma raiz real positiva para a equação $x^2 + 8x = 105$. $x = 7$

Fonte dos dados: ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Formalizando o conceito de zeros de uma função quadrática

O valor de x para o qual a função quadrática dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, se anula, ou seja, para o qual $f(x) = 0$, denomina-se **zero** da função quadrática. Assim, para determinar o zero de uma função quadrática, basta determinar as **raízes** da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

A seguir, vamos apresentar algumas maneiras de determinar as raízes de uma equação do 2º grau.

Determinação das raízes de uma equação do 2º grau

Analisando a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais e $a \neq 0$

Para resolver uma equação, podemos isolar o x em um dos membros. Dessa maneira, ficaremos com: $ax^2 + bx = -c$.

Dividimos todos os termos por a, obtendo: $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ **(I)**

Agora, dividimos $\frac{b}{a}$ por 2 e elevamos o resultado ao quadrado, para descobrir o valor a ser adicionado aos 2 membros da equação:

$$\left(\frac{\frac{b}{a}}{\frac{2}{1}}\right)^2 = \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

Então, adicionamos o valor obtido aos membros da equação **I**:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Fatorando o lado esquerdo da igualdade, temos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Professor, destaque para os estudantes que a fatoração do polinômio permite o desenvolvimento da equação e a simplificação dos cálculos.

Utilizamos o mmc para adicionar os termos do 2º membro da igualdade:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extraímos a raiz quadrada de ambos os membros e isolamos o x no 1º membro da igualdade:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Considerando que $\Delta = b^2 - 4ac$, podemos reescrever a equação da seguinte maneira: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Fique atento

O símbolo ± é usado para indicar que há 2 possibilidades: uma positiva e uma negativa.

Professor, no penúltimo passo, ao extrair as raízes de ambos os membros, temos as seguintes passagens:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow \left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ pode ser utilizada para calcular as raízes de equações do 2º grau. O número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado **discriminante** da equação relacionada à função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ele tem um papel muito importante na determinação das raízes da equação.

Fique atento

O valor do discriminante (Δ) de uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, influencia na quantidade de raízes da equação e, consequentemente, na quantidade de zeros da função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Quando $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem 2 raízes reais diferentes (consequentemente, a função f tem 2 zeros reais diferentes) dadas por: $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Quando $\Delta = 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem 2 raízes reais iguais (consequentemente, a função f tem 2 zeros reais iguais) dadas por: $x' = x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a}$.
- Quando $\Delta < 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raízes reais (consequentemente, a função f não tem zeros reais).

Existe uma relação entre os coeficientes da equação do 2º grau e a soma e o produto das raízes dessa equação.

Existindo raízes reais tais que $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, obtemos:

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Logo, $x' + x'' = \frac{-b}{a}$, ou seja, a soma das raízes é igual a $\frac{-b}{a}$.

Além disso:

$$x' \cdot x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Logo, $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$, ou seja, o produto das raízes da equação é igual a $\frac{c}{a}$.

Fatorando o trinômio $ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$

Quando $\Delta \geqslant 0$, ou seja, quando a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ tem 2 raízes reais x' e x'', iguais ou diferentes, podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] =$$

$$= a[x^2 - x'x - x''x + x'x''] = a(x - x')(x - x'')$$

Logo: $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$ é a forma fatorada do trinômio $ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

Fique atento

Fatorar um polinômio é expressá-lo em forma de produto.

Por completamento de quadrado

Analise alguns exemplos:

a) $x^2 + 6x = 0$

Podemos adicionar elementos aos 2 membros da equação para possibilitar a fatoração utilizando o caso de fatoração trinômio quadrado perfeito. Nesse caso, adicionamos 3^2 a cada membro.

$$x^2 + 6x + 3^2 = 0 + 3^2$$

Fique atento

- O completamento de quadrado utiliza a forma fatorada do trinômio quadrado perfeito:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

- Analisando a forma fatorada do trinômio do quadrado perfeito, podemos notar que, no exemplo anterior, $6x$ é igual ao dobro do 1º termo multiplicado pelo 2º termo.
- Adicionar o mesmo número aos 2 membros de uma equação não altera a relação de igualdade.

Podemos fatorar o 1º membro da equação:

$$\underbrace{x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2}_{(x+3)^2} = 9 \Rightarrow (x + 3)^2 = 9$$

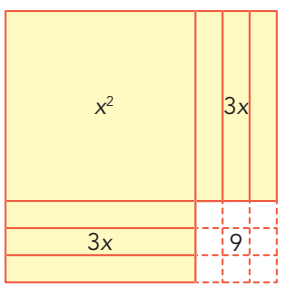
Logo, $x^2 + 6x = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 - 9 = 0$.

A partir daí, podemos resolver a equação extraindo a raiz quadrada dos 2 membros:

$$(x + 3)^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{9} \Rightarrow (x + 3) = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ou} \\ x + 3 = -3 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

Raízes da equação: 0 e −6.

Analise a **representação geométrica** desse exemplo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A região quadrada de lado com medida de comprimento x representa o x^2. As 6 regiões retangulares com lados de medidas de comprimento x e 1 representam $6x$. As 9 regiões quadradas de lado com medida de comprimento 1 representam 9.

Faltam 9 regiões quadradas de lado com medida de comprimento 1. Por isso, adicionamos 9 aos 2 membros da equação, para "completar o quadrado".

Verificação:

$$x^2 + 6x = 0$$

Para $x = 0$, temos: $(0)^2 + 6 \cdot 0 = 0$

Para $x = -6$, temos: $(-6)^2 + 6 \cdot (-6) = 0$

b) $x^2 - 10x = 0$

Completando o quadrado, temos:

$$x^2 - 10x + 5^2 = 0 + 5^2 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2}_{(x-5)^2} = 5^2 \Rightarrow (x-5)^2 = 25$$

Assim, $x^2 - 10x = 0 \Rightarrow (x-5)^2 = 25$.

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros:

$$(x-5)^2 = 25 = \sqrt{(x-5)^2} = \sqrt{25} \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 5 \Rightarrow x = 10 \\ \text{ou} \\ x - 5 = -5 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Raízes da equação: 10 e 0.

c) $x^2 - \frac{5}{2}x = 0$

Completando o quadrado, temos:

$$x^2 - \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 0 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

Extraindo a raiz quadrada dos 2 membros:

$$\sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16}} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{10}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \\ \text{ou} \\ x - \frac{5}{4} = -\frac{5}{4} \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Raízes da equação: $\frac{5}{2}$ e 0.

d) $4x^2 + 16x + 7 = 0$

Organizando a equação: $4(x^2 + 4x) + 7 = 0$.

Completando o quadrado, temos:

$$4(x^2 + 4x + 4 - 4) + 7 = 0 \Rightarrow 4[(x+2)^2 - 4] + 7 = 0$$

Organizando a equação:

$$4(x+2)^2 - 16 + 7 = 0 \Rightarrow 4(x+2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = \frac{9}{4}$$

Extraindo a raiz quadrada dos 2 membros:

$$\sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x + 2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Raízes da equação: $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{7}{2}$.

De modo geral, ao fazer o completamento de quadrado, obtemos:

$$x^2 + px = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} = 0$$

Professor, é importante garantir que os estudantes aprendam a desenvolver o método de completamento de quadrado sem o uso da fórmula, que aqui é apresentada para formalização do conteúdo.

Atividades resolvidas

1. Determine, se existirem, as raízes reais da equação do 2º grau em cada item usando o cálculo do discriminante.

a) $x^2 - 12x + 35 = 0$ **b)** $2x^2 - 3x + 5 = 0$

Resolução

a) $x^2 - 12x + 35 = 0$

$a = 1$, $b = -12$ e $c = 35$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35 = 144 - 140 = 4$$

$\Delta = 4 > 0$ (há 2 raízes reais e diferentes)

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 + \sqrt{4}}{2} = \frac{12 + 2}{2} = 7$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 - \sqrt{4}}{2} = \frac{12 - 2}{2} = 5$$

Logo, as raízes da equação $x^2 - 12x + 35 = 0$ são 7 e 5.

b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$a = 2$, $b = -3$ e $c = 5$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 \Rightarrow (\Delta < 0)$$

Logo, a equação não tem raízes reais.

2. Determine, se existirem, as raízes reais da equação do 2º grau $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Resolução

Usando a relação da soma e do produto dos zeros de uma equação do 2º grau, podemos tentar encontrar 2 números cuja soma seja 7 (oposto de −7) e cujo produto seja 12.

As possibilidades de produto de 2 números inteiros iguais a 12 são:

$1 \cdot 12 = 12$; $2 \cdot 6 = 12$; $3 \cdot 4 = 12$; $(-1) \cdot (-12) = 12$; $(-2) \cdot (-6) = 12$; $(-3) \cdot (-4) = 12$.

Analisemos quais dessas possibilidades têm números cuja soma é 7.

$1 + 12 = 13$; $2 + 6 = 8$; $3 + 4 = 7$; $(-1) + (-12) = -13$; $(-2) + (-6) = -8$; $(-3) + (-4) = -7$.

Assim, temos: $(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x' = 3$ e $x'' = 4$.

Raízes da equação: 3 e 4.

Verificação:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Para $x' = 3$: $3^2 - 7 \cdot 3 + 12 \Rightarrow 9 - 21 + 12 = 0$.

Para $x'' = 4$: $4^2 - 7 \cdot 4 + 12 \Rightarrow 16 - 28 + 12 = 0$.

Fique atento

Essa estratégia de obtenção das raízes da equação do 2º grau é interessante quando $a = 1$ e é possível encontrar facilmente 2 números cuja soma e cujo produto correspondam aos coeficientes da equação, como mostramos na resolução. Caso contrário, é possível usar outras estratégias de determinação dos zeros da função quadrática relacionada à equação do 2º grau.

3. Determine, se existirem, as raízes da equação do 2º grau $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

Resolução

Podemos dividir todos os termos por 2:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x = -\frac{3}{2}$$

Completando o quadrado, temos:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = -\frac{3}{2} + \frac{25}{16} \Rightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - \frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x' - \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x' = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ x'' - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x'' = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Raízes da equação: $\frac{3}{2}$ e 1.

Verificação:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

Se $x' = \left(\frac{3}{2}\right)$, então: $2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 0 \Rightarrow \frac{9}{2} - \frac{15}{2} + 3 = 0$.

Se $x'' = 1$, então: $2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow 2 - 5 + 3 = 0$.

4. Determine, se existirem, os zeros da função quadrática de lei $f(x) = x^2 - 10x + 25$.

Resolução

Para determinar os zeros da função f, basta determinar as raízes da equação $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Sabemos que: $a = 1$, $b = -10$ e $c = 25$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$$

Se $\Delta = 0$, então há 2 raízes reais iguais.

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{0}}{2} = \frac{10 + 0}{2} = 5$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{0}}{2} = \frac{10 - 0}{2} = 5$$

Logo, os zeros da função dada por $f(x) = x^2 - 10x + 25$ são 5 e 5, ou seja, $f(5) = 0$.

Atividades

Não escreva no livro

10. Determine, se existirem, os zeros das funções quadráticas calculando o Δ em cada caso.

a) $f(x) = x^2 - 3x$ 3 e 0.

b) $f(x) = x^2 + 4x + 5$ Não tem zeros reais.

c) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ –2 e 4.

d) $f(x) = x^2 + 10x + 25$ –5

e) $f(x) = x^2 - 8x + 16$ 4

f) $f(x) = 25x^2 + 9x + 1$ Não tem zeros reais.

11. Os 180 estudantes de uma escola estão dispostos de forma retangular, em filas com a mesma quantidade de estudantes em cada uma. Sabe-se que a quantidade de estudantes em cada fila supera em 8 a quantidade de filas. Quantos estudantes há em cada fila?

11. Sendo x a quantidade de filas, temos: $x(x + 8) = 180 \Rightarrow x^2 + 8x - 180 = 0$.

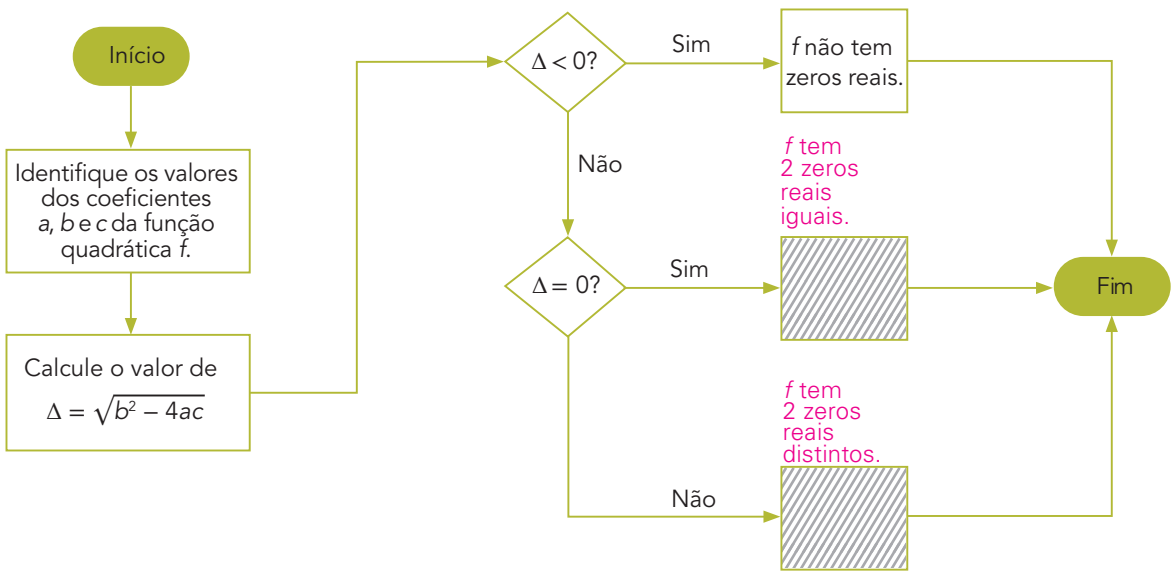
$x = \frac{-8 \pm \sqrt{784}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-8 + 28}{2} = 10 \\ x'' = \frac{-8 - 28}{2} = -18 \text{ (não serve)} \end{cases}$

Número de estudantes em cada fila: $10 + 8 = 18$.

12. Fluxogramas também podem ser usados para melhor compreender processos matemáticos. O fluxograma a seguir indica como calcular o valor do discriminante e descobrir quantos zeros reais uma função quadrática f qualquer tem.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Junte-se a um colega e respondam aos itens sobre esse fluxograma.

a) Considerando esse fluxograma, qual é a primeira ação a ser realizada para descobrir quantos zeros tem uma função quadrática f? E depois disso? Identificar os valores dos coeficientes a, b e c da função quadrática f. Calcular o valor de Δ.

b) Em um fluxograma, um símbolo com forma de losango sinaliza uma etapa de decisão: a resposta à pergunta feita nessa etapa indica qual dos "caminhos" deve ser tomado no fluxograma.

Nesse fluxograma, existe alguma etapa de decisão? Se sim, qual é a pergunta feita nela e quais são as respostas possíveis a ela?

12. b) Sim. Perguntas: "$\Delta < 0$?" e "$\Delta = 0$?"; as respostas possíveis são "sim" e "não" em ambos os casos.

c) De acordo com o que vocês já sabem sobre os zeros de funções quadráticas, copiem e completem esse fluxograma no caderno.

13. No caderno, faça o completamento de quadrado de cada equação do 2º grau.

a) $x^2 - 2x = 0$

b) $x^2 + 6x - 16 = 0$

13. a) $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 1)^2 - 1 = 0$

b) $x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 + 6x + 9) - 9 - 16 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 3)^2 - 25 = 0$

14. Reúna-se com um colega e determinem, se existirem, os zeros das funções quadráticas dadas por:

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 9$

b) $f(x) = -(x + 1)^2 + 4$

14. a) $f(x) = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 2)^2 = 9 \Rightarrow x' - 2 = 3$ ou
$x'' - 2 = -3 \Rightarrow x' = 5$ ou $x'' = -1$

b) $f(x) = 0 \Rightarrow -(x + 1)^2 + 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)^2 = 4 \Rightarrow x' + 1 = 2$ ou
$x'' + 1 = -2 \Rightarrow x' = 1$ ou $x'' = -3$

15. Usando o completamento de quadrado, determine os zeros das funções quadráticas dadas.

a) $f(x) = x^2 + 10x + 21$ -3 e -7.

b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 3 e -1.

16. **(IFSC)** Uma das maneiras de saber se o seu peso está adequado à sua altura é calculando o Índice de Massa Corporal (IMC). O resultado dessa fórmula matemática poderá indicar, por exemplo, se você está com peso adequado, se apresenta magreza, sobrepeso ou obesidade. Considere apenas como um ponto de partida, pois o IMC não avalia o seu estado nutricional como [um] todo e precisa ser interpretado por um profissional de saúde, que analisará uma série de outras medidas e características suas, como idade, sexo, percentual de gordura, entre outros aspectos, antes de um diagnóstico.

Fonte: http://www.saude.gov.br/artigos/781-atividades-fisicas/40389-o-que-e-imc

A fórmula do IMC é a mesma para todas as pessoas e pode ser escrita como:

$$h^2 \cdot \text{IMC} - P = 0$$

sendo h a altura da pessoa em metros (m) e P o seu peso em quilogramas (kg).

Se uma pessoa possui IMC igual a 40 kg/m^2 e está com peso igual a 120 kg, [indique no caderno] a alternativa que apresenta o valor mais aproximado de sua altura:

[Indique no caderno] a alternativa correta.

Alternativa **d**.

a) 1,4 metro.

b) 1,5 metro.

c) 1,6 metro.

d) 1,7 metro.

e) 1,8 metro.

17. A função f, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem os coeficientes $a = 1$ e $b = 6$.

a) Quais são os zeros dessa função? Não é possível definir.

b) Para qual valor de c essa função tem $x = 2$ como um dos zeros da função? $c = -16$

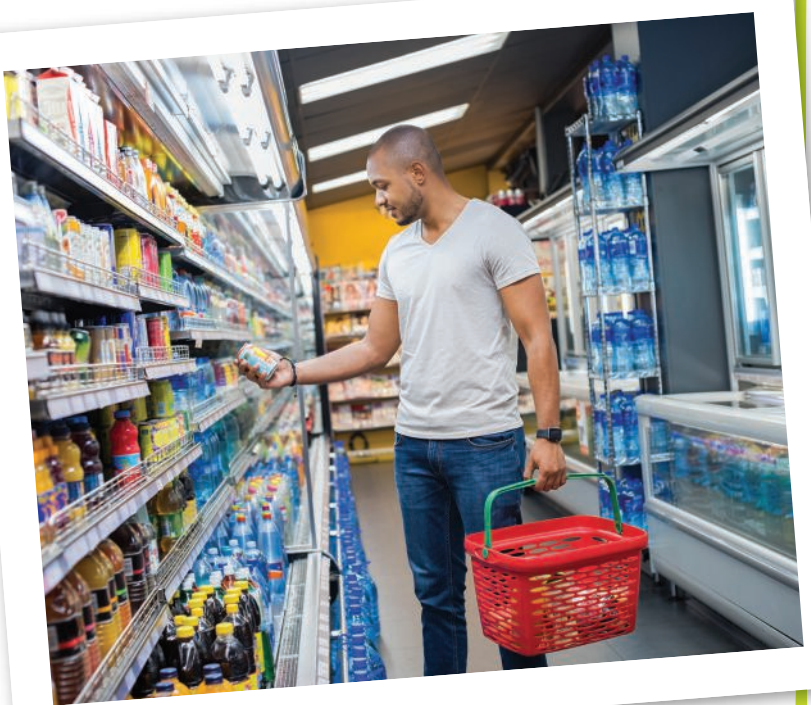
c) Considerando o coeficiente c obtido no item anterior, escreva no caderno a lei de f. Essa função tem outro zero? Se sim, escreva-o também. $f(x) = x^2 + 6x - 16$; $x = -8$.

Sobre o assunto

Professor, este boxe favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Alimentar e Nutricional* e *Saúde*.

O material *Guia alimentar para a população brasileira*, que está disponível em: https://tedit.net/l1ubgo (acesso em: 4 jul. 2024), apresenta diversas recomendações a respeito do que é considerada uma alimentação saudável.

Segundo o guia, é importante consumir uma grande variedade de alimentos *in natura* ou minimamente processados, limitar o consumo de alimentos processados e evitar o consumo de alimentos ultraprocessados, ou seja, aqueles que passam por muitos processamentos industriais (como algumas barras de cereal, bolachas, etc.), uma vez que eles estão associados a doenças do coração e obesidade, por exemplo.



Ground Picture/Shutterstock

Uma maneira eficaz de determinar se um produto é ultraprocessado é analisar a lista de ingredientes disponível no rótulo. Se ela for extensa e apresentar muitos ingredientes que não são comumente utilizados em preparos caseiros, provavelmente o alimento é ultraprocessado.

18. Para qualquer x real, o quadrado de x é sempre um número maior do que ou igual a zero. Pensando nisso, junte-se a um colega e determinem o menor valor que a função definida por $f(x) = 2(x - 1)^2 + 10$ pode assumir para todo $x \in \mathbb{R}$. 10

19. Qual é o maior valor que a função definida por $f(x) = -3x^2 - x + 1$ pode assumir para qualquer $x \in \mathbb{R}$? (Dica: complete quadrados.) $\frac{13}{12}$

20. O departamento de contabilidade de uma empresa constatou que, no mês de setembro de 2024, a receita da empresa, em milhares de reais, era dada por $R(d) = -d^2 + 52d + 660$, em que d é o dia do mês em setembro. Já a despesa, no dia d do mês de setembro e em milhares de reais, era dada por $D(d) = 22d + 804$.

fizkes/Shutterstock

Departamento de contabilidade de uma empresa.

a) A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

a) Como é possível calcular o lucro da empresa em um dia d de setembro de 2024 utilizando a receita e a despesa desse dia? Registre no caderno a lei da função L, em que L é o lucro dado em função do dia d do mês de setembro.

b) De acordo com a fórmula obtida, em quais dias desse mês a empresa não teve lucro nem prejuízo? Use uma calculadora para realizar os cálculos. 6 e 24 de setembro.

c) Utilize a fórmula para calcular a receita da empresa nos dias 5, 10 e 20 de setembro. De acordo com os resultados, em qual(is) deles seria melhor que a empresa ficasse fechada? Justifique sua resposta.

d) Cite 2 aspectos além do financeiro que a empresa deve considerar para determinar os dias de funcionamento.

Resposta pessoal.

As imagens não estão representadas em proporção.

Texto para a próxima atividade.

Em Física, chamamos de movimento uniformemente variado (MUV) o movimento cuja velocidade aumenta ou diminui de maneira constante a cada unidade de intervalo de tempo quando o movimento é retilíneo. Em geral, as equações que descrevem a posição do objeto estão relacionadas com a medida de intervalo de tempo de deslocamento até determinado momento.

De acordo com isso, um perito, ao analisar um acidente, concluiu que um dos veículos envolvidos na colisão, cuja velocidade inicial era 72 km/h (ou 20 m/s), precisaria ser freado por 100 metros para que não houvesse a batida. Além disso, durante a frenagem, o sistema de freios aplicou uma desaceleração de 2 m/s^2.

De posse dessas informações, o perito concluiu que a medida de intervalo de tempo de frenagem t para que não houvesse a colisão, em segundos, pode ser calculada por meio da equação $147 = 2t^2 - 40t + 347$.

21. Por quantos segundos o carro deveria ter freado para não colidir com o outro?

a) 1 segundo.
b) 5 segundos.
c) 8 segundos.
d) 10 segundos.
e) 15 segundos.

Alternativa **d**.

22. Um grupo de amigos resolveu promover um jantar de confraternização. Para isso, fizeram uma pesquisa de preços e acharam razoável a proposta de um dos estabelecimentos. O restaurante cobraria R$ 420,00 pelo jantar do grupo todo, mas não daria abatimento se algum dos integrantes faltasse. No dia, 3 integrantes faltaram e cada um dos que compareceram teve de pagar R$ 18,00 a mais. Quantos desses amigos compareceram ao jantar?

4 amigos.

stockcreations/Shutterstock

Jantar com comida brasileira.

20. c) No dia 5, pois é o único dia entre os citados em que a empresa teve prejuízo.

Tecnologias digitais

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Análise dos coeficientes de uma equação do 2º grau

Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Podemos utilizar calculadoras gráficas para analisar os coeficientes de uma equação do 2º grau.

Para as atividades propostas nesta seção, recomenda-se selecionar um *software* que ofereça as funções descritas. A seguir, apresentamos alguns passos básicos que são comuns a *softwares* desse tipo.

Inicialmente, acesse as configurações de exibição do *software* selecionado e desabilite as opções de exibir os eixos e de exibir a malha principal, caso estejam habilitadas.

1º passo: Nas ferramentas, localize e clique na opção controle deslizante e, depois, em qualquer ponto do plano cartesiano. Na tela que abrir, digite **a=1** e defina o intervalo do controle para –10 e 10, e o incremento igual a 1. Dessa maneira, você vai criar o controle deslizante *a*, com incremento igual a 1 e intervalo de –10 a 10.

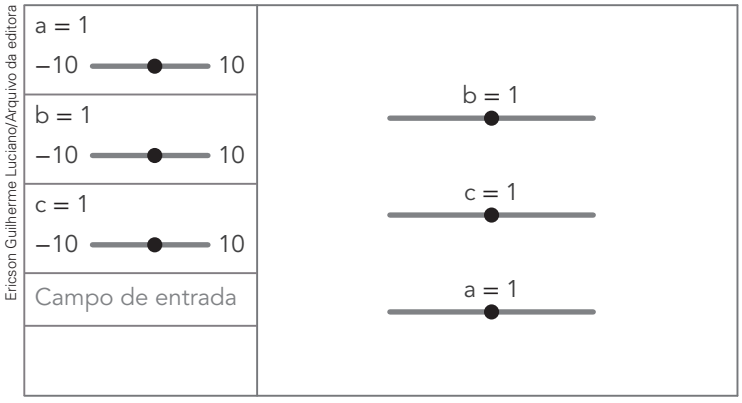
Repita o procedimento para criar os controles deslizantes *b* e *c*.

Fique atento

Lembre-se de adaptar as instruções de acordo com o *software* escolhido, já que as interfaces e os procedimentos podem variar.

Fique atento

O incremento indica de quanto em quanto você pode mover o controle deslizante.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Representação de controles deslizantes após o 1º passo.

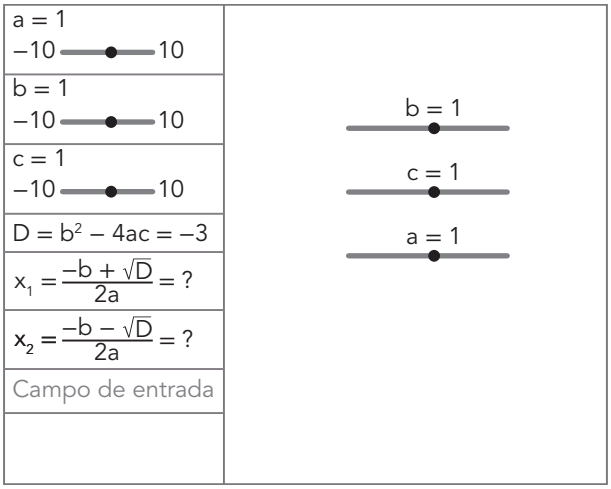
2º passo: Localize a opção dos comandos de álgebra no programa. No campo de entrada, insira o comando: **D=b^2–4*a*c**. Em seguida, insira: **x_1=(–b+sqrt(D))/(2*a)**. Depois, insira **x_2=(–b–sqrt(D))/(2*a)**.

Fique atento

Note que **sqrt** é a abreviação de *square root*, que significa "raiz quadrada" em inglês.

Professor, oriente os estudantes na escolha do *software* ou aplicativo, de modo que o programa escolhido apresente todas as funcionalidades necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas. Auxilie-os também nas explorações iniciais do programa e na identificação das ferramentas e das configurações disponíveis, além de como acessá-las.

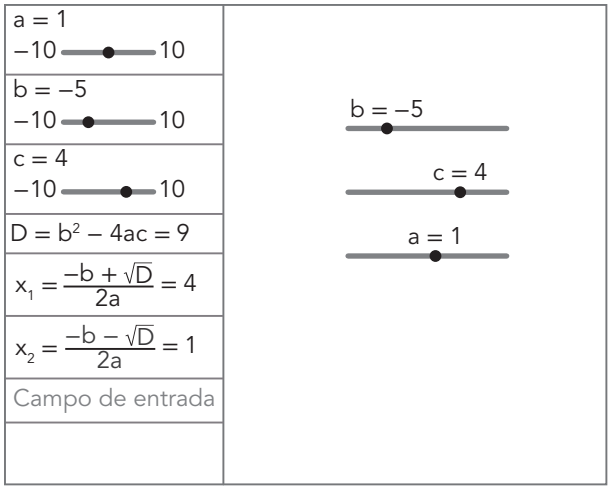
Essas fórmulas representam os valores do discriminante (D) e da fórmula para resolver a equação do 2º grau e obter as raízes da equação de acordo com os coeficientes a, b e c. Dessa maneira, após inserir cada comando, o *software* calcula e apresenta o valor numérico das incógnitas de acordo com os valores dos coeficientes a, b e c.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Representação dos controles deslizantes após o 2º passo.

3º passo: Mantenha o controle deslizante $a = 1$ e mova os outros controles deslizantes para $b = -5$ e $c = 4$. Dessa maneira, o *software* vai calcular o discriminante e as raízes da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Representação dos controles deslizantes após o 3º passo.

Basta mover os controles deslizantes para obter as soluções de novas equações do 2º grau.

1. Ao final do 2º passo, por que os valores de x_1 e x_2 são indefinidos? Porque o discriminante é negativo ($\Delta = -3$) para $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$.
2. Mantendo $a = 1$ e $b = -5$, qual é o menor valor inteiro de c que torna o discriminante negativo? $c = 7$
3. Com a fixado em qualquer valor diferente de zero e $c = 0$, o que podemos notar em relação às soluções obtidas? Uma das soluções (ou x_1, ou x_2) é zero.
4. Movendo livremente qualquer controle deslizante, encontre 3 combinações em que o discriminante é igual a zero.
Exemplos de resposta: ($a = 1$, $b = 2$ e $c = 1$); ($a = 1$, $b = -4$ e $c = 4$) e ($a = 1$, $b = 6$ e $c = 9$).

CAPÍTULO 2

Análises algébrica e gráfica da função quadrática

Situação-problema 1

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Saltos na natureza

Você sabia que muitas espécies de sapos, rãs e pererecas podem, em um único salto, percorrer uma distância com medida muito maior do que a própria medida de comprimento do anfíbio? É o caso da *Acris gryllus*, uma espécie de perereca que tem 4 cm de medida de comprimento, mas alcança uma medida de distância de 40 vezes o próprio comprimento em um único salto! Isso é possível devido a várias características físicas, mas principalmente ao desenvolvimento das pernas.

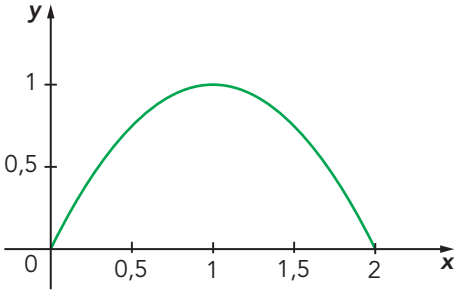
Fonte dos dados: VASCONCELOS, Yuri. A que distância chega o pulo de um sapo? *Superinteressante*, 18 fev. 2024. Disponível em: https://tedit.net/54lqmy. Acesso em: 3 set. 2024.

Fero Bednar/Alamy/Fotoarena

Perereca *Acris gryllus*, anfíbio encontrado apenas na América do Norte.

Os saltos desses anfíbios podem ser modelados por **funções quadráticas**. Se pudéssemos representar no ar o rastro do salto, veríamos parte de uma **parábola**, que é o nome da representação gráfica dessas funções.

Considere uma rã cujo salto alcança 2 metros de medida de distância. A medida de altura máxima que essa rã alcança durante o salto é 1 metro. Analise no plano cartesiano o gráfico que representa esse salto.



WYM Design/Arquivo da editora

a) Quantos metros a rã avança, na horizontal, até alcançar o ponto mais alto da trajetória? A abscissa do ponto mais alto do gráfico é 1; logo, 1 m.

b) A lei da função quadrática que modela essa curva é $f(x) = -x^2 + 2x$. Quais são os zeros dessa função?

c) Compare o resultado obtido no item anterior com o gráfico da função. Você consegue perceber alguma relação? Exemplo de resposta: Os zeros da função são as abscissas dos pontos em que $y = 0$.

b) $-x^2 + 2x = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 4$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + 2}{-2} \Rightarrow x = 0 \\ x = \frac{-2 - 2}{-2} \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

Os zeros da função são 0 e 2.

Situação-problema 2

As parábolas na dança

Infográfico clicável

O balé clássico é um estilo de dança que surgiu no século XVI, na Itália. Depois ele se desenvolveu também em outros países, como França e Rússia.

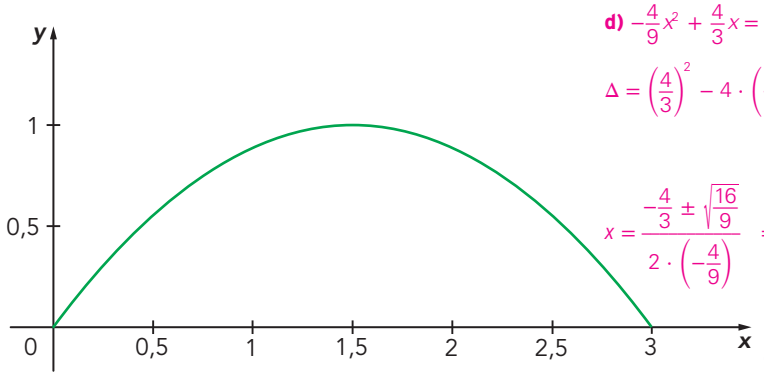
O *grand jeté* é um salto em que os bailarinos lançam uma das pernas à frente para saltar. A impressão de quem acompanha é que o bailarino faz um pequeno voo. Para realizar esse salto, os bailarinos precisam se mover de maneira que o centro do corpo deles se movimente de acordo com uma **parábola**.

Fonte dos dados: REDAÇÃO Mundo Estranho. Como surgiu o balé? *Superinteressante*, 22 fev. 2024. Disponível em: https://tedit.net/l7tor0. Acesso em: 10 jul. 2024.

Considere que uma bailarina comece um *grand jeté* no início da sala e avance 3 metros. No ponto mais alto do salto, a medida de altura que o centro dela alcança é 1 metro. O gráfico no plano cartesiano a seguir representa esse salto.

Thomas Bowles/Shutterstock

O *grand jeté* é um salto muito conhecido do balé clássico em que os bailarinos parecem voar. *Grand* significa "*grande*", e *jeté* significa "lançamento". O salto recebe esse nome porque ele se inicia com o lançamento da perna no ar.



WYM Design/Arquivo da editora

a) Quantos metros ela avança, na horizontal, até chegar ao ponto mais alto do salto? A abscissa do ponto mais alto do gráfico é 1,5; logo, 1,5 m.

b) Quais são as coordenadas do ponto mais alto do salto? (1,5; 1)

c) Quais são as coordenadas do ponto em que a bailarina começa o salto? E do ponto em que ela termina o salto? (0; 0); (3; 0).

d) Sabendo que a lei da função que representa o salto realizado é $f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, calcule os zeros dessa função.

d) $-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x = 0$

$\Delta = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \cdot 0 = \frac{16}{9}$

$x = \frac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}}}{2 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{-\frac{8}{9}} \Rightarrow x' = \frac{0}{-\frac{8}{9}} \Rightarrow x' = 0 \\ x'' = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{4}{3}}{-\frac{8}{9}} \Rightarrow x'' = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{8}{9}} \Rightarrow x'' = 3 \end{cases}$

Os zeros da função são 0 e 3.

Explorando o gráfico da função quadrática

Anteriormente você estudou que o gráfico de uma função afim, no plano cartesiano, é sempre uma reta. As funções quadráticas, isto é, as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuja lei é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, têm outro tipo de gráfico no plano cartesiano, a parábola.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

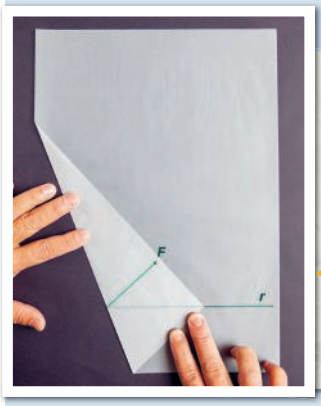
Explore para descobrir

Não escreva no livro

Use lápis, régua e uma folha de papel-manteiga ou vegetal para seguir o passo a passo.

1º passo: Represente uma reta r qualquer na folha. Depois indique um ponto F que esteja fora da reta r.

Representação após o 1º passo.

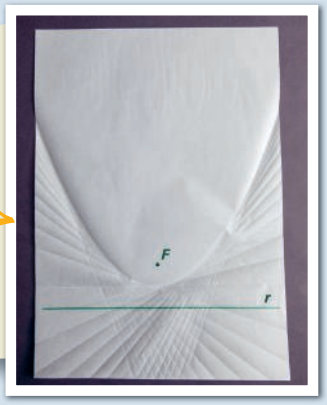


Demonstração do 2º passo.

2º passo: Dobre o papel de maneira que um ponto qualquer da reta r fique sobreposto ao ponto F. Marque bem a dobra na folha e desdobre-a em seguida.

Fotografias: Dotta2/Arquivo da editora

3º passo: Repita o passo anterior 30 vezes escolhendo novos pontos da reta r para sobreporem o ponto F. Você deve obter uma figura que se aproxima de uma curva.



Representação após o 3º passo.

Professor, 30 dobras são suficientes para obter uma figura que se aproxima de uma curva, no entanto é possível repetir esse processo indefinidamente para o resultado aproximar-se cada vez mais da parábola.

Não escreva no livro

1. Considerando cada dobra da folha como uma reta, podemos dizer que a curva é formada por 1 ponto de cada uma das retas que você representou. Utilize uma régua e meça a distância de um desses pontos até o ponto *F*. Depois meça a distância desse mesmo ponto até a reta *r*. O que você percebeu? Resposta esperada: As medidas de comprimento são iguais.
2. Repita o processo do item anterior para outros pontos em dobras diferentes. O que você percebeu? Resposta esperada: Todos os pontos testados são equidistantes da reta *r* e do ponto *F*.

Sobre o assunto

A parábola, do mesmo modo que outras figuras geométricas planas, como a circunferência, a elipse e a hipérbole, pode ser obtida a partir da secção de um cone. Para saber mais sobre o assunto assista ao vídeo *Introdução a seções cônicas*. Disponível em: https://tedit.net/inrdqp (acesso em: 2 ago. 2024).

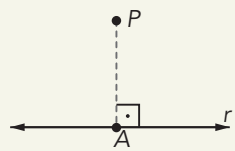
Formalizando o gráfico da função quadrática

A parábola é uma curva formada por todos os pontos equidistantes, isto é, à mesma medida de distância de um ponto *F* e de uma reta *d*, que não contém o ponto *F*. De acordo com essa definição, podemos dizer que a curva que você representou com as dobras no *Explore para descobrir* é uma parábola. E é possível provar que o gráfico de uma **função quadrática** no plano cartesiano é uma **parábola**. Professor, se julgar oportuno, ressalte que elementos que ficam à mesma medida de distância em relação a um referencial são equidistantes.

Fique atento

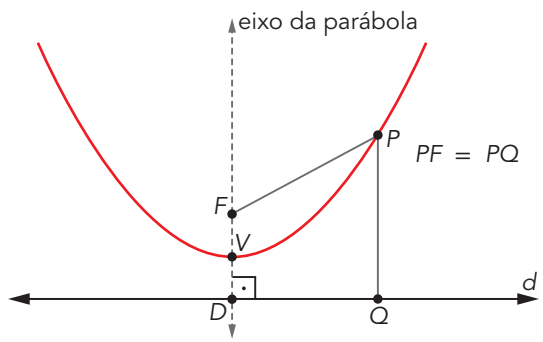
Para determinar a medida de distância de um ponto *P* a uma reta *r*, podemos representar uma reta perpendicular a *r*, em um ponto *A*, e que passa pelo ponto *P*.

A medida de distância de *P* a *r* é igual à medida de comprimento do segmento de reta $\overline{PA}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Na parábola representada a seguir, a **concavidade** é para cima, o ponto *F* é o **foco** da parábola e *d* é a **reta diretriz**. A reta perpendicular à diretriz e que contém o foco *F* é chamada **eixo da parábola**. O ponto da parábola mais próximo da diretriz é chamado **vértice**. De acordo com a definição de parábola, podemos concluir que o vértice (ponto *V*) é o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são o foco (ponto *F*) e a intersecção do eixo da parábola com a diretriz (ponto *D*).



Banco de imagens/Arquivo da editora

Perceba que, dado qualquer ponto *P* da parábola, ele é equidistante do foco *F* e da diretriz *d*.

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Construção do gráfico de uma função quadrática

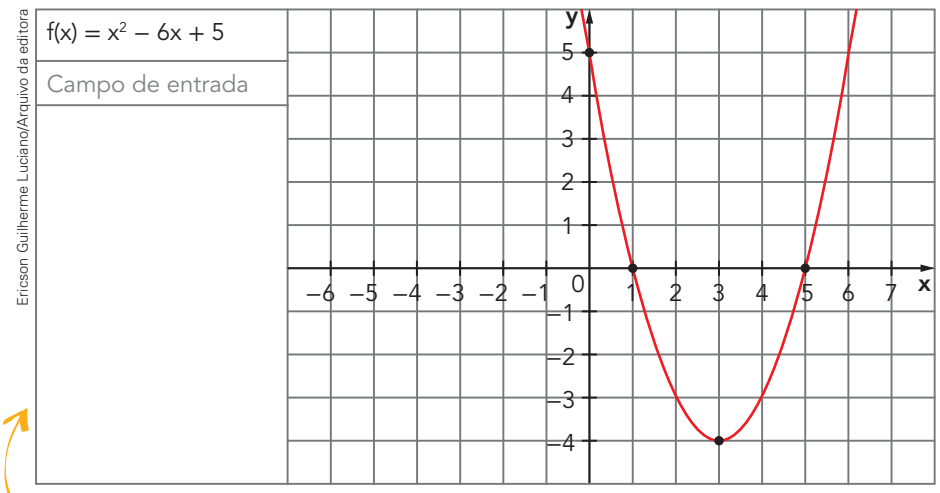
Em um plano cartesiano, o gráfico de uma função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, é uma parábola. A representação desse gráfico no plano cartesiano pode ser feita com o auxílio de diversos *softwares* de Geometria dinâmica.

Para as atividades propostas, sugerimos selecionar um *software* que permita a construção de gráficos de funções quadráticas.

Vamos representar inicialmente o gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei é $f(x) = x^2 - 6x + 5$ e destacar alguns pontos importantes. A seguir apresentamos alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* desse tipo.

Inicialmente, acesse as configurações de exibição do *software* selecionado e habilite as opções de exibir os eixos e de exibir a malha principal, caso estejam desabilitadas.

1º passo: No campo de entrada de comando insira a lei da função **f(x)=x^2−6x+5**.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção, no *software* de Geometria dinâmica, após o 1º passo.

Analise com atenção o gráfico (a curva em vermelho na imagem) e verifique o comportamento dele e como os valores da função estão dispostos.

Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Fique atento

Lembre-se de adaptar as instruções de acordo com o *software* escolhido, já que as interfaces e os procedimentos podem variar.

Professor, oriente os estudantes na escolha do *software* ou aplicativo para a construção dos gráficos de funções quadráticas de modo que o programa escolhido apresente todas as funcionalidades necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas. Auxilie-os também nas explorações iniciais do programa e na identificação das ferramentas e das configurações disponíveis, além de como acessá-las.

Fique atento

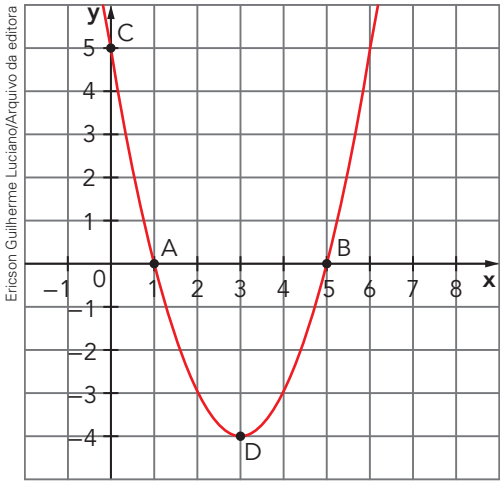
Lembre-se de que, geralmente, você pode mover a representação clicando em algum ponto da tela e arrastando.

2º passo: Agora vamos determinar os zeros da função f. Para isso, utilize a ferramenta do programa que identifica as raízes da equação relacionada à função. Perceba que foram criados os pontos $A(1, 0)$ e $B(5, 0)$.

1. Verifique a localização dos pontos A e B. O que você pode perceber em relação a eles e ao eixo x? Resposta pessoal. Os pontos A e B são a intersecção do gráfico com o eixo x.

3º passo: Encontre a ferramenta do programa que identifica o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo y. Perceba que o ponto obtido, $C(0, 5)$, tem como ordenada o valor do termo independente c da equação relacionada à função quadrática f.

4º passo: Em seguida, utilize a ferramenta do programa que identifica o vértice do gráfico de f. Perceba que foi criado o ponto $D(3, -4)$, que corresponde ao ponto em que o gráfico muda de sentido. Esse ponto é chamado de **vértice da parábola**.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção, no *software* de Geometria dinâmica, após o 4º passo.

Ao analisar o gráfico, podemos perceber que o valor mínimo dessa função é -4 (a ordenada do vértice). Valor mínimo é o menor valor que uma função pode assumir em todo o domínio dela. Se a concavidade da parábola fosse para baixo, então a ordenada do vértice corresponderia ao valor máximo que a função pode assumir no domínio.

2. Analise o gráfico da função f no ponto em que $x = 3$. Justifique sua resposta.

a) A função f cresce ou decresce quando x é menor do que 3?

b) E para x maior do que 3, a função f cresce ou decresce?

3. Depois de salvar sua construção no *software*, inicie um novo projeto, repita os passos anteriores e represente o gráfico de cada função quadrática dada.

a) $f(x) = 5x^2$

b) $g(x) = x^2 + 2$

c) $h(x) = 2x^2 - 3$

d) $j(x) = 5x^2 + 2x - 8$

As respostas dependem do *software* utilizado pelos estudantes.

Professor, se julgar oportuno, solicite aos estudantes que criem as próprias funções quadráticas. Depois, peça a eles que troquem a função criada com um colega e cada um deve representar graficamente no *software* escolhido a função que recebeu.

Fique atento

Em gráficos com a concavidade da curva para cima, o vértice da função tem a coordenada y como o menor valor da função.

Professor, neste momento, é suficiente destacar aos estudantes que o sentido da concavidade da parábola está relacionado ao valor de a. Informe-os de que a demonstração dessa propriedade é apresentada no Ensino Superior em Matemática.

2. a) A função decresce para $x < 3$. Analisando o gráfico da função f é possível notar que para $x < 3$ os valores de $f(x)$ diminuem em função de x.

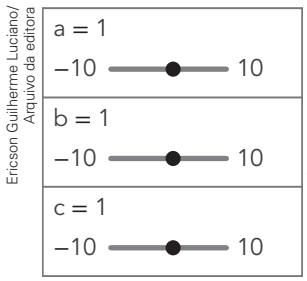
2. b) A função cresce para $x > 3$. Analisando o gráfico da função f é possível notar que para $x > 3$ os valores de $f(x)$ aumentam em função de x.

Influência dos coeficientes *a*, *b* e *c* e do discriminante Δ em funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$

Abra um novo projeto no *software* escolhido anteriormente, siga os passos indicados e verifique a influência dos coeficientes *a*, *b* e *c* e do discriminante Δ no gráfico da função quadrática.

1º passo: Se necessário, repita os procedimentos anteriores para que os eixos e a malha apareçam na tela. No campo de entrada de comando, insira **a=1**. Deve aparecer na tela um controle deslizante com extremos entre 2 números inteiros. Em alguns casos, pode ser necessário habilitar o comando do controle deslizante próximo ao campo de entrada para que ele apareça.

No campo de entrada, insira, um por vez, os controles deslizantes dos coeficientes **b=1** e **c=1**.

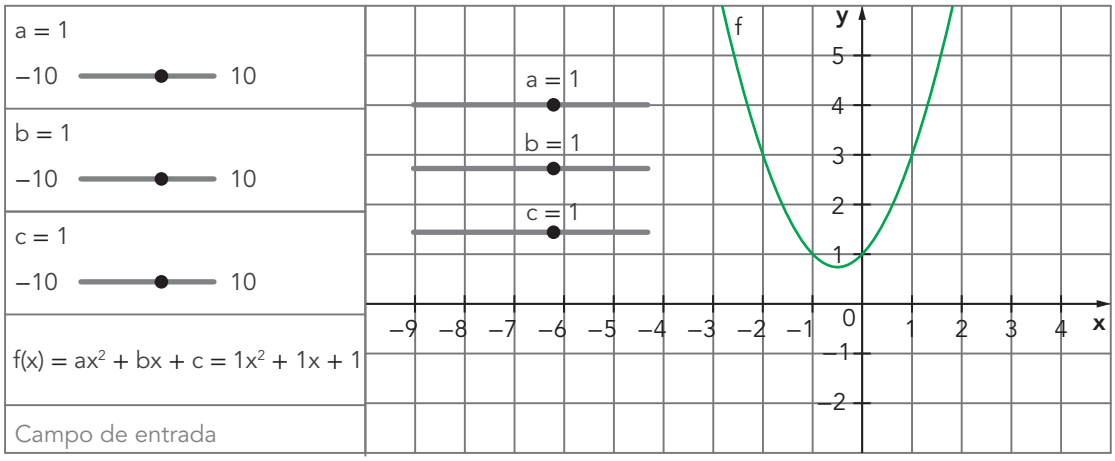


Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção, no *software* de Geometria dinâmica, após o 1º passo.

2º passo: No campo de entrada de comando, insira a lei da função **f(x)=a*x^2+b*x+c**.

3º passo: Em alguns *softwares*, para melhorar a visualização e destacar a representação, é possível selecionar a parábola e alterar sua cor e espessura nas configurações.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção, no *software* de Geometria dinâmica, após o 3º passo.

4º passo: Agora vamos verificar significados importantes para os coeficientes a, b e c. Altere gradualmente apenas o valor do coeficiente a (para isso, deve bastar clicar no controle deslizante na tela e arrastar para um dos lados), mantendo os demais coeficientes iguais a 1.

4. Verifique o que acontece com o gráfico da função após o 4º passo e escreva sua conclusão no caderno.

5. Ajuste novamente o coeficiente $a = 1$, altere gradualmente apenas o valor do coeficiente b e verifique o que acontece com o gráfico da função.

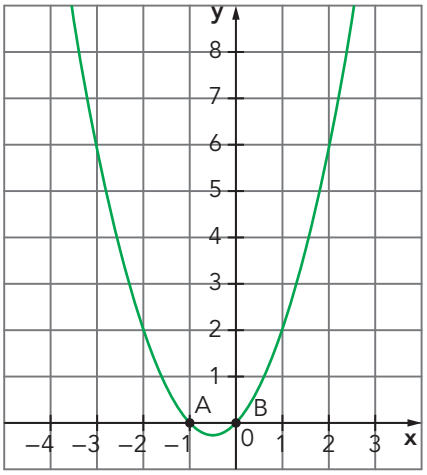
6. Agora altere gradualmente os valores do coeficiente c, mantendo os coeficientes $b = 1$ e $a = 1$, e verifique o que acontece com o gráfico da função.

5º passo: Agora vamos verificar significados importantes para o discriminante Δ. Ajuste os coeficientes $a = 1$, $b = 1$ e $c = 0$. Em seguida, utilize a ferramenta do programa para identificar a intersecção entre o gráfico de f e o eixo x. Vão aparecer na tela 2 pontos, A e B, cujas abscissas indicam os zeros dessa função.

4. Resposta esperada: A concavidade da parábola se altera. Quando $a > 0$, a concavidade fica para cima; quando $a < 0$, a concavidade fica para baixo. Se $a = 0$, a função deixa de ser quadrática e passa a ser função afim. Quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola; quanto menor o valor absoluto de a, maior será a abertura da parábola.

5. Resposta esperada: Quando $b > 0$, a parábola intersecta o eixo y com a parte crescente; quando $b = 0$, o vértice da parábola fica sobre o eixo y; quando $b < 0$, a parábola intersecta o eixo y com a parte decrescente.

6. Resposta esperada: O coeficiente c é a ordenada do ponto no qual a parábola intersecta o eixo y.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção, no *software* de Geometria dinâmica, após o 5º passo.

6º passo: No campo de entrada insira **D=b^2−4*a*c**.

O valor indicado por D é o valor do discriminante Δ da equação relacionada à função dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

7. Ajuste os coeficientes $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$. Verifique o que acontece com o gráfico da função e com o valor de Δ. Resposta esperada: Neste caso, o gráfico da função intersecta o eixo x em 1 único ponto e $\Delta = 0$.

8. Altere gradualmente os coeficientes a, b e c e procure outras combinações em que $\Delta = 0$. $\Delta = 0$ sempre que $b^2 - 4ac = 0$. Exemplos de resposta: $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$; $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$.

9. Altere gradualmente o valor dos coeficientes a, b e c, um de cada vez, e perceba o que acontece com o gráfico e com o valor do discriminante Δ. Depois, analise as respostas das atividades anteriores e tente estabelecer uma relação entre a quantidade de pontos de intersecção do gráfico com o eixo x e o valor do discriminante Δ da equação correspondente à função.

Resposta esperada: Quando $\Delta = 0$, o gráfico intersecta o eixo x em 1 único ponto; quando $\Delta > 0$, o gráfico intersecta o eixo x em 2 pontos distintos; quando $\Delta < 0$, o gráfico não intersecta o eixo x.

Construção do gráfico de uma função quadrática

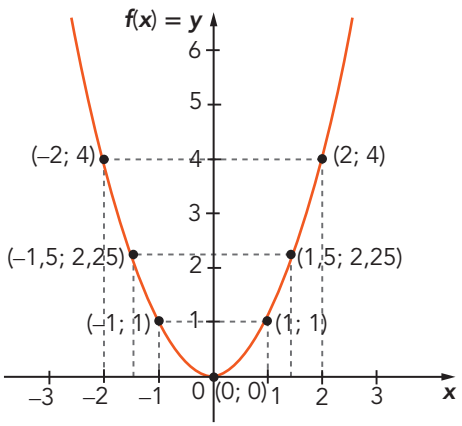
Após as explorações que você fez no *software* de Geometria dinâmica, vamos verificar como representar o gráfico de um tipo de função quadrática sem usar tecnologias digitais.

Considere a função f definida pela lei $f(x) = x^2$. Analise o quadro a seguir, no qual são apresentadas as coordenadas de alguns pontos que pertencem à representação gráfica dessa função.

x	$f(x) = y$	$(x; y)$
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	$(-2; 4)$
$-1{,}5$	$f(-1{,}5) = (-1{,}5)^2 = 2{,}25$	$(-1{,}5; 2{,}25)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	$(-1; 1)$
0	$f(0) = 0^2 = 0$	$(0; 0)$
1	$f(1) = 1^2 = 1$	$(1; 1)$
$1{,}5$	$f(1{,}5) = (1{,}5)^2 = 2{,}25$	$(1{,}5; 2{,}25)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2; 4)$

Vamos indicar esses pontos em um plano cartesiano para representar a curva que passa por eles.

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora



A curva formada é uma parábola, e a função que ela representa é uma função quadrática. Perceba que os valores da 2ª linha do quadro correspondem ao quadrado dos respectivos valores da 1ª linha, conforme indica a lei da função.

O domínio dessa função é $\mathbb{R}$, e o conjunto imagem é o conjunto dos números reais y, tais que $y \geqslant 0$.

Não escreva no livro

Reflita

Encontre outro ponto que pertença à parábola que representa o gráfico da função dada pela lei $f(x) = x^2$.

Exemplos de resposta: (4, 16); (–3, 9); (1,2; 1,44).

Características da função definida por $f(x) = ax^2$, com a real e $a \neq 0$

A função quadrática apresenta algumas características próprias. Vamos explorá-las a seguir.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Construa no caderno uma tabela com os pontos que pertencem à função definida por $f(x) = ax^2$, para todos os valores inteiros de x no intervalo $[-10, 10]$, considerando $a = 1$.
A tabela encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

a) O que você pode perceber em relação aos valores de y para $x = 2$ e $x = -2$? São iguais, $y = 4$.

b) E para os valores de y para $x = 7$ e $x = -7$? São iguais, $y = 49$.

2. Represente os pontos da tabela em um plano cartesiano no caderno e represente a curva da função cuja lei é $f(x) = x^2$. O que você pode perceber em relação aos pontos da curva e ao eixo y?

3. Analise os valores da tabela que você construiu.
O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual. Os pontos da parábola são simétricos em relação ao eixo y.

a) Considerando o ponto $(1, 1)$, se dobrarmos o valor de x, o que acontece com o valor de y?
O valor de y é multiplicado por 4.

b) Considerando novamente o ponto $(1, 1)$, se triplicarmos o valor de x, o que acontece com o valor de y? O valor de y é multiplicado por 9.

c) Mais uma vez, considerando o ponto $(1, 1)$, se multiplicarmos o valor de x por n, o que acontece com o valor de y? O valor de y é multiplicado por n^2.

4. Repita os procedimentos das atividades **1** e **2** para outros valores de a na lei da função f dada por $f(x) = ax^2$.

a) O que você pode concluir?
Resposta esperada: Assim como na função dada por $f(x) = x^2$, o eixo y é o eixo de simetria da parábola de qualquer função dada por $f(x) = ax^2$ para qualquer a real não nulo.

b) Nessa função, o que é possível dizer sobre $f(x)$ e $f(-x)$ para qualquer x do domínio da função?
$f(x) = f(-x)$

A função definida pela lei $f(x) = ax^2$, com a real e $a \neq 0$, é uma função quadrática que apresenta as características a seguir.

- A curva é simétrica em relação ao eixo y.

  Isso significa que, se o ponto $M(a, b)$ pertence à curva, o mesmo ocorre com o ponto $N(-a, b)$. Podemos dizer que $f(x) = x^2$ é uma **função par**, isto é, uma função que tem a propriedade $f(-x) = f(x)$ para qualquer x do domínio.

  Note que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Assim, por exemplo, $f(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f(1)$ e $f(-2) = (-2)^2 = 4 = 2^2 = f(2)$.

- O eixo y é o eixo de simetria do gráfico da função.

  Disso decorre que o ponto $(0, 0)$, a origem do plano cartesiano, é o vértice da função.

- A variável y é diretamente proporcional ao quadrado da variável x.

  Este é o único caso de função quadrática em que ocorre a proporcionalidade direta. Nos demais casos de função quadrática, isso não ocorre devido à influência dos demais coeficientes, como estudaremos a seguir.

Não escreva no livro

Reflita

Mostre que, para $y = f(x) = ax^2$, y é diretamente proporcional ao quadrado de x.

Exemplo de resposta:
$f(nx) = a(nx)^2 = a \cdot n^2x^2 = n^2 \cdot ax^2 = n^2 \cdot f(x)$.

Analise alguns exemplos a seguir.

a) $f(x) = ax^2$

Se $x = 1$, então $f(1) = a$.

Se multiplicarmos x por n, então $f(xn) = a(xn)^2 = ax^2n^2$.

Neste caso, há proporcionalidade direta entre $f(x)$ e o quadrado de x.

b) $g(x) = ax^2 + b$

Se $x = 1$, então $g(1) = a + b$.

Se multiplicarmos x por n, então $g(xn) = ax^2n^2 + b$.

Neste caso, não há proporcionalidade direta.

c) $h(x) = x^2 + bx + c$

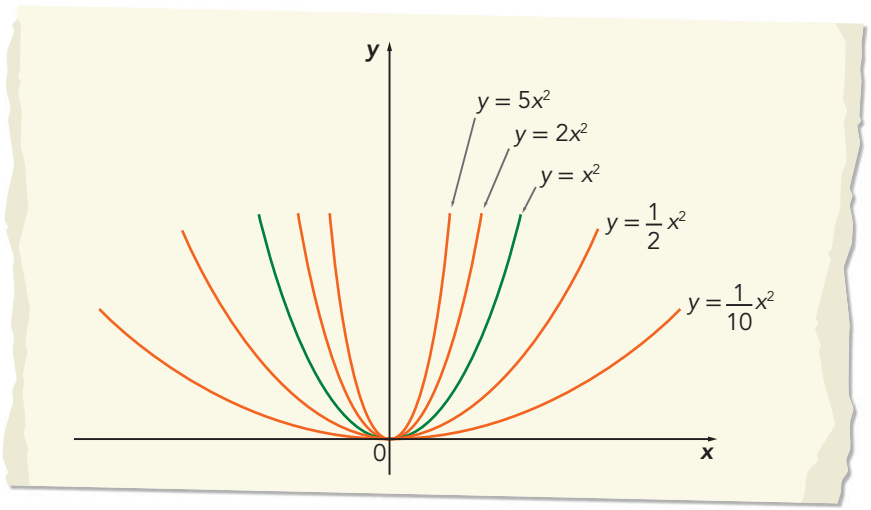
Se $x = 1$, então $h(1) = 1 + b + c$.

Se multiplicarmos x por n, então $h(xn) = x^2n^2 + xnb + c$.

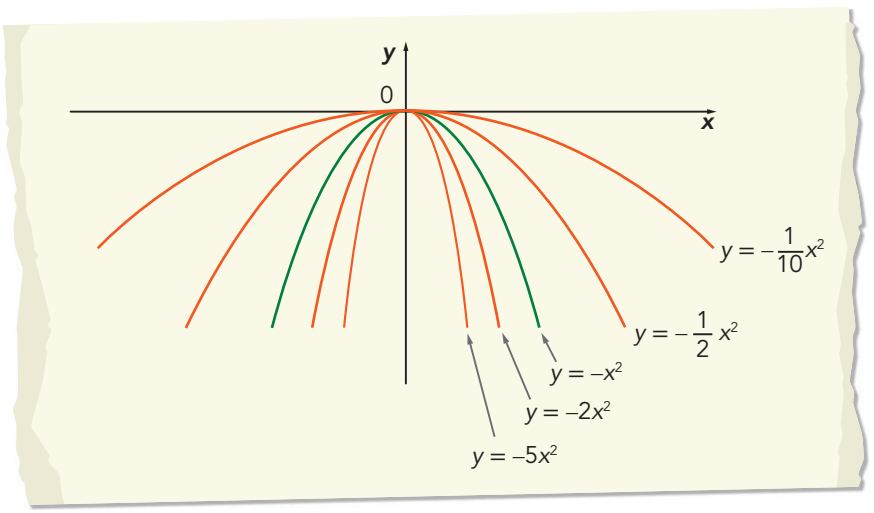
Neste caso, não há proporcionalidade direta.

Examine os gráficos da função definida pela lei $f(x) = ax^2$ considerando alguns valores positivos e negativos de a.

- $a > 0$

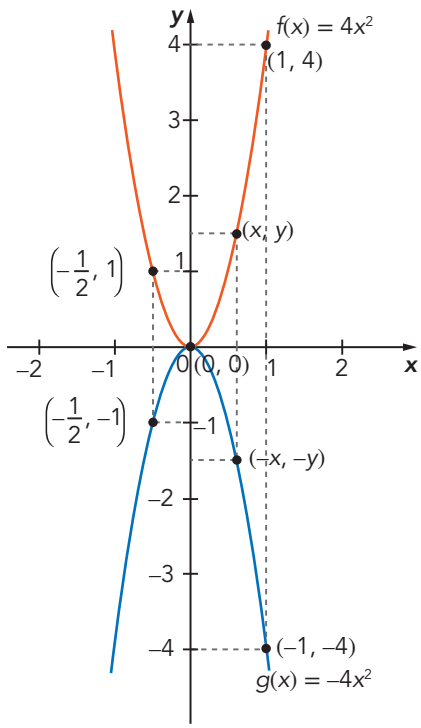


- $a < 0$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- Quando $a > 0$, a concavidade está voltada para cima. Nesse caso, o menor valor assumido por $f(x) = ax^2$ é zero; a função não assume valor máximo, ou seja, ela é ilimitada superiormente.
- Quando $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo. Nesse caso, o maior valor assumido por $f(x) = ax^2$ é zero; a função não assume valor mínimo, ou seja, ela é ilimitada inferiormente.
- Quanto menor o valor absoluto de a, maior será a abertura da parábola e quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola. Isso ocorre porque o coeficiente a determina a taxa de crescimento do termo ax^2, o que afeta diretamente a abertura da parábola.
- Os gráficos das funções quadráticas dadas por $f(x) = ax^2$ e $g(x) = a'x^2$, em que a e a' são números opostos, são simétricos em relação ao eixo x. Há uma reflexão em torno do eixo x, ou seja, uma transformação que leva (x, y) em $(x, -y)$. Analise os gráficos de $f(x) = 4x^2$ e $g(x) = -4x^2$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

Não escreva no livro

1. Para cada função dada, represente o gráfico em um plano cartesiano usando um *software* de Geometria dinâmica e depois escreva no caderno se $y = f(x)$ é diretamente proporcional a x^2.

a) $f(x) = 3x^2$ É diretamente proporcional.

b) $f(x) = 2 + 3x^2$ Não é diretamente proporcional.

c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2$ É diretamente proporcional.

d) $f(x) = (2 + x)x$ Não é diretamente proporcional.

e) $f(x) = (2 + 5)x^2$ É diretamente proporcional.

f) $f(x) = 2x^2 + x + 4$ Não é diretamente proporcional.

2. O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{2}$ e $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$.

Sim, pois a lei da função é do tipo $f(x) = ax^2$.

Não escreva no livro

2. Usando régua milimetrada, represente no caderno, em um plano cartesiano, o gráfico de $f(x) = 2x^2$ e determine os valores $f(x)$ para x igual a: $-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ e $-\frac{3}{2}$. Depois, verifique esses valores no gráfico. Podemos dizer que y é diretamente proporcional a x^2 nesse caso?

3. Como seria o gráfico de $f(x) = x^2$ se considerássemos somente os pontos cujas coordenadas são números inteiros? O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

4. Crie a lei de uma função f e construa no caderno uma tabela com alguns valores de x e os correspondentes valores de y de acordo com a função. Apresente para um colega apenas a tabela com os valores e peça a ele que descubra a lei da função que você criou. Faça o mesmo com a tabela dele e, em seguida, represente no plano cartesiano o gráfico da função. Resposta pessoal.

5. Use régua milimetrada e represente no caderno o gráfico de cada uma das seguintes funções quadráticas em um mesmo plano cartesiano.

a) $f(x) = 2x^2$

b) $f(x) = -2x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

Os gráficos encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

6. Considere os valores apresentados na tabela a seguir.

x	$f(x)$
–3	27
–2	12
–1	3
0	0
1	3
2	12
3	27

a) Exemplo de resposta: $f(x) = f(-x)$ para todos os valores de x na tabela, e todos os valores de $f(x)$ são múltiplos de 3.

a) Analisando os valores de x e os correspondentes de $f(x)$, que padrões você consegue identificar?

b) No caderno, represente os pontos da tabela no plano cartesiano e responda: Que tipo de gráfico pode conter esses pontos? Que características da disposição dos pontos no plano levaram você a essa conclusão? Resposta pessoal.

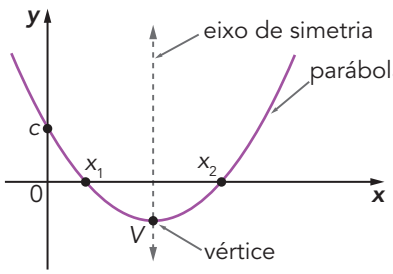
c) Considerando a sua resposta ao item anterior, f pode ser que tipo de função?

d) Existe uma função quadrática f do tipo $f(x) = ax^2$ à qual pertencem todos os pontos da tabela? Em caso afirmativo, determine a lei dessa função ou, em caso negativo, justifique sua resposta. Sim; $f(x) = 3x^2$.

6. c) Resposta esperada: f pode ser uma função quadrática.

Características da função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$

Agora que já fizemos algumas explorações, vamos compreender as relações que existem entre a lei da função quadrática e o gráfico dela no plano cartesiano.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Você já estudou na exploração com o *software* de Geometria dinâmica que os coeficientes a, b e c e o discriminante Δ influenciam alguns aspectos específicos da representação gráfica da função quadrática, a parábola. Além disso, você estudou que o vértice da parábola é o ponto da função com a menor ordenada, quando a concavidade da parábola é para cima, ou com a maior ordenada, quando a concavidade da parábola é para baixo; ele também é o ponto em que a curva muda de sentido.

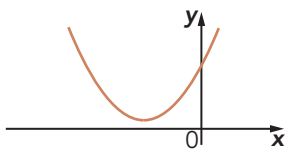
Também dizemos que o vértice da parábola é o **ponto de mínimo** ou o **ponto de máximo** quando a concavidade é para cima ou para baixo, respectivamente. Já a ordenada do vértice é o **valor mínimo** ou o **valor máximo** quando a concavidade é para cima ou para baixo, respectivamente.

Para aprofundar esse estudo, vamos considerar uma função quadrática com a lei do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

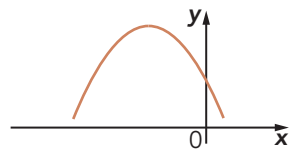
Coeficiente *a*

O coeficiente a é responsável pela concavidade e pela abertura da parábola.

- Se $a > 0$, a concavidade da parábola é para cima.



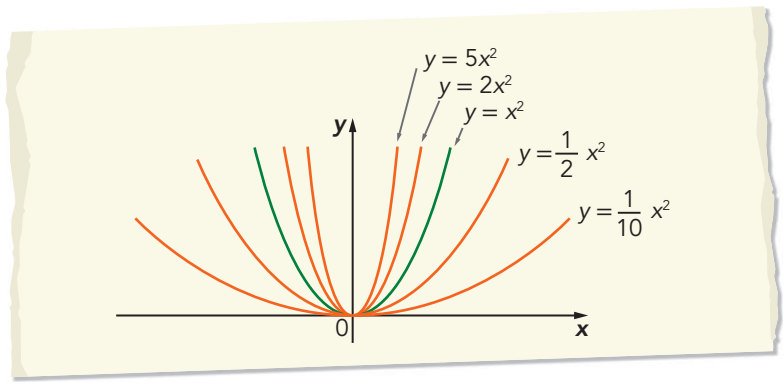
- Se $a < 0$, a concavidade da parábola é para baixo.



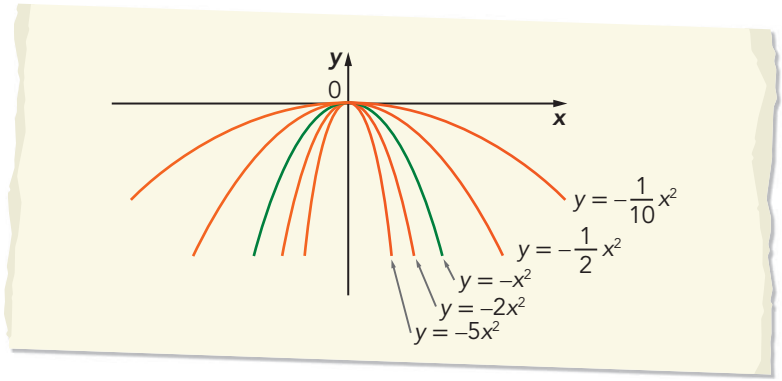
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Além disso, quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola (parábola mais "fechada"), independentemente de a concavidade ser para cima ou para baixo. Analise alguns exemplos.

- $a > 0$



- $a < 0$

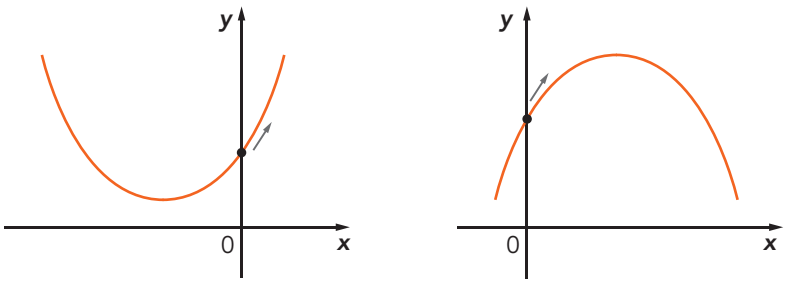


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

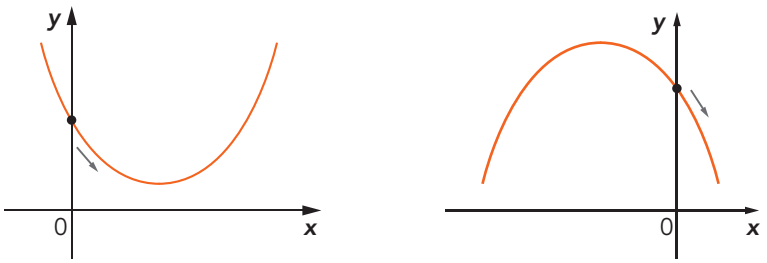
Coeficiente *b*

O coeficiente *b* indica se a parábola intersecta o eixo *y* na parte crescente, decrescente ou no vértice da parábola.

- Se $b > 0$, a parábola intersecta o eixo *y* na parte crescente.

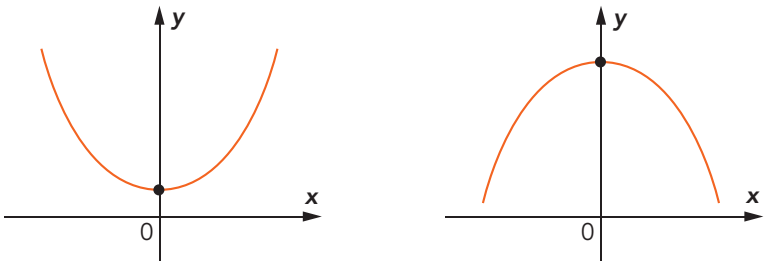


- Se $b < 0$, a parábola intersecta o eixo *y* na parte decrescente.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- Se $b = 0$, a parábola intersecta o eixo *y* no vértice.



Não escreva no livro

Reflita

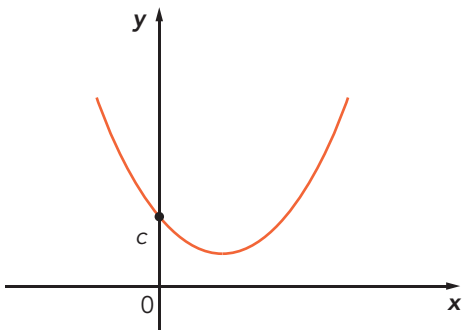
Por que a parábola sempre intersecta o eixo *y* em 1 só ponto?

Porque para ser uma função ela precisa ter 1 único valor de *y* para cada *x* do domínio e o domínio da função quadrática é $\mathbb{R}$.

Coeficiente *c*

O coeficiente *c* indica a ordenada do ponto no qual a parábola intersecta o eixo *y*.

A parábola intersecta o eixo *y* no ponto $(0, c)$, ou seja, $f(0) = c$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Reflita

Como podemos justificar esse resultado utilizando a lei da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$?

A curva intersecta o eixo *y* quando $x = 0$. Assim, temos: $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$.

O discriminante Δ

As intersecções da representação gráfica da função quadrática, a parábola, com os eixos coordenados (eixo x e eixo y) são decorrentes das características da lei da função.

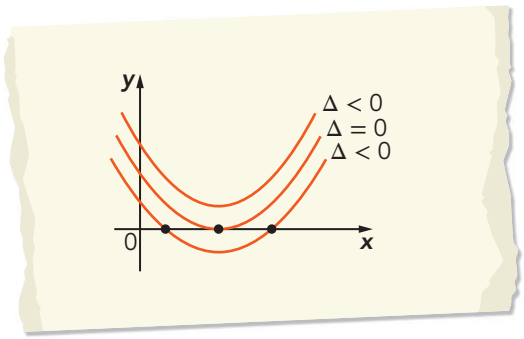
A parábola intersecta o eixo x nos zeros da função. Isso pode ocorrer 1 vez, 2 vezes ou nenhuma vez, dependendo do valor do Δ (dado por $b^2 - 4ac$) da equação correspondente.

Para $f(x) = 0$, temos $ax^2 + bx + c = 0$:

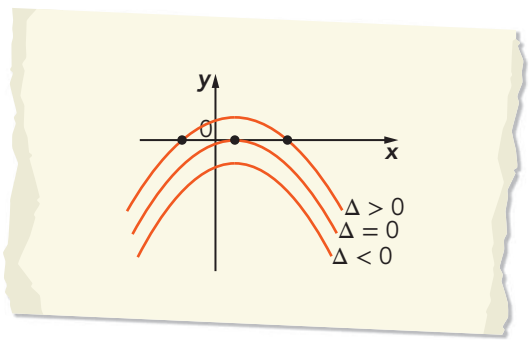
$$\begin{cases} \Delta = 0 \rightarrow 1 \text{ raiz real dupla (a parábola intersecta o eixo } x \text{ em 1 só ponto)} \\ \Delta > 0 \rightarrow 2 \text{ raízes reais diferentes (a parábola intersecta o eixo } x \text{ em 2 pontos distintos)} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{nenhuma raiz real (a parábola não intersecta o eixo } x) \end{cases}$$

Graficamente, temos:

- $a > 0$



- $a < 0$



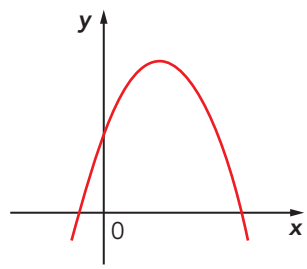
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Perceba que os zeros de uma função equivalem às raízes da equação correspondente, para $y = 0$.

Atividades resolvidas

1. A função quadrática dada pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, está representada no plano cartesiano apresentado. Quais são os sinais dos coeficientes a, b e c?



Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução

- $a < 0$, pois a concavidade está para baixo.
- $b > 0$, pois a parábola intersecta o eixo y na parte crescente da parábola.
- $c > 0$, pois $f(0) = c$ e a parábola intersecta o eixo vertical na parte positiva dele.

7. Verifique quais dos seguintes pontos pertencem à parábola que representa graficamente a função dada pela lei $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Alternativas **a** e **c**.

a) $A(2, 0)$

b) $B(4, -2)$

c) $C(-1, 12)$

8. Determine o valor de m para que o ponto $A(2, 1)$ pertença à parábola que representa graficamente a função dada pela lei de formação $f(x) = (m + 1)x^2 - 1$. $m = -\frac{1}{2}$

9. Em que pontos a parábola que representa graficamente cada função dada pelas leis a seguir intersecta os eixos x e y?

a) $f(x) = x^2 - 11x + 30$

b) $f(x) = x^2 + 4x - 21$

c) $f(x) = x^2 - 36$

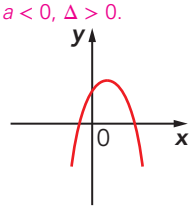
d) $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

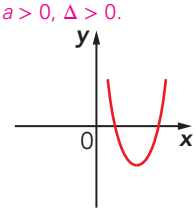
10. Em cada gráfico que representa uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, indique no caderno se $a < 0$ ou $a > 0$ e descubra se $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ ou $\Delta = 0$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

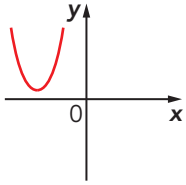
a) $a < 0$, $\Delta > 0$.



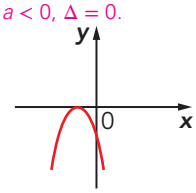
b) $a > 0$, $\Delta > 0$.



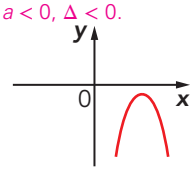
c) $a > 0$, $\Delta < 0$.



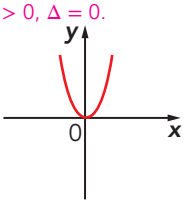
d) $a < 0$, $\Delta = 0$.



e) $a < 0$, $\Delta < 0$.

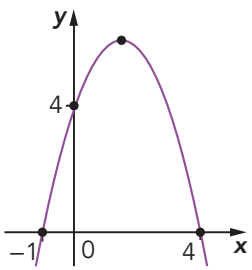


f) $a > 0$, $\Delta = 0$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

11. Escreva no caderno a lei da função correspondente ao gráfico dado, na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. $f(x) = -x^2 + 3x + 4$



Banco de imagens/Arquivo da editora

12. Considere um terreno que tem formato de um quadrado cujos lados têm medida de comprimento x, em metros.

a) Qual é a lei da função que indica a medida de perímetro desse terreno? Represente o gráfico dessa função no plano cartesiano e indique qual tipo de função é essa.

b) Qual é a lei da função que indica a medida de área desse terreno? Represente o gráfico dessa função no plano cartesiano e indique qual tipo de função é essa.

c) Como varia a medida de perímetro e a medida de área quando dobramos a medida de comprimento x do lado? E quando triplicamos? Justifique.

12. As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

d) Como varia a medida de perímetro e a medida de área quando multiplicamos a medida de comprimento x por n?

e) Refaça os itens de **a** a **d** considerando que o terreno tem o formato de um triângulo equilátero e sabendo que a fórmula que indica a medida de área de uma região com o formato de um triângulo equilátero é: $A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$, em que ℓ é a medida de comprimento do lado do triângulo.

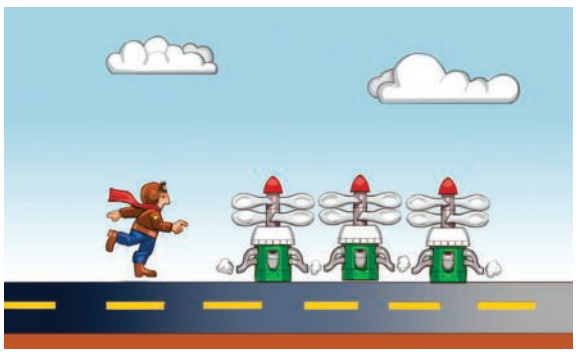
f) Agora, refaça os itens de **a** a **d** considerando que o terreno tem o formato de um hexágono regular.

Sobre o assunto

A fórmula que determina a medida de área de uma região com a forma de um triângulo equilátero pode ser demonstrada utilizando o teorema de Pitágoras, que você estudou nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Para conhecer mais essa demonstração, sugerimos o texto "Área do triângulo equilátero", publicado pelo *site* Brasil Escola. Disponível em: https://tedit.net/zipcdt. Acesso em: 11 jul. 2024.

13. A imagem a seguir mostra um personagem de *videogame* no instante em que inicia um salto para chegar ao outro lado da plataforma, evitando os obstáculos.



Hector Gomez/Arquivo da editora

Na tabela a seguir constam alguns dos pontos (x, y) pertencentes ao gráfico que representa a trajetória do personagem durante o salto.

x	y
–1	0
0	3
1	4
2	3
3	0

a) Com a ajuda de um *software* de Geometria dinâmica, represente os pontos da tabela no plano cartesiano e responda no caderno: Que tipo de gráfico pode conter esses pontos? Que características da disposição dos pontos no plano levaram você a essa conclusão? Resposta pessoal.

b) Considerando a sua resposta ao item anterior, que tipo de função pode descrever a trajetória do personagem? Resposta pessoal.

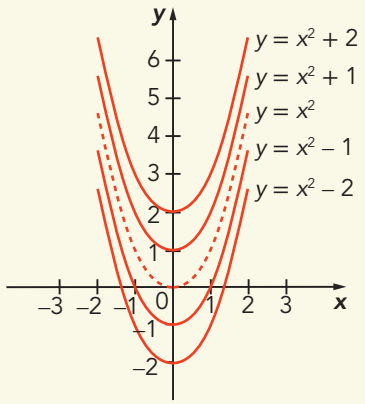
c) Existe uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$ à qual pertencem todos esses pontos? Em caso afirmativo, determine a lei dessa função ou, em caso negativo, justifique sua resposta. Não. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

d) Existe uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ à qual pertencem todos esses pontos? Em caso afirmativo, determine a lei dessa função ou, em caso negativo, justifique sua resposta. Sim; $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Características da função definida por $f(x) = ax^2 + k$, com a e k reais e $a \neq 0$

Examine a representação gráfica das funções quadráticas definidas a seguir e compare-a com o gráfico da função dada por $f(x) = x^2$, que está representado por uma linha tracejada.

- $g(x) = x^2 + 2$
- $h(x) = x^2 + 1$
- $i(x) = x^2 - 1$
- $j(x) = x^2 - 2$



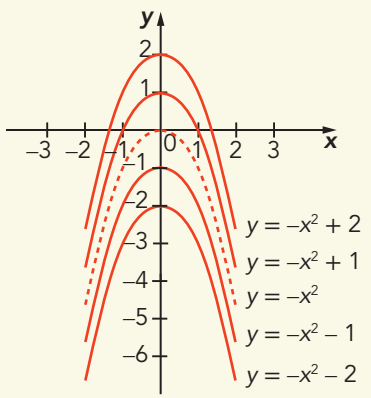
Banco de imagens/Arquivo da editora

Podemos perceber que o eixo de simetria de todas as parábolas é o eixo y. Além disso, o ponto mínimo de $g(x) = x^2 + 2$ é $(0, 2)$; o de $h(x) = x^2 + 1$ é $(0, 1)$; o de $i(x) = x^2 - 1$ é $(0, -1)$; e o de $j(x) = x^2 - 2$ é $(0, -2)$.

De modo geral, para $a > 0$, o **ponto mínimo** de $f(x) = ax^2 + k$ é o vértice $V(0, k)$.

Analise o gráfico das funções quadráticas definidas a seguir e compare-o com o gráfico da função dada por $f(x) = -x^2$, que está representado por uma linha tracejada.

- $g(x) = -x^2 + 2$
- $h(x) = -x^2 + 1$
- $i(x) = -x^2 - 1$
- $j(x) = -x^2 - 2$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Nessas parábolas, o eixo de simetria também corresponde ao eixo y. O ponto de máximo de $g(x) = -x^2 + 2$ é $(0, 2)$; o de $h(x) = -x^2 + 1$ é $(0, 1)$; o de $i(x) = -x^2 - 1$ é $(0, -1)$; e o de $j(x) = -x^2 - 2$ é $(0, -2)$.

De modo geral, para $a < 0$, o **ponto máximo** de $f(x) = ax^2 + k$ é o vértice $V(0, k)$.

Perceba que o gráfico de $f(x) = ax^2 + k$ é congruente ao gráfico de $f(x) = ax^2$, isto é, tem a mesma curva, porém a posição dele está, em valores absolutos, k unidades acima ou abaixo, conforme k é positivo ou negativo, respectivamente.

Dizemos que o gráfico de $f(x) = ax^2 + k$ é o gráfico de $f(x) = ax^2$ transladado de k unidades para cima ou para baixo. É uma translação vertical que leva (x, y) em $(x, y + k)$, de acordo com o valor de k.

Atividades

Não escreva no livro

14. Escreva no caderno as coordenadas do ponto de mínimo ou de máximo de cada uma das funções quadráticas.

a) $f(x) = 3x^2 + 1$ $V(0, 1)$

b) $g(x) = -3x^2 + 2$ $V(0, 2)$

c) $h(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ $V(0, -1)$

d) $j(x) = 3x^2 - 1$ $V(0, -1)$

15. Quais das funções da atividade anterior têm valor mínimo e quais têm valor máximo? Quais são esses valores?

Valor mínimo: $f(x) \to 1$, $h(x) \to -1$, $j(x) \to -1$; valor máximo: $g(x) \to 2$.

Texto para a próxima atividade.

Uma corrente presa a 2 postes de mesma medida de altura descreve uma curva que se parece com uma parábola. No entanto, se nenhuma outra força atuar sobre essa corrente além da força da gravidade, ela descreverá uma curva chamada catenária, que não é descrita por uma função quadrática.

Professor, na atividade **16**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

16. Em duplas, pesquisem a obra do arquiteto espanhol Antoni Gaudí (1852-1926) e citem exemplos de como ele empregava a catenária nas obras arquitetônicas. Depois, conversem sobre outras possibilidades de interação entre Arte e Matemática.

A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

ColorMaker/Shutterstock

A Casa Milà, edifício localizado em Barcelona (Espanha), desenhado por Gaudí e construído entre os anos 1905 e 1907, é um exemplo de obra de arte em que o artista utilizou catenárias. Foto de 2022.

Sobre o assunto

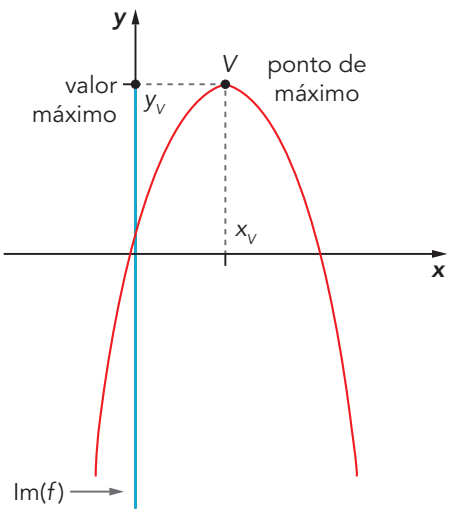
Para conhecer mais parábolas, catenárias e o uso delas na Arquitetura, sugerimos a dissertação de mestrado em Educação *Parábola e catenária: histórias e aplicações*, de Leda Maria Talavera.

TALAVERA, Leda Maria Bastoni. *Parábola e catenária*: histórias e aplicações. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: https://tedit.net/a25lzw. Acesso em: 27 ago. 2024.

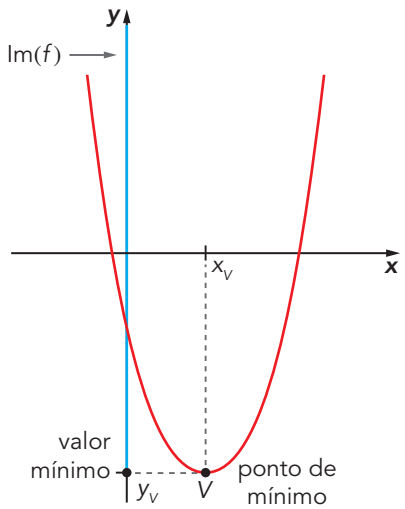
Vértice da parábola, conjunto imagem e valor máximo ou mínimo da função quadrática

A determinação do vértice da parábola ajuda na representação dela no plano cartesiano e permite determinar o **conjunto imagem da função**, bem como o **valor máximo** ou **mínimo** da função.

- $a < 0$



- $a > 0$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Como estudamos nos exemplos anteriores, o ponto de máximo ou de mínimo de uma função quadrática é o vértice da parábola, que é o gráfico da função. Uma das maneiras de determinar o vértice é lembrar que a parábola é uma curva simétrica em relação ao eixo y ou a uma reta paralela ao eixo y.

Ao determinar a posição desse eixo, é possível encontrar a abscissa do vértice e, assim, obter a ordenada do vértice. Analise os exemplos.

a) $f(x) = 2x^2 - 8x$

1º modo:

As raízes da equação correspondente à função f são $x' = 0$ e $x'' = 4$. Dada a simetria das parábolas, o eixo de simetria passa pelo ponto de abscissa:

$$x_V = \frac{x' + x''}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

Substituindo $x = 2$ na lei da função, obtemos a ordenada do vértice.

$$y_V = f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = -8$$

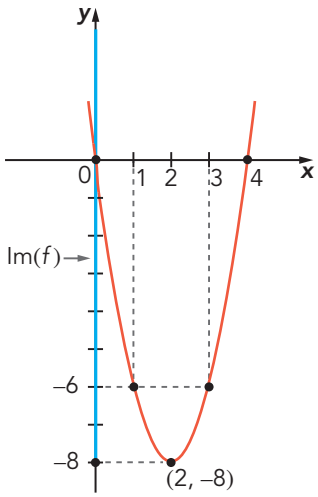
Fique atento

Se 2 é a abscissa do vértice, os pontos de abscissas 1 e 3 são simétricos na parábola, assim como os pontos de abscissas 0 e 4, por exemplo.

2º modo:

Escrevendo na forma canônica, ou seja, $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$, temos: $f(x) = 2(x^2 - 4x) = 2(x^2 - 4x + 4 - 4) = 2(x - 2)^2 - 8$.

Então, o vértice é o ponto $V(2, -8)$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

De modo geral, a função dada por $f(x) = a(x - m)^2 + k$, com a, m e k reais e $a \neq 0$, é equivalente a $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, em que $m = x_V$ e $k = y_V$. Essa forma é chamada de **forma canônica da função quadrática**.

A função assume valor mínimo -8 quando $x = 2$. Se o valor mínimo da função é $y = -8$, então o conjunto imagem da função é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -8\}$.

Essa função não tem valor máximo, pois é ilimitada superiormente.

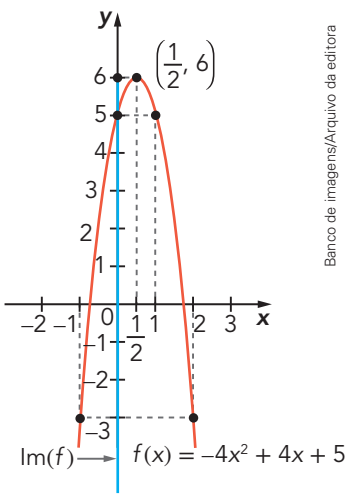
b) $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

Na forma canônica é possível determinar que $x_V = \frac{-b}{2a}$ e que $y_V = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$; então, o vértice de uma parábola que representa a função f, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, também pode ser calculado assim: $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

Nesse caso, temos:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$ e $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16 + 80)}{-16} = \frac{-96}{-16} = 6$

Então, $V\left(\frac{1}{2}, 6\right)$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A função assume valor máximo 6 quando $x = \frac{1}{2}$. Se o valor máximo da função é $y = 6$, então o conjunto imagem da função é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 6\}$.

Essa função não tem valor mínimo, pois é ilimitada inferiormente.

De modo geral, dada a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, se $V(x_V, y_V)$ é o vértice da parábola correspondente, temos então:

$a > 0 \Leftrightarrow y_V$ é o valor mínimo de $f \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant y_V\}$

$a < 0 \Leftrightarrow y_V$ é o valor máximo de $f \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant y_V\}$

Atividades resolvidas

2. A trajetória da bola, em um chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que a medida de altura h, em metros, t segundos após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$, responda aos itens.

a) Em qual instante a bola atinge a medida de altura máxima?

b) Qual é a medida de altura máxima atingida pela bola?

Resolução

Ponto de máximo: $V(t_v, h_v)$.

a) A bola atinge a medida de altura máxima quando:

$$t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Logo, a bola atinge a medida de altura máxima 3 segundos após o chute.

b) A medida de altura máxima atingida pela bola é:

$$h_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot (-1)} = \frac{-36}{-4} = 9 \text{ ou}$$

$$h(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = -9 + 18 = 9$$

A medida de altura máxima atingida pela bola é 9 metros.

Professor, destaque aos estudantes que uma possível estratégia para resolver o item **b** é determinar $f(x)$ quando $x = 3$.

Atividade resolvida passo a passo

3. **(Enem)** Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.

A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio **I**: 17 m;
- ginásio **II**: 18 m;
- ginásio **III**: 19 m;
- ginásio **IV**: 21 m;
- ginásio **V**: 40 m.

O saque desse atleta foi invalidado:

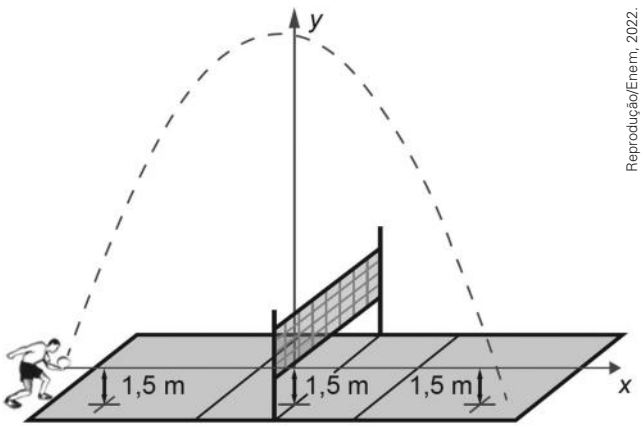
a) apenas no ginásio **I**.

b) apenas nos ginásios **I** e **II**.

c) apenas nos ginásios **I**, **II** e **III**.

d) apenas nos ginásios **I**, **II**, **III** e **IV**.

e) em todos os ginásios.



Reprodução/Enem, 2022.

Resolução

Não escreva no livro

Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dada a lei da função que é representada pela parábola formada pela trajetória de lançamento da bola.

A trajetória de lançamento da bola em um plano cartesiano mostra que o vértice da parábola intersecta o eixo y e o eixo x está a 1,5 m de medida de altura em relação ao plano da quadra.

b) O que se pede?

A avaliação de quais ginásios comportam a medida de altura do saque do jogador, de maneira que ele não seja invalidado.

Planejando a solução

Analisando a projeção da trajetória da bola no plano cartesiano, verifica-se que o vértice da parábola tem coordenadas (x_V, y_V) e que a medida de altura máxima da bola é a coordenada y_V acrescida de 1,5 m. Assim, podemos calcular a coordenada y_V para fazer a análise de quais ginásios comportam a altura desse saque.

Executando o que foi planejado

A partir da lei da função $f(x) = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, calculamos o valor de y_V:

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\left[\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 12\right]}{4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)} = \frac{-\left[\left(\frac{49}{9}\right) + 8\right]}{-\frac{2}{3}} = \frac{121}{6} \simeq 20{,}2$$

Logo, $y_V + 1{,}5 \simeq 21{,}7$.

O saque do atleta foi invalidado em todos os ginásios com medida de altura menor do que ou igual a 21,7 m, portanto, o saque foi invalidado nos ginásios **I**, **II**, **III** e **IV**.

Verificando

A partir da lei da função $f(x) = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, calculamos o valor de x_V:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(-\frac{7}{3}\right)}{2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)} = \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{3}{1}\right) = -7$$

Podemos substituir o valor de y_V na lei da função:

$$f(x) = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12 \Rightarrow y_V = -\frac{(x_V)^2}{6} - \frac{7x_V}{3} + 12 \Rightarrow \frac{121}{6} = -\frac{(x_V)^2}{6} - \frac{7x_V}{3} + 12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_V)^2 + 14x_V + 49 = 0 \Rightarrow (x_V + 7)^2 = 0 \Rightarrow x_V = -7$$

Esse valor corresponde ao valor obtido a partir do enunciado.

Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **d**.

Ampliando a atividade

Na trajetória da bola durante o saque, a que medida de altura do piso essa bola vai estar quando passar sobre a rede? 13,5 m

19. O ponto mais alto vai ocorrer na metade da medida de intervalo de tempo total, isto é, em 1 segundo.

20. c) Como o custo passa a ser R$ 300,00 mais barato com o novo fornecedor, vale a pena trocar.

Atividades

Não escreva no livro

17. Considere uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, tal que os pontos apresentados na tabela a seguir pertencem ao gráfico da função.

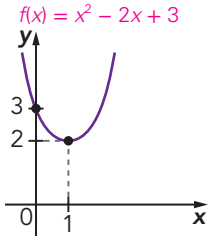
x	y
–3	18
–2	8
0	0
2	8
3	18

O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
$f(x) = 2x^2$

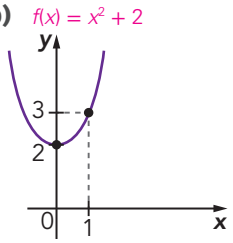
Analise as coordenadas desses pontos. Depois, indique os pontos no plano cartesiano, identifique o eixo de simetria da parábola dessa função e determine a lei dela.

18. Escreva no caderno a lei da função, na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, correspondente ao gráfico dado em cada plano cartesiano.

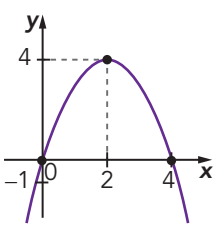
a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$



b) $f(x) = x^2 + 2$



c) $f(x) = -x^2 + 4x$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

19. Considere que o salto de um golfinho formou parte de uma parábola e que a medida de intervalo de tempo do salto, entre sair da água e entrar de volta nela, foi 2 segundos. Após quantos segundos ele chegou ao ponto mais alto da trajetória?

Tory Kallman/Shutterstock

Golfinho-de-dentes-rugosos.

20. Sabe-se que o custo C para produzir x unidades de certo produto é dado por:

$$C = x^2 - 80x + 3\,000$$

a) Calcule no caderno a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo; 40 unidades.

b) Calcule o valor mínimo de custo. R$ 1.400,00

c) A empresa pode optar por comprar matéria-prima de outro fornecedor, de modo que a função de custo será dada por $C'(x) = x^2 - 100x + 3\,500$. Considerando apenas o custo de produção, vale a pena trocar de fornecedor se a empresa produz 40 unidades por dia? Justifique sua resposta.

d) No caderno, escreva 3 outros aspectos, além do custo de produção, que podem influenciar na decisão de trocar ou manter um fornecedor em uma empresa.
Resposta pessoal.

21. Uma bola é lançada ao ar. Suponha que a medida de altura h, em metros, t segundos após o lançamento, seja $h = -t^2 + 4t + 6$. No caderno, determine:

a) o instante em que a bola atinge a medida de comprimento de altura máxima; 2 s

b) a medida de altura máxima atingida pela bola; 10 m

c) quantos segundos depois do lançamento a bola toca o solo. Aproximadamente 310 s.

Professor, se julgar oportuno, incentive os estudantes a continuar explorando funções quadráticas em diferentes contextos. Peça que criem problemas e proponha uma conversa para que compartilhem os problemas e as respectivas resoluções.

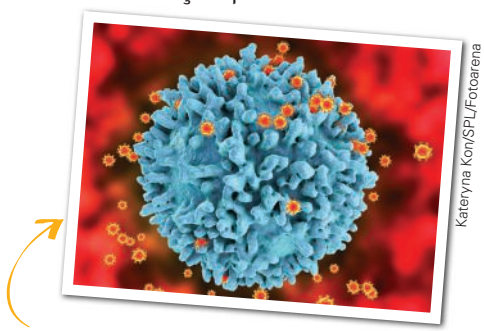
22. Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão.

A empresa exigiu de cada passageiro R$ 20,00 mais R$ 2,00 por lugar vago. Escreva no caderno a lei da função que indica o lucro dessa empresa, represente o gráfico dessa função em um *software* de Geometria dinâmica e responda: Qual é a quantidade de passageiros necessária para que a rentabilidade da empresa seja máxima? Qual é o lucro máximo? Após analisar o gráfico no *software*, refaça as contas no caderno e confira os resultados obtidos.

15 passageiros.

Texto para a próxima atividade.

Uma vacina é um preparo biológico que contém o vírus enfraquecido da doença para a qual se deseja a imunidade. Como esse vírus está fragilizado, o corpo consegue combatê-lo facilmente e registrar a informação para enfrentá-lo de maneira natural em uma situação posterior.



Kateryna Kon/SPL/Fotoarena

Ilustração da estrutura do vírus da imunodeficiência humana (HIV), causador da aids. Ele ataca o sistema imunológico do hospedeiro, impedindo que as células de defesa protejam o corpo. Imagem sem proporção e em cores fantasia.

Em um laboratório, cientistas notaram que a concentração C de determinada vacina, em mg/L, no sangue de animais de certa espécie varia de acordo com a função dada pela lei $C(t) = \frac{-t^2}{4} + 6t$, em que t é a medida de intervalo de tempo decorrido, em horas, após a aplicação da vacina, durante um período de observação de 24 horas.

23. Determine a medida de intervalo de tempo necessária, após o início do experimento, para que a vacina atinja o nível máximo de concentração no sangue desses animais.

a) 8 horas.

b) 10 horas.

c) 12 horas.

d) 14 horas.

e) 16 horas.

Alternativa **c**.

24. A medida de temperatura, em graus Celsius, no interior de uma câmara é dada pela função de lei $T(t) = t^2 - 8t + k$, em que t é dado em minutos e k é uma constante positiva. Quando a câmara foi ligada, a medida de temperatura no interior dela era 12 °C, e ela só foi desligada depois de 10 minutos.

a) Em quais instantes a medida de temperatura era 0 °C? 2 min e 6 min.

b) Em qual instante a medida de temperatura foi mínima? 4 min

c) Qual foi a medida de temperatura mínima? −4 °C

d) Qual era a medida de temperatura quando a câmara foi desligada? 32 °C

25. Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado o entorno de uma quadra de basquete.

a) Sabendo que foi disponibilizada uma tela com 200 metros de medida de comprimento, indique no caderno a lei da função que relaciona a medida de área da quadra em função da medida de largura x.

$A(x) = 100x - x^2$

b) Quais devem ser as medidas de largura e de comprimento da quadra a ser cercada com essa tela para que a medida de área seja a maior possível? 50 m e 50 m.

c) No caderno, represente o gráfico relacionado à função do item **a** em um plano cartesiano.

O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

26. Uma pessoa dispõe de uma tela com medida de comprimento de 15 metros, com a qual pretende fazer um galinheiro de formato retangular, aproveitando um muro da chácara para economizar material. Do lado oposto ao muro, ela pretende reservar um espaço de 1 metro de medida de comprimento para o portão, no qual não utilizará tela. Qual é a maior medida de área (medida de área máxima) que pode ter esse galinheiro? 32 m²

27. Se uma editora vende cada livro por R$ 20,00, ela consegue vender 200 livros e o valor de arrecadação é R$ 4.000,00. Percebendo que, para cada real de desconto no preço do livro, a quantidade de livros vendidos aumenta em 50 unidades e que o retorno financeiro é dado por uma função quadrática, qual deve ser o valor de venda de cada livro para que a editora consiga o maior retorno financeiro possível?

R$ 12,00

Além da sala de aula

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual. Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Funções lineares e funções quadráticas na cultura de berinjela

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Ciência e Tecnologia*, *Educação Ambiental* e *Educação para o Consumo*.

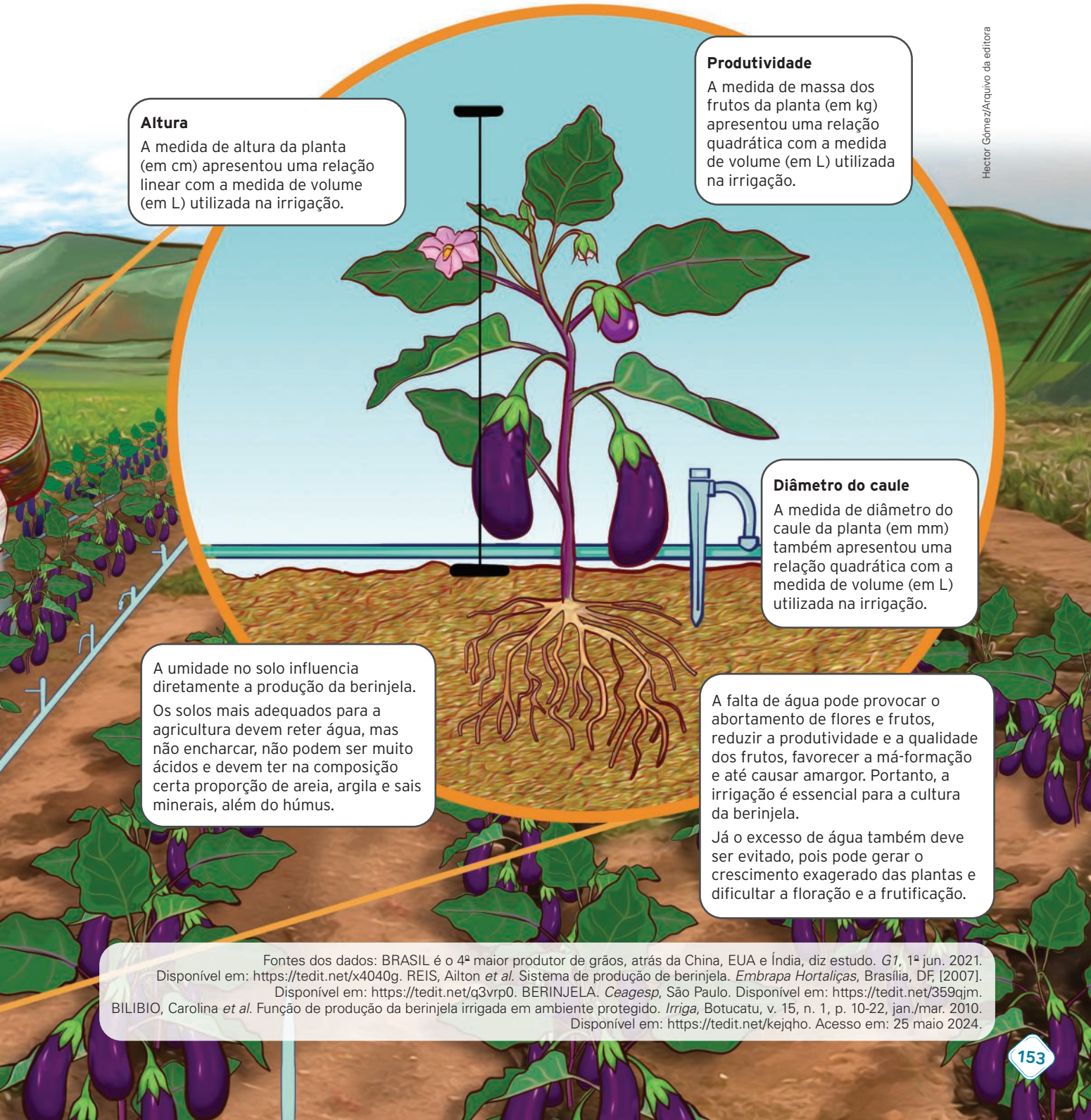
O Brasil é um dos maiores produtores de alimentos do mundo. Dentre os alimentos produzidos no país, podemos destacar a berinjela (*Solanum melongena L.*).

A berinjela foi trazida ao Brasil durante a colonização portuguesa e atualmente é cultivada principalmente nas regiões Sudeste e Sul do país. O cultivo dessa planta ocorre em regiões de climas tropical e subtropical, sem excesso de chuvas.

No Brasil, o tipo mais comum de berinjela tem coloração roxa e cabo verde. Esse e outros tipos de berinjela estão ilustrados a seguir.

As imagens não estão representadas em proporção.

Pesquisas do departamento de Engenharia e de Agricultura da Universidade Federal de Lavras (MG) constataram, em 2010, que 3 tipos de medida de uma planta de berinjela podem estar relacionados com a quantidade de água que receberam como irrigação:



Altura

A medida de altura da planta (em cm) apresentou uma relação linear com a medida de volume (em L) utilizada na irrigação.

Produtividade

A medida de massa dos frutos da planta (em kg) apresentou uma relação quadrática com a medida de volume (em L) utilizada na irrigação.

Hector Gómez/Arquivo da editora

Diâmetro do caule

A medida de diâmetro do caule da planta (em mm) também apresentou uma relação quadrática com a medida de volume (em L) utilizada na irrigação.

A umidade no solo influencia diretamente a produção da berinjela.

Os solos mais adequados para a agricultura devem reter água, mas não encharcar, não podem ser muito ácidos e devem ter na composição certa proporção de areia, argila e sais minerais, além do húmus.

A falta de água pode provocar o abortamento de flores e frutos, reduzir a produtividade e a qualidade dos frutos, favorecer a má-formação e até causar amargor. Portanto, a irrigação é essencial para a cultura da berinjela.

Já o excesso de água também deve ser evitado, pois pode gerar o crescimento exagerado das plantas e dificultar a floração e a frutificação.

Fontes dos dados: BRASIL é o 4º maior produtor de grãos, atrás da China, EUA e Índia, diz estudo. *G1*, 1º jun. 2021. Disponível em: https://tedit.net/x4040g. REIS, Ailton *et al.* Sistema de produção de berinjela. *Embrapa Hortaliças*, Brasília, DF, [2007]. Disponível em: https://tedit.net/q3vrp0. BERINJELA. *Ceagesp*, São Paulo. Disponível em: https://tedit.net/359qjm. BILIBIO, Carolina *et al.* Função de produção da berinjela irrigada em ambiente protegido. *Irriga*, Botucatu, v. 15, n. 1, p. 10-22, jan./mar. 2010. Disponível em: https://tedit.net/kejqho. Acesso em: 25 maio 2024.

Indo além: Horta comunitária

Com uma horta comunitária, há possibilidade do cultivo de hortaliças que sejam comuns na sua região (considerando o clima e a quantidade de chuva), favorecendo a soberania alimentar na comunidade.

Professor, destaque ao estudantes que as hortaliças podem servir tanto para o consumo próprio quanto para o comércio local. Outra possibilidade é usar as hortaliças produzidas pela horta para abastecimento da cozinha da escola ou de algumas famílias da comunidade escolar.

Etapas

1. Organização

Oriente os estudantes a levar em consideração as necessidades da comunidade e as características climáticas da região em que vocês moram.

Reúna-se em grupos de 3 a 4 estudantes.

Ricardo Teles/Pulsar Imagens

Professores e estudantes da Escola Estadual Madre Cristina, localizada em Mirassol d'Oeste (MT), preparam horta comunitária. Foto de 2024.

2. Pesquisa

Definam qual será a hortaliça que vocês vão cultivar na horta.

3. Desenvolvimento

- Pesquisem quais são os cuidados e as características do cultivo dessa hortaliça, bem como qual é o clima e solo adequado para o plantio.
- Organizem o espaço, as ferramentas necessárias, as sementes ou mudas que serão plantadas e qual deve ser a medida de volume de irrigação e o calendário de rega que resultem nos melhores resultados do plantio da hortaliça escolhida.
- Verifiquem na escola como está sendo usada a água dos bebedouros ou das chuvas e se é possível captá-la e usá-la para irrigar a horta.

4. Produto final

Opção 1: Horta na escola

- Convidem toda a comunidade escolar para a inauguração da horta, isto é, o plantio das primeiras sementes.
- Registrem diariamente ou semanalmente a evolução das mudas.
- Quando as plantas estiverem maduras, façam periodicamente um cronograma de colheita, direcionando a produção para a venda (em uma feira livre ou comércio local) ou para doação (para abastecimento da cozinha da escola ou famílias da comunidade escolar).

Opção 2: Projeto de plantio de berinjela

- Elaborem um documento que contenha as principais características e necessidades de plantio para um produtor local iniciar o cultivo de berinjela. Consultem referências bibliográficas confiáveis para a elaboração do documento e adaptem o conteúdo, conforme necessário, para que seja acessível ao maior número de pessoas.
- Produzam um vídeo explicativo de cada etapa do documento que vocês criaram.
- Avaliem as funções linear e quadrática que modelam as medidas das plantas e definam valores para a medida de volume de água que proporcionarão melhores resultados para os agricultores da região.

Enem e vestibulares

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

1. **(Enem)** Ao analisar os dados de uma epidemia em uma cidade, peritos obtiveram um modelo que avalia a quantidade de pessoas infectadas a cada mês, ao longo de um ano. O modelo é dado por $p(t) = -t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural, variando de 1 a 12, que representa os meses do ano, e $p(t)$ a quantidade de pessoas infectadas no mês t do ano. Para tentar diminuir o número de infectados no próximo ano, a Secretaria Municipal de Saúde decidiu intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia. Foram apresentadas cinco propostas (**I**, **II**, **III**, **IV** e **V**) com diferentes períodos de intensificação das propagandas:

- **I**: $1 \leqslant t \leqslant 2$;
- **II**: $3 \leqslant t \leqslant 4$;
- **III**: $5 \leqslant t \leqslant 6$;
- **IV**: $7 \leqslant t \leqslant 9$;
- **V**: $10 \leqslant t \leqslant 12$;

A sugestão dos peritos é que seja escolhida a proposta cujo período de intensificação da propaganda englobe o mês em que, segundo o modelo, há a maior quantidade de infectados. A sugestão foi aceita.

A proposta escolhida foi a: Alternativa **c**.

a) **I**.
b) **II**.
c) **III**.
d) **IV**.
e) **V**.

2. **(Unisc-RS)** Os gafanhotos são conhecidos por serem capazes de ocasionar danos às plantações. O desmatamento promove uma redução do número de predadores naturais, permitindo o aumento de indivíduos, além das mudanças climáticas que provocam um aumento da temperatura, o que favorece a proliferação de insetos. Um gafanhoto, cuja característica marcante é a presença do último par de pernas alongado e adaptado para saltos, salta para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por $h(x) = -3x^2 + 30x$, em que $h(x)$ é a altura em centímetros e x é a distância horizontal alcançada, também em centímetros. A altura máxima (em cm) atingida pelo gafanhoto no salto é: Alternativa **d**.

a) 55.
b) 25.
c) 100.
d) 75.
e) 50.

3. **(EEAR-SP)** Uma bola é lançada verticalmente para cima. Se sua altura h, em metros, em relação ao solo, t segundos após o lançamento, considerando $t \in [0, 4]$, pode ser calculada por $h = -t^2 + 2t + 8$, então a altura máxima atingida pela bola é _____ m. Alternativa **c**.

a) 7 **b)** 8 **c)** 9 **d)** 10

4. **(Uerj)** O lucro L de uma empresa, com a venda de camisetas, é modelado pela expressão $L(x) = 2\,500x + 10x^2$, sendo x a quantidade de lotes de 100 camisetas.

De acordo com esse modelo, o lucro obtido com 4 000 camisetas, em reais, é igual a:

a) 116 000.
b) 124 000.
c) 132 000.
d) 140 000.

Alternativa **a**.

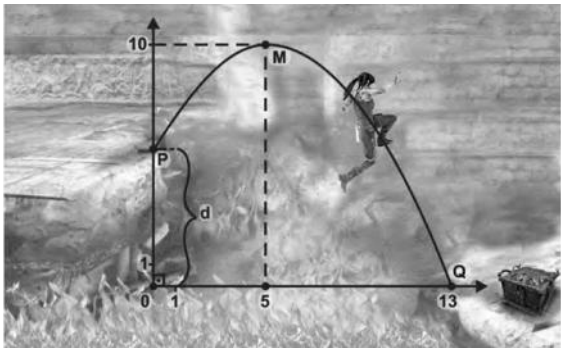
5. **(UEG-GO)** Seja a função $f(x) = -x^2 + x + 6$. Constata-se que o gráfico de $f(x)$ Alternativa **a**.

a) intersecta o eixo das ordenadas no ponto (0, 6).
b) não intersecta o eixo das abscissas.
c) tem como vértice o ponto (−2, 0).
d) representa uma função crescente para $x \in [-2, 3]$.
e) é uma parábola com concavidade voltada para cima.

6. **(UEL-PR)** Lara Croft – a famosa personagem feminina da indústria dos *games* – é uma arqueóloga que explora tumbas, templos e campos. Em uma de suas missões, para abrir a Caixa de Pandora, realiza um salto entre dois rochedos, com desnível d, separados por um poço em chamas. Ao chegar do outro lado, observa que a Caixa de Pandora está protegida por um encantamento que somente cessa ao se conhecer o valor de d. Para ajudá-la, saiba que o salto coincide com um trecho de parábola, no plano cartesiano, que

passa por três pontos: $P = (0, d)$, $M = (5, 10)$ e $Q = (13, 0)$, onde P marca o início do salto, M é o vértice da parábola, e Q delimita o final do trecho, conforme a figura.

Reprodução/UEL-PR, 2022.



Com base no texto e na figura, [indique no caderno] a alternativa que apresenta, corretamente, o valor do desnível d. Alternativa **e**.

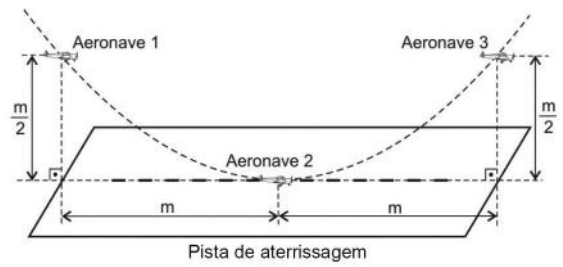
a) $\frac{191}{32}$ **c)** $\frac{193}{32}$ **e)** $\frac{195}{32}$

b) $\frac{192}{32}$ **d)** $\frac{194}{32}$

As imagens não estão representadas em proporção.

7. **(CPCAR-MG)** Em um exercício de aperfeiçoamento de Cadetes da Força Aérea Brasileira, três aeronaves estão posicionadas como indicado na figura a seguir.

Reprodução/CPCAR, 2022.



Em certo momento, as aeronaves **1**, **2** e **3** são vistas de um determinado ponto, seguindo uma trajetória de voo sobre a curva de uma parábola, sendo dadas suas distâncias de referência como a da figura. Considere um plano cartesiano em que:

- as aeronaves **1**, **2** e **3** estão sobre a trajetória de uma única parábola;
- a pista de aterrissagem está no eixo das abscissas;
- a posição de cada aeronave é um ponto (x, y) desse plano, onde $y = f(x)$ é a altura atingida pela aeronave, em km, em relação ao chão; e
- o eixo das ordenadas passa pela aeronave **1**.

A lei da função f que satisfaz as condições estabelecidas na figura é: Alternativa **a**.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2m}\right)(x - m)^2$.

b) $f(x) = \left(\frac{1}{m}\right)(x + m)^2$.

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2m}\right)(x - 2m)^2$.

d) $f(x) = \left(\frac{1}{2m}\right)x^2$.

8. **(Uece)** A comissão de Formatura do Curso de Matemática contratou junto à empresa AIR.BR um avião para transportar um grupo de concludentes, nos seguintes termos:

(I) O avião disponibiliza 90 assentos;

(II) para cada assento ocupado, a empresa recebe R$ 900,00 fixos mais um valor variável v;

(III) o valor variável v é igual a $n \cdot$ R$ 50,00, onde n é o número de assentos desocupados.

Nessas condições, a maior receita que a empresa poderá obter está entre: Alternativa **a**.

a) R$ 140.000,00 e R$ 150.000,00.

b) R$ 170.000,00 e R$ 180.000,00.

c) R$ 150.000,00 e R$ 160.000,00.

d) R$ 160.000,00 e R$ 170.000,00.

9. **(UEL-PR)** Em uma promoção para festas de formatura, um *buffet* cobrará R$ 150,00 por pessoa se exatamente 100 pessoas forem convidadas. Caso a quantidade de convidados ultrapasse 100 pessoas, a tarifa (por pessoa) será reduzida em R$ 0,50 multiplicada pelo número de pessoas que exceder 100.

Considerando que o *buffet* não faz festa para menos de 100 convidados, responda aos itens a seguir. Justifique suas respostas apresentando os argumentos e os cálculos realizados na resolução desta questão.

a) Que quantidade de convidados representa a receita bruta máxima desse *buffet* nessa promoção?

b) Qual a receita bruta desse *buffet* em uma formatura com 160 convidados?

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

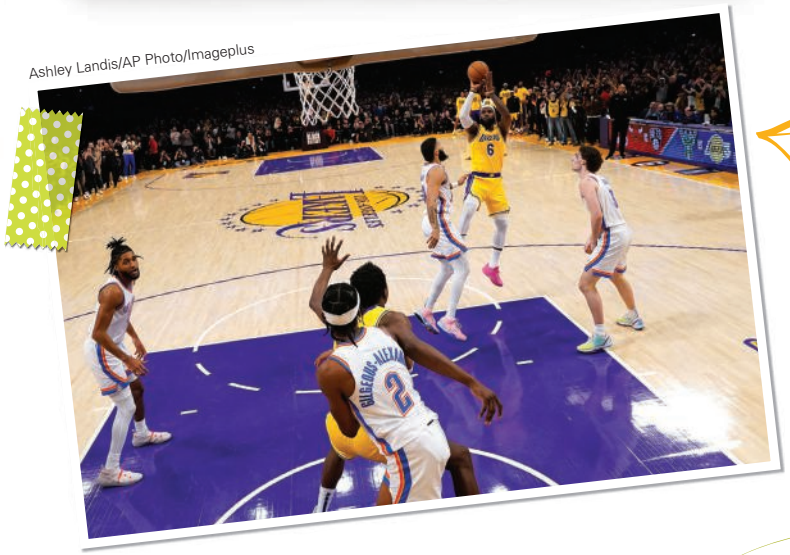
Conteúdos e aprendizagens

Não escreva no livro

As imagens não estão representadas em proporção.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Ao fazer o lançamento de uma bola de basquete a uma cesta, é possível descrever esse movimento utilizando uma função quadrática.



Ashley Landis/AP Photo/Imageplus

Zakir61/Shutterstock

Função quadrática

tem relação com

Equação do 2º grau

$ax^2 + bx + c = 0$

a, b e c devem ser números reais (a, b e $c \in \mathbb{R}$) com $a \neq 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

O coeficiente a define a direção da concavidade e a abertura da parábola.

O coeficiente b define se a parábola intersecta o eixo y na parte crescente, decrescente ou no vértice da parábola.

O coeficiente c indica onde a parábola intersecta o eixo y.

- Compreendo a relação existente entre a equação do 2º grau e a função quadrática?
- Compreendo a relação entre o valor de Δ e a quantidade de zeros reais distintos de uma função quadrática?
- Compreendo a influência dos coeficientes a, b e c em funções dadas por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$?
- Consigo converter representações algébricas de funções quadráticas em representações geométricas, e vice-versa? Respostas pessoais.

UNIDADE 3

Função exponencial

NatalieIme/Shutterstock

Existem milhares de tipos de bactéria, e eles estão presentes em todos os ambientes, inclusive no corpo humano, na água, no ar, no solo, etc. Muitas bactérias não causam mal ao nosso organismo e são úteis, por exemplo, para ajudar a digerir alimentos ou a sintetizar a vitamina B12. Na indústria, alguns tipos de bactéria também são utilizados no tratamento de esgoto e na produção de queijo e de iogurte, bem como na fabricação de medicamentos.

Porém algumas bactérias podem ser maléficas ao nosso organismo e causar doenças, como infecções respiratórias, sífilis, botulismo e leptospirose, entre outras. O cultivo de bactérias é uma técnica desenvolvida para promover, em ambiente controlado, o crescimento de uma população bacteriana para estudos científicos. Apoiados nos resultados obtidos nesses estudos, os médicos podem ser mais assertivos na escolha dos medicamentos e procedimentos adotados para a recuperação de um paciente infectado.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta abertura encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Placa de Petri com cultivo de bactérias *Lactobacillus* em ágar.

- Você já realizou algum exame que necessitasse de uma cultura de bactérias? Resposta pessoal.
- Qual é a importância dos antibióticos no tratamento de infecções bacterianas? Os antibióticos impedem o crescimento de uma população bacteriana e podem cessar a infecção.

CAPÍTULO 1

Potenciação e radiciação

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação-problema 1

Velocidade da luz

Hans Von Manteuffel/Pulsar Imagens

Pôr do sol na praia do Jacaré, em Cabedelo (PB), cidade que abriga o ponto mais oriental das Américas. Foto de 2020.

Embora a luz apresente a maior medida de velocidade conhecida possível ao se propagar no vácuo, isso não acontece instantaneamente, ou seja, ela demora certo intervalo de tempo para chegar aos nossos olhos. A medida de velocidade da luz é cerca de 299 792 458 m/s, ou seja, a cada segundo a luz viaja aproximadamente 300 000 km ou $3 \cdot 10^5$ km ao se propagar no vácuo.

Quando assistimos ao pôr do sol em um fim de tarde, por exemplo, a luz que vemos não é a mesma que está sendo emanada pelo Sol naquele instante, mas a que foi emitida há aproximadamente 8 minutos (o que corresponde à medida de intervalo de tempo que a luz levou para partir do Sol até chegar aos nossos olhos).

a) Quantos quilômetros a luz percorre em 10 segundos? E em 1 minuto?

b) Qual é a medida de distância média entre a Terra e a Lua sabendo que a luz demora aproximadamente 1,3 segundo para percorrer essa medida de distância? A medida de intervalo de tempo de aproximadamente 1,3 segundo corresponde à medida de distância aproximada de $1{,}3 \cdot 300\,000$ km = 390 000 km.

Fique atento

Velocidade da luz e ano-luz são conceitos distintos. A medida de distância que a luz percorre no vácuo em 1 ano, que chamamos de ano-luz, é, aproximadamente, $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km.

a) Em 10 segundos a luz percorre aproximadamente $10 \cdot 300\,000$ km = 3 000 000 km = $3 \cdot 10^6$ km; e em 1 minuto ela percorre aproximadamente $60 \cdot 300\,000$ km = 18 000 000 km = $1{,}8 \cdot 10^7$ km.

Sobre o assunto

No episódio "Fantasmas e viagem no tempo", do *podcast Mais Café*, feito por Nelson Larios em parceria com o *site Humor com Ciência*, é possível fazer uma viagem no tempo ao analisar o céu entendendo a definição de ano-luz, o motivo pelo qual essa unidade de medida foi criada e as viagens no tempo que ela nos proporciona.

MAIS Café: Fantasmas viagem no tempo. [*S. l.*]: YouTube, 2015. *Podcast*. Disponível em: https://tedit.net/e9qvsa. Acesso em: 2 jul. 2024.

Situação-problema 2

Medida de comprimento

a) Procedimento pessoal. Resultado esperado: $\sqrt{22{,}25}$, que não é um número inteiro.

Professor, oriente os estudantes a apresentarem o resultado representado por raiz quadrada, sem calcular o valor aproximado dela.

b) Resposta esperada: Não obteria o mesmo resultado, porque a graduação da trena permitiria obter um número racional como resultado, provavelmente com 1 ou 2 casas decimais.

Jokiewalker/Shutterstock

Perfil de uma escada com medidas de comprimento em destaque. Nela, a medida de comprimento do corrimão corresponde à medida de comprimento da "diagonal", isto é, à medida de comprimento da hipotenusa do triângulo destacado na foto.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Números não inteiros, e muitas vezes números não racionais, estão presentes no dia a dia com uma frequência maior do que imaginamos. Por exemplo, quando medimos comprimentos, áreas e volumes, os resultados "exatos" que obtemos dependem dos instrumentos de medida que utilizamos. Porém, o que ocorreria se fosse possível utilizar a exatidão da Matemática para calcularmos tais medidas?

Na foto, podemos notar o perfil de uma escada em que a base tem medida de comprimento de 4 metros e a medida de altura é 2,5 metros.

a) Qual procedimento você utilizaria para calcular a medida de comprimento do corrimão dessa escada? Qual seria o resultado obtido? Esse resultado é um número inteiro?

b) Se você medisse o comprimento da escada com uma trena, obteria o mesmo resultado? Por quê?

É provável que você tenha utilizado uma **raiz quadrada** para calcular matematicamente a medida de comprimento da escada. Em muitas situações como essa, precisamos usar raízes quadradas para expressar medidas.

c) Agora, utilize uma calculadora ou uma planilha eletrônica para realizar o cálculo e, no caderno, expresse a medida de comprimento aproximada do corrimão da escada, em metros e em centímetros.

$\sqrt{22{,}25}$ m $\simeq$ 4,72 m = 472 cm; logo, aproximadamente 472 cm.

Podcast

Transcrição de áudio

Explorando a operação de potenciação

Você estudou na situação-problema **1** da abertura deste capítulo que a medida de velocidade da luz é aproximadamente $3 \cdot 10^5$ km/s. A potência 10^5 é utilizada nesse caso para simplificar a representação de um produto de fatores iguais.

Professor, neste momento os estudantes podem relembrar e perceber a relação entre o expoente da potência de base 10 e a quantidade de zeros do valor dela.

$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$$

Nesse caso, 10 é a **base** da potência, 5 é o **expoente**, 100 000 é o **valor da potência** e a operação é chamada de **potenciação**. Dez elevado a cinco, ou dez elevado à quinta potência, é como lemos a potência 10^5.

1. c) Podemos testar as primeiras potências formadas por base natural não nula e expoente igual à base. Aumentando a base, o valor da potência aumenta. Nessas condições, a única potência cujo valor é um número natural de 2 algarismos é $3^3 = 27$.

Atividades

Não escreva no livro

1. Responda aos itens a seguir no caderno.

a) Qual é a base, qual é o expoente e qual é a potência na operação $3^4 = 81$? Como lemos essa potência? Base: 3; expoente: 4; potência: 3^4. Lemos: três elevado a quatro ou três elevado à quarta potência.

b) Como lemos as potências 10^3, 10^6, 10^9 e 10^{12}? Dez elevado a três ou dez à terceira potência; dez elevado a seis ou dez à sexta potência; dez elevado a nove ou dez à nona potência; e dez elevado a doze ou dez à décima segunda potência.

c) Qual potência tem base natural não nula, expoente igual à base e o valor da potência um número natural de 2 algarismos?

d) Como representamos, na forma de potência, o quíntuplo do quíntuplo do quíntuplo do número 5? Qual é o valor dessa potência? $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$

e) Descubra um padrão para a sequência de números a seguir. No caderno, registre os próximos 3 termos dessa sequência.

(1, 8, 27, 64, ...)

Exemplo de resposta: Os números que formam a sequência podem ser escritos representados por uma potência de expoente 3: (1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, ...). Próximos 3 termos: 125, 216, 343.

f) Qual é o valor de 10^{11}? 100 000 000 000

2. Conheça alguns cientistas com importância histórica no estudo das potências. Para as pesquisas indicadas nos itens a seguir, lembre-se de utilizar fontes confiáveis de pesquisa, como jornais conhecidos, artigos de universidades, livros etc. É importante ressaltar que fontes confiáveis de pesquisa sempre indicam a origem dos dados apresentados.

a) O matemático, físico e filósofo René Descartes (1596-1650), nascido na França, é considerado um dos pensadores mais importantes e influentes da história do pensamento ocidental. No século XVII, ele começou a usar notações como 4^2 e 4^3 para representar os produtos $4 \cdot 4$ e $4 \cdot 4 \cdot 4$.

Fonte dos dados: RENÉ Descartes: o criador do racionalismo cartesiano sustenta que o homem não pode alcançar a verdade pura através de seus sentidos. *Guia do Estudante*, São Paulo, 16 ago. 2017. Disponível em: https://tedit.net/632l5d. Acesso em: 2 jul. 2024.

Pesquise e anote no caderno outras informações sobre Descartes.

A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Reprodução/Museu do Louvre, Paris, França.

Retrato de René Descartes, de Frans Hals, c. 1649 (óleo sobre tela de 77,5 cm × 68,5 cm).

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Professor, oriente os estudantes na prática da pesquisa proposta. Ressalte a importância de escolher fontes confiáveis e, caso seja necessário, auxilie-os na escolha. Peça que compartilhem os resultados das pesquisas com os colegas. Todos os estudantes anotaram informações similares? Quais informações consideraram relevantes? Por quê?

b) O matemático, engenheiro, físico, inventor e astrônomo Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.), nascido na Itália, é um dos principais cientistas da Antiguidade. Verifique um dos problemas que ele tentou resolver: "Quantos grãos de areia são necessários para encher o Universo?". Pesquise esse problema, as conjecturas de Arquimedes e a relação desses assuntos com a potenciação. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Fonte dos dados: VENTURA, Dalia. Como Arquimedes conseguiu contar todos os grãos de areia que caberiam no Universo. *BBC News Brasil*, São Paulo, 14 fev. 2021. Disponível em: https://tedit.net/94cea1. Acesso em: 2 jul. 2024.

c) Pesquise também outras descobertas de Arquimedes.
A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Um estudioso (anteriormente catalogado como *Arquimedes pensativo*), de Domenico Fetti, 1620 (óleo sobre tela de 98 cm × 73,5 cm).

Reprodução/Pinacoteca dos Mestres Antigos, Dresden, Alemanha.

Formalizando a operação de potenciação

Potência com expoente natural

Dados um número real positivo a e um número natural n, com $n \geqslant 2$, chamamos **potência** de **base** a e **expoente** n o número real a^n, que é igual ao produto de n fatores iguais a a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Para $n = 1$, consideramos, por definição, que $a^1 = a$, pois não há produto com um único fator.

Fique atento

Dados um número real positivo a e um número natural n, com $n \geqslant 2$, a definição indutiva de a^n é dada por:

- $a^1 = a$
- $a^{n+1} = a^n \cdot a$

Por exemplo:

- $a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$
- $a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$

Professor, durante a abordagem do *Fique atento*, destaque o caráter indutivo do processo de análise matemática usado. Isso ajudará os estudantes a compreenderem como padrões e tendências podem ser identificados a partir de dados específicos.

Acompanhe a seguir alguns exemplos.

a) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

b) $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

c) $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

e) $9^1 = 9$

f) $(0{,}5)^3 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$

Dados os números reais positivos a e b e os números naturais não nulos m e n, valem as propriedades a seguir.

- Produto de potência de mesma base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

  Essa igualdade é verdadeira, pois, em ambos os membros da igualdade, temos o produto de $m + n$ fatores iguais a a.

  $$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ fatores}} = a^{m+n}$$

  Analise um exemplo numérico.

  $$2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 2^{3+2}$$

Essa propriedade continua válida para qualquer quantidade de fatores. Para quaisquer números naturais m_1, m_2, ..., m_n, temos:

$$\underbrace{a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \ldots \cdot a^{m_n}}_{n \text{ fatores}} = a^{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

Exemplo: $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 = 2^{2+3+5} = 2^{10}$.

Reflita: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ fatores}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m-n \text{ fatores}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ fatores}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}} =$

$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-n \text{ fatores}} = a^{m-n}$

Fique atento

A propriedade do produto de potência de mesma base também pode ser chamada de **propriedade fundamental da potenciação**.

- Divisão de potências de mesma base: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, com $m > n$.

  Exemplo: $\frac{7^5}{7^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7^3 = 7^{5-2}$.

- Potência de potência: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

  Exemplo: $(3^2)^7 = \underbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 3^2}_{7 \text{ fatores}} = 3^{2 \cdot 7} = 3^{14}$.

Fique atento

Na propriedade fundamental da potenciação, se todos os expoentes forem iguais ($m_1 = m_2 = \ldots = m_n$), obtemos a propriedade da potência de potência. Logo, essa propriedade é consequência direta da propriedade fundamental da potenciação.

- Potência do produto: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

  Exemplo: $(3 \cdot 5)^2 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5^2$.

- Potência do quociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

  Exemplo: $\left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{9}{5} \cdot \frac{9}{5} = \frac{9 \cdot 9}{5 \cdot 5} = \frac{9^2}{5^2}$.

Potência de expoente nulo

Para definir o valor de a^0, vamos considerar que a propriedade fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ continua válida quando m ou n (ou ambos) sejam iguais a 0, considerando $a \neq 0$.

Para que a igualdade $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$ seja verdadeira, é preciso ter $a^0 \cdot a = a$. Portanto, a única definição possível é $a^0 = 1$ para qualquer valor de a não nulo.

Por exemplo, $5^0 = 1$ e $(-3{,}2)^0 = 1$.

Não escreva no livro

Reflita

Represente no caderno a potência $\frac{a^m}{a^n}$, com $m > n$, como um produto de fatores iguais e demonstre a propriedade da divisão de potências de mesma base.

Professor, ao abordar o *Fique atento* sobre a propriedade da potência de potência, é importante destacar para os estudantes o caráter dedutivo do raciocínio usado para definir essa propriedade a partir da propriedade fundamental da potenciação.

Reflita

Demonstre no caderno as 3 últimas propriedades de potência apresentadas.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Potência com expoente inteiro

Como atribuir um significado à potência a^n (com a real positivo) quando n é um número inteiro que pode ser positivo, negativo ou nulo?

Isso precisa ser feito de modo que seja mantida a propriedade fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Assim, dado qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, para $a \neq 0$, devemos ter:

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

Portanto, $a^{-n} \cdot a^n = 1$, ou seja: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Com isso, estendemos o conceito de potência do número real positivo a, com expoentes inteiros quaisquer, mantendo a propriedade fundamental.

Fique atento

Lembre-se de que $\mathbb{N}$ é o símbolo que usamos para representar o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Quando escrevemos $n \in \mathbb{N}^*$, estamos considerando todos os números n que pertencem ($\in$) ao conjunto dos números naturais não nulos ($\mathbb{N}^*$). Outro conjunto numérico é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+^*$ é o conjunto dos números reais não nulos e não negativos, ou seja, apenas os números reais positivos. As potências estão sendo definidas aqui considerando a base $a \in \mathbb{R}_+^*$).

Analise alguns exemplos de potências com expoentes inteiros negativos.

a) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

Inverso de um número $a \neq 0$

Professor, no *Reflita*, os estudantes devem aplicar o raciocínio lógico matemático de dedução para, a partir da definição de inverso de um número e das propriedades do zero responder ao questionamento.

Note que $a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$, ou seja, $a \cdot a^{-1} = 1$, com $a \neq 0$.

O número $a^{-1} = \frac{1}{a}$ é chamado de **inverso de *a***.

Não escreva no livro

Reflita

O número 0 não tem inverso. Por quê?

O número 0 não tem inverso porque não existe divisão por 0.

Potência com expoente racional

Podemos dar significado à potência a^m, com a real positivo, quando $m = \frac{p}{q}$ é um número racional (em que p e q são números inteiros e $q \neq 0$), de modo que continue válida a propriedade fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Inicialmente, acompanhe como podemos definir, por exemplo, $2^{\frac{1}{2}}$, mantendo a propriedade fundamental.

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2$$

Assim, $2^{\frac{1}{2}}$ é um número positivo cujo quadrado é igual a 2. Portanto, pela definição de raiz quadrada, temos:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \text{ pois } \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

De modo geral, partindo da propriedade fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ou da propriedade de potência de potência $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ e fazendo $m = \frac{1}{n}$, obtemos:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ fatores}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}} = a^{n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)} = a^{\frac{n}{n}} = a$$

Ou seja, $a^{\frac{1}{n}}$ é o número real positivo cuja enésima potência é igual a a. Pela definição de raiz, esse número corresponde a $\sqrt[n]{a}$ (lemos: raiz enésima de a). Logo:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2.$$

Acompanhe a seguir alguns exemplos.

a) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^1} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1} = \sqrt{9} = 3$

c) $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$

Podemos verificar também que:

$$2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = \left(\sqrt[3]{2}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right) = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{2^2}$$

Portanto, $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Professor, se julgar oportuno, peça aos estudantes que criem exemplos próprios.

De modo geral, preservando a propriedade fundamental da potenciação ou a propriedade potência de potência e fazendo $a^{\frac{m}{n}}$, obtemos:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{m}{n}}}_{n \text{ fatores}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\ldots+\frac{m}{n}} = a^{\left(\frac{m}{n}\right) \cdot n} = a^m$$

Ou seja, $a^{\frac{m}{n}}$ é um número real positivo cuja enésima potência é igual a a^m. Pela definição de raiz, esse número é $\sqrt[n]{a^m}$ (lemos: raiz enésima de a^m). Logo:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+^*, m, n \in \mathbb{N} \text{ e } m \geqslant 2 \text{ e } n \geqslant 2.$$

Acompanhe a seguir alguns exemplos.

a) $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$

c) $\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt[3]{5}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

Professor, se julgar oportuno, peça aos estudantes que criem exemplos próprios.

Não escreva no livro

Reflita

Demonstre no caderno a igualdade $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$ e $n \geqslant 2$, e $p \in \mathbb{N}^*$.

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ e $\sqrt[np]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}}$, logo $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

Potência com expoente irracional

Vamos agora dar uma ideia de como caracterizar, por exemplo, a potência $2^{\sqrt{2}}$. Sabendo que $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$, podemos utilizar as aproximações racionais desse número, que são 1; 1,4; 1,41; 1,414; ... Os matemáticos já provaram que, quanto mais próximo estiver o número racional r de $\sqrt{2}$, mais próximo estará 2^r de $2^{\sqrt{2}}$.

Fique atento

Note que, para $a \in \mathbb{R}_+^*$, temos que a^x é sempre um número real positivo.

Usando uma calculadora que mostra 6 dígitos após a vírgula, podemos obter a aproximação da raiz quadrada de 2.

$$2^1 = 2$$
$$2^{1,4} \simeq 2{,}639015$$
$$2^{1,41} \simeq 2{,}657371$$
$$2^{1,414} \simeq 2{,}664749$$
$$\vdots$$
$$2^{\sqrt{2}} \simeq 2{,}665144$$

Professor, destaque aos estudantes que, neste caso, as reticências (...) foram usadas para representar um número irracional que tem infinitas casas decimais, mas elas também são usadas em outras notações matemáticas, por exemplo para representar a continuação de um padrão em uma sequência ou na representação de dízimas periódicas (como 0,333... e 0,16161616...).

Obtemos assim, por aproximações de expoentes racionais, aproximações para o valor da potência a^r, com r irracional e a real positivo.

Potência com expoente real

Lembrando que a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais resulta no conjunto dos números reais (denotamos $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$), chegamos às potências com expoentes reais mantendo as propriedades já mencionadas.

Analise a seguir alguns exemplos de potências com expoentes reais.

$3^{\frac{5}{6}}$ $\quad 2^{\sqrt{3}}$ $\quad 7^{\pi}$ $\quad \left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$ $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$ $\quad 5^4$ $\quad 7^{-2}$ $\quad 8^0$

Observação: Podemos ampliar a definição de potência com expoente n real considerando a base $a \in \mathbb{R}$. Porém, quando $a = 0$ ou $a < 0$, algumas potências de base a estão definidas em $\mathbb{R}$ e outras não. Acompanhe alguns exemplos.

Professor, se julgar oportuno, peça aos estudantes que justifiquem os resultados dos exemplos a seguir.

a) $0^3 = 0$

b) $0^{-2} = \frac{1}{0}$, que é uma indeterminação.

c) $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

d) $(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$

Fique atento

Dizemos que a potência 0^0 (ou seja, $a = 0$ e $n = 0$ simultaneamente) é uma indeterminação em Matemática.

7. Temos que $2^{11} = 2\,048$ e $2^{12} = 4\,096$. Então, $2^{11} < 2\,560 < 2^{12}$ e a quantidade de *bits* deve passar de 8 para 12, pois com 11 *bits* a quantidade de 2 560 informações não é atingida. Alternativa **b**.

Atividades

Não escreva no livro

3. No caderno, calcule em $\mathbb{R}$ o valor de cada potência com expoente inteiro.

a) 3^4 $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

b) $(-2)^3$ $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

c) $(-2)^6$ $(-2)^6 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 64$

d) 0^5 $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

e) 5^0 $5^0 = 1$

f) $\left(\sqrt{2}\right)^2$ $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 2^1 = 2$

g) $\left(\sqrt{7}\right)^3$ $\left(\sqrt{7}\right)^3 = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$

h) 6^{-2} $6^{-2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

i) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}$ $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3}$

4. No caderno, calcule o valor de cada potência ou expressão com potência de base 10.

a) 10^9 $10^9 = 1\,000\,000\,000$

b) 10^{-4} $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$

5. No caderno, escreva os números indicados usando potências de base 10.

a) 100 000 $100\,000 = 10^5$

b) 0,00001 $0{,}00001 = \frac{1}{100\,000} = 10^{-5}$

6. Reduza a uma única potência e registre o resultado no caderno.

a) $7^4 \cdot 7^2$ $7^4 \cdot 7^2 = 7^{4+2} = 7^6$

b) $5^9 : 5^2$ $5^9 : 5^2 = 5^{9-2} = 5^7$

c) $(2^5)^3$ $(2^5)^3 = 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}$

d) $5^{(2^3)}$ $5^{(2^3)} = 5^{2 \cdot 2 \cdot 2} = 5^8$

e) $\frac{a^6}{a}$, com $a \neq 0$ $\frac{a^6}{a} = a^{6-1} = a^5$

f) $\frac{2^7 \cdot 2^3}{2^{-2}}$ $\frac{2^{7+3}}{2^{-2}} = 2^{10-(-2)} = 2^{12}$

7. **(Enem)** Computadores utilizam, por padrão, dados em formato binário, em que cada dígito, denominado de *bit*, pode assumir dois valores (0 ou 1). Para representação de caracteres e outras informações, é necessário fazer uso de uma sequência de *bits*, o *byte*. No passado, um *byte* era composto de 6 *bits* em alguns computadores, mas atualmente tem-se a padronização que o *byte* é um octeto, ou seja, uma sequência de 8 *bits*. Esse padrão permite representar apenas 2^8 informações distintas.

Se um novo padrão for proposto, de modo que um *byte* seja capaz de representar pelo menos 2 560 informações distintas, o número de *bits* em um *byte* deve passar de 8 para:

a) 10.

b) 12.

c) 13.

d) 18.

e) 20.

Professor, espera-se que os estudantes compreendam que precisam de 12 *bits* em cada *byte* para ter pelo menos 2 560 informações, pois com 11 *bits* essa quantidade não seria atingida.

Formalizando o conceito de notação científica

Vídeo

Analise novamente, na situação-problema **1** da abertura deste capítulo, como foram registradas a medida de velocidade da luz (aproximadamente $3 \cdot 10^5$ km/s) e a medida de distância que a luz percorre em 1 ano (aproximadamente $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km) e o que esses registros têm em comum. Ambos os números estão indicados em **notação científica**.

Esse tipo de notação permite escrever números usando potências de base 10, com a vantagem de fornecer rapidamente a ideia da ordem de grandeza dos números que, se fossem escritos por extenso, não dariam essa informação de modo tão imediato. A maior aplicação da notação científica é a representação de números muito grandes (na Astronomia, como nos exemplos citados) ou muito pequenos (na Química, por exemplo).

Um número expresso em notação científica está escrito como o produto de 2 números reais: um número real pertencente ao intervalo [1, 10[e uma potência de base 10.

Professor, analisando a maneira como os números são escritos em notação científica nos exemplos dados, proponha aos estudantes que reflitam sobre quais outros números representados no cotidiano deles geralmente aparecem em notação científica.

Professor, na atividade **10**, se julgar oportuno, organize a turma em grupos de 3 a 5 estudantes e peça que realizem uma pesquisa sobre o processo de descoberta de uma das medidas apresentada nos itens a seguir. Oriente-os na escolha de fontes confiáveis de pesquisa. Promova uma roda de conversa para que os grupos possam socializar as informações que encontraram com os colegas.

Analise a seguir alguns exemplos de como escrever números em notação científica.

a) $300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 10^2$

b) $0{,}0052 = 5{,}2 \cdot 0{,}001 = 5{,}2 \cdot 10^{-3}$

c) $32{,}45 = 3{,}245 \cdot 10 = 3{,}245 \cdot 10^1$

Professor, se julgar oportuno, organize a turma em grupos de 3 a 5 estudantes e peça que realizem uma pesquisa sobre o processo de descoberta da medida de comprimento aproximada do contorno da Terra na linha do equador e/ou da medida de massa do átomo de oxigênio. Oriente-os na escolha de fontes confiáveis de pesquisa.

d) Medida de comprimento aproximada do contorno da Terra na linha do equador:

$$40\,076 \text{ km} \simeq 4 \cdot 10^4 \text{ km}$$

e) Medida de massa de um átomo de oxigênio:

$$0{,}000000000000000000000027 \text{ g} = 2{,}7 \cdot 10^{-23} \text{ g}$$

Atividades

Não escreva no livro

9. d) $1{,}6 \cdot 10^{-3} = 1{,}6 \cdot 0{,}001 = 0{,}0016$

8. Escreva no caderno cada número em notação científica.

a) 500 $500 = 5 \cdot 100 = 5 \cdot 10^2$ **b)** 0,00000025 $0{,}00000025 = 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ **c)** 20,39 $20{,}39 = 2{,}039 \cdot 10^1$ **d)** 0,8 $0{,}8 = 8 \cdot 10^{-1}$

9. No caderno, escreva os números registrados em notação científica com todos os algarismos.

a) $8 \cdot 10^4$ $8 \cdot 10^4 = 8 \cdot 10\,000 = 80\,000$ **b)** $5 \cdot 10^{-2}$ $5 \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 0{,}01 = 0{,}05$ **c)** $3{,}52 \cdot 10^5$ $3{,}52 \cdot 10^5 = 3{,}52 \cdot 100\,000 = 352\,000$ **d)** $1{,}6 \cdot 10^{-3}$

10. Escreva no caderno cada medida aproximada usando notação científica.

a) Medida de distância média entre o Sol e Marte: aproximadamente 227 900 000 km.
227 900 000 km = $2{,}279 \cdot 10^8$ km; logo, aproximadamente $2{,}279 \cdot 10^8$ km.

b) Medida de distância média entre o Sol e Júpiter: aproximadamente 778 300 000 km.
778 300 000 km = $7{,}783 \cdot 10^8$ km; logo, aproximadamente $7{,}783 \cdot 10^8$ km.

c) Medida de massa de um elétron: aproximadamente 0,000000000000000000000000000911 g.
0,000000000000000000000000000911 g = $9{,}11 \cdot 10^{-28}$ g; logo, aproximadamente $9{,}11 \cdot 10^{-28}$ g.

11. (Enem) A gripe é uma infecção respiratória aguda de curta duração causada pelo vírus *influenza*. Ao entrar no nosso organismo pelo nariz, esse vírus multiplica-se, disseminando-se para a garganta e demais partes das vias respiratórias, incluindo os pulmões.

O vírus *influenza* é uma partícula esférica que tem um diâmetro interno de 0,00011 mm.

Disponível em: www.gripenet.pt. Acesso em: 2 nov. 2013 (adaptado).

Em notação científica, o diâmetro interno do vírus *influenza*, em mm, é: 0,00011 mm = $1{,}1 \cdot 10^{-4}$ mm; logo, alternativa **d**.

a) $1{,}1 \times 10^{-1}$. **b)** $1{,}1 \times 10^{-2}$. **c)** $1{,}1 \times 10^{-3}$. **d)** $1{,}1 \times 10^{-4}$. **e)** $1{,}1 \times 10^{-5}$.

12. A sífilis é uma infecção sexualmente transmissível (IST) causada pela bactéria *Treponema pallidum*. A principal via de transmissão dessa bactéria é por contato sexual. Ela também pode ser transmitida para o feto durante o período de gestação de uma genitora com sífilis não tratada ou tratada inadequadamente.

Infográfico clicável

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde. Sífilis. Portal *gov.br*, Brasília, DF, [202-?]. Disponível em: https://tedit.net/avzm6p. Acesso em: 2 jul. 2024.

Kateryna Kon/Shutterstock

Ilustração representando a bactéria *Treponema pallidum*. Imagem sem proporção e cores fantasia.

a) Uma bactéria *Treponema pallidum* tem formato de espiral e medida de comprimento de aproximadamente 5 μm. No caderno, escreva essa medida em metros, usando notação científica. 5 μm = $5 \cdot 10^{-6}$ m; aproximadamente $5 \cdot 10^{-6}$ m.

Fonte dos dados: MORRIS, Sheldon R. Sífilis. *Manual MSD*, [*s. l.*], jan. 2023. Disponível em: https://tedit.net/exzpzp. Acesso em: 2 jul. 2024.

b) Pesquise em artigos acadêmicos, revistas científicas e reportagens de jornais: Qual é o principal tratamento da sífilis? E qual é a melhor maneira de se prevenir durante o contato sexual?
A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Professor, a abordagem do texto para as atividades **14** a **16** é propícia para fomentar a discussão sobre o aumento populacional e as consequências desse crescimento para o uso e acesso aos recursos naturais, como a água.

c) Na década de 2010, o Ministério da Saúde relatou uma epidemia de sífilis no Brasil, com o aumento da quantidade de infectados por ano em relação ao ano anterior. Pesquise dados atuais sobre a sífilis no Brasil e verifique se a quantidade de infectados por ano continua aumentando e, em caso positivo, quais atitudes podem ser tomadas para conscientizar a população do problema.

Fonte dos dados: WENTZEL, Mariana. Como se proteger da epidemia de sífilis no Brasil? *BBC News Brasil*, São Paulo, 24 out. 2016. Disponível em: https://tedit.net/barokv. Acesso em: 2 jul. 2024.

A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Texto para a próxima atividade.

Com três minúsculas partículas de poeira coletadas do enorme asteroide Itokawa, de **500 metros** de comprimento, uma equipe internacional de pesquisadores obteve descobertas que podem salvar a Terra caso alguma pedra espacial possa estar em rota de colisão com o planeta.

[...] Segundo o estudo, o asteroide que fica a **2 milhões de km** da Terra era difícil de ser destruído.

PARTÍCULAS de asteroide podem ajudar a salvar a Terra em caso de colisão. *Galileu*, São Paulo, 24 jan. 2023. Disponível em: https://tedit.net/n13rxb. Acesso em: 2 jul. 2024.

13. Converta o primeiro dado destacado na notícia para quilômetros e o segundo para metros.

Texto para as atividades **14** a **16**.

População mundial deve chegar a 9,7 bilhões de pessoas em 2050, diz relatório da ONU

A população mundial deve crescer em 2 bilhões de pessoas nos próximos 30 anos, passando dos atuais 7,7 bilhões de indivíduos [em 2019] para 9,7 bilhões em 2050, de acordo com um novo relatório das Nações Unidas lançado nesta segunda-feira [17 de junho de 2019].

O [relatório] *Perspectivas mundiais de população 2019: destaques*, que é publicado pela Divisão de População do Departamento da ONU de Assuntos Econômicos e Sociais [...] concluiu que a população mundial poderia alcançar o seu pico por volta do final do atual século, chegando a quase 11 bilhões de pessoas em 2100.

POPULAÇÃO mundial deve chegar a 9,7 bilhões de pessoas em 2050, diz relatório da ONU. *Nações Unidas Brasil*, Brasília, DF, 17 jun. 2019. Disponível em: https://tedit.net/jjww7k. Acesso em: 2 jul. 2024.

14. Pensando que o consumo médio diário de água por pessoa seja de 150 litros de água, quantos litros de água serão necessários, por dia, para abastecer toda a população em 2050 de acordo com as projeções da ONU? Use uma calculadora e, no caderno, expresse essa quantidade em notação científica.

Podcast Transcrição de áudio

Aproximadamente $5{,}3 \cdot 10^{14}$ L.

15. De acordo com a ONU, em 2022 a população mundial atingiu a quantidade de 8 bilhões de pessoas. O consumo mundial anual de água em 2100 será quantos por cento maior do que em 2022? Aproximadamente 37,5% maior.

Fonte dos dados: POPULAÇÃO mundial atinge 8 bilhões de pessoas. *Nações Unidas Brasil*, Brasília, DF, 15 nov. 2022. Disponível em: https://tedit.net/0p6fik. Acesso em: 2 jul. 2024.

16. Converse com os colegas e responda no caderno: Além do aumento no consumo de água, quais outros impactos o crescimento populacional pode causar no planeta? Se necessário, pesquise o assunto. Resposta pessoal.

Professor, os recursos disponíveis no *site* mencionado no *Sobre o assunto* podem ser utilizados para promover o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT102**.

Sobre o assunto

O *site* https://tedit.net/pi556i (acesso em: 2 jul. 2024.) apresenta diversas informações estatísticas, que são atualizadas em tempo real de acordo com coletas feitas rotineiramente em organizações nacionais e internacionais, como a Divisão de População das Nações Unidas, a Organização Mundial da Saúde (OMS), a Organização das Nações Unidas para a Alimentação e a Agricultura (FAO) e a Organização de Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).

13. $500 : 1\,000 = 0{,}5$; ou seja, 0,5 quilômetro; $1\,000 \cdot 2\,000\,000 = 2\,000\,000\,000$; ou seja, 2 000 000 000 metros.

Professor, proponha aos estudantes uma conversa sobre os sistemas de medição e a importância deles na sociedade. Tudo o que consumimos passa por um sistema de medição, que pode ser considerado simples (como medir a massa de um produto) ou complexo (como medir compostos de um medicamento), dependendo de cada situação. Além disso, esses sistemas podem ter maior ou menor grau de precisão e de incerteza sistemática.

Algarismos significativos em medidas

As imagens não estão representadas em proporção.

Medir é, essencialmente, comparar grandezas de mesma natureza, a fim de atribuir valores quantitativos a grandezas físicas. Contudo, tratando-se de objetos reais, essa comparação de grandezas dificilmente é realizada de modo absoluto, perfeito e sem que ocorram algumas imprecisões. Essas imprecisões definem o que chamamos de erros de uma medida.

Erros durante a medição podem ser causados pelo operador, isto é, pela pessoa que realiza a medição (falta de atenção ou experiência, por exemplo), sistemáticos (uma régua que não esteja corretamente graduada, por um erro de fabricação, por exemplo) ou inesperados (cujas causas precisam ser investigadas caso a caso; um exemplo seria a dilatação térmica de uma régua metálica fazer com que a medida de distância entre as graduações seja maior em dias quentes do que em dias frios). Independentemente do quanto esses erros sejam controlados e minimizados, qualquer instrumento de medida tem um limite de precisão, que determina o erro instrumental.

Erros instrumentais nunca podem ser eliminados de medições. Em geral, é possível utilizar um instrumento mais preciso quando existe a necessidade de uma medida mais precisa (uma balança de cozinha, por exemplo, tem uma precisão maior do que uma balança de chão e, portanto, um erro instrumental menor). Muitos cientistas trabalham no desenvolvimento de instrumentos que meçam massa, comprimento e energia, entre outras grandezas, com precisões cada vez maiores, para que possam ser utilizados em diversos campos de pesquisa.

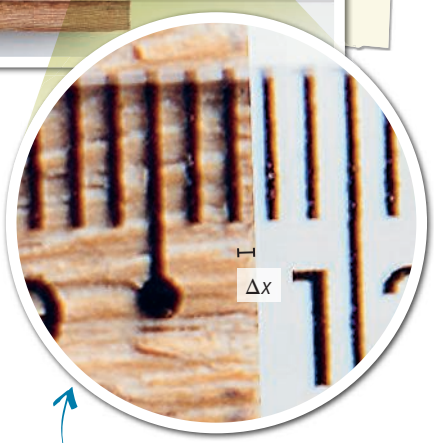
Analise a medição representada nas imagens a seguir.

Pessoa utilizando uma régua para medir o comprimento de uma peça de madeira.

Adriana Latorre/Arquivo da editora

Recorte da visão superior da régua indicando a medida de comprimento da peça.

Adriana Latorre/Arquivo da editora



O valor de Δx pode ser estimado pelo operador.

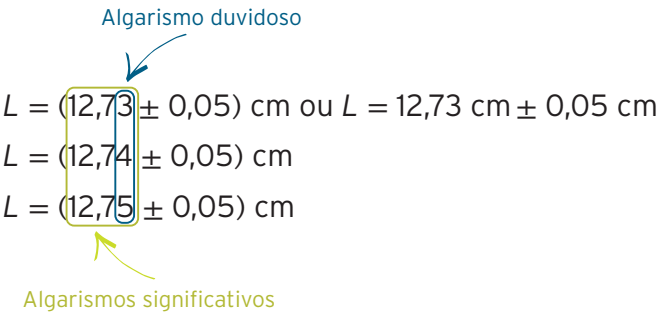
O operador que realizou a medição dessa peça de madeira pode considerar que a medida de comprimento dela está entre 12,7 cm e 12,8 cm. Assim, a medida de comprimento da peça, em centímetros, é a soma de 12,7 cm e um Δx (lemos: delta x) cujo valor é duvidoso ou estimado.

Assim, nessa medida há 4 algarismos significativos: os 3 algarismos exatos da medida (neste caso, os algarismos 1, 2 e 7) e 1 algarismo duvidoso, que é estimado pelo operador (que poderia ser 3, 4 ou 5, por exemplo).

Além dos algarismos significativos, o operador precisa indicar um valor associado à estimativa do erro. Esse valor é chamado de **incerteza sistemática**.

Podemos usar diferentes definições de incerteza sistemática para diferentes contextos. Para o caso de medições feitas com instrumentos de medida graduados, como a régua utilizada no exemplo anterior, podemos definir a incerteza sistemática como a metade da menor divisão do instrumento de medida. Assim, como a menor divisão da régua equivale à medida de comprimento de 0,1 cm, a incerteza da medição do exemplo é metade dessa medida.

Sendo L a medida de comprimento que foi obtida pelo operador e escolhidas algumas possibilidades de algarismo duvidoso, temos as indicações da incerteza que podem ser feitas.



Note que cada exemplo de medida possível apresentado tem 4 algarismos significativos, sendo um deles o algarismo duvidoso.

Considerando o número que expressa o resultado de uma medição, os algarismos significativos são contados, da esquerda para a direita, a partir do primeiro algarismo diferente de 0. Os zeros à esquerda do primeiro algarismo exato não são significativos – são usados para acerto de unidades de medida ou múltiplos e submúltiplos –, e os zeros à direita são significativos. Analise as medidas a seguir.

(1,02 ± 0,05) cm (1,020 ± 0,005) cm

Essas medidas são diferentes: a 1ª medida tem 3 algarismos significativos, sendo o 2 o algarismo duvidoso; a 2ª medida é mais precisa do que a 1ª medida e tem 4 algarismos significativos, sendo o 0 o algarismo duvidoso.

Considere mais um exemplo.

(0,0394 ± 0,0005) m (3,94 ± 0,05) cm

Nesse exemplo, ambas as medidas têm 3 algarismos significativos, sendo o 4 o algarismo duvidoso, e a mesma precisão. Elas estão apenas indicadas em diferentes unidades de medida.

Professor, ressalte aos estudantes que, na atividade **17**, a quantidade de algarismos significativos da medida do item **d** é igual ao da medida do item **c**, pois (1,00 ± 0,05) cm = (0,0100 ± 0,0005) m.

Atividades

Não escreva no livro

17. Indique no caderno a quantidade de algarismos significativos de cada medida dada.

a) (3,1 ± 0,1) °C 2 algarismos significativos.

b) (64 ± 2) km/h 2 algarismos significativos.

c) (1,00 ± 0,05) cm 3 algarismos significativos.

d) (0,0100 ± 0,0005) m 3 algarismos significativos.

18. Imagine que você mediu o comprimento de um objeto usando uma régua graduada apenas em centímetros (a medida de comprimento da menor divisão dessa régua é 1 cm). Nessas condições, você notou que a medida de comprimento do objeto é maior do que 15 cm, mas pouco menor do que 16 cm. Supondo que a medida de comprimento desse trecho maior do que 15 cm foi estimada por você como 0,8 centímetro, qual é a maneira correta de indicar a medida de comprimento desse objeto e qual é o algarismo duvidoso dela? (15,8 ± 0,5) cm, sendo o algarismo 8 o duvidoso.

Explorando a operação de radiciação

Você estudou que, para calcular a medida de área A de uma região quadrada com lados de medida de comprimento ℓ, basta multiplicar essa medida de comprimento por ela mesma: $A = \ell \cdot \ell = \ell^2$. Por exemplo, se a medida de comprimento do lado de uma região quadrada é 10 cm, então a medida de área é $A = 10\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 100\text{ cm}^2$.

Também estudou que, se conhecermos a medida de área de uma região quadrada, para calcular a medida de comprimento dos lados dela usamos o conceito de **raiz quadrada**.

Quando pensamos no valor da raiz quadrada de um número real positivo, estamos buscando um número real positivo que, multiplicado por ele mesmo, resulte no número dado. Por exemplo, qual é o valor da raiz quadrada de 64 (representamos por $\sqrt{64}$)? Nesse caso, estamos buscando um número real positivo que, multiplicado por ele mesmo, resulte em 64. Apenas o número 8 satisfaz essa relação, assim: $\sqrt{64} = 8$.

Fique atento

Extrair a raiz é o mesmo que calcular o valor dela.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Copie cada item no caderno e complete com os valores que faltam.

a) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = \blacksquare$ e $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{\blacksquare} = \blacksquare$. 10; 100; 10.

b) $\sqrt{\blacksquare} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot \blacksquare = \blacksquare$ e $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{\blacksquare} = \blacksquare$. 9; 4; 12; 144; 12.

c) $\sqrt{\blacksquare} \cdot \sqrt{49} = 1 \cdot \blacksquare = \blacksquare$ e $\sqrt{\blacksquare \cdot 49} = \sqrt{49} = \blacksquare$. 1; 7; 7; 1; 7.

d) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{\blacksquare} = \blacksquare \cdot 4 = \blacksquare$ e $\sqrt{25 \cdot \blacksquare} = \sqrt{\blacksquare} = 20$. 16; 5; 20; 16; 400.

Professor, na atividade **2** do boxe *Explore para descobrir* destaque que eles aplicaram o raciocínio matemático lógico indutivo para fazer a suposição sobre a multiplicação de raízes quadradas.

2. Com um colega, verifique os cálculos que vocês fizeram em cada item e no caderno escreva o que descobriram. Considerando esses exemplos, escreva também uma conjectura (uma suposição) sobre a multiplicação de raízes quadradas. Resposta pessoal.

Fique atento

Nesta atividade você fez apenas uma suposição sobre a multiplicação de raízes quadradas considerando os cálculos dos exemplos dados. Para chegar a uma conclusão formal, é necessário demonstrar a validade da conjectura para quaisquer raízes quadradas, o que será feito no tópico "Formalizando a operação de radiciação".

Um pouco da história da radiciação

A preocupação com a obtenção do valor da raiz quadrada já existia há 4 mil anos na Babilônia, no Egito, na Índia e em outras regiões. Os árabes foram os responsáveis por levar o conceito de raiz quadrada para o Ocidente. Para eles, a partir de um número (raiz), crescia um quadrado (árvore) e disso surgiu a nomenclatura **raiz**.

Professor, ressalte a importância dos árabes no desenvolvimento de saberes matemáticos e na sua difusão para o Ocidente. Se considerar pertinente, explore mais as contribuições árabes para a Matemática ressaltando que, apesar da influência europeia, a Matemática é uma ciência que foi desenvolvida por muitas culturas.

Embora o cálculo do valor de raízes quadradas já ocorresse há alguns milênios, o símbolo $\sqrt{x}$ (sem a linha superior) foi utilizado pela primeira vez em 1525, pelo matemático alemão Christoff Rudolff (1499-1543). Esse símbolo lembra o formato da letra **r**, primeira letra da palavra latina *radix*, que significa "raiz".

No século seguinte, a simbologia da raiz quadrada foi adaptada e passou a incluir a linha superior, como conhecemos atualmente $\sqrt{x}$.

Penta Springs Limited/Alamy/Fotoarena

Christoff Rudolff usou o símbolo para indicar a raiz pela primeira vez no livro *Die Coss*, escrito por ele em 1525.

Fonte dos dados: NUNES, Ronaldo *et al.* O símbolo que indica a raiz quadrada sempre foi assim? Quem o criou? *Nova Escola*, São Paulo, 1ª nov. 2019. Disponível em: https://tedit.net/slth3t. Acesso em: 2 jul. 2024.

Formalizando a operação de radiciação

Como você estudou, a raiz quadrada de um número real positivo é o número real positivo que, multiplicado por ele mesmo, resulta no número dado. Podemos ampliar essa definição para outras raízes.

Dados um número real positivo ou nulo a e um número natural n, com $n \neq 0$, chamamos de **raiz enésima aritmética de *a*** o número real e não negativo b tal que $b^n = a$:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ é equivalente a } b^n = a$$

Professor, explique aos estudantes sobre as 2 maneiras equivalentes de se expressar: número real não negativo ou número real positivo ou nulo.

Em $\sqrt[n]{a} = b$, temos que a é o **radicando** da raiz, n é o **índice** e b é o **valor da raiz aritmética**. O símbolo usado para indicar a raiz é chamado de **radical**.

Lembre-se: Podemos escrever $\sqrt[n]{a} = b$ ou $a^{\frac{1}{n}} = b$.

Fique atento

A definição de raiz considera o radicando a real positivo ou nulo. Em particular, se a for negativo e n for par, então $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$.

Se considerarmos a negativo e n ímpar, então $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$. Isso ocorre porque, ao elevar em uma quantidade ímpar de vezes um número negativo, obtemos sempre um número negativo. Acompanhe um exemplo: $(-2)^3 = -8$, então $\sqrt[3]{-8} = -2$. Mas, como no estudo que faremos a seguir, de função exponencial, a base é obrigatoriamente positiva, estudaremos apenas as propriedades e os exemplos de raízes com radicandos positivos.

Analise a seguir alguns exemplos.

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$.

b) $\sqrt[2]{9} = 3$, pois $3^2 = 9$.

c) $\sqrt[4]{625} = 5$, pois $5^4 = 625$.

d) $\sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$

> **Fique atento**
>
> Lembre-se de que não é necessário escrever o índice quando representamos uma raiz quadrada. Por exemplo: $\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$.

Observação: Para qualquer número real positivo ou nulo a, temos $\sqrt[n]{a^n} = a$. Por exemplo, $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ e $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$.

Dados os números reais positivos ou nulos a e b, há uma importante propriedade das raízes quadradas que você deve ter verificado nos exemplos dados no boxe *Explore para descobrir* do tópico "Explorando a operação de radiciação".

- Multiplicação de raízes quadradas: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

  Acompanhe a seguir a justificativa dessa propriedade.

  Elevando cada membro da igualdade ao quadrado, obtemos:

  $$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b \qquad \left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2 = a \cdot b$$

  Logo, $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2$.

  Como números positivos ou nulos com quadrados iguais são iguais, temos que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, como queríamos mostrar.

  Analise a seguir alguns exemplos de aplicação da propriedade da multiplicação de raízes quadradas. Conforme conveniência, às vezes extraímos as raízes e às vezes multiplicamos os radicandos.

  a) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$

  b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$

  c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$

  d) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

  De maneira geral, os matemáticos também já provaram que essa propriedade também é válida para raízes cúbicas (índice 3), raízes quartas (índice 4), raízes quintas (índice 5), enfim, para raízes enésimas (índice n), desde que elas existam.

> **Fique atento**
>
> A radiciação e a potenciação são operações inversas, $\sqrt[n]{a} = b$ e $b^n = a$, para $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $b \in \mathbb{R}_+$. Por exemplo: $\sqrt{9} = 3$ e $3^2 = 9$.

- Multiplicação de raízes de mesmo índice:

  $$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2.$$

  Acompanhe a seguir alguns exemplos.

  a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

  b) $\sqrt[7]{8} \cdot \sqrt[7]{16} = \sqrt[7]{2^3} \cdot \sqrt[7]{2^4} = \sqrt[7]{2^3 \cdot 2^4} = \sqrt[7]{2^7} = 2$

  c) $\sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3^4} = 2 \cdot 3 = 6$

  d) $\sqrt[5]{7^{10}} = \sqrt[5]{7^5 \cdot 7^5} = \sqrt[5]{7^5} \cdot \sqrt[5]{7^5} = 7 \cdot 7 = 49$

1. a) $\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$; $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$.

b) $\sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9$; $\left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$.

c) $\sqrt[4]{4^6} = \sqrt[4]{4\,096} = 8$; $\sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{64} = 8$.

d) $\sqrt[12]{8^4} = \sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{8} = 2$.

Para a divisão vale uma propriedade parecida com a multiplicação de raízes de mesmo índice. Conheça essa propriedade, dados os números reais a e b, sendo a positivo ou nulo e b positivo.

- Divisão de raízes de mesmo índice: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, com $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$.

Em particular, quando $n = 2$, temos:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Acompanhe a seguir alguns exemplos.

a) $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$

b) $2\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} - \sqrt{\dfrac{1}{9}} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} - \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} =$

$= 2 \cdot \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

Fique atento

Não existem propriedades análogas a essas para as operações de adição e de subtração de raízes aritméticas com o mesmo índice. Por exemplo: $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16 + 9}$ e $\sqrt{16} - \sqrt{9} \neq \sqrt{16 - 9}$.

Professor, se julgar oportuno, peça aos estudantes que verifiquem essas desigualdades usando uma calculadora ou uma planilha eletrônica. Se necessário, retome com eles o uso da calculadora ou da planilha eletrônica para determinar o valor de uma potência ou de uma raiz.
$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$ e $\sqrt{16 + 9} = 5$; e $\sqrt{16} - \sqrt{9} = 1$ e $\sqrt{16 - 9} \simeq 2{,}65$.

Sobre o assunto

As descobertas matemáticas e o desenvolvimento de novos métodos de resolução muitas vezes surgem de lugares inesperados. Um exemplo notável é o de Júlia Pimenta Ribeiro, uma estudante que, aos 11 anos, fez uma descoberta significativa que levou ao desenvolvimento de uma nova maneira de calcular a raiz quadrada. Para saber mais sobre esse assunto, leia o texto "Aluna de 11 anos ajuda a desenvolver fórmula para descobrir a raiz quadrada de uma nova maneira", disponível em: https://tedit.net/0zgcwu (acesso: 6 ago. 2024).

É possível identificar outras propriedades envolvendo raízes. Reflita se você consegue notar alguma relação resolvendo as atividades a seguir.

e) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{\sqrt{8^2}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$; $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$.

f) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{8^3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$; $\sqrt[9]{512} = \sqrt[9]{2^9} = 2$.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. No caderno, calcule o valor de cada raiz. Professor, se julgar necessário, retome com os estudantes o cálculo de raízes cúbicas.

a) $\sqrt[3]{8^2}$ e $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2$.

b) $\sqrt[3]{27^2}$ e $\left(\sqrt[3]{27}\right)^2$.

c) $\sqrt[4]{4^6}$ e $\sqrt[2]{4^3}$.

d) $\sqrt[12]{8^4}$ e $\sqrt[3]{8}$.

e) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ e $\sqrt[6]{64}$.

f) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}$ e $\sqrt[9]{512}$.

2. Compare os valores obtidos em cada item da atividade anterior. O que você verificou?
Resposta esperada: Em cada item, os valores das raízes dadas são iguais.

O que você analisou com os exemplos do *Explore para descobrir* são propriedades que já foram demonstradas por matemáticos.

Considerando os números reais positivos ou nulos a e b e o número natural n, com $n \geqslant 2$, valem as propriedades a seguir.

Professor, destaque aos estudantes que o conhecimento matemático foi e continua sendo construído ao longo do tempo graças a contribuição de inúmeras pessoas.

- Potência de uma raiz: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, com $m \in \mathbb{Z}$.

Dessa propriedade, podemos afirmar que a potência de uma raiz aritmética pode ser obtida elevando o radicando ao expoente. Acompanhe a demonstração.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Analise a seguir alguns exemplos numéricos.

a) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^6 = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$

- Alteração do índice de uma raiz: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ e $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n : p]{a^{m : p}}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{N}^*$.

Assim, podemos alterar o índice de uma raiz sem alterar o valor dela, multiplicando (ou dividindo) o expoente do radicando e o índice da raiz pelo mesmo número natural não nulo. Acompanhe a demonstração para a multiplicação.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot p}} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Reflita

Não escreva no livro

Demonstre no caderno essa propriedade para a divisão do expoente do radicando e do índice da raiz pelo mesmo número natural não nulo. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m : p}{n : p}} = \sqrt[n : p]{a^{m : p}}$

Analise a seguir alguns exemplos numéricos.

a) $\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[5 \cdot 4]{3^{5 \cdot 3}} = \sqrt[20]{3^{15}}$

b) $\sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6 : 3]{5^{3 : 3}} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt{5}$

- Raiz de raiz: $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n \cdot p]{a^m}$, com $m \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ e $p \geqslant 2$.

Assim, podemos calcular o valor de uma raiz aritmética multiplicando os índices das raízes e mantendo o radicando. Acompanhe a demonstração.

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{n \cdot p}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$$

Analise a seguir alguns exemplos numéricos.

a) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5 \cdot 3]{2} = \sqrt[15]{2}$

b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2]{2} = \sqrt[8]{2}$

Atividades resolvidas

1. Simplifique cada raiz.

a) $\sqrt[4]{2\,592}$

b) $\sqrt{0{,}01}$

c) $\sqrt[3]{-125}$

Resolução

a) $\sqrt[4]{2\,592} = \sqrt[4]{2^5 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^1 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^1} \cdot \sqrt[4]{3^4} = 2^1 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot 3^1 = 6\sqrt[4]{2}$

b) $\sqrt{0{,}01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

c) $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

2. Calcule o valor de cada expressão numérica.

a) $\sqrt{32} + \sqrt{48} - \sqrt{8} - \sqrt{108}$

b) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2$

Fique atento

Como você estudou nos Anos Finais do Ensino Fundamental, o quadrado da soma de 2 termos é igual ao quadrado do primeiro termo mais 2 vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo termo.

$$\underset{\downarrow}{(a} + \underset{\downarrow}{b)^2} = \underset{\downarrow}{a^2} + \underset{\downarrow}{2ab} + \underset{\downarrow}{b^2}$$

1º termo	2º termo	quadrado do 1º termo	2 vezes o produto dos termos	quadrado do 2º termo

Resolução

a) $\sqrt{32} + \sqrt{48} - \sqrt{8} - \sqrt{108} = \sqrt{2^5} + \sqrt{2^4 \cdot 3} - \sqrt{2^3} - \sqrt{2^2 \cdot 3^3} =$

$= \sqrt{2^4 \cdot 2^1} + \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2^2 \cdot 2^1} - \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^1} =$

$= \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2^1} + 2^2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^1} - \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3^1} =$

$= 2^2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 2^1\sqrt{2} - 2^1 \cdot 3^1 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 6\sqrt{3} =$

$= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

b) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$

Atividades

Não escreva no livro

Professor, no item **c** da atividade **19**, oriente os estudantes a resolverem a potência $(-5)^2$.

19. Verifique se cada igualdade é verdadeira (V) ou falsa (F) e registre sua resposta no caderno. Justifique suas respostas.

a) $\sqrt{x^2} = x$

b) $\sqrt{x^2} = x$, se $x > 0$.

c) $\sqrt{(-5)^2} = 5$

d) $\sqrt{-5^2} \in \mathbb{R}$ Falsa, pois $\sqrt{-5^2} = \sqrt{-25} \notin \mathbb{R}$.

19. a) Falso, pois $\sqrt{x^2} = x$ se $x \geqslant 0$ e $\sqrt{x^2} = -x$ se $x < 0$, considerando que $x^2 = |x|$.
b) Verdadeira, pois $\sqrt{x^2} = x$, se $x > 0$.
c) Verdadeira, pois $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.

20. No caderno, escreva a raiz simplificada referente ao número indicado em cada item. Exemplos de resposta:

a) $\sqrt{8}$ $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{16}$ $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{60}$ $\sqrt{60} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2\sqrt{15}$

d) $\sqrt{200}$ $\sqrt{200} = \sqrt{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5^2} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

e) $\sqrt[4]{1250}$ $\sqrt[4]{1250} = \sqrt[4]{2 \cdot 5^4} = 5\sqrt[4]{2}$

f) $\sqrt[3]{0{,}125}$ $\sqrt[3]{0{,}125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{5^3}{10^3}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

21. No caderno, escreva cada expressão usando apenas uma raiz. Exemplos de resposta:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

c) $\sqrt{2\sqrt{3}}$ $\sqrt{2\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \sqrt[2 \cdot 2]{12} = \sqrt[4]{12}$

d) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7}$

22. Escreva no caderno 2 raízes quadradas tais que o valor de cada uma delas não seja natural, mas que o produto delas seja um número natural.

Exemplos de resposta: $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$; $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{20}$; $\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{0{,}49} \cdot \sqrt{100}$.

Conexões

Os Palikur e os métodos de medição

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

No dia a dia é comum as pessoas realizarem medições de comprimentos, massas, volumes e outras grandezas. Um costureiro, por exemplo, precisa medir o comprimento do tecido para confeccionar uma roupa; um cozinheiro precisa medir a massa dos ingredientes para preparar uma refeição; um pedreiro precisa medir o volume de cimento necessário para uma construção.

Rosa Gauditano/StudioR

As habitações das aldeias palikur são geralmente construídas sobre estacas, com piso de madeira e cobertas de palha. Na foto, aldeia palikur em Macapá (AP). Foto de 2014.

Você deve conhecer algumas maneiras de fazer medições de grandezas utilizando diferentes instrumentos e unidades de medida. Agora vamos conhecer um pouco do povo indígena palikur e de como eles fazem a medição de comprimentos.

As aldeias palikur estão localizadas na região fronteiriça entre Brasil e Guiana Francesa e, no território brasileiro, ficam às margens do rio Urucará, no município de Oiapoque, ao norte do Amapá.

Os indígenas dessas aldeias têm uma maneira própria de conceber o espaço e de classificar os seres que os cercam, separando-os de acordo com o gênero. Por exemplo, são do gênero feminino os rios, os caminhos, as árvores, as canoas e os produtos da roça, enquanto são do gênero masculino os seres humanos, a Lua, as estrelas, o Sol, o relâmpago e o trovão.

As expressões usadas pelos Palikur para medir e agrupar são formadas por palavras que se agrupam para, além de quantificar esses elementos, fornecer informações de gênero, posição e forma. Por exemplo: eles acrescentam *p* quando se referem a um objeto e *ya* quando se referem a 2 objetos; se for um elemento considerado masculino, acrescentam *ri*, se for feminino, *ru*; e, para gênero neutro, *a*.

Por exemplo, *paha-p-ru himano* significa "um ser vivo feminino" e é a expressão usada para se referir a uma moça. Para falar de 2 moças, a expressão seria *pi-ya-na himano-pwiyo*, que significa "dois seres vivos femininos".

Além disso, a interpretação da expressão usada para medir e agrupar depende do contexto em que está sendo empregada. A expressão *pahat iwanti*, que significa "um cilíndrico braço", é usada para indicar 3 medidas de comprimento diferentes de acordo com o contexto em que está inserida: 40 centímetros; 1,70 metro; ou 2,20 metros.

Professor, se julgar oportuno, destaque em um mapa do Brasil a localização das aldeias palikur. Elas estão próximas da região onde os estudantes residem? Eles conhecem a região? Conhecem os métodos de medição usados pelos Palikur ou por outros povos indígenas? Em caso positivo, peça que compartilhem os conhecimentos com os colegas.

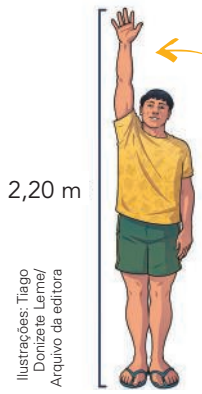
Não escreva no livro

No contexto de medir o comprimento de uma roça, a expressão *pahat iwanti* refere-se à medida de comprimento que uma pessoa pode alcançar com o braço erguido acima da cabeça. Nessa situação, essa medida de comprimento corresponde a aproximadamente 2,20 metros.

Quando é feita a referência à medida de comprimento de uma casa ou de uma canoa, a expressão *pahat iwanti* representa a medida de distância entre a ponta dos dedos de uma pessoa com os braços abertos, o que equivale a aproximadamente 1,70 metro.

Quando a referência utilizada são coisas menores do que uma casa ou do que uma canoa, como o *tipiti* (utensílio usado para espremer a mandioca), o *pahat iwanti* refere-se à medida de comprimento do antebraço de uma pessoa. Essa medida corresponde a aproximadamente 40 centímetros.

Professor, destaque para os estudantes que o estudo de línguas indígenas usadas no Brasil representa uma oportunidade para conhecer mais sobre a diversidade linguística do país, que conta com cerca de 274 línguas indígenas.



Ilustrações: Tiago Donizete Leme/ Arquivo da editora

Ilustração da medida de comprimento *pahat iwanti*, que corresponde a aproximadamente 2,20 metros no contexto de medida de comprimento de uma roça.

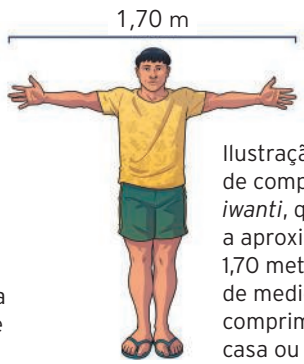


Ilustração da medida de comprimento *pahat iwanti*, que corresponde a aproximadamente 1,70 metro no contexto de medida de comprimento de uma casa ou uma canoa.

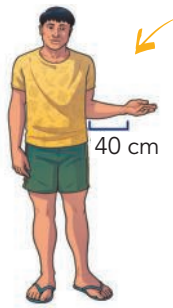


Ilustração da medida de comprimento *pahat iwanti*, que corresponde a aproximadamente 40 centímetros no contexto de medida de comprimento do *tipiti*.

Fonte dos dados: FERREIRA, Mariana Kawall Leal. *Mandikauku*: os dez dedos das mãos – Matemática e povos indígenas no Brasil. Brasília, DF: MEC, 1998. p. 34-67.

Conecte com o texto

1. Quais são as diferenças entre os procedimentos que você geralmente utiliza para medir comprimentos e os utilizados pelos Palikur?

Exemplos de resposta: Os Palikur utilizam unidades de medida não padronizadas (fora do Sistema Internacional de Unidades – SI) de comprimento usando partes do corpo. Além disso, medidas de comprimento diferentes recebem o mesmo nome e a distinção delas se dá pelo contexto.

Pesquise e debata

2. Faça uma pesquisa na comunidade escolar e verifique se existem pessoas que usam unidades de medida ou técnicas de medição de grandezas diferentes das que você aprendeu na escola. Pergunte a costureiros, professores e cozinheiros, entre outros profissionais, e anote suas considerações no caderno. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

3. Você consegue estabelecer uma relação entre os métodos utilizados para medir comprimentos dos Palikur, os que você pesquisou na comunidade escolar (para comprimentos e para outras grandezas) e os que você aprendeu na escola? Resposta pessoal.

Professor, oriente os estudantes a considerarem as imprecisões que são inerentes a qualquer medição, conforme estudado no tópico "Algarismos significativos em medidas". Neste momento, é possível propor um debate com os estudantes. No Brasil, as unidades de medida mais comumente utilizadas são as do Sistema Internacional, desenvolvido por países europeus. No entanto, como aprendemos, existem também unidades de medida tradicionais dos povos brasileiros que são desconhecidas por grande parte da população. Questione: Será que os povos tradicionais brasileiros deveriam adotar o Sistema Internacional de Medidas? Durante o debate, é importante destacar que as unidades de medida de povos tradicionais estão intimamente ligadas ao modo de vida deles e ao ambiente em que vivem. É importante destacar como essa prática corrobora com a decolonialidade.

Sobre o assunto

- Para conhecer mais dos indígenas Palikur e como eles utilizam a Matemática, você pode ler o livro *Mandikauku: os dez dedos das mãos – Matemática e povos indígenas no Brasil*, de Mariana Kawall Leal Ferreira, indicado como fonte das informações desta seção.
- Você também pode pesquisar esse povo indígena no *site* do programa Povos Indígenas no Brasil, da organização não governamental Instituto Socioambiental, cujo endereço é: https://tedit.net/ebgf4s (acesso em: 2 jul. 2024).

CAPÍTULO 2

A função exponencial

Não escreva no livro

Situação-problema

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

a) 1 hora: 40 mg : 2 = 20 mg; 2 horas: 20 mg : 2 = 10 mg; 3 horas: 10 mg : 2 = 5 mg; logo, 5 mg.

b) 2,5 mg = 5 mg : 2; logo após 4 horas.

Meia-vida

Meia-vida é uma terminologia utilizada em medicamentos e em muitas outras situações. Ao tomarmos algum medicamento, a concentração dele no organismo reduz à metade gradativamente, até que se torne desprezível. A medida de intervalo de tempo para que a concentração diminua pela metade é chamada meia-vida do medicamento.

Andri wahyudi/Shutterstock

É importante seguir corretamente a dosagem das medicações e o intervalo entre as doses.

Alguns elementos químicos, como o urânio, o rádio, o iodo-131 e o césio-137, são radioativos. O núcleo desses átomos é instável, e, como resultado, eles convertem parte da energia em um tipo de radiação muito energética, como raios X e raios gama, que podem trazer diversos malefícios a seres vivos. Essa conversão e consequente emissão de energia na forma de radiação ocorre até que o núcleo atômico se estabilize, em um processo chamado decaimento atômico. Para determinada quantidade de um elemento químico, a medida de intervalo de tempo para que metade dos núcleos dessa quantidade sofra o decaimento atômico e deixe de ser radioativa também é chamada de meia-vida.

Assim, podemos generalizar que a concentração de determinado elemento, ou a concentração de um medicamento no organismo, ou a quantidade de núcleos radioativos em uma amostra diminui em **função** da medida de intervalo de tempo decorrido.

Considere que uma pessoa ingeriu 40 mg de um antibiótico cuja meia-vida é 1 hora.

a) Quantos gramas do medicamento ainda existirão no organismo da pessoa após 3 horas? 5 mg

b) Após quantas horas a concentração do medicamento no organismo será 2,5 mg? 4 horas.

c) Converse com os colegas e conclua como a concentração do medicamento se relaciona com a meia-vida dele. Depois, escreva no caderno uma relação que represente a concentração y em função da quantidade x de horas após a administração do medicamento.

A concentração reduz à metade a cada hora, que é a meia-vida do medicamento.

Exemplos de resposta: $y = 40 \cdot (0{,}5)^x$ ou $y = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Professor, nos exemplos de leis de funções exponenciais, ressalte a presença da variável x no expoente da lei da função, diferente de outros tipos de função que eles estudaram nos Anos Finais do Ensino Fundamental, como leis $f(x) = ax$ ou $f(x) = ax^2$.

Formalizando a definição de função exponencial

A função exponencial é muito utilizada para modelar situações que têm um crescimento ou um decrescimento rápido, como a aplicação de um capital na modalidade de juros compostos, o crescimento da quantidade de bactérias em uma cultura ou o decaimento de um material radioativo.

Assim, a função exponencial é bastante aplicada em diversas áreas do conhecimento, como Química, Biologia, Engenharia, Medicina, Economia e Geografia. Você vai estudar algumas dessas aplicações nas atividades deste capítulo.

Helios8/iStockphoto/Getty Images

Em 1986, ocorreu uma explosão em um dos reatores da usina nuclear de Chernobyl, localizada na cidade de Prypiat, na Ucrânia. Durante a explosão, houve liberação de material radioativo, inclusive de plutônio-239, que tem uma meia-vida de 24 mil anos. Desde o acidente, o nível de radiação do local é estudado e controlado por autoridades e cientistas. Na foto: Dosímetro usado na medida de radiação na zona de exclusão de Chernobyl, Ucrânia. Foto de 2016.

Dado um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, chamamos de **função exponencial** de base a a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, representada por $f(x) = a^x$ para todo x real.

O número real a também pode ser chamado de **coeficiente** da função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

A seguir, analise alguns exemplos de leis de funções exponenciais.

a) $f(x) = 3^x$

b) $y = 5^x$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $f(x) = (0{,}4)^x$

e) $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

f) $f(x) = 10^x$

Atividades

1. As leis indicadas nas alternativas **a**, **b** e **d** são de funções exponenciais, pois a variável x está no expoente e as bases são números reais positivos e diferentes de 1. A lei indicada na alternativa **c** é de uma função quadrática.

Não escreva no livro

1. Verifique quais das sentenças indicadas a seguir correspondem à lei de uma função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

a) $f(x) = 9^x$

b) $f(x) = \left(0{,}\overline{6}\right)^x$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

2. Dada a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, representada por $f(x) = 4^x$, determine no caderno cada valor citado.

a) $f(0)$ $f(0) = 4^0 = 1$

b) $f(3)$ $f(3) = 4^3 = 64$

c) $f(-1)$ $f(-1) = 4^{-1} = \frac{1}{4}$

d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

e) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$

f) m tal que $f(m) = 1$.
$4^m = 1 \Rightarrow m = 0$

3. **(Unisc-RS)** O número de bactérias numa cultura, em função do tempo t (em horas), pode ser expresso por $N(t) = 256 \cdot 2^{0{,}75t}$.

Em quanto tempo, em horas, o número de bactérias será igual a 2 048?

a) 2

b) 6

c) 8

d) 3

e) 4

Temos: $N(t) = 2\,048 \Rightarrow 256 \cdot 2^{0{,}75t} = 2\,048 \Rightarrow 2^{11} = 2^8 \cdot 2^{0{,}75t} \Rightarrow 2^3 = 2^{0{,}75t} \Rightarrow 0{,}75t = 3 \Rightarrow t = 4$; portanto, a medida de intervalo de tempo é igual a 4 horas. Alternativa **e**.

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Construção do gráfico de uma função exponencial

Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essa podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

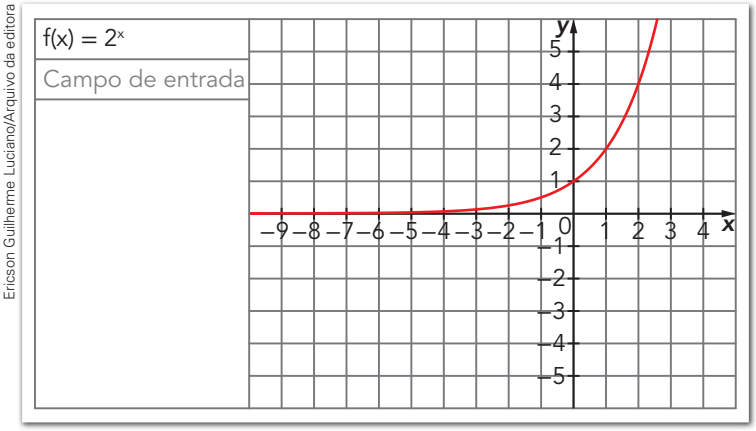
O gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), para $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $y = f(x)$. Esse gráfico pode ser representado no plano cartesiano, e isso pode ser feito usando diversos *softwares de* Geometria dinâmica.

Para as atividades propostas nesta seção, recomenda-se selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que ofereça essa função para possibilitar explorações, antes das formalizações.

Vamos construir inicialmente o gráfico da função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = 2^x$, e destacar alguns pontos importantes do gráfico. A seguir, apresentamos alguns passos básicos que são comuns a *softwares* do tipo.

1º passo: Insira no campo de entrada a lei da função **f(x)=2^x**. Note que, geralmente, **^** indica a operação de potenciação.

2º passo: Acesse as configurações de exibição e habilite as opções de exibir os eixos e a malha principal, caso estejam desabilitadas. Você deverá obter uma imagem como a apresentada a seguir.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção em um *software* de Geometria dinâmica, após o 2º passo.

Fique atento

Lembre-se de adaptar as instruções de acordo com o *software* escolhido, já que as interfaces e os procedimentos podem variar.

Professor, oriente os estudantes na escolha do *software* ou aplicativo para a construção dos gráficos de funções exponenciais de modo que o programa escolhido apresente todas as funcionalidades necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas. Auxilie-os também nas explorações iniciais do programa e na identificação das ferramentas e das configurações disponíveis, além de como acessá-las.

Fique atento

Geralmente, nos *softwares de* Geometria dinâmica, é possível mover a representação clicando em algum ponto da tela e arrastando. Você também pode experimentar ampliar ou reduzir a imagem usando as ferramentas de *zoom*, o *scroll* do *mouse* (que é a "rodinha" que fica na parte superior da maioria dos *mouses*) ou o *touchpad* do *notebook* (conhecido também como sensor de toque).

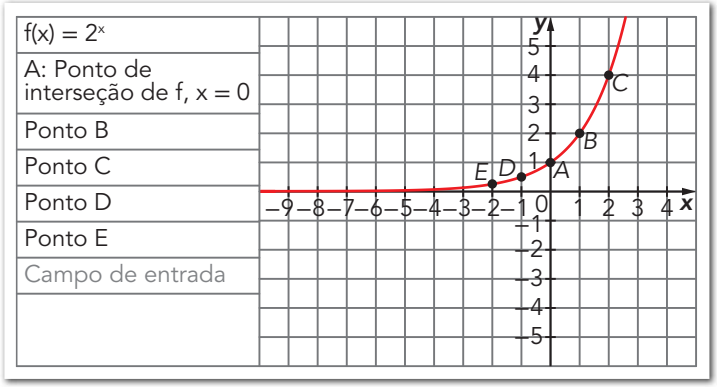
Analise o gráfico anterior (a curva vermelha na imagem), verificando o comportamento dele e como os valores da função crescem neste caso.

3º passo: Agora, vamos determinar o ponto em que o gráfico intersecta o eixo das ordenadas (eixo *y*). Para isso, insira o comando **Interseção(f,x=0)** no campo de entrada. Perceba que a intersecção do gráfico com o eixo *y* acontece no ponto *A*(0, 1).

4º passo: No campo de entrada de comando, insira, uma por vez, as coordenadas dos pontos **B(1,2)**, **C(2,4)**, **D(−1,1/2)** e **E(−2,1/4)**. Perceba que todos os pontos pertencem ao gráfico da função.

Perceba, ainda, que o gráfico dessa função não intersecta o eixo das abscissas (eixo *x*), ou seja, a função não tem zeros. Conforme reduzimos os valores de *x*, o gráfico se aproxima do eixo das abscissas sem intersectá-lo.

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora



Exemplo de construção em um *software* de Geometria dinâmica, após o 4º passo.

Ao analisarmos o gráfico, também podemos estabelecer o conjunto imagem dessa função. Os valores da função são sempre positivos e não existe valor máximo; conforme aumentamos o valor de *x*, o valor correspondente de $f(x)$ cresce infinitamente. Então, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$, ou $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$, ou, ainda, $\text{Im}(f) =]0, +\infty[$, em que ∞ é o símbolo que representa o infinito.

1. Depois de salvar sua construção no *software* escolhido, abra um novo projeto. Repita os passos **1** a **3** e construa o gráfico de cada função exponencial cuja lei está indicada a seguir.

a) $f(x) = 3^x$ **b)** $g(x) = 10^x$ **c)** $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

As respostas dependem do *software* utilizado pelos estudantes.

Influência do coeficiente *a* em funções do tipo $f(x) = a^x$

Professor, se julgar oportuno, após a execução da atividade **1**, questione os estudantes: "Por que os gráficos das funções representadas têm esse aspecto?". As propriedades dos gráficos das funções exponenciais serão formalizadas no tópico "Gráfico da função exponencial", porém, analisando os gráficos, os estudantes podem indicar que não há valor *x* tal que $2^x = 0$.

Abra um novo projeto no *software* escolhido, siga a instrução a seguir e verifique a influência do coeficiente *a* no gráfico da função.

Em seguida, insira no campo de entrada a lei da função **f(x)=a^x**. Abaixo do campo de entrada, deve aparecer um controle deslizante para o coeficiente *a*. Mova-o gradualmente até configurar $a = 2$ e aparecer o gráfico que você construiu anteriormente, de $f(x) = 2^x$.

2. Altere gradualmente o valor do coeficiente *a*, com $a > 0$ e $a \neq 1$, e verifique o que acontece com o gráfico da função. Converse com um colega a respeito, atentando aos argumentos dele. Vocês chegaram às mesmas conclusões? Resposta pessoal.

Gráfico da função exponencial

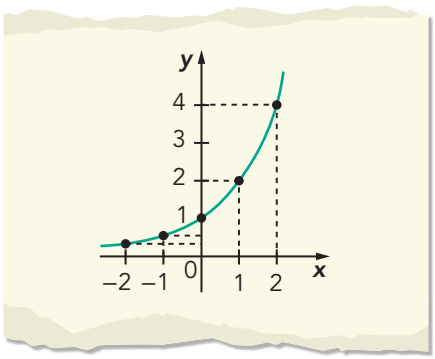
Após as explorações que você fez no *software* de Geometria dinâmica escolhido, vamos analisar os gráficos de 2 funções exponenciais $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ do tipo $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$), a primeira com $a > 1$ e a segunda com $0 < a < 1$, para depois sistematizar esse tipo de função.

Para representar os gráficos em um plano cartesiano, primeiro escolhemos alguns valores de x e calculamos os respectivos valores das funções. Em seguida, indicamos esses pontos no plano cartesiano e representamos a curva que corresponde ao gráfico.

Acompanhe a seguir os exemplos, considerando $a = 2$ e, depois, $a = \frac{1}{2}$.

a) $f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$, ou seja, $a > 1$.

x	$y = 2^x$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$



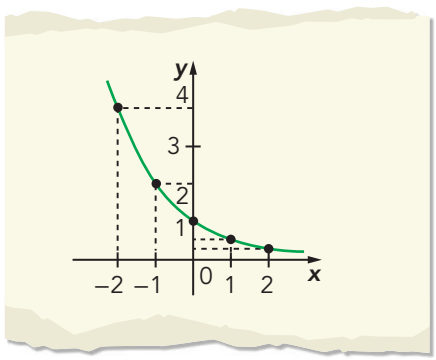
Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesse caso, em que $x_1 < x_2$, para quaisquer x_1 e x_2, a função é crescente ($x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$).

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ou $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, ou seja, $0 < a < 1$.

Professor, a função apresentada no exemplo **a** é estritamente crescente. Para mais informações sobre esse tópico, leia o texto "O crescimento/decrescimento de uma função num intervalo contido em seu domínio e os pontos de extremo", disponível em: https://tedit.net/fjidzn (acesso em: 7 ago. 2024).

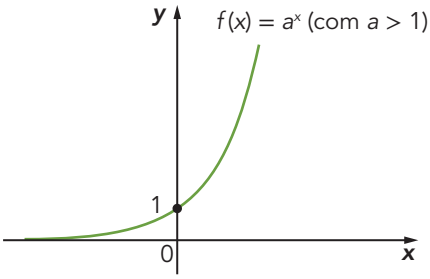
x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$

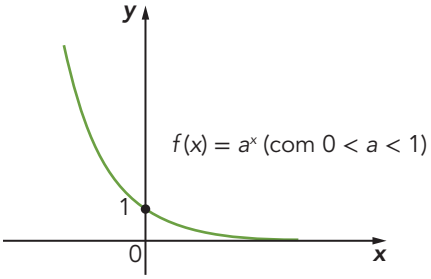


Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesse caso, em que $x_1 < x_2$, para quaisquer x_1 e x_2, a função é decrescente ($x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$).

De modo geral, analise o gráfico de $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, nos casos em que $a > 1$ e em que $0 < a < 1$.





Ilustrações: de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

- A função exponencial dada por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e tem conjunto imagem $\mathbb{R}_+^*$.
- O gráfico da função exponencial em um plano cartesiano é uma **curva exponencial**, com o mesmo aspecto dos gráficos apresentados neste tópico.
- Quando as bases das leis das funções são a e $\frac{1}{a}$, os gráficos delas em um plano cartesiano são simétricos em relação ao eixo y.

Professor, se julgar necessário, peça aos estudantes que criem suas próprias funções exponenciais e as compartilhem com os colegas, para que cada um possa avaliar a função criada pelo outro.

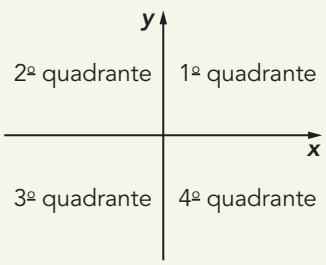
Algumas características da função exponencial

Apresentamos a seguir algumas características da função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

- O gráfico de uma função exponencial em um plano cartesiano não intersecta o eixo das abscissas, ou seja, $f(x) = a^x$ não assume o valor 0, e a função não tem zeros (não existe x real tal que $f(x) = 0$).
- O gráfico intersecta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1).
- O gráfico não tem pontos no 3º e 4º quadrantes do plano cartesiano.

Fique atento

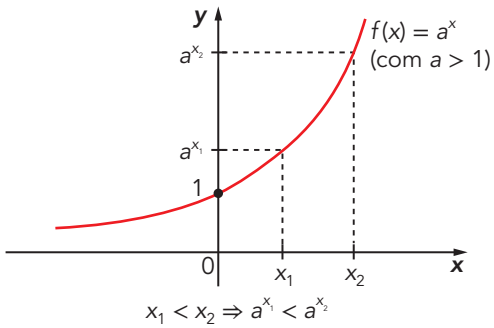
Perceba que os quadrantes do plano cartesiano geralmente são numerados no sentido anti-horário.



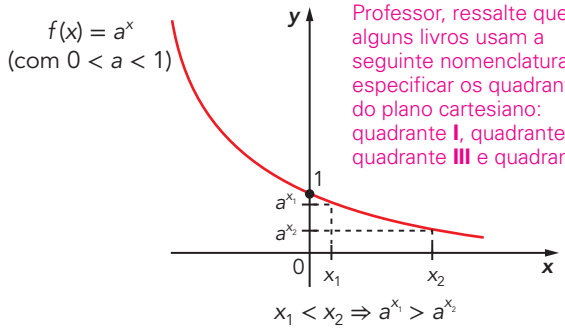
Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- A função exponencial pode ser crescente (se $a > 1$) ou decrescente (se $0 < a < 1$).



$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$



$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

Professor, ressalte que alguns livros usam a seguinte nomenclatura para especificar os quadrantes do plano cartesiano: quadrante **I**, quadrante **II**, quadrante **III** e quadrante **IV**.

- Na função exponencial, elementos distintos x_1 e x_2 do domínio têm valores distintos $f(x_1)$ e $f(x_2)$, ou seja, não há elemento do contradomínio que seja valor de mais de um elemento do domínio da função, por isso dizemos que é uma função injetiva (ou injetora). Denotamos assim:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Disso, obtemos:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ ou } a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Quando $a > 1$, os valores $f(x) = a^x$ da função apresentam inicialmente um crescimento lento e, conforme aumentamos o valor de x, o crescimento dos valores $f(x) = a^x$ da função se torna cada vez mais acentuado, o que é possível perceber na análise da curva exponencial.

  Dizemos que os valores da função crescem exponencialmente, e isso é um comportamento muito importante e característico desse tipo de função.

- Valem as seguintes propriedades para a função exponencial:
  - $f(1) = a^1 = a$
  - $f(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2)$, ou seja, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$
  - Para $n \in \mathbb{R}$, $f(nx) = a^{nx} = (a^x)^n = (f(x))^n$, ou seja, $f(nx) = (f(x))^n$.

Não escreva no livro

Reflita

Quando $0 < a < 1$, para quais valores de x o decrescimento dos valores da função é lento e para quais é acelerado?

Quando $0 < a < 1$ em $f(x) = a^x$, o decrescimento é acelerado enquanto x é negativo e, conforme x cresce, o decrescimento dos valores da função se torna cada vez mais lento.

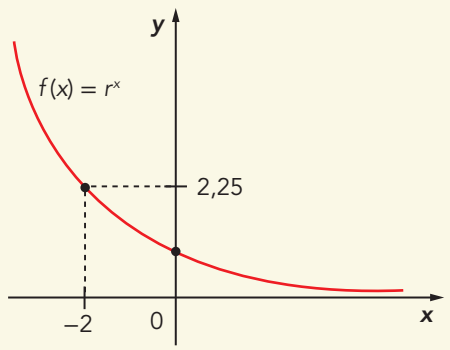
Sobre o assunto

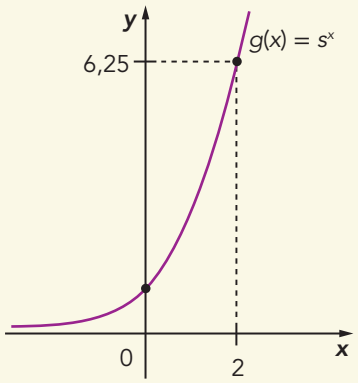
Professor, com os estudantes, analise o gráfico que apresenta as 2 curvas epidêmicas, uma com e outra sem a adoção de medidas de proteção. Destaque para os estudantes os aspectos exponenciais do crescimento. Aproveite este momento para trabalhar informalmente a habilidade **EM13MAT407** da BNCC. Peça aos estudantes que comparem as curvas e respondam: "A adoção de medidas de proteção foi eficaz para reduzir o crescimento na quantidade de novos casos da doença?".

Durante a pandemia de covid-19, no ano 2020, as análises estatísticas demonstraram que o surgimento de novos casos da doença poderia ser descrito por uma curva de crescimento exponencial, pois uma pessoa infectada tinha o potencial de transmitir o vírus para mais de uma pessoa simultaneamente. Para diminuir esse crescimento, foram implementadas medidas de proteção, como o uso de máscara. A comparação entre os padrões das curvas epidêmicas com e sem tais medidas pode ser feita considerando a análise do gráfico apresentado no artigo "Crescimento exponencial e curva epidêmica: entenda os principais conceitos matemáticos que explicam a pandemia de coronavírus", disponível em: https://tedit.net/en476u. Acesso em: 8 jul. 2024.

Atividades resolvidas

1. A seguir, temos os gráficos das funções exponenciais f e g, definidas por $f(x) = r^x$ e $g(x) = s^x$, com r e s reais positivos e diferentes de 1.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Considerando esses gráficos, faça o que é pedido em cada item. Justifique suas respostas.

a) Responda: $r > 1$ ou $0 < r < 1$?

b) Responda: $s > 1$ ou $0 < s < 1$?

c) A função f é crescente ou decrescente? E a função g, é crescente ou decrescente?

d) $f(7)$ é maior do que, menor do que ou igual a $f(3)$?

e) $g(5)$ é maior do que, menor do que ou igual a $g(4)$?

f) Representando os gráficos de f e g no mesmo plano cartesiano, em qual ponto eles vão se intersectar?

g) Entre as leis dadas a seguir, identifique as leis das funções f e g.

I. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

II. $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

III. $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

IV. $g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

Resolução

a) Pelo gráfico, concluímos que $0 < r < 1$.

b) Analisando o gráfico, temos que $s > 1$.

c) A função f é decrescente, pois $0 < r < 1$, e a função g é crescente, pois $s > 1$.

d) $f(7) < f(3)$, pois a função é decrescente.

e) $g(5) > g(4)$, pois a função é crescente.

f) Analisando os gráficos, temos que eles se intersectam no ponto $(0, 1)$.

g) I. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, pois $f(-2) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$.

IV. $g(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, pois $g(2) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = 6{,}25$.

Professor, na atividade **5**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Estratégias como essa podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo. O gráfico de cada uma das funções encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

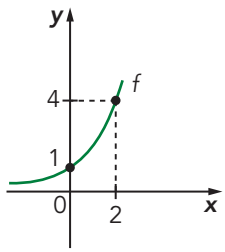
Atividades

Não escreva no livro

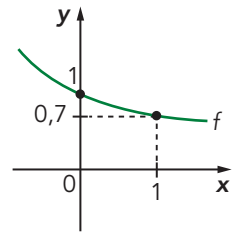
6. c) O valor de $f(0)$ também continuaria sendo 1, pois $f(0) = (0,3)^0 = 1$, mas o valor de $f(1)$ seria 0,3, pois $f(0) = (0,3)^1 = 0,3$.

4. Cada gráfico indicado a seguir representa uma função exponencial do tipo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Escreva no caderno a lei de formação, o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de cada função, indicando se ela é crescente ou decrescente.

a)



b)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

5. Copie a tabela de cada item no caderno e complete-a. Em seguida, represente em um plano cartesiano o gráfico de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, com a lei de correspondência indicada, e determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de cada uma delas.

a) $f(x) = 3^x$ D(f) = $\mathbb{R}$, CD(f) = $\mathbb{R}_+^*$, Im(f) =]0, +∞[

x	$f(x) = 3^x$	
–2		$\frac{1}{9}$
–1		$\frac{1}{3}$
0		1
1		3
2		9

b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ D(f) = $\mathbb{R}$, CD(f) = $\mathbb{R}_+^*$, Im(f) =]0, +∞[

x	$y = f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	
–2		16
–1		4
0		1
1		$\frac{1}{4}$
2		$\frac{1}{16}$

6. Considere o gráfico que você representou no item **a** da atividade anterior.

Depois, converse com um colega e respondam às questões no caderno.

a) Qual é o valor de $f(0)$? E qual é o valor de $f(1)$? $f(0) = 3^0 = 1$ e $f(1) = 3^1 = 3$.

b) Se a base dessa função fosse 4, os valores de $f(0)$ e $f(1)$ seriam os mesmos do item **a**? O valor de $f(0)$ continuaria sendo 1, mas o valor de $f(1)$ seria 4.

c) E se a base dessa função fosse 0,3?

7. Considerando a lei de cada função, classifique-a como crescente ou decrescente.

Depois, justifique sua resposta no caderno.

a) $f(x) = \pi^x$ Crescente, pois $\pi > 1$.

b) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$ Decrescente, pois $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

c) $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$ Crescente, pois $\sqrt{3} > 1$.

d) $f(x) = (0,01)^x$ Decrescente, pois $0 < 0,01 < 1$.

e) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ Decrescente, pois $0 < \frac{1}{5} < 1$.

f) $f(x) = 2^{-x}$ Decrescente, pois $f(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $0 < \frac{1}{2} < 1$.

8. Escreva no caderno a lei de uma função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, que seja crescente, e a lei de uma função exponencial $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, que seja decrescente.

9. No caderno, copie cada par de potências e associe-as a valores de uma função exponencial.

Depois, compare as potências usando os sinais > ou <. Justifique sua resposta em cada caso.

a) $(0,9)^8$ e $(0,9)^5$. **a)** $f(x) = (0,9)^x$, que é decrescente; então, para $8 > 5$, temos $(0,9)^8 < (0,9)^5$.

b) 47^5 e 47^3. **b)** $f(x) = 47^x$, que é crescente; então, para $5 > 3$, temos $47^5 > 47^3$.

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^9$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^8$. **c)** $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x$, que é decrescente; então, para $9 > 8$, temos $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^9 < \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^8$.

d) $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{5}}$ e $\left(\sqrt{3}\right)^2$. **d)** $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$, que é crescente; então, para $\sqrt{5} > 2$, temos $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{5}} > \left(\sqrt{3}\right)^2$.

4. a) Lei de formação: $f(x) = 2^x$; D(f) = $\mathbb{R}$, CD(f) = $\mathbb{R}_+^*$, Im(f) =]0, +∞[; função crescente.

b) Lei de formação: $f(x) = (0,7)^x$; D(f) = $\mathbb{R}$, CD(f) = $\mathbb{R}_+^*$, Im(f) =]0, +∞[; função decrescente.

8. Exemplos de resposta: Para funções crescentes, $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \left(\sqrt{7}\right)^x$; para funções decrescentes, $g(x) = (0,2)^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x$.

Professor, se julgar oportuno, organize a turma em grupos de 3 a 5 estudantes. Cada grupo deve pesquisar e estudar sobre juros simples e compostos. Oriente-os na escolha das referências bibliográficas. Após a pesquisa e estudos, promova uma roda de conversa para que os grupos compartilhem as informações estudadas e as percepções sobre cada modalidade de cálculo de juros.

Ampliando a ideia de função exponencial

O crescimento ou decrescimento exponencial é característico de certos fenômenos naturais e de algumas situações do cotidiano. No entanto, de modo geral, não se apresenta na forma $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$), mas sim modificado por constantes características do fenômeno, como em $f(x) = b \cdot a^{kx}$, com $b, k \in \mathbb{R}^*$. Dizemos que essa função é do tipo exponencial, e o gráfico dela em um plano cartesiano também é uma curva exponencial.

Acompanhe o exemplo: quando tomamos uma quantia emprestada ou quando aplicamos uma quantia em uma instituição bancária, é comum a aplicação de juros a cada novo período em que a quantia está emprestada ou investida. Por exemplo, ao aplicar R$ 400,00 (capital) em um banco que paga juros compostos de 2% ao mês, temos a seguinte evolução do montante (capital + juros):

1º mês

O juro correspondente é R$ 8,00.
(2% de 400 = 8)

O montante ao final do mês é R$ 408,00.
(capital + juros = montante)

2º mês

O juro correspondente é R$ 8,16.
(O juro é calculado sobre o montante do mês anterior: 2% de 408 = 8,16.)

O montante ao final do mês é R$ 416,16.
(408,00 + 8,16 = 416,16)

E assim por diante.

Esse sistema de aplicação de juros a cada novo período é chamado de **juros compostos**, popularmente conhecido como "juros sobrejuros". Isso ocorre porque os juros são calculados de acordo com o montante do período anterior.

Nesse sistema, podemos relacionar o montante M ao final de cada período (dia, mês, ano, etc.), o capital inicial C e a taxa de juros compostos i aplicada a cada medida de intervalo de tempo t pela fórmula $M = C(1 + i)^t$.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Considere um capital de R$ 10.000,00 aplicado à taxa de 2% ao mês, em regime de juros compostos. Use uma calculadora ou uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos e responda aos itens. $C = 10\,000$ e taxa mensal $i = 20\% = 0{,}02$.

a) Qual é o montante ao final do 1º mês? E do 2º mês? 1º mês: $M = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}02)^1 = 10\,000 \cdot 1{,}02 = 10\,200$
2º mês: $M = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}02)^2 = 10\,000 \cdot 1{,}0404 = 10\,404$

b) Qual é o montante ao final do 1º semestre? 1º semestre: $M = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}02)^6 \simeq 10\,000 \cdot 1{,}1262 = 11\,262$; logo, aproximadamente R$ 11.262,00.

c) Qual é o montante ao final de t meses? t meses: $M = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}02)^t = 10\,000 \cdot (1{,}02)^t$; logo, $M = 10\,000 \cdot (1{,}02)^t$.

No item **c**, você obteve a lei de uma função do tipo exponencial de M em função de t, com restrição para o domínio natural. Assim, podemos estabelecer uma relação entre o crescimento em um sistema de juros compostos e a função do tipo exponencial.

Atividades resolvidas

2. (FCMSCSP) O decaimento radioativo de uma substância se dá de acordo com a fórmula $r(t) = C \cdot 3^{-6t}$, com C sendo uma constante diferente de zero e $r(t)$ a quantidade de radioatividade presente na substância após t segundos desde o início do decaimento. O valor de t, em segundos, para que a substância fique com a terça parte da radioatividade que tinha inicialmente é igual a:

a) $\frac{1}{4}$. **b)** $\frac{1}{5}$. **c)** $\frac{1}{3}$. **d)** $\frac{1}{6}$. **e)** $\frac{2}{5}$.

Resolução

Dizer que a substância fique com a terça parte da radioatividade que tinha inicialmente é o mesmo que dizer que $r(t) = \frac{1}{3} \cdot C$, sendo t a medida de intervalo de tempo decorrida, em segundos. Logo, temos:

$$r(t) = \frac{1}{3} \cdot C \Rightarrow C \cdot 3^{-6t} = \frac{1}{3} \cdot C \Rightarrow 3^{-6t} = 3^{-1} \Rightarrow 6t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{6}$$

Podemos tirar a prova definindo a quantidade inicial de radioatividade em $t = 0$ e, depois, calculando a quantidade de radioatividade em $t = \frac{1}{6}$, assim:

$$r(0) = C \cdot 3^{-6 \cdot 0} = C \cdot 3^0 = C \cdot 1 = C \Rightarrow r(0) = C$$

$$t = \frac{1}{6} \Rightarrow r\left(\frac{1}{6}\right) = C \cdot 3^{-6 \cdot \frac{1}{6}} = C \cdot 3^{-1} = \frac{C}{3}$$

Isso confirma que, após $\frac{1}{6}$ segundo, a quantidade de radiação inicial foi reduzida à terça parte.

Alternativa **d**.

Atividade resolvida passo a passo

3. (UPE) Os biólogos observaram que, em condições ideais, o número de bactérias $Q(t)$ em uma cultura cresce exponencialmente com o tempo t, de acordo com a lei $Q(t) = Q_0 \cdot e^{kt}$, sendo $k > 0$ uma constante que depende da natureza das bactérias, o número irracional **e** vale aproximadamente 2,718 e Q_0 é a quantidade inicial de bactérias. Se uma cultura tem inicialmente 6 000 bactérias e, 20 minutos depois, aumentou para 12 000, quantas bactérias estarão presentes depois de 1 hora?

a) $1{,}8 \times 10^4$
b) $2{,}4 \times 10^4$
c) $3{,}0 \times 10^4$
d) $3{,}6 \times 10^4$
e) $4{,}8 \times 10^4$

> **Fique atento**
>
> O número irracional **e**, citado no enunciado desta atividade, é conhecido como número de Neper ou como número de Euler (ou constante de Euler). Por ser irracional, ele tem infinitas casas decimais não periódicas ($e \simeq 2{,}718$), mas é comum usarmos aproximações racionais com apenas 2 ou 3 casas decimais para efetuar os cálculos, como proposto nesta atividade.

Resolução

Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

Informa-se a quantidade inicial de bactérias em uma cultura e a lei que relaciona a quantidade de bactérias $Q(t)$ em função da medida de intervalo de tempo t. Consideremos t em minutos. Também é dito no enunciado do problema que, após 20 minutos, a quantidade de bactérias aumenta de 6 000 para 12 000.

b) O que se pede?

A quantidade de bactérias que estarão presentes na cultura após 1 hora.

Planejando a solução

Diante das informações do enunciado, podemos concluir que, em 20 minutos, a quantidade de bactérias da população passa a ser de 12 000, ou seja, $Q(20) = 12\,000$. Considerando essa informação, encontraremos uma igualdade que servirá de base para a resolução do problema.

Executando o que foi planejado

Temos que:

$$Q(20) \simeq 6\,000 \cdot 2{,}718^{20k} \Rightarrow 12\,000 \simeq 6\,000 \cdot 2{,}718^{20k} \Rightarrow 2 \simeq 2{,}718^{20k}$$

Queremos calcular $Q(60) \simeq 6\,000 \cdot 2{,}718^{60k}$.

Lembrando que $x^{60} = x^{20} \cdot x^{20} \cdot x^{20}$ (das propriedades das potências), fazemos:

$$Q(60) \simeq 6\,000 \cdot 2{,}718^{20k} \cdot 2{,}718^{20k} \cdot 2{,}718^{20k}$$

Como $2 \simeq 2{,}718^{20k}$, obtemos:

$$Q(60) \simeq 6\,000 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48\,000$$

Ou seja, após 60 minutos (1 hora), a cultura terá, aproximadamente, 48 000 bactérias ou, aproximadamente, $4{,}8 \times 10^4$ bactérias.

Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **e**.

4. Considere uma cultura bacteriana que, em experimentos laboratoriais, apresentou crescimento exponencial modelado por $Q(t) = 3\,000 \cdot 2^t$, em que $Q(t)$ é a quantidade de bactérias na cultura em função da medida de intervalo de tempo t, em horas.

Após quantas horas do início das observações essa cultura passou a ter 192 000 bactérias?

Resolução

Queremos saber após quantas horas a cultura passa a ter 192 000 bactérias, ou seja, queremos calcular o valor de t tal que $Q(t) = 192\,000$. Podemos substituir esse valor na lei da função.

$$Q(t) = 3\,000 \cdot 2^t \Rightarrow 192\,000 = 3\,000 \cdot 2^t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 64 = 2^t$$

Na função exponencial, sabemos que:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

(com $a > 0$ e $a \neq 1$)

Então, uma das maneiras de calcular o valor de t nesse caso é obter uma igualdade de potências de mesma base.

$$64 = 2^t \Rightarrow 2^6 = 2^t \Rightarrow 6 = t$$

Logo, após 6 horas, essa cultura passou a ter 192 000 bactérias.

Fique atento

Ao substituir $Q(t) = 192\,000$ na lei dessa função, obtivemos $64 = 2^t$, que é chamada de **equação exponencial**, pois a incógnita t aparece no expoente. Uma das maneiras de resolver esse tipo de equação é obter potências de mesma base (positiva e diferente de 1) nos 2 membros da equação, como feito nesta resolução. Sempre que necessário, use essa estratégia nas atividades deste capítulo.

Na próxima Unidade, você vai estudar outra estratégia de resolução de equações desse tipo.

10. a) R$ 1.215,00
b) A opção mais vantajosa é entregar o *smartphone* na loja onde ele deseja comprar um novo, pois assim receberá R$ 1.536,00, enquanto vendendo no mercado de segunda mão, ele receberá apenas R$ 1.215,00.

Atividades

Não escreva no livro

10. No mercado de segunda mão, considera-se que um *smartphone* perde $\frac{1}{4}$ do valor original dele ao final de cada ano de uso. Após 4 anos de uso, um consumidor tem 2 opções: entregar o aparelho usado na loja onde deseja comprar um novo celular, que o recebe por 40% do valor original de compra; ou vendê-lo pelo preço do mercado de segunda mão. O valor original do *smartphone* é R$ 3.840,00.

a) Qual será o valor do *smartphone* no mercado de segunda mão após 4 anos de uso?

b) Considerando as opções disponíveis e que o consumidor deseja comprar um novo aparelho, qual delas é financeiramente mais vantajosa para ele: entregar o aparelho na loja onde deseja comprar um novo *smartphone* por 40% do valor original ou vendê-lo pelo valor de mercado de segunda mão? Justifique sua resposta.

Fique atento

O *smartphone* é um meio de comunicação muito utilizado em pequenas, médias e grandes cidades. Com a rápida evolução das tecnologias, os desgastes naturais do uso e o passar dos anos, os aparelhos se tornam obsoletos, e o valor de compra de um aparelho usado sofre depreciação, ou seja, redução do valor. Podemos dizer que essa depreciação ocorre em função da medida de intervalo de tempo após o início do uso do aparelho.

11. Suponha que a bateria de um *smartphone* descarregue de acordo com a lei $Q(t) = Q_0 \cdot 5^{-0{,}1t}$ de uma função, em que Q_0 é a quantidade de carga inicial e t corresponde à quantidade de horas contínuas de uso do aparelho, sem ser desligado. Às 6 horas da manhã, esse aparelho estava com uma carga Q_0. Se ele não for desligado em momento algum, então estará com 20% da carga inicial da bateria às:

a) 10 horas.
b) 13 horas.
c) 15 horas.
d) 16 horas.
e) 17 horas.

Alternativa **d**.

Texto para a próxima atividade.

A radioatividade é um fenômeno que ocorre em núcleos de átomos instáveis, resultando na emissão de partículas e radiações. Esse fenômeno está presente no cotidiano, por exemplo, quando se faz uma tomografia.

O conceito de meia-vida pode ser relacionado à quantidade de núcleos radioativos de uma amostra, sendo chamado também de período de semidesintegração P. Assim, a cada medida de intervalo de tempo P, a quantidade de material radioativo cai à metade da anterior, sendo possível relacionar a quantidade de material radioativo a qualquer intervalo de tempo com a quantidade inicial por meio de uma função do tipo exponencial cuja lei é $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{P}}$, em que N_0 é a quantidade inicial de material radioativo, t é a medida de intervalo de tempo decorrida e P é a meia-vida do material radioativo considerado.

Sobre o assunto

O Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (Ipen) foi pioneiro na produção de radioisótopos e radiofármacos no Brasil.

Acesse o *site* do Ipen (disponível em: https://tedit.net/whn9oc; acesso em: 4 jul. 2024) para conhecer mais das áreas de pesquisa do instituto e dos demais centros de outras áreas de estudo.

Professor, comente com os estudantes que radioisótopos e radiofármacos são materiais que emitem radiação e são usados em uma variedade de aplicações, como na Medicina e na agricultura. Explique, também, que o Ipen ocupa atualmente lugar de destaque em diversos setores da atividade nuclear, proporcionando avanços no domínio das tecnologias e na produção de materiais.

12. Um dos **isótopos** mais usados nos radiofármacos injetados nos pacientes submetidos a tomografia é o carbono-11, cuja meia-vida é 20 minutos. Qual é a medida de intervalo de tempo, em minutos, necessária para que uma amostra de carbono-11 se reduza a $\frac{1}{4}$ do que era quando foi obtida? 40 min

isótopos: cada um de 2 ou mais átomos de um mesmo elemento cujo núcleo atômico tem a mesma quantidade de prótons, mas quantidades diferentes de nêutrons.

Texto para a próxima atividade.

O carbono-14 (C-14) é um isótopo radioativo do carbono presente em todos os seres vivos. Com a morte, o nível do C-14 no corpo começa a decair. Como é relativamente fácil saber o nível original do C-14 no corpo dos seres vivos, a medição da atividade do C-14 em um fóssil é uma técnica muito utilizada para datações arqueológicas.

A meia-vida do C-14 é 5 730 anos; assim, a atividade radioativa dele decai com a medida de intervalo de tempo pós-morte de acordo com a lei $A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}$, de uma função do tipo exponencial, em que A_0 é a atividade natural do C-14 no organismo vivo e t é a medida de intervalo de tempo decorrido após a morte, em anos.

Sobre o assunto

O termo **radioatividade** foi inventado pela cientista, física e química polonesa Marie Salomea Sklodowska (1867-1934), que passou a se chamar Marie Sklodowska Curie após se casar com o físico francês Pierre Curie (1859-1906). Apesar de todas as dificuldades que as mulheres enfrentavam na época para estudar e ter as pesquisas reconhecidas, Marie apresentou muitos feitos na carreira: os estudos da radioatividade feitos com o marido Pierre e o também físico francês Antoine Henri Becquerel (1852-1908) renderam a eles o Nobel de Física em 1903, sendo ela a primeira mulher a ganhar esse prêmio. Ela foi também a primeira mulher a lecionar na Universidade de Sorbonne, em Paris (França); posteriormente, em 1911, recebeu o Nobel de Química pela descoberta e pelos estudos dos elementos rádio e polônio, tornando-se a primeira pessoa a ter ganhado o prêmio 2 vezes em áreas distintas. A partir desses estudos, foram desenvolvidos os primeiros aparelhos de raios X, usados durante a Primeira Guerra Mundial.

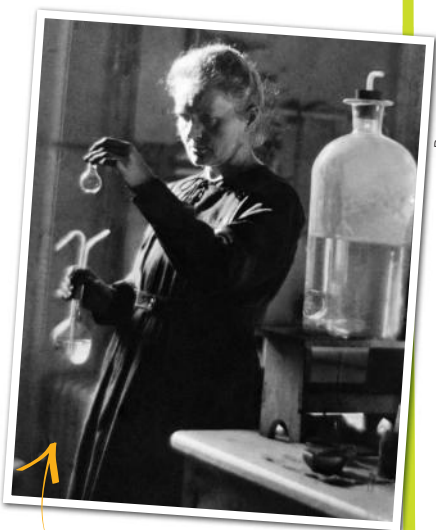
Como no século XIX eram poucos os conhecimentos sobre os perigos da radioatividade, o cuidado com a exposição aos elementos era baixo. Marie faleceu, na França, de leucemia causada pela longa exposição à radiação ao longo da carreira.

Para conhecer mais a história de vida dessa cientista, sugerimos o texto indicado a seguir.

"Marie Curie: pioneira da Ciência", de Irene Cavaliere. Disponível em: https://tedit.net/qez8nz. Acesso em: 4 jul. 2024.

Também indicamos o filme britânico *Radioactive*, dirigido por Marjane Satrapi e lançado em 2020. O filme retrata parte da vida e dos estudos de Marie Curie, com foco na descoberta dos elementos químicos rádio e polônio.

RADIOACTIVE. Direção: Marjane Satrapi. Produção: Tim Bevan, Eric Fellner e Paul Webster. Intérpretes: Rosamund Pike, Sam Riley, Aneurin Barnard, Anya Taylor-Joy e outros. Roteiro: Jack Thorne. Reino Unido: Netflix, 2020. 110 min.



Reprodução/AFP

Marie Curie no laboratório dela em Paris (França). Foto de 1925.

15. b) Não é possível responder a essa pergunta, pois faltam dados (a quantidade inicial Q_0 de água do reservatório).

13. Suponha que um fóssil encontrado em uma caverna foi levado ao laboratório. Depois da análise, verificou-se que ele emitia 7 radiações do C-14 por grama/hora. Qual é a idade aproximada desse fóssil, em anos, sabendo que o animal vivo emite 896 radiações por grama/hora?

a) 400 mil anos.
b) 200 mil anos.
c) 80 mil anos.
d) 40 mil anos.
e) 20 mil anos.

Alternativa **d**.

Texto para a próxima atividade.

Algas são organismos que geralmente vivem em meio aquático. Além de serem importantes para todos os ecossistemas terrestres, algumas espécies de algas são usadas pelos seres humanos como alimento, na indústria farmacêutica e na produção de tintas.

A existência de algas em meio aquático em geral é benéfica ao ecossistema. Mas, em determinadas situações, pode ocorrer um crescimento excessivo, chegando a níveis que afetam a qualidade da água e a sobrevivência da fauna aquática.

SEBASTIEN ASH/AFP/Getty Images

Proliferação de algas no lago Brieskower, em Brieskow-Finkenheerd (Alemanha). Foto de 2023.

14. Ao estudar a proliferação de uma espécie de alga em um lago, biólogos perceberam que a medida de área da superfície ocupada por elas era sempre o triplo da que havia sido ocupada no dia anterior. Ao fim da pesquisa, constataram que, depois de exatos 301 dias, o espelho de água havia sido inteiramente tomado por esses organismos.

Se em um lago com a mesma medida de superfície do lago descrito existissem 3 espécies de algas, cada uma delas cobrindo inicialmente a mesma medida de área da superfície do lago e com a mesma medida de velocidade de proliferação inicialmente pesquisada, em quantos dias elas teriam coberto toda a superfície do lago? 300 dias.

15. Durante um período prolongado de seca, a quantidade de água de um reservatório diminui de acordo com a lei de correspondência $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{-0{,}1t}$, em que Q_0 é a quantidade inicial de água e t é a medida de intervalo de tempo, em meses.

a) Depois de quantos meses a quantidade de água desse reservatório se reduzirá à terça parte da quantidade inicial? 10 meses.

b) Depois de quantos meses a quantidade de água desse reservatório será de 5 bilhões de litros?

16. Reelabore o problema a seguir de modo que a taxa anual de desvalorização obtida como resposta seja de 10% ao ano, ou de, aproximadamente, 10% ao ano.

Após 4 anos de uso, o valor de um *freezer* usado passou de R$ 4.235,00 para R$ 2.778,58. Qual foi a taxa anual de desvalorização desse *freezer*? O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

17. Considere que Beatriz tem um capital inicial de R$ 25.000,00 para investir. Após pesquisar bem, ela chega a 3 possíveis aplicações:

- Uma aplicação **A**, com juros compostos e que garante um montante de R$ 26.522,50 depois de 2 meses.
- Uma aplicação **B**, que tem uma taxa mensal de juros compostos de 4%.
- Uma aplicação **C**, que garante após 6 meses um retorno de R$ 340,10 de juros para cada R$ 1.000,00 aplicados inicialmente.

a) Considerando essas possibilidades de aplicação, elabore uma pergunta envolvendo juros compostos e responda-a no caderno. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Agora, pesquise algumas informações reais sobre aplicações em instituições financeiras e elabore um problema. Em seguida, peça a um colega que o resolva enquanto você resolve o problema que ele criou. Por fim, confira a resposta do colega. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

17. b) Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essa podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Tecnologias digitais

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Influência dos coeficientes *a*, *b* e *c* em funções do tipo $f(x) = b \cdot a^x + c$

Nas atividades a seguir, peça aos estudantes que comparem as mudanças no registro algébrico com as no registro gráfico das funções a cada alteração realizada.

Você estudou que diversos fenômenos naturais e situações do cotidiano têm crescimento ou decrescimento exponencial e lei de correspondência modificada por algumas constantes. Agora, vamos construir em um *software* de Geometria dinâmica o gráfico de uma função do tipo exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = b \cdot a^x + c$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$.

Para as atividades propostas a seguir, sugerimos selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que permita a construção de gráficos de funções exponenciais. A seguir, apresentamos alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* desse tipo.

1º passo: Caso seja necessário, repita os procedimentos indicados na primeira seção *Tecnologias digitais* deste capítulo para que os eixos e a malha sejam exibidos na tela. Em seguida, no campo de entrada, insira a lei da função **f(x)=b*a^x+c**. Note que, geralmente, ***** indica a operação de multiplicação.

Junto ao campo de entrada, devem aparecer controles deslizantes para os coeficientes *a*, *b* e *c*. Mova-os até configurar $b = 1$, $a = 2$ e $c = 0$ e aparecer o gráfico de $f(x) = 1 \cdot 2^x + 0$, ou seja, de $f(x) = 2^x$.

Professor, verifique que, se o estudante mover os coeficientes para $b = 0$, $a = 1$ ou $a \leqslant 0$, não obterá o gráfico de uma função do tipo exponencial.

2º passo: Agora, vamos analisar significados importantes para os coeficientes *a*, *b* e *c*.

A resposta depende do *software* escolhido pelos estudantes.

1. Altere gradualmente apenas o valor do coeficiente *b*, com $b \neq 0$, mantendo os demais, e analise o que acontece com o gráfico da função.
2. Ajuste novamente o coeficiente $b = 1$, altere gradualmente apenas o valor do coeficiente *a*, com $a > 0$ e $a \neq 1$, e verifique o que acontece com o gráfico da função.
3. Agora, altere gradualmente os valores dos coeficientes *a* e *b*, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$, mantendo o coeficiente $c = 1$, e verifique o que acontece com o gráfico da função.
4. Por fim, ajuste novamente os coeficientes iniciais $b = 1$ e $a = 2$, altere gradualmente apenas o valor do coeficiente *c* e analise o que acontece com o gráfico da função. Depois, escolha outros valores para *a* e *b* e verifique o que acontece ao variar o valor do coeficiente *c*.
5. Converse com a turma e apresente argumentos sobre todas as observações que você fez nas atividades **1** a **4**. Resposta pessoal.

Considere o que você percebeu no gráfico quando alterou o valor de cada coeficiente na lei da função $f(x) = b \cdot a^x + c$ (com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$) para resolver a atividade **6**.

6. Classifique cada função, cuja lei está indicada, em crescente ou decrescente. Depois, determine o conjunto imagem de cada função.

   a) $f(x) = 4^x$

   b) $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 2$

   c) $h(x) = -2 \cdot 3^x + 1$

   d) $j(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

Professor, proponha aos estudantes que representem no *software* escolhido o gráfico de cada função e confirmem as respostas dadas.

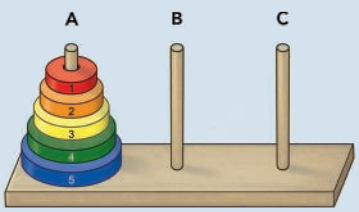
A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Professor, o trabalho com o *Explore para descobrir* proporciona um divertido jogo investigativo que incentiva o raciocínio lógico e indutivo dos estudantes, incitando-os a calcular e a otimizar a quantidade mínima de movimentos necessários para mover a torre de uma estaca para outra. Além disso, a torre de Hanói é um material didático que possibilita a contextualização de conteúdos como potenciação e função do tipo exponencial.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

A torre de Hanói, também conhecida como torre de bramanismo, é um jogo formado por uma base com 3 estacas e alguns discos dispostos em torre em uma das estacas, uns sobre os outros, em ordem decrescente de medida de comprimento do diâmetro, de baixo para cima.



Tiago Donizete Leme/ Arquivo da editora

Esse jogo foi inventado em 1883 pelo matemático francês Édouard Lucas (1842-1891), que associou a ele uma lenda: Brama teria criado uma torre, composta de 64 discos de ouro dispostos em uma estaca, ao lado de mais 2 estacas equilibradas sobre uma plataforma. Ele teria ordenado aos monges que movessem todos os discos de uma estaca para uma das outras de acordo com algumas regras simples: só poderia ser movido 1 disco de cada vez e nunca um disco maior ficaria por cima de um disco menor. De acordo com a lenda criada pelo matemático, quando todos os discos tivessem sido transferidos de uma estaca para a outra, o templo desmoronaria, o mundo desapareceria e seria criado um novo mundo: o mundo de Hanói.

Atualmente, a maioria dos modelos do jogo da torre de Hanói tem até 8 discos, e as regras são as mesmas citadas na lenda.

Fonte dos dados: JOGO: torre de Hanói. *Clubes de Matemática da OBMEP*, [*s. l.*], [20-?]. Disponível em: https://tedit.net/jb352l. Acesso em: 4 jul. 2024.

Agora façam discos de cartolina e utilizem objetos escolares para representar as estacas do jogo.

1. Organizem-se em duplas. Iniciem o jogo com uma torre de 2 discos em uma das estacas e tentem movê-los para outra estaca, de acordo com as regras. Quando esse desafio for vencido, aumentem a quantidade de discos da torre, sempre respeitando as regras. Resposta pessoal.

2. Repitam o desafio com diferentes quantidades de discos, registrem no caderno e comparem os resultados com os da tabela apresentada. Resposta pessoal.

3. Tentem prever a quantidade mínima de movimentos para mover uma torre de 6 discos para outra estaca. Em seguida, tentem prever também considerando uma torre de 7 discos.
Respostas esperadas: 63 movimentos; 127 movimentos.

4. Escrevam no caderno a lei de uma função do tipo $f(x) = b \cdot a^x + c$, com $x \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$, que relaciona a quantidade de discos x com a quantidade mínima de jogadas $f(x)$. Depois, calculem a quantidade mínima de movimentos para mover a torre de 6 e de 7 discos, respectivamente.
Exemplos de resposta: $f(x) = 1 \cdot 2^x - 1$ ou $f(x) = 2^x - 1$; 63 movimentos; 127 movimentos.

Torre de Hanói

Quantidade de discos	Quantidade mínima de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

Dados elaborados para fins didáticos.

5. Quantos discos foram movidos em um jogo que teve 255 movimentos sendo essa a quantidade mínima de movimentos possíveis? Resposta esperada: É possível mover 8 discos com a quantidade mínima de 255 movimentos, pois $255 = 256 - 1 = 2^8 - 1$.

Sobre o assunto

O jogo também pode ser desenvolvido *on-line* ou em aplicativos baixados gratuitamente em *smartphones* e *tablets*. Sugerimos um *site* em que é possível jogar com diferentes quantidades de discos: https://tedit.net/qiyliu (acesso em: 4 jul. 2024).

Conexões

Golpes em investimentos financeiros

Para compreender como ocorrem os golpes financeiros, primeiro precisamos entender os tipos de investimento financeiro e como eles podem ser realizados.

Gsign76/Shutterstock

Existem diversos tipos de investimento no mercado financeiro. Golpistas se aproveitam do desconhecimento de algumas pessoas para realizar fraudes financeiras.

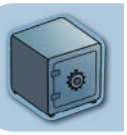
O lucro é a meta de toda pessoa ou empresa que faz um investimento financeiro. Atualmente, há várias modalidades de investimento nas instituições financeiras e uma das mais conhecidas é a Caderneta de Poupança. Em 2023, essa modalidade de investimento rendia juros de 8,03% ao ano, que é o mesmo que aproximadamente 0,7% ao mês. Esse é um exemplo de investimento de baixo risco, em que há pouca probabilidade de perder o dinheiro investido; contudo, é um investimento de baixa rentabilidade, ou seja, gera pouco lucro em comparação com outros disponíveis nas instituições financeiras.

Há outras modalidades de investimento para cidadãos (pessoas físicas) ou para empresas (pessoas jurídicas). A seguir, apresentamos alguns exemplos comuns no Brasil.

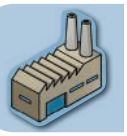
Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

Fundos de investimento: O investidor (pessoa física ou jurídica) aplica de uma só vez todo o capital em uma instituição financeira, que organiza e distribui o valor investido em diversos produtos financeiros. São investimentos de renda variável: o rendimento a cada período não é conhecido no momento da contratação.

LCI e LCA (Letra de Crédito Imobiliário e Letra de Crédito do Agronegócio): São investimentos de renda fixa (ou seja, que têm regras de rendimento e de prazo definidas no momento da contratação), isentos de Imposto de Renda e ofertados por instituições financeiras. Esses são considerados investimentos de baixo risco.



CDB (Certificado de Depósito Bancário): Esse investimento de renda fixa é um título que funciona como um empréstimo a um banco: o investidor empresta o dinheiro para a instituição financeira e, ao término do período, recebe o valor investido acrescentado dos juros.



Títulos de Crédito Privado: Nessa modalidade, o investidor empresta para grandes empresas não financeiras, por intermédio de uma instituição financeira. Esse investimento é de renda fixa, e alguns títulos permitem ao investidor receber uma renda mensal isenta de Imposto de Renda.

Títulos Públicos: Nesse tipo de investimento de renda fixa, conhecido como **Tesouro Direto**, o investidor faz um empréstimo para o governo federal. Ele só pode ser adquirido por pessoa física e, entre outras vantagens, permite o investimento inicial de pequenas quantias.

Ouro: É considerado o investimento ideal de proteção contra cenários de crises econômicas. Apresenta liquidez diária, ou seja, pode ser vendido a qualquer momento, e solidez de um metal precioso, isto é, não perde facilmente o valor.

As imagens não estão representadas em proporção.

Fique atento

Na maioria dos investimentos, há recolhimento de Imposto de Renda sobre o lucro obtido. Em alguns tipos de investimento, a porcentagem do imposto é fixa e pré-acordada; em outros, a porcentagem é regressiva, ou seja, reduz conforme aumenta o período no qual o dinheiro ficou investido.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Financeira*.

Como investir?

Para iniciar, um investidor deve procurar uma instituição financeira com credibilidade no mercado. Essas instituições, um banco, por exemplo, têm funcionários capacitados para orientar o investidor. A escolha do investimento mais vantajoso vai depender de alguns fatores, como valor disponível, risco a ser assumido, prazo do investimento e as tendências do mercado; mas é importante destacar que nenhum investimento oferece lucros exorbitantes em curto prazo.

Que cuidados é preciso tomar ao fazer um investimento?

Duvide do lucro fácil e de propostas miraculosas. Imagine a seguinte situação: Uma pessoa diz que encontrou uma instituição financeira que promete um rendimento de 50% sobre o capital investido a cada 45 dias. O que isso significa?

Ao final de 1 ano comercial (360 dias), o valor obtido, de acordo com a instituição financeira, é R$ 25.628,91. Isso significa que, em 1 ano, o capital investido teria rendido R$ 24.628,91.

Esse valor de rendimento não existe no mercado financeiro, mas, por ser muito promissor, acaba atraindo pessoas que não têm muito conhecimento do assunto. Em casos como esse, o investidor descobre que foi enganado quando tenta sacar o montante e não consegue. As pessoas que acreditam nesse tipo de investimento acabam sendo vítimas de fraude financeira.

Professor, peça aos estudantes que leiam a reportagem e, depois, promova um debate sobre o aumento da popularidade dos jogos de azar e os potenciais impactos na saúde financeira dos jogadores.

Sobre o assunto

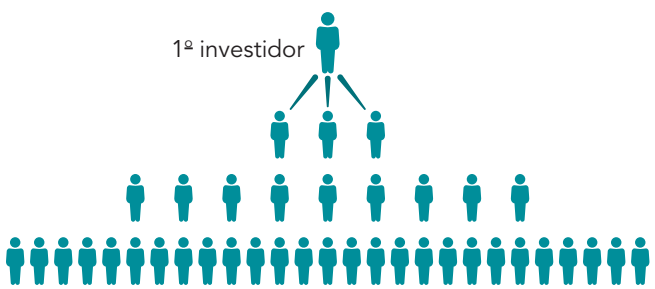
Embora a promessa de ganhos fáceis e rápidos possa ser tentadora, é crucial saber que jogos de azar, por sua natureza, não são investimentos financeiros. No ano de 2024, um número alarmante de pessoas foi atraído por essa falsa promessa, utilizando plataformas *on-line* para apostar dinheiro. Muitos acabaram perdendo quantias significativas ou caindo em golpes. Saiba mais sobre o assunto em: https://tedit.net/z4bjtz (acesso em: 4 jul. 2024).

Como ocorrem as fraudes financeiras?

Existem 2 tipos principais de fraudes identificados no mercado financeiro: a pirâmide e o esquema Ponzi, cujas ofertas surgem e desaparecem em poucos meses.

Pirâmide financeira

Nesse esquema, cada investidor fica encarregado de levar novos investidores para ampliar a rede de pessoas envolvidas. A pessoa que deseja participar deve investir um valor, que é usado para remunerar os investidores que já fazem parte da pirâmide. O lucro do investimento fica condicionado à quantidade de adesões que essa pessoa conseguir. Como os primeiros investidores recebem o rendimento prometido inicialmente, isso dá uma falsa credibilidade aos novos integrantes.



Ericson Guilherme Luciano/ Arquivo da editora

Imagine que cada investidor convença 3 pessoas a participar da pirâmide no prazo de 1 semana.

Podemos representar essa situação pela lei $f(n) = 3^n$ de uma função exponencial, em que $f(n)$ é a quantidade de novos investidores em cada semana e n é a quantidade de semanas ($n \geqslant 0$).

Perceba que, após 6 semanas, teríamos o total de 1093 investidores, pois $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 = 1093$, o que torna esse esquema insustentável em longo prazo, pois logo não haverá novos investidores disponíveis.

Esquema Ponzi

Nesse esquema, o lucro é pago à medida que entram novos investimentos, mas cada investidor não tem participação na captação dos novos integrantes. Esse esquema foi desenvolvido na década de 1910, nos Estados Unidos, pelo ítalo-americano Carlo Ponzi (1882-1949), também conhecido como Charles Ponzi, um dos nomes falsos que adotou ao longo da vida.

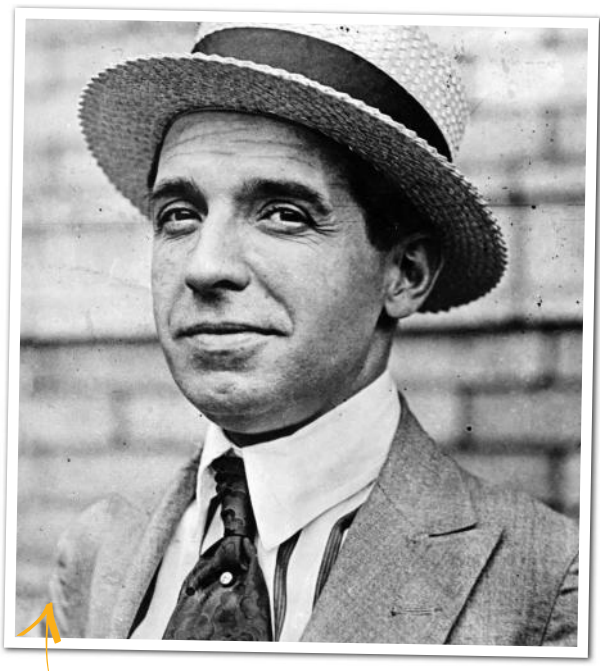
Ponzi ofertava investimentos financeiros prometendo retorno de 50% do valor investido em 45 dias. Ele usava o investimento de novos participantes do esquema para pagar o lucro dos antigos. Assim, quando não houve mais novos investidores disponíveis, o esquema quebrou.

Fonte dos dados: TOLENTINO, André. Pirâmide × Multinível: entenda as diferenças. *Comunidade Sebrae*, [*s. l.*], 24 maio 2022. Disponível em: https://tedit.net/feoldm. CAMILLO, Giulia Santos. Ponzi: entenda o esquema adotado por Madoff na 2ª maior fraude dos EUA. *InfoMoney*, [*s. l.*], 15 dez. 2008. Disponível em: https://tedit.net/ursrl4. Acesso em: 4 jul. 2024.

Quantidade de novos investidores a cada semana

n (Medida de intervalo de tempo em semanas)	$f(n)$ (Quantidade de novos investidores)
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729

Dados elaborados para fins didáticos.



Pictorial Parade/Archive Photos/Getty Images

Carlo Pietro Giovanni Guglielmo Tebaldo Ponzi. Foto de 1920.

Conecte com o texto

1. Considere o exemplo da pirâmide financeira e responda: Após quantas semanas a quantidade de novos participantes na semana seria 6 561 pessoas? A lei da função é do tipo $f(n) = a^n$. Temos que $f(n) = 6\,561$, então: $3^n = 6\,561 \Rightarrow 3^n = 3^8 \Rightarrow n = 8$; portanto, após 8 semanas, a quantidade de participantes seria 6 561.
2. A partir de 2 investidores, um esquema de pirâmide financeira consegue exatamente 5 investidores a cada semana. Quantos novos investidores precisariam entrar nessa pirâmide financeira na 10ª semana após o início do esquema? Nessa situação, a função será do tipo $f(n) = 2 \cdot 5^n$; para 10 semanas ($n = 10$), teremos $f(10) = 2 \cdot 5^{10} = 19\,531\,250$.

Pesquise e debata

3. Pesquise outras modalidades de investimento e debata com os colegas o motivo pelo qual muitas pessoas caem no esquema de pirâmide. O que é necessário para não sofrer golpes como esse? A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Atividades resolvidas

Atividade resolvida passo a passo

Texto para a próxima atividade.

O uso indiscriminado de defensivos agrícolas, as mudanças climáticas, os grandes desmatamentos e o aparecimento de alguns tipos de parasita podem levar à extinção das abelhas em poucas décadas. E conforme a quantidade de insetos dessa população vai diminuindo, a polinização das plantas vai ficando cada vez mais comprometida, o que pode gerar um colapso na produção de alimentos, bem como causar a morte de animais herbívoros, por falta de alimentos, e de animais carnívoros que se alimentam dos herbívoros.

Diante desse quadro preocupante, especialistas estudam maneiras de evitar a redução da quantidade de abelhas.

Oleksandrum/Shutterstock

Polinização é o processo de transferência de pólen que ocorre entre plantas. As abelhas são o agente polinizador mais importante, mas esse processo também pode ocorrer por ação de outros insetos, do vento, da água, de animais e até mesmo do ser humano.

5. Suponha uma situação preocupante em que a população de uma colônia de abelhas, inicialmente com 20 000 indivíduos, esteja se reduzindo à taxa de aproximadamente 10% ao mês devido ao uso de defensivos agrícolas. Calcule a quantidade de abelhas nessa população depois de 4 meses e represente a situação graficamente.

Resolução

Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

Informa-se a quantidade inicial de abelhas na população, que é 20 000 indivíduos, e a taxa de redução, que é 10% ao mês (aproximadamente).

b) O que se pede?

O cálculo da quantidade de abelhas depois de 4 meses e a representação gráfica dessa situação.

Planejando a solução

Precisamos determinar uma sentença matemática, em função da medida de intervalo de tempo t, em meses, que represente a situação e, em seguida, descobrir, para $t = 4$, qual é a quantidade de indivíduos da população. Com esses dados, podemos representar, no plano cartesiano, um gráfico dessa situação.

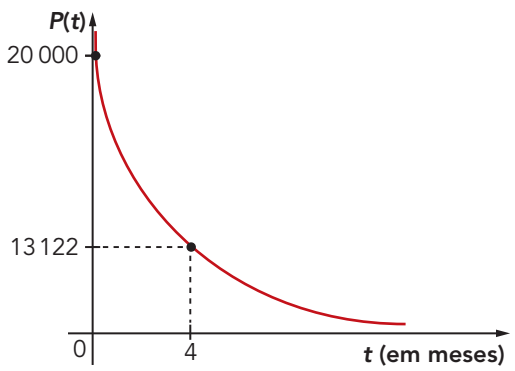
Executando o que foi planejado

Chamamos de $P(t)$ a quantidade de indivíduos da população em função de t, com $t \geqslant 0$. Como a quantidade inicial de 20 000 abelhas sofre um decréscimo de, aproximadamente, 10% ao mês, temos que a sentença representativa dessa situação é:

$$P(t) \simeq 20\,000 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right)^t \simeq 20\,000 \cdot (0{,}9)^t$$

Para $t = 4$, obtemos:

$P(4) \simeq 20\,000 \cdot (0{,}9)^4 = 20\,000 \cdot 0{,}6561 = 13\,122$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Emitindo a resposta

Depois de 4 meses, a população da colônia de abelhas terá, aproximadamente, 13122 indivíduos.

Ampliando a atividade

Depois de quantos meses a população dessa colônia de abelhas terá, aproximadamente, 16200 indivíduos?

$P(t) \simeq 20000 \cdot (0{,}9)^t$, então, $P(t) \simeq 16200 \Rightarrow 20000 \cdot (0{,}9)^t \simeq 16200 \Rightarrow (0{,}9)^t \simeq 0{,}81 \Rightarrow (0{,}9)^t \simeq (0{,}9)^2 \Rightarrow t \simeq 2$.

Logo, a população terá essa quantidade de abelhas após aproximadamente 2 meses.

Atividades

Não escreva no livro

18. f) $h(x) = 125 \Rightarrow 5^{x-2} = 125 \Rightarrow 5^{x-2} = 5^3 \Rightarrow x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5$

h) $g(x) = 3 \Rightarrow 5^x - 2 = 3 \Rightarrow 5^x = 5 \Rightarrow x = 1$

18. As funções f, g e h, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, são dadas pelas leis $f(x) = 2 \cdot 3^x$, $g(x) = 5^x - 2$ e $h(x) = 5^{x-2}$. Determine no caderno cada valor citado.

a) $f(2)$ $f(2) = 2 \cdot 3^2 = 18$

b) $g(2)$ $g(2) = 5^2 - 2 = 23$

c) $h(2)$ $h(2) = 5^{2-2} = 1$

d) $g(0)$ $g(0) = 5^0 - 2 = -1$

e) $h(0)$ $h(0) = 5^{0-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

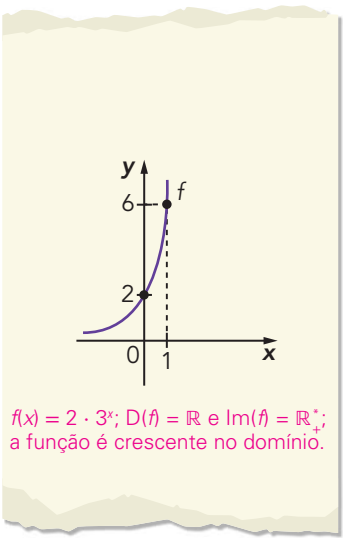
f) x tal que $h(x) = 125$

g) $f(-1)$ $f(-1) = 2 \cdot 3^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

h) x tal que $g(x) = 3$

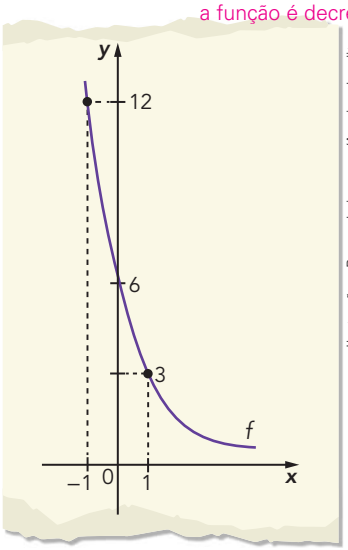
19. Cada gráfico a seguir representa uma função do tipo exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ do tipo $f(x) = b \cdot a^x$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$. Escreva no caderno a lei de formação de cada função, depois indique o domínio, o conjunto imagem e se a função é crescente ou decrescente. $f(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$; a função é decrescente no domínio.

a)



$f(x) = 2 \cdot 3^x$; $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$; a função é crescente no domínio.

b)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

20. Escolha uma das funções da atividade anterior e um contexto. No caderno, elabore um problema que seja modelado por ela. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Texto para a próxima atividade.

O modelo Jenss-Bayley é uma fórmula usada para avaliar a medida de altura de uma criança em idade pré-escolar. Se $h(x)$ denota essa medida, em centímetros, na idade x, em anos, para $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 6$, então, $h(x)$ pode ser aproximado por $h(x) = 79{,}041 + 6{,}39x - e^{3{,}261 - 0{,}993x}$. A taxa de crescimento $v(x)$, em cm/ano, de uma criança na mesma faixa de idade é dada por $v(x) = 6{,}39 + 0{,}993 \cdot e^{3{,}261 - 0{,}993x}$. (Considere a aproximação $e^{2{,}268} \simeq 9{,}7$.)

Professor, na atividade **22**, os estudantes devem escolher $k > 0$ e $a > 1$ ou $k < 0$ e $0 < a < 1$ para que a função seja crescente.

21. Considerando as informações do texto, qual é a medida de altura e a taxa de variação de crescimento de uma criança quando ela atinge a idade de 1 ano? Alternativa **a**.

a) 75,7 cm e 16 cm/ano.

b) 74,1 cm e 10,93 cm/ano.

c) 84,3 cm e 11,08 cm/ano.

d) 80,4 cm e 14,89 cm/ano.

e) 82,3 cm e 15,01 cm/ano.

22. Considere novamente uma função do tipo exponencial crescente $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = k \cdot a^x$. Escolha valores para k e a e represente o gráfico dessa função em um plano cartesiano. Resposta pessoal.

23. Silvana ganhou de presente um *videogame* de quarta geração que custa R$ 2.000,00. O valor desse *videogame* desvaloriza 25% ao ano. Silvana está planejando vender o *videogame* no futuro para ajudar na compra do modelo de quinta geração, que ainda será lançado, custará R$ 2.500,00 e que, segundo o anúncio do fabricante, terá esse preço fixo pelos próximos 3 anos.

a) Escreva no caderno a fórmula da função f que modela o valor, em reais, do *videogame* de quarta geração após t anos. $f(t) = 2\,000 \cdot (0{,}75)^t$

b) Calcule o valor do *videogame* de quarta geração após 2 anos e após 3 anos.
Após 2 anos: R$ 1.125,00; após 3 anos: R$ 843,75.

c) Considerando que Silvana economiza R$ 50,00 por mês, quanto ela terá economizado em 2 anos? E em 3 anos? Ela terá economizado R$ 1.200,00 em 2 anos e R$ 1.800,00 em 3 anos.

d) Silvana pensou em 2 opções para conseguir o dinheiro:

1ª) Vender o *videogame* de quarta geração após 2 anos.

2ª) Vender o *videogame* de quarta geração após 3 anos.

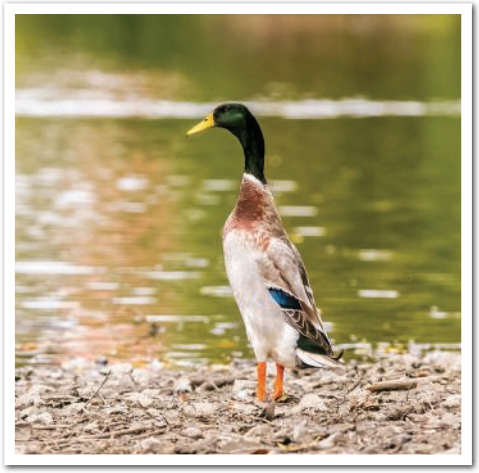
Qual dessas opções permite que ela compre o *videogame* de quinta geração? Justifique sua resposta de acordo com o valor total que ela terá ao final de cada período.

Professor, na atividade **23**, ressalte que os itens estão organizados de maneira a facilitar a abstração do problema e a dividi-lo em partes. Ambas as características são inerentes ao pensamento computacional.

24. Um avicultor cria marrecos-de-pequim e marrecos-corredor-indiano em áreas diferentes da propriedade.

As imagens não estão representadas em proporção.

berdimm/Shutterstock



Lioneska/Shutterstock

Os marrecos-de-pequim (à esquerda) têm a plumagem branca e podem ter medida de massa de até 4 kg; os marrecos-corredores-indianos (à direita) apresentam plumagem com 3 variações de cor e têm medida de massa de até 2 kg.

Depois de algumas pesquisas e observações de campo, o avicultor percebeu que a quantidade de aves crescia de maneira exponencial. A quantidade de marrecos-de-pequim aumentava de acordo com a lei $f(t) = 2^{t+2} + 17$, e a de marrecos-corredores-indianos, de acordo com $g(t) = 2^{t+1} + 81$, com t em anos e $t \geqslant 0$.

a) Determine a quantidade inicial de indivíduos em cada uma das populações de aves nessa propriedade. 21 marrecos-de-pequim e 83 marrecos-corredores-indianos.

b) Depois de quantos anos as populações dessas aves teriam a mesma quantidade de indivíduos?
5 anos.

c) Represente graficamente no caderno essa situação. O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

23. d) Após 2 anos, ela terá R$ 2.325,00 (1 125 + 1 200 = 2 325) para comprar o *videogame* de quinta geração. Após 3 anos, ela terá R$ 2.643,75 (843,75 + 1 800 = 2 643,75) para comprar o *videogame* de quinta geração. Considerando o valor que o *videogame* de quinta geração terá, a opção que permite a Silvana comprá-lo é a 2ª.

Além da sala de aula

Anticoncepcional e meia-vida

fongbeerredhot/Shutterstock

Os anticoncepcionais mais comuns no Brasil são: drospirenona, etinilestradiol e valerato de estradiol.

O anticoncepcional hormonal é um método contraceptivo usado pelas mulheres, sob orientação médica, para inibir a ovulação e, consequentemente, evitar a gravidez. Na versão oral, também é conhecido como pílula.

Esqueci de tomar a pílula. E agora?

[...]

Segundo a pesquisa global "Millennials e Contracepção – Por que nos esquecemos?", realizada [...] em 9 países com 4,5 mil mulheres, [...] as brasileiras são as que mais esquecem de tomar a pílula. [...]

Outro dado importante é que 6 em cada 10 brasileiras não tomam a pílula no mesmo horário todos os dias. E ainda mais grave: quase 40% delas não consideram esse cuidado necessário.

[...]

O que fazer se esquecer de tomar a pílula

[...]

Algumas pílulas trazem a informação de 12 horas de tolerância em caso de atraso. Contudo, a demora não deve se tornar um hábito, pois a eficácia do método é comprometida gradativamente conforme passam as horas, mesmo que você se mantenha no limite do atraso. "Os hormônios possuem meia-vida e duram certo período no organismo, então, mudanças de horário podem comprometer a eficácia", reforça a ginecologista. [...]

CONTE, Juliana. Esqueci de tomar a pílula. E agora? *Drauzio*, 3 out. 2016. Sexualidade. Disponível em: https://tedit.net/v9muv2. Acesso em: 4 jul. 2024.

Os anticoncepcionais são produzidos e indicados de modo que a paciente tenha determinada concentração do princípio ativo no corpo durante todo o período de uso, garantindo sua eficácia. A absorção do medicamento no corpo tem um decaimento exponencial, e a meia-vida dos anticoncepcionais comercializados varia conforme o princípio ativo de cada um.

A meia-vida de alguns medicamentos

O ibuprofeno é um dos medicamentos mais indicados para dor e febre e pode ser encontrado em diferentes formatos e concentrações. A meia-vida desse medicamento é de, aproximadamente, 2 horas. Isso significa que a concentração ingerida do medicamento cai pela metade após 2 horas da ingestão; um quarto após 4 horas da ingestão; um oitavo após 6 horas de ingestão e assim por diante.

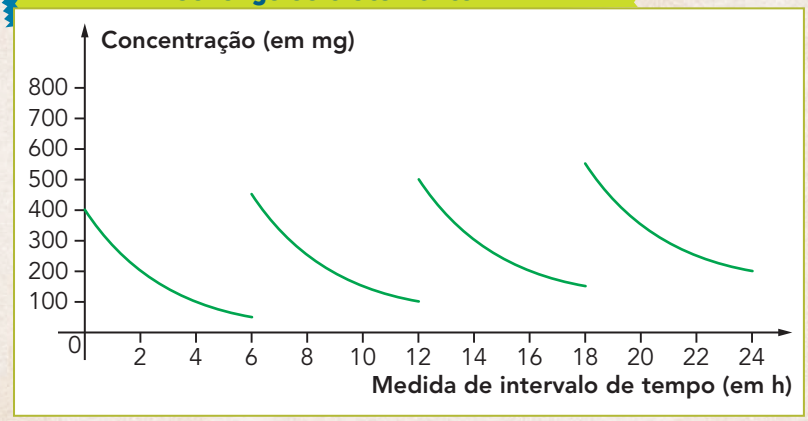
Geralmente, a prescrição de medicamentos como esse não se dá em uma única dose, mas em várias doses espaçadas por um intervalo de tempo. Por exemplo, um médico pode receitar 1 comprimido de 400 mg de ibuprofeno a cada 6 horas para uma paciente que está sofrendo de desconforto causado por cólicas menstruais, e o tratamento continua por até 5 dias.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Saúde*.

Analisando o gráfico da concentração de ibuprofeno no organismo após a ingestão de várias doses de medicamento, percebemos que essa concentração aumenta. Por isso os tratamentos têm um período máximo de administração, para que o corpo não fique intoxicado com altos níveis de medicamentos.

Concentração de ibuprofeno no organismo ao longo do tratamento



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Indo além: Dosagem máxima de medicamentos

Vamos verificar, entre os medicamentos mais comuns no Brasil, quais são as dosagens máximas, a meia-vida e a posologia deles.

Etapas

1. Organização

Reúna-se em grupos de 3 a 5 estudantes.

2. Pesquisa

Pesquisem quais medicamentos são os mais consumidos no Brasil. Cada grupo ficará encarregado de um medicamento.

3. Desenvolvimento

- Pesquisem nomes e marcas que comercializem o medicamento escolhido.
- Leiam a bula oficial do medicamento e procurem as informações de dosagem máxima, meia-vida e posologia.
- Elaborem um gráfico que represente a concentração da substância do medicamento ao longo do tempo de uso. Depois, comparem o valor de concentração da substância apontado no gráfico com a dosagem máxima indicada pela bula.

4. Produto final

Opção 1: Apresentação oral

- Definam com a turma a data para fazer uma apresentação oral das informações que vocês pesquisaram.
- Produzam imagens, *slides*, vídeos, cartazes, etc. para a exposição.

Opção 2: Videodocumentário

- Preparem um documentário em vídeo com as informações pesquisadas e apresentem-no para a escola.
- Se houver possibilidade, apresentem também para a comunidade escolar, chamando a atenção das pessoas para o risco de não seguir as indicações médicas e farmacêuticas ao usar medicamentos.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. O acesso proposto pode ser realizado em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

Sobre o assunto

Para acompanhar os passos da simulação dos níveis hormonais de um anticoncepcional oral cujo hormônio tem meia-vida de 12 horas, visite o seguinte *site*: https://tedit.net/abjhov (acesso em: 4 jul. 2024).

Professor, ressalte que, no passo 6 indicado no *site*, o estudante deve notar que, fazendo uma analogia com os hormônios etinilestradiol e levonorgestrel, quando se toma a primeira pílula, ocorre a ingestão de 100% dos hormônios (dosagem inicial). Depois de 24 horas, com a segunda pílula, há um nível de aproximadamente 50% da dosagem inicial mais os 100% de dosagem dos hormônios ingeridos, totalizando 150%. O mesmo ocorre com a terceira pílula, que totaliza 175%, e assim por diante.

Enem e vestibulares

1. **(Enem)** A gripe é uma infecção respiratória aguda de curta duração causada pelo vírus *influenza*. Ao entrar no nosso organismo pelo nariz, esse vírus multiplica-se, disseminando-se para a garganta e demais partes das vias respiratórias, incluindo os pulmões.

O vírus *influenza* é uma partícula esférica que tem um diâmetro interno de 0,00011 mm.

Disponível em: www.gripenet.pt. Acesso em: 2 nov. 2013 (adaptado).

Em notação científica, o diâmetro interno do vírus *influenza*, em mm, é

a) $1{,}1 \times 10^{-1}$
b) $1{,}1 \times 10^{-2}$
c) $1{,}1 \times 10^{-3}$
d) $1{,}1 \times 10^{-4}$
e) $1{,}1 \times 10^{-5}$

Alternativa **d**.

2. **(Uece)** Uma cultura de bactérias cresce obedecendo à função $f(t) = c3^{2t}$, onde c é uma constante positiva e t é o tempo medido em horas. O valor de t para que a quantidade inicial de bactérias fique multiplicada por nove é

a) 1 hora.
b) $\frac{1}{2}$ hora.
c) 1 hora e meia.
d) 2 horas.

Alternativa **a**.

3. **(Unifor-CE)** O dono de um antiquário restaurou uma de suas obras e estimou que o valor da peça t anos após a restauração é $v(t) = 2\,500(1{,}03)^t$, onde $0 \leqslant t \leqslant 3$. A expressão que corresponde ao valor da peça m meses após a restauração, onde $0 \leqslant m \leqslant 36$, é

a) $v(m) = 2\,500(1{,}03)^{\frac{m}{36}}$
b) $v(m) = 2\,500(1{,}03)^{\left(\frac{m}{3}\right)}$
c) $v(m) = 2\,500\left(\frac{1{,}03}{36}\right)^{3m}$
d) $v(m) = 2\,500(1{,}03)^{12m}$
e) $v(m) = 2\,500(1{,}03)^{\frac{m}{12}}$ Alternativa **e**.

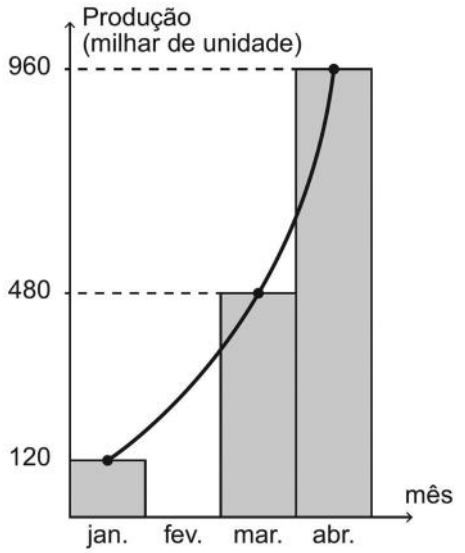
4. **(Enem)** O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida usada para classificar os países pelo seu grau de desenvolvimento. Para seu cálculo, são levados em consideração a expectativa de vida ao nascer, tempo de escolaridade e renda *per capita*, entre outros. O menor valor deste índice é zero e o maior é um. Cinco países foram avaliados e obtiveram os seguintes índices de desenvolvimento humano: o primeiro país recebeu um valor X, o segundo $\sqrt{X}$, o terceiro $X^{\frac{1}{3}}$, o quarto X^2 e o último X^3. Nenhum desses países zerou ou atingiu o índice máximo.

Qual desses países obteve o maior IDH?

a) O primeiro.
b) O segundo.
c) O terceiro.
d) O quarto.
e) O quinto.

Alternativa **c**.

5. **(Enem)** O gráfico informa a produção registrada por uma indústria nos meses de janeiro, março e abril.



Reprodução/Enem, 2021.

Por problemas logísticos, não foi feito o levantamento sobre a produção no mês de fevereiro. Entretanto, as informações dos outros três meses sugerem que a produção nesse quadrimestre cresceu exponencialmente, conforme aponta a curva de tendência traçada no gráfico.

Assumindo a premissa de que o crescimento nesse período foi exponencial, pode-se inferir que a produção dessa indústria no mês de fevereiro, em milhar de unidade, foi:

a) 0. **c)** 240. **e)** 400.
b) 120. **d)** 300.

Alternativa **c**.

6. **(Enem)** Um tipo de célula se reproduz constantemente por divisão celular, triplicando sua quantidade a cada duas horas, sob condições ideais de proliferação. Suponha uma quantidade inicial Q_0 dessas células sob as condições ideais de proliferação durante um certo período.

Qual a representação algébrica da quantidade Q dessas células em função do tempo t, em hora, nesse período?

a) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^t$
b) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{2t}$
c) $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$
d) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}}$
e) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}-1}$

Alternativa **d**.

7. **(UEMG)** Muitos vírus e bactérias têm crescimento exponencial, isso é uma das causas que os torna tão perigosos.

Supondo o surgimento de um novo vírus com um crescimento exponencial de acordo com a seguinte lei de formação $Q(t) = 25 \cdot 3^{2t-7}$, na qual Q é a quantidade de vírus e t é o tempo em dias. Analisando uma cultura desse vírus, quanto tempo demora para que ele alcance a quantidade de 54 675?

a) 6 dias. **c)** 8 dias.
b) 7 dias. **d)** 9 dias.

Alternativa **b**.

8. **(UFMS)** A depreciação de um carro ocorre segundo a expressão $y = V \cdot a^x$, em que y é o valor do bem e x é o tempo que passou em anos, com V e a constantes. Se hoje o valor do carro é R$ 200.000,00, daqui a quatro anos o valor será a metade. Logo, o seu valor daqui a oito anos será:

a) R$ 100.000,00. **d)** R$ 25.000,00.
b) R$ 75.000,00. **e)** R$ 12.500,00.
c) R$ 50.000,00.

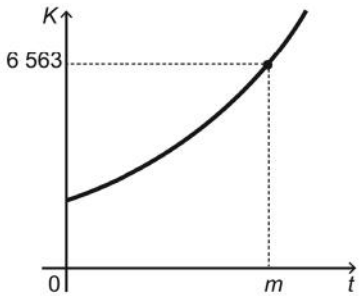
Alternativa **c**.

9. **(ESA)** Durante a construção de uma ponte pela engenharia militar, o sargento responsável observou que a máquina que preparava concreto enchia uma coluna seguindo a função $V(t) = 2 \cdot \left(2^{\frac{t}{12}} - 1\right)$, sendo V o volume preenchido em metros cúbicos (m^3) e t o tempo em minutos. Assinale [no caderno] a alternativa que indica o tempo necessário para o preenchimento de um volume igual a 2 m^3.

a) 4 minutos **d)** 10 minutos
b) 6 minutos **e)** 12 minutos
c) 8 minutos

Alternativa **e**.

10. **(Enem)** O crescimento de uma população de microrganismos é descrito pela expressão $K(t) = 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}t} + 2$, em que $K(t)$ indica a quantidade de microrganismos em um meio de cultura em função do tempo t. O gráfico representa a evolução de K em relação ao tempo t.



Reprodução/Enem, 2021.

Com base nos dados, o valor de m é:

a) $\frac{4}{3}$. **c)** $\frac{24}{5}$. **e)** 81.
b) $\frac{7}{5}$. **d)** 12.

Alternativa **d**.

11. **(UPE)** A meia-vida é o tempo necessário para que a massa de uma amostra radioativa caia pela metade. Num instante inicial, duas amostras radioativas **A** e **B** possuem a mesma massa, 100 gramas. As meias-vidas de **A** e **B** são, respectivamente, 20 horas e 15 horas.

Passados 5 dias, qual a razão entre as massas da amostra radioativa **A** e da amostra radioativa **B**?

a) 32 **c)** 8 **e)** 2
b) 16 **d)** 4

Alternativa **d**.

12. **(Ucpel-RS)** A radioterapia é um dos tratamentos utilizados para destruir células de um tumor ou impedir que elas se multipliquem. O procedimento consiste em aplicar radiações do tipo ionizantes na região a ser tratada. A radiação na radioterapia possui energia para

alterar a estrutura de um material e esse processo conduz à morte da célula em função das alterações no seu interior.

Conforme a localização do tumor, podem ser utilizadas duas técnicas: a teleterapia ou radioterapia externa, em que a radiação é emitida por um aparelho em direção ao corpo do paciente e a braquiterapia, em que a radiação provém de aplicadores que são colocados, em contato com o local a ser tratado.

Na radioterapia externa existem algumas etapas [que] devem ser cumpridas antes da aplicação, dentre essas etapas estão a consulta com um médico radio-oncologista, a realização de exames, a programação do tratamento e a Física-Médica, onde são realizados os cálculos para garantir que a dose aplicada é igual à prescrita.

Fonte: https://www.inca.gov.br/tratamento/radioterapia
https://www.einstein.br/especialidades/hematologia/exames-tratamentos/radioterapia

No caso de técnicas avançadas de radioterapia, até uma determinada distância da borda da região de tratamento, é aplicada a dose inicial de radiação, que em muitos casos corresponde a 100%, após, uma função com decaimento exponencial é utilizada para determinar o percentual de dose que será aplicada à medida que nos afastamos da borda da região de tratamento.

Considere um caso hipotético em que a função que modela o decaimento da dose de radioterapia é dada por:

$$f(x) = 100\ e^{-0,1(x-0,3)} + 60 \cdot (1 - e^{-0,1(x-0,3)}),\quad x \geqslant 0,3 \text{ m}$$

em que $f(x)$ corresponde à dose de radiação (em %) e x à distância (em cm) da borda de tratamento.

Fonte: Jolly, D. J. (2011). Rapidarc – Inverse planning, Dose Calculation and Clinical Application. Christchurch, New Zealand: Master's thesis, University of Canterbury. UC Research Repository. In press. (Função Adaptada)

[Indique no caderno] a alternativa que corresponde à dose de radioterapia aplicada a uma distância de 33 mm da borda de tratamento. Considere $e^{-0,3} = 0,74$.

a) 40,6% **b)** 74,0% **c)** 60,6% **d)** 59,6% **e)** 89,6%

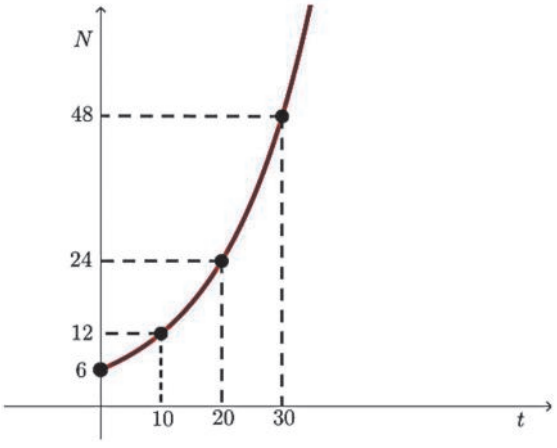
Alternativa **e**.

13. **(Uerj)** Um surto de gripe em uma escola teve início com apenas um aluno. O número total y de alunos infectados pelo vírus da gripe, até x horas depois do momento inicial da contaminação, é dado aproximadamente pela equação $y = 46 - k \cdot 3^{-0,1x}$, em que $0 \leqslant x < 20$ e k é uma constante positiva.

Observando que o surto teve início com $y = 1$, calcule o valor de k e, também, em quantas horas, exatamente, 31 alunos foram contaminados.

14. **(UFSC)** A contaminação ocasionada pela pandemia de covid-19, em cada localidade, variou em função de diversos fatores. Em regiões urbanas de grande movimentação, a propagação do vírus foi abrupta, e o número de infectados foi absurdamente alto. Em contrapartida, em localidades mais reservadas, menos povoadas e com pouca movimentação, a contaminação foi mais branda.

Um estudo fictício foi realizado em dois municípios rurais vizinhos, e foram criados modelos preditivos para o número de infectados em cada região. No município **A**, o número de infectados aumentava a cada dez dias [e a propagação está] representada no gráfico a seguir.



Reprodução/UFSC, 2022.

Já o município **B** teve sua propagação estimada conforme a função $N(t) = \frac{3}{2} \cdot (4)^{\left(\frac{t-8}{3k}\right)}$, ($k \in \mathbb{N}$), em que N indica o número de contaminados em t dias ($t \geqslant 0$). Determine o número de infectados no município **B** no vigésimo sexto dia, sabendo que no vigésimo dia ambos os municípios tinham o mesmo número de infectados. 96 infectados.

13. O valor de k é 45. Foram necessárias 10 horas para que 31 estudantes fossem contaminados.

Conteúdos e aprendizagens

Não escreva no livro

NatalieImme/Shutterstock

O crescimento de bactérias ocorre de maneira **exponencial**.

Radiciação Operações inversas **Potenciação**

As imagens não estão representadas em proporção.

Função exponencial

$$f(x) = b \cdot a^x + c$$

x deve ser um número real ($x \in \mathbb{R}$)

b deve ser não nulo ($b \neq 0$)

a deve ser maior do que zero e diferente de 1 ($a > 0$ e $a \neq 1$)

O coeficiente a define se a função será

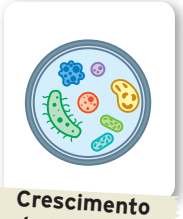
crescente

ou

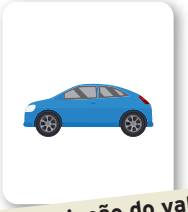
decrescente

Crescimento populacional

Encaminhamento de mensagens



Crescimento de bactérias



Depreciação do valor de um automóvel

Radioatividade

Decaimento de potássio em fósseis

Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

- Compreendo a relação existente entre as operações de radiciação e de potenciação?
- Compreendo a relação existente entre uma equação exponencial e a função exponencial?
- Compreendo a influência dos coeficientes a, b e c em funções do tipo $f(x) = b \cdot a^x + c$?

Respostas pessoais.

UNIDADE 4

Função logarítmica

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta abertura encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

A América Latina e o Caribe são regiões do continente americano que reúnem nações onde são falados principalmente idiomas românicos, isto é, derivados do latim. Os idiomas que predominam são o espanhol, o português e o francês, uma vez que essas regiões foram dominadas pelos impérios coloniais espanhol e português, bem como o francês.

Os idiomas falados na América Latina e no Caribe são, em sua maioria, derivados do latim.

Luis Moura/Arquivo da editora

- Em relação à extensão territorial, quais são os maiores países da América Latina?
- Pesquise a quantidade de habitantes no território brasileiro atualmente.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

- Resposta esperada: Brasil, Argentina, Peru, Colômbia e Bolívia.
- A resposta depende do ano em que os estudantes responderem à atividade.

CAPÍTULO 1

Logaritmo

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

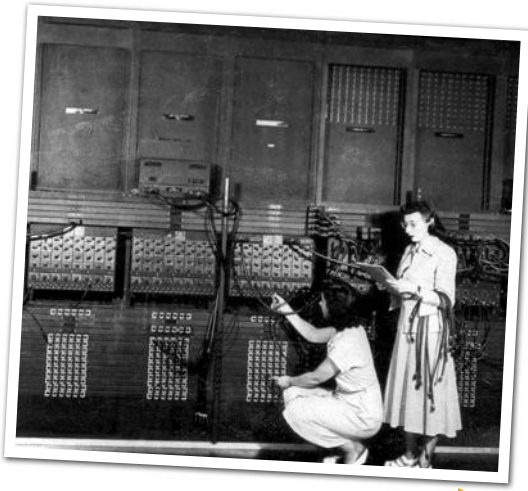
Situação-problema

a) 10: base; 100: logaritmando; 2: valor do logaritmo.
Professor, depois que os estudantes classificarem os números do item **a**, apresente a eles a leitura de $\log_{10} 100 = 2$: o logaritmo de 100 na base 10 é igual a 2.

A história e a definição de logaritmo

A ideia de **logaritmo** surgiu da necessidade de transformar operações complexas de multiplicação e de divisão em algo mais simples, que envolvesse as operações de adição e de subtração. O matemático, físico e astrônomo escocês John Napier (1550-1617) ficou conhecido pelos avanços nos estudos da estrutura do logaritmo, contribuindo para o desenvolvimento de diversas áreas de estudo, como a Astronomia, a navegação e a Computação.

O Eniac (a sigla em inglês corresponde a *electronic numerical integrator and computer*, ou computador e integrador numérico eletrônico) foi o primeiro computador criado. Mesmo sendo um avanço para a época, o Eniac necessitava de um grande processador: o conjunto inteiro do computador tinha medida de massa igual a 30 toneladas, mas a medida de velocidade dele era da ordem de apenas 100 kHz. A utilização dos logaritmos nessa situação foi fundamental para otimizar o intervalo de tempo de processamento de dados.



Apic/Getty Images

O Eniac entrou em funcionamento no início de 1946, comportando apenas 200 *bytes* de memória RAM. Foto de 1946.

Fonte dos dados: SOUSA FILHO, Gilberto Faria; ALEXANDRE, Eduardo de Santana Medeiros. *Introdução à computação*. 2. ed. João Pessoa: Editora da UFPB, 2014.

Reflita

Considerando que o Eniac foi desenvolvido na década de 1940, como você avalia a evolução dos computadores até os modelos atuais? Converse com os colegas sobre o impacto dessa evolução no seu cotidiano.
Resposta esperada: Os computadores evoluíram grandemente em um curto intervalo de tempo e trouxeram profundas mudanças para o cotidiano, especialmente das novas gerações.

Napier definiu que, conhecendo-se a **base** e o **logaritmando** de um logaritmo, o **valor do logaritmo** é o expoente ao qual devemos elevar a base para obter o logaritmando.

a) Temos que $\log_{10} 100 = 2$, pois $10^2 = 100$. Considerando a explicação, em $\log_{10} 100 = 2$, classifique cada número como base, logaritmando ou valor do logaritmo.

b) Considerando $\log_{10} 100 = 2$ e $\log_{10} 1000 = 3$, o que você percebe nesses resultados?

c) Considerando o que você percebeu no item **b**, qual é o valor de $\log_{10} 100\,000$? Por quê?
O valor é 5, pois $10^5 = 100\,000$.

d) E qual é o valor de $\log_2 16$? O valor é 4, pois $2^4 = 16$.

b) Exemplo de resposta: Os logaritmandos são potências de base 10 e o valor de cada logaritmo, na base 10, corresponde à quantidade de zeros do expoente do logaritmando.

Explorando a resolução de equações exponenciais

Na Unidade anterior, em situações modeladas por funções exponenciais, você pôde resolver algumas equações exponenciais utilizando a estratégia de igualar as bases (positivas e diferentes de 1) das potências e, então, concluir que os expoentes são iguais.

Mas será que toda equação exponencial pode ser resolvida dessa maneira? Tente concluir as atividades a seguir e pense sobre isso.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. b) $10^x = 1\,000 \Rightarrow 10^x = 10^3 \Rightarrow x = 3$

1. Com um colega, calculem o valor de x em cada equação dada e registrem os resultados no caderno.

c) Com os conhecimentos estudados até aqui, não é possível resolver a equação. Professor, é esperado que os estudantes não consigam resolver o item **c**.

a) $2^x = 4$ $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$ **b)** $10^x = 1000$ **c)** $2^x = 5$

2. Vocês encontraram alguma dificuldade ao tentar calcular o valor de x no item **c**? Se sim, expliquem. Resposta pessoal. Professor, o objetivo é que os estudantes percebam que a dificuldade para resolver o item **c** decorre do fato de 5 não ser potência de base 2.

3. Considerando ainda o item **c**, pensem em potências de expoentes naturais e respondam: O valor de x está entre quais 2 números naturais consecutivos? E está mais próximo de qual deles?
Temos que $2^2 = 4$ e $2^3 = 8$; então $2^2 < 2^x < 2^3$, ou seja, x está entre 2 e 3. Também temos que 5 está mais próximo de 4 do que de 8, então x está mais perto de 2 do que de 3.

Formalizando o conceito de logaritmo de um número

Considere as seguintes perguntas.

a) A que número x devemos elevar o número 2 para obter 8?

b) E a que número x devemos elevar o número 3 para obter $\frac{1}{81}$?

Acompanhe as resoluções a seguir.

a) $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$

Chamamos o número 3 de **valor do logaritmo** do número 8 na base 2. Representamos assim: $\log_2 8 = 3$. Então:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

b) $3^x = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-4} \Leftrightarrow x = -4$

Analogamente, o número -4 é o valor do logaritmo do número $\frac{1}{81}$ na base 3 e é representado por $\log_3 \frac{1}{81} = -4$.

$$\log_3 \frac{1}{81} = -4 \Leftrightarrow 3^{-4} = \frac{1}{81}$$

Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c é o **valor do logaritmo do número *b* na base *a***. Podemos representar essa definição usando os símbolos:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Analise a seguir a comparação das 2 maneiras de representar a relação estudada:

Forma logarítmica

$\log_a b = c$

a: base do logaritmo.
b: logaritmando.
c: valor do logaritmo.

Forma exponencial

$a^c = b$

a: base da potência.
b: valor da potência.
c: expoente da potência.

Acompanhe a seguir mais alguns exemplos numéricos.

a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

c) $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

d) $\log_8 1 = 0 \Leftrightarrow 8^0 = 1$

Observações

- Condições de existência do logaritmo

  Pela definição, temos que:

  $\log_a b$ existe se, e somente se, $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

  Assim, de acordo com as restrições impostas, não são definidos $\log_3 (-81)$, $\log_{10} 0$, $\log_0 3$, $\log_{-2} 8$ e $\log_1 6$, por exemplo.

- Quando a base do logaritmo for 10, podemos omiti-la: log 2 é o logaritmo de 2 na base 10. Aos logaritmos na base 10 damos o nome de **logaritmos decimais** ou logaritmos de Briggs, em homenagem ao matemático inglês Henry Briggs (1561-1630), famoso por ter introduzido esses logaritmos.

  Por exemplo, $\log 100 = \log 10^2 = 2$.

Reflita

Experimente aplicar a definição de logaritmo nos exemplos $\log_3 (-81)$, $\log_{10} 0$, $\log_0 3$, $\log_{-2} 8$ e $\log_1 6$ e verifique por que eles não são definidos.

Professor, se julgar oportuno, peça aos estudantes que criem os próprios exemplos numéricos e os compartilhem com os colegas, para que resolvam os problemas criados uns pelos outros.

Se fosse possível aplicar a definição, obteríamos as seguintes potenciações, que não existem:

$\log_3 (-81) = x \Leftrightarrow 3^x = -81$

$\log_{10} 0 = x \Leftrightarrow 10^x = 0$

$\log_0 3 = x \Leftrightarrow 0^x = 3$

$\log_{-2} 8 = x \Leftrightarrow (-2)^x = 8$

$\log_1 6 = x \Leftrightarrow 1^x = 6$

Fique atento

O símbolo $\Leftrightarrow$ (lemos "se, e somente se,") indica uma bicondicional, ou seja, da premissa, podemos obter a conclusão, e vice-versa. Por exemplo, na definição de logaritmo, se a premissa ($\log_a b = c$) é verdadeira, então a conclusão ($a^c = b$) também é, e vice-versa, ou seja, se a conclusão é verdadeira, então a premissa também é.

Não escreva no livro

Reflita

Substitua o valor de x nas equações dos itens **a** e **b** da atividade **1** do *Explore para descobrir* do tópico anterior e escreva no caderno as potenciações obtidas e o logaritmo associado a cada uma delas.

a) $2^2 = 4 \Leftrightarrow \log_2 4 = 2$

b) $10^3 = 1\,000 \Leftrightarrow \log_{10} 1\,000 = 3$

Consequências da definição de logaritmo

1ª) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$ qualquer que seja $a > 0$ e $a \neq 1$.

2ª) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.

3ª) $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$ e para todo n.

4ª) $a^{\log_a N} = N$, com $N > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Justificativa: Temos: $\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$.

Substituindo x, obtemos: $a^{\log_a N} = a^x = N$.

5ª) $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Justificativa: Se $\log_a x = r$ e $\log_a y = s$, isto é, $a^r = x$ e $a^s = y$, temos:

$$x = y \Leftrightarrow a^r = a^s \Leftrightarrow r = s \Leftrightarrow \log_a x = \log_a y$$

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow r = s \Leftrightarrow a^r = a^s \Leftrightarrow x = y$$

Atividades resolvidas

1. Determine o valor de $\log_2 128$ e de $\log_{\sqrt{3}} 9$.

Resolução

Representamos por x o valor de cada logaritmo.

$$\log_2 128 = x \overset{\text{def}}{\Rightarrow} 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow \log_2 128 = 7$$

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = x \overset{\text{def}}{\Rightarrow} \left(\sqrt{3}\right)^x = 9 \Rightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^2 \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} 9 = 4$$

2. Sabendo que $\log_a 25 = 2$, calcule o valor de a.

Resolução

Pela definição, o número a procurado deve ser positivo e diferente de 1 ($a > 0$ e $a \neq 1$).

$$\log_a 25 = 2 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25}$$

Logo, $a = 5$ (o valor -5 não deve ser considerado, pois, pela definição, $a > 0$).

3. Sabendo que $A = \log_{10} 0{,}001 + \log_2 \frac{1}{16}$, calcule o número real A.

Resolução

Podemos usar uma das consequências da definição de logaritmos, $\log_a a^n = n$.

$$A = \log_{10} 0{,}001 + \log_2 \frac{1}{16} = \log_{10} 10^{-3} + \log_2 2^{-4} = -3 + (-4) = -7$$

Logo, $A = -7$.

Fique atento

Chamamos $\log_a 25 = 2$ de **equação logarítmica**, pois a incógnita a aparece na base do logaritmo. Quando a incógnita aparece no logaritmando, como em $\log_{25} a = 2$, também temos uma equação logarítmica.

3. a) $2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$

b) $x^3 = 126 \Rightarrow x = \sqrt[3]{126}$

c) $x^2 = 625 \Rightarrow x^2 = 25^2 \Rightarrow x = 25$

d) $10^0 = x \Rightarrow x = 1$

Atividades

Não escreva no livro

1. Usando a definição, calcule o valor de cada logaritmo e registre os resultados no caderno.

a) $\log_3 27$ 3

b) $\log_5 125$ 3

c) $\log 10\,000$ 4

d) $\log_{\frac{1}{2}} 32$ -5

e) $\log 0{,}01$ -2

f) $\log_2 0{,}5$ -1

g) $\log_2 \sqrt{8}$ $\frac{3}{2}$

h) $\log_4 \sqrt{32}$ $\frac{5}{4}$

i) $\log_{\frac{1}{4}} 16$ -2

2. Determine o valor da base a nas igualdades a seguir e registre os resultados no caderno.

a) $\log_a 8 = 3$ $a = 2$

b) $\log_a 81 = 4$ $a = 3$

c) $\log_a 1 = 0$ $a^0 = 1,\ \forall\ a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

d) $\log_a \frac{1}{16} = 2$ $a = \frac{1}{4}$

3. Determine x nas igualdades e registre os resultados no caderno.

a) $\log_2 64 = x$

b) $\log_x 126 = 3$

c) $2 = \log_x 625$

d) $\log x = 0$

4. Converse com um colega e classifiquem cada item a seguir em verdadeiro ou falso. Justifiquem suas respostas no caderno.

a) $\log_5 1 = 1$ Falso, pois $5^1 \neq 1$.

b) $\log_1 5 = 5$ Falso. Pela definição, a base não pode ser igual a 1.

c) $\log_5 5 = 1$ Verdadeiro, pois $5^1 = 5$.

d) $\log_5 1 = 0$ Verdadeiro, pois $5^0 = 1$.

e) $\log_7 3^7 = 3$ Falso, pois $7^3 \neq 3^7$.

f) $\log_3 3^7 = 7$ Verdadeiro, pois $3^7 = 3^7$.

g) $2^{\log_2 5} = 5$ Verdadeiro, pois atende à propriedade $a^{\log_a N} = N$.

h) $2^{\log_5 2} = 5$ Falso, pois, de acordo com a propriedade $\log_a(a^n) = n$, temos que: $\log_2(2^{\log_5 2}) = \log_2 5 \Rightarrow \log_5 2 \neq \log_2 5$.

5. Reúna-se com um colega, calculem o valor das expressões e registrem os resultados no caderno.

a) $10^{\log_{10} 3}$ 3

b) $2^{\log_2 5}$ 5

c) $2^{\log_2 6 \cdot \log_6 10}$ $\left(2^{\log_2 6}\right)^{\log_6 10} = 6^{\log_6 10} = 10$

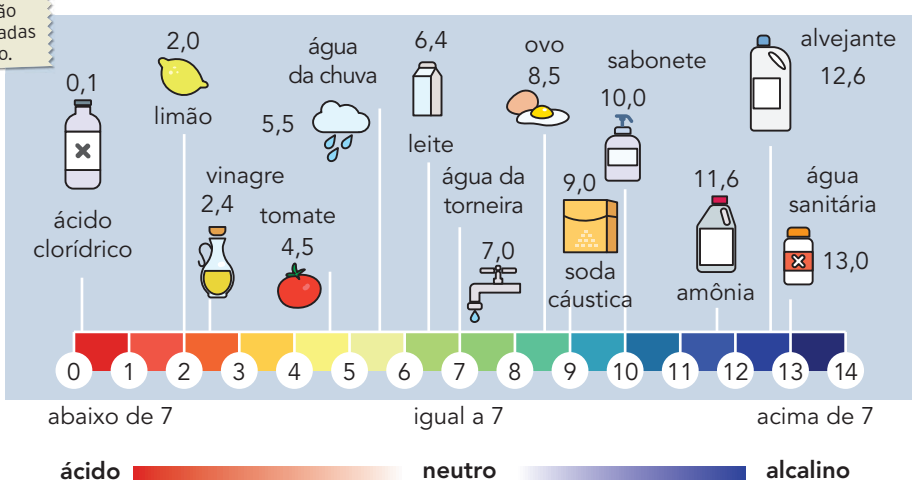
d) $3^{\log_2 7 \cdot \log_3 2}$ $\left(3^{\log_3 2}\right)^{\log_2 7} = 2^{\log_2 7} = 7$

e) $2^{1 + \log_2 3}$ $2^1 \cdot 2^{\log_2 3} = 2 \cdot 3 = 6$

f) $2^{2 + 3\log_2 5}$ $2^2 \cdot 2^{3\log_2 5} = 4 \cdot \left(2^{\log_2 5}\right)^3 = 4 \cdot 5^3 = 500$

6. O pH mede o grau de acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução. Ele é calculado pela expressão $pH = -\log [H^+]$, sendo $[H^+]$ a concentração de íons H^+, em mol/L, presente na solução. Considere o valor do pH de algumas soluções.

As imagens não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) De acordo com essa escala, qual é a concentração de íons H^+ do limão, em potência de base 10? E a do tomate? Qual deles é o mais ácido? 10^{-2} mol/L; $10^{-4,5}$ mol/L; o limão é o mais ácido.

b) Das soluções apresentadas, qual tem concentração de íons H^+ de 10^{-9}? E qual tem concentração de 10^{-13}? Qual delas é a mais alcalina? Soda cáustica; água sanitária; a água sanitária é a mais alcalina.

c) Um químico, ao analisar determinada solução da escala ilustrada, verificou que a concentração de íons H^+ era um valor entre 10^{-8} e 10^{-3}. Quais das soluções podem ter sido analisadas pelo químico? Água da torneira, leite, água da chuva e tomate.

Propriedades operatórias dos logaritmos

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Copie no caderno as expressões numéricas apresentadas em cada item e calcule o valor de cada uma delas.

a) $\log_2 (8 \cdot 16)$ e $\log_2 8 + \log_2 16$. 7 e 7.

b) $\log_3 (9 \cdot 81)$ e $\log_3 9 + \log_3 81$. 6 e 6.

c) $\log_2 \frac{32}{4}$ e $\log_2 32 - \log_2 4$. 3 e 3.

d) $\log_3 \frac{27}{9}$ e $\log_3 27 - \log_3 9$. 1 e 1.

e) $\log_2 4^3$ e $3 \cdot \log_2 4$. 6 e 6.

f) $\log_{10} 100^3$ e $3 \cdot \log_{10} 100$. 6 e 6.

g) $\log_4 64$ e $\frac{\log_2 64}{\log_2 4}$. 3 e 3.

h) $\log_9 81$ e $\frac{\log_3 81}{\log_3 9}$. 2 e 2.

2. Compare os valores obtidos nas expressões numéricas de cada item. O que você analisou?

Resposta esperada: Em cada item, os valores das expressões numéricas dadas são iguais.

O que você deve ter analisado nos exemplos anteriores, do *Explore para descobrir*, são propriedades operatórias dos logaritmos que podem ser demonstradas. Para isso, considere os números reais positivos M e N e o número real positivo a, com $a \neq 1$.

- **Logaritmo de um produto**: em uma base a, o logaritmo do produto de 2 números reais positivos é igual à soma dos logaritmos, na base a, de cada um desses números.

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Fique atento

A propriedade dos logaritmos de transformar produtos em somas foi a motivação original para o início de sua utilização, no século XVII, com o objetivo de simplificar cálculos trabalhosos, especialmente os dos astrônomos.

Acompanhe a demonstração a seguir.

Consideramos $\log_a (M \cdot N) = p$; $\log_a M = m$ e $\log_a N = n$.

Dessas igualdades, obtemos: $a^p = M \cdot N$; $a^m = M$ e $a^n = N$.

Então:

$$a^p = M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Se $a^p = a^{m+n}$, então $p = m + n$ e, portanto:

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Considere alguns exemplos:

a) $\log_7 (2 \cdot 5) = \log_7 2 + \log_7 5$

b) $\log 300 = \log (3 \cdot 100) = \log 3 + \log 100 = \log 3 + \log 10^2 = \log 3 + 2$

- **Logaritmo de um quociente**: em uma base a, o logaritmo do quociente de 2 números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do numerador e o logaritmo do denominador, ambos na base a.

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Acompanhe a demonstração a seguir.

Consideramos $\log_a \frac{M}{N} = q$; $\log_a M = m$ e $\log_a N = n$.

Dessas igualdades, obtemos: $a^q = \frac{M}{N}$; $a^m = M$ e $a^n = N$.

Então:

$$a^q = \frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Se $a^q = a^{m-n}$, então $q = m - n$ e, portanto:

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

Considere os exemplos a seguir.

a) $\log_5 \left(\frac{2}{3}\right) = \log_5 2 - \log_5 3$

b) $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 1 - \log_2 8 = 0 - \log_2 2^3 = -3$

Fique atento

Analise um caso particular dessa propriedade, quando $M = 1$.

$$\log_a \frac{1}{N} = \log_a 1 - \log_a N = 0 - \log_a N$$

Ou seja:

$$\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$$

- **Logaritmo de uma potência**: em uma base a, o logaritmo de uma potência de base real positiva é igual ao produto do expoente da potência pelo logaritmo, na base a, da base da potência.

$$\log_a M^N = N \cdot \log_a M$$

Acompanhe a demonstração.

Consideramos $\log_a M^N = r$ e $\log_a M = m$.

Pela definição de logaritmo, obtemos: $a^r = M^N$ e $a^m = M$.

Então:

$$a^r = M^N = (a^m)^N = a^{Nm}$$

Se $a^r = a^{Nm}$, então $r = Nm$ e, portanto:

$$\log_a M^N = N \cdot \log_a M$$

Fique atento

Também podemos aplicar essa propriedade no logaritmo de uma raiz (quando existir).

$$\log_a \sqrt[N]{M} = \log_a M^{\frac{1}{N}} = \frac{1}{N} \cdot \log_a M$$

Considere alguns exemplos:

a) $\log_3 8^4 = 4 \cdot \log_3 8$

b) $\log 10^2 = 2 \cdot \log 10 = 2 \cdot 1 = 2$

c) $\log_7 5^3 = 3 \cdot \log_7 5$

d) $\log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 4^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_2 4 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

Mudança de base de um logaritmo

Em algumas situações, é adequado mudar a base de um logaritmo para facilitar o cálculo do valor dele. Para fazermos isso, podemos dividir o logaritmo do logaritmando pelo logaritmo da base, ambos em uma mesma nova base.

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

(Sendo N, a e b números reais positivos, $a \neq 1$ e $b \neq 1$.)

Acompanhe a demonstração a seguir.

Consideramos $\log_b N = p$, $\log_a N = q$ e $\log_a b = r$.

Então obtemos, pela definição de logaritmo: $b^p = N$, $a^q = N$ e $a^r = b$.

Fazendo as substituições, temos:

$$N = a^q = b^p = (a^r)^p = a^{rp}$$

Se $a^q = a^{rp}$, então $q = rp$; portanto, $p = \frac{q}{r}$ e $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$.

Não escreva no livro

Reflita

Como garantir que $r \neq 0$?

Temos que $r = \log_a b$, a e b são números reais positivos e $a \neq 1$ e $b \neq 1$.
Então $a^r \neq 1 \Rightarrow r \neq 0$.

Fique atento

Perceba o que acontece nessa propriedade quando fazemos $N = a$.

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$$

Então, quando existirem os logaritmos envolvidos, podemos escrever:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \text{ ou } \log_b a \cdot \log_a b = 1$$

Considere alguns exemplos:

a) $\log_7 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 7}$ (na base 2)

b) $\log_7 5 = \frac{\log 5}{\log 7}$ (na base 10)

c) $\log_5 25 = 2 \Leftrightarrow \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

d) $\log_b a = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \log_a b = -\frac{4}{3}$

Atividades resolvidas

4. Determine o desenvolvimento logarítmico da expressão $\log\left(\frac{a\sqrt{b}}{c^3}\right)$.

> **Fique atento**
>
> O desenvolvimento logarítmico utiliza as propriedades dos logaritmos para expandir uma expressão, de maneira que permita calcular o logaritmo de um produto, quociente ou potência conhecendo-se apenas os logaritmos dos termos das operações.

Resolução

$$\log\left(\frac{a\sqrt{b}}{c^3}\right) = \log\left(\frac{a \cdot b^{\frac{1}{2}}}{c^3}\right) = \log\left(a \cdot b^{\frac{1}{2}}\right) - \log c^3 = \log a + \log b^{\frac{1}{2}} - \log c^3 =$$
$$= \log a + \frac{1}{2} \cdot \log b - 3 \cdot \log c$$

Portanto, $\log\left(\frac{a\sqrt{b}}{c^3}\right) = \log a + \frac{1}{2} \cdot \log b - 3 \cdot \log c$.

5. Sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, expresse $\log 72$ em função de a e b.

Resolução

$$\log 72 = \log (2^3 \cdot 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 = 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 3a + 2b$$

Então, $\log 72 = 3a + 2b$.

6. Escreva $\log_2 8$ usando logaritmos na base 10.

Resolução

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \Rightarrow \log_2 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2}$$

Atividades

Não escreva no livro

7. Adotando as aproximações $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}5$, determine o valor aproximado de cada logaritmo.

a) $\log 6$ Aproximadamente 0,8.

b) $\log 9$ Aproximadamente 1.

c) $\log 1{,}5$ Aproximadamente 0,2.

d) $\log 24$ Aproximadamente 1,4.

e) $\log 144$ Aproximadamente 2,2.

f) $\log 5$ Aproximadamente 0,7.

8. Determinado computador processa certa quantidade x de *bits* em $\log x$ milissegundos (ms). Sabendo que $\log 5 \simeq 0{,}7$, quantos milissegundos são necessários para que esse computador processe 125 000 *bits*? E 5 000 000 *bits*?
Aproximadamente 5,1 ms; aproximadamente 6,7 ms.

SFIO CRACHO/Adobe Stock

Em um computador, a Unidade Central de Processamento é a parte responsável pelo processamento de dados.

9. $(1{,}034)^x = 2 \Rightarrow \log_{1{,}034} 2 = x \Rightarrow \frac{1}{\log_2 1{,}034} = x \Rightarrow x \simeq \frac{1}{0{,}05} \Rightarrow (1{,}034)^x \simeq 20$; logo, em aproximadamente 20 anos.

9. A equação exponencial $(1{,}034)^x = 2$ representa a medida de intervalo de tempo x, em anos, para o qual a quantidade de pessoas com 60 anos ou mais na América Latina e no Caribe dobre.

Com os conhecimentos de logaritmo que você já adquiriu e considerando $\log_2 (1{,}034) \simeq 0{,}05$, reescreva no caderno essa igualdade usando logaritmo e calcule em quantos anos essa população dobrará.

América Latina: Divisão política 2024

Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Fonte: elaborado com base em IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 41a.

Fique atento

Perceba que você deve usar o conceito de logaritmo e o valor do logaritmo de um número dado para resolver uma equação exponencial.

10. Considerando $\log 2 \simeq 0{,}3$ e as concentrações de íons H^+ de diferentes soluções dadas em cada item, calcule o valor do pH de cada solução e registre os resultados no caderno. Lembre-se de que $pH = -\log [H^+]$.

a) $2 \cdot 10^{-5}$ mol/L
Aproximadamente 4,7.

b) $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ mol/L
Aproximadamente 4,3.

c) $0{,}2 \cdot 10^{-6}$ mol/L
Aproximadamente 6,7.

11. **(FGV-SP)** Em uma máquina fotográfica, a abertura na lente, pela qual passa a luz, é indicada pela letra f. Admita que a fórmula que fornece a medida da luz (S) que passa pela abertura, em função do valor de f, para uma câmera de lente 35 mm, seja dada por $S = \log_2 f^2$.

Reprodução/FGV-SP, 2019.

A imagem indica uma lente 35 mm de abertura máxima igual a 1,4. Adotando $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 7 = 0{,}845$, o valor de S para a abertura máxima dessa lente é, aproximadamente:

a) 0,91.
b) 0,93.
c) 0,95.
d) 0,97.
e) 0,99.
Alternativa **d**.

Fique atento

Para calcular o pH ou saber a concentração de íons hidrogênio, devemos usar a equação $pH = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ é a concentração dos íons hidrogênio na solução em mol/L.

12. Calcule em quantos anos a quantidade de material radioativo inicial Q_0 de uma substância se reduz a $\frac{1}{9}$, sabendo que a meia-vida dela é igual a 3 anos, e registre o resultado no caderno. Lembre-se de que a quantidade de material radioativo depois de t anos é dada por $Q(t) = Q_0 \cdot a^t$. (Dados: $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$.) Aproximadamente 9,6 anos.

Fique atento

Lembre-se de que meia-vida é a medida de intervalo de tempo que deve decorrer para que metade dos átomos de uma substância radioativa se desintegre.

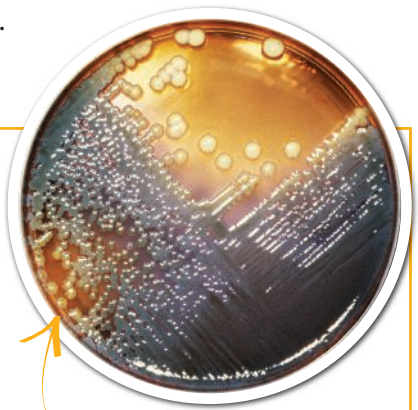
13. No caderno, reelabore o enunciado da atividade **12** de modo que você precise usar na resolução os valores $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 7 \simeq 0{,}85$.

13. Exemplo de problema: Calcule a medida de intervalo de tempo necessária para que a quantidade de material radioativo inicial Q_0 de uma substância se reduza a $\frac{1}{49}$, sabendo que a meia-vida dela é igual a 3 anos. Lembre-se de que a quantidade de material radioativo depois de t anos é dada por $Q(t) = Q_0 \cdot a^t$. (Dados: $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 7 \simeq 0{,}85$.)

Atividades resolvidas

7. Sabemos que a quantidade de bactérias em uma cultura, depois de certa medida de intervalo de tempo t, em minutos, é dada por $N(t) = N_0 \cdot (2{,}7)^{rt}$, em que N_0 é a quantidade inicial de bactérias (quando $t = 0$) e r é a taxa de crescimento de bactérias da cultura.

Em quantos minutos a quantidade de bactérias dobrará em uma cultura se a taxa de crescimento dela é 5% por minuto? Se necessário, use uma calculadora científica ou uma planilha eletrônica para realizar os cálculos.



CNRI/SPL/Fotoarena

Cultura de enterobactérias em meio ágar. Esse procedimento de cultivo é utilizado em muitas pesquisas, como no desenvolvimento de medicamentos e novos tratamentos.

Resolução

De acordo com os dados do problema, a pergunta é: Em quantos minutos temos $N(t) = 2N_0$?

Assim, calculamos:

$$N(t) = 2N_0 \Rightarrow \cancel{N_0} \cdot 2{,}7^{0{,}05t} = 2\cancel{N_0} \Rightarrow 2{,}7^{0{,}05t} = 2 \Rightarrow \log_{2,7} 2 = 0{,}05t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log 2}{\log 2{,}7} = 0{,}05t \Rightarrow 0{,}05t \simeq 0{,}7 \Rightarrow t \simeq 14$$

Logo, a quantidade de bactérias dobrará em aproximadamente 14 minutos.

Fique atento

A medida de intervalo de tempo não depende da quantidade inicial de bactérias.

8. Em quantos anos 500 g de uma substância radioativa, que se desintegra a uma taxa de 3% ao ano, se reduzirão a 100 g? Use $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{-rt}$, em que Q é a medida de massa da substância, r é a taxa de desintegração e t é a medida de intervalo de tempo, em anos.

Resolução

$$Q(t) = Q_0 \cdot 3^{-rt} \Rightarrow 100 = 500 \cdot 3^{-0{,}03t} \Rightarrow 0{,}2 = 3^{-0{,}03t} \Rightarrow \log_3 0{,}2 = -0{,}03t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log 0{,}2}{\log 3} = -0{,}03t \Rightarrow -0{,}03t \simeq -1{,}46 \Rightarrow t \simeq 48{,}7$$

Logo, essa substância estará reduzida a 100 gramas em aproximadamente 48,7 anos.

9. Uma instituição bancária oferece financiamentos imobiliários a pessoas físicas com taxa de juros de 8,9% ao ano. Nessa situação, quanto tempo demora para que o valor a ser pago ao banco pelo financiamento dobre?

Joel_420/Shutterstock

As instituições bancárias públicas ou privadas ofertam linhas de crédito de longo prazo destinadas à aquisição de imóveis (novos ou usados) e terrenos ou a construções. Os bens adquiridos com os financiamentos imobiliários podem ter fins habitacionais ou comerciais.

Resolução

De acordo com a fórmula estudada na Unidade anterior, no tópico "Ampliando a ideia de função exponencial", em um sistema de juros compostos (que é o aplicado em financiamentos bancários), temos $M = C(1 + i)^t$, em que M é o montante ao final de cada período (nesse caso, em anos), C é o capital inicial (nesse caso, o valor inicial do financiamento) e i é a taxa de juros compostos aplicada a cada medida de intervalo de tempo t.

Queremos saber quando $M = 2C$. Então:

$$M = 2C \Rightarrow C(1 + 0{,}089)^t = 2C \Rightarrow 1{,}089^t = 2 \Rightarrow \log_{1{,}089} 2 = t \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}089}$$

Usando uma calculadora, temos $\frac{\log 2}{\log 1{,}089} \simeq 8{,}13$.

Logo, o valor a ser pago ao banco dobra quando o financiamento é pago em aproximadamente 8 anos.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Não escreva no livro

Atividades

Nas atividades a seguir, sempre que necessário, use calculadoras científicas ou planilhas eletrônicas para efetuar os cálculos.

14. Com a difusão do uso da calculadora científica (física, no *smartphone*, no computador ou *on-line*), o uso de tabelas de logaritmos, muito úteis no passado, está praticamente abolido para cálculos do cotidiano.

As calculadoras científicas, no geral, têm 2 opções de comando que podem ser utilizadas nos cálculos envolvendo logaritmos:

- **Tecla log**: permite calcular o valor do logaritmo de um número N (natural ou decimal positivo) na base 10.
- **Tecla 10^x**: permite calcular o número N quando se conhece o valor de $\log N = x$.

natrot/Shutterstock

Detalhe das teclas de uma calculadora científica física.

As imagens não estão representadas em proporção.

Fique atento

Em algumas calculadoras, para obter o valor de $\log N$, digitamos primeiro N e, depois, log.

Verifique como usar a tecla **log** em calculadoras físicas, no *smartphone*, no computador ou *on-line*.

17. $M = 3C \Rightarrow C(1 + 0{,}0036)^t = 3C \Rightarrow 1{,}0036^t = 3 \Rightarrow \log_{1{,}0036} 3 = t \Rightarrow t = \frac{\log 3}{\log 1{,}0036} \simeq 306$; em aproximadamente 306 meses, ou seja, em aproximadamente 25,5 anos.

As planilhas eletrônicas também permitem o cálculo do valor de logaritmos usando fórmulas. Por exemplo, em alguns programas, para calcular o valor do logaritmo de um número natural ou decimal positivo na base 10, usamos a fórmula **=LOG10**.

Assim, usando uma dessas tecnologias, as propriedades operatórias dos logaritmos e as quatro operações fundamentais, podemos realizar diversos cálculos. Analise o exemplo a seguir e, depois, calcule no caderno o valor de x em cada item.

Vamos calcular log 36.

- Com uma calculadora:

Banco de imagens/ Arquivo da editora

- Com uma planilha eletrônica:

Reprodução/LibreOffice

	A
1	=LOG10(36)

	A
1	1,556302501

Portanto, log 36 ≃ 1,56.

a) $x = \log \sqrt[3]{4{,}57}$ Aproximadamente 0,22.

b) $x = \log_2 997$ Aproximadamente 9,96.

c) $\log_{10} x = 0{,}72342$ Aproximadamente 5,29.

15. Qual é o valor do pH de uma solução cuja concentração de H^+ é $4{,}5 \cdot 10^{-5}$ mol/L? Utilize uma calculadora ou uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos.

Carrossel de imagens

As imagens não estão representadas em proporção.

Deyan Georgiev/Shutterstock

O pH de uma solução pode ser medido por meio de fitas-teste, que, após o contato com a solução, mudam de cor para indicar se ela é ácida, básica ou neutra.

$pH = -\log(4{,}5 \cdot 10^{-5}) = -(\log 4{,}5 + \log 10^{-5}) =$
$= -\log 4{,}5 + 5 \cdot \log 10 \simeq -0{,}653 + 5 \cdot 1 = 4{,}347$
Aproximadamente 4,347.

16. Se um capital de R$ 800.000,00 for aplicado a juros compostos e à taxa anual de 12%, após quantos anos da aplicação serão obtidos juros no valor de R$ 700.000,00? Utilize uma calculadora ou uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos. Aproximadamente 5 anos e meio.

17. Uma pessoa deposita uma quantia na caderneta de poupança, à taxa de rendimento de 0,36% ao mês. Em quantos anos a quantia depositada triplica? Utilize uma calculadora ou uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos.

TH2I Shutter Rich/Shutterstock

A caderneta de poupança é um modo de fazer investimentos de baixo risco.

18. Uma pessoa deposita R$ 1.000,00 em um fundo de aplicação que rende, em média, 1,5% ao mês. Utilize uma calculadora ou planilha eletrônica para efetuar os cálculos.

a) Em quantos meses essa pessoa terá, no mínimo, R$ 1.300,00? 18 meses.

b) E em quantos meses essa pessoa teria essa quantia se a taxa fosse de 1% ao mês? 26 meses.

19. Uma instituição financeira cobra juros do cartão de crédito de 9% ao mês do saldo devedor. Um usuário desse cartão tem saldo devedor de R$ 505,00. Utilize uma calculadora ou uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos.

a) Qual é a medida de intervalo de tempo em que essa dívida chegará a R$ 600,00 caso não seja paga? (Use as aproximações: log 2 ≃ 0,3; log 3 ≃ 0,48; log 1,01 ≃ ≃ 0,004; log 1,09 ≃ 0,038.) Aproximadamente 2 meses.

b) Pesquise e cite uma vantagem e uma desvantagem do uso do cartão de crédito para a realização de compras.

A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

22. $Q(t) = Q_0 \cdot (2,7)^{-rt} \Rightarrow 5 = 50 \cdot (2,7)^{-0,08t} \Rightarrow \frac{1}{10} = (2,7)^{-0,08t} \Rightarrow 10^{-1} = (2,7)^{-0,08t} \Rightarrow \log (2,7)^{-0,08t} = \log 10^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow -0,08t \cdot \log 2,7 = -1 \cdot \log 10 \Rightarrow t = \frac{-1}{-0,08 \cdot \log 2,7} \simeq \frac{1}{0,08 \cdot 0,43} \Rightarrow t \simeq 29$; logo, em aproximadamente 29 anos.

Não escreva no livro

20. Em um financiamento de R$ 200.000,00 em uma instituição bancária para a compra de um imóvel à taxa de juros compostos de 8% ao ano, o valor final a ser pago é R$ 440.000,00. Em quantos anos esse financiamento será quitado? Utilize uma calculadora ou uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos. (Dado: $\log_{1,08} 2,2 \simeq 10$.)

20. Queremos saber o valor de t para o qual $M = 440\,000$, dados $C = 200\,000$ e $i = 8\% = 0,08$ ao ano.

$440\,000 = 200\,000 \cdot (1 + 0,08)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow (1,08)^t = 2,2 \Rightarrow \log_{1,08} 2,2 = t \Rightarrow$

$\Rightarrow t \simeq 10$

Logo, em aproximadamente 10 anos.

Texto para a próxima atividade.

De acordo com a lei de resfriamento de Newton, a diferença das medidas de temperatura de um corpo e do meio que o contém decresce a uma taxa de variação proporcional à diferença dessas medidas. Considerando ΔT_0 a diferença das medidas de temperatura do corpo e do meio, no instante $t = 0$, e $\Delta T(t)$ a diferença dessas medidas, em um instante t qualquer, essa lei se traduz pela expressão $\Delta T(t) = \Delta T_0 \cdot e^{-\alpha t}$, em que **e** é uma constante matemática e a constante α depende do corpo.

21. Suponha que, em determinado local cuja medida de temperatura ambiente é 30 °C, exista uma panela de água fervente no fogo. Em $t = 0$, o fogo é desligado, e 5 minutos depois a medida de temperatura da água é 65 °C. Depois de qual medida de intervalo de tempo, a partir do desligamento do fogo, a água atingirá a medida de temperatura 37 °C? Utilize uma calculadora ou uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos. (Considere $\log 2 \simeq 0,3$.)

a) 20 minutos e 40 segundos.

b) 16 minutos e 40 segundos.

c) 12 minutos e 40 segundos.

d) 8 minutos e 40 segundos.

e) 4 minutos e 40 segundos.

Alternativa **b**.

Viktoria Kytt/Shutterstock

Nunca utilize o fogão sem a supervisão de um adulto. Ao colocar uma panela com água no fogão aceso, é possível se queimar com a chama do fogão, com os utensílios aquecidos e com o vapor quente que sai da panela.

Para as atividades a seguir, use a fórmula $Q(t) = Q_0 \cdot (2,7)^{-rt}$, em que Q representa a medida de massa da substância ou a quantidade de bactérias, r é a taxa e t é a medida de intervalo de tempo.

22. Uma substância radioativa se desintegra a uma taxa de 8% ao ano. Em quantos anos 50 g dessa substância se reduzirão a 5 g? Utilize uma calculadora ou uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos.

23. No caderno, copie o enunciado da atividade anterior e altere-o de modo que as medidas de massa não sejam dadas, mas que seja possível fazer todos os cálculos e obter a mesma resposta. Utilize uma calculadora ou uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos.

O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

24. Em um laboratório, uma pessoa verifica que a taxa de crescimento relativo contínuo de bactérias em uma cultura é 2,5% por minuto. Nessas condições, em quantos minutos a quantidade de bactérias passará de 4 000 para 6 000? Utilize uma calculadora ou uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos.

24. $Q(t) = Q_0 \cdot (2,7)^{-rt} \Rightarrow 6\,000 =$

$= 4\,000 \cdot (2,7)^{-(0,025t)} \Rightarrow (2,7)^{-0,025t} =$

$= \frac{3}{2} \Rightarrow \log (2,7)^{-0,025t} = \log \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow -0,025t \cdot \log 2,7 = \log 2 - \log 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 2 - \log 3}{-0,025 \cdot \log 2,7} \simeq \frac{0,30 - 0,48}{-0,025 \cdot 0,43} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \simeq 16,74$

Portanto, em aproximadamente 16,74 minutos, ou seja, em aproximadamente 16 minutos e 44 segundos.

25. No caderno, calcule a meia-vida de uma substância radioativa que se desintegra a uma taxa de 4% ao ano. Utilize uma calculadora ou uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos. Aproximadamente 17 anos.

26. No caderno, elabore mais um problema para ser resolvido usando a fórmula $Q(t) = Q_0 \cdot (2,7)^{-rt}$ dada. Depois, peça a um colega que confira o problema que você elaborou e a resolução.

Exemplo de problema: Uma substância radioativa se desintegra a uma taxa de 6% ao ano. Em quantos anos 80 g dessa substância se reduzirão a 8 g?

CAPÍTULO 2

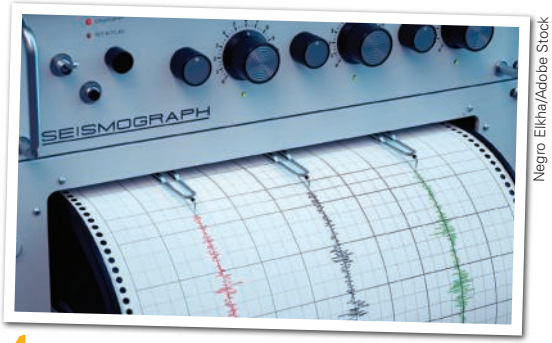
A função logarítmica

Situação-problema 1

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Mapa clicável

Terremotos



Negro Elkha/Adobe Stock

O sismógrafo é um instrumento de medição de intensidade de terremotos de alta sensibilidade que registra as ondas sísmicas, gera gráficos e representa as oscilações do terreno em caso de tremor de terra.

A ocorrência de terremotos pode causar grandes impactos em uma região. Para mensurarmos a energia liberada em um terremoto, usamos o conceito da medida de magnitude expressa na escala Richter. O cálculo é feito aplicando a lei de uma **função logarítmica**, que considera a razão entre a medida de energia liberada em determinado abalo sísmico e uma medida de energia padrão, utilizada como referência.

Considere que a medida de energia de referência para a escala Richter é $7 \cdot 10^{-3}$ kWh. Considere também que um terremoto de magnitude 2 libera uma medida de energia igual a 7 kWh, um abalo sísmico de magnitude 4 libera $7 \cdot 10^{3}$ kWh de medida de energia e um terremoto de magnitude 6 libera uma medida de energia igual a $7 \cdot 10^{6}$ kWh.

a) O que ocorre com a medida de energia liberada por um terremoto quando a magnitude aumenta em 2 kWh? A medida de energia liberada fica multiplicada por 1 000.

b) Por quanto devemos multiplicar a medida de energia de referência para obter cada medida de energia citada? Por 1 000, por 1 000 000 e por 1 000 000 000, respectivamente.

c) Pesquise como o movimento das placas tectônicas causa terremotos e por que sentimos poucos efeitos deles no Brasil. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Sobre o assunto

Um dos motivos de os terremotos serem tão perigosos é o fato de ser muito difícil prevê-los com antecedência. Algumas técnicas conseguem antecipar em apenas alguns minutos onde e quando um terremoto vai acontecer, utilizando sensores que monitoram determinadas regiões e são capazes de captar atividades sísmicas.

Para mais informações, sugerimos as leituras a seguir.

- BBC. O que faz ser tão difícil prever um terremoto como o que atingiu o México. *G1*, [*s. l.*], 21 set. 2017. Disponível em: https://tedit.net/h4xyhy. Acesso em: 4 jul. 2024.
- THENÓRIO, Iberê. Entenda como são feitos os prédios resistentes a terremotos. *G1*, [*s. l.*], 5 mar. 2010. Disponível em: https://tedit.net/g9lls7. Acesso em: 4 jul. 2024.

Situação-problema 2

Processo de escolha

Gorodenkoff/Shutterstock

Jogos digitais podem ser acessados em muitos dispositivos, como computadores, consoles especializados, *tablets* e até mesmo *smartphones*.

Em jogos digitais, como aqueles que acessamos em consoles de *videogame* ou no computador, somos levados constantemente a fazer escolhas. Isso também acontece quando vamos a um restaurante e escolhemos um prato do cardápio ou quando um técnico tem de escolher a escalação de um time de futebol.

Você já parou para pensar na medida de intervalo de tempo que gastamos para fazer escolhas como essas? Ou pensar se essa medida é maior ou menor dependendo da quantidade de opções disponíveis?

Em 1951, o psicólogo britânico William Edmund Hick (1912-1974) e o psicólogo estadunidense Ray Hyman (1928-) se interessaram na busca por uma função que mostrasse a relação entre a medida de intervalo de tempo necessária para fazer uma escolha e a quantidade de opções equiprováveis disponíveis.

Eles realizaram experimentos e perceberam que, quanto maior a quantidade de opções equiprováveis, maior era a medida de intervalo de tempo necessária para que a escolha fosse feita, e que essa relação era modelada pela lei de uma **função logarítmica**. A fórmula recebeu o nome de lei de Hick-Hyman (ou lei de Hick).

Fique atento

Lembre-se de que eventos equiprováveis são aqueles que têm igual chance de ocorrer em um experimento.

a) Analise a tabela com as medidas de intervalo de tempo de escolha em relação à quantidade de escolhas equiprováveis possíveis, de acordo com a lei de Hick-Hyman.

Relação entre a medida de intervalo de tempo e a quantidade de escolhas possíveis

Quantidade de escolhas equiprováveis possíveis	Medida de intervalo de tempo de escolha (em milissegundos)
0	0
1	150
15	600
63	900
127	1050
255	1200
1023	1500

Dados elaborados para fins didáticos.

No caderno, indique esses pontos em um plano cartesiano associando a medida de intervalo de tempo de escolha em função da quantidade de escolhas equiprováveis possíveis.

a) O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Analise os pontos que você marcou no plano cartesiano e represente no mesmo plano cartesiano a curva que contém todos eles. Essa curva é o gráfico de uma função que você já conhece? Resposta pessoal.

Professor, é esperado que os estudantes não associem a curva a nenhuma função que já estudaram no Ensino Médio ou no Ensino Fundamental, pois os pontos pertencem ao gráfico de uma função logarítmica, que eles estudarão neste capítulo.

Formalizando a definição de função logarítmica

Na Unidade anterior, estudamos a função exponencial, em que, dado um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial é $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = a^x$.

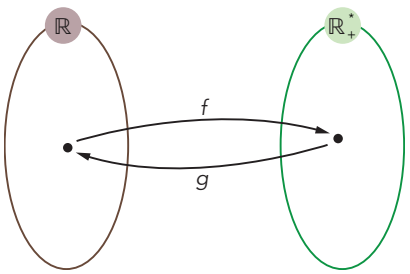
Também estudamos que essa função é injetiva (ou injetora) e, como todos os elementos do contradomínio da função $\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ tem um correspondente no domínio ($\mathbb{R}$), podemos dizer que a função é sobrejetiva.

Assim, concluímos que f é uma função bijetiva (é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+^*$), sendo crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Essas considerações garantem que f tem uma função inversa e podemos defini-la.

A inversa da função exponencial de base real a (com $a > 0$ e $a \neq 1$) é a **função logarítmica** $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \log_a x$, ou seja, a função que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Domínio da função logarítmica: $\mathbb{R}_+^*$.
Conjunto imagem da função logarítmica: $\mathbb{R}$.

Você estudou anteriormente que:

- a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = a^x$, tem esta propriedade:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

- a função logarítmica $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, inversa da função exponencial, dada por $g(x) = \log_a x$, tem esta propriedade:

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

De fato, para $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, a função g é a inversa da função f, pois:

$$f(g(x)) = a^{g(x)} = a^{\log_a x} = x$$

e

$$g(f(x)) = \log_a a^x = x \cdot \log_a a = x \cdot 1 = x$$

Fique atento

As funções logarítmicas mais usadas são aquelas cuja base a é maior do que 1, particularmente, as de base 10 (logaritmos decimais), as de base 2 (logaritmos binários) e as de base **e**. Lembre-se de que o número **e**, chamado de número de Napier, ou número de Euler, é irracional. Os logaritmos com base **e** (chamados de logaritmos naturais ou logaritmos neperianos e representados por $\ln x$) são muito utilizados em situações de Engenharia e Física, bem como no estudo e na aplicação de outras ciências.

Sobre o assunto

Para saber mais do número de Euler, sugerimos que assista ao vídeo *Por que a identidade de Euler é considerada a equação mais bonita que existe*, da BBC News Brasil. Disponível em: https://tedit.net/025cvv. Acesso em: 23 jul. 2024.

São exemplos de função logarítmica as funções de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

- $f(x) = \log_2 x$
- $g(x) = \log_{10} x = \log x$
- $h(x) = \log_e x = \ln x$
- $i(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

Atividades

Não escreva no livro

1. As funções logarítmicas f e g são dadas por $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = \log_4 x$. Determine, no caderno, o que se pede em cada item.
e) $g(x) = 4 \Rightarrow \log_4 x = 4 \Rightarrow x = 4^4 = 256$
i) $g(f(81)) = g(\log_3 81) = g(\log_3 3^4) = g(4) = \log_4 4 = 1$

a) $f(9)$ $f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$
b) $g(4)$ $g(4) = \log_4 4 = 1$
c) $D(f)$ $D(f) = \mathbb{R}_+^*$
d) $\text{Im}(f)$ $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$
e) x tal que $g(x) = 4$.
f) $f^{-1}(x)$ $f^{-1}(x) = 3^x$
g) $g^{-1}(x)$ $g^{-1}(x) = 4^x$
h) $f^{-1}(1)$ $f^{-1}(1) = 3^1 = 3$
i) $g(f(81))$

2. Dadas as leis de correspondência $f(x) = \log_3 (x + 1)$, $g(x) = 4 + \log_2 x$ e $h(x) = \log 2x$, determine o que se pede no caderno.

a) $f(2)$; $f(2) = \log_3 (2 + 1) = \log_3 3 = 1$
b) $g(2)$; $g(2) = 4 + \log_2 (2) = 4 + 1 = 5$
c) $h(5)$; $h(5) = \log (2 \cdot 5) = \log 10 = 1$
d) $h(50)$; $h(50) = \log (2 \cdot 50) = \log 100 = 2$
e) $g(1)$; $g(1) = 4 + \log_2 (1) = 4 + 0 = 4$
f) $f(0)$. $f(0) = \log_3 (0 + 1) = \log_3 1 = 0$

3. Um administrador percebeu que o lucro $L(t)$ de uma empresa, em milhares de reais, pode ser determinado pela lei da função $L(t) = \log_2 (t + 2)$, com $t = 0$ no primeiro ano de análise, $t = 1$ no segundo ano, e assim por diante.

a) Calcule o lucro que a empresa obteve no primeiro ano de análise. R$ 1.000,00
b) Em qual ano, após o início da análise, o lucro da empresa foi R$ 3.000,00? No sétimo ano.
c) Se o lucro $L(t)$ dessa empresa fosse dado por $L(t) = \log_2 (t + 4)$, então qual seria o lucro no primeiro ano de análise e em qual ano o lucro seria R$ 3.000,00?
R$ 2.000,00 e no quarto ano, respectivamente.

4. **(Unesp-SP)** Um banco estabelece os preços dos seguros de vida de seus clientes com base no índice de risco do evento assegurado. A tabela mostra o cálculo do índice de risco de cinco eventos diferentes.

Evento (*E*)	Risco de morte (1 em *n* mortes)	log *n*	Índice de risco de *E* (10 – log *n*)
Atingido por relâmpago	1 em 2 000 000	6,3	3,7
Afogamento	1 em 30 000	4,5	5,5
Homicídio	1 em 15 000	4,2	5,8
Acidente de motocicleta	1 em 8 000	3,9	6,1
Doenças provocadas pelo cigarro	1 em 800	2,9	7,1

Sabe-se que, nesse banco, o índice de risco de morte pela prática do evento *BASE jumping* é igual a 8.

O risco de morte para praticantes desse esporte, segundo a avaliação do banco, é de:

a) 2,5%.
b) 2%.
c) 1%. $E = 8 \Rightarrow 10 - \log n = 8 \Rightarrow \log n = 2 \Rightarrow n = 10^2 = 100$; o risco de morte é de 1 em 100, ou seja, 1%. Alternativa **c**.
d) 1,5%.
e) 0,5%.

Reprodução/Unesp, 2019.

Praticante de *BASE jumping*. (https://pt.wikipedia.org)

Tecnologias digitais

Construção do gráfico de uma função logarítmica

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Para representarmos o gráfico de funções logarítmicas, podemos usar um *software* de Geometria dinâmica.

Para as atividades propostas a seguir, sugerimos selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que permita a construção de gráficos de funções logarítmicas.

Vamos representar inicialmente o gráfico da função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_2 x$ e destacar alguns pontos importantes dele. A seguir, apresentamos alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* de Geometria dinâmica.

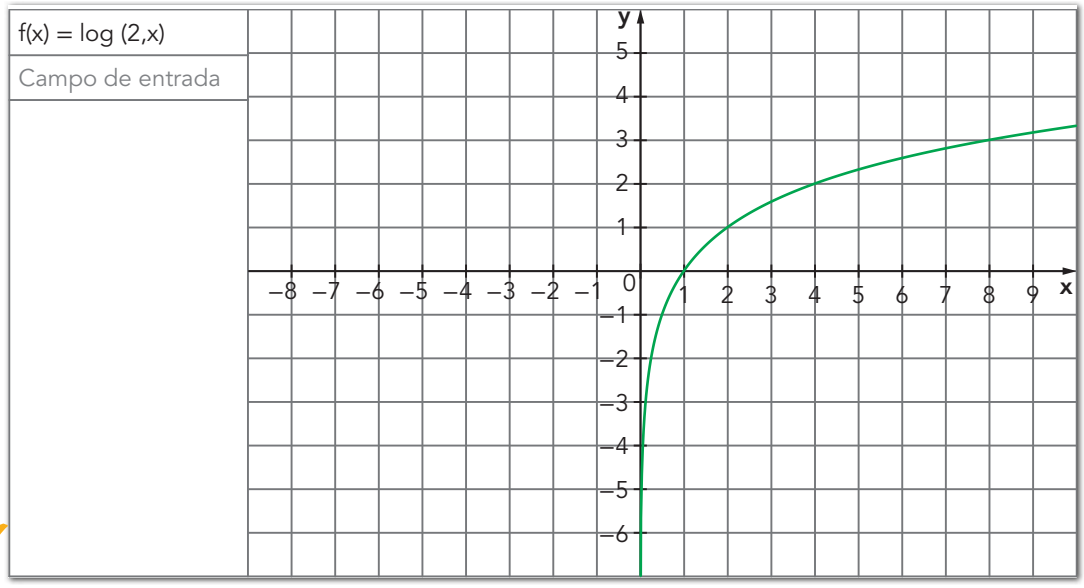
1º passo: insira no campo de entrada a lei da função **f(x)=log(2,x)**. Note que, geralmente, essa é a notação que usamos para indicar a lei $f(x) = \log_2 x$ em *softwares* de Geometria dinâmica.

2º passo: acesse as configurações de exibição e habilite as opções de exibir os eixos e de exibir a malha principal, caso estejam desabilitadas. Você deve ter uma imagem como a apresentada a seguir.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Fique atento

Lembre-se de adaptar as instruções de acordo com o *software* escolhido, já que as interfaces e os procedimentos podem variar.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção, no *software* de Geometria dinâmica, após o 2º passo.

Analise com atenção o gráfico (a curva colorida na imagem), verificando o comportamento dele e como os valores da função crescem nesse caso.

Professor, oriente os estudantes na escolha do *software* ou do aplicativo para a construção dos gráficos de funções logarítmicas, de modo que o programa escolhido apresente todas as funcionalidades necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir. Auxilie-os também nas explorações iniciais do programa e na identificação das ferramentas e das configurações disponíveis, além de como acessá-las.

Fique atento

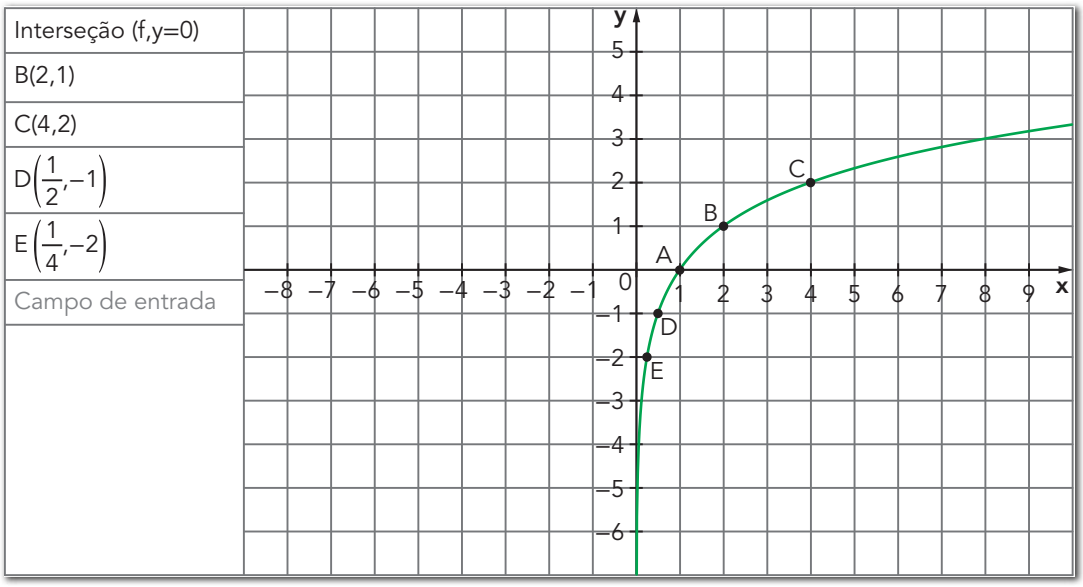
Nos *softwares* de Geometria dinâmica, geralmente, é possível mover a imagem clicando em algum ponto da tela e arrastando. Você também pode ampliar ou reduzir a imagem usando as ferramentas de *zoom* ou utilizando o *scroll* do *mouse*.

3º passo: agora, vamos determinar o ponto em que o gráfico intersecta o eixo das abscissas (eixo x), ou seja, obter o zero da função f. Para isso, insira o comando **Interseção(f,y=0)** no campo de entrada. Perceba que a intersecção do gráfico com o eixo x acontece no ponto $A(1, 0)$, ou seja, $x = 1$ é o zero de f.

Fique atento

Também podemos determinar a raiz da função f escolhendo um intervalo numérico (por exemplo, [0, 100]) e digitando **Raiz[f,0,100]** no campo de entrada. Nesse caso, o *software* analisa os zeros da função no intervalo indicado. Como o zero é $x = 1$, que pertence a esse intervalo, ele será indicado no gráfico pelo ponto $A(1, 0)$.

4º passo: no campo de entrada, insira, uma de cada vez, as coordenadas dos pontos **B(2,1)**, **C(4,2)**, **D(1/2,−1)** e **E(1/4,−2)**. Verifique que todos os pontos pertencem ao gráfico da função.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção, no *software* de Geometria dinâmica, após o 4º passo.

Professor, se julgar oportuno, comente que o eixo das ordenadas é uma **assíntota** do gráfico dessa função.

Perceba que o gráfico dessa função não intersecta o eixo das ordenadas (eixo y). Conforme reduzimos os valores de x, o gráfico se aproxima do eixo das ordenadas sem intersectá-lo.

Ao analisarmos o gráfico, também podemos perceber que não existe valor máximo da função, pois, conforme aumentamos o valor de x, o valor correspondente de $f(x)$ cresce infinitamente.

1. Depois de salvar sua construção no *software*, abra um novo projeto, repita os passos 1 a 3 e construa o gráfico de cada função logarítmica cuja lei está indicada a seguir.

a) $f(x) = \log_{10} x$

b) $g(x) = \log_2 (x + 1)$

c) $h(x) = \log_2 x$

d) $j(x) = \log_{10} (x + 1)$

As respostas dependem do *software* utilizado pelos estudantes.

Fique atento

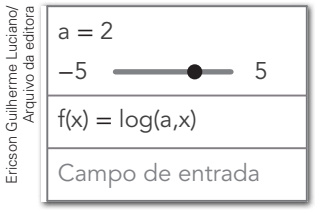
No caso do logaritmo de base 10, podemos inserir no *software* a lei da função **f(x)=log(10,x)**, como no exemplo dado, ou a lei **f(x)=log10(x)**. Note que, em muitos *softwares*, sempre precisamos indicar a base, mesmo quando ela for 10.

Análise do coeficiente *a* em funções do tipo $f(x) = \log_a x$

Agora, vamos analisar a influência da base a no gráfico da função.

1º passo: abra um novo projeto no *software* escolhido e, se necessário, repita os procedimentos anteriores para que os eixos e a malha apareçam na tela. Em seguida, no campo de entrada, insira a lei da função **f(x)=log(a,x)**.

2º passo: deve aparecer um controle deslizante para o coeficiente a. Mova-o gradualmente até configurar $a = 2$. Nesse momento, deve aparecer o gráfico que você construiu anteriormente, de $f(x) = \log_2 x$.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Representação do controle deslizante após configurar a base $a = 2$.

Fique atento

Lembre-se de adaptar as instruções de acordo com o *software* escolhido, já que as interfaces e os procedimentos podem variar.

2. Altere gradualmente o valor do coeficiente a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, e analise o que acontece com o gráfico da função. Converse com a turma e apresente argumentos sobre as análises que você fez.

Resposta esperada: Com $a > 1$, temos que a função f é crescente em todo o domínio e, com $0 < a < 1$, temos que f é decrescente; alterando o valor de a, não alteramos o ponto de intersecção do gráfico com o eixo x, que é sempre o ponto (1, 0), ou seja, não alteramos o zero da função, que é sempre $x = 1$.

Relação entre o gráfico de uma função logarítmica e o gráfico de uma função exponencial de mesma base

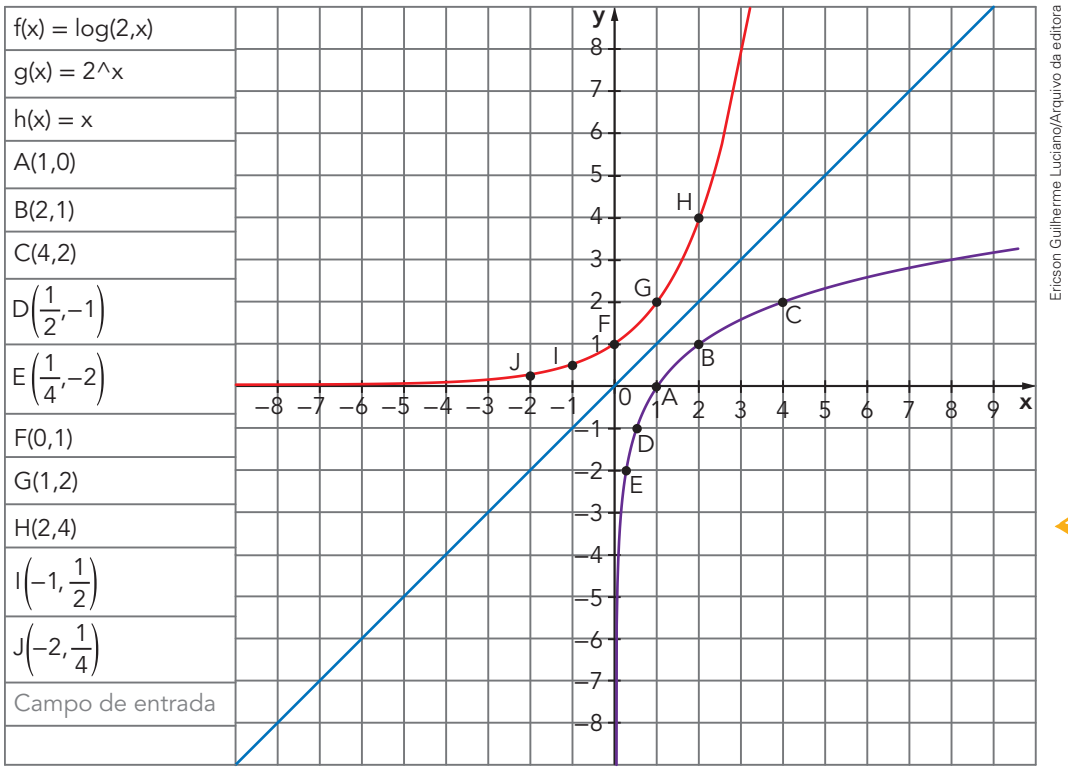
Estudamos que os gráficos de 2 funções inversas são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$). Agora, teremos a oportunidade de verificar melhor essa relação com funções logarítmicas e funções exponenciais.

Fique atento

Lembre-se de que a bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta formada pelos pontos em que a ordenada tem o mesmo valor da abscissa. Essa reta divide o ângulo com medida de abertura de 90° formado pelos eixos cartesianos em 2 ângulos de mesma medida de abertura.

1º passo: se necessário, repita os procedimentos anteriores para que os eixos e a malha apareçam na tela. Em seguida, no campo de entrada, insira a lei da função logarítmica **f(x)=log(2,x)** e a lei da função exponencial **g(x)=2^x**, ambas de base 2. Insira também a lei da função **h(x)=x**.

2º passo: no campo de entrada, insira as coordenadas dos pontos **A(1,0)**, **B(2,1)**, **C(4,2)**, **D(1/2,−1)**, **E(1/4,−2)**, **F(0,1)**, **G(1,2)**, **H(2,4)**, **I(−1,1/2)** e **J(−2,1/4)**. Perceba que os pontos *A* a *E* pertencem à função logarítmica, enquanto os pontos de *F* a *J* pertencem à função exponencial.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção, no *software* de Geometria dinâmica, após o 2º passo.

3. Analise os gráficos que você construiu e os pontos indicados. Qual é a relação entre as coordenadas de 2 pontos simétricos em relação à reta $y = x$?

4. Depois de salvar sua construção no *software* escolhido, comece um novo projeto, repita o 1º passo e construa o gráfico de cada função logarítmica dada e o gráfico da função inversa dela.

a) $f(x) = \log_{10} x$

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

As respostas dependem do *software* utilizado pelos estudantes.

3. Resposta esperada: A abscissa do primeiro ponto é igual à ordenada do segundo ponto, e a ordenada do primeiro ponto é igual à abscissa do segundo ponto. Além disso, cada um dos pontos pertence ao gráfico de uma das funções (logarítmica e exponencial). Por exemplo, os pontos $A(1, 0)$ e $F(0, 1)$ são simétricos à reta $y = x$, A é ponto do gráfico da função logarítmica e F é ponto do gráfico da função exponencial.

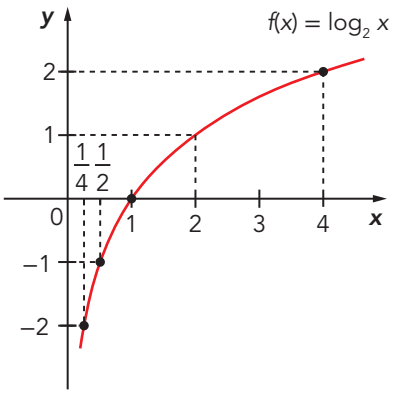
Gráfico da função logarítmica

Após as explorações que você fez no *software* de Geometria dinâmica, vamos analisar os gráficos de 2 funções logarítmicas $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = \log_a x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$), a primeira com $a > 1$ e a segunda com $0 < a < 1$, para depois fazer as formalizações desse tipo de função.

Para representarmos os gráficos em um plano cartesiano, primeiro escolhemos alguns valores de x e calculamos os respectivos valores de $f(x)$. Em seguida, indicamos esses pontos em um plano cartesiano e representamos a curva, que é o gráfico da função.

a) $f(x) = \log_2 x$ ou $y = \log_2 x$, ou seja, $a > 1$.

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	$\log_2 \frac{1}{4} = -2$
$\frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{2} = -1$
1	$\log_2 1 = 0$
2	$\log_2 2 = 1$
4	$\log_2 4 = 2$

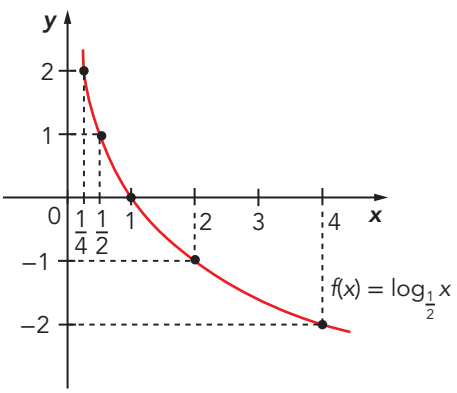


Banco de imagens/Arquivo da editora

Neste caso, a função é crescente ($x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$).

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ou $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, ou seja, $0 < a < 1$.

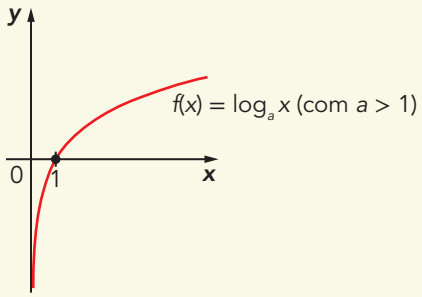
x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$
$\frac{1}{2}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$
1	$\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$
2	$\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$
4	$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

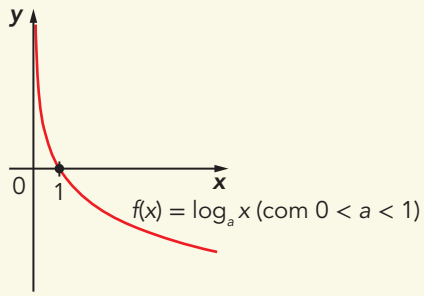


Banco de imagens/Arquivo da editora

Neste caso, a função é decrescente ($x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$).

De modo geral, analise o gráfico de $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, nos casos em que $a > 1$ e $0 < a < 1$.



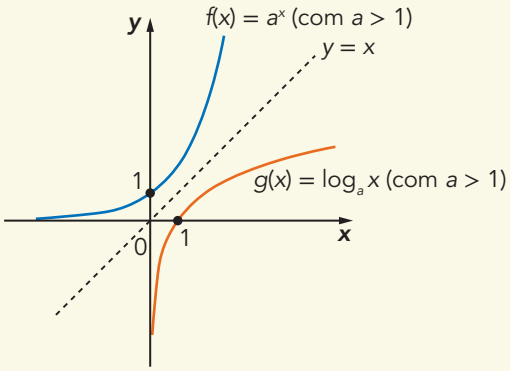


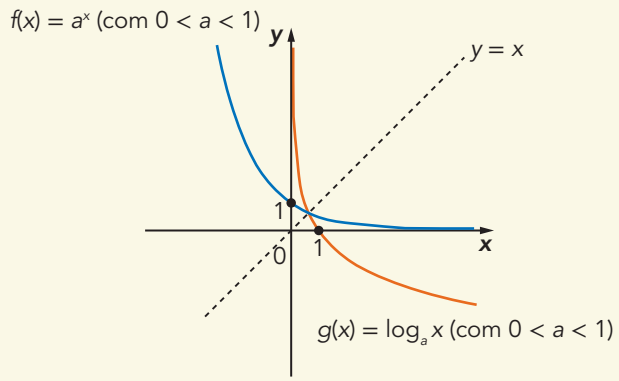
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

- A função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, está definida para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$ e tem conjunto imagem $\mathbb{R}$.
- O gráfico da função logarítmica em um plano cartesiano é uma curva que tem o mesmo aspecto das apresentadas nos gráficos anteriores.
- Quando as bases dos logaritmos das leis das funções logarítmicas são a e $\frac{1}{a}$, e o logaritmando é x, os gráficos das funções são simétricos em relação ao eixo x.

Analise novamente, no plano cartesiano, a simetria dos gráficos das funções inversas dadas por $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, nos casos em que $a > 1$ e $0 < a < 1$, em relação à reta $y = x$.



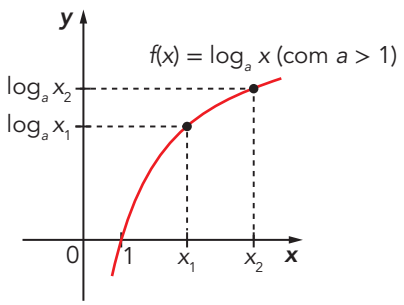


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

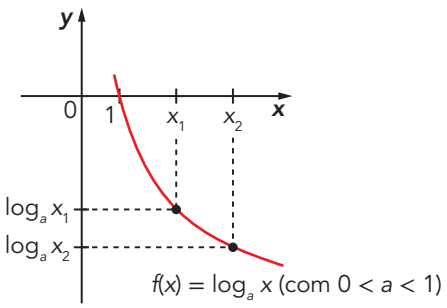
Algumas características da função logarítmica

Apresentamos a seguir algumas características da função logarítmica $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

- O gráfico de uma função logarítmica intersecta o eixo das abscissas no ponto (1, 0), ou seja, $f(1) = 0$, ou, ainda, $\log_a 1 = 0$. Assim, $x = 1$ é o zero da função.
- O gráfico não intersecta o eixo das ordenadas nem tem pontos do 2º e 3º quadrantes (quadrantes **II** e **III**) do plano cartesiano.
- Somente números positivos têm logaritmo real, pois a função $f\colon x \to a^x$ assume somente valores positivos.
- A função logarítmica pode ser crescente (se $a > 1$) ou decrescente (se $0 < a < 1$).



$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$



$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- Os valores da função logarítmica podem ser positivos ou negativos. Quando $a > 1$, temos que, para $x > 1$, os valores da função são positivos ($f(x) > 0$); e, para $0 < x < 1$, os valores da função são negativos ($f(x) < 0$).
- Conforme aumentamos o valor de x, ao contrário da função exponencial cujos valores $f(x) = a^x$ crescem rapidamente quando $a > 1$, os valores $f(x) = \log_a x$ da função logarítmica crescem lentamente em comparação.

  Por exemplo, se $\log_{10} x = 1000$, então $x = 10^{1000}$. Assim, se quisermos que $\log_{10} x$ seja maior do que 1000, precisamos escolher um número x que tenha pelo menos 1001 algarismos.
- A função logarítmica é injetiva, pois elementos distintos x_1 e x_2 do domínio têm valores distintos $f(x_1)$ e $f(x_2)$. Denotamos assim: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

  Disso, obtemos: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, ou $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

  A função logarítmica também é sobrejetiva, pois, dado qualquer número real b, existe sempre um único número real positivo x tal que $\log_a x = b$. Portanto, ela é bijetiva (há uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$).

Não escreva no livro

Reflita

Quando $0 < a < 1$, para quais valores de x os valores da função logarítmica são positivos e para quais são negativos?

Nesse caso, para $x > 1$, temos que os valores da função são negativos ($f(x) < 0$); e, para $0 < x < 1$, temos que os valores da função são positivos ($f(x) > 0$).

Atividades resolvidas

Atividade resolvida passo a passo

1. A medida de magnitude M de um terremoto pode ser dada pela escala Richter, que foi desenvolvida em 1935 pelo **sismólogo** estadunidense Charles Francis Richter (1900-1985) com a colaboração do também sismólogo alemão Beno Gutenberg (1889-1960).

Sendo $0 \leqslant M \leqslant 8{,}9$, temos que a medida de magnitude M de um terremoto é dada por $M(E) = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{E_0}$, sendo E a medida de energia liberada em quilowatts-hora (kWh).

sismólogo: profissional especializado no estudo dos terremotos e da estrutura da Terra.

Determine a medida de energia liberada em um terremoto de medida de magnitude 4 na escala Richter, sabendo que $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh.

Resolução

Lendo e compreendendo

a) O que é dado na atividade?

A atividade fornece o valor da constante E_0 e a medida de magnitude do sismo.

b) O que se pede?

A medida de energia liberada nesse terremoto em kWh.

Planejando a solução

Devemos substituir na lei da função os valores que são dados e resolver a igualdade obtida.

Executando o que foi planejado

Temos:

$$4 = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow 6 = \log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}$$

Aplicando a definição de logaritmo, obtemos:

$$10^6 = \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow E = 7 \cdot 10^3$$

Verificando

Se $E = 7 \cdot 10^3$ kWh, então:

$$M(E) = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{7 \cdot 10^3}{7 \cdot 10^{-3}} = \frac{2}{3} \cdot \log 10^6 = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

Emitindo a resposta

A medida de energia liberada nesse terremoto é $7 \cdot 10^3$ kWh.

Ampliando a atividade

Não escreva no livro

Se a medida de magnitude do terremoto dobrasse, por quanto ficaria multiplicada a medida de energia liberada? $M(E) = 8 \Rightarrow 8 = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow 12 = \log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow 10^{12} = \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow E = 7 \cdot 10^9$. Então:

$\frac{7 \cdot 10^9}{7 \cdot 10^3} = 10^6$; logo, a medida de energia liberada ficaria multiplicada por 10^6.

Sobre o assunto

Para saber mais de terremotos, bem como das grandezas e das fórmulas envolvidas, acesse os *sites* indicados a seguir. No primeiro, você estudará também o cálculo da medida de magnitude de um tremor que ocorreu em Brasília (DF).

- POR QUE a terra treme no Brasil. [*S. l.*: *s. n.*], 2014. 1 vídeo (8 min). Publicado pelo canal Pesquisa Fapesp. Disponível em: https://tedit.net/nqbwpd. Acesso em: 4 jul. 2024.
- A ESCALA Richter. *E-cálculo*, [*s. l.*], [20-?]. Disponível em: https://tedit.net/2wzva0. Acesso em: 4 jul. 2024.

Professor, para o item **b** da atividade **5**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Atividades

Não escreva no livro

5. Analise as tabelas a seguir e, no caderno, faça o que se pede.

x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

c) Resposta esperada: Em $f(x) = 2^x$, a curva cresce lentamente, conforme o valor de x aumenta e cresce rapidamente depois de $y = 1$; em $g(x) = \log_2 x$, a curva cresce rapidamente, conforme x aumenta, até $x = 1$ e depois ela continua crescendo, mas lentamente.

x	$g(x)$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2

d) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; $D(g) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(g) = \mathbb{R}$.

Resposta esperada: O domínio da função f é igual ao conjunto imagem da função g, e o domínio da função g é igual ao conjunto imagem da função f.

a) Analisando os valores apresentados nas tabelas, as funções $f(x)$ e $g(x)$ poderiam ser inversas? Sim, pois, para os valores apresentados, temos que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$.

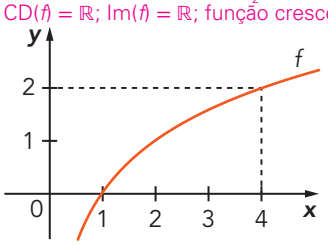
b) Sabendo que a lei de f é $f(x) = 2^x$ e a lei de g é $g(x) = \log_2 x$, esboce, em um plano cartesiano, o gráfico de cada função. O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

c) Analise os gráficos esboçados no item **b**. O que podemos observar em relação ao comportamento de cada curva e o valor de x?

d) Analise os gráficos que você criou no item **b** e as leis das funções f e g. No caderno, escreva o domínio e o conjunto imagem de cada função. Depois, responda: Qual é a relação que existe entre o domínio e o conjunto imagem dessas funções?

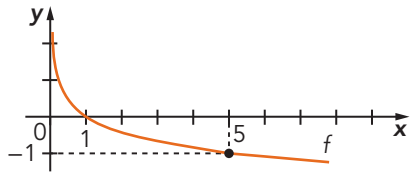
6. Cada gráfico a seguir representa uma função logarítmica do tipo $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Escreva, no caderno, a lei de formação, o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de cada função, indicando se ela é crescente ou decrescente.

a) Lei de formação: $f(x) = \log_2 x$; $D(f) = \mathbb{R}_+^*$; $CD(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$; função crescente.



Ericson Guilherme Luciano/ Arquivo da editora

b) Lei de formação: $f(x) = \log_{0,2} x$; $D(f) = \mathbb{R}_+^*$; $CD(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$; função decrescente.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

7. No caderno, construa uma tabela e represente em um plano cartesiano o gráfico de cada função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ com lei de correspondência dada. Depois, verifique as características da função (domínio, conjunto imagem e crescimento). As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

8. Analise o gráfico que você representou, no item **a** da atividade anterior, e responda aos itens a seguir no caderno.

a) Qual é o valor de $f(1)$? E qual é o valor de x tal que $f(x) = 1$? Analisando o gráfico, temos: $f(1) = 0$; $x = \frac{1}{3}$.

b) Se a base do logaritmo da lei dessa função fosse 4, o valor de $f(1)$ e o valor de x tal que $f(x) = 1$ seriam os mesmos do item **a**? O valor de $f(1)$ continuaria sendo 0, pois $f(1) = \log_4 1 = \log_4 4^0 = 0$, mas o valor de x seria 4, pois $f(x) = 1 \Rightarrow \log_4 x = 1 \Rightarrow x = 4^1 = 4$.

c) E se a base do logaritmo da lei dessa função fosse $\frac{1}{4}$?

O valor de $f(1)$ também continuaria sendo 0, pois $f(1) = \log_{\frac{1}{4}} 1 = 0$, mas o valor de x seria $\frac{1}{4}$, pois $f(x) = 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} x = 1 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$.

10. Exemplos de resposta: Leis de funções logarítmicas crescentes: $f(x) = \log_2 x$; $f(x) = \log_7 x$; leis de funções logarítmicas decrescentes: $g(x) = \log_{0,5} x$; $g(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$.

9. Copie e complete a tabela a seguir no caderno. Em seguida, represente em um plano cartesiano o gráfico de cada uma das funções de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, determinando o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de cada uma delas. Os gráficos encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

a) $f(x) = \log_3 x$ $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, $CD(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}$.

x	$y = f(x) = \log_3 x$	
$\frac{1}{9}$		-2
$\frac{1}{3}$		-1
1		0
3		1
9		2

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, $CD(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}$.

x	$y = f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$	
9		-2
3		-1
$\frac{1}{3}$		1
$\frac{1}{9}$		2
1		0

10. Escreva no caderno a lei de uma função logarítmica f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ que seja crescente e a lei de uma função logarítmica g: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ que seja decrescente.

11. Analise novamente, no tópico *Gráfico da função logarítmica*, os gráficos das funções inversas dadas por $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, nos casos em que $a > 1$ e $0 < a < 1$.

a) Qual é o domínio e qual é o conjunto imagem de cada uma dessas funções inversas?

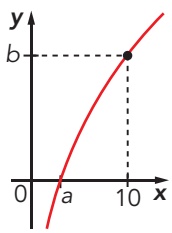
b) Compare o crescimento e o decrescimento dessas funções quando $a > 1$ e quando $0 < a < 1$.

12. Sabendo que o gráfico a seguir representa uma função cuja lei é dada por $f(x) = \log x$, determine os valores de a e de b.

Os pontos $(a, 0)$ e $(10, b)$ pertencem ao gráfico da função cuja lei é dada por $f(x) = \log x$. Assim:

$f(a) = 0 \Rightarrow \log a = 0 \Rightarrow a = 10^0 = 1$

$f(10) = b \Rightarrow \log 10 = b \Rightarrow b = 1$



Banco de imagens/ Arquivo da editora

11. a) A função exponencial f tem domínio $\mathbb{R}$ e conjunto imagem $\mathbb{R}_+^*$ (ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$) e a função logarítmica f^{-1} tem domínio $\mathbb{R}_+^*$ e conjunto imagem $\mathbb{R}$ (ou seja, $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(f) = \mathbb{R}$).
b) Quando $a > 1$, ambas as funções são crescentes e, quando $0 < a < 1$, ambas as funções são decrescentes.

13. Utilizando os conhecimentos que você já adquiriu de representação de gráficos no plano cartesiano, represente no caderno o gráfico de cada função do tipo logarítmica f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada.

a) $f(x) = \log_2 \frac{x}{2}$

b) $f(x) = \log_2 (x - 1)$

Os gráficos encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

14. Leia novamente o texto da situação-problema **2** da abertura deste capítulo, que descreve o estudo feito por William Hick e Ray Hyman. A função do tipo logarítmica que eles descobriram tem a lei $T(n) = b \cdot \log_2 (n + 1)$, em que T é a medida de intervalo de tempo de escolha, dada em milissegundos (ms), e n é a quantidade de escolhas equiprováveis possíveis. Nessa fórmula, b é uma constante definida de maneira empírica no experimento, mas que geralmente se aproxima de 150 milissegundos.

Utilize uma calculadora ou uma planilha eletrônica para realizar os cálculos e responda aos itens no caderno.

a) Considere uma situação em que há 20 opções equiprováveis disponíveis para escolha. Use a lei de Hick-Hyman e calcule a medida de intervalo de tempo necessária para a escolha, considerando $b = 150$ ms.

$T(20) = 150 \cdot \log_2 (20 + 1) \simeq 659$; logo, aproximadamente 659 ms.

Fique atento

Empírico é tudo o que se obtém por meio de experimentos e análises da realidade. Neste caso, quer dizer que a constante é definida considerando a análise dos resultados obtidos em experimentos reais.

14. b) $T(200) = 150 \cdot \log_2 (200 + 1) \simeq 1\,148$; $T(2\,000) = 150 \cdot \log_2 (2\,000 + 1) \simeq 1\,645$; logo, para 200 opções equiprováveis, aproximadamente 1 148 ms e, para 2 000 opções equiprováveis, aproximadamente 1 645 ms.

Não escreva no livro

b) Repita o cálculo para 200 opções equiprováveis disponíveis para escolha e, depois, para 2 000 opções.

c) Defina uma nova quantidade de opções equiprováveis disponíveis para escolha e calcule a medida de intervalo de tempo necessária para fazer a escolha nesse caso. Resposta pessoal.

d) Calcule a quantidade de opções equiprováveis de uma escolha que demora 1,2 segundo para ser feita.

e) Represente o gráfico dessa função, usando um *software* de Geometria dinâmica ou um plano cartesiano, e compare-o com os pontos que você marcou inicialmente em um plano cartesiano na situação-problema **2** da abertura deste capítulo.

O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

15. Certo tipo de árvore é usado na produção de celulose e deve ser cortado quando a medida de altura do tronco atingir 4,5 metros. Verificou-se que essas árvores crescem de acordo com a lei $h(t) = 1{,}5 + \log_2 \left(\frac{1}{2} + t\right)$, em que h é medida de altura do tronco, em metros, passados t anos do plantio da árvore. Quantos anos devem transcorrer após o plantio até que esse tipo de árvore atinja o ponto de corte? 7,5 anos.

16. Devido aos bons resultados desde a fundação de uma empresa, o quadro de colaboradores vem aumentando gradativamente. Verificou-se que a quantidade de funcionários depois de t anos pode ser estimada pela lei $n(t) = 10 + 21 \cdot \log_{64} (t + 4)$. Sendo assim, quantos funcionários essa empresa tinha na data de fundação? 17 funcionários.

17. O total de impostos pagos anualmente por uma empresa, em milhares de reais, é estimado pela expressão $I(t) = 10 \cdot \log_2 (1 + t)$ a se contar t anos desde a instalação dela.

Faça o que se pede em cada item.

a) Represente o gráfico dessa função, usando um *software* de Geometria dinâmica ou um plano cartesiano, e analise o crescimento do total de impostos a serem pagos anualmente, com o passar dos anos.

O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) No final de um exercício contábil anual, constatou-se que a empresa deveria pagar R$ 20.000,00 em impostos. Analise o gráfico que você representou e responda: Esse montante deverá ser pago em 1 ano antes ou depois de a empresa ter 10 anos de instalação? Antes.

c) Nessa situação, determine o valor de t. 3 anos.

d) Elabore mais uma pergunta para esse problema e responda-a. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

e) Pesquise quais tipos de impostos uma empresa geralmente é obrigada a pagar. Depois, converse com os colegas sobre a importância do recolhimento de impostos em um país. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

18. Antes de tomar a decisão para fazer uma jogada em uma partida, o **enxadrista** deve analisar várias jogadas possíveis e as variantes delas. Em determinada situação, uma enxadrista verificou que a medida de intervalo de tempo t, em minutos, para tomar a decisão de qual peça mover depende da quantidade n de jogadas que ela consegue antever e que essa medida é dada por $t(n) = 2 + \log_2 n$.

enxadrista: jogador ou estudioso do jogo de xadrez.

pedro7merino/Shutterstock

O xadrez é um jogo de tabuleiro cuja versão moderna foi inventada na Europa no século X.

Se a jogadora demorou 7 minutos para decidir o movimento da peça, então quantas jogadas ela conseguiu antever? 32 jogadas.

Texto para a próxima atividade.

De acordo com o Serviço Geológico dos Estados Unidos (USGS, do inglês *United States Geological Survey*), em 20 de janeiro de 2024, um terremoto grande atingiu o Brasil. O epicentro ocorreu a

14. d) 1,2 segundo = 1 200 milissegundos

$1\,200 = 150 \cdot \log_2 (n + 1) \Rightarrow 8 = \log_2 (n + 1) \Rightarrow 2^8 = n + 1 \Rightarrow n = 256 - 1 = 255$; portanto, 255 opções equiprováveis.

19. Não é possível resolver esta atividade, pois faltam dados (medida de magnitude do terremoto).

cerca de 610 km de profundidade e a 124 km da cidade de Tarauacá, no Acre.

Fonte dos dados: Terremoto de magnitude 6,6 é registrado no município de Tarauacá, interior do Acre. *Portal G1*, Rio Branco, AC, 21 jan. 2024. Disponível em: https://tedit.net/vvjbqh. Acesso em: 4 jul. 2024.

19. Usando a lei da função $M(E) = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{E_0}$, calcule a medida de energia liberada, em quilowatts-hora (kWh), pelo terremoto citado.

Texto para a próxima atividade.

A instituição científica USGS, citada na atividade anterior, é responsável pela operação da Central Nacional de Informações de Terremotos (Neic, do inglês *National Earthquake Information Center*), que detecta a localização e a magnitude de terremotos no mundo inteiro. Além de disponibilizar na internet todas as informações coletadas, a Neic informa às autoridades dos países, quando necessário, sobre tremores relevantes e que possam causar danos.

Analise a seguir as informações sobre 2 terremotos que foram identificados pela Neic, na América do Sul, no mês de junho de 2024.

- Em 22 de junho de 2024, a 74 km de Atocha, na Bolívia, às 15 h 15 min, a 226,8 km de profundidade, com medida de magnitude 4,3.
- Em 28 de junho de 2024, a 8 km de Atiquipa, no Peru, às 19 h 03 min, a 28 km de profundidade, com medida de magnitude 7,2.

Fonte dos dados: USGS. *Latest Earthquakes*. Disponível em: https://tedit.net/vbzqbi. Acesso em: 4 jul. 2024.

20. Escolha algumas das informações apresentadas no texto anterior e, no caderno, elabore um problema cuja resposta seja a medida de energia liberada pelo(s) terremoto(s). Em seguida, peça a um colega que resolva esse problema enquanto você resolve o que ele criou. Por fim, confira a resposta que ele obteve.

21. Sabendo que um relógio de parede emite uma medida de nível sonoro de 20 dB, determine, em W/m², a medida de intensidade sonora desse ruído. Lembre-se de que o cálculo da medida de nível sonoro é dado pela lei $NS(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}}$. 10^{-10} W/m²

22. **(FCMSCSP)** O nível de pressão sonora (*NPS*) é uma medida que determina o grau de potência de uma onda sonora, sendo o decibel (dB) sua unidade de medida mais usual. O infográfico traz dados do *NPS* de alguns sons.

Reprodução/FCMSCSP, 2018.

(http://noticias.r7.com. Adaptado.)

O *NPS*, em dB, de um som emitido está relacionado à sua intensidade sonora (I), em W/m², pela seguinte lei: $NPS = 120 + 10 \cdot \log I$.

Fique atento

Nível sonoro é uma grandeza medida em decibels.

Desse modo, a razão entre a intensidade sonora do ronco mais alto já registrado e a do ronco moderado, nessa ordem, é um valor entre: Alternativa **d**.

a) 10 e 100.

b) 1 e 10.

c) 100 e 1 000.

d) 10 000 e 100 000.

e) 1 000 e 10 000.

23. No caderno, elabore um problema cujo tema seja nível sonoro. Em seguida, peça a um colega que o resolva enquanto você resolve o que ele criou. Por fim, confira a resolução que ele fez e a resposta obtida. Resposta pessoal.

20. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Além da sala de aula

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Saúde*. Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Poluição sonora

Embora não se acumule no meio ambiente, a poluição sonora é considerada um dos principais problemas ambientais das grandes cidades e uma questão de saúde pública.

O que é poluição sonora?

Poluição sonora é todo ruído que pode causar danos à saúde humana ou animal. Existem diversas situações que causam desconforto acústico.

Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

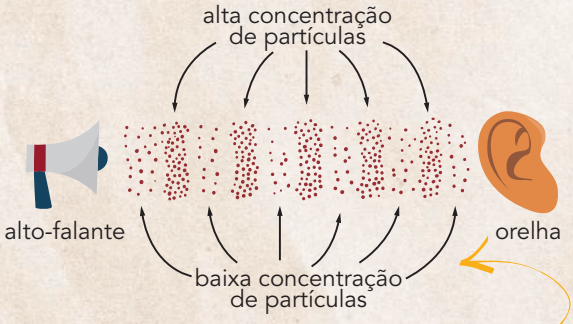
Quando os ruídos causam certo desconforto, mas não têm potencial para causar dano, não são considerados poluição sonora.

A audição e a função do tipo logarítmica

A orelha é responsável pela capacidade de ouvir e pelo equilíbrio do corpo.

Chamamos de som a sensação auditiva detectada pelo cérebro, por meio das orelhas, e que é causada pelo movimento organizado de moléculas que compõem o ar ou outro meio de propagação. Ao tocarmos uma corda de violão, por exemplo, podemos provocar uma perturbação no ar que se propaga e é captada pelas orelhas. Essa perturbação que se propaga é uma onda mecânica, chamada de onda sonora, e a sensação que sentimos é o som.

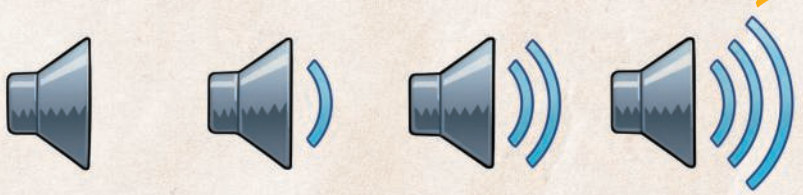
As imagens não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Representação esquemática do aspecto de uma onda sonora. Um alto-falante provoca perturbações no ar que fazem compressões e rarefações de partículas se propagarem e chegarem às orelhas, que são sensibilizadas gerando a sensação auditiva chamada de som.

Diferentes ondas sonoras podem ser percebidas de diferentes modos. Chamamos de volume do som a sensação fisiológica associada a como percebemos um som, ou seja, o volume do som é algo subjetivo que pode variar de pessoa para pessoa. Na Física, há a grandeza intensidade sonora, cuja medida, em watt por metro quadrado (W/m^2), expressa de modo objetivo quão forte é uma onda sonora.



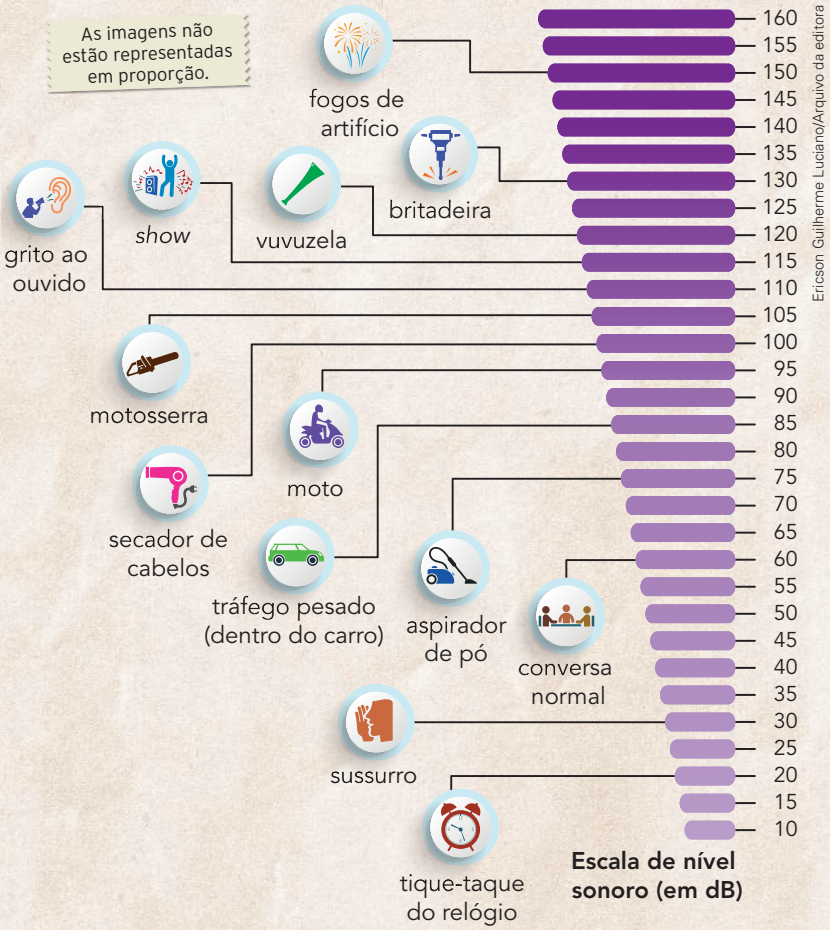
Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

Da esquerda para a direita, os símbolos representam ondas sonoras com medidas de intensidade sonora em ordem crescente. O volume com que alguém percebe essas ondas sonoras fica mais intenso da esquerda para a direita.

Medidas relativas à intensidade sonora de um ruído

A fim de facilitar a leitura e a interpretação de medidas relativas à intensidade sonora de um ruído, uma nova grandeza física é considerada: o nível sonoro (*NS*), cuja unidade é o decibel (dB). Essa grandeza relaciona a medida I de intensidade sonora de um ruído com a medida I_0 de referência – que é a medida de intensidade sonora que está no limiar da audibilidade, ou seja, a menor medida de intensidade sonora que pode ser percebida por uma pessoa.

O cálculo da medida de nível sonoro é dado, em função da medida de intensidade sonora, pela lei $NS(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$, em que $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: WESTIN, Ricardo. Poluição sonora prejudica a saúde e preocupa especialistas. *Agência Senado*, Brasília, DF, 29 maio 2018. Disponível em: https://tedit.net/cziowf. Acesso em: 4 jul. 2024.

Danos fisiológicos ou dor

Professor, usamos como referência ondas sonoras com frequência de 1 000 Hz. Para outras frequências dos ruídos ou outras durações de exposição a ele, os limiares e os valores recomendados podem ser outros.

A maior medida de intensidade sonora que alguém pode ouvir sem ter danos fisiológicos ou dor é $1\ W/m^2$, o que equivale a uma medida de nível sonoro de 120 dB.

Contudo, é importante ressaltar que os danos causados por ruídos dependem de vários fatores, como a duração da exposição a eles e outras características da onda sonora. A Organização Mundial da Saúde (OMS) define como recomendável para a audição uma medida de nível sonoro de até 50 dB.

A exposição excessiva a níveis sonoros superiores ao recomendado pode levar progressivamente à perda da audição; por isso, existem leis que definem diferentes limites sonoros de acordo com o tipo de área e o horário.

Limites de tolerância para ruídos contínuos ou intermitentes

Medida de nível sonoro (em dB)	85	90	95	100	105	110	115
Máxima exposição diária (em h)	8	4	2	1	0,5	0,25	Aproximadamente 0,12

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde, Departamento de Ações Programáticas Estratégicas. *Perda auditiva induzida por ruído (Pair)*. Brasília, DF: Ministério da Saúde, 2006. Disponível em: https://tedit.net/9isax7. Acesso em: 4 jul. 2024.

Hábitos prejudiciais aos ouvidos

Hábitos auditivos e comportamento de adolescentes diante das atividades de lazer ruidosas

O comportamento de jovens do Ensino Fundamental II e Ensino Médio relacionado às atitudes e aos hábitos auditivos pode ser nocivo à saúde.

Escutar música utilizando fone de ouvido, com equipamento de som em casa ou no carro, foi o hábito mais frequente relatado pelos jovens. Pode-se observar que grande parte dos jovens apresenta zumbido, porém isso não os preocupa e nem os faz evitar exposições a elevadas intensidades sonoras. Os jovens gostam da música alta e não se preocupam com o volume excessivo do som; porém em relação à sala de aula, consideram que deveria ser silenciosa e calma.

LACERDA, Adriana Bender Moreira de *et al*. Hábitos auditivos e comportamento de adolescentes diante das atividades de lazer ruidosas. *Revista Cefac*, Campinas, v. 13, n. 2, p. 322-329, mar./abr. 2011. Disponível em: https://tedit.net/243064 . Acesso em: 4 jul. 2024.

SMS alerta para cuidados com a audição

Segundo o [...] Censo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), realizado em 2010, a deficiência auditiva atinge cerca de 9,7 milhões de brasileiros, o que representa 5,1% da população. Deste total, 7,5 milhões apresentam algum problema auditivo, 1,7 milhão tem grande dificuldade para ouvir, 2 milhões possuem a deficiência auditiva severa, e 344,2 mil são surdos.

No que se refere a idade, aproximadamente 1 milhão de deficientes auditivos são crianças e jovens até 19 anos. [...]

A incidência da deficiência auditiva ao nascimento varia entre um a três nascimentos a cada 1000, mas a perda da audição também pode ser adquirida posteriormente. [...]

Para os adolescentes, as ações de prevenção devem enfocar o cuidado com a exposição prolongada a sons de forte intensidade, frequentemente associados à vida social e ao uso de dispositivos eletrônicos como [...] celulares.

NASCIMENTO, Maria Lucia do. SMS alerta para cuidados com a audição. Prefeitura da Cidade de São Paulo, Secretaria da Saúde, 9 nov. 2018. Disponível em: https://tedit.net/ua7tn7. Acesso em: 4 jul. 2024.

Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

Indo além: Poluição sonora na escola

Vamos investigar quais ambientes da escola têm mais ou menos barulho e quais ações podemos fazer para minimizar a poluição sonora no nosso cotidiano.

Etapas

Professor, após a leitura dos textos da seção, promova uma conversa com os estudantes sobre os hábitos de exposição aos ruídos deles, principalmente ao utilizar fones de ouvido para participar de videochamadas, consumir audiolivros, séries ou filmes e ouvir músicas, notícias ou *podcasts*. Questione-os: Será que existem hábitos no seu cotidiano que precisam ser alterados? Por quê?

1. Organização

- Reúnam-se em grupos de 3 a 5 estudantes.

2. Desenvolvimento

- Instalem em um *smartphone* um aplicativo que consiga usar o microfone como medidor de decibels, transformando-o em um decibelímetro.
- Façam a coleta dos dados de ruídos em dB nos ambientes que vocês mais frequentam na escola, em diferentes horários, como durante a aula e ao longo dos intervalos e da entrada e saída de estudantes.
- Organizem os dados em tabelas e, com o auxílio de planilhas eletrônicas, definam o ruído médio dos locais de acordo com faixas de horário das atividades.

3. Produto final

Opção 1: Mapa de ruídos da escola

- Obtenham na internet uma foto de satélite ou façam um esboço da planta baixa da escola.
- Na planta baixa, escolham uma escala de cores para colorir os ambientes de acordo com a intensidade de ruído em cada local em que a aferição foi realizada.

Opção 2: Plano de isolamento acústico

- Após calcular a média da medida de ruído em cada sala de aula, verifiquem se, em algum horário em que a escola esteja funcionando, existem salas de aula cujo ruído seja maior do que 60 dB, atrapalhando assim o estudo dos estudantes dessa sala.
- Verifiquem quais ações podem ser feitas para minimizar esse ruído, por exemplo: ajuste nos horários dos intervalos, troca de sala para outra disponível no horário em que o ruído é maior, janelas e portas com maior isolamento acústico, aulas em outros ambientes da escola, etc. Apresentem para a administração um plano de ação para a criação de ambientes no espaço escolar com maior isolamento acústico.

Sobre o assunto

Procure mais informações sobre poluição sonora, a presença dela em situações cotidianas e o impacto em nossos ouvidos. Além das 2 referências citadas nesta seção, que podem ser consultadas, sugerimos o acesso aos *sites* indicados a seguir.

- POLUIÇÃO sonora. *Brasília Ambiental*, Brasília, DF, 19 mar. 2021. Disponível em: https://tedit.net/lio8g2. Acesso em: 4 jul. 2024.
- SELO ruído. *Ibama*, [*s. l.*], 29 nov. 2022. Disponível em: https://tedit.net/00dx6q. Acesso em: 4 jul. 2024.

Enem e vestibulares

3. Professor, aproveite essa oportunidade para comentar com os estudantes a importância do eucalipto para nossas vidas. Ele é usado na produção da celulose, que é a matéria-prima utilizada na fabricação de papel, produtos de limpeza, óleos naturais, embalagens, tecidos sintéticos, remédios e produtos alimentícios (iogurtes, sorvetes, molhos, hambúrgueres, etc.). As lenhas de eucalipto também são utilizadas para produzir tábuas para móveis, ripas, vigas e postes.

1. (Unisc-RS) Determinada espécie de eucalipto apresenta uma relação que interliga seu tamanho (altura) com seu tempo de plantio, dada por $h(t) = 26 + \log_3(1{,}5t)$, em que $h(t)$ é a altura dada em metros, e t indica o tempo em anos.

Nesse caso, qual é o tempo necessário (em anos) para que a árvore de eucalipto atinja a altura de 28 m?

a) 4 **b)** 7 **c)** 2 **d)** 5 **e)** 6

Alternativa **e**.

2. (Enem) A exposição a alguns níveis sonoros pode causar lesões auditivas. Por isso, em uma indústria, são adotadas medidas preventivas de acordo com a máquina que o funcionário opera e o nível N de intensidade do som, medido em decibel (dB), a que o operário é exposto, sendo $N = \log_{10} I^{10} - \log_{10} I_0^{10}$, I a intensidade do som e $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

Disponível em: www.sofisica.com.br. Acesso em: 8 jul. 2015 (adaptado).

Quando o som é considerado baixo, ou seja, $N = 48$ dB ou menos, deve ser utilizada a medida preventiva **I**. No caso de o som ser moderado, quando N está no intervalo (48 dB, 55 dB), deve ser utilizada a medida preventiva **II**. Quando o som é moderado alto, que equivale a N no intervalo (55 dB, 80 dB), a medida preventiva a ser usada é a **III**. Se N estiver no intervalo (80 dB, 115 dB), quando o som é considerado alto, deve ser utilizada a medida preventiva **IV**. E se o som é considerado muito alto, com N maior que 115 dB, deve-se utilizar a medida preventiva **V**.

Uma nova máquina, com $I = 8 \times 10^{-8}$ W/m², foi adquirida e será classificada de acordo com o nível de ruido ruído que produz.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

O funcionário que operará a nova máquina deverá adotar a medida preventiva:

a) **I**. **b)** **II**. **c)** **III**. **d)** **IV**. **e)** **V**.

Alternativa **b**.

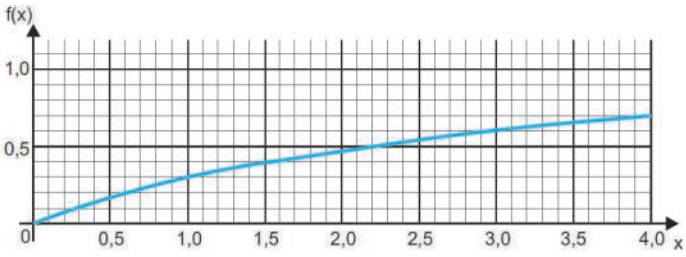
3. (Ficsae-SP) Para fazer um gráfico em papel milimetrado com escala logarítmica, David precisa encontrar o logaritmo do número $2{,}5 \cdot 10^{-18}$, na base 10, adotando em seu cálculo $\log_{10} 2 = 0{,}301$. O logaritmo do número procurado por David é:

a) –17,301. **c)** –17,699. **e)** –17,602.

b) –18,398. **d)** –18,699.

Alternativa **e**.

4. (FCMSCSP) [Analise] o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log(x + 1)$ para valores reais de x tais que $0 \leqslant x \leqslant 4$.



Reprodução/FCMSCSP, 2021.

Consultando o gráfico, o valor de $\log 13 - \log 4$ é, aproximadamente:

a) 0,5. **b)** 0,3. **c)** 0,4. **d)** 0,6. **e)** 0,2.

Temos que $\log 13 - \log 4 = \log \frac{13}{4} = \log 3{,}25$.

Como $f(x) = \log(x + 1)$, obtemos $\log 3{,}25 = \log(2{,}25 + 1) = f(2{,}25)$.

Analisando o gráfico para $x = 2{,}25$, encontramos $f(2{,}25) \simeq 0{,}5$.

Alternativa **a**.

5. **(UFGD-MS)** Em 1935, o geólogo americano Charles Richter (1900-1985) definiu a magnitude M de um terremoto como:

$$M = \log \frac{I}{S}$$

Em que I é a intensidade do terremoto, medida pela amplitude da leitura de um sismógrafo tomado a 100 km do epicentro do terremoto, e S é a intensidade de um terremoto "padrão".

O terremoto de São Francisco (EUA) de 1906 teve uma magnitude estimada de 8,3 na escala de Richter. No mesmo ano, um forte terremoto ocorreu na fronteira entre a Colômbia e o Equador, que foi quatro vezes mais intenso. Assim, qual foi a magnitude do terremoto entre a Colômbia e o Equador na escala Richter?

(Dado: $\log 2 \simeq 0{,}3$)

a) 33,2 graus. **c)** 12,1 graus. **e)** 8,9 graus.

b) 16,6 graus. **d)** 10,7 graus.

Alternativa **e**.

6. **(Enem)** Enquanto um ser está vivo, a quantidade de carbono 14 nele existente não se altera. Quando ele morre, essa quantidade vai diminuindo. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5 730 anos, ou seja, num fóssil de um organismo que morreu há 5 730 anos haverá metade do carbono 14 que existia quando ele estava vivo. Assim, cientistas e arqueólogos usam a seguinte fórmula para saber a idade de um fóssil encontrado: $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5\,730}}$, em que t é o tempo, medido em ano, $Q(t)$ é a quantidade de carbono 14 medida no instante t e Q_0 é a quantidade de carbono 14 no ser vivo correspondente.

Um grupo de arqueólogos, numa de suas expedições, encontrou 5 fósseis de espécies conhecidas e mediram a quantidade de carbono 14 neles existente. Na tabela temos esses valores juntamente com a quantidade de carbono 14 nas referidas espécies vivas.

Fóssil	Q_0	$Q(t)$
1	128	32
2	256	8
3	512	64
4	1 024	512
5	2 048	128

O fóssil mais antigo encontrado nessa expedição foi:

a) 1. **b)** 2. **c)** 3. **d)** 4. **e)** 5.

Alternativa **b**.

7. **(UFJF/Pism-MG)** Um terremoto é o resultado de uma liberação súbita de energia que provoca movimentos da superfície terrestre. Esses movimentos recebem o nome de abalos sísmicos. A magnitude de um terremoto, que é uma medida quantitativa do tamanho do terremoto, está relacionada com a energia sísmica liberada no foco do terremoto. Em 1935 Gutenberg e Richter concluíram que a fórmula

$$\log_{10} E = K + \frac{3}{2} \cdot M$$

relaciona a energia sísmica liberada E, medida em erg, com a magnitude M do terremoto, em que K é uma constante positiva.

De acordo com a fórmula [anterior], qual é a razão entre a energia liberada por um terremoto de magnitude 7 [e] um terremoto de magnitude 3?

a) $\frac{3}{7}$ **b)** $\frac{7}{3}$ **c)** 4 **d)** 10^{-6} **e)** 10^{6}

Alternativa **e**.

8. **(UFGD-MS)** Num determinado experimento laboratorial, certo tipo de bactéria se multiplica e, em média, seu número aumenta 2,4 vezes a cada 3,5 horas. Supondo que o tubo de ensaio no laboratório contenha inicialmente 1000 dessas bactérias, de acordo com o modelo de função exponencial, em quantas horas o número dessas bactérias atingiria cerca de 4×10^{10}?

Use $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$.

a) 63 horas. **b)** 70 horas. **c)** 77 horas. **d)** 84 horas. **e)** 91 horas.

Alternativa **b**.

9. **(Enem)** Um casal decidiu aplicar em um fundo de investimentos que tem uma taxa de rendimento de 0,8% ao mês, num regime de capitalização composta.

O valor final F a ser resgatado, depois de n meses, a uma taxa de rendimento mensal x, é dado pela expressão algébrica $F = C(1 + x)^n$, em que C representa o capital inicial aplicado.

O casal planeja manter a aplicação pelo tempo necessário para que o capital inicial de R$ 100.000,00 duplique, sem outros depósitos ou retiradas.

Fazendo uso da tabela, o casal pode determinar esse número de meses.

x	$\log y$
1,008	0,003
1,08	0,03
1,8	0,20
2	0,30
3	0,47

Para atender ao seu planejamento, o número de meses determinado pelo casal é:

a) 156. **c)** 100. **e)** 1,5.

b) 125. **d)** 10.

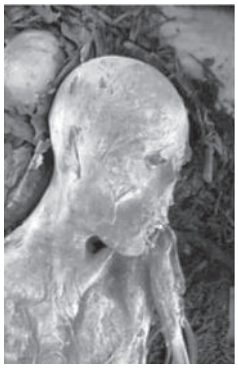
Alternativa **c**.

10. **(UEL)** Leia o texto e [analise] a imagem a seguir.

No Brasil, a preservação natural de um cadáver é rara devido ao clima tropical e ao solo ácido, que aceleram a sua decomposição. Por isso, a múmia encontrada em Goianá, Minas Gerais, no século XIX é tão incomum.

Adaptado de: www.museunacional.ufrj.br

Reprodução/UEL-PR, 2020.



Uma múmia encontrada em território brasileiro. Museu Nacional do Rio de Janeiro.

Passados t anos após a morte deste ser humano, suponha que a massa $m(t)$ de seu cadáver, medida em quilogramas, seja dada por $m(t) = 40e^{-C \cdot t}$, onde $e > 1$ é uma constante e C é um parâmetro relacionado às características morfoclimáticas da região onde originalmente se encontrava. Admitindo que passados $t = 600$ anos a múmia possuía exatos 4 kg, [indique no caderno] a alternativa que apresenta, corretamente, o valor do parâmetro C.

a) $C = \frac{1}{200}\log_e 50$ **d)** $C = \frac{1}{500}\log_e 40$

b) $C = \frac{1}{300}\log_e 20$ **e)** $C = \frac{1}{600}\log_e 10$

c) $C = \frac{1}{400}\log_e 30$

Alternativa **e**.

11. **(Unicamp-SP)** Uma pesquisadora está testando o efeito de um medicamento em uma bactéria. Sabe-se que a função que descreve a quantidade de bactérias vivas na amostra em um tempo t, dado em minutos, é $Q(t) = C \cdot 10^{-b \cdot t}$, com b e C dependendo de características da bactéria e do medicamento.

Dados: $\log_{10} 2 \simeq 0{,}3$.

a) Para uma certa amostra com 5 milhões de bactérias, verificou-se que, nos primeiros 10 minutos, $\frac{9}{10}$ da quantidade de bactérias na amostra morreram. Qual é a quantidade de bactérias vivas que restaram após 20 minutos? $5 \cdot 10^4$

b) Numa outra amostra, onde foi descoberto experimentalmente que b = 3, quanto tempo levará para que a quantidade de bactérias fique reduzida à metade? 6 s

12. **(UFPR)** O pH de uma substância é um valor que expressa a concentração de íons de hidrogênio $[H^+]$, medida em mol por litro (mol/L), em uma solução aquosa. Para o cálculo do pH de uma substância, usa-se a expressão: $pH = -\log[H^+]$.

a) Sabendo que a água possui pH = 7 e que uma bebida energética tem pH = 3, quantas vezes a concentração de íons hidrogênio $[H^+]$ é maior na bebida energética em relação à concentração na água?

10 000 vezes.

b) Constatou-se em laboratório que o suco de limão possui uma concentração de íons de hidrogênio $[H^+] = 0{,}0072$ mol/L. Supondo que log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, calcule o pH do suco de limão. Dê sua resposta na forma decimal. Aproximadamente 2,14.

Conteúdos e aprendizagens

Não escreva no livro

Os idiomas falados na América Latina e no Caribe são, em sua maioria, derivados do latim.

Luis Moura/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Solução

Equações exponenciais → **Logaritmos**

Função logarítmica

$$f(x) = \log_a x$$

x deve ser um número real positivo ($x \in \mathbb{R}_+^*$)

a deve ser maior do que 0 e diferente de 1 (ou seja, $a > 0$ e $a \neq 1$)

A base a define se a função será:

- crescente
- ou
- decrescente

Aplicações financeiras

Energia liberada em um terremoto

Crescimento de plantas

Nível de intensidade sonora

Queda de cabelo

Meia-vida

Banco de imagens/Arquivo da editora

- Compreendo a relação existente entre equações exponenciais e logaritmos?
- Compreendo a relação existente entre a equação exponencial e a função logarítmica?
- Compreendo a influência da base a em funções do tipo $f(x) = \log_a x$?

Respostas pessoais.

UNIDADE 5

Sequências e progressões

Fractais são figuras geométricas que representam de maneira interessante a ideia de sequência e de recursividade. Usando um programa de computador, podemos criar figuras complexas, em que cada parte é semelhante à figura como um todo. A Geometria fractal também está presente na natureza. É possível encontrar exemplos em flores, galhos de árvores, flocos de neve e até na cauda de um camaleão.

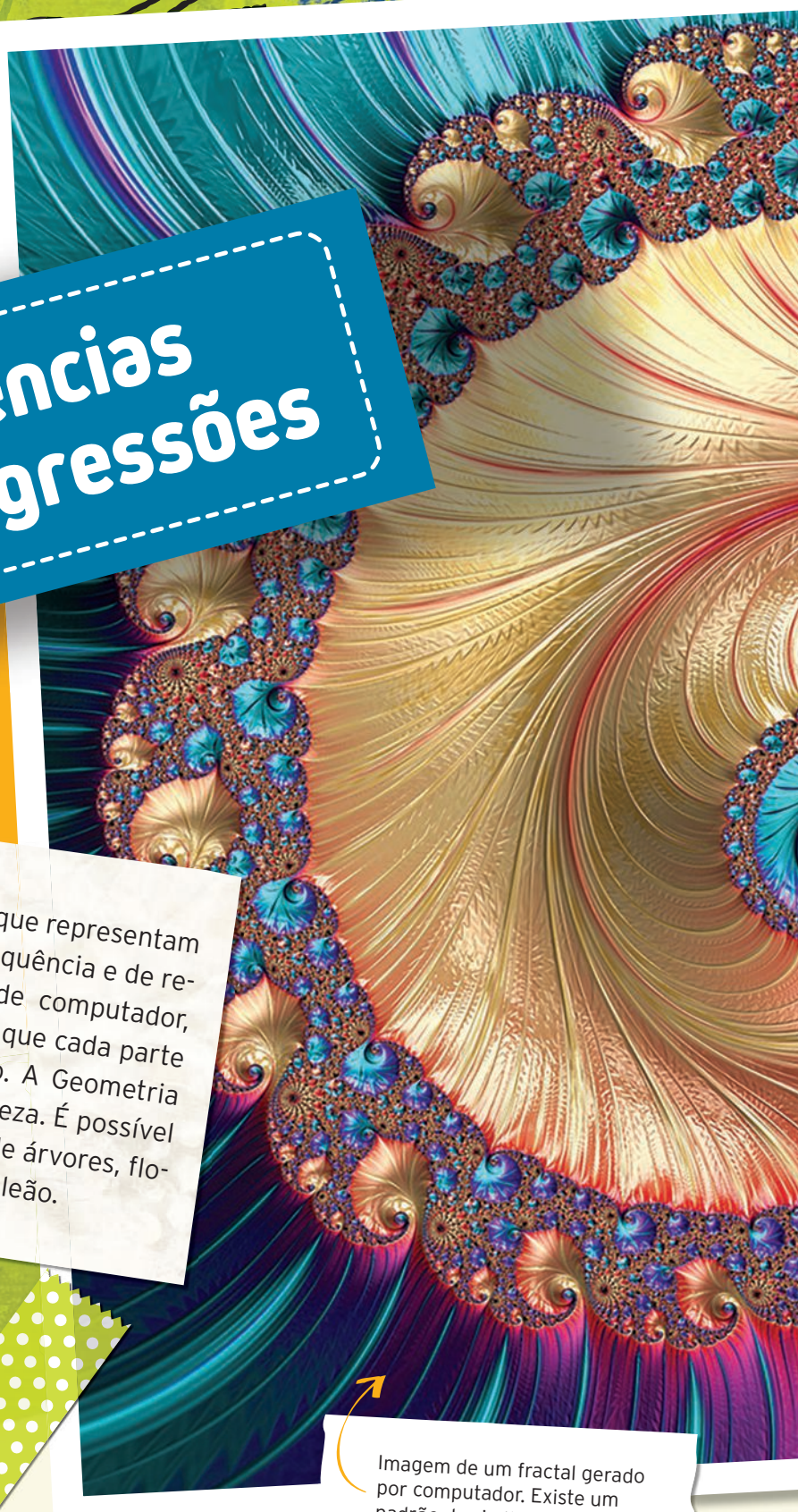


Imagem de um fractal gerado por computador. Existe um padrão de similaridade em diferentes escalas.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta abertura encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Nelson Charette Photo/Shutterstock

- Pesquise outros exemplos de fractais na natureza. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.
- Converse com os colegas sobre o que é uma sequência numérica. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 1

Sequências

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação-problema

Mix Tape/Shutterstock

Os *emojis* são símbolos muito usados para representar emoções e sensações em mensagens.

Emojis

Emojis são símbolos utilizados com frequência na troca de mensagens eletrônicas, para representar emoções e sensações nas mensagens que enviamos ou para demonstrar uma reação à mensagem de outro usuário. Mas você conhece a história dos *emojis*?

a) Busque em *sites* confiáveis a criação dos *emojis* e dos antecessores deles, os *emoticons* e os *kaomojis*. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Existem centenas de *emojis*, e, anualmente, as diferentes plataformas de mensagens eletrônicas lançam novos símbolos. O uso desses pictogramas tornou-se tão enraizado na comunicação virtual que é comum encontrar pessoas que tenham um *emoji* preferido ou que criam sequências próprias de símbolos para as representar.

Considere um usuário de rede social que, para criar uma marca, registrava sempre esta **sequência** de *emojis* ao final de cada mensagem:

Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Em determinada postagem, para enfatizar os sentimentos que queria expressar, ele resolveu repetir essa sequência de *emojis* algumas vezes, conforme indicado a seguir.

Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

b) Qual é a regra que descreve essa sequência? Repetir os 5 *emojis* que representam o usuário.

c) O que você acha que significa o *emoji* que é o 8º termo da sequência? E o 10º termo? Exemplos de resposta: Espanto, susto; raiva.

Nessa sequência de imagens, não existe uma regra numérica que associa um *emoji* ao anterior, mas existe um **padrão** de repetição, que pode ser usado para determinar qualquer elemento da sequência.

Fique atento

Indicamos que a sequência é infinita colocando reticências (...) no final. Também podemos usar as reticências entre termos da sequência para indicar a supressão de 1 ou mais termos.

Explorando a ideia de sequência

Você estudou no Ensino Fundamental que sequência é uma sucessão, uma lista ordenada de números, figuras geométricas ou outros elementos, que são os **termos da sequência**. Ou seja, em uma sequência os termos são apresentados em certa ordem, seguindo ou não uma regularidade (um padrão).

Acompanhe alguns exemplos de sequências.

- Sequência dos dias da semana: (domingo, segunda-feira, ..., sábado).
- Sequência dos meses do ano: (janeiro, fevereiro, ..., dezembro).
- Sequência dos números naturais: (0, 1, 2, 3, 4, ...).
- Sequência das potências de 2 com expoente natural: (1, 2, 4, 8, 16, ...).

Na sequência dos meses do ano, por exemplo, temos: 1º termo: janeiro; 2º termo: fevereiro; ...; 12º termo: dezembro.

Se representarmos o 1º termo por a_1 (lê-se "a índice um", ou "a um"), o 2º termo por a_2, o 3º por a_3, e assim por diante, até o termo de ordem n, ou enésimo termo (a_n), essa sequência pode ser representada por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

Considerando os meses do ano, temos:

- a_1 = janeiro
- a_7 = julho
- a_{10} = outubro
- a_{12} = dezembro

Maurice Yom/Shutterstock

A cada ano, os calendários precisam ser atualizados porque a quantidade de dias em um ano não é divisível pela quantidade de dias em uma semana, ou seja, por 7.

Reflita

Não escreva no livro

Considere os exemplos de sequências apresentados e determine o 6º termo de cada uma delas, isto é, o termo a_6.

- Sequência dos dias da semana: sexta-feira.
- Sequência dos meses do ano: junho.
- Sequência dos números naturais: 5.
- Sequência das potências de 2 com expoente natural: 32.

Agora, vamos estudar as sequências numéricas que apresentam um padrão, como a sequência dos números naturais ou a sequência das potências de 2 com expoente natural.

Quando uma sequência tem um padrão, ele pode ser explicitado de diferentes maneiras, inclusive textualmente. Mas, em Matemática, é comum descrevermos os termos de uma sequência numérica usando fórmulas. A **fórmula de recorrência**, por exemplo, expressa o valor do 1º termo a_1 da sequência e cada termo a_n, a partir do 2º termo, em função do termo anterior a_{n-1}, com $n \geqslant 2$.

Por exemplo, a fórmula de recorrência da sequência dos números naturais pode ser representada da seguinte maneira: $a_1 = 0$ e $a_n = a_{n-1} + 1$, com $n \geqslant 2$.

Fique atento

Na fórmula de recorrência, também podemos expressar o valor de 2 ou mais termos, e cada termo a_n será dado em função dos 2 termos anteriores, a_{n-1} e a_{n-2}, ou de mais de 2 termos anteriores.

Chamamos de fórmula de recorrência porque recorremos ao termo anterior (ou aos termos anteriores) para obter o próximo termo.

Já a **fórmula do termo geral** de uma sequência expressa cada termo a_n em função de n, com $n \geqslant 1$.

Considerando o exemplo anterior, podemos escrever a fórmula do termo geral da sequência dos números naturais da seguinte maneira: $a_n = n - 1$, com $n \geqslant 1$.

Sobre o assunto

Assista ao vídeo *O que é a sequência de Fibonacci e por que é chamada de 'código secreto da natureza'*, da *BBC News*, disponível em: https://tedit.net/1ll6zj (acesso em: 26 jul. 2024), para saber mais sobre uma das sequências mais famosas da Matemática.

Ian 2010/Shutterstock

Diversos exemplos da sequência de Fibonacci podem ser identificados na natureza, como na disposição das sementes de um girassol.

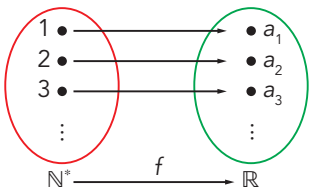
Formalizando a definição de sequência como uma função

Considerando uma sequência numérica dada por uma fórmula do termo geral, podemos estabelecer uma relação entre a ideia de sequência e a ideia de função, pois, para cada índice n, existe um único termo a_n, ou, para cada número natural não nulo n, corresponde um único número $f(n) = a_n$.

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

$$1 \to a_1;\ 2 \to a_2;\ 3 \to a_3;\ \ldots;\ n \to a_n;\ \ldots$$

Dessa maneira, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, ..., $f(n) = a_n$, ...



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Uma **sequência infinita** (ou sucessão infinita) de números reais é uma **função** cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, e, para cada número natural não nulo, corresponde um único número real.

$$f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$

$$f(n) = a_n$$

Para uma **sequência finita** de números reais, a **função** que a determina tem como domínio um subconjunto dos números naturais não nulos $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Fique atento

Para o estudo desta Unidade, consideraremos apenas sequências cujos termos sejam números reais.

Acompanhe os exemplos.

a) A sequência (2, 4, 6, 8, 10, ...) dos números pares positivos é infinita, na qual $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, $a_5 = 10$, etc. Usando a fórmula do termo geral dessa sequência, podemos estabelecer a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n = 2n$.

b) A sequência (5, 10, 15, 20) dos 4 primeiros múltiplos positivos de 5 é finita, na qual $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 15$ e $a_4 = 20$. Usando a fórmula do termo geral dessa sequência, podemos estabelecer a função $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n = 5n$.

c) Ao lançarmos uma moeda, temos 2 resultados possíveis: cara, que denotamos C, ou coroa, que denotamos K. Se lançarmos 2 moedas diferentes, teremos 4 possibilidades: (C, C), (C, K), (K, C) e (K, K). Se lançarmos 3 moedas diferentes, serão 8 resultados possíveis, e assim por diante.

A relação entre a quantidade de moedas e a quantidade de resultados possíveis é uma função: a cada quantidade de moedas corresponde uma única quantidade de resultados.

Lançamento de moedas

Quantidade de moedas	Quantidade de resultados possíveis
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
⋮	⋮

Dados elaborados para fins didáticos.

Nesse caso, sendo n a quantidade de moedas lançadas, podemos escrever a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = a_n = 2^n$. Assim, temos $f(1) = a_1 = 2$, $f(2) = a_2 = 4$, $f(3) = a_3 = 8$, etc., e a sequência da quantidade de resultados possíveis é representada por (2, 4, 8, 16, 32, ...).

Não escreva no livro

Reflita

Qual é a função associada à sequência dos números ímpares positivos (1, 3, 5, 7, 9, ...)?

$f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n = 2n - 1$.

Reflita

- (C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (C, K, K), (K, C, C), (K, C, K), (K, K, C) e (K, K, K).
- Dos 8 resultados possíveis, os que têm, no mínimo, 2 caras são: (C, C, C), (C, C, K), (C, K, C) e (K, C, C), ou seja, 4 possibilidades.

Assim, a probabilidade é $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$.

Reflita

- Explicite os 8 resultados possíveis no caso do lançamento de 3 moedas.
- Determine a probabilidade de tirar, no mínimo, 2 caras lançando 3 moedas.

Atividades

Não escreva no livro

1. Determine os 4 primeiros termos da sequência cujo termo geral é $a_n = 3n + 2$, $n \in \mathbb{N}^*$. (5, 8, 11, 14)

2. Determine os 5 primeiros elementos das sequências (a_n), com $n \in \mathbb{N}^*$, definidas pelas leis de recorrência a seguir.

a) $a_1 = -2$ e $a_n = (-1)^n \cdot a_{n-1}$, para $n \geqslant 2$. (–2, –2, 2, 2, –2)

b) $a_1 = 1$ e $a_n = 2a_{n-1} + 3$, para $n \geqslant 2$. (1, 5, 13, 29, 61)

3. Antibióticos são medicamentos que têm a capacidade de inibir o crescimento ou de destruir determinados microrganismos.

a) Você já percebeu que as prescrições médicas geralmente determinam que o medicamento deve ser administrado de 6 em 6 horas, de 8 em 8 horas ou, ainda, de 12 em 12 horas? Pense nesses intervalos entre as dosagens dos antibióticos. O que acontece com os horários de administração de um dia para o outro? Por que isso acontece?

3. a) Resposta pessoal. São sempre os mesmos, pois 6, 8 e 12 são divisores de 24 (24 horas = 1 dia).

Brenda Rocha - Blossom/Shutterstock

Desde 2010, os antibióticos só podem ser vendidos sob prescrição médica no Brasil, em 2 vias, e com a indicação do nome do paciente e da dosagem receitada.

b) Uma médica recomendou a um paciente que tomasse um comprimido de determinado antibiótico a cada 8 horas, durante 5 dias. O paciente começou a administrá-lo às 6 horas da manhã. Escreva no caderno a sequência de horários em que ele vai se medicar e quantos comprimidos ele tomará ao todo. (6:00, 14:00, 22:00, 6:00, 14:00, 22:00, 6:00, 14:00, 22:00, 6:00, 14:00, 22:00, 6:00, 14:00, 22:00), totalizando 15 comprimidos.

c) Para outro paciente, a recomendação médica foi para que ele tomasse um comprimido de antibiótico a cada 6 horas, durante 7 dias consecutivos. Quantos comprimidos serão administrados ao todo nesse tratamento, iniciando-o às 5 horas da manhã? $7 \cdot 4 = 28$; logo, 28 comprimidos no tratamento.

Sobre o assunto

Para garantir o uso correto de antibióticos, acesse a cartilha da Secretaria da Saúde do Ceará, que traz diversas informações sobre o tema.

CEARÁ. Secretaria de Saúde do Estado. Grupo de Prevenção do Uso Racional de Medicamentos (GPUIM). *Uso racional de antibióticos*. Fortaleza, 2021. Disponível em: https://tedit.net/5depj8. Acesso em: 26 jul. 2024.

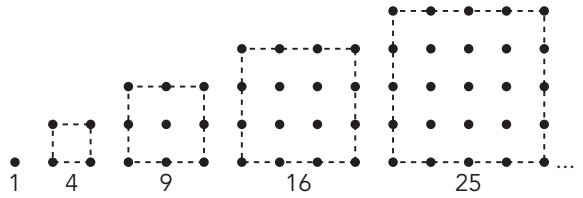
4. Escreva no caderno as sequências definidas pelas funções $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ dadas. Se as sequências forem infinitas, escreva pelo menos os 4 primeiros termos.

a) $f(n) = 7n$ (7, 14, 21, 28, ...)

b) $f(n) = \dfrac{1}{3^n}$, com $n \leqslant 4$. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}\right)$

5. a) Porque os termos dela são quadrados perfeitos, ou seja, têm raiz quadrada exata. Além disso, a quantidade de pontos correspondente pode ser disposta de modo a formar um quadrado.

5. Examine a sequência dos números quadrados perfeitos (1, 4, 9, 16, 25, ...).



Banco de imagens/ Arquivo da editora

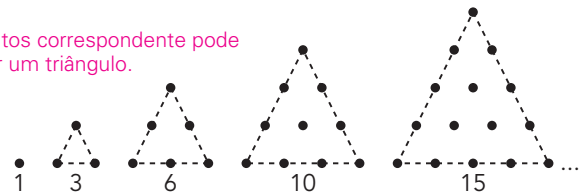
a) Por que essa sequência recebe esse nome?

b) Qual é a fórmula do termo geral dessa sequência? E a qual função podemos associar essa sequência? Fórmula do termo geral: $a_n = n^2$, com $n \geqslant 1$; função: $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = n^2$.

c) Escreva essa sequência no caderno listando, pelo menos, os 10 primeiros números quadrados perfeitos. (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...)

6. Examine agora a sequência dos números triangulares (1, 3, 6, 10, 15, ...).

a) Porque a quantidade de pontos correspondente pode ser disposta de modo a formar um triângulo.



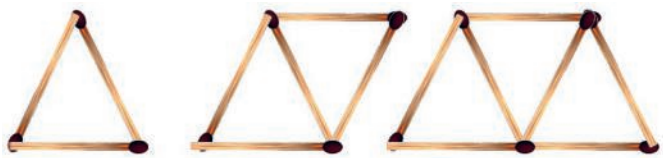
Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) Por que essa sequência recebe esse nome?

b) A fórmula do termo geral dessa sequência é $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, com $n \geqslant 1$. A qual função podemos associar essa sequência? Função: $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

c) Escreva essa sequência no caderno listando, pelo menos, os 10 primeiros números triangulares. (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...)

7. Junte-se a um colega e analisem as representações de figuras formadas por palitos.


Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) Copiem a tabela no caderno e completem-na com a quantidade de palitos necessária para formar cada quantidade de triângulos.

Figuras formadas por palitos

Quantidade de triângulos	Quantidade de palitos	
1	3	
2	5	
3		7
4		9
5		11
⋮	⋮	
n		$2n + 1$

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Percebam que a quantidade de palitos necessária é dada em função da quantidade de triângulos. Qual é essa função? $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = 2n + 1$.

c) Usando a lei dessa função, quantos palitos são necessários para formar 20 triângulos? $f(20) = 2 \cdot 20 + 1 = 41$; ou seja, 41 palitos.

d) Quantos triângulos podemos formar com 61 palitos? $f(n) = 61 \Rightarrow 61 = 2n + 1 \Rightarrow 2n = 60 \Rightarrow n = 30$; ou seja, 30 triângulos.

8. No caderno, crie a lei de uma função $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que se relacione a uma sequência numérica infinita formada apenas por números inteiros negativos. Exemplos de resposta: $f(n) = -2n$; $f(n) = -(1 + n)$; $f(n) = 4 - 5n$.

CAPÍTULO 2

Progressão aritmética

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

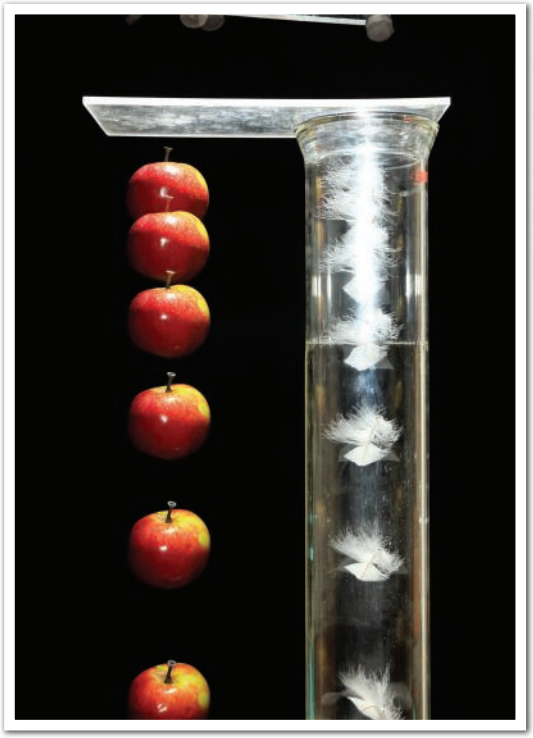
Situação-problema 1

Professor, a influência que a resistência do ar tem na queda livre de objetos soltos fora do vácuo, partindo do repouso, pode dar a impressão errônea de que objetos com maior medida de massa sofrem uma aceleração gravitacional maior do que objetos com menor medida de massa.

Movimento de queda livre

Imagine que você vai soltar uma borracha, da medida de altura da carteira escolar, e medir o intervalo de tempo para que ela atinja o chão. Se você fizer isso diversas vezes nas mesmas condições, a medida de intervalo de tempo de cada experimento será sempre a mesma ou pode variar?

Desconsiderando a resistência do ar, o movimento descrito pela borracha nesse experimento é chamado de **queda livre**, que consiste em qualquer movimento de descida que os corpos realizam quando largados no vácuo ou quando desprezamos a resistência do ar, neste caso a única força que atua no corpo é a gravidade. Quando realizamos um experimento de queda livre, a medida de intervalo de tempo t para que qualquer objeto chegue ao chão, solto a partir do repouso de uma mesma medida de comprimento da altura h, não depende do formato ou da medida de massa do objeto e é dada pela fórmula $h = \frac{gt^2}{2}$ considerando a medida de aceleração gravitacional local como $g \simeq 10\ m/s^2$.



TED KINSMAN/Science Source/Fotoarena

Fotomontagem de maçã em queda livre no ar e pena em queda livre no vácuo fotografadas em 6 instantes.

a) $1{,}8 = \frac{10t^2}{2} \Rightarrow t^2 = 0{,}36 \Rightarrow t = 0{,}6$; logo, sempre 0,6 s.

a) Um objeto é solto no vácuo em queda livre, a partir do repouso, de uma posição com medida de distância $h = 1{,}8$ m em relação ao solo. Se repetirmos esse experimento 5 vezes, qual será a medida de intervalo de tempo para que o objeto chegue ao chão em cada um deles?

b) Escreva no caderno a sequência formada pelas medidas de intervalo de tempo de 5 experimentos. O que você percebe nessa sequência? (0,6; 0,6; 0,6; 0,6; 0,6). Todos os termos são iguais a 0,6.

A sequência que você escreveu tem todos os termos iguais, ou seja, é uma **sequência constante**.

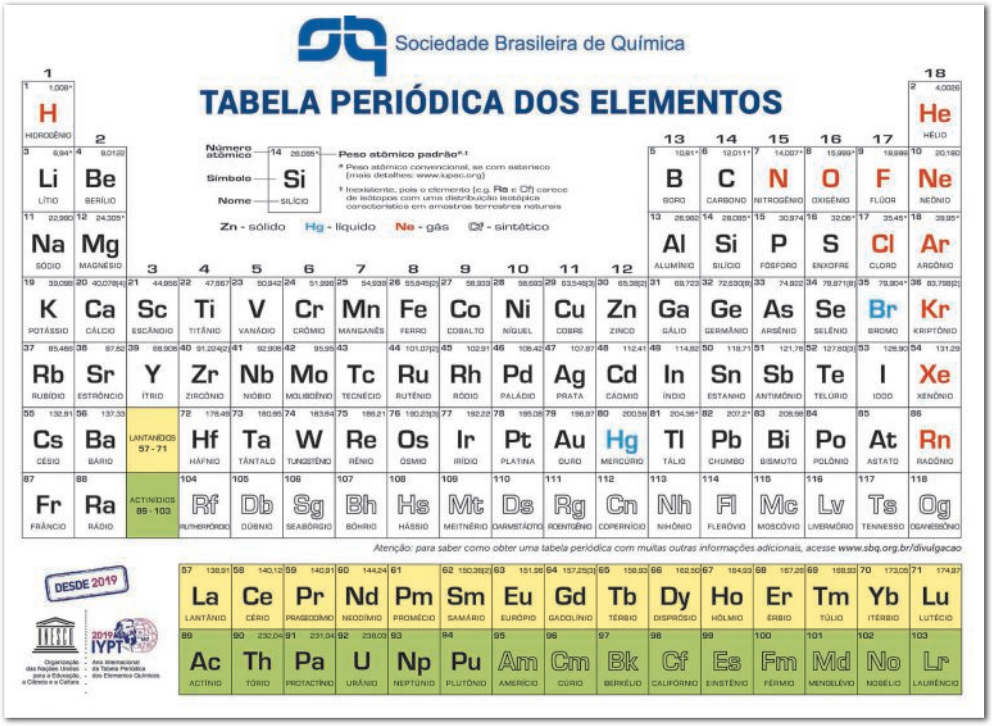
c) Calcule a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior dessa sequência. Constante e igual a 0.

Professor, considerando experimentos reais da situação-problema hipotética apresentada, a medida de intervalo de tempo poderia variar em virtude de imprecisões de medição e de reação, pois essa medida é muito pequena. O importante é que os estudantes pensem nas características do experimento, que é realizado sempre nas mesmas condições, para que entendam o experimento feito no vácuo.

Situação-problema 2

Tabela periódica

Reprodução/Sociedade Brasileira De Química



Na tabela periódica vigente no início de 2024, podemos encontrar aproximadamente 92 elementos químicos que existem naturalmente e cerca de 26 elementos sintetizados. Destes últimos, 4 foram incorporados à tabela recentemente, em 2015.

Número atômico é a nomenclatura utilizada, principalmente na área de Ciências da Natureza, para indicar a quantidade de prótons de cada elemento químico, de modo que não existem elementos químicos diferentes com o mesmo número atômico.

Uma disposição esquemática muito utilizada para organizar os elementos químicos é a **tabela periódica**. Entre outras configurações consideradas para dispor os elementos nela, podemos destacar a ordem crescente do número atômico dos elementos.

a) Imagine uma sequência numérica com o número atômico de cada um dos elementos químicos da tabela periódica, em ordem crescente. Quantos termos essa sequência teria? E qual seria a relação entre os termos dessa sequência?

Essa sequência é uma **progressão aritmética**, e como os termos aumentam de 1 em 1, a **razão** da progressão é igual a 1.

b) O 20º termo dessa sequência corresponde ao número atômico do cálcio, o metal mais abundante no corpo humano, encontrado predominantemente nos tecidos ósseos. Qual é o termo anterior a ele nessa sequência? Pesquise o nome do elemento químico correspondente a esse termo e dê exemplos de onde podemos encontrá-lo.

c) Qual é o 6º termo depois do 20º termo dessa sequência? Como você encontrou esse número? Pesquise o nome do elemento químico correspondente a esse termo e uma característica dele.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

a) 118 termos. Exemplos de resposta: Cada termo seria 1 a mais do que o anterior; ou esses termos seriam os números naturais positivos até 118.

b) 19; esse elemento químico é o potássio, muito presente, por exemplo, em algumas hortaliças e frutas.

c) 26. Exemplo de resposta: Adicionando 6 ao número 20 (que é o 20º termo da sequência), pois os termos aumentam de 1 e 1 na sequência. Esse elemento químico é o ferro, que, por exemplo, é abundante no sangue humano.

Formalizando o conceito de progressão aritmética

As situações-problema apresentadas na abertura deste capítulo apresentam sequências que têm uma estrutura comum, o que as caracteriza como **progressão aritmética**. Conheça a definição.

Progressão aritmética (**PA**) é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo, a partir do 2º termo, e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada **razão da progressão** e é representada pela letra r.

Assim, dados o termo a_1 de uma PA e a razão r, podemos relacionar cada termo a_n, a partir de a_2, ao termo anterior a_{n-1} pela fórmula de recorrência $a_n = a_{n-1} + r$, com $n \geqslant 2$.

Analise alguns exemplos a seguir.

a) A sequência (2, 7, 12, 17, ...) é uma progressão aritmética infinita, em que o 1º termo é $a_1 = 2$ e a razão é $r = 5$.

b) A sequência (20, 10, 0, –10, –20) é uma PA de 5 termos, em que o 1º termo é $a_1 = 20$ e a razão é $r = -10$.

c) A sequência (4, 4, 4, ...) é uma PA infinita, em que o 1º termo é $a_1 = 4$ e a razão é $r = 0$.

d) A sequência (1, –1, 1, –1, 1, –1, ...) **não** é uma progressão aritmética, pois as diferenças entre termos sucessivos são alternadamente –2 e 2.

Reflita: Na situação-problema **1**, a diferença entre pares de termos consecutivos é 0, ou seja, a razão é 0. Na situação-problema **2**, a diferença é 1, ou seja, a razão é 1.

Fique atento

Em uma progressão aritmética, também podemos dizer que a diferença entre 2 termos consecutivos é constante.

Reflita

Conhecendo a definição, relembre as sequências citadas na abertura deste capítulo e constate que elas são progressões aritméticas. Indique, ainda, no caderno, a razão de cada uma delas.

Explore para descobrir

b) Resposta esperada: A PA do exemplo **a** é crescente, pois cada termo, a partir do segundo, é maior do que o anterior. A PA do exemplo **b** é decrescente, pois cada termo, a partir do segundo, é menor do que o anterior.

Não escreva no livro

a) Qual é a razão de uma PA constante? Qual das progressões apresentadas nos exemplos é constante? $r = 0$; a PA do exemplo **c**.

b) Analise os números que formam a PA do exemplo **a** e a PA do exemplo **b**. Qual delas você classificaria como crescente? E qual classificaria como decrescente? Justifique suas respostas.

c) Considerando as classificações que você fez, conjecture como pode ser a relação delas com a razão. Exemplo de resposta: A PA crescente tem razão positiva e a PA decrescente tem razão negativa.

De modo geral, podemos classificar uma PA em crescente, decrescente ou constante dependendo da razão r dela.

Crescente

Quando cada termo, a partir do 2º termo, é maior do que o anterior, isto é, quando a razão r é positiva.

Decrescente

Quando cada termo, a partir do 2º termo, é menor do que o anterior, isto é, quando a razão r é negativa.

Constante

Quando todos os termos são iguais, isto é, quando a razão r é nula.

Explorando o termo geral de uma progressão aritmética

No início desta Unidade, exploramos a fórmula do termo geral de algumas sequências numéricas, relacionando cada termo a_n com a posição n que ocupa na sequência.

Considerando a definição de progressão aritmética, na qual a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é constante, será que podemos generalizar a fórmula do termo geral desse tipo de sequência numérica?

Explore para descobrir

1. b) Considerando o cálculo de a_3 no item **a**, basta substituir a_2 por $a_1 + r$:
$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = 3 + 4 + 4 = 11$

Não escreva no livro

1. Considere uma PA tal que $a_1 = 3$ e $r = 4$. **1. a)** $a_2 = a_1 + r = 3 + 4 = 7$; $a_3 = a_2 + r = 7 + 4 = 11$.

a) Calcule o termo a_2 adicionando a_1 e r. Depois, calcule o termo a_3.

b) Como você poderia calcular o termo a_3 partindo do termo a_1? **1. c)** 3 parcelas, pois $a_4 = a_3 + r = a_1 + r + r + r = 3 + 4 + 4 + 4 = 15$.

c) Para obter o termo a_4, é preciso adicionar quantas parcelas iguais a $r = 4$ ao termo a_1?

d) Para obter o termo a_8, você precisaria adicionar quantas parcelas iguais a $r = 4$ ao termo a_1? E para obter um termo a_n? 7 parcelas; $(n - 1)$ parcelas.

2. Considere agora uma PA tal que $a_1 = 2$ e $r = -3$. **2. b)** 3 parcelas, pois $a_4 = a_3 + r = a_1 + r + r + r = 2 - 3 - 3 - 3 = -7$.

a) Calcule os termos a_3 e a_4 usando os valores de a_1 e r. $a_3 = a_1 + r + r = -4$; $a_4 = a_1 + r + r + r = -7$.

b) Para obter o termo a_4, você adicionou quantas parcelas iguais a $r = -3$ ao termo a_1?

c) Para obter o termo a_{10}, você precisaria adicionar quantas parcelas iguais a $r = -3$ ao termo a_1? E para obter um termo a_n? 9 parcelas; $(n - 1)$ parcelas.

3. Considere uma PA com 1º termo a_1 e razão r.

a) Escreva, no caderno, as expressões que permitem obter os termos a_2, a_3 e a_4, respectivamente, usando apenas a_1 e r. $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_1 + 2r$ e $a_4 = a_1 + 3r$.

b) Agora, escreva no caderno a expressão que permite obter o termo a_n usando a_1 e r. Depois, compare com a resposta dos colegas. Resposta esperada: $a_n = a_1 + (n - 1)r$, com $n \geqslant 1$.

Formalizando a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r, partindo do 1º termo a_1, para avançar 1 termo, basta adicionar r ao 1º termo $(a_2 = a_1 + r)$; para avançar 2 termos, basta adicionar $2r$ ao 1º termo $(a_3 = a_1 + 2r)$; para avançar 3 termos, basta adicionar $3r$ ao 1º termo $(a_4 = a_1 + 3r)$; e assim por diante. Desse modo, um termo qualquer de índice n da sequência, chamado **termo geral da PA**, é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \text{ com } n \geqslant 1.$$

Reflita

- Use a fórmula do termo geral da PA nas sequências das atividades **1** e **2** do *Explore para descobrir* e verifique se as conclusões que você obteve inicialmente condizem com essa fórmula. Resposta esperada: Sim.
- No caderno, mostre que a fórmula do termo geral da PA também é válida para sequências constantes.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.
Para $r = 0$, temos $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 0 = a_1$ e, de fato, na PA constante todos os termos são iguais ao 1º termo.

Professor, ressalte que não existe o termo a_0 em sequências (o índice pertence ao conjunto dos números naturais não nulos), mas, às vezes, é conveniente considerarmos um termo fictício a_0 que seria anterior ao a_1. Esse termo nunca faz parte da sequência, é apenas uma técnica de cálculo que permite associar uma PA de maneira imediata aos dados de algumas situações-problema.

Observação: Algumas vezes, é conveniente indicar o 1º termo de uma PA por a_0, e não por a_1, assim o termo geral é dado por $a_n = a_0 + nr$, com $n \geqslant 1$. Note isso na seguinte situação.

Se o preço de um *smartphone* novo é R$ 2.000,00 e esse valor diminui R$ 120,00 a cada ano de uso, qual será o preço do *smartphone* com 5 anos de uso?

Temos uma PA com $a_0 = 2\,000$ (valor inicial), razão $r = -120$, e queremos determinar o termo a_5 (valor do celular após 5 anos).

$$a_5 = a_0 + 5r = 2\,000 + 5 \cdot (-120) = 2\,000 - 600 = 1400$$

Após 5 anos de uso, o preço do *smartphone* será R$ 1.400,00.

Kaspars Grinvalds/Shutterstock

Smartphone.

Fique atento

Podemos escrever fórmulas para relacionar quaisquer 2 termos de uma PA e, para isso, basta analisar quantos termos avançamos ou retrocedemos para ir de um termo ao outro. Por exemplo: podemos relacionar os termos a_9 e a_4 fazendo $a_9 = a_4 + 5r$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_4 para a_9; também podemos relacionar os termos a_3 e a_{15} fazendo $a_3 = a_{15} - 12r$, pois retrocedemos 12 termos ao passar de a_{15} para a_3.

Atividades resolvidas

1. O cometa *Halley* orbita em torno do Sol, de maneira que a cada 76 anos ele fica mais próximo da Terra.

Após a chegada dos portugueses ao Brasil, a 3ª vez que esse cometa passou perto da Terra foi em 1683 e a 7ª vez, em 1987.

a) Quando foi a 5ª vez, após a chegada dos portugueses ao Brasil, que ele passou próximo ao planeta Terra?

b) Quais foram (ou serão) todos os anos em que o cometa passou (ou passará) próximo da Terra, desde 1500 até o ano 2200?

Resolução

a) Temos $a_3 = 1683$, $a_7 = 1987$ e $r = 76$.

Como $a_5 = a_3 + 2r$, obtemos:

$a_5 = 1683 + 2 \cdot 76 = 1683 + 152 = 1835$

Portanto, a 5ª vez após a chegada dos portugueses ao Brasil que esse cometa passou perto da Terra foi em 1835.

b) Sabendo que $a_3 = a_1 + 2r$, obtemos:

$$1683 = a_1 + 2 \cdot 76 \Rightarrow 1683 = a_1 + 152 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 = 1683 - 152 = 1531$$

Conhecendo a_1, basta ir adicionando a razão $r = 76$ para obter os demais anos em que o cometa passou (ou passará) perto da Terra: 1531, 1607, 1683, 1759, 1835, 1911, 1987, 2063 e 2139.

Atividade resolvida passo a passo

2. (UFSM-RS) As doenças cardiovasculares são a principal causa de morte em todo mundo. De acordo com os dados da Organização Mundial da Saúde, 17,3 milhões de pessoas morreram em 2012, vítimas dessas doenças. A estimativa é que, em 2030, esse número seja de 23,6 milhões.

Suponha que a estimativa para 2030 seja atingida e considere (a_n), $n \in \mathbb{N}$, a sequência que representa o número de mortes (em milhões de pessoas) por doenças cardiovasculares no mundo, com $n = 1$ correspondendo

a 2012, com $n = 2$ correspondendo a 2013, e assim por diante.

Se (a_n) é uma progressão aritmética, então o 8º termo dessa sequência, em milhões de pessoas, é igual a:

a) 19,59.

b) 19,61.

c) 19,75.

d) 20,10.

e) 20,45.

Fique atento

Podemos representar uma sequência genérica por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ ou, simplesmente, (a_n).

Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

Informam-se a quantidade de mortes em 2012 ocasionadas por doenças cardiovasculares e a estimativa para 2030. Também é dado que a sequência tem como primeiro termo a quantidade de mortes no ano de 2012.

b) O que se pede?

Dada a informação de que a sequência que representa a quantidade de mortes (em milhões de pessoas) por doenças cardiovasculares no mundo é uma progressão aritmética, pede-se o 8º termo dessa sequência.

Planejando a solução

De acordo com as informações do enunciado, podemos concluir que a quantidade de mortes em 2030 representa o 19º termo da sequência. Assim, utilizando a fórmula do termo geral de uma PA, devemos calcular a razão da progressão dada e, consequentemente, encontrar o valor do 8º termo dessa sequência, referente ao ano de 2019.

Executando o que foi planejado

Dados $a_1 = 17{,}3$ e $a_{19} = 23{,}6$, obtemos a razão:

$$a_{19} = a_1 + (19 - 1)r \Rightarrow 23{,}6 = 17{,}3 + 18r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 18r = 6{,}3 \Rightarrow r = 0{,}35$$

Então:

$$a_8 = a_1 + (8 - 1) \cdot 0{,}35 = 17{,}3 + 7 \cdot 0{,}35 =$$
$$= 17{,}3 + 2{,}45 = 19{,}75$$

Logo, o 8º termo dessa sequência é $a_8 = 19{,}75$.

Verificando

Considerando o valor obtido para o 8º termo (a_8), vamos verificar se o valor encontrado para a razão da progressão está correto.

$$a_8 = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 19{,}75 = 17{,}3 + 7r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7r = 2{,}45 \Rightarrow r = 0{,}35$$

Com isso, fica verificado que os valores encontrados estão corretos.

Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **c**.

Ampliando a atividade Não escreva no livro

a) Levando em consideração que a quantidade de mortos vitimados por doenças cardiovasculares representa apenas 15% das pessoas diagnosticadas com a enfermidade, qual é a estimativa para a quantidade de pessoas diagnosticadas com tal enfermidade em 2030?

Aproximadamente 157,3 milhões de pessoas.

b) Considere que 30% dos enfermos de doenças cardiovasculares tenham acesso a medicamentos gratuitos, os quais custam em média R$ 2.640,00 anualmente. De quanto será o subsídio com esses medicamentos em 2030? Nesse ano, que contingente populacional com doenças cardiovasculares não terá acesso aos medicamentos gratuitos?

c) Pesquise se as doenças cardiovasculares continuam sendo a principal causa de morte em todo o mundo e converse com os colegas sobre as possíveis razões de esse tipo de doença figurar nessa posição. Organizem um debate para falar sobre a atuação do governo, a eficácia dessa atuação e como esse tópico se relaciona com necropolítica. Depois, lancem outras possíveis propostas que possam ser consideradas viáveis para a realidade vivenciada pela maioria da população. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

b) Aproximadamente R$ 124.607.999.736,00. Aproximadamente 110,13 milhões de pessoas.
Professor, se necessário, destaque aos estudantes que subsídio, nesse caso, é o valor fornecido pelo governo para custear os medicamentos.

3. Temos que: $a_1 = 6$; $r = 10 - 6 = 4$; e $n = 15$. Então: $a_{15} = a_1 + 14r = 6 + 14 \cdot 4 = 6 + 56 = 62$.
4. a) $a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow 21 = a_1 + 6 \cdot 3 \Rightarrow 21 - 18 = a_1 \Rightarrow a_1 = 3$
b) $a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow -29 = a_1 + 11 \cdot (-4) \Rightarrow -29 = a_1 - 44 \Rightarrow -29 + 44 = a_1 \Rightarrow a_1 = 15$

Atividades

Não escreva no livro

1. a) $5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 3$; logo, é PA e $r = 3$.

1. Verifique se a sequência dada é uma PA e, se for, dê o valor da razão r.

a) (2, 5, 8, 11, 14)

b) (15, 10, 5, 0, −5) **b)** $10 - 15 = 5 - 10 = 0 - 5 = -5 - 0 = -5$; logo, é PA e $r = -5$.

c) (2, 3, 5, 7) $3 - 2 \neq 5 - 3 \Rightarrow 1 \neq 2$; logo, não é PA.

2. Escreva no caderno as progressões aritméticas indicadas em cada item.

a) PA com 5 termos, em que o 1º termo é $a_1 = 7$ e a razão é $r = 4$. PA (7, 11, 15, 19, 23)

b) PA com 4 termos, em que o 1º termo é $a_1 = -6$ e a razão é $r = 8$. PA (−6, 2, 10,18)

3. Determine o 15º termo da PA (6, 10, ...).

4. Calcule o 1º termo da PA:

a) que tem razão $r = 3$, sabendo que $a_7 = 21$;

b) em que $a_{12} = -29$ e $r = -4$.

5. Sabe-se que, em uma PA de 12 termos, $a_1 = -8$ e $a_{12} = 36$. Calcule a razão dessa PA. $r = 4$

6. Na PA em que $a_1 = 6$ e $r = 8$, qual é o lugar ocupado na sequência pelo termo igual a 62? 8º termo.

7. Em uma PA, o 3º termo é 20 e o 14º é 75. Qual é o 7º termo dessa progressão? 40

8. Quantos números inteiros compreendidos entre 1 e 5 000 são divisíveis por 9? 555 números inteiros.

Texto para a próxima atividade.

A radiologia médica, que engloba os exames de imagem, agrega diversas contribuições para a medicina atual. Os exames de imagem servem para analisar partes internas do organismo e a maioria deles não é invasiva, o que explica a popularização em diversos países. A quantidade de exames de **imagiologia** vem aumentando ao longo dos últimos anos.

imagiologia: o mesmo que diagnóstico por imagem.

9. Suponha que, em determinado país, tenha sido verificado que a quantidade de exames por imagem, em milhões por ano, aumentou de acordo com os termos de uma progressão aritmética de razão 4, chegando ao fim de 6 anos à quantidade de 98 milhões de exames por ano. A quantidade de exames de imagem ao fim do 1º ano de verificação foi:

a) 92 milhões por ano.

b) 94 milhões por ano.

c) 78 milhões por ano.

d) 102 milhões por ano.

e) 74 milhões por ano.

Temos que $a_6 = 98$ milhões e $r = 4$. Então: $98 = a_1 + 5 \cdot 4 \Rightarrow a_1 = 98 - 20 = 78$. Logo, no 1º ano, foram feitos 78 milhões de exames por imagem no país. Alternativa **c**.

10. A produção de uma indústria cresceu em PA nos meses de janeiro a dezembro de determinado ano. A produção no mês de outubro foi 190 máquinas, e a diferença de produção entre os meses de agosto e março foi 50 máquinas. Quantas máquinas foram produzidas em novembro desse ano? 200 máquinas.

11. Suponha que, em 2020, determinado cometa tenha passado próximo à Terra. Se esse cometa faz uma passagem próximo à Terra a cada 34 anos, então quantas vezes ele teria passado de 1500 até 2020? 16 vezes.

Texto para as atividades **12** e **13**.

O constante desenvolvimento da tecnologia permite inúmeras facilidades para o dia a dia. Uma das grandes evoluções proporcionadas pela tecnologia foi a criação de *bots* (derivado da palavra de origem inglesa *robot*, que significa "robô"), que são programas de computador criados para simular uma ação humana, realizando tarefas repetitivas e automatizadas em um curto intervalo de tempo.

Os *bots* podem ser usados para atualizar automaticamente a interação entre os usuários de uma rede social, para fazer buscas na internet, para divulgar um produto ou uma propaganda ou para responder a perguntas do usuário no *chat* de um *site* ou em uma ligação.

12. Um *bot* foi programado da seguinte maneira. No 1º dia, ele deve divulgar um produto na rede social de 3 pessoas. No 2º dia, deve divulgar na página de 20 novas pessoas e, no 3º dia, de 37 pessoas. O aumento é programado para que 17 novas pessoas recebam a propaganda a cada novo dia. Considerando esse crescimento, após quantos dias a ação do *bot* ultrapassa o número de 1000 pessoas contactadas? Após 60 dias.

13. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

13. Existem alguns *bots*, chamados *spam bots*, que são programados para gerar *spam*, encontrar *sites* vulneráveis, criar perfis falsos na internet e até mesmo gerar e disseminar informações falsas. Pesquise os malefícios dos *spam bots* e como eles podem afetar a sociedade. Depois, promova junto aos colegas uma atividade na escola visando divulgar os cuidados que todos devem tomar para não serem afetados por informações e perfis falsos.

14. Sabe-se que 3 números inteiros estão em PA. Determine os 3 primeiros números dessa PA sabendo que a soma deles é 24 e o produto é 120. (1, 8, 15) ou (15, 8, 1).

Fique atento

Quando conhecemos a soma de termos consecutivos de uma PA, podemos representá-los um em função do outro, a fim de minimizar a quantidade de cálculos.

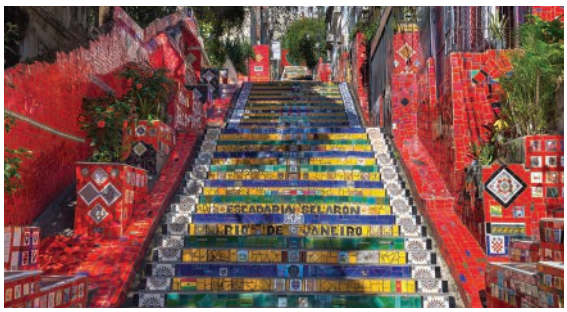
Por exemplo, nesta atividade, temos os 3 termos consecutivos de uma PA $(\ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ e podemos representá-los em função do termo intermediário: $a_{n-1} = x - r$, $a_n = x$ e $a_{n+1} = x + r$. Resolva a atividade usando essa estratégia.

15. Reelabore o problema da atividade anterior de modo que a PA de 3 termos seja decrescente, com 2 termos inteiros negativos e 1 termo inteiro positivo. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

16. Os números $x - 2$, $3x - 4$ e $x + 6$ são, nessa ordem, termos consecutivos de uma PA. Calcule o valor de x e a razão dessa PA. $x = 3$, $r = 4$.

17. A escadaria do Convento de Santa Teresa (ou Escadaria Selarón), no Rio de Janeiro (RJ), liga a rua Joaquina Silva, no bairro da Lapa, à Ladeira de Santa Teresa, no bairro de Santa Teresa. Essa escadaria, com 215 degraus, é uma atração turística carioca.

Visando aumentar a segurança para os usuários, um projeto foi desenhado para instalar um corrimão ao longo de toda a escadaria. Sabendo que o corrimão deve ter suportes fixados no chão de 3 em 3 degraus dessa escada, com o 1º suporte no 5º degrau, quantos suportes precisam ser utilizados até o topo da escadaria? 71 suportes.



Nido Huebl/Shutterstock

Escadaria do Convento de Santa Teresa, no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2020.

Texto para as atividades **18** e **19**.

O desmatamento no Brasil é um desafio de âmbito nacional, pois, além da importância da preservação ambiental (que envolve tanto a flora quanto a fauna que vivem nas matas), a derrubada de árvores deixa o ar mais seco e a temperatura mais instável. Isso ocorre porque, ao queimar uma árvore, quase todo o carbono absorvido pelas plantas volta à atmosfera, fazendo a medida de temperatura aumentar.

18. Visando auxiliar o reflorestamento de áreas desmatadas, uma campanha foi desenvolvida para conscientizar a população desse problema e mobilizar auxílio na missão. Depois de um levantamento publicitário, estimou-se que com a campanha seria possível conseguir de imediato 2 novos voluntários; no próximo ano, 5 novos voluntários; e, em cada ano seguinte, 3 voluntários a mais do que no ano anterior. Supondo que essa estimativa seja concretizada dessa maneira, quantas pessoas vão aderir à campanha no 10º ano? 29 pessoas.

19. As florestas podem ser afetadas por algumas atividades comerciais, bem como por atividades ilegais de desmatamento. Busque em fontes confiáveis de pesquisa quais atividades podem provocar ou intensificar esse problema e converse com os colegas sobre elas.

Texto para a próxima atividade. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Depois das tragédias de rompimento de barragens que ocorreram nas cidades mineiras de Mariana (em 2015) e Brumadinho (em 2019), foram criados alguns mecanismos de alerta para avisar os habitantes caso haja o risco de um rompimento. Uma das estratégias criadas consiste em um carro de som que percorre as ruas da cidade emitindo um alerta sonoro.

20. Em uma cidade, o carro de som deve sair da praça central e se mover a uma medida de velocidade de 6 m/s, sem fazer paradas no percurso, emitindo um alerta sonoro a cada 5 s. Dessa maneira, o 1º alerta sonoro ocorre ainda na praça, o 2º ocorre 5 s depois, e assim por diante, até que o carro percorra 3 240 m pelas ruas da cidade.

a) Quantos alertas sonoros ele terá emitido no total ao final do trajeto? 109 alertas.

b) Se a medida de velocidade do carro fosse 9 m/s, sem fazer paradas no percurso, e ele emitisse um alerta sonoro a cada 4 s, então, mantendo as demais informações, a quantidade de alertas emitidos no total seria maior ou menor do que na situação inicial? Menor do que na situação inicial.

c) Quais outros mecanismos de alerta você acha que podem ser criados para avisar a população de um risco iminente nessa situação? Resposta pessoal.

As imagens não estão representadas em proporção.

Texto para a próxima atividade.

Uma questão de saúde pública, não apenas no Brasil, mas também mundialmente, é fazer com que a população diminua o consumo de açúcar, substância que, quando consumida em excesso, pode ocasionar obesidade e diabetes. Em 2018, o Brasil assinou um acordo com a OMS comprometendo-se a diminuir o consumo médio dos brasileiros, que era de 80 gramas de açúcar por dia, visando chegar aos 50 gramas por dia recomendados. A meta tinha previsão de ser cumprida até 2022 e contava com a participação de vários setores da indústria alimentícia.

Fonte dos dados: MINISTÉRIO DA SAÚDE. Brasil assume meta para reduzir 144 mil toneladas de açúcar até 2022. *Secretaria de Atenção Primária à Saúde*, Brasília, DF, 27 nov. 2018. Disponível em: https://tedit.net/0uecs8. Acesso em: 4 jul. 2024.

Murilo Mazzo/Shutterstock

O Brasil é o maior produtor e exportador de açúcar no mundo. Na foto, de 2024, plantação em Pederneiras (SP).

21. Responda aos itens a seguir no caderno.

a) Considere que a diminuição do consumo de açúcar começou em janeiro de 2023, com um consumo de 80 g por dia, e ocorre de acordo com uma progressão aritmética até chegar a 50 g por dia em maio de 2026. Qual era a estimativa de consumo mensal de açúcar no 30º mês de diminuição? 58,25 gramas por dia.

b) Em 2023, uma nova legislação começou a exigir que alimentos com alto teor de açúcar sejam rotulados com etiquetas específicas. Essa medida visa informar aos consumidores de maneira clara os altos níveis de açúcar e outras informações nutricionais presentes nos produtos que consomem, ajudando a conscientizar sobre escolhas alimentares mais saudáveis. Os novos rótulos impactaram sua percepção sobre os alimentos que consome? Por quê?
Respostas pessoais.

Texto para a próxima atividade.

Em abril e maio de 2024, fortes chuvas causaram danos a diversas regiões do estado do Rio Grande do Sul. Leia o trecho da reportagem a seguir, publicada em 9 de julho de 2024.

Douglas Pfeiffer/Shutterstock

Enchente em Porto Alegre (RS), no dia 17 de maio de 2024.

A Defesa Civil do Estado do Rio Grande do Sul divulgou nesta segunda-feira (8) que subiu para 182 o número de mortes devido às fortes chuvas que causaram estragos nos municípios gaúchos em abril e maio. A atualização aponta que 31 pessoas ainda seguem desaparecidas. Os nomes das vítimas e as localidades dos óbitos podem ser consultados no *site* da Defesa Civil.

O levantamento aponta ainda que 2,398 milhões de pessoas foram afetadas de alguma maneira pela tragédia climática, o equivalente a 22,04% da população do Rio Grande do Sul que, segundo o censo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), de 2022, era de 10 882 965 pessoas.

ALMEIDA, Daniella. Número de mortos por causa das chuvas no RS sobe para 182. *Agência Brasil*, 9 jul. 2024. Disponível em: https://tedit.net/hnt2ms. Acesso em: 15 jul. 2024.

Enchentes são causadas por diferentes fatores ambientais e infraestruturais de uma cidade. De acordo com manuais de drenagem seguidos pelos municípios brasileiros, os bueiros (ou bocas de lobo) devem adotar um espaçamento máximo de 60 m entre si, salvo se houver análise da capacidade de escoamento da sarjeta. Em vias largas, a recomendação é que a medida de distância máxima seja reduzida, pois a medida de volume de uma enxurrada pode ser maior.

22. No planejamento de implementação de uma grande via em uma cidade, por medidas de segurança, a empresa responsável pelo serviço projetou um bueiro no início da avenida e, a partir dele, outros bueiros a cada 30 m, ficando o último deles localizado a 4 980 m do primeiro.

a) Qual é o total de bueiros na rede de esgoto dessa avenida? 167 bueiros.

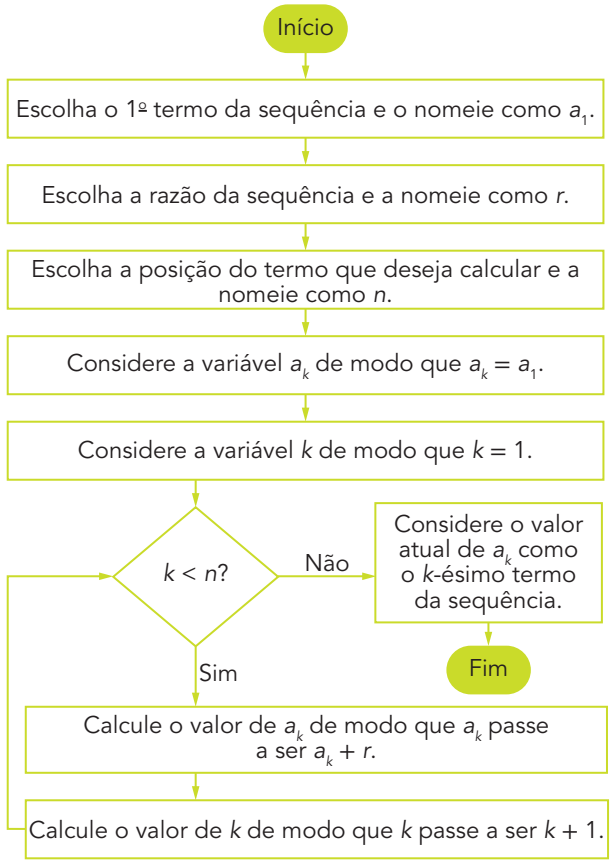
b) De acordo com a reportagem, houve mortes e pessoas desaparecidas devido às chuvas. Pesquise em jornais físicos ou virtuais quais são as principais causas das enchentes nas grandes cidades e a quais outros perigos a população está sujeita em situações de forte chuva. Converse com os colegas sobre as informações obtidas na pesquisa, analisem quais fatores têm influência do ser humano e opinem sobre o que é possível mudar. Por fim, criem materiais de divulgação das pesquisas e das propostas para conscientização da comunidade escolar.

22. b) A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

23. Recorde as várias situações citadas neste capítulo e que são modeladas por progressões aritméticas. Pense em um novo contexto que envolva PA e elabore um problema no caderno. Depois, você pode compará-lo com as criações dos colegas e analisar similaridades e diferenças no tema, na estrutura do enunciado e na pergunta proposta. Resposta pessoal.

O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

24. Analise o fluxograma que representa o passo a passo para determinar o termo de uma PA.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Perceba que percorremos as ações do fluxograma de uma em uma, mas, quando entramos na pergunta que está dentro do losango, executamos novamente todas as instruções recursivas até obter o valor desejado.

Em programação, esse tipo de estrutura se chama **estrutura de repetição**, ou *loop*.

a) $a_4 = 13$ e $a_5 = -9$.

a) Utilize esse fluxograma para calcular o termo a_4 da PA que tem $a_1 = 1$ e $r = 4$ e o termo a_5 da PA que tem $a_1 = 7$ e $r = -4$.

b) Imagine que esse fluxograma será utilizado para calcular o termo a_{527} de uma PA. Quantas vezes passaremos pela pergunta "$k < n$?" durante o passo a passo? Justifique sua resposta.

527 vezes. O exemplo de justificativa encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Progressão aritmética e função

Como você já estudou, uma sequência de números reais é uma função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n$. Agora, vamos analisar como é a lei da função associada a uma progressão aritmética.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Considere a PA (1, 3, 5, 7, 9, ...).

a) Qual é o termo geral dessa PA? $a_n = 2n - 1$, com $n \geqslant 1$.

b) A qual função podemos associar essa PA? Função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n = 2n - 1$.

2. Considere agora a PA (2, 1, 0, –1, –2, –3, ...).

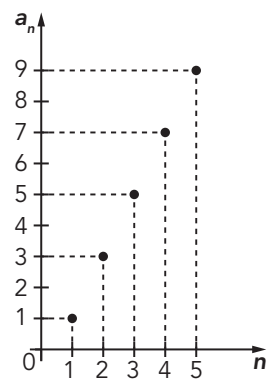
a) Qual é o termo geral dessa PA? $a_n = -n + 3$, com $n \geqslant 1$.

b) A qual função podemos associar essa PA? Função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n = -n + 3$.

3. Analise a lei das funções que você obteve para as progressões dadas. O que elas têm em comum?
Exemplo de resposta: Ambas são da forma $f(n) = a \cdot n + b$, com a e b números reais.

Podemos representar graficamente uma PA considerando a função associada a ela. Por exemplo, a PA (1, 3, 5, 7, 9, ...) é uma função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = 2n - 1$.

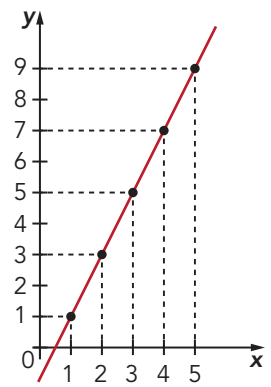
Analise parte do gráfico dessa função.



Fique atento

Não podemos representar uma reta unindo os pontos que representam a PA, pois o domínio da função associada à PA é $\mathbb{N}^*$, e não $\mathbb{R}$.

Esses pontos estão alinhados, pois o crescimento ou decrescimento de uma PA é linear. Portanto, esse conjunto de pontos pertence a uma reta. Nesse caso, os pontos pertencem à reta que é o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 1$. Analise a seguir o gráfico dessa função, de domínio $\mathbb{R}$, e compare-o com o gráfico anterior, da função com domínio $\mathbb{N}^*$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Lembre-se de que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja lei é da forma $f(x) = ax + b$, com a e b reais, é chamada **função afim**.

De modo geral, se considerarmos uma PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r, cujo termo geral é $a_n = a_1 + (n - 1)r$, com $n \geqslant 1$, a representação gráfica dessa PA é formada pelos pontos $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., (n, a_n), ... que pertencem ao gráfico da função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a_1 + (x - 1)r$.

27. a) $a_0 = 50$, $a_1 = 47$, $r = -3$ e $n = 12$; f: {1, 2, 3, 4, 5, ..., 12} → ℝ tal que $f(x) = -3x + 53$.

b) A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Atividades

Não escreva no livro

25. Retome a PA (2, 1, 0, −1, −2, −3, ...), dada na atividade **2** do *Explore para descobrir* deste tópico, e a lei da função que você associou a ela. No caderno, represente graficamente essa PA e analise o alinhamento dos pontos. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

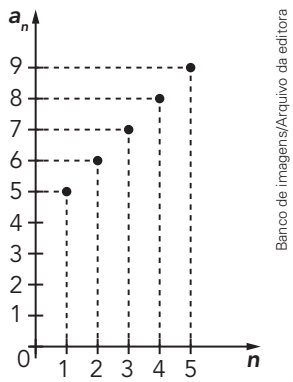
26. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = -0{,}5x + 1$. Determine a PA cuja representação gráfica pertence à reta que representa essa função. Escreva, no caderno, pelo menos os 7 primeiros termos da progressão aritmética. (0,5; 0; −0,5; −1; −1,5; −2; −2,5; ...)

27. Em um experimento realizado em laboratório, durante 12 h, uma amostra recebe inicialmente 50 mL de um medicamento, 47 mL na hora seguinte, 44 mL após 1 h, e assim sucessivamente, reduzindo-se a mesma quantidade de mL a cada hora.

a) Determine os valores de a_1, r e n na sequência formada pela dosagem desse medicamento e a função relacionada à essa sequência.

b) No caderno, represente graficamente essa função em um plano cartesiano.

28. Os 5 primeiros termos de uma PA infinita estão representados a seguir. Qual é a fórmula do termo geral dessa PA? $a_n = n + 4$, com $n \geqslant 1$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Explorando a soma dos termos de uma progressão aritmética finita

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Considere a PA finita (8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22).

a) Com uma calculadora, determine a soma dos 8 termos dessa PA. 120

b) Você considerou prático adicionar todos os termos um a um? E seria prático se a PA tivesse 20 termos? Resposta esperada: Não.

c) Junte-se a um colega e, juntos, pensando na propriedade comutativa da adição, descubram uma maneira de agrupar os 8 termos de modo a facilitar o cálculo da soma deles.
O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Fique atento

Lembre-se da propriedade comutativa da adição: trocando a ordem de 2 ou mais parcelas de uma adição, o resultado não se altera.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, além de ter contribuído grandemente nas áreas de Astronomia, Geodesia e Eletricidade. Nascido em Brunsvique, Alemanha, de família muito simples, foi uma criança prodígio.

Retrato de Carl Friedrich Gauss, de Christian Albretch Jensen, 1840 (óleo sobre tela, 66 cm × 53 cm).

Reprodução/Museu Estatal Pushkin de Belas Artes, Moscou, Rússia.

Conta-se que, quando Gauss tinha 10 anos de idade, o professor, em uma aula, querendo manter os estudantes por um bom tempo em silêncio, pediu que adicionassem todos os números de 1 a 100, isto é, $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100$. Para surpresa do professor, depois de alguns minutos Gauss disse que a soma era 5 050. Acompanhe o raciocínio que ele utilizou para descobrir o resultado tão rapidamente.

Ao agrupar os termos dessa adição de maneira conveniente, o resultado de cada parcela dá sempre 101.

$$\underbrace{1 + \underbrace{2 + \underbrace{3 + \ldots + 98}} + 99 + 100}_{\text{50 parcelas de 101}}$$

$$50 \cdot 101 = 5\,050$$

Assim, $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100 = 5\,050$.

Fique atento

As parcelas dessa soma formam a PA (1, 2, 3, 4, …, 99, 100), de razão 1.

Fonte dos dados: BOYER, C. B; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. Tradução: Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

Em qualquer PA finita, a soma de termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos termos extremos.

Professor, na atividade **36**, os estudantes vão verificar essa igualdade nas somas $a_1 + a_n$ e $a_2 + a_{n-1}$ em uma PA de razão r.

Explore a seguir um pouco mais essa estratégia para calcular a soma dos termos de uma PA finita. Em seguida, vamos usá-la na demonstração da fórmula da soma dos termos de uma PA finita qualquer.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Considere novamente a PA finita (8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22).

a) Agrupe o 1º com o último termo, o 2º com o penúltimo, e assim por diante, seguindo a ideia de Gauss, e calcule a soma dos termos dessa PA. $(8 + 22) + (10 + 20) + (12 + 18) + (14 + 16) = 120$

b) Você achou essa estratégia mais fácil do que adicionar os termos um a um? Resposta esperada: Sim.

2. Agora, considere a PA finita (30, 34, 38, …, 74).

a) Quantos termos essa PA tem? Para $a_n = 74$, temos: $74 = 30 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow 44 = (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow 11 = n - 1 \Rightarrow n = 12$; logo, 12 termos.

b) Agrupando os termos de maneira conveniente, quantas parcelas iguais serão adicionadas? Qual é a relação dessa quantidade de parcelas com a quantidade de termos da PA?

c) Calcule a soma dos termos dessa PA. São 6 parcelas iguais a 104, pois 30 + 74 = 104, o que totaliza 624.

d) Se acrescentássemos um novo termo a essa PA, obtendo a sequência (30, 34, 38, …, 74, 78), passaríamos a ter uma quantidade ímpar de termos e não seria possível agrupá-los em pares. Analise o esquema a seguir e proponha uma estratégia para calcular a soma dos termos dessa PA.

$$30 + 34 + \ldots + \underbrace{54}_{\text{termo central}} + \ldots + 74 + 78$$

Fique atento

O termo central 54 corresponde à metade da soma 30 + 78.

Exemplos de resposta: São 6 parcelas iguais de 108 mais o termo central 54, ou seja, $6 \cdot 108 + 54 = 702$. Ou são 6 parcelas iguais de 108 mais o termo central 54, que corresponde à metade da soma, ou seja, podemos calcular $6{,}5 \cdot 108 = 702$.

2. b) $\underbrace{30 + \underbrace{34 + \underbrace{38 + \ldots + 66} + 70} + 74}_{\text{6 parcelas de 104}}$

$6 \cdot 104 = 624$

6 parcelas serão adicionadas; é a metade da quantidade de termos da PA.

Formalizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética finita

Podemos obter as somas que você calculou no tópico "Explorando a soma dos termos de uma progressão aritmética finita" generalizando os termos e usando a fórmula obtida. Essa fórmula é especialmente útil quando forem muitos os termos da PA finita a serem adicionados.

Acompanhe como obter a fórmula geral da soma de todos os termos de uma PA finita $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ de razão r.

A soma dos n termos dessa PA, denotada por S_n, pode ser escrita de 2 maneiras.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad \textbf{(I)}$$

ou

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \qquad \textbf{(II)}$$

Adicionando membro a membro as expressões **(I)** e **(II)**, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como, em uma PA finita, a soma de termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos termos extremos, temos na soma apresentada n parcelas de mesmo valor.

$$(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = \ldots = (a_{n-2} + a_3) = (a_{n-1} + a_2) = (a_n + a_1)$$

Portanto, como temos n parcelas, escrevemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Assim, essa fórmula nos permite calcular a soma S_n dos n termos de uma PA finita bastando conhecer o valor de n, o primeiro termo a_1 e o enésimo termo a_n.

Não escreva no livro

Reflita

Aplique essa fórmula nas 4 progressões aritméticas citadas no tópico "Explorando a soma dos termos de uma progressão aritmética finita" e no *Explore para descobrir* e confira as somas dos termos que foram calculadas.

Atividades resolvidas

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

3. Considere a PA formada pelos números naturais ímpares $(1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1, \ldots)$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Calcule a soma dos n primeiros números dessa PA.

Resolução

Calcular a soma dos n primeiros números dessa PA corresponde a calcular a soma de todos os termos da PA finita formada por $(1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1)$. Assim:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Portanto, a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2, ou seja:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$$

35. b) A soma dos índices de termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos índices dos termos extremos ($1 + n$). Professor, se necessário, faça outras perguntas aos estudantes que os levem a perceber a relação dos índices de termos equidistantes de uma PA.

36. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual. Professor, essa igualdade pode ser demonstrada para quaisquer somas de termos equidistantes $a_1 + a_n$ e $a_k + a_{n-k+1}$ de uma PA finita.

Não escreva no livro

Atividades

31. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

29. Uma PA tem $a_1 = -9$ e $r = 7$. Determine os 6 primeiros termos da progressão aritmética e calcule a soma deles. 51

30. Dada a PA (5, 8, ...), determine a soma dos 4 primeiros termos. 38

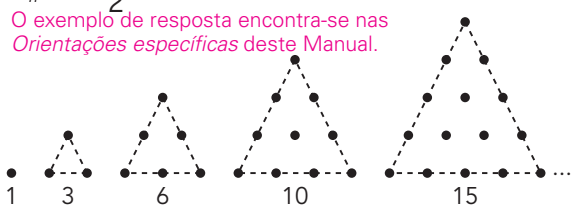
31. Usando a fórmula da soma dos termos de uma PA finita, deduza a fórmula da soma dos termos de uma PA finita constante.

32. Um ciclista percorre 20 km na 1ª hora, 17 km na 2ª hora e reduz a medida de distância percorrida a cada hora de acordo com uma progressão aritmética. Quantos quilômetros ele percorrerá ao todo em 5 h? 70 km

33. Retome a atividade **6** do tópico "Formalizando a definição de sequência como uma função", no capítulo **1** desta Unidade, sobre números triangulares, na qual apresentamos a fórmula do termo geral da sequência como $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, com $n \geqslant 1$. Deduza essa fórmula.

O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



34. Em um triângulo, as medidas de abertura dos ângulos internos estão em PA, e o menor desses ângulos tem medida de abertura de 40°. Sabendo que a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é 180°, calcule as medidas de abertura dos outros 2 ângulos internos. 60° e 80°.

35. Considere uma PA de 20 termos.

a) Qual par de termos a seguir é formado por termos equidistantes dos termos extremos dessa PA? a_7 e a_{14}.

- a_5 e a_{15}
- a_8 e a_{12}
- a_7 e a_{14}
- a_4 e a_{15}
- a_2 e a_{18}

39. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Qual é a relação dos índices de termos equidistantes de uma PA?

36. Retome a propriedade de PA apresentada no tópico "Explorando a soma dos termos de uma progressão aritmética finita": Em qualquer PA finita, a soma de termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos termos extremos.

Verifique essa igualdade nas somas $a_1 + a_n$ e $a_2 + a_{n-1}$, em uma PA finita de razão r.

37. Dados 3 termos consecutivos de uma PA de razão r, mostre, no caderno, que o termo intermediário é igual à média aritmética dos outros 2 termos. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

38. Uma estudante universitária está economizando dinheiro para comprar um *notebook* novo que custa R$ 4.500,00. Ela pensou em 2 opções diferentes:

1ª opção: Ela começa economizando R$ 100,00 no 1º mês e aumenta o valor economizado em R$ 10,00 a cada mês seguinte.

2ª opção: Ela economiza um valor fixo de R$ 200,00 por mês.

a) Qual será o valor total economizado pela estudante ao fim de 12 meses para cada opção? Na 1ª opção: R$ 1.860,00; na 2ª, R$ 2.400,00.

b) Considerando que o valor do *notebook* se mantenha, em qual dessas opções a estudante conseguirá comprar o *notebook* que custa R$ 4.500,00 mais rapidamente? Quanto tempo vai demorar para ela economizar o dinheiro? Use a calculadora para efetuar os cálculos. Na 1ª opção; 22 meses.

c) Converse com um colega sobre o prazo que vocês obtiveram no item **b**. Aguardar tanto tempo é sempre possível? Quais outras opções poderiam ser consideradas? Em quais casos essas opções seriam aconselhadas? Resposta pessoal.

39. Escolha um contexto e elabore, no caderno, um problema que seja resolvido adicionando os termos de uma PA finita. Em seguida, peça a um colega que faça a resolução enquanto você resolve o problema que ele criou. Por fim, confira a resposta que ele obteve.

Professor, na atividade **33**, se necessário, dê uma dica aos estudantes para que deduzam a fórmula: pensem na soma da quantidade de pontos em cada linha de uma figura dessa sequência.

Professor, no item **c** da atividade **38**, ressalte aos estudantes que nem sempre existe a possibilidade de aguardar economizar o dinheiro para fazer uma compra.

CAPÍTULO 3

Progressão geométrica

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação-problema

Crescimento populacional

Dirceu Portugal/Fotoarena

Na realização do Censo 2022, o IBGE contou com dispositivos que utilizaram a internet para agilizar o processo de coleta e transmissão das informações sobre a população brasileira.

No Brasil, o IBGE realiza periodicamente o Censo Demográfico da população, coletando, em âmbito nacional, não apenas a quantidade de habitantes, mas também dados relacionados às condições de vida deles e às características do domicílio em que vivem. Em geral, o Censo é realizado a cada 10 anos, salvo em ocasiões em que, por motivos excepcionais, precisou ter a data alterada.

O Censo Demográfico 2022 foi a maior operação de recenseamento já organizada no Brasil. A coleta de dados do Censo incluiu cerca de 75 milhões de domicílios para recensear mais de 215 milhões de habitantes nas 5 570 cidades brasileiras (5 568 municípios, o Distrito Federal e o Distrito Estadual de Fernando de Noronha) e, para dar suporte a uma operação tão grandiosa, o IBGE montou uma estrutura de trabalho composta de mais de 210 mil pessoas contratadas temporariamente.

Fonte dos dados: NÚMEROS do Censo 2022. *Censo 2022*. Rio de Janeiro: IBGE, c2024. Disponível em: https://tedit.net/n7jvec. Acesso em: 17 jul. 2024.

Para efeito de estudo do crescimento populacional, considere um município que tinha, de acordo com o Censo, aproximadamente 4 000 habitantes em 1980, 8 000 habitantes em 1990 e 16 000 habitantes depois de 10 anos.

a) O padrão de aumento na quantidade de habitantes a cada década nesse município é o mesmo? Não.

b) Descreva no caderno um padrão de crescimento da quantidade de habitantes dessa população.
Exemplo de resposta: A cada década, a quantidade de habitantes da população dobra.

c) Considerando esse padrão de crescimento, escreva no caderno a lei de uma função do tipo exponencial que relaciona a quantidade de habitantes $f(x)$ dessa população em função da quantidade x de décadas a partir de 1980. Exemplo de resposta: $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = 4\,000 \cdot 2^x$.

d) Agora, calcule a quantidade de habitantes desse município nas próximas décadas, mantendo o padrão que você identificou, e escreva no caderno a sequência formada pela quantidade de habitantes a cada década. Exemplo de resposta: (4 000, 8 000, 16 000, 32 000, 64 000, 128 000, ...).

A quantidade de habitantes da população desse município a cada década estabelece uma **sequência numérica**. Podemos considerar que cada termo dessa sequência, a partir do segundo, é obtido dobrando o termo anterior. Esse tipo de sequência é chamado **progressão geométrica**.

e) Conhecendo o padrão dessa sequência, estime a quantidade de habitantes do município em 2050 e em 2060. 512 000 e 1 024 000 habitantes, respectivamente.

f) Entre quais décadas a população dessa cidade passará de 4 000 000 de habitantes?
Entre as décadas de 2070 e 2080.

Formalizando o conceito de progressão geométrica

A situação-problema da abertura deste capítulo apresenta uma sequência que pode ser caracterizada como uma **progressão geométrica**. Conheça a definição.

Progressão geométrica (PG) é toda sequência de números não nulos na qual o quociente entre cada termo, a partir do 2º termo, e o termo anterior é constante. Esse quociente constante é chamado **razão** da progressão e é representado pela letra q.

Fique atento

Em uma progressão geométrica também podemos dizer que a taxa de crescimento relativo entre pares de termos consecutivos é constante.

Assim, dados o termo a_1 de uma PG e a razão q, podemos relacionar cada termo a_n, a partir de a_2, ao termo anterior a_{n-1} pela fórmula de recorrência $a_n = a_{n-1} \cdot q$, com $n \geqslant 2$.

Analise alguns exemplos.

a) A sequência (2, 10, 50, 250) é uma progressão geométrica finita de 4 termos, em que o 1º termo é $a_1 = 2$ e a razão é $q = 5$. Perceba que o quociente é constante, pois $250 : 50 = 5$, $50 : 10 = 5$ e $10 : 2 = 5$.

b) A sequência (27, 9, 3, ...) é uma PG infinita, em que o 1º termo é $a_1 = 27$ e a razão é $q = \frac{1}{3}$.

c) A sequência (5, 5, 5, ...) é uma PG infinita, em que o 1º termo é $a_1 = 5$ e a razão é $q = 1$.

d) A sequência (6, –12, 24, –48, 96, ...) é uma PG infinita, em que o 1º termo é $a_1 = 6$ e a razão é $q = -2$.

e) A sequência (3, 6, 9, 12) **não** é uma progressão geométrica, pois as razões entre os termos sucessivos não são iguais: $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{9}{6} = 1{,}5$ e $\frac{12}{9} = 1{,}33...$

De modo geral, podemos classificar uma PG em crescente, decrescente, constante ou alternante, dependendo da razão q dela.

Reflita

Não escreva no livro

Calcule o quociente entre os termos consecutivos da PG do exemplo **d** e verifique que ele é constante e igual à razão. $-12 : 6 = -2$; $24 : (-12) = -2$; $-48 : 24 = -2$ e $96 : (-48) = -2$; quociente constante $q = -2$.

Crescente

Quando cada termo, a partir do 2º, é maior do que o anterior, isto é, quando a razão q é maior do que 1 e os termos são positivos ou quando a razão q está entre 0 e 1 e os termos são negativos.

Decrescente

Quando cada termo, a partir do 2º, é menor do que o anterior, isto é, quando a razão q está entre 0 e 1 e os termos são positivos ou quando a razão q é maior do que 1 e os termos são negativos.

Constante

Quando todos os termos são iguais, isto é, quando a razão q é igual a 1.

Alternante

Quando todos os termos são alternadamente positivos e negativos, isto é, quando a razão q é menor do que 0.

Explorando o termo geral de uma progressão geométrica

No início desta Unidade, exploramos a fórmula do termo geral de algumas sequências numéricas, relacionando cada termo a_n com a posição n que ocupa na sequência e, depois, com a fórmula do termo geral de progressões aritméticas.

Considerando a definição de progressão geométrica, segundo a qual o quociente entre cada termo, a partir do 2º termo, e o termo anterior é constante, será que podemos generalizar a fórmula do termo geral desse tipo de sequência numérica?

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Considere uma PG tal que $a_1 = 3$ e $q = 2$.

a) Calcule o termo a_2 multiplicando a_1 e q. Depois, faça o procedimento análogo para o termo a_3.

b) Como você poderia calcular o termo a_3 partindo do termo a_1?

c) Calcule o termo a_4 usando os valores de a_1 e q. Para obter o termo a_4, é preciso multiplicar o termo a_1 por quantos fatores iguais a $q = 2$?

d) Para obter o termo a_8, você precisaria multiplicar quantos fatores iguais a $q = 2$? E para obter um termo a_n? 7 fatores; $(n - 1)$ fatores.

2. Considere agora uma PG tal que $a_1 = 2$ e $q = \frac{1}{2}$.

a) Calcule os termos a_3 e a_4 usando os valores de a_1 e de q. $a_3 = a_1 \cdot q \cdot q = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $a_4 = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

b) Para obter o termo a_4, você multiplicou a_1 por quantos fatores iguais a $q = \frac{1}{2}$? 3 fatores.

c) Para obter o termo a_{10}, você precisaria multiplicar a_1 por quantos fatores iguais a $q = \frac{1}{2}$? E para obter um termo a_n? 9 fatores; $(n - 1)$ fatores.

3. Por fim, considere uma PG com 1º termo a_1 e razão q.

a) Escreva no caderno a expressão que permite obter os termos a_2, a_3 e a_4 usando a_1 e q. $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$ e $a_4 = a_1 \cdot q^3$.

b) Agora, escreva no caderno a expressão que permite obter o termo a_n usando a_1 e q. Depois, compare sua resposta com a dos colegas. Resposta esperada: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, com $n \geqslant 1$.

Formalizando a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q, partindo do 1º termo, para avançar 1 termo, basta multiplicar q ao 1º termo $(a_2 = a_1 \cdot q)$; para avançar 2 termos, basta multiplicar q^2 ao 1º termo $(a_3 = a_1 \cdot q^2)$; para avançar 3 termos, basta multiplicar q^3 ao 1º termo $(a_4 = a_1 \cdot q^3)$; e assim por diante. Desse modo, um termo qualquer de índice n da sequência, chamado de **termo geral da PG**, é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ com } n \geqslant 1.$$

Reflita

Use a fórmula do termo geral da PG nas sequências das atividades **1** e **2** do *Explore para descobrir* e verifique se as conclusões que você obteve inicialmente condizem com essa fórmula.

Resposta esperada: Sim.

1. a) $a_2 = a_1 \cdot q = 3 \cdot 2 = 6$; $a_3 = a_2 \cdot q = 6 \cdot 2 = 12$.

b) Considerando o cálculo de a_3 no item **a**, basta substituir a_2 por $a_1 \cdot q$, ou seja: $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

c) $a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$; logo, são 3 fatores iguais a q.

Professor, é importante ressaltar que não existe o termo a_0 em sequências (o índice pertence ao conjunto dos números naturais não nulos), mas, às vezes, é conveniente considerarmos um termo fictício a_0, que seria anterior ao a_1. Esse termo nunca faz parte da sequência, é apenas uma técnica de cálculo que permite associar uma PG de maneira imediata aos dados de algumas situações-problema.

Observação: Assim como na PA, algumas vezes é conveniente indicar o 1º termo de uma PG por a_0, e não por a_1; assim o termo geral é dado por $a_n = a_0 \cdot q^n$, com $n \geqslant 1$. Note isso na situação a seguir.

Se uma escola tem 2 000 estudantes e essa quantidade cresce aproximadamente 5% ao ano, então quantos estudantes essa escola terá em 3 anos?

Temos uma PG com $a_0 = 2\,000$ (valor inicial), razão $q = 1 + i = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$ e queremos determinar o termo a_3 (quantidade de estudantes daqui a 3 anos).

$$a_3 = a_0 \cdot q^3 = 2\,000 \cdot (1{,}05)^3 \simeq 2\,000 \cdot 1{,}158 = 2\,316$$

Assim, após 3 anos, a escola terá aproximadamente 2 316 estudantes.

Fique atento

Podemos escrever fórmulas para relacionar quaisquer 2 termos de uma PG, e, para isso, basta analisar quantos termos avançamos ou retrocedemos para ir de um termo ao outro. Por exemplo: Podemos relacionar os termos a_{10} e a_3 fazendo $a_{10} = a_3 \cdot q^7$, pois avançamos 7 termos ao passar de a_3 para a_{10}; também podemos relacionar os termos a_5 e a_9 fazendo $a_5 = \frac{a_9}{q^4}$, pois retrocedemos 4 termos ao passar de a_9 para a_5.

Atividades resolvidas

1. Calcule o 1º termo de uma PG com $a_4 = 375$ e $q = 5$.

Resolução

Como $a_4 = a_1 \cdot q^3$, obtemos:

$$375 = a_1 \cdot 5^3 \Rightarrow 125a_1 = 375 \Rightarrow a_1 = 3$$

Portanto, o 1º termo dessa PG é $a_1 = 3$.

2. Quantos elementos a PG $(8, 32, \ldots, 2^{31})$ tem?

Resolução

Sabemos que $a_1 = 8$, $q = \frac{32}{8} = 4$ e $a_n = 2^{31}$ e queremos saber o valor de n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 2^{31} = 8 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 2^{31} = 2^3 \cdot 2^{2n-2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^{31} = 2^{2n+1} \Rightarrow 2n + 1 = 31 \Rightarrow 2n = 30 \Rightarrow n = 15$$

Logo, essa PG tem 15 elementos.

3. Qual é a razão da PG que se obtém inserindo 4 termos entre os números 5 e 5 120?

Resolução

Se vamos inserir 4 termos entre 5 e 5 120, teremos um total de 6 termos na PG, sendo $a_1 = 5$ e $a_6 = 5\,120$.

Como $a_6 = a_1 \cdot q^5$, obtemos:

$$5\,120 = 5q^5 \Rightarrow q^5 = 1\,024 \Rightarrow q = 4$$

Logo, a razão dessa PG é $q = 4$.

Atividades

Não escreva no livro

1. Verifique se cada sequência numérica dada é uma PG e, em caso afirmativo, indique no caderno a razão q.

a) (1, 3, 9, 27, 81) É PG; $q = 3$.

b) (2, 4, 6, 8, 10, 12) Não é PG.

c) (400, 200, 100, 50) É PG; $q = \frac{1}{2}$.

2. Calcule o que se pede.

a) O 5º termo da PG (1, 5, ...). 625

b) O 10º termo da PG (9, 27, ...). 177 174

3. No caderno, crie uma PG finita cujo 4º termo seja 10.
Exemplos de resposta: (1,25; 2,5; 5; 10; 20); (10 000, 1 000, 100, 10, 1); (1 250, 250, 50, 10, 2).

4. Essa sequência é uma PA de 1º termo $a_1 = 4$ e razão $r = 0$, pois qualquer termo dela pode ser escrito da forma $a_n = a_1 + (n - 1)r = 4 + (n - 1) \cdot 0 = 4$; ela também é uma PG de 1º termo $a_1 = 4$ e razão $q = 1$, pois qualquer termo dela pode ser escrito da forma $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 4 \cdot 1^{n-1} = 4$.

6. Não é possível responder a essa pergunta, pois faltam dados (o primeiro termo da PG, por exemplo).

4. Considere a sequência numérica constante (4, 4, 4, ...) e pense nos tipos de progressão que você estudou. Essa sequência é uma PA ou uma PG? Justifique sua resposta.

5. Em uma PG, o 4º termo é 24 e o 8º é 384. Qual é o valor do 6º termo dessa progressão? $a_6 = 96$

6. Uma PG é formada por números naturais tais que a razão é $q = 4$. Qual número natural corresponde ao 7º termo dessa progressão?

Texto para a próxima atividade.

Considerando uma grandeza qualquer, quando passamos de um valor inicial a para um valor final b, temos a **taxa de crescimento relativo** dessa grandeza igual a $\frac{b - a}{a}$. Por exemplo, a taxa de crescimento relativo da produtividade de uma empresa do ramo alimentício cuja produção semanal varia entre 5 e 8 toneladas é 60%, pois $\frac{8 - 5}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}60 = 60\%$. Com essa informação, mantendo essa taxa de crescimento relativo semanal constante, para calcular a produção em uma semana, multiplicamos a produção da semana anterior por 1,6.

Fique atento

Se uma grandeza tem taxa de crescimento relativo igual a i, então o novo valor é obtido calculando $(1 + i)$ vezes o valor anterior.

No exemplo, $(1 + i) = (1 + 0{,}60) = 1{,}60$ ou 1,6.

7. No ano de 2018, uma empresa alimentícia produziu 200 toneladas de alimentos e, a cada ano, a produção aumentou 10% em relação ao ano anterior. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual. Escreva no caderno os 6 primeiros termos da sequência que representa a produção anual dessa empresa, em toneladas. Depois, responda: Por que podemos dizer que essa sequência é uma progressão geométrica?

8. A produção de uma empresa nos meses de janeiro, fevereiro e março forma, nessa ordem, uma PG. Se a produção no mês de janeiro foi 3 000 unidades e em março foi 27 000 unidades, então quantas unidades foram produzidas em fevereiro? 9 000 unidades.

9. Uma indústria produziu 30 000 unidades de certo produto no 1º trimestre em 2023.

a) Supondo que a produção tenha dobrado a cada trimestre, quantas unidades desse produto foram produzidas no último trimestre desse ano? 240 000 unidades.

b) Quantas unidades desse produto teriam sido produzidas no último trimestre se a produção tivesse triplicado a cada trimestre? 810 000 unidades.

10. A população de uma cidade, atualmente de 200 000 habitantes, cresce 2% ao ano. Qual será a quantidade de habitantes dessa população daqui a 10 anos? 243 800 habitantes.

11. Considere a seguinte propriedade da PG: em qualquer PG finita, o produto de termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos termos extremos. Verifique a igualdade dos produtos $a_1 \cdot a_n$ e $a_2 \cdot a_{n-1}$, em uma PG de razão q.

12. Dados 3 termos consecutivos de uma PG, de razão q, mostre no caderno que o quadrado do termo intermediário é igual ao produto dos outros 2 termos.

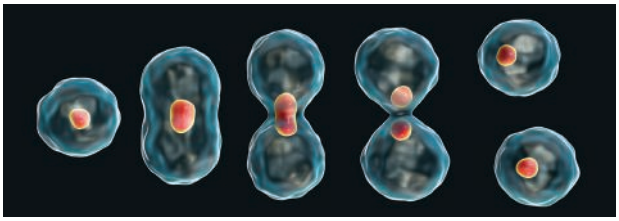
Fique atento

Podemos representar 3 termos consecutivos de uma PG $(..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$ em função do termo intermediário: $a_{n-1} = \frac{x}{q}$, $a_n = x$ e $a_{n+1} = x \cdot q$. Resolva a atividade usando essa estratégia.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Texto para a próxima atividade.

Mitose é um processo de divisão celular contínuo que acontece na maioria das células do corpo humano. A partir de uma célula inicial, formam-se 2 células idênticas, cada uma com a mesma quantidade de cromossomos.



Kateryna Kon/Shutterstock

Na mitose, uma célula (chamada célula-mãe) se divide em 2 células (chamadas células-filhas), que são idênticas à célula-mãe. Esse processo, com a citocinese (processo de divisão do citoplasma das células), dura menos de 1 hora. Os elementos da ilustração não estão representados em proporção. Imagem em cores fantasia.

11. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
Professor, essa igualdade pode ser demonstrada para quaisquer produtos de termos equidistantes $a_1 \cdot a_n$ e $a_k \cdot a_{n-k+1}$ de uma PG finita.

13. Considerando que no 1º ciclo há apenas 1 célula, temos uma PG em que $a_1 = 1$, $q = 2$; $a_n = 8\,192$.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 8\,192 = 1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 2^{13} = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 13 \Rightarrow n = 14$; logo, 14 ciclos de reprodução das células.

Não escreva no livro

Ao levarmos em consideração o desenvolvimento do embrião humano, percebemos que ele começa com a formação do **zigoto**, que se divide em 2 células, que, por sua vez, sofrem novamente mitose, gerando 4 células, que, após passarem por muitos ciclos de divisões celulares, vão se fixar nas paredes do útero.

Fonte dos dados: SEIXAS, Cristina Faganelli Braun. Mitose e meiose: os dois processos de divisão celular. *UOL*, [São Paulo], 6 jan. 2014. Disponível em: https://tedit.net/z63t61. Acesso em: 9 jul. 2024.

zigoto: célula resultante da união do gameta masculino ao feminino, em estágio anterior ao da divisão celular.

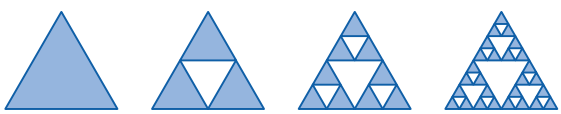
13. Considerando o processo de desenvolvimento de um embrião humano desde o 1º ciclo, após quantos ciclos serão obtidas 8 192 células?

14. Recorde as várias situações citadas neste capítulo e que são modeladas por progressões geométricas. Assim como você fez para a PA, pense em um contexto que envolva PG e elabore um problema. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Texto para as atividades **15** e **16**.

Na abertura desta Unidade, foi apresentado um fractal não poligonal gerado por computador. No entanto, fractais também podem ser representados a partir de uma região limitada por uma linha poligonal. Analise o exemplo do triângulo equilátero.

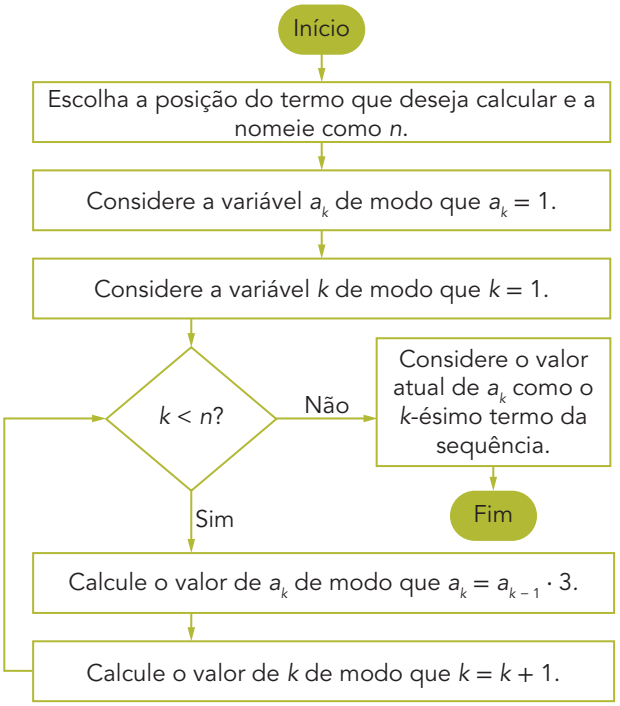
Banco de imagens/Arquivo da editora



Sendo a_1 a quantidade de regiões triangulares na etapa 0, podemos relacionar a quantidade a_n de regiões triangulares das demais etapas com a quantidade a_{n-1}.

$$a_1 = 1 \text{ e } a_n = a_{n-1} \cdot 3, \text{ com } n \geqslant 2.$$

15. Analise o fluxograma com o passo a passo para calcular a quantidade a_n de regiões triangulares de uma etapa desse fractal.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Utilize esse algoritmo para calcular a quantidade de regiões triangulares na etapa **4**.

81 regiões triangulares.

16. Imagine que você conhece o termo a_1, o termo a_n e a razão q (com $q > 1$) de uma PG e quer saber a posição n correspondente ao termo a_n.

a) Usando uma estrutura similar à do fluxograma apresentado, elabore no caderno um fluxograma que oriente a resolução desse problema. Resposta pessoal.

b) Considerando uma PG com $a_1 = 5$, $q = 3$ e $a_n = 135$, utilize o fluxograma que você construiu no item anterior para calcular o valor de n. A resposta depende do fluxograma elaborado pelo estudante.

Sobre o assunto

Para conhecer mais sobre fractais, sugerimos uma visita à Matemateca, o centro de difusão e ensino de Matemática localizado no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Parte do acervo está disponível em: https://tedit.net/z5izwn (acesso em: 25 jul. 2024).

Outra opção é a exposição *on-line* "A beleza escondida da Matemática", organizada pelo Museu do Amanhã. A exposição está disponível em: https://tedit.net/ej4arx (acesso em: 25 jul. 2024).

Professor, na atividade **16**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Progressão geométrica e função

Como você já estudou, uma sequência de números reais é uma função $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n$. Agora vamos analisar como é a lei da função associada a uma progressão geométrica.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Considere a PG (0,5; 1; 2; 4; 8; 16; ...).

a) Qual é o termo geral dessa PG? $a_n = 0{,}5 \cdot 2^{n-1}$, com $n \geqslant 1$.

b) A qual função podemos associar essa PG? Função $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n = 0{,}5 \cdot 2^{n-1}$.

2. Considere agora a PG $\left(16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$.

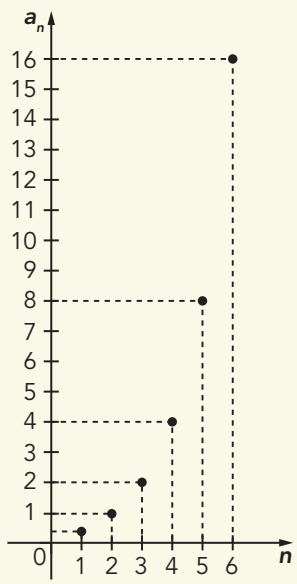
a) Qual é o termo geral dessa PG? $a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, com $n \geqslant 1$.

b) A qual função podemos associar essa PG? Função $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

3. Analise a lei das funções que você obteve para as progressões dadas. O que elas têm em comum?
Exemplo de resposta: Ambas são da forma $f(n) = b \cdot a^{n-1}$, com a e b números reais e $b \neq 0$.

Podemos representar graficamente uma PG considerando a função associada a ela. Por exemplo, a PG (0,5; 1; 2; 4; 8; 16; ...) é uma função $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, dada por $f(n) = 0{,}5 \cdot 2^{n-1}$.

Analise a seguir parte do gráfico dessa função.



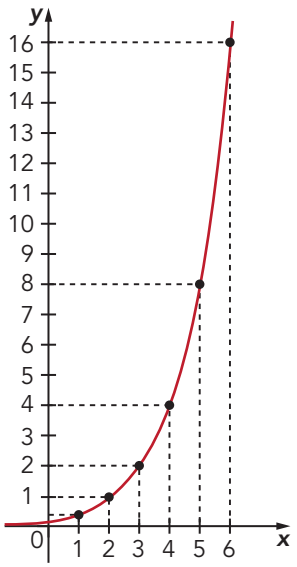
Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Não podemos representar uma curva unindo os pontos que representam a PG, pois o domínio da função associada à PG é $\mathbb{N}^*$ e não $\mathbb{R}$.

Esses pontos estão desalinhados, pois o crescimento ou decrescimento de uma PG é exponencial. Portanto, esse conjunto de pontos pertence a uma curva. Nesse caso, os pontos pertencem à curva que é o gráfico da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, dada por $f(x) = 0{,}5 \cdot 2^{x-1}$.

Analise o gráfico dessa função, de domínio $\mathbb{R}$, e compare-o com o gráfico anterior, da função com domínio $\mathbb{N}^*$.



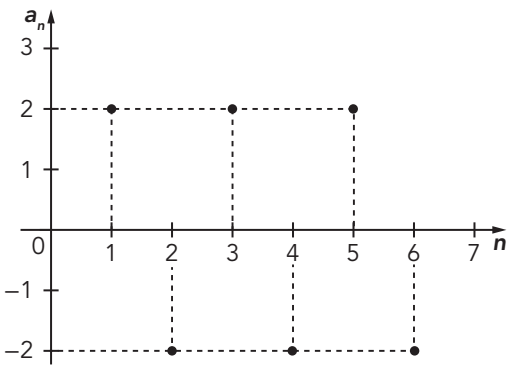
Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Lembre-se de que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, cuja lei é da forma $f(x) = a^x$, com a real, $a > 0$ e $a \neq 1$ (ou quando é modificada por constantes reais da forma $f(x) = b \cdot a^x + c$), é chamada **função exponencial**.

Analise agora o gráfico da função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, dada por $f(n) = 2 \cdot (-1)^{n-1}$, que é associada à PG $(2, -2, 2, -2, 2, -2, \ldots)$.

Nesse conjunto de pontos, não é possível identificar um comportamento exponencial e, de fato, a lei $f(n) = 2 \cdot (-1)^{n-1}$ não pode ser relacionada à de uma função exponencial, pois a razão da PG é negativa e a base de uma função exponencial deve ser positiva e diferente de 1.



Banco de imagens/Arquivo da editora

De modo geral, se considerarmos uma PG $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q, com $q > 0$ e $q \neq 1$, cujo termo geral é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, com $n \geqslant 1$, a representação gráfica dessa PG é formada pelos pontos $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (n, a_n), \ldots$, que pertencem ao gráfico da função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = a_1 \cdot q^{x-1}$.

Atividades

Não escreva no livro

17. Retome a PG $\left(16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$, do *Explore para descobrir* deste tópico, e a lei da função que você associou a ela. Represente o gráfico associado a essa PG em um plano cartesiano e analise o alinhamento dos pontos.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* do Manual do Professor.

18. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = 3 \cdot 5^{x-1}$. Determine a PG cuja representação gráfica pertence à curva exponencial que representa essa função. Escreva no caderno pelo menos os 4 primeiros termos dessa progressão geométrica.

A PG associada a essa função é formada pelos valores de $f(x)$ tal que $x \in \mathbb{N}^*$. Determinamos então os 4 primeiros termos: $a_1 = f(1) = 3 \cdot 5^{1-1} = 3 \cdot 1 = 3$; $a_2 = f(2) = 3 \cdot 5^{2-1} = 3 \cdot 5 = 15$; $a_3 = f(3) = 3 \cdot 5^{3-1} = 3 \cdot 25 = 75$; $a_4 = f(4) = 3 \cdot 5^{4-1} = 3 \cdot 125 = 375$. Logo, a PG é $(3, 15, 75, 375, \ldots)$.

Explorando a soma dos termos de uma progressão geométrica finita

Professor, na atividade **1**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Considere a PG finita (5, 20, 80, 320, 1280).

a) Com uma calculadora, determine a soma dos 5 termos dessa PG. $5 + 20 + 80 + 320 + 1\,280 = 1\,705$

b) Você considerou prático adicionar todos os termos um a um? Seria prático se essa PG tivesse 10 ou 20 termos? Resposta esperada: Não.

c) Junte-se com um colega e, pensando na propriedade comutativa da adição e na propriedade associativa da multiplicação, descubram uma maneira de agrupar os 5 termos de modo a facilitar o cálculo da soma deles.

Fique atento

Lembre-se da propriedade associativa da multiplicação: associando 3 ou mais fatores de uma multiplicação de diferentes maneiras, o resultado permanece o mesmo.

Exemplo de resposta: $5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^1 + 32 \cdot 10^1 + 128 \cdot 10^1 =$
$= 10^1(5 \cdot 10^{-1} + 2 + 8 + 32 + 128) = 10^1(5 \cdot 10^{-1} + 170) = 5 + 10^1 \cdot 170 = 1\,705$

Formalizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica finita

Assim como fizemos quando estudamos a soma dos termos de uma PA finita, também podemos obter as somas que você calculou no tópico "Explorando a soma dos termos de uma progressão geométrica finita" generalizando os termos e usando a fórmula obtida. Essa fórmula é especialmente útil quando forem muitos os termos da PG finita a serem adicionados.

Acompanhe como obter a fórmula geral da soma de todos os termos de uma PG finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, de razão q, com $q \neq 1$.

A soma dos n termos dessa PG, denotada por S_n, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \textbf{(I)}$$

Podemos multiplicar os 2 membros dessa igualdade pela razão q.

$$S_n \cdot q = \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} + \underbrace{a_2 \cdot q}_{a_3} + \underbrace{a_3 \cdot q}_{a_4} + \ldots + \underbrace{a_{n-1} \cdot q}_{a_n} + a_n \cdot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n \cdot q = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_n \cdot q \quad \textbf{(II)}$$

Fique atento

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$

Subtraindo os membros que pertencem à expressão **(II)** dos membros da expressão **(I)**, obtemos:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n - a_2 - a_3 - \ldots - a_n - a_n \cdot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q \quad \textbf{(III)}$$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, podemos escrever:

$$a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n \quad \textbf{(IV)}$$

Agora, substituindo **(IV)** em **(III)**, obtemos:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

Colocando S_n em evidência no lado esquerdo da igualdade e colocando a_1 em evidência no lado direito da igualdade, temos:

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n) \Rightarrow S_n = a_1 \cdot \frac{(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ para } q \neq 1.$$

Reflita

Não escreva no livro

Por que não podemos usar essa fórmula quando a PG tem razão $q = 1$?

Porque $q = 1$ anularia o denominador da fração. Por exemplo:

Para a PG (5, 5, 5, 5), temos: $S_4 = 5 \cdot \frac{1 - 1^4}{1 - 1} = 5 \cdot \frac{1 - 1^4}{1 - 1} = 5 \cdot \frac{0}{0}$.

Logo, chegaríamos a uma forma indeterminada.

Multiplicando o numerador e o denominador da fração por (–1), obtemos a seguinte fórmula, equivalente à anterior:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ para } q \neq 1.$$

Essa formulação facilita os cálculos quando temos $q > 1$.

Quando uma PG finita tem razão $q = 1$, ela tem todos os termos iguais a a_1. Então, para adicionar os n termos dela, basta calcular $S_n = n \cdot a_1$.

Atividades resolvidas

4. Determine cada soma a seguir.

a) A soma dos 10 primeiros termos da PG (3, 6, 12, ...).

b) A soma dos termos da PG $(2, 2^2, \ldots, 2^{10})$.

Resolução

a) Calcular a soma dos 10 primeiros termos dessa PG corresponde a calcular a soma de todos os termos da PG finita formada por eles $(3, 6, 12, \ldots, a_{10})$.

Nessa PG, temos $a_1 = 3$ e $q = 2$ e queremos calcular S_{10}.

$$S_{10} = 3 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 3 \cdot \frac{1024 - 1}{1} = 3\,069$$

Fique atento

Note que, para calcular a soma S_{10} usando essa fórmula, não precisamos calcular o valor de a_{10}.

b) Nessa PG, temos $a_1 = 2$, $q = 2$ e $n = 10$.

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2 \cdot \frac{1024 - 1}{1} = 2\,046$$

Conexões

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Os boatos e as *fake news*

Hector Gómez/Arquivo da editora

Um problema com o qual a humanidade sempre conviveu foi o dos boatos, que atualmente designamos pela expressão *fake news*.

Boato é uma palavra de origem latina – *boatus*, que significa "berro de boi". Inicialmente, utilizava-se o termo em referência a algum alvoroço ou gritaria em um ambiente. Até o século XIX, os ingleses designavam por *false news* (notícia falsa) o que chamávamos de boatos. O termo *fake news* pode ter surgido bem antes, mas se popularizou a partir da expansão das mídias sociais.

O emprego do termo *fake news* ocorreu de maneira acentuada nas eleições presidenciais dos Estados Unidos, em 2016, quando surgiram nas mídias sociais notícias inverídicas, isto é, falsas, sobre os candidatos à presidência daquele país.

Essa prática ganhou as manchetes dos jornais nos períodos eleitorais, mas ela não ocorre apenas em tempos de eleição; esse movimento pode acontecer nas mais diversas circunstâncias, com frequência muito maior do que imaginamos.

Quando uma notícia falsa é propagada, muitas pessoas sofrem com as consequências. Por exemplo, ao disseminar que determinado alimento pode curar uma doença sem haver nenhum tipo de respaldo científico, as pessoas que necessitam de tratamento médico adequado podem ter complicações ou piora do quadro clínico por utilizar um método ineficaz ou até prejudicial.

Outro caso comum de disseminação de *fake news* é difamar indivíduos compartilhando informações e notícias descontextualizadas ou falsas. Quando isso ocorre, as pessoas podem ter a reputação e a dignidade comprometidas.

Sobre o assunto

Em 2016, o dicionário *Oxford* elegeu "pós-verdade" a palavra do ano. Esse termo é frequentemente associado às *fake news*, pois se relaciona a situações em que um fato comprovado e verificável tem menos influência na opinião das pessoas do que inverdades que fazem apelos emocionais.

Leia mais sobre a pós-verdade e a relação dela com notícias falsas na matéria, publicada pelo *G1*, "'Pós-verdade' é escolhida palavra do ano pelo dicionário Oxford", disponível em: https://tedit.net/0m2q6b (acesso em: 18 jul. 2024).

Não escreva no livro

As imagens não estão representadas em proporção.

Antigamente × atualmente

O que há de diferente na propagação de uma notícia falsa nos dias de hoje, quando comparamos com a propagação de boatos antes da popularização da internet e das redes sociais?

Boatos sempre existiram, mas atualmente eles são chamados de *fake news*. Esses conceitos são sinônimos? Não! Tanto os boatos quanto as *fake news* se referem a notícias falsas, contudo a diferença entre esses conceitos está na velocidade de propagação dessas notícias.

Antes da internet, as notícias, falsas ou não, se propagavam por meio de veículos oficiais de notícia, como rádio, televisão, jornal e revista, e pela divulgação boca a boca. Ao longo do tempo, a comunicação entre pessoas foi ficando cada vez mais veloz. A princípio ocorria por meio de cartas, que precisavam ser entregues por mensageiros, e isso poderia levar vários meses. Depois, passou a ser possível transmitir mensagens por meio do telégrafo, uma máquina capaz de enviar impulsos elétricos em uma rede cabeada.

Fox Photos/Getty Images

Alexander Graham Bell em Chicago, em uma conexão telefônica para Nova York. Foto de 1892.

O avanço dos meios de comunicação continuou, com a invenção do rádio e do telefone, que permitiu a comunicação de uma quantidade maior de informação de maneira instantânea.

Depois do telefone, com a popularização da internet, os meios de comunicação passaram a permitir o compartilhamento instantâneo de mensagens para uma quantidade cada vez maior de pessoas. Se antigamente era necessário mandar uma carta ou fazer uma ligação para cada pessoa com que se desejasse compartilhar uma informação, hoje é possível enviar uma mensagem em uma rede social ou aplicativo para milhares de pessoas de maneira instantânea.

Atualmente, as redes sociais fazem parte da vida de grande parte da população, uma vez que são utilizadas principalmente como meio de comunicação entre as pessoas. Por meio delas, é possível fazer amizades, "acompanhar" um amigo que não se vê há muito tempo, comunicar-se com um parente distante, reagir a *stories*, compartilhar fotos, vídeos e textos, etc.

A velocidade com que se propaga uma *fake news* por uma rede social é muito alta, uma vez que em pouco tempo essa informação chega a uma grande quantidade de pessoas. Quando uma informação se propaga nas redes dessa maneira, dizemos que a notícia viralizou. Esse termo se popularizou porque o padrão da propagação de notícias é parecido com o padrão de propagação de um vírus.

O uso de aparelhos eletrônicos no cotidiano facilita a propagação de *fake news* em alta velocidade.

panuwat phimpha/Shutterstock

Há modelos matemáticos que podem calcular, de maneira aproximada, a quantidade de pessoas atingidas por uma *fake news* durante um intervalo de tempo determinado. Nesses modelos, as progressões geométricas podem ser utilizadas.

Fonte dos dados: BOATO. *In*: DICIONÁRIO etimológico: etimologia e origem das palavras. c2024. Disponível em: https://tedit.net/4h47ca. ANDRADE, Genifer. Fake news: origem e conceito. *PlacaMãe.org*, 15 mar. 2021. Disponível em: https://tedit.net/4niwgh. PEDROSA, Leyberson. Telefone faz 145 anos: brasileiros contam histórias sobre o aparelho. *Agência Brasil*, Brasília, DF, 10 mar. 2021. Disponível em: https://tedit.net/gqyfdm. Acesso em: 29 jul. 2024.

Como evitar cair em uma *fake news*?

Acompanhe dicas de como não ser vítima de *fake news*.

Hector Gómez/Arquivo da editora

Fique atento ao endereço eletrônico da mensagem e verifique se corresponde a um veículo de notícias confiável.

Fique sempre atento à fonte dos dados, à data de publicação e à autoria da notícia.

Erros de ortografia revelam má procedência da informação apresentada.

Leia não só o título, mas todo o conteúdo da matéria. Desconfie de sensacionalismos! Muitas vezes, o título induz o leitor a tomar conclusões incoerentes com a realidade.

Confirme a notícia em outros *sites*, que sejam considerados fontes confiáveis. Se ainda assim você ficar em dúvida se a informação é verdadeira ou não, não a repasse! Assim você não contribui com a cadeia de compartilhamento de *fake news*.

Conecte com o texto

1. Em um grupo de 242 moradores de um condomínio, 2 deles, Pedro e João, divulgaram uma *fake news*. Pedro passou a notícia para outros 3 moradores e assim também fez João. Na mensagem eles pediam que, após 10 minutos, a pessoa compartilhasse a notícia com mais 3 condôminos. Assumindo que todas as pessoas que receberam a mensagem seguiram as instruções e mandaram sempre para pessoas diferentes, depois de quanto tempo todos os moradores do condomínio receberam a *fake news*? 5 horas.

Pesquise e debata

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

2. Além das *fake news*, outro problema sério dos dias atuais é o *bullying*, que ocorre principalmente no âmbito escolar. Faça uma pesquisa e encontre: As respostas dependem da pesquisa realizada pelos estudantes.

a) a origem da palavra *bullying*;

b) as diversas classificações de *bullying*: físico, verbal, psicológico, etc.

3. Analise a situação a seguir e converse com os colegas.

Fernanda, estudante do 2º ano do Ensino Médio, acessou uma rede social em um computador público e esqueceu de fechar a página e sair da conta dela. Posteriormente, uma pessoa mal-intencionada, ao encontrar a página aberta, publicou uma mensagem inverídica como se fosse a proprietária do perfil. Tal fato se espalhou e comentários maldosos de colegas da escola apareceram no perfil de Fernanda, de maneira que a estudante não mais se sentiu confortável para frequentar as aulas na escola.

Fique atento

Invasão de perfil em rede social é crime, passível de punições na justiça criminal e civil (reparação de danos diversos). Se tomar ciência da invasão do seu perfil em qualquer rede social, comunique aos seus responsáveis e denuncie o caso à empresa detentora da plataforma e às autoridades policiais.

a) Podemos considerar a situação vivida por Fernanda como uma *fake news*? E como *bullying*? Justifique sua resposta. Resposta pessoal.

b) O que Fernanda poderia ter feito para evitar que seu perfil fosse invadido? O que você poderia ter feito caso tivesse notado que um colega invadiu a conta de Fernanda? Respostas pessoais.

Um pouco da história das progressões geométricas

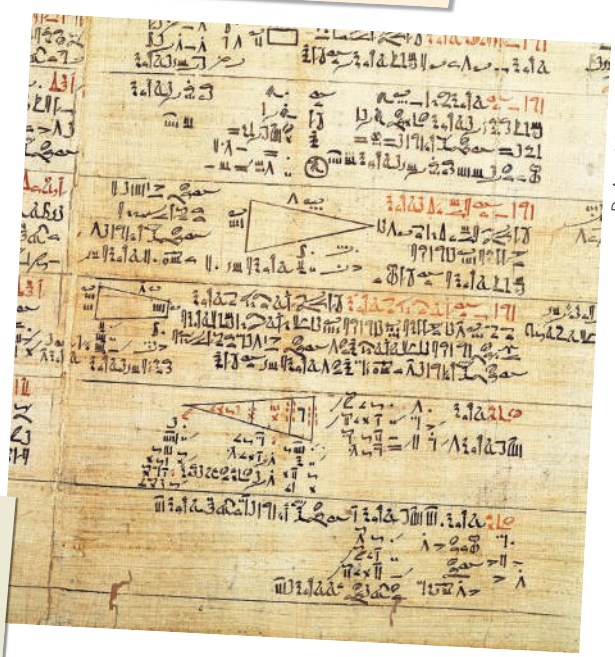
O papiro de Rhind é um dos mais antigos documentos de Matemática e permanece praticamente intacto. Ele foi escrito em aproximadamente 1650 a.C. pelo escriba egípcio Ahmes, que copiou nele outros textos ainda mais antigos. O escriba usou a escrita hierática (da direita para a esquerda), que era reservada ao sagrado e religioso da época e era bastante diferente da escrita popular dos hieróglifos.

Esse papiro também é considerado um importante documento histórico, pois foi escrito no ano 33 do reinado do faraó egípcio Apófis.

A seguir, apresentamos fotografias do pedaço original desse papiro e uma parte copiada e restaurada.

The Picture Art Collection/Alamy/Fotoarena

Papiro de Rhind, no Museu Britânico de Londres (Inglaterra). 319 cm × 34,3 cm.



De Agostini/Getty Images

As imagens não estão representadas em proporção.

Réplica do papiro de Rhind restaurado, no Museu Britânico de Londres (Inglaterra).

Em 1850, o advogado e **antiquário** escocês Alexander Rhind (1833-1863) encontrou esse papiro na cidade de Luxor (Egito). Ele comprou o papiro da pessoa que o possuía e que, provavelmente, não tinha a mínima ideia do valor dele. Então, levou-o para a Inglaterra e fez a doação desse precioso documento ao Museu Britânico de Londres, onde está até os dias atuais.

antiquário: estudioso de coisas antigas, ou pessoa ou local que coleciona ou comercializa antiguidades.

O papiro de Rhind contém 84 problemas matemáticos com as respectivas soluções. São diversos os temas dos problemas, passando por frações, divisão proporcional, divisão em alguma progressão, áreas, volumes, etc.

Por exemplo, o problema 79, apresentado a seguir escrito na linguagem atual, mostra uma progressão geométrica finita e a soma dos termos dela.

> **Problema 79**: Há 7 casas; em cada casa há 7 gatos; cada gato mata 7 ratos; cada rato comeu 7 grãos de cevada; cada grão teria produzido 7 *hekats* de cevada. Qual é a soma de todas as coisas enumeradas?

Fonte dos dados: BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012. SILVA, Isabelle Coelho da; NASCIMENTO, Josenildo Silva do; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Estudando equação do 1º grau por meio do uso de fontes históricas: o papiro de Rhind. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, Ceará, v. 2, n. 6, p. 37-48, 2015. Disponível em: https://tedit.net/hupe3a. Acesso em: 9 jul. 2024.

Note que o enunciado fala em "*hekats* de cevada", mas não sabemos exatamente o que era isso na época. No Egito antigo, 1 *hekat* era uma porção de alguma coisa que era referida ora por massa, ora por volume. Estima-se que 1 *hekat* de cevada seja uma porção de um pouco mais do que 3 kg de farinha de cevada.

Analisando a escrita desse problema, é surpreendente o raciocínio que o escriba mostrou para calcular a soma de todas as coisas. Em notação moderna, Ahmes escreveu no papiro que a soma de todas as coisas enumeradas é:

$$\frac{7 \cdot 16\,806}{6} = 19\,607$$

E o que significa esse cálculo?

Pelo enunciado, a quantidade total de coisas envolvidas é:

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 7 + 49 + 343 + 1\,401 + 16\,807 = 19\,607$$

O resultado de Ahmes está certo, mas como o escriba fez outra conta que resultou no mesmo valor?

Vamos calcular essa soma pela fórmula da soma dos termos da PG finita que você aprendeu: $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$, para $q \neq 1$.

Sabemos que a PG descrita tem razão $a_1 = 7$ e $q = 7$. Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG finita, obtemos:

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 7 \cdot \left(\frac{1 - 7^5}{1 - 7}\right) = 7 \cdot \left(\frac{1 - 16\,867}{-6}\right) = 7 \cdot \left(\frac{16\,806}{6}\right) = 19\,607$$

Note que esse é o mesmo cálculo que aparece no papiro com mais de 3 500 anos de idade. Então, tudo indica que pelo menos um egípcio antigo conhecia um cálculo equivalente à fórmula da soma dos termos de uma PG finita que conhecemos atualmente.

Atividades

Não escreva no livro

19. Calcule a soma dos termos de cada PG finita.

a) (1, 2, ..., 512) 1 023 **b)** (5, 20, ..., 1280) 1 705 **c)** $(1, 2^2, ..., 2^{10})$ 1 365

20. Considere uma PG na qual o 1º termo é 2, o último é 256 e a soma dos termos é 510. Qual é a razão dessa PG? A razão é 2.

21. Quantos termos devemos considerar na PG (3, 6, ...) para obter uma soma de todos os termos da PG igual a 765? 8 termos.

22. Com um colega, utilizem a fórmula da soma dos termos de uma PG finita e calculem o valor do número x, sabendo que x é igual à soma dos termos da progressão geométrica que tem $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{1}{2}$, ou seja, $x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}$. $x = \frac{63}{32}$

23. Clodoaldo criou um perfil em uma rede social para fazer *posts* sobre futebol. Na 1ª semana, houve 4 visitas ao perfil; na 2ª semana, 20 visitas; e, na 3ª semana, 100 visitas. Supondo que a quantidade de visitas ao perfil de Clodoaldo continue crescendo, semana a semana, nessa mesma taxa, qual será o total de visitas do perfil no final do 1º trimestre? (Considere que 1 trimestre tem 12 semanas.) 244 140 624 visitas.

24. Uma lenda conta que um rei perguntou ao inventor do jogo de xadrez o que ele queria como recompensa pela invenção. E o inventor respondeu: "1 grão de trigo pela 1ª casa do tabuleiro, 2 grãos pela 2ª casa, 4 pela 3ª casa, 8 pela 4ª casa, 16 pela 5ª casa, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa".

Sabendo que um tabuleiro de xadrez tem 64 casas, calcule a quantidade de grãos de trigo que o rei precisaria pagar ao inventor. Use uma calculadora científica ou planilha eletrônica para efetuar os cálculos.

18 446 744 073 709 551 615 grãos de trigo.

valzan/Shutterstock

Tabuleiro de xadrez.

Fique atento

Para cultivar essa quantidade de trigo, seriam necessários 16 milhões de planetas iguais à Terra.

25. Escolha um contexto e elabore no caderno um problema que seja resolvido utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG finita. Em seguida, peça a um colega que faça a resolução enquanto você resolve o problema que ele criou. Por fim, confira a resposta que ele obteve.

O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Explorando a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita

Até aqui, obtivemos a fórmula da soma dos termos de uma PA finita e a fórmula da soma dos termos de uma PG finita. Para algumas progressões geométricas infinitas também existe uma fórmula associada à soma dos termos. Vamos explorar?

1. c) $S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 = 1{,}875$; a soma é 1,875.

d) $S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}0625 = 1{,}9375$; a soma é 1,9375.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Considere a PG infinita $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ e use uma calculadora para efetuar os cálculos.

a) Determine a soma dos 2 primeiros termos dessa PG. $S_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$; a soma é 1,5.

b) Determine a soma dos 3 primeiros termos dessa PG. $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1{,}75$; a soma é 1,75.

c) Determine a soma dos 4 primeiros termos dessa PG.

d) Determine a soma dos 5 primeiros termos dessa PG.

e) Represente os valores obtidos nos itens anteriores em uma reta numérica e analise a posição deles.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

f) O que você percebeu sobre os valores das somas calculadas?

Exemplo de resposta: Quanto maior o valor de n, mais a soma se aproxima de 2.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste boxe encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Considerando a PG infinita $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$, se calcularmos S_6, verificaremos que S_6 fica mais próximo de 2 do que S_5; o mesmo vai acontecer, sucessivamente, com S_7, S_8, S_9, S_{10}, ...

Nessa sequência, S_n vai se aproximando de 2 tanto quanto quisermos (sendo sempre menor do que 2), conforme n vai assumindo valores suficientemente grandes. Quando isso ocorre, dizemos que a soma dos infinitos termos dessa PG converge para 2.

Formalizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita

De modo geral, nas progressões geométricas infinitas em que a razão q está entre -1 e 1 (ou seja, $-1 < q < 1$), a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando n é suficientemente grande, ou seja, quando n tende a infinito. Nesse caso, q^n aproxima-se de 0 quando n é suficientemente grande, ou seja, $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Então, escrevemos assim:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}\right) = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Fique atento

$$\lim_{n \to \infty} q_n$$

Lemos: Limite de q_n quando n tende ao infinito.

No exemplo da PG infinita $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ dada anteriormente, temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Reflita

O que acontece com a soma dos termos de uma PG infinita de termos positivos e razão q maior do que 1? Nesse tipo de PG, cada termo, a partir do 2º termo, é maior do que o termo anterior e, assim, a soma dos infinitos termos tende ao infinito.

26. $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$; logo, a soma dos infinitos termos é 4.

Não escreva no livro

Atividades

26. Considere a progressão geométrica infinita cujos primeiros termos são 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, e assim por diante. Determine a soma dos infinitos termos dessa PG.

27. Determine a soma dos infinitos termos da PG cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é $\frac{2}{3}$.

28. Calcule a soma dos termos da PG infinita (0,5; 0,05; 0,005; 0,0005; ...).

29. Uma progressão geométrica infinita tem o primeiro termo igual a 8 e a soma dos infinitos termos dela é 16. Qual é a razão dessa progressão?

30. A medida de comprimento do lado de um triângulo equilátero é 10 cm. Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtemos um novo triângulo equilátero. Unindo os pontos médios dos lados desse novo triângulo, obtemos um 3º triângulo equilátero, e assim por diante, indefinidamente.

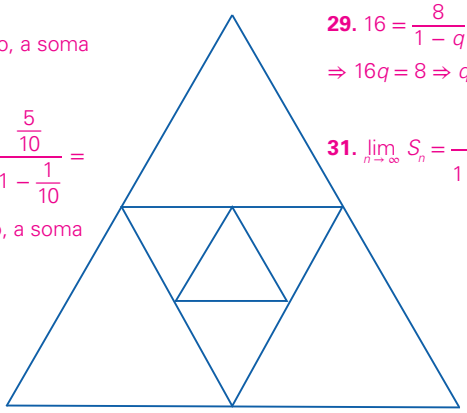
Professor, é comum, ao resolver problemas dessa natureza, utilizar-se da representação simplificada sem a necessidade explícita do termo "limite". Para muitos estudantes, o conceito de limite é explorado de forma mais detalhada durante o curso universitário, especialmente na disciplina de Cálculo.

27. $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{3}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$; logo, a soma dos infinitos termos é 9.

28. $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,5}{1-0,1} = \frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$; logo, a soma dos infinitos termos é $\frac{5}{9}$.

29. $16 = \frac{8}{1-q} \Rightarrow 16(1-q) = 8 \Rightarrow 16 - 16q = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16q = 8 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$; logo, a razão da progressão é $\frac{1}{2}$.

31. $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{7}{9}$; logo, $0,\overline{7} = \frac{7}{9}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Calcule a soma das medidas de perímetro de todos esses triângulos. 60 cm

31. Analise como podemos escrever a dízima $0,\overline{7}$ como uma soma de frações decimais:

$$0,\overline{7} = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10\,000} + \ldots$$

Usando a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, calcule o valor dessa soma e verifique que ela corresponde à geratriz desse decimal.

Fique atento

Geratriz é uma fração que origina uma dízima periódica. Por exemplo:

$$\frac{7}{3} = 2,\overline{3}$$

A fração $\frac{7}{3}$ é a geratriz da dízima periódica $2,\overline{3}$.

Enem e vestibulares

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

1. **(Uerj)** Progressão harmônica é uma sequência finita ou infinita de números diferentes de zero cujos inversos formam uma progressão aritmética (PA). Observe o exemplo:

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ é uma progressão harmônica porque (1, 2, 3, 4, ...) é uma PA.

Na progressão harmônica $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right)$, o vigésimo primeiro termo equivale a:

a) $\frac{1}{48}$ **b)** $\frac{1}{42}$ **c)** $\frac{1}{36}$ **d)** $\frac{1}{24}$

Alternativa **b**.

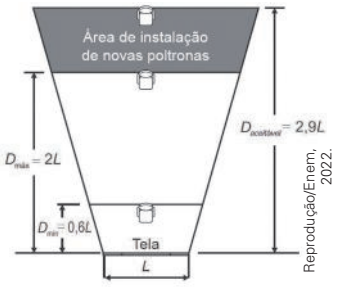
2. **(Enem)** Em uma sala de cinema, para garantir que os espectadores vejam toda a imagem projetada na tela, a disposição das poltronas deve obedecer à norma técnica da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), que faz as seguintes indicações:

- Distância mínima ($D_{mín}$) entre a tela de projeção e o encosto da poltrona da primeira fileira deve ser de, pelo menos, 60% da largura (L) da tela.
- Distância máxima ($D_{máx}$) entre a tela de projeção e o encosto da poltrona da última fileira deve ser o dobro da largura (L) da tela, sendo aceitável uma distância de até 2,9 vezes a largura (L) da tela.

Para o espaçamento entre as fileiras de poltronas, é considerada a distância de 1 metro entre os encostos de poltronas em duas fileiras consecutivas.

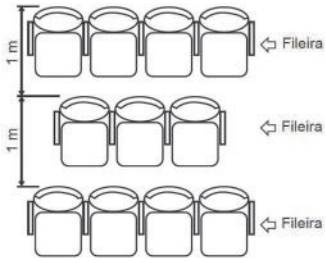
Disponível em: www.ctav.gov.br. Acesso em: 14 nov. 2013.

Uma sala de cinema, cuja largura da tela mede 12 m, está montada em conformidade com as normas da ABNT e tem suas dimensões especificadas na figura.



Reprodução/Enem, 2022.

Pretende-se ampliar essa sala, mantendo-se na mesma posição a tela e todas as poltronas já instaladas, ampliando-se ao máximo a sala para os fundos (área de instalação de novas poltronas), respeitando-se o limite aceitável da norma da ABNT. A intenção é aumentar, ao máximo, a quantidade de poltronas da sala, instalando-se novas unidades, iguais às já instaladas.



Reprodução/Enem, 2022.

Quantas fileiras de poltronas a sala comportará após essa ampliação? Alternativa **c**.

a) 26 **c)** 28 **e)** 35

b) 27 **d)** 29

3. **(UEA-AM)** O salário de determinado estagiário em uma empresa, em janeiro, era de R$ 1.500,00. Esse salário teve um acréscimo mensal constante, sempre sobre o valor recebido no mês anterior, durante os meses de fevereiro, março, abril e maio. Se o salário no mês de maio foi de R$ 5.000,00, o salário no mês de abril foi de:

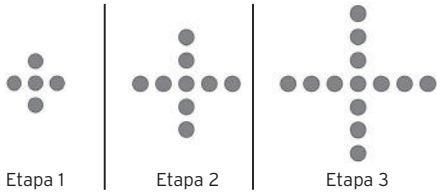
a) R$ 3.250,00. **d)** R$ 2.375,00.

b) R$ 4.575,00. **e)** R$ 2.950,00.

c) R$ 4.125,00.

Alternativa **c**.

4. **(UFRGS-RS)** Considere o padrão de construção que fez uso de discos, conforme as figuras representadas nas etapas 1, 2 e 3 [a seguir].



Reprodução/UFRGS, 2022.

Na etapa 200, serão usados n discos. Seguindo esse padrão de construção, n é igual a:

a) 783. **d)** 810.

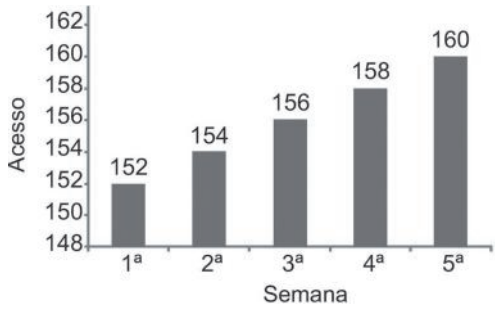
b) 792. **e)** 819.

c) 801.

Alternativa **c**.

5. **(Enem)** Uma confeiteira pretende divulgar em um sítio da internet os doces que produz, mas só fará isso se acreditar que o número de acessos por semana compensará seu gasto com a divulgação. Por isso, pediu que lhe enviassem dados sobre o número de acessos ao sítio nas últimas 5 semanas e recebeu o gráfico a seguir.

Reprodução/Enem, 2021.



A confeiteira acredita que, se o número de acessos mantiver o mesmo crescimento semanal para as próximas 5 semanas, ao final desse período valerá a pena investir na divulgação.

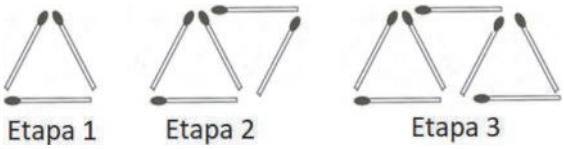
O número de acessos que a confeiteira acredita ser suficiente para que a divulgação no sítio valha a pena é:

a) 162. **c)** 172. **e)** 320.
b) 170. **d)** 312.

Alternativa **b**.

6. **(UFRGS-RS)** Considere o padrão de construção de triângulos com palitos, representado nas figuras [a seguir].

Reprodução/UFRGS, 2020.



Na etapa n, serão utilizados 245 palitos. Nessas condições, n é igual a:

a) 120. **c)** 122. **e)** 124.
b) 121. **d)** 123.

Alternativa **c**.

7. **(UEG-GO)** Uma concessionária vende um carro financiado em dois anos, e as parcelas mensais serão da seguinte maneira: a primeira parcela será de R$ 1.000,00, e as demais decrescerão R$ 20,00 ao mês. Ao final do financiamento esse carro terá custado ao comprador:

a) R$ 18.480,00. **d)** R$ 17.760,00.
b) R$ 18.240,00. **e)** R$ 17.520,00.
c) R$ 18.000,00.

Alternativa **a**.

8. **(Enem)** As bactérias são microrganismos formados por uma única célula. Elas estão presentes em praticamente todos os meios: no ar, na água, no solo ou no interior de outros seres vivos. A forma de reprodução mais comum das bactérias é a assexuada por bipartição. Nesse processo, cada uma delas tem seu DNA duplicado e, posteriormente, se divide em duas células bacterianas.

De modo geral, em condições favoráveis, esse processo de bipartição se conclui a cada 20 minutos.

Disponível em: www.sobiologia.com.br. Acesso em: 16 nov. 2013 (adaptado).

Considere que, no instante $t = 0$, há uma quantidade N_0 de bactérias em um meio favorável à sua reprodução, de modo que nele só se reproduzem por bipartição. A sequência formada pela quantidade de bactérias nesse meio nos instantes 0, 20, 40, 60, 80 e 100 minutos é: Alternativa **d**.

a) $N_0, N_0^2, N_0^3, N_0^4, N_0^5, N_0^6$.
b) $N_0, N_0^2, N_0^4, N_0^8, N_0^{16}, N_0^{32}$.
c) $N_0, 2N_0, 3N_0, 4N_0, 5N_0, 6N_0$.
d) $N_0, 2N_0, 4N_0, 8N_0, 16N_0, 32N_0$.
e) $N_0, 3N_0, 7N_0, 15N_0, 31N_0, 63N_0$.

9. **(Fuvest-SP)** Resolva os três itens [a seguir].

a) O primeiro termo de uma progressão geométrica de razão positiva é 5, e o terceiro termo é 45. Calcule a soma dos 6 primeiros termos dessa progressão. 1 820

b) Calcule a soma dos números inteiros positivos menores do que 112 e não divisíveis por 4. 4 704

Fique atento

Um número é divisível por 4 quando o número formado pelos 2 últimos algarismos dele for divisível por 4 (quando resta 0 na divisão por 4) ou quando os últimos algarismos do número forem iguais a 00.

c) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é $n(2n + 1)$, qualquer que seja $n \geqslant 1$. Encontre o vigésimo termo dessa progressão. 79

Conteúdos e aprendizagens

As imagens não estão representadas em proporção.

Nelson Charette Photo/Shutterstock

Sequências

O termo fractal apareceu pela primeira vez em 1977 em um livro de Benoît Mandelbrot, chamado *The Fractal Geometry of Nature*.

Progressão aritmética

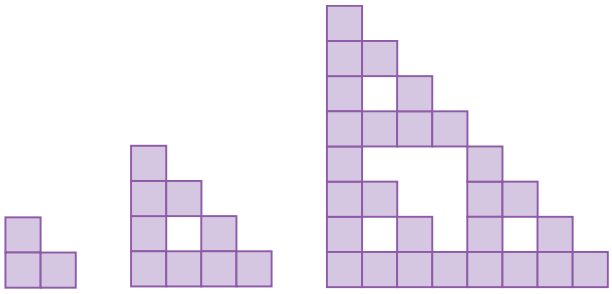
Nível **I** Nível **II** Nível **III**

Sequência na qual o primeiro termo a_1 é 4 e tem como **razão** r a constante 2.

A razão r define se a PA será:

- **crescente** — Produção de máquinas.
- ou **decrescente** — Desvalorização de um *smartphone*.
- ou **constante**

Progressão geométrica



Nível **I** Nível **II** Nível **III**

Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Sequência na qual o primeiro termo a_1 é 3 e tem como **razão** q a constante 3.

A razão q e o termo a_1 definem se a PG será:

- **crescente** — Propagação de *fake news*.
- ou **decrescente** — Decaimento radioativo.
- ou **constante**
- ou **alternante**

Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

- Consigo determinar alguns dos termos da PA e da PG apresentadas?
- Compreendo a relação existente entre sequências, progressões aritméticas, progressões geométricas e funções?
- Compreendo a influência da razão r no crescimento ou decrescimento de uma PA?
- Compreendo a influência da razão q e do termo a_1 no crescimento ou decrescimento de uma PG? Respostas pessoais.

Respostas

Unidade 1

Abertura

- Resposta pessoal.
- **Estimativa da produção energética acumulada de Itaipu**

Ano após 2023	Produção acumulada a partir de 2023 (em GWh)	Proporção entre a produção acumulada e a quantidade inicial (2023)
0 (2023)	84 000	1
1 (2024)	168 000	2
2	252 000	3
3	336 000	4
4	420 000	5
5	504 000	6
6	588 000	7
7	672 000	8
8	756 000	9
9	840 000	10
10	924 000	11

Dados elaborados para fins didáticos.

Capítulo 1

Situações-problema

1. a) A quantidade de respostas é maior do que a quantidade total de estudantes.
b) 30 estudantes.
c) Resposta pessoal.

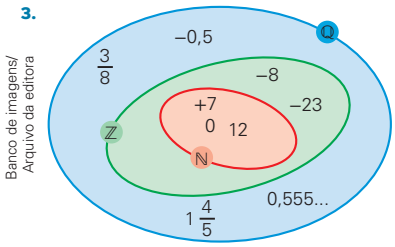
2. a) Resposta pessoal.
b) 30 estudantes.
c) 33 estudantes.

Atividades

1. a) $M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \ldots\}$
b) $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$
c) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
d) $C = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots\}$

2. a) $\{0, 1, 2\}$
b) $\{-2, -1, 0, 1, \ldots\}$
c) $\{0, 1\}$
d) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
e) Não existe valor para x.
f) $\{\ldots, -3, -2, -1\}$

3.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

4. a) Verdadeira; dado qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, podemos considerar o subconjunto $\{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}^*$. Esse conjunto é finito e tem exatamente n elementos.
b) Falsa; o conjunto dos números naturais é infinito e, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, sempre existe o sucessor $n + 1 \in \mathbb{N}$ e que é maior do que n.
c) Verdadeira, todo número natural tem um sucessor em $\mathbb{N}$, sendo que o conjunto dos naturais é infinito e o sucessor de qualquer número natural n pode ser obtido por $n + 1$.
d) Falsa; o elemento $0 \in \mathbb{N}$ e não tem antecessor em $\mathbb{N}$.

5. $0{,}25 < \frac{1}{2} < 0{,}\overline{52} < 0{,}\overline{5} < \frac{6}{10} < \frac{4}{5}$

6. a) 3; 4.
b) Existem infinitos números racionais e infinitos números irracionais entre esses números.

7. a) • 6 • 22 • 300 • 12 • 16 • 86
b) Todos os resultados são números pares.
c) Toda soma de 2 números pares é um número par.
d) Resposta pessoal.

8. a) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$; o conjunto dos números naturais não nulos é parte do conjunto dos números naturais. $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{N}^*$; o conjunto dos números naturais não é parte do conjunto dos números naturais não nulos.
b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; o conjunto dos números racionais é parte do conjunto dos números reais. $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$; o conjunto dos números reais não é parte do conjunto dos números racionais.

9. a) $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b) $\{4, 5, 6\}$
c) $\{0, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$
d) $\{6\}$

10. a) $\{a, c, e, f\}$ **b)** $\{h, i\}$

11. a) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.
b) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

12. a) $\mathbb{Z}$ **b)** $\mathbb{Z}$ **c)** $\varnothing$ **d)** $\mathbb{N}$

13. a) Falso; justificativa pessoal.
b) Falso; justificativa pessoal.
c) Verdadeiro; justificativa pessoal.

14. a) $(A \cup B) \cap C$ ou $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.
b) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$ ou $(A \cup C) \cap B$.

15. a) 25 estudantes. **c)** 50 estudantes.
b) 10 estudantes.

16. a) 41 estudantes.
b) 27 estudantes.

17. a) 43% **b)** 7% **c)** 57%

18. a) 54 famílias. **c)** 365 famílias.
b) 315 famílias.

19. a) 55 estudantes. **b)** 30 estudantes.

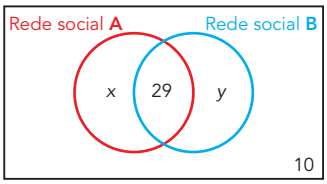
20. a) 6 elementos. **c)** 18 elementos.
b) 14 elementos. **d)** 20 elementos.

Reflita (p. 16)

Resposta pessoal.

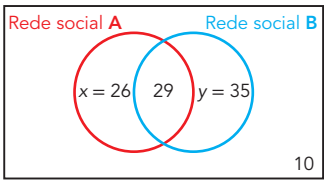
Explore para descobrir (p. 17)

1. a) **Pessoas entrevistadas**



WYM Design/ Arquivo da editora

b) 26 pessoas.
c) 35 pessoas.
d) **Pessoas entrevistadas**



WYM Design/ Arquivo da editora

e) $26 + 29 + 35 + 10 = 100$

Reflita (p. 19)

- Sim.
- Sim.
- Sim.
- Não.

Reflita (p. 20)

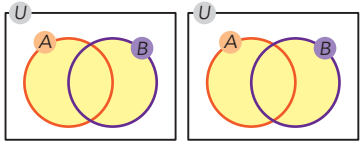
Resposta pessoal.

Reflita (p. 20)

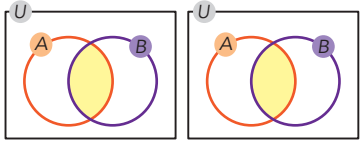
- Não, todo número natural é inteiro.
- Sim, os números inteiros negativos não são números naturais.

Reflita (p. 29)

Propriedade comutativa

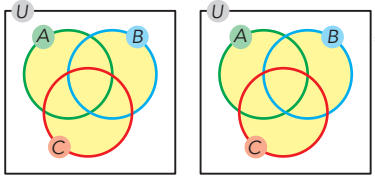


$A \cup B = B \cup A$



$A \cap B = B \cap A$

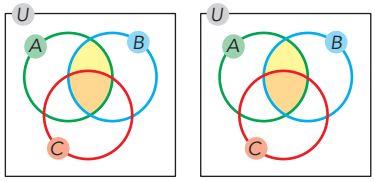
Propriedade associativa



$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora

WYM Design/
Arquivo da editora



$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Conexões (p. 34)

1. a) 400 arquivos.
b) 1000 arquivos apenas na pasta **A** e 600 arquivos apenas na pasta **B**.
2. Respostas pessoais.
3. Resposta pessoal.

Capítulo 2

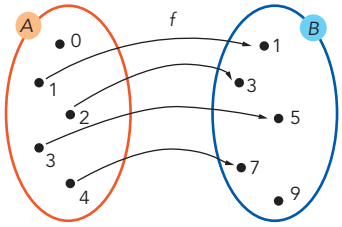
Situações-problema

1. a) Purê de laranja e suco de laranja.
b) Purê de maçã e suco de maçã.
c) 20 maçãs; 15 maçãs.
d) Resposta pessoal.
2. a) 10 gotas; 20 gotas.
b) Operação de multiplicação.
c) Multiplicar a medida de massa por 2.

Atividades

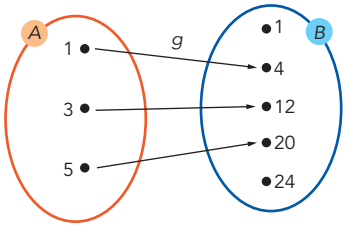
1. a) −1; 3; 7; 11; 15.
b) −6; −1; 4; 9; 14.
c) 6; 9; 12; 15; 18.
2. $f(x) = 3x + 1$; resposta pessoal.
3. a) A medida de área A e a medida de comprimento ℓ do lado da região quadrada.
b) A medida de área A.
c) A medida de comprimento ℓ do lado.
d) $A = \ell^2$
e) 144 cm²
f) 13 cm
4. a) $f(x) = \frac{x}{3}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$
b) $f(x) = 2x - 3$ **d)** $f(x) = x^3 + x^2$
5. a) 80 unidades.
b) Lucro.
c) Resposta pessoal.
d) Resposta pessoal.
6. a) Não, pois o elemento 5 de A não está relacionado a um elemento em B.
b) Sim.
c) Não, pois o elemento −2,7 de A não está relacionado a um elemento em B e os elementos 0,5 e $-\frac{1}{3}$ de A estão, cada um, relacionados a mais de um elemento de B.
d) Não, pois os elementos 1 e 2 de A estão, cada um, relacionados a mais de um elemento de B.
7. a)

WYM Design/Arquivo da editora



b) f não representa uma função de A em B, pois o elemento 0 de A não está relacionado a um elemento em B.
8. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.
9. a)

WYM Design/Arquivo da editora



b) D(g) = {1, 3, 5}; CD(g) = {1, 4, 12, 20, 24}; Im(g) = {4, 12, 20}.
c) $g(3) = 12$
d) $x = 5$
e) $x = 1$
10. Alternativas **c** e **d**.
11. a) É sobrejetiva.
b) Não é sobrejetiva.
12. a) Sobrejetiva.
b) Injetiva.
c) Não é sobrejetiva, nem injetiva e nem bijetiva.
d) É sobrejetiva e injetiva; então, é bijetiva.
e) Não é sobrejetiva, nem injetiva e nem bijetiva.
f) Injetiva.
g) Bijetiva.
13. a) Sobrejetiva.
b) Injetiva.
c) Bijetiva.
d) Não é sobrejetiva, nem injetiva e nem bijetiva.
14. a) $f^{-1}(x) = \frac{2 - x}{6}$
b) São simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano.
15. Alternativa **e**.

Reflita (p. 37)

- R$ 60,00
- 13 litros.

Reflita (p. 38)

- 14 cm
- 5,5 cm

Reflita (p. 41)

Porque cada elemento de A está associado ao quádruplo dele em B.

Reflita (p. 42)

Porque não são imagem de um elemento do domínio de f.

Reflita (p. 42)

$f(x) = -x$

Explore para descobrir (p. 45)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 46)

Porque, por exemplo, $-1 \in \mathbb{R}$, mas não existe valor real de x tal que $x^2 = -1$, ou seja, −1 não pertence ao conjunto imagem de f e $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}$.

Reflita (p. 46)

A terceira função é sobrejetiva, mas não é injetiva, pois há 1 elemento em B que é imagem de 2 elementos distintos de A. A quarta função não é injetiva (há 1 elemento em B que é imagem de 2 elementos distintos de A) nem é sobrejetiva (há elementos em B que não pertencem ao conjunto imagem da função).

Capítulo 3

Situação-problema

a) 540 km
b) Operação de multiplicação.
c) $x \cdot 12$

Atividades

1. a) $f(1) = 1$ **c)** $f(0) = 4$
b) $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$ **d)** $f(k + 1) = -3k + 1$
2. a) 37
b) 26,4 cm
3. a) km 189,5 e km 220.
b) $\frac{91}{183}$ h e $\frac{31}{183}$ h.
c) Porque os veículos estão se movimentando em direções opostas.
4. a) 95 °F
b) 160 °C
5. Aproximadamente 48,9 °C.
6. 122 °F
7. 50 °F
8. 7,9 cm
9. Alternativa **c**.
10. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.
11. a) $a = 6$; função crescente.
b) $a = 0$; função constante.
c) $a = 4$; função crescente.
d) $a = -5$; função decrescente.
12. A função g; a função f.
13. a) $f(x) = 3x + 2$ **b)** $f(x) = -2x + 5$
14. a) $f(x) = 3x + 1$ **c)** $f(x) = -x + 3$
b) $f(x) = 2x + 10$ **d)** $f(x) = -2x + 9$
15. a) $f(x) = 8 + 0{,}50x$
b) 0,50 e 8.
c) R$ 58,00
d) Resposta pessoal.
16. a) R$ 13,00 por dia.
b) A aplicação **B**.
17. a)

Medidas de um retângulo

Medida de comprimento da largura (em cm)	Medida de perímetro (em cm)
1	12
1,5	13
2	14
3	16
4	18

Dados elaborados para fins didáticos.

b) $f(x) = 10 + 2x$
c) 2 e 10.
18. Alternativa **b**.
19. a) $f(x) = 11{,}80x$
b) Resposta pessoal.
c) Respostas pessoais.
20. a) $f_A(x) = 75 + 0{,}75x$; $f_B(x) = 90 + 0{,}75x$; $f_C(x) = 105 + 0{,}75x$.
b) 0,75 em todas as funções.
21. a) $f(t) = 10 + 5t$
b) 5
c) 10
d) Resposta pessoal.

22. 698 µg/m³

23. a) $c = 0{,}10x$

b) $c = 0{,}05x$

c) R$ 1.250,00; R$ 6.000,00.

24. 90 °C; aproximadamente 101,43 °C.

25. a) $C(x) = 6x + 10\,400$

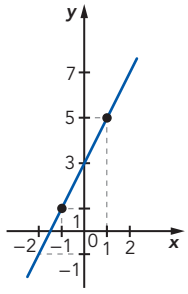
b) R$ 17.600,00

c) Resposta pessoal.

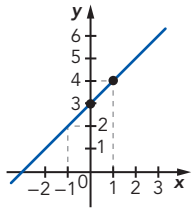
26. Não, pois não há uma taxa de variação constante que permita relacionar todos os pontos.

27. Resposta pessoal.

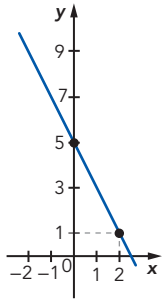
28. a)



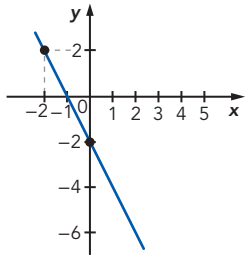
b)



c)



d)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

29. a) $y = \frac{2}{3}x + 2$

b) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

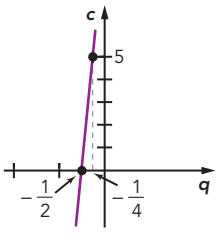
c) $y = 10x$

d) $y = -10x + 20$

e) $y = 2x + 12$

f) $y = -x + 16$

30.



Banco de imagens/Arquivo da editora

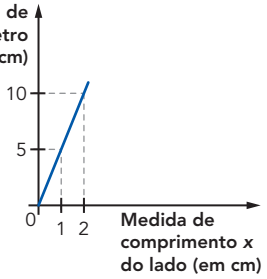
31. Alternativa **c**.

32. a) Resposta pessoal.

b) A medida de perímetro dobra e triplica, respectivamente.

c) $p(x) = 5x$

d)



WYM Design/Arquivo da editora

e) Variação linear ou variação constante.

f) Sim; não.

33. a) $v = 10$ m/s

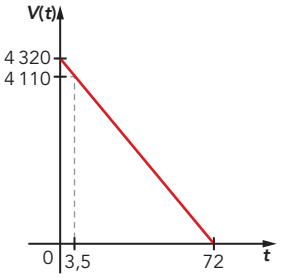
b) $S = 10t + 10$

c) 40 m

34. a) 4 110 L

b) 72 h

c)



WYM Design/Arquivo da editora

d) $V(t) = 60t$; justificativa pessoal.

e) Resposta pessoal.

35. Alternativa **d**.

36. a) 0,853 kg/L

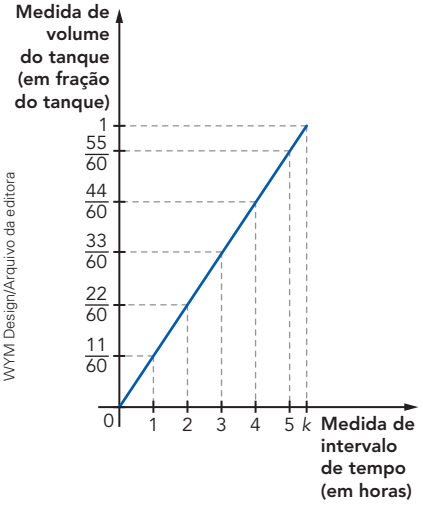
b) $k = 5$

c) $y = 0{,}853x$

d) Resposta pessoal.

37. a) $\frac{11}{60}, \frac{22}{60}, \frac{33}{60}, \frac{44}{60}, \frac{55}{60}$.

b)



WYM Design/Arquivo da editora

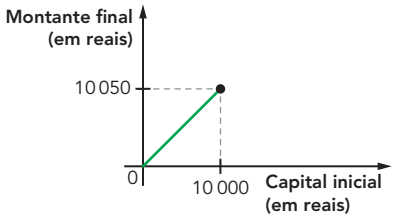
38. a) $f(x) = 50x$, com $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$.

b) Sim.

c) Sim.

d) Não; justificativa pessoal.

39. a)



WYM Design/Arquivo da editora

b) Sim; justificativa pessoal.

40. a) Sim; $f(x) = 3{,}50 + 2{,}10x$, com $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

b) Resposta pessoal.

c) Não; justificativa pessoal.

d) A opção mais vantajosa financeiramente é a empresa **A**; resposta pessoal.

41. a) O domínio é o intervalo [0, 10].

b) Sim.

c) 3,575

42. Resposta pessoal.

43. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -14\}$

44. a) $f(x) = 5x - 230$, com $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

b) $x < 46$; o comerciante terá prejuízo se vender menos do que 46 unidades.

c) $x = 109$

d) $x > 102$

e) $66 < x < 82$

45. a) Plano **A**: $f(x) = 50x + 100$, com $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; plano **B**: $g(x) = 40x + 180$, com $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

b) O plano **A**, o que significa que o custo aumenta mais rapidamente no plano **A**.

c) O plano **A** é mais econômico para $x < 8$; o **B**, para $x > 8$; e eles são equivalentes para $x = 8$.

d) O plano **A** é mais econômico para essas 11 consultas, e, nas condições anteriores, em que ambos os planos cobriam as mesmas consultas, o plano **B** era mais vantajoso para essa quantidade.

46. Alternativa **e**.

Reflita (p. 52)

Não, pois, desde o início dos estudos das funções até os dias atuais, muitos matemáticos diferentes contribuíram para esse desenvolvimento.

Explore para descobrir (p. 53)

1. a) R$ 12,00

b) R$ 24,00

c) 26 km

2. Sim; valor inicial: R$ 8,00; valor por quilômetro rodado: R$ 1,50.

3. Resposta pessoal.

4. Resposta pessoal.

5. Não; justificativa pessoal.

Reflita (p. 54)

- $a = 0$ e $b = 0$.
- Exemplos **a**, **b**, **c** e **d**.
- Exemplo **e**: função constante não nula; exemplo **f**: função nula.

Reflita (p. 68)

Porque, no 1º exemplo, D(f) = {0, 1, 2} e, no 2º exemplo, D(f) = $\mathbb{R}$.

Reflita (p. 83)

b) $f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$

c) $f(8) = 8 - 8 = 0$

Reflita (p. 83)

- $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.
- A intersecção do gráfico da função constante nula com o eixo x é o próprio gráfico da função; o gráfico da função constante não nula não intersecta o eixo x.

Reflita (p. 84)

O sinal + significa $f(x) > 0$, e o sinal − significa $f(x) < 0$.

Reflita (p. 84)

Porque a inequação trata de quantidade de maçãs que, necessariamente, deve ser um número natural.

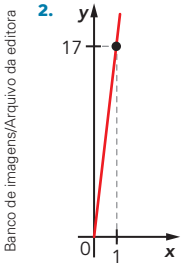
Tecnologias digitais (p. 64)

1. O conjunto de dados **2**; $f(x) = 2x + 1$.
2. 1 unidade.
3. Por 0.

Tecnologias digitais (p. 69)

1. **a)** Quando o valor de a é positivo, o gráfico representa uma função crescente. Quando $a = 0$, o gráfico está na horizontal (paralelo ao eixo x). Já quando o valor de a é negativo, o gráfico representa uma função decrescente.
   b) Se o valor de b é positivo, quanto maior for esse valor, mais acima da origem o gráfico da função intersecta o eixo y. Se o valor de b é negativo, quanto menor for esse valor, mais abaixo da origem o gráfico intersecta o eixo y. Por fim, se b for igual a zero, o gráfico intersecta o eixo y na origem do plano cartesiano.
2. **a)** Loja **A**: $P_A(x) = 3x + 5$;
   loja **B**: $P_B(x) = 2x + 10$.
   b) Na loja **A**.
   c) Para menos de 5 livros, o preço do frete é menor na loja **A**; para 5 livros, o valor do frete é o mesmo nas 2 lojas; e, para mais de 5 livros, o valor do frete é menor na loja **B**.

Conexões (p. 77)

1. $f(x) = 17x$
2. 

Banco de imagens/Arquivo da editora
3. A medida de comprimento aproximada do palmo do artesão, em centímetros.
4. Resposta pessoal.
5. Resposta pessoal.

Capítulo 4: Funções definidas por mais de uma sentença

Situação-problema

a) Não.
b) Resposta pessoal.

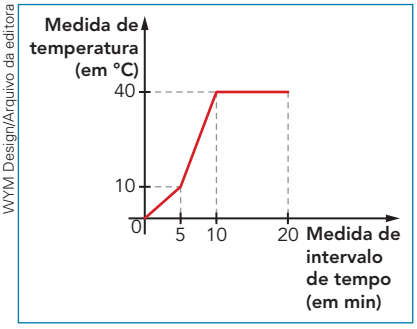
Atividades

1. **a)** $f(0) = 5$
   b) $f(-1) = 1$
   c) $f(1) = 9$
   d) $f(5) = 9$
   e) $f(10) = 5$
   f) $f(6) = 9$

2. $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, \text{ se } x < 1 \\ x - 2, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ 3, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

3. **a)** $t(c) = \begin{cases} 35{,}85, \text{ se } c < 11 \\ -20{,}35 + 5{,}62c, \text{ se } 11 \leqslant c < 21 \\ -187{,}95 + 14c, \text{ se } 21 \leqslant c \leqslant 50 \\ -259{,}45 + 15{,}43c, \text{ se } c > 50 \end{cases}$
   b) Resposta pessoal.
4. Alternativa **c**.
5. **a)**

Variação da medida de temperatura



WYM Design/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

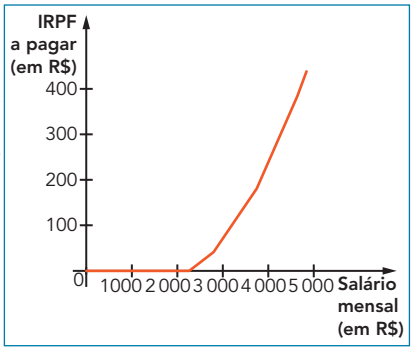
b) $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 6x - 20, \text{ se } 5 < x \leqslant 10 \\ 40, \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \end{cases}$
c) 4 °C, 28 °C, 40 °C, respectivamente.
d) Em [0, 5], pois, nesse intervalo, a medida de temperatura t, em graus Celsius, e a medida de intervalo de tempo decorrido x estão relacionadas por uma função linear de lei $t(x) = 2x$.

6. **a)** 3 h
   b) 105 dB
7. **a)**

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leqslant 2\,259{,}20 \\ 0{,}075x - 169{,}44, \text{ se } 2\,259{,}20 < x \leqslant 2\,826{,}65 \\ 0{,}15x - 381{,}44, \text{ se } 2\,826{,}65 < x \leqslant 3\,751{,}05 \\ 0{,}225x - 662{,}77, \text{ se } 3\,751{,}05 < x \leqslant 4\,664{,}68 \\ 0{,}275x - 896, \text{ se } x > 4\,664{,}68 \end{cases}$$

b) $0 < x \leqslant 2\,259{,}20$; $x \geqslant 2\,259{,}20$.
c)

Imposto de renda 2024



Banco de imagens/Arquivo da editora

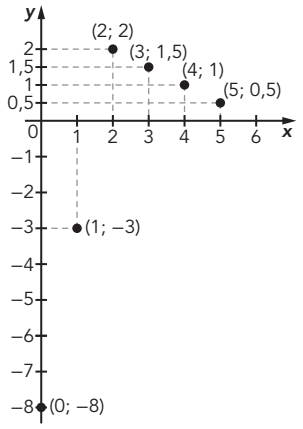
Fonte dos dados: BRASIL. Subsecretaria de Tributação e Contencioso. IRPF (Tributação de 2024). *Receita Federal*, 4 maio 2023 [atualizado em: 9 fev. 2024]. Disponível em: https://tedit.net/josysz. Acesso em: 26 jun. 2024.

d) Para que os contribuintes de menor renda paguem valores menores de IRPF em relação ao salário bruto.

8. **a)** **=SE(A1<=0;2;SE(A1<=4;A1;2*A1−6))**
   b) Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 91)

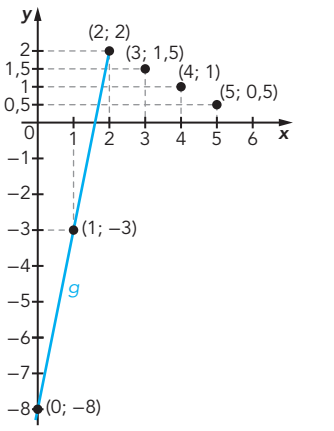
1. (0; −8), (1; −3), (2; 2), (3; 1,5), (4; 1) e (5; 0,5).



Banco de imagens/Arquivo da editora

Não, pois os pontos representados no plano cartesiano não são colineares.

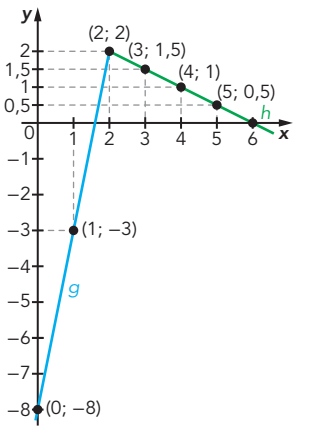
2. Porque, pelo enunciado, $g(0) = -8$, $g(1) = -3$ e $g(2) = 2$. Logo, os pontos (0, −8), (1, −3), (2, 2) pertencem ao gráfico de g. Como esses pontos são colineares, apenas com as informações dadas, não há restrição para a possibilidade de g ser uma função afim.

3. 

Banco de imagens/Arquivo da editora

$g(x) = 5x - 8$

4. Porque, pelo enunciado, $h(2) = 2$; $h(3) = 1{,}5$; $h(4) = 1$; e $h(5) = 0{,}5$. Logo, os pontos (2; 2), (3; 1,5), (4; 1) e (5; 0,5) pertencem ao gráfico de h. Como esses pontos são colineares, apenas com as informações dadas, não há restrição para a possibilidade de h ser uma função afim.

5. 

Banco de imagens/Arquivo da editora

$h(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

6. Podemos interpretar a união dos gráficos de g e h como o gráfico de f. A lei da função f é igual à da função g se $x \leqslant 2$, e igual à da função h se $x \geqslant 2$.

Reflita (p. 93)

$D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) =]-\infty, 6]$.

Reflita (p. 93)

$f(3) = 3$

Tecnologias digitais (p. 98)

1. a) $f(x) = \begin{cases} -6x - 9, \text{ se } x \leqslant -1 \\ x - 2, \text{ se } -1 < x \leqslant 6 \\ 4, \text{ se } x > 6 \end{cases}$

b) A primeira sentença é de uma função decrescente, pois $a = -6 < 0$; a segunda, de uma função crescente, pois $a = 1 > 0$; a terceira, de uma função constante, pois $a = 0$.

2. **=SE(A1<0;2*A1+4;SE(A1>=0;-1*A1+4)**

3. Resposta pessoal.

Enem e vestibulares

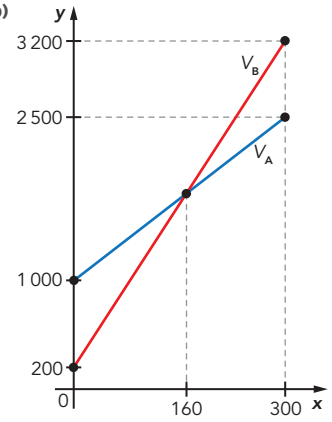
1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **b**.
3. Alternativa **a**.
4. Alternativa **a**.
5. Alternativa **b**.
6. Alternativa **d**.
7. Alternativa **d**.
8. Alternativa **e**.
9. Alternativa **c**.
10. Alternativa **a**.
11. Alternativa **a**.
12. Alternativa **d**.

13. a) 40 000 L

b) 20 h

14. a) 160 pessoas.

b)



Banco de imagens/Arquivo da editora

O salão escolhido deve ser o **A**, pois, a partir de 160 pessoas, o gráfico do valor pago V_A está abaixo do valor pago em V_B.

Unidade 2

Abertura

- $x = 0$
- 2 m

Capítulo 1

Situação-problema

a) **Receita em função do desconto no preço do bolo**

Desconto (em R$)	Preço do bolo (em R$)	Quantidade de bolos vendidos	Receita (em R$)
0,00	60,00	12 + 0 = 12	12 · 60 = 720,00
5,00	55,00	12 + 2 = 14	14 · 55 = 770,00
10,00	50,00	12 + 4 = 16	16 · 50 = 800,00
15,00	45,00	12 + 6 = 18	18 · 45 = 810,00
20,00	40,00	12 + 8 = 20	20 · 40 = 800,00
$5x$	$60 - 5x$	$12 + 2x$	$(12 + 2x) \cdot (60 - 5x) = -10x^2 + 60x + 720$

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Até um desconto de R$ 15,00, conforme o desconto aumenta, a receita também aumenta. A partir de R$ 15,00, quanto mais o desconto aumenta, mais a receita diminui.

c) Sim; R$ 810,00.

d) $-10x^2 + 60x + 720$

Atividades

1. Resposta pessoal.

2. As funções dos itens **a** e **d**.

3. a) Para $t \in \mathbb{R}$ e $t \neq 0$, pois em toda função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, são necessários a, b e c reais e $a \neq 0$ para que a função seja quadrática.

b) Para $t = 2$, para que seja uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

4. a) $a = 2$, $b = 0$ e $c = 0$.

b) $a = 2$, $b = -12$ e $c = 23$.

c) $a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$.

5. a) $f(0) = 0$; $f(1) = -2$; $f(2) = -8$; $f(3) = -18$; $f(4) = -32$; $f(5) = -50$.

b) $f(0) = 0$; $f(1) = -2$; $f(2) = 2$; $f(3) = 12$; $f(4) = 28$; $f(5) = 50$.

6. a) $A(10) = 100$; $A(1{,}5) = 2{,}25$; $A\left(2\sqrt{3}\right) = 12$.

b) $\ell = 16$

7. 15 watts

8. a) $f(x) = \frac{x^2}{2} + 4x + 6$

b) $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$ e $c = 6$.

c) Não é possível, pois não se sabe o valor de x.

9. a) **1º passo**: $\frac{1}{2}$
2º passo: $\frac{1}{4}$
3º passo: $\frac{25}{4}$
4º passo: $\frac{5}{2}$
5º passo: 2
6º passo: 2
7º passo: $2^2 + 2 = 6$

b) $x = 7$

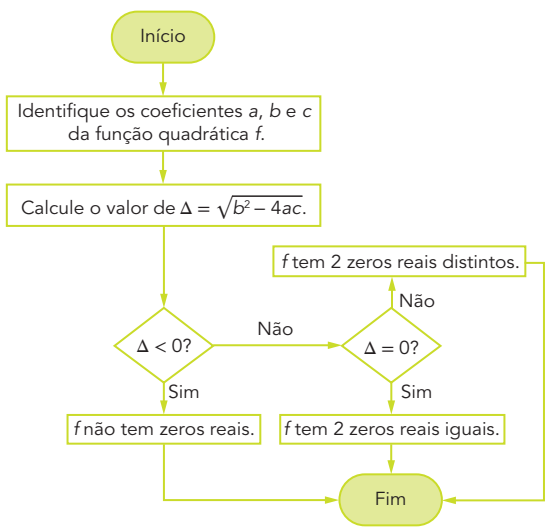
10. a) 3 e 0.
b) Não tem zeros reais.
c) −2 e 4.
d) −5
e) 4
f) Não tem zeros reais.

11. 18 estudantes.

12. a) Identificar os valores dos coeficientes a, b e c da função quadrática f. Calcular o valor de Δ.

b) Sim. Perguntas: "$\Delta < 0$?" e "$\Delta = 0$?"; as respostas possíveis são "sim" e "não" em ambos os casos.

c)



WYM Design/Arquivo da editora

13. a) $(x - 1)^2 - 1 = 0$

b) $(x + 3)^2 - 25 = 0$

14. a) −1 e 5.
b) −3 e 1.

15. a) −3 e −7.
b) 3 e −1.

16. Alternativa **d**.

17. a) Não é possível definir.

b) $c = -16$

c) $f(x) = x^2 + 6x - 16$; $x^2 = -8$.

18. 10

19. $\frac{13}{12}$

20. a) Resposta pessoal; $L(d) = -d^2 + 30d - 144$.

b) 6 e 24 de setembro.

c) No dia 5, pois é o único dia entre os citados em que a empresa teve prejuízo.

d) Resposta pessoal.

21. Alternativa **d**.

22. 4 amigos.

Explore para descobrir (p. 109)

1. a) Nenhuma.

b) 2 diagonais.

c) 5 diagonais.

d) 9 diagonais.

2. a) Nenhuma.

b) 1 diagonal.

c) 2 diagonais.

d) 3 diagonais.

e) $(n - 3)$ diagonais.

3. Não; resposta pessoal; $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$.

4. $d(3) = 0$, $d(4) = 2$, $d(5) = 5$ e $d(6) = 9$.

Reflita (p. 109)

É necessário que $n \geqslant 3$, pois é preciso ao menos 3 lados para formar um polígono.

Reflita (p. 110)

Devido ao expoente 2 do x, ou seja, x está elevado ao quadrado.

Reflita (p. 110)

Porque não podem ser escritas na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

Reflita (p. 111)

Sim.

Conexões (p. 112)

1. Função quadrática ou função polinomial do 2º grau.

2. 242 W e 968 W, respectivamente.

3. Resposta pessoal.

4. Resposta pessoal.

Tecnologias digitais (p. 124)

1. Porque $\Delta < 0$.

2. $c = 7$

3. Uma das soluções (ou x_1, ou x_2) é zero.

4. Resposta pessoal.

Capítulo 2

Situações-problema

1. a) 1 m

b) 0 e 2.

c) Resposta pessoal.

2. a) 1,5 m

b) (1,5; 1)

c) (0; 0), (3; 0).

d) 0 e 3.

Atividades

1. a) É diretamente proporcional.

b) Não é diretamente proporcional.

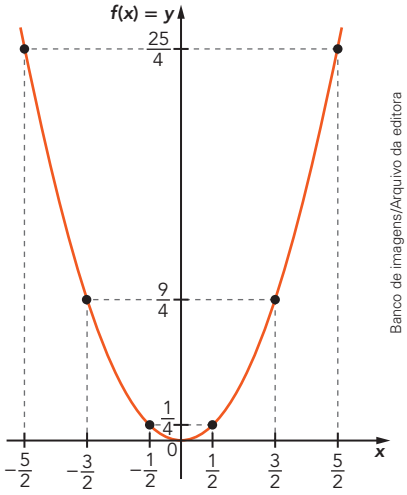
c) É diretamente proporcional.

d) Não é diretamente proporcional.

e) É diretamente proporcional.

f) Não é diretamente proporcional.

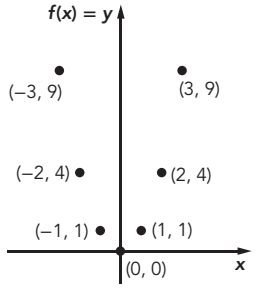
2.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{2}$ e $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$; sim.

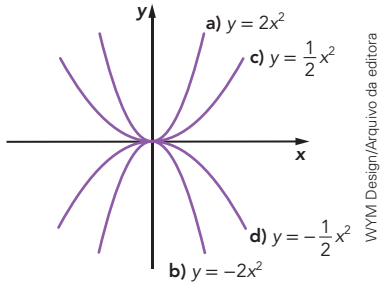
3.



Banco de imagens/Arquivo da editora

4. Resposta pessoal.

5.



WYM Design/Arquivo da editora

6. a) Resposta pessoal.

b) O gráfico pode ser uma parábola com concavidade virada para cima e vértice na origem; resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

d) Sim; $f(x) = 3x^2$.

7. Alternativas **a** e **c**.

8. $m = -\frac{1}{2}$

9. a) Eixo x: (5, 0) e (6, 0); eixo y: (0, 30).

b) Eixo x: (3, 0) e (−7, 0); eixo y: (0, −21).

c) Eixo x: (6, 0) e (−6, 0); eixo y: (0, −36).

d) Eixo x: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$; eixo y: (0, 1).

10. a) $a < 0$, $\Delta > 0$.

b) $a > 0$, $\Delta > 0$.

c) $a > 0$, $\Delta < 0$.

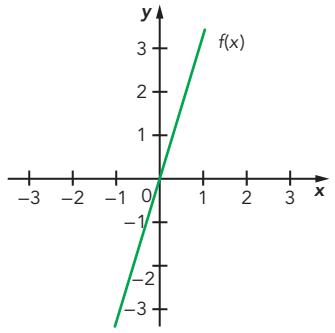
d) $a < 0$, $\Delta = 0$.

e) $a < 0$, $\Delta < 0$.

f) $a > 0$, $\Delta = 0$.

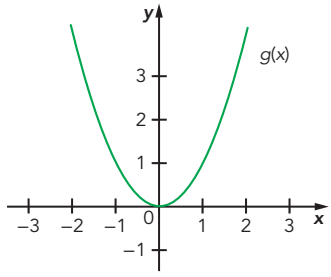
11. $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

12. a) $f(x) = 4x$; essa é uma função afim.



WYM Design/Arquivo da editora

b) $g(x) = x^2$; essa é uma função quadrática.



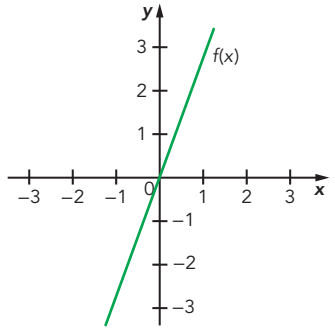
WYM Design/Arquivo da editora

c) Dobrando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é dobrada e a medida de área é quadruplicada; triplicando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é triplicada e a medida de área é multiplicada por 9; resposta pessoal.

d) Multiplicando por n a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é multiplicada por n e a medida de área é multiplicada por n^2.

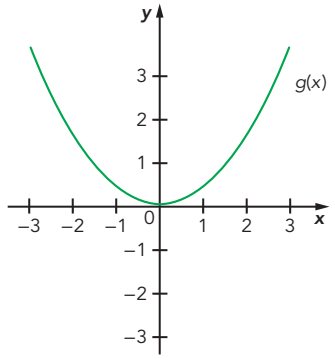
e) Para o terreno em formato de triângulo equilátero:

Item **a**: $f(x) = 3x$; essa é uma função afim.



WYM Design/Arquivo da editora

Item **b**: $g(x) = \frac{x^2 3\sqrt{3}}{4}$; essa é uma função quadrática.



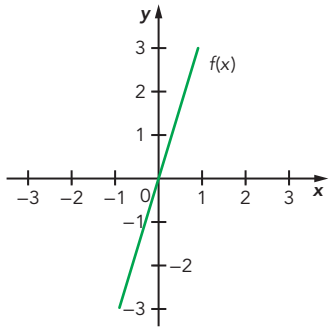
WYM Design/Arquivo da editora

Item **c**: Dobrando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é dobrada e a medida de área é quadruplicada. Triplicando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é triplicada e a medida de área é multiplicada por 9.

Item **d**: Multiplicando por n a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é multiplicada por n e a medida de área é multiplicada por n^2.

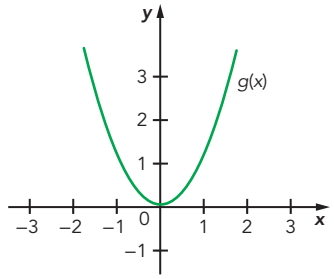
f) Para o terreno em formato de hexágono regular:

Item **a**: $f(x) = 6x$; essa é uma função afim.



WYM Design/Arquivo da editora

Item **b**: $g(x) = \frac{x^2 3\sqrt{3}}{2}$; essa é uma função quadrática.



WYM Design/Arquivo da editora

Item **c**: Dobrando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é dobrada e a medida de área é quadruplicada.

Triplicando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é triplicada e a medida de área é multiplicada por 9.

Item **d**: Multiplicando por n a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é multiplicada por n e a medida de área é multiplicada por n^2.

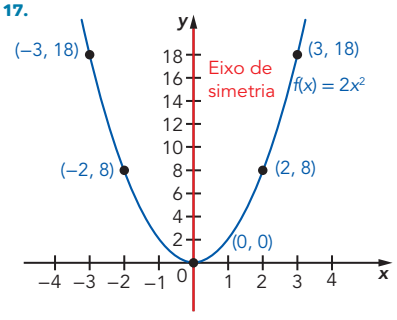
13. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.
c) Não. Resposta pessoal.
d) Sim; $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

14. a) $V(0, 1)$
b) $V(0, 2)$
c) $V(0, -1)$
d) $V(0, -1)$

15. Valor mínimo: $f(x) \to 1$, $h(x) \to -1$, $j(x) \to -1$; valor máximo: $g(x) \to 2$.

16. Respostas pessoais.

17.



WYM Design/Arquivo da editora

$f(x) = 2x^2$

18. a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$
b) $f(x) = x^2 + 2$
c) $f(x) = -x^2 + 4x$

19. 1 s

20. a) 40 unidades.
b) R$ 1.400,00
c) Como o custo passa a ser R$ 300,00 mais barato com o novo fornecedor, vale a pena trocar.
d) Resposta pessoal.

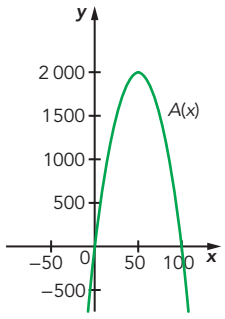
21. a) 2 s
b) 10 m
c) Aproximadamente 310 s.

22. 15 passageiros.

23. Alternativa **c**.

24. a) 2 min e 6 min.
b) 4 min
c) −4 °C
d) 32 °C

25. a) $A(x) = 100x - x^2$
b) 50 m e 50 m.
c)



WYM Design/Arquivo da editora

26. 32 m²

27. R$ 12,00

Explore para descobrir (p. 129)

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

Reflita (p. 134)

Resposta pessoal.

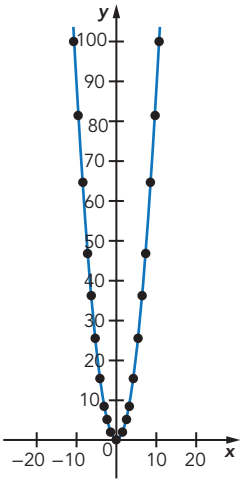
Explore para descobrir (p. 135)

1.

x	$f(x)$
−10	100
−9	81
−8	64
−7	49
−6	36
−5	25
−4	16
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

a) São iguais, $y = 4$.
b) São iguais, $y = 49$.

2. Os pontos da parábola são simétricos em relação ao eixo y.



Banco de imagens/Arquivo da editora

3. a) O valor de y é multiplicado por 4.
b) O valor de y é multiplicado por 9.
c) O valor de y é multiplicado por n^2.

4. a) Resposta pessoal.
b) $f(x) = f(-x)$

Reflita (p. 136)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 140)

Porque para ser uma função ela precisa ter 1 único valor de y para cada x do domínio e o domínio da função quadrática é $\mathbb{R}$.

Reflita (p. 140)

A curva intersecta o eixo y quando $x = 0$. Assim, temos: $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$.

Atividades resolvidas – Ampliando a atividade (p. 149)

13,5 m

Tecnologias digitais (p. 130)

1. Resposta pessoal. Os pontos A e B são a intersecção do gráfico com o eixo x.
2. a) A função decresce para $x < 3$.
b) A função cresce para $x > 3$.
3. Respostas pessoais.
4. Resposta pessoal.
5. Resposta pessoal.
6. Resposta pessoal.
7. Resposta pessoal.
8. $\Delta = 0$ sempre que $b^2 - 4ac = 0$.
9. Resposta pessoal.

Enem e vestibulares

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **d**.
3. Alternativa **c**.
4. Alternativa **a**.
5. Alternativa **a**.
6. Alternativa **e**.
7. Alternativa **a**.
8. Alternativa **a**.
9. a) 200
b) R$ 19.200,00

Unidade 3

Abertura

- Resposta pessoal.
- Os antibióticos impedem o crescimento de uma população bacteriana e podem cessar a infecção.

Capítulo 1

Situações-problema

1. a) Aproximadamente 3 000 000 km ou $3 \cdot 10^6$ km; aproximadamente 18 000 000 km, ou $18 \cdot 10^6$ km, ou $1{,}8 \cdot 10^7$ km.

b) Aproximadamente 390 000 km.

2. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Aproximadamente 4,72 m e aproximadamente 472 cm.

Atividades

1. a) Base: 3; expoente: 4; potência: 3^4. Lemos: três elevado a quatro ou três elevado à quarta potência.

b) Dez elevado a três ou dez à terceira potência; dez elevado a seis ou dez à sexta potência; dez elevado a nove ou dez à nona potência; e dez elevado a doze ou dez à décima segunda potência.

c) $3^3 = 27$

d) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$

e) Resposta pessoal.

f) 100 000 000 000

2. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

3. a) 81 **d)** 0 **g)** $7\sqrt{7}$

b) -8 **e)** 1 **h)** $\frac{1}{36}$

c) 64 **f)** 2 **i)** $-\frac{2}{3}$

4. a) 1 000 000 000 **b)** 0,0001

5. a) 10^5 **b)** 10^{-5}

6. a) 7^6 **c)** 2^{15} **e)** a^5

b) 5^7 **d)** 5^8 **f)** 2^{12}

7. Alternativa **b**.

8. a) $5 \cdot 10^2$ **c)** $2{,}039 \cdot 10^1$

b) $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ **d)** $8 \cdot 10^{-1}$

9. a) 80 000 **c)** 352 000

b) 0,05 **d)** 0,0016

10. a) Aproximadamente $2{,}279 \cdot 10^8$ km.

b) Aproximadamente $7{,}783 \cdot 10^8$ km.

c) Aproximadamente $9{,}11 \cdot 10^{-28}$ g.

11. Alternativa **d**.

12. a) Aproximadamente $5 \cdot 10^{-6}$ m.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

13. 0,5 km; 2 000 000 000 m.

14. Aproximadamente $5{,}3 \cdot 10^{14}$ L.

15. Aproximadamente 37,5% maior.

16. Resposta pessoal.

17. a) 2 algarismos significativos.

b) 2 algarismos significativos.

c) 3 algarismos significativos.

d) 3 algarismos significativos.

18. $(15{,}8 \pm 0{,}5)$ cm, sendo o algarismo 8 o duvidoso.

19. a) Falsa, pois $\sqrt{x^2} = x$, se $x \geqslant 0$ e $\sqrt{x^2} = -x$, se $x < 0$, considerando que $x^2 = |x|$.

b) Verdadeira, pois $\sqrt{x^2} = x$, se $x > 0$.

c) Verdadeira, pois $\sqrt{(-5^2)} = \sqrt{25} = 5$.

d) Falsa, pois $\sqrt{-5^2} = \sqrt{-25} \notin \mathbb{R}$.

20. Respostas pessoais.

21. Respostas pessoais.

22. Respostas pessoais.

Reflita (p. 164)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 164)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 165)

Porque não existe divisão por 0.

Reflita (p. 166)

Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 173)

1. a) 10; 100; 10.

b) 9; 4; 12; 144; 12.

c) 1; 7; 7; 1; 7.

d) 16; 5; 20; 16; 400.

2. Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 176)

1. a) 4 e 4. **c)** 8 e 8. **e)** 2 e 2.

b) 9 e 9. **d)** 2 e 2. **f)** 2 e 2.

2. Resposta pessoal.

Reflita (p. 177)

Resposta pessoal.

Conexões (p. 179)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

Capítulo 2

Situação-problema

a) 5 mg

b) 4 h

c) A concentração reduz à metade a cada hora, que é a meia-vida do medicamento; resposta pessoal.

Atividades

1. Alternativas **a**, **b** e **d**.

2. a) 1 **c)** $\frac{1}{4}$ **e)** $\frac{1}{2}$

b) 64 **d)** 2 **f)** 0

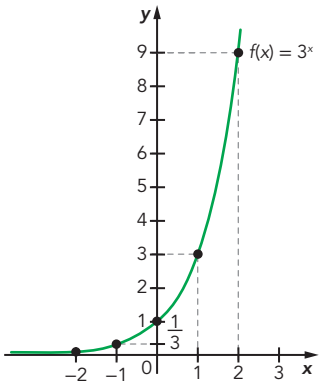
3. Alternativa **e**.

4. a) Lei de formação: $f(x) = 2^x$.
$D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) =]0, +\infty[$.
Função crescente.

b) Lei de formação: $f(x) = (0{,}7)^x$.
$D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) =]0, +\infty[$.
Função decrescente.

5. a)

$f(x) = y = 3^x$	x
$\frac{1}{9}$	-2
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2

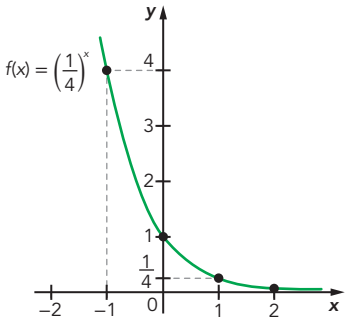


WYM Design/Arquivo da editora

$D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) =]0, +\infty[$.

b)

$f(x) = y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	x
16	-2
4	-1
1	0
$\frac{1}{4}$	1
$\frac{1}{16}$	2



WYM Design/Arquivo da editora

$D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) =]0, +\infty[$.

6. a) $f(0) = 1$; $f(1) = 3$.

b) O valor de $f(0)$ continuaria sendo 1, mas o valor de $f(1)$ seria 4.

c) O valor de $f(0)$ também continuaria sendo 1, mas o valor de $f(1)$ seria 0,3.

7. a) Crescente, pois $\pi > 1$.

b) Decrescente, pois $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

c) Crescente, pois $\sqrt{3} > 1$.

d) Decrescente, pois $0 < 0{,}01 < 1$.

e) Decrescente, pois $0 < \frac{1}{5} < 1$.

f) Decrescente, pois $f(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $0 < \frac{1}{2} < 1$.

8. Respostas pessoais.

9. a) $f(x) = (0{,}9)^x$, que é decrescente; então para $8 > 5$, temos $(0{,}9)^8 < (0{,}9)^5$.

b) $f(x) = 47^x$, que é crescente; então para $5 > 3$, temos $47^5 > 47^3$.

c) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x$, que é decrescente; então para $9 > 8$, temos $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^9 < \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^8$.

d) $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$, que é crescente; então, para $\sqrt{5} > 2$, temos $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{5}} > \left(\sqrt{3}\right)^2$.

10. a) R$ 1.215,00

b) Entregar o *smartphone* na loja onde ele deseja comprar um novo; justificativa pessoal.

11. Alternativa **d**.

12. 40 min

13. Alternativa **d**.

14. 300 dias.

15. a) 10 meses.

b) Não é possível responder a essa pergunta, pois faltam dados (a quantidade inicial Q_0 de água do reservatório).

16. Resposta pessoal.

17. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

18. a) 18 **d)** -1 **g)** $\frac{2}{3}$

b) 23 **e)** $\frac{1}{25}$ **h)** 1

c) 1 **f)** 5

19. a) $f(x) = 2 \cdot 3^x$; $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; a função é crescente no domínio.

b) $f(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; a função é decrescente no domínio.

20. Resposta pessoal.

21. Alternativa **a**.

22. Resposta pessoal.

23. a) $f(t) = 2000 \cdot (0{,}75)^t$

b) Após 2 anos: R$ 1.125,00; após 3 anos: R$ 843,75.

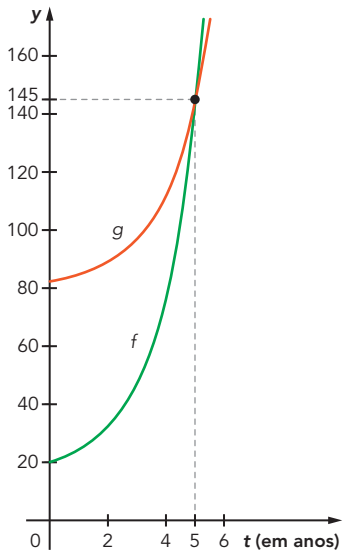
c) Ela terá economizado R$ 1.200,00 em 2 anos e R$ 1.800,00 em 3 anos.

d) 2ª opção.

24. a) 21 marrecos-de-pequim e 83 marrecos-corredores-indianos.

b) 5 anos.

c)



WYM Design/Arquivo da editora

Reflita (p. 187)

O decrescimento é acelerado enquanto x é negativo e, conforme x cresce, o decrescimento dos valores da função se torna cada vez mais lento.

Explore para descobrir (p. 190)

a) R$ 10.200,00; R$ 10.404,00.

b) Aproximadamente R$ 11.262,00.

c) $M = 10000 \cdot (1{,}02)^t$

Explore para descobrir (p. 197)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Respostas pessoais.

4. Respostas pessoais.

5. Resposta pessoal.

Atividades resolvidas – Ampliando a atividade (p. 202)

2 meses.

Tecnologias digitais (p. 183)

1. Respostas pessoais.

2. Resposta pessoal.

Tecnologias digitais (p. 196)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

4. Resposta pessoal.

5. Resposta pessoal.

6. a) Crescente; ($b > 0$ e $a > 0$).

b) Decrescente; ($b > 0$ e $0 < a < 1$).

c) Decrescente; ($b < 0$ e $a > 0$).

d) Decrescente; ($b > 0$ e $0 < a < 1$).

Conexões (p. 198)

1. Após 8 semanas.

2. 19 531 250 novos investidores.

3. Resposta pessoal.

Enem e vestibulares

1. Alternativa **d**.

2. Alternativa **a**.

3. Alternativa **e**.

4. Alternativa **c**.

5. Alternativa **c**.

6. Alternativa **d**.

7. Alternativa **b**.

8. Alternativa **c**.

9. Alternativa **e**.

10. Alternativa **d**.

11. Alternativa **d**.

12. Alternativa **e**.

13. $k = 45$; 10 h.

14. 96 infectados.

Unidade 4

Abertura

- Brasil, Argentina, Peru, Colômbia e Bolívia.
- Resposta pessoal.

Capítulo 1

Situação-problema

a) 10: base; 100: logaritmando; 2: valor do logaritmo.

b) Resposta pessoal.

c) O valor é 5, pois $10^5 = 100000$.

d) O valor é 4, pois $2^4 = 16$.

Atividades

1. a) 3

b) 3

c) 4

d) −5

e) −2

f) −1

g) $\frac{3}{2}$

h) $\frac{5}{4}$

i) −2

2. a) $a = 2$

b) $a = 3$

c) $a^0 = 1, \forall\, a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

d) $a = \frac{1}{4}$

3. a) $x = 6$

b) $x = \sqrt[3]{126}$

c) $x = 25$

d) $x = 1$

4. a) Falso, pois $5^1 \neq 1$.

b) Falso. Pela definição, a base não pode ser igual a 1.

c) Verdadeiro, pois $5^1 = 5$.

d) Verdadeiro, pois $5^0 = 1$.

e) Falso, pois $7^3 \neq 3^7$.

f) Verdadeiro, pois $3^7 = 3^7$.

g) Verdadeiro, pois atende à propriedade $a^{\log_a N} = N$.

h) Falso, pois, de acordo com a propriedade $\log_a (a^n) = n$, temos que: $\log_2 \left(2^{\log_2 2}\right) = \log_2 5 \Rightarrow \log_5 2 \neq \log_2 5$.

5. a) 3

b) 5

c) 10

d) 7

e) 6

f) 500

6. a) 10^{-2} mol/L; $10^{-4,5}$ mol/L; o limão é o mais ácido.

b) Soda cáustica; água sanitária; a água sanitária é a mais alcalina.

c) Água da torneira, leite, água da chuva e tomate.

7. a) Aproximadamente 0,8.

b) Aproximadamente 1.

c) Aproximadamente 0,2.

d) Aproximadamente 1,4.

e) Aproximadamente 2,2.

f) Aproximadamente 0,7.

8. Aproximadamente 5,1 ms; aproximadamente 6,7 ms.

9. Aproximadamente 20 anos.

10. a) Aproximadamente 4,7.

b) Aproximadamente 4,3.

c) Aproximadamente 6,7.

11. Alternativa **d**.

12. Aproximadamente 9,6 anos.

13. Resposta pessoal.

14. a) Aproximadamente 0,22.

b) Aproximadamente 9,96.

c) Aproximadamente 5,29.

15. Aproximadamente 4,347.

16. Aproximadamente 5 anos e meio.

17. Aproximadamente 25,5 anos.

18. a) 18 meses.

b) 26 meses.

19. a) Aproximadamente 2 meses.

b) Respostas pessoais.

20. Aproximadamente 10 anos.

21. Alternativa **b**.

22. Aproximadamente 29 anos.

23. Resposta pessoal.

24. Aproximadamente 16 minutos e 44 segundos.

25. Aproximadamente 17 anos.

26. Resposta pessoal.

Reflita (p. 212)

Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 213)

1. a) $x = 2$

b) $x = 3$

c) Com os conhecimentos estudados até aqui, não é possível resolver a equação.

2. Resposta pessoal.

3. x está entre 2 e 3; x está mais perto de 2 do que de 3.

Reflita (p. 214)

a) $2^2 = 4 \Leftrightarrow \log_2 4 = 2$

b) $10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$

Reflita (p. 214)

Se fosse possível aplicar a definição, obteríamos as seguintes potenciações, que não existem:
$\log_3 (-81) = x \Leftrightarrow 3^x = -81$; $\log_{10} 0 = x \Leftrightarrow 10^x = 0$; $\log_0 3 = x \Leftrightarrow 0^x = 3$; $\log_{-2} 8 = x \Leftrightarrow (-2)^x = 8$; $\log_1 6 = x \Leftrightarrow 1^x = 6$.

Explore para descobrir (p. 217)

1. a) 7 e 7.

b) 6 e 6.

c) 3 e 3.

d) 1 e 1.

e) 6 e 6.

f) 6 e 6.

g) 3 e 3.

h) 2 e 2.

2. Resposta pessoal.

Reflita (p. 219)

Temos que $r = \log_a b$, a e b são números reais positivos e $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Então $a^r \neq 1 \Rightarrow r \neq 0$.

Capítulo 2: A função logarítmica

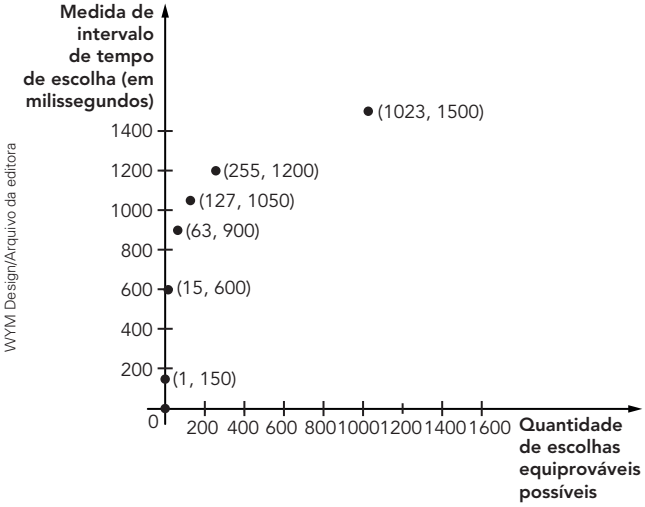
Situações-problema

1. a) A medida de energia liberada fica multiplicada por 1000.

b) Por 1000, por 1000 000 e por 1000 000 000, respectivamente.

c) Resposta pessoal.

2. a)



WYM Design/Arquivo da editora

b) Resposta pessoal.

Atividades

1. a) $f(9) = 2$
b) $g(4) = 1$
c) $D(f) = \mathbb{R}_+^*$
d) $Im(f) = \mathbb{R}$
e) $x = 256$
f) $f^{-1}(x) = 3^x$
g) $g^{-1}(x) = 4^x$
h) $f^{-1}(1) = 3$
i) $g(f(81)) = 1$

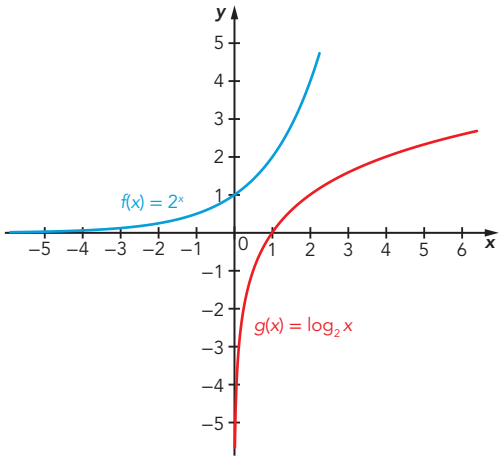
2. a) 1
b) 5
c) 1
d) 2
e) 4
f) 0

3. a) R$ 1.000,00
b) No sétimo ano.
c) R$ 2.000,00 e no quarto ano, respectivamente.

4. Alternativa **c**.

5. a) Sim, pois, para os valores apresentados, temos que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$.

b)



Banco de imagens/Arquivo da editora

c) Resposta pessoal.

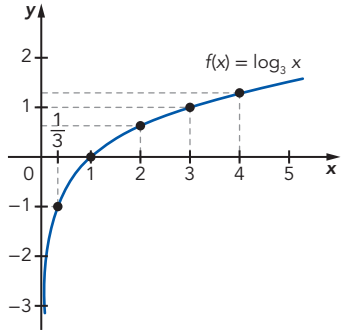
d) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; $D(g) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(g) = \mathbb{R}$.
Resposta pessoal.

6. a) Lei de formação: $f(x) = \log_2 x$; $D(f) = \mathbb{R}_+^*$; $CD(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$; função crescente.

b) Lei de formação: $f(x) = \log_{0,2} x$; $D(f) = \mathbb{R}_+^*$; $CD(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$; função decrescente.

7. a)

$y = \log_3 x$	x
–2	$\frac{1}{9}$
–1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3

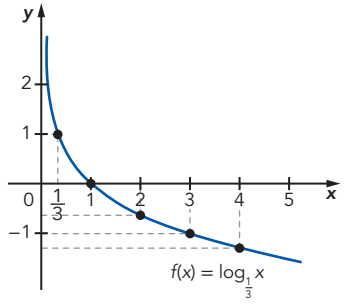


WYM Design/Arquivo da editora

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(f) = \mathbb{R}$; a função é crescente.

b)

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	x
2	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{3}$
0	1
–1	3



WYM Design/Arquivo da editora

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(f) = \mathbb{R}$; a função é decrescente.

8. a) Analisando o gráfico, temos: $f(1) = 0$; $x = \frac{1}{3}$.

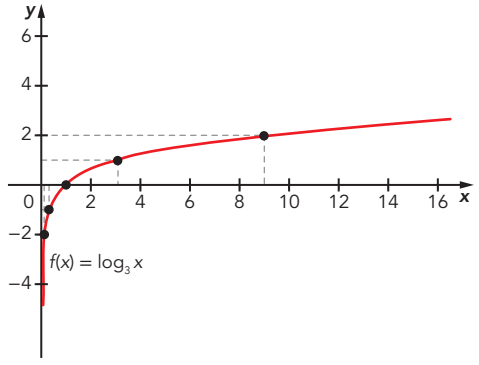
b) O valor de $f(1)$ continuaria sendo 0, mas o valor de x seria 4.

c) O valor de $f(1)$ também continuaria sendo 0, mas o valor de x seria $\frac{1}{4}$.

9. a)

x	$y = f(x) = \log_3 x$
$\frac{1}{9}$	–2
$\frac{1}{3}$	–1
1	0
3	1
9	2

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$, $CD(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}$.



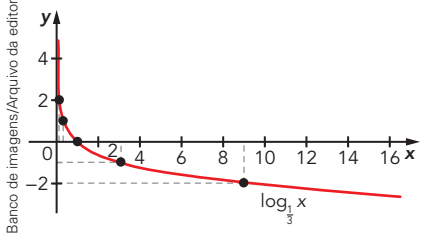
Banco de imagens/Arquivo da editora

b)

x	$y = f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$
9	-2
3	-1
$\frac{1}{3}$	1
$\frac{1}{9}$	2
1	0

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$, $CD(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora



10. Respostas pessoais.

11. a) A função exponencial f tem domínio $\mathbb{R}$ e conjunto imagem $\mathbb{R}_+^*$ e a função logarítmica f^{-1} tem domínio $\mathbb{R}_+^*$ e conjunto imagem $\mathbb{R}$.

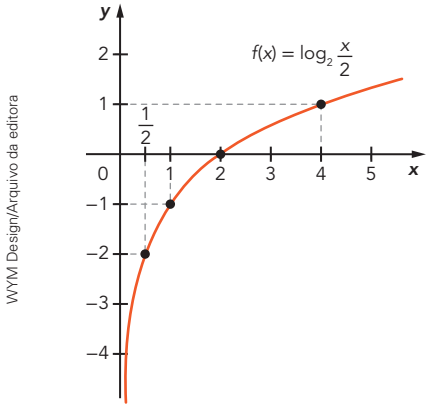
b) Quando $a > 1$, ambas as funções são crescentes e, quando $0 < a < 1$, ambas as funções são decrescentes.

12. $a = 1$ e $b = 1$.

13. a)

$y = \log_2 \frac{x}{2}$	x
-2	$\frac{1}{2}$
-1	1
0	2
1	4
2	8

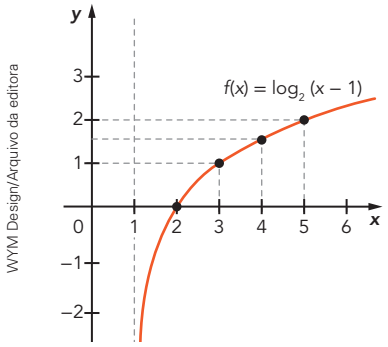
WYM Design/Arquivo da editora



b)

x	$y = \log_2 (x - 1)$
$\frac{5}{4}$	-2
$\frac{3}{2}$	-1
2	0
3	1
8	2

WYM Design/Arquivo da editora



14. a) Aproximadamente 659 ms.

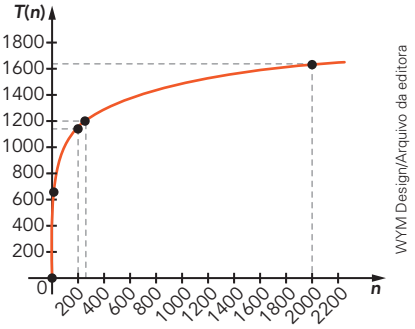
b) Aproximadamente 1148 ms; aproximadamente 1645 ms.

c) Resposta pessoal.

d) 255 opções.

e)

WYM Design/Arquivo da editora



15. 7,5 anos.

16. 17 funcionários.

17. a) Resposta pessoal.

b) Antes.

c) 3 anos.

d) Resposta pessoal.

e) Resposta pessoal.

18. 32 jogadas.

19. Não é possível resolver esta atividade, pois faltam dados (medida de magnitude do terremoto).

20. Resposta pessoal.

21. 10^{-10} W/m²

22. Alternativa **d**.

23. Resposta pessoal.

Reflita (p. 236)

Nesse caso, para $x > 1$, temos que os valores da função são negativos ($f(x) < 0$); e para $0 < x < 1$, temos que os valores da função são positivos ($f(x) > 0$).

Atividades resolvidas – Ampliando a atividade (p. 237)

10^6

Tecnologias digitais (p. 230)

1. Respostas pessoais.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

4. Respostas pessoais.

Enem e vestibulares

1. Alternativa **e**.

2. Alternativa **b**.

3. Alternativa **e**.

4. Alternativa **a**.

5. Alternativa **e**.

6. Alternativa **b**.

7. Alternativa **e**.

8. Alternativa **b**.

9. Alternativa **c**.

10. Alternativa **e**.

11. a) $5 \cdot 10^4$

b) 6 s

12. a) 10 000 vezes.

b) Aproximadamente 2,14.

Unidade 5

Abertura

- Resposta pessoal.
- Resposta pessoal.

Capítulo 1

Situação-problema

a) Resposta pessoal.

b) Repetir os 5 *emojis* que representam o usuário.

c) Resposta pessoal.

Atividades

1. (5, 8, 11, 14)

2. a) (−2, −2, 2, 2, −2)

b) (1, 5, 13, 29, 61)

3. a) Resposta pessoal. São sempre os mesmos, pois 6, 8 e 12 são divisores de 24 (24 horas = 1 dia).

b) (6:00, 14:00, 22:00, 6:00, 14:00, 22:00, 6:00, 14:00, 22:00, 6:00, 14:00, 22:00), totalizando 15 comprimidos.

c) 28 comprimidos.

4. a) (7, 14, 21, 28, ...)

b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}\right)$

5. a) Porque os termos dela são quadrados perfeitos, ou seja, têm raiz quadrada exata. Além disso, a quantidade de pontos correspondente pode ser disposta de modo a formar um quadrado.

b) Fórmula do termo geral: $a_n = n^2$, com $n \geqslant 1$; função: $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = n^2$.

c) (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...)

6. a) Porque a quantidade de pontos correspondente pode ser disposta de modo a formar um triângulo.

b) Função: $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

c) (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...)

7. a)

Quantidade de triângulos	Quantidade de palitos
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
⋮	⋮
n	$2n + 1$

b) $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = 2n + 1$.

c) $f(20) = 2 \cdot 20 + 1 = 41$

d) 30 triângulos.

8. Respostas pessoais.

Reflita (p. 253)

- Sequência dos dias da semana: sexta-feira.
- Sequência dos meses do ano: junho.
- Sequência dos números naturais: 5.
- Sequência das potências de 2 com expoente natural: 32.

Reflita (p. 255)

$f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n = 2n - 1$.

Reflita (p. 255)

- (C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (C, K, K), (K, C, C), (K, C, K), (K, K, C) e (K, K, K).
- $\frac{1}{2}$

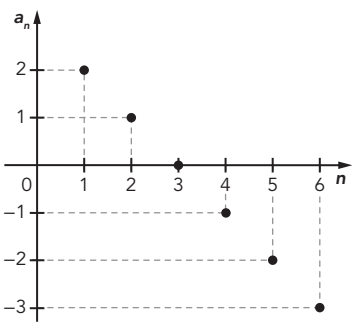
Capítulo 2

Situações-problema

1. a) Sempre 0,6 s.
b) (0,6; 0,6; 0,6; 0,6; 0,6). Todos os termos são iguais a 0,6.
c) Constante e igual a 0.
2. a) 118 termos; resposta pessoal.
b) 19; esse elemento químico é o potássio, muito presente, por exemplo, em algumas hortaliças e em algumas frutas.
c) 26; resposta pessoal.

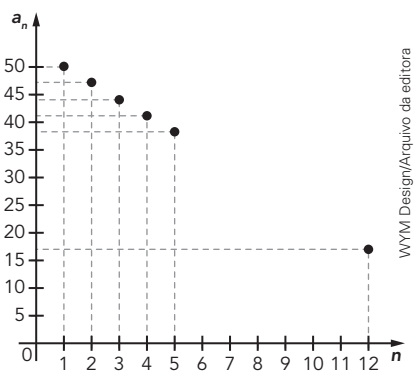
Atividades

1. a) É PA; $r = 3$.
b) É PA; $r = -5$.
c) Não é PA.
2. a) PA (7, 11, 15, 19, 23)
b) PA (−6, 2, 10,18)
3. 62
4. a) $a_1 = 3$ **b)** $a_1 = 15$
5. $r = 4$
6. 8º termo.
7. 40
8. 555 números inteiros.
9. Alternativa **c**.
10. 200 máquinas.
11. 16 vezes.
12. Após 60 dias.
13. Resposta pessoal.
14. (1, 8, 15) ou (15, 8, 1).
15. Resposta pessoal.
16. $x = 3$, $r = 4$.
17. 71 suportes.
18. 29 pessoas.
19. Resposta pessoal.
20. a) 109 alertas.
b) Menor do que na situação inicial.
c) Resposta pessoal.
21. a) 58,25 gramas por dia.
b) Respostas pessoais.
22. a) 167 bueiros.
b) Resposta pessoal.
23. Resposta pessoal.
24. a) $a_4 = 13$ e $a_5 = -9$.
b) 527 vezes.
25.



WYM Design/Arquivo da editora

Os pontos estão alinhados de maneira que todos eles pertencem à mesma reta.
26. (0,5; 0; −0,5; −1; −1,5; −2; −2,5; ...)
27. a) $a_1 = 47$, $r = -3$ e $n = 12$; f: {1, 2, 3, 4, 5, ..., 12} → ℝ tal que $f(x) = -3x + 53$.
b)



WYM Design/Arquivo da editora

28. $a_n = n + 4$, com $n \geqslant 1$.
29. 51
30. 38
31. Resposta pessoal.
32. 70 km
33. Resposta pessoal.
34. 60° e 80°.
35. a) a_7 e a_{14}.
b) A soma dos índices de termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos índices dos termos extremos $(1 + n)$.
36. Resposta pessoal.
37. Resposta pessoal.
38. a) Na 1ª opção: R$ 1.860,00; na 2ª opção, R$ 2.400,00.
b) Na 1ª opção; 22 meses.
c) Resposta pessoal.
39. Resposta pessoal.

Reflita (p. 260)

Na situação-problema **1**, a diferença entre pares de termos consecutivos é 0, ou seja, a razão é 0. Na situação-problema **2**, a diferença é 1, ou seja, a razão é 1.

Explore para descobrir (p. 260)

a) $r = 0$; a PA do exemplo **c**.
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 261)

1. a) $a_2 = 7$; $a_3 = 11$.
b) Considerando o cálculo de a_3 no item **a**, basta substituir a_2 por $a_1 + r$.
c) 3 parcelas.
d) 7 parcelas; $(n - 1)$ parcelas.
2. a) $a_3 = a_1 + r + r = -4$; $a_4 = a_1 + r + r + r = -7$.
b) 3 parcelas.
c) 9 parcelas; $(n - 1)$ parcelas.
3. a) $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_1 + 2r$ e $a_4 = a_1 + 3r$.
b) Resposta pessoal.

Reflita (p. 261)

- Resposta pessoal.
- Para $r = 0$, temos $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 0 = a_1$ e, de fato, na PA constante todos os termos são iguais ao 1º termo.

Atividades resolvidas – Ampliando a atividade (p. 263)

a) Aproximadamente 157,3 milhões de pessoas.
b) Aproximadamente R$ 124.607.999.736,00. Aproximadamente 110,13 milhões de pessoas.
c) Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 268)

1. a) $a_n = 2n - 1$, com $n \geqslant 1$.
b) Função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n = 2n - 1$.
2. a) $a_n = -n + 3$, com $n \geqslant 1$.
b) Função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n = -n + 3$.
3. Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 269)

a) 120
b) Resposta pessoal.
c) Respostas pessoais.

Explore para descobrir (p. 270)

1. a) $(8 + 22) + (10 + 20) + (12 + 18) + (14 + 16) = 120$
b) Resposta pessoal.
2. a) 12 termos.
b) 6 parcelas. É a metade da quantidade de termos da PA.
c) 624
d) Respostas pessoais.

Reflita (p. 271)

Resposta pessoal.

Capítulo 3: Progressão geométrica

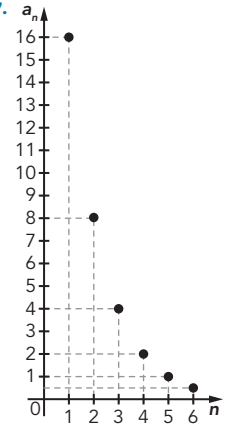
Situação-problema

a) Não.
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.
d) Resposta pessoal.
e) 512 000 e 1024 000 habitantes, respectivamente.
f) Entre as décadas de 2070 e 2080.

Atividades

1. a) É PG; $q = 3$.
b) Não é PG.
c) É PG; $q = \frac{1}{2}$.
2. a) 625
b) 177 174
3. Resposta pessoal.
4. Essa sequência é uma PA de 1º termo $a_1 = 4$ e razão $r = 0$; resposta pessoal.
5. $a_6 = 96$
6. Não é possível responder a essa pergunta, pois faltam dados (o primeiro termo da PG, por exemplo).
7. (200; 220; 242; 266,2; 292,82; 322,102; ...); como cada termo da sequência a partir de 220 é dado pelo anterior multiplicado por 1,1, temos uma PG de razão $q = 1{,}1$.
8. 9 000 unidades.
9. a) 240 000 unidades.
b) 810 000 unidades.
10. 243 800 habitantes.
11. Resposta pessoal.
12. Resposta pessoal.
13. 14 ciclos.
14. Resposta pessoal.
15. 81 regiões triangulares.
16. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.

17.



WYM Design/Arquivo da editora

Os pontos estão desalinhados, de maneira que todos eles pertencem a uma curva.

18. (3, 15, 75, 375, ...)

19. **a)** 1023 **b)** 1705 **c)** 1365

20. A razão é 2.

21. 8 termos.

22. $x = \frac{63}{32}$

23. 244 140 624 visitas.

24. 18 446 744 073 709 551 615 grãos de trigo.

25. Resposta pessoal.

26. A soma é 4.

27. A soma é 9.

28. A soma é $\frac{5}{9}$.

29. A razão é $\frac{1}{2}$.

30. 60 cm

31. $\frac{7}{9}$

Reflita (p. 274)

$-12 : 6 = -2$; $24 : (-12) = -2$; $-48 : 24 = -2$ e $96 : (-48) = -2$; quociente constante $q = -2$.

Explore para descobrir (p. 275)

1. **a)** $a_2 = 6$; $a_3 = 12$.

b) Considerando o cálculo de a_3 no item **a**, basta substituir a_2 por $a_1 \cdot q$.

c) $a_4 = 24$; 3 fatores.

d) 7 fatores; $(n - 1)$ fatores.

2. **a)** $a_3 = \frac{1}{2}$; $a_4 = \frac{1}{4}$.

b) 3 fatores.

c) 9 fatores; $(n - 1)$ fatores.

3. **a)** $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$ e $a_4 = a_1 \cdot q^3$.

b) Resposta esperada: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, com $n \geqslant 1$.

Reflita (p. 275)

Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 279)

1. **a)** $a_n = 0{,}5 \cdot 2^{n-1}$, com $n \geqslant 1$.

b) Função f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n = 0{,}5 \cdot 2^{n-1}$.

2. **a)** $a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, com $n \geqslant 1$.

b) Função f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

3. Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 281)

a) 1705

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

Reflita (p. 282)

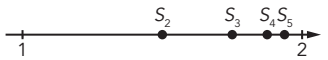
Porque $q = 1$ anularia o denominador da fração. Logo, chegaríamos a uma forma indeterminada.

Explore para descobrir (p. 289)

1. **a)** $S_2 = 1{,}5$ **c)** $S_4 = 1{,}875$

b) $S_3 = 1{,}75$ **d)** $S_5 = 1{,}9375$

e)



WYM Design/Arquivo da editora

f) Resposta pessoal.

Reflita (p. 290)

Nesse tipo de PG, cada termo, a partir do 2º termo, é maior do que o termo anterior e, assim, a soma dos infinitos termos tende ao infinito.

Conexões (p. 283)

1. 5 horas.

2. **a)** Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

3. **a)** Resposta pessoal.

b) Respostas pessoais.

Enem e vestibulares

1. Alternativa **b**.

2. Alternativa **c**.

3. Alternativa **c**.

4. Alternativa **c**.

5. Alternativa **b**.

6. Alternativa **c**.

7. Alternativa **a**.

8. Alternativa **d**.

9. **a)** 1820 **b)** 4704 **c)** 79

Lista de siglas

Acafe-SC: Associação Catarinense das Fundações Educacionais (Santa Catarina)
CPCAR-MG: Exame de Admissão ao Curso Preparatório de Cadetes do Ar (Minas Gerais)
EEAR: Escola de Especialistas de Aeronáutica
Enem: Exame Nacional do Ensino Médio
ESA: Escola de Sargentos das Armas
Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia (São Paulo)
FCMSCSP: Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo
FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
Ficsae-SP: Faculdade Israelita de Ciências da Saúde Albert Einstein (São Paulo)
Fuvest: Fundação Universitária para o Vestibular
IFSC: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina
Ucpel-RS: Universidade Católica de Pelotas (Rio Grande do Sul)
UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas
Uece: Universidade Estadual do Ceará
UEER: Universidade Estadual de Roraima
UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina (Paraná)
UEMA: Universidade Estadual do Maranhão
UEMG: Universidade Estadual de Minas Gerais
Uerj: Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFGD-MS: Universidade Federal da Grande Dourados (Mato Grosso do Sul)
UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora (Minas Gerais)
UFMS: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFPR: Universidade Federal do Paraná
UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFSC: Universidade Federal de Santa Catarina
UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria (Rio Grande do Sul)
UFT-TO: Universidade Federal do Tocantins
Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (São Paulo)
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
Unicsal: Universidade Estadual de Ciências da Saúde de Alagoas
Unifor-CE: Fundação Edson Queiroz Universidade de Fortaleza (Ceará)
Unisc: Universidade de Santa Cruz do Sul (Rio Grande do Sul)
UPE: Universidade de Pernambuco

Referências bibliográficas comentadas

Para a concepção desta coleção, diversos livros, artigos científicos, documentos oficiais do governo, revistas científicas, dissertações e *sites* foram consultados de modo a trazer materiais atualizados e que visam dar suporte às aprendizagens previstas para o Ensino Médio. Conheça as principais referências bibliográficas deste Volume.

ÁVILA, G. *Cálculo das funções de uma variável*. 7. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2003.

O autor apresenta o conceito de função, muito importante na Matemática e assunto principal deste Volume. Ele também aborda as definições de domínio, contradomínio e imagem. A obra traz construções de gráficos das funções afins e quadráticas, assuntos principais das Unidades 1 e 2 deste Volume.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

O autor apresenta e explica aspectos da História da Matemática, considerando a ordem cronológica e o local dos acontecimentos, desde a origem do conceito de número até os desenvolvimentos matemáticos do século XX. No decorrer dos capítulos, são apresentadas definições matemáticas importantes e as pessoas que trabalharam nelas. Esse livro foi utilizado como referência para dados históricos apresentados neste Volume.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://tedit.net/pot336. Acesso em: 23 ago. 2024.

Este documento, conhecido como BNCC, determina as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem adquirir no decorrer de todos os anos da Educação Básica. Essas aprendizagens estão organizadas em competências e habilidades para estudantes de todo o país. De maneira geral, todos os Volumes desta coleção foram concebidos de acordo com as orientações da BNCC.

BRASIL. Ministério da Educação. Computação: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://tedit.net/93oura. Acesso em: 23 ago. 2024.

Em 2022, a BNCC foi complementada com diretrizes específicas para incluir o ensino de Computação no currículo escolar brasileiro. Esse documento, que visa promover o desenvolvimento de habilidades associadas ao pensamento computacional e à cultura digital, foi utilizado para a elaboração de algumas das seções e atividades presentes neste Volume.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica*. Brasília, DF: MEC, 2013. Disponível em: https://tedit.net/enrd4x. Acesso em: 23 ago. 2024.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica (DCN) são um conjunto de definições de princípios, fundamentos e procedimentos da Educação Básica elaborado com o objetivo de orientar e assistir escolas e redes no desenvolvimento do projeto pedagógico. Essas diretrizes também fornecem subsídios para a elaboração de materiais didáticos e, por isso, foram consultadas e consideradas na elaboração desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: https://tedit.net/qhta9z. Acesso em: 23 ago. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: https://tedit.net/50cftq. Acesso em: 23 ago. 2024.

De acordo com a BNCC, os Temas Contemporâneos Transversais devem ser incorporados aos currículos e às propostas pedagógicas escolares, de preferência de maneira transversal e integradora. Após a homologação da BNCC, visando esclarecer a inserção desses temas, esses 2 documentos foram elaborados pelo Ministério da Educação, passando a servir de referencial para a concepção desta coleção.

COELHO, J. R. P. *O GeoGebra no ensino das funções exponenciais*. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, 2016.

A dissertação apresenta, inicialmente, o contexto histórico do desenvolvimento da Matemática e a fundamentação teórica para o entendimento da função exponencial. Os potenciais de um *software* de Geometria dinâmica são descritos, assim como os comandos iniciais e as instruções para a plotagem e a animação dos gráficos, o que inspirou e deu base para escolhas didáticas deste Volume. Também são apresentadas, nesse trabalho, atividades que envolvem o contexto de meia-vida e a influência da variação dos coeficientes a, b e c da função definida por $f(x) = b \cdot a^x + c$.

COSTA, A. C. G. da. *Protagonismo juvenil*: adolescência, educação e participação democrática. Salvador: Fundação Odebrecht, 2000.

O autor apresenta a história do conceito de protagonismo juvenil, além de depoimentos de estudantes e de outros pesquisadores da área. No livro, ele propõe que o processo educativo seja organizado com o jovem como núcleo central, perspectiva que faz parte do projeto didático de todos os Volumes desta coleção.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 1).

O autor traz uma análise da relação entre Matemática e Etnomatemática, ressaltando a importância da Etnomatemática no ensino ocidental, além de apresentar resultados de pesquisas do mundo todo na área. Esse livro foi utilizado como referencial teórico para a concepção desta coleção.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 5. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011.

Este livro oferece uma visão abrangente da evolução dos conceitos matemáticos no decorrer dos séculos. Destacando o desenvolvimento histórico de funções e sequências, o livro traça um panorama de como conceitos fundamentais se consolidaram na Matemática moderna. Além disso, o autor explora as contribuições matemáticas de diversas culturas ao longo da História. As informações apresentadas nesse livro encontram-se de maneira transversal em toda a coleção didática.

FAZENDA, I. C. A (org.). *Didática e interdisciplinaridade*. 13. ed. Campinas: Papirus, 2008.

Esse livro explora a interdisciplinaridade não apenas como a integração de disciplinas, mas na perspectiva de buscar novos conhecimentos. É precisamente esse viés que permite utilizar a interdisciplinaridade como base na linha de formação de professores. O livro apresenta uma análise desde a década de 1970, explicitando o histórico dos estudos de interdisciplinaridade e o desenvolvimento das teorias desse campo de pesquisa até os dias atuais. A organizadora, renomada por suas contribuições no campo da educação, discute como a interdisciplinaridade pode enriquecer a prática pedagógica, facilitando a construção de conhecimentos mais significativos e contextualizados; além disso, faz um paralelo de como isso pode se refletir na formação e na prática pedagógica.

FERREIRA, M. K. L. *Madikauku*: os dez dedos das mãos — Matemática e povos indígenas no Brasil. Brasília, DF: MEC, 1998.

A autora apresenta uma proposta pedagógica de ensino de Matemática que tem como objetivo abraçar a pluralidade de ideias e os conhecimentos expressos em atividades do cotidiano. A primeira parte do livro traz informações sobre como alguns povos indígenas brasileiros articulam conhecimentos culturalmente distintos, ressaltando que a Matemática é uma criação humana. Nessa parte, constam os referenciais utilizados no capítulo 1 da Unidade 3 deste Volume, relacionados aos métodos de medição usados pelos indígenas das aldeias Palikur.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A*: funções, limites, derivação, noções de integração. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

Esse livro é uma importante referência para o estudo das funções. Com uma abordagem clara e detalhada, as autoras exploram os conceitos de funções, limites e derivadas. O conteúdo e os exercícios fornecem aos estudantes de diversas áreas uma base sólida em cálculo. Alguns conceitos e definições desse livro serviram como base na escrita deste Volume.

KARLSON, P. *A magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.

O autor apresenta, de maneira cronológica, a construção do conhecimento matemático em diversos países e regiões do planeta. Além disso, traz problemas e curiosidades que enriquecem a leitura. O livro foi utilizado como fonte de consulta para alguns dados históricos da Unidade 2 deste Volume.

LEITHOLD, L. *O cálculo com Geometria analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda., 1994. v. 1.

Esse livro aborda aspectos do ensino de Cálculo e Geometria analítica. O tópico destinado a funções e os gráficos delas foram úteis para a elaboração dos capítulos deste Volume. As funções afins, as funções quadráticas, as funções modulares e as funções por partes são apresentadas com o rigor necessário, seguidas de atividades resolvidas.

LIMA, E. L. *Logaritmos*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019 (Coleção do Professor de Matemática).

Esse livro, que é dedicado aos logaritmos, inicia-se com a história dos logaritmos e uma breve revisão dos assuntos potenciação e radiciação. Com diversas atividades e definições precisas, apresentando as propriedades, o logaritmo natural e as aplicações dos logaritmos, o livro explora toda a compreensão a respeito dos logaritmos. Tanto os contextos históricos quanto o rigor nas definições e nas apresentações dos conceitos foram referência para a elaboração da Unidade 4 deste Volume.

LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1. (Coleção Professor de Matemática).

O livro aborda, principalmente, a elaboração e a resolução de problemas tendo como público-alvo os estudantes do Ensino Médio. É evidenciada a importância de existir precisão nas definições, nos enunciados e nas resoluções das atividades, bem como de contextualizar os tópicos de Matemática, promovendo a interdisciplinaridade no estudo das funções afins e das funções quadráticas. Esse livro foi consultado na elaboração das Unidades deste Volume, principalmente como inspiração para a criação dos contextos apresentados.

LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).

O primeiro capítulo do livro é destinado às progressões aritméticas e às progressões geométricas. O livro traz, além de uma teoria concisa, diversos exemplos e atividades contextualizados e envolvendo essas progressões, que serviram de estudo para a elaboração da Unidade 5 deste Volume. Apresenta também orientações metodológicas sobre o ensino de progressões e como evitar a particularização desnecessária de casos, por exemplo.

LIMA, E. L. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

Nesse livro, o autor compartilha uma série de ensaios que abordam temas fundamentais da Matemática de maneira simples, clara e agradável. Ele trata de questões básicas, como a natureza dos números e o conceito de igualdade. Esse livro é uma leitura enriquecedora tanto para professores quanto para estudantes e contém diversas reflexões filosóficas e históricas que permearam a escrita desta coleção.

LIRA JÚNIOR, J. Q. *Ensino de função afim*: uma aplicação mediada pelo GeoGebra. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Pará, Pará, 2015.

O autor apresenta, de modo detalhado, a utilização de um *software* de Geometria dinâmica na representação de uma função afim. O estudo da influência da taxa de variação e do coeficiente linear na função dada por $f(x) = ax + b$ é analisado e representado no programa. O trabalho também apresenta o estudo da função afim em problemas como o cálculo do imposto de renda e da conta de energia elétrica. Essa dissertação foi referência para algumas escolhas didáticas feitas na Unidade 1 deste Volume.

LOPES, L. *Manual das funções exponenciais e logarítmicas*. São Paulo: Interciência, 1999.

O livro traz ampla abordagem teórica das funções exponenciais e das funções logarítmicas, apresentando fórmulas e definições desses tipos de função. As concepções teóricas usadas na elaboração deste Volume foram também consultadas nesse livro.

MATTOS, J. R. L.; POLEGATTI, G. A. *Um encontro etnomatemático na educação escolar indígena*: a função das flautas dos Rikbaktsa. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Curitiba, 2013.

Os autores apresentam alguns aspectos das organizações social e escolar dos Rikbaktsa, evidenciando o estudo da função afim por meio da análise das flautas produzidas na própria comunidade. O artigo aborda a dificuldade dos estudantes indígenas em entender conceitos matemáticos contextualizados em situações que não fazem parte do cotidiano deles. Essa reflexão é apresentada em uma seção do capítulo 3 da Unidade 1 deste Volume.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

A obra traz diversas estratégias e ferramentas fundamentais para a resolução de problemas, apresentando as 4 fases de resolução: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. O autor inicia o livro afirmando que: "Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema". Esse livro serviu de inspiração para a elaboração de situações, problemas e propostas de soluções que compõem este Volume.

REVISTA do professor de Matemática. São Paulo: SBM, v. 25, 1994.

O artigo "Números muito grandes", escrito pelo professor Geraldo Ávila e publicado nessa edição da revista, inicia descrevendo a famosa lenda da criação do jogo de xadrez. Para determinar a recompensa, em grãos de trigo, são apresentadas pelo inventor do jogo potências e somas de termos de uma progressão geométrica. Essa contextualização e as progressões geométricas são estudadas na Unidade 5 deste Volume.

REVISTA do professor de Matemática. São Paulo: SBM, v. 41, 1999.

No artigo da revista intitulado "Vértices de famílias de parábola", os autores Aguinaldo Robinson de Souza, Leonardo Paulovich e Mauri Cunha do Nascimento explicam detalhadamente o comportamento dos vértices das parábolas definidas por $y = ax^2 + bx + c$, variando cada um dos coeficientes (a, b e c) individualmente. Esse artigo foi utilizado como inspiração na criação de atividades com *softwares* de Geometria dinâmica na Unidade 2 deste Volume.

REVISTA do professor de Matemática. São Paulo: SBM, v. 45, 2001.

No artigo intitulado "Sequências de Fibonacci", de Alberto Azevedo, publicado nessa edição da revista, relata-se a ideia original do matemático italiano conhecido como Fibonacci (1170-1250). Ele formulou uma engenhosa sequência que, sob certas condições, poderia prever a quantidade de casais de coelhos em função da medida de intervalo de tempo. O artigo apresenta algumas maneiras de representar a sequência e sua relação com a razão áurea. Essa e outras sequências são exemplificadas na Unidade 5 deste Volume.

REVISTA do professor de Matemática. São Paulo: SBM, v. 63, 2007.

No artigo intitulado "Grandezas físicas para exemplificar a função", o autor Ricardo Avelar Sotomaior Karam apresenta grandezas físicas para contextualizar a função afim, de maneira que as situações permitem ao estudante fazer a conexão entre a Matemática e a Física. Os problemas de cinemática e de mecânica, bem como os tópicos de proporcionalidade, taxa de variação, gráficos e modelagem matemática, serviram como inspiração para a elaboração de problemas e situações na Unidade 1 deste Volume.

ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

A autora apresenta, em ordem cronológica, fatos da história da Matemática sob um olhar crítico, analisando mitos e lendas perpetuados por muito tempo. O livro começa abordando conceitos matemáticos desenvolvidos na Mesopotâmia, passando por Egito, Grécia, França e Alemanha. É o primeiro livro brasileiro a retratar a História da Matemática e foi utilizado, por exemplo, como referência para o desenvolvimento da fórmula para calcular as raízes de uma equação do 2º grau na Unidade 2 deste Volume.

SAFIER, F. *Pré-cálculo*. Tradução técnica Adonai Schlup Sant'Anna. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011. (Coleção Schaum).

A obra traz, de maneira concisa, porém acessível, as definições de funções exponenciais e de funções logarítmicas e os respectivos gráficos, conceitos e representações que referenciaram a elaboração das Unidades 3 e 4 deste Volume. Destaca-se no livro a grande quantidade de atividades resolvidas, propiciando ao leitor melhor entendimento e mais motivação no estudo.

SILVA, T. M. da. Uma abordagem de sequências numéricas no Ensino Médio. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013.

A dissertação tem início com um problema instigante envolvendo sequência, que foi escrito há mais de 3 500 anos. Outros problemas interessantes e famosos são apresentados de maneira elegante: a soma de Gauss, a torre de Hanói, a sequência de Fibonacci, a lenda do jogo de xadrez, entre outros; todos eles são também explorados neste Volume. Com o rigor necessário, o autor define e exemplifica as progressões aritméticas e as progressões geométricas.

SOUSA, R. M. *O uso do GeoGebra no ensino da função quadrática*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2014.

A dissertação apresenta um breve histórico da Matemática, a equação do 2º grau e a função quadrática. Ressalta-se também a importância dos recursos computacionais para o ensino da função quadrática, bem como a aplicação dela em outras ciências e na Geometria plana. Através de um *software* de Geometria dinâmica, discute-se a influência dos coeficientes a, b e c na função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Essa dissertação foi referência para as escolhas didáticas feitas neste Volume.

STEWART, J. *Cálculo*. Tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. II.

O livro apresenta os tópicos de função afim e de função quadrática, além de sequências e séries infinitas, utilizando definições precisas e ressaltando a interdisciplinaridade com outros campos do saber. O processo de modelagem matemática é apresentado em 3 etapas: formulação, resolução e interpretação. Essa obra foi consultada na concepção das Unidades 1 e 2 deste Volume.

WING, J. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://tedit.net/g4ji9a. Acesso em: 24 set. 2024.

Esse artigo apresenta a tradução do trabalho Computational Thinking, da pesquisadora Jeannette Wing. A tradução para o português é de Cleverson Sebastião dos Anjos, professor da área de Informática do Instituto Federal do Paraná. O texto discorre sobre o percurso de ideias relacionadas aos estudos do pensamento computacional, tema atual e que é abordado em seções deste Volume, bem como em atividades no decorrer dos capítulos.

ZANDONADI, E. C. *Aplicação do software GeoGebra no ensino de funções exponenciais e logarítmicas*. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

O autor faz inicialmente uma revisão da literatura sobre o processo de ensino e aprendizagem no Ensino Médio. Em seguida, ressalta a importância do uso de novas tecnologias. As funções exponenciais e as funções logarítmicas são apresentadas, bem como as representações gráficas, a variação dos coeficientes das leis e a relação entre essas funções. Todas essas explorações, bem como o uso das tecnologias, foram referência para as escolhas didáticas feitas nas Unidades 3 e 4 deste Volume.

Transcrição de áudios

Podcast 1 – Funções

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre funções, uma ferramenta muito útil para determinar relações entre grandezas.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Quando falamos de função, estamos tratando de uma relação matemática que mostra a dependência unívoca entre duas variáveis, ou seja, para cada valor de uma variável corresponde um único valor de outra variável. Neste contexto, podemos falar sobre diferentes tipos de funções, como a função afim [vírgula sonora] e a função quadrática, [vírgula sonora] abordando diferentes características e seus gráficos num plano cartesiano.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

Para começar, é importante entender o conceito de função afim. A função afim é uma das mais simples e fundamentais no estudo da Matemática. Ela é representada por uma reta no plano cartesiano. A função afim é amplamente utilizada em diversas áreas do conhecimento, como Física, Economia e Engenharia, para modelar situações em que há uma relação linear entre duas variáveis.

Por outro lado, a função quadrática é um pouco mais complexa e é representada por uma parábola no plano cartesiano. A função quadrática é extremamente importante em várias áreas, como na Física, para descrever o movimento de projéteis, e na Economia, para analisar curvas de custo e receita.

Além das funções afim e quadrática, existem muitos outros tipos de funções que desempenham papéis cruciais na Matemática e em outras disciplinas. Por exemplo, a função exponencial, que é usada para modelar crescimento populacional e decaimento radioativo, e a função logarítmica, que é fundamental em cálculos de escalas logarítmicas e em algoritmos de computação.

Estes são conhecimentos essenciais se quisermos conhecer a relação matemática entre duas grandezas.

Mas também é possível estimarmos a relação entre duas grandezas analisando alguns valores delas, como veremos a seguir.

[vinheta de transição]

Imagine, por exemplo, que você queira uma expressão matemática que relacione o preço de um apartamento em um bairro residencial à medida de área em metros quadrados. Bem, sabemos que há muitos fatores que interferem nesse preço, como quantidade de quartos, se há ou não suítes, vagas na garagem, etc. Porém, boa parte desses fatores interfere no tamanho do imóvel, então faz sentido pensarmos que há uma relação entre a medida de área do imóvel e seu preço, concorda?

E essa relação provavelmente pode ser aproximada a uma função afim, ou seja, uma função do primeiro grau. [vírgula sonora]

Se você fizer uma pesquisa de preços em determinado bairro e representá-los em um plano cartesiano, relacionando os preços com as medidas de área dos apartamentos, você terá vários pontos dispersos, um para cada valor, porém boa parte deles estarão muito próximos a uma reta. Como já falamos, o gráfico de qualquer função afim é sempre uma reta, portanto, observando a inclinação dessa reta e os pontos pelos quais ela passa, poderíamos escrever a expressão matemática da função afim. Então, se precisássemos estimar o valor de um imóvel de oitenta metros quadrados nesse bairro, uma boa estimativa seria substituir por oitenta a grandeza que representa a medida de área do apartamento, em metros quadrados, na função encontrada.

Essa técnica se chama regressão linear, [vírgula sonora] e ela pode ser aplicada sempre quando verificarmos que um conjunto de pontos do gráfico se aproxima de uma reta, determinando assim uma expressão que relaciona as grandezas analisadas. Legal, né?

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

Estudar funções não é apenas uma atividade teórica; é uma habilidade prática que pode ser aplicada em diversas situações do dia a dia. Desde calcular a trajetória de um objeto em movimento até prever tendências econômicas, o conhecimento sobre funções nos permite entender e modelar o mundo ao nosso redor de maneira precisa e eficiente.

Portanto, ao mergulharmos no estudo das funções, estamos não apenas aprendendo conceitos matemáticos, mas também desenvolvendo ferramentas que nos ajudarão a resolver problemas reais e a tomar decisões em nossas vidas.

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Podcast 2 – Raízes quadradas

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre raízes quadradas.

Qual será a origem desse termo? Você sabe? Ou em algum momento ficou curioso para descobrir?

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Bom, você já sabe que o conjunto dos números reais inclui os números naturais, [alerta] como o dois, o três e o quatro; os números inteiros, [alerta] que são os naturais e os inteiros negativos, como o menos três, o menos oito e o menos dez; os números racionais, [alerta] que podem ser escritos na forma de fração; as dízimas periódicas [alerta] e ainda os números irracionais, [alerta] que são aqueles que possuem representação decimal infinita e não periódica, como o famoso número pi.

Com exceção dos números complexos, que só serão estudados em determinados cursos de Ensino Superior, todos os demais números que você já conhece fazem parte do conjunto dos números reais. Os números complexos são utilizados quando precisamos resolver, por exemplo, situações que envolvem raízes quadradas de números negativos, mas você não precisa se preocupar com isso por enquanto.

Agora, nosso objetivo será mais simples.

Basicamente, falaremos sobre um fato curioso, digamos assim, que é o motivo pelo qual a raiz quadrada recebe esse nome.

[vinheta de transição]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

Existem várias lendas matemáticas sobre o assunto, algumas até mesmo relacionando a definição desse conceito matemático com as próprias raízes de árvores. Mas, para obter uma explicação mais plausível e científica, precisamos estudar um pouco a história dessa terminologia.

O termo "raiz" vem do latim "radix", que por sua vez é a tradução de outro termo usado nos escritos árabes. Acredita-se que o árabe seja a língua natal utilizada pelos matemáticos quando iniciaram o estudo da álgebra.

O termo que foi traduzido do árabe para "radix" pode ser entendido, de fato, como raiz, mas no mesmo sentido de "raiz do problema", ou "base", "fundação".

Nesse sentido, se pensarmos na raiz quadrada de um número como um valor base, que, elevado ao quadrado, resulta naquele número, a terminologia tem sua lógica, concorda?

Agora, vamos explorar um pouco mais esse conceito.

O conceito de raiz quadrada tem aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento. Na Física, por exemplo, a raiz quadrada é usada para calcular a velocidade média de partículas em movimento. Na Engenharia, é fundamental para determinar a resistência de materiais. E na Economia, pode ser utilizada para analisar a variabilidade de dados financeiros.

O histórico do uso da raiz quadrada também é fascinante. Os antigos babilônios, por volta de mil e oitocentos antes de Cristo, já utilizavam métodos para calcular raízes quadradas. Eles tinham uma compreensão surpreendentemente precisa desse conceito, mesmo sem a notação moderna que usamos hoje. Mais tarde, matemáticos gregos como Euclides e Arquimedes fizeram avanços significativos na teoria dos números, incluindo o estudo das raízes quadradas.

Durante a Idade Média, matemáticos árabes como Al-Khwarizmi (de onde vem a palavra "álgebra") continuaram a desenvolver esses conceitos e a transmiti-los para a Europa. Foi nessa época que o termo "radix" começou a ser usado, refletindo a ideia de uma base ou fundação.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

Portanto, a terminologia "raiz quadrada" é rica em história e significado. Ela nos conecta a milênios de pensamento matemático e nos lembra que as bases matemáticas são fundamentais para o desenvolvimento e a compreensão de conceitos mais complexos.

Então, da próxima vez que você ouvir falar de raiz quadrada, lembre-se de que está lidando com uma ideia que tem profundas raízes históricas e práticas. E, quem sabe, isso pode tornar o estudo da Matemática mais interessante e envolvente!

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Podcast 3 – Prática de pesquisa

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre a água no planeta e sua importância.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Para isso, vamos abordar a prática da pesquisa científica e do olhar investigativo, além de explorar situações que permitem compreender e repensar a realidade e atuar sobre ela.

Vamos falar sobre a porção do planeta Terra composta de água: a hidrosfera.

Mas o que seria isso? [vírgula sonora]

Bom, a hidrosfera engloba toda a água da superfície terrestre, como os oceanos, os lagos, os rios e a água subterrânea. [efeito sonoro de água até a vinheta de transição]

Apesar de toda essa água, o que temos disponível para o nosso consumo, ou seja, o que pode ser tratada para uso, é menor do que 1%.

Com essa informação, você deve estar se perguntando: A água potável pode acabar? [vírgula sonora] Será que é possível utilizar os outros 99% de água disponível na hidrosfera? [vírgula sonora]

Esses são alguns tópicos que vamos estudar em breve. Não perca!

[vinheta de transição]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

Para compreender a porcentagem de água potável disponível, precisamos avaliar a constituição da água no planeta. De acordo com a quantidade de sais minerais presentes na água, ela pode ser classificada como doce [vírgula sonora], salgada [vírgula sonora] ou salobra [vírgula sonora]. A água doce representa 3% do total de água no planeta; e a água que consumimos, chamada de água potável, representa menos de 1% da água doce. É essa pequena quantidade de água disponível que nos leva a ficarmos atentos para o uso consciente.

Não é de se espantar que algumas previsões da Organização das Nações Unidas (a ONU) apontam que, no ano de 2050, com o aumento da população e o consequente aumento do consumo de água potável, o problema de escassez será ainda mais grave.

E qual é a importância da água para os seres humanos? [vírgula sonora]

A água constitui 60% da massa corporal de um ser humano adulto. No organismo, a água participa de processos como a regulação da medida de temperatura corporal por meio da sudorese, a eliminação de toxinas por meio da urina e outras inúmeras reações químicas do metabolismo.

Por isso, é necessário sempre otimizar o consumo de água para evitar desperdícios!

Contudo, há atividades humanas que aumentam a demanda por água. Vamos estudar com mais detalhes quais atividades são essas.

[vinheta de transição]

Toda a água presente na hidrosfera se movimenta continuamente. Você sabe como é chamado esse movimento? Chama-se ciclo hidrológico ou ciclo da água. [vírgula sonora]

A água presente na superfície da Terra vem da evaporação dos corpos de água ou da transpiração de animais e de plantas. Em determinadas regiões da atmosfera, o vapor de água se condensa e forma nuvens. As gotículas de água, que constituem as nuvens, formam gotas maiores e precipitam, podendo retornar à superfície da Terra no formato de chuva, no estado líquido, ou no formato de granizo ou neve, no estado sólido.

E você sabia que na atmosfera terrestre também existem rios? [vírgula sonora] Pois é, eles estão logo acima do Brasil e são conhecidos como rios voadores.

E o que são esses rios? [vírgula sonora]

Eles são massas de ar carregadas de vapor de água impulsionadas pelo vento. Note que a Floresta Amazônica, que apresenta uma grande biodiversidade e uma extensa área verde, funciona como uma bomba de água. Ela libera enorme quantidade de água pela evapotranspiração. Na atmosfera, essa água chega e é transportada pelas massas de ar para outras regiões da América do Sul, levando chuvas para diversas regiões do Brasil. Mais um motivo para nos preocuparmos com a preservação dessa e das demais florestas brasileiras e do mundo!

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

Agora que você conheceu alguns motivos da importância do uso consciente da água, reveja com os colegas e familiares suas ações e reflitam quais atitudes de conservação da água podem ser tomadas na escola e no local onde vocês vivem. E não deixem de compartilhar as boas ideias que surgirem!

Esperamos que as propostas apresentadas sejam proveitosas e que, com o conhecimento da ciência, tenhamos ferramentas e argumentos para consumir a água de forma consciente.

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Manual do Professor

Matemática e suas Tecnologias

Matemática

Apresentação

Olá, professor!

Temos enorme prazer em compartilhar com você esta coleção de Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio! Esperamos que a coleção seja uma ferramenta potente e transformadora no trabalho que você vai realizar com os estudantes. Este Manual pode auxiliá-lo no planejamento e no desenvolvimento da sua prática pedagógica.

É importante relembrar que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) veio para apontar novos caminhos para a educação brasileira, propondo que todos os estudantes tenham acesso às mesmas aprendizagens e que elas sejam desenvolvidas integrando experiências pessoais e experiências sociais aos conhecimentos adquiridos tanto no espaço escolar quanto fora dele. Portanto, é importante que todo o seu trabalho esteja alicerçado na construção colaborativa de significados para variados contextos da vida cotidiana.

É fundamental destacar, também, as recentes transformações nessa etapa da Educação Básica. O Novo Ensino Médio estabelece um modelo de ensino e aprendizagem mais participativo e colaborativo. Assim, você poderá seguir por um caminho de mediador de experiências pautadas nos princípios da interdisciplinaridade e da integração, no qual cada estudante é protagonista das próprias aprendizagens.

A integração das áreas do conhecimento, dos componentes curriculares (as disciplinas) e dos campos de saber permite aos jovens do Ensino Médio ampliar a visão de mundo e, assim, elaborar argumentos mais consistentes para se posicionarem socialmente, com pensamento crítico e criatividade. É preciso praticar e promover a escuta ativa das ideias, opiniões e vivências dos estudantes, tão imersos em uma sociedade tecnológica e dinâmica – eles curtem e compartilham muito, mas precisam aprender a sustentar as próprias opiniões.

Além disso, este é um convite para que você colabore mais com os professores de outras áreas do conhecimento e eles, com você. Todo o corpo docente precisa trocar experiências e compartilhar saberes nesse novo modelo. É tempo de escutar, compartilhar, inspirar e criar juntos.

Como trilhar esses novos caminhos? Para encontrar mais segurança nesse percurso, convidamos você a seguir conosco neste Manual, para que, juntos, possamos construir essa etapa de ensino tão importante para a vida dos jovens, o Ensino Médio!

Abraços,

Os autores.

Sumário

Orientações gerais 316

1. O Novo Ensino Médio 316
1.1. Contexto legislativo **316**
1.2. Principais mudanças **317**

2. A BNCC e a educação integral 318
2.1. BNCC de Ensino Médio **319**
2.1.1. Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias **320**
2.1.2. A BNCC nesta coleção **320**
2.2. Interdisciplinaridade e Temas Contemporâneos Transversais **321**
2.3. Culturas juvenis e estudantes protagonistas das aprendizagens e dos próprios projetos de vida **322**
2.4. Reflexões sobre o docente como mediador **323**
2.5. Educação digital **324**
2.6. Educação inclusiva **325**
2.7. Argumentação (oral e escrita) e leitura inferencial **325**
2.8. Pluralismo de ideias e produção de análises (críticas, criativas e propositivas) **326**
2.9. Pensamento computacional **327**
2.10. Resolução e elaboração de problemas **327**
2.11. Investigação científica e raciocínios lógico-matemáticos **328**
2.12. Etnomatemática **329**
2.13. Uso pedagógico de tecnologias digitais **330**

3. Avaliações 330
3.1. A avaliação em Matemática **331**
3.1.1. Por que avaliar? **331**
3.1.2. O que avaliar? **331**
3.1.3. Como avaliar? **331**
3.2. Os tipos de avaliação **331**
3.2.1. Avaliação diagnóstica **331**
3.2.2. Avaliação formativa **332**
3.2.3. Avaliação comparativa **332**
3.2.4. Avaliação ipsativa **332**
3.2.5. Avaliação somativa **333**
3.3. Trabalhando o Enem em sala de aula: estratégias para melhorar o desempenho dos estudantes **333**

4. A coleção da área de Matemática e suas Tecnologias 333
4.1. Abordagem teórico-metodológica e pressupostos da coleção **333**
4.2. Estrutura da coleção **334**
4.2.1. Objetos educacionais digitais da coleção **335**
4.3. Sugestão de cronograma **335**

5. Referências complementares para aprofundamento 337
5.1. *Sites* **337**
5.2. *Podcasts* e vídeos **337**
5.3. Revistas e periódicos de Educação matemática **337**
5.4. Publicações sobre História da Matemática **337**
5.5. Publicações sobre Educação matemática **338**
5.6. Publicações sobre metodologia do ensino de Matemática **338**
5.7. Publicações sobre educação **338**

Orientações específicas 339

Organização e conteúdos do Volume 339
Unidade 1: Conjuntos e função afim 339
Unidade 2: Função quadrática 348
Unidade 3: Função exponencial 352
Unidade 4: Função logarítmica 358
Unidade 5: Sequências e progressões 362
Resoluções 368

Referências bibliográficas comentadas 398

Orientações gerais

1. O Novo Ensino Médio

Vivemos uma era de muitas transformações, um período em que as informações circulam muito rapidamente. Além disso, os estudantes que atualmente frequentam as escolas nasceram em um mundo conectado; logo, não dependem somente da escola e dos professores para obter novos conhecimentos; eles dispõem de recursos que lhes colocam as informações ao alcance das mãos com apenas alguns cliques. Há nas escolas uma geração de estudantes que aprendem, produzem, publicam e divulgam ideias próprias em várias plataformas e redes sociais. Todos esses novos padrões de comportamento exigem uma nova postura não somente dos professores, mas também das instituições escolares e dos materiais didáticos. A escola precisa estar preparada para esse novo estudante, que é ativo, ágil e protagonista.

A organização do ensino na Educação Básica fundamenta-se, atualmente, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que estabelece para todas as etapas – Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio – um conjunto consistente e articulado de aprendizagens essenciais. Assim, a BNCC permite superar a fragmentação das políticas educacionais, servindo de parâmetro para que tenhamos uma educação de qualidade em todas as escolas do país e em todas as etapas da Educação Básica, para todos os estudantes.

Outro ponto fundamental é a proposta do Novo Ensino Médio, instituído com a finalidade de acompanhar esses novos tempos. É essencial que a escola ajude os estudantes a selecionar, ponderar e agir com responsabilidade na sociedade em que vivemos, auxiliando-os na escolha dos próprios caminhos – tanto para aqueles que desejam seguir as trilhas acadêmicas, como o ingresso no Ensino Superior, quanto para aqueles que pretendem partir direto para o campo profissional, por meio de cursos técnicos e com a inserção no mercado de trabalho.

O Novo Ensino Médio foi oficializado com a promulgação da Lei nº 13.415, em 16 de fevereiro de 2017. Essa lei alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e estabeleceu uma série de mudanças na estrutura do Ensino Médio brasileiro. Em julho de 2024, foi sancionada a Política Nacional de Ensino Médio, estabelecendo outras novas modificações, como é o caso da mudança na carga horária, que passou para 3 000 horas, sendo 2 400 horas para o ensino dos componentes curriculares e 600 horas para os itinerários formativos.

O protagonismo juvenil é incentivado nos estudantes, principalmente pela escolha de alguns percursos formativos mais específicos – os itinerários formativos –, que visam orientá-los na construção do projeto de vida deles.

Home-stock/Adobe Stock

A intenção do Novo Ensino Médio é manter os jovens mais conectados ao futuro profissional e acadêmico que os espera, permitindo maior autonomia na construção do projeto de vida e de habilidades socioemocionais fundamentais no mundo contemporâneo.

1.1. Contexto legislativo

A determinação de uma formação básica comum alicerçada em conteúdos mínimos, conforme institui a BNCC, já havia sido vislumbrada na Constituição Federal de 1988 (artigo 210) e na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei nº 9.394/1996, artigo 9º, inciso IV). A LDB (Lei nº 9.394/1996, artigo 9º, inciso I) também previa a elaboração do Plano Nacional de Educação (PNE), estabelecendo com clareza e objetividade metas a serem atingidas – o PNE ainda está em tramitação no Congresso para o período de 2024 a 2034.

Os *sites* indicados a seguir podem ser consultados para mais informações (acesso em: 25 ago. 2024).

Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/1996).
Disponível em: https://tedit.net/g057tn.

Plano Nacional de Educação.
Disponível em: https://tedit.net/dkfgp7.

Constituição da República Federativa do Brasil de 1988.
Disponível em: https://tedit.net/qchy5g.

Esse ordenamento legal estabelece as regras a partir das quais o ensino deve ser organizado no Brasil, tanto em termos de princípios a serem seguidos quanto no que se refere às questões práticas do funcionamento das escolas e, ainda, às determinações curriculares.

No que se refere especificamente ao Ensino Médio, a Lei nº 13.415/2017, que cria o Novo Ensino Médio, alterou a LDB e outras leis e trouxe importantes mudanças. No artigo 35, a LDB estabelece que a etapa do Ensino Médio deve ter como objetivos:

I. a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II. a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III. o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV. a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. *Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional*. Constituição da República Federativa do Brasil de 1988. Brasília, DF: Presidência da República, 1996. Disponível em: https://tedit.net/ie2n21. Acesso em: 28 ago. 2024.

Analise no diagrama a seguir como se deu a evolução das propostas para o Ensino Médio.

Governo Federal/Ministério da Educação

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM), estava previsto que a implementação completa ocorresse até 2022. O governo lançou, em 2023, o projeto de Lei nº 5.230, que visava reformar o Novo Ensino Médio. O texto foi sancionado em agosto de 2024 pela Lei nº 14.945/2024.

1.2. Principais mudanças

A reforma do Novo Ensino Médio prevê que todas as escolas do país – públicas ou privadas – adotem mudanças, que vão desde a carga horária até a oferta dos componentes curriculares (as disciplinas) para a etapa final da Educação Básica. A aplicação de todas as mudanças deve ocorrer a partir de 2025, no caso de estudantes ingressantes no Ensino Médio, enquanto os que já estiverem com a etapa em curso terão um período de transição.

A essência do projeto do governo federal, que era ampliar a parcela de conteúdos da formação básica curricular, foi mantida nessa versão da Lei nº 14.945/2024. Assim os componentes curriculares tradicionais (como Língua Portuguesa, Língua Inglesa, Arte, Educação Física, Matemática, Biologia, Física, Química, Filosofia, Geografia, História e Sociologia) ficam contemplados com destaque, conforme delineado pela BNCC. E todos os componentes curriculares passam a ser obrigatórios em todos os anos do Ensino Médio; Língua Espanhola será opcional.

Pelo texto aprovado, a carga horária da formação geral básica nos 3 anos de Ensino Médio volta a ser de 2 400 horas, e outras 600 horas obrigatórias devem ser preenchidas com disciplinas dos itinerários formativos. A carga horária total será, então, de 3 000 horas, sendo 1 000 horas para cada ano, divididas em 200 dias letivos de 5 horas cada um.

Os itinerários formativos são um conjunto de disciplinas, projetos, oficinas, núcleos de estudo, entre outras situações de trabalho, que os estudantes podem escolher no Ensino Médio a fim de aprofundar os estudos de uma área do conhecimento (Matemática e suas Tecnologias, Linguagens e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias ou Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e da Formação Técnica e Profissional (FTP) ou mesmo nos conhecimentos de 2 ou mais áreas e da FTP. Cada escola deve ofertar pelo menos 2 itinerários formativos, com exceção das escolas que oferecem Ensino Técnico. As redes de ensino têm autonomia para definir quais itinerários formativos vão ofertar, considerando um processo que envolva a participação de toda a comunidade escolar.

Jose Calsina/Adobe Stock

No Novo Ensino Médio, o protagonismo juvenil é incentivado nos estudantes principalmente pelo estímulo e pela orientação para a construção de projeto de vida.

Outra opção de escolha para os estudantes é o Ensino Técnico, sendo previstas, nesse caso, 2100 horas para os componentes curriculares obrigatórios, com 300 horas podendo ser destinadas a conteúdos da BNCC relacionados à formação técnica, e até 1200 horas para o Ensino Técnico (itinerários formativos técnicos).

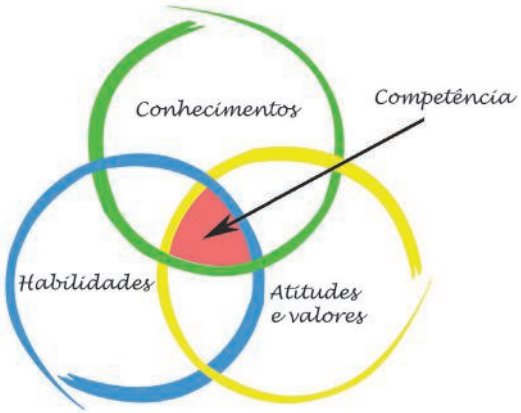
O texto da Lei estabelece que a carga horária da formação geral básica dos estudantes deve ser oferecida presencialmente. Porém, há uma proposta de ensino à distância e outra de ensino noturno, estipulada no texto, que obriga os estados a manterem, em todas as cidades, ao menos uma escola da rede pública com Ensino Médio no período noturno, se houver demanda comprovada para isso.

2. A BNCC e a educação integral

A BNCC estabelece o que cada estudante precisa aprender em cada etapa da Educação Básica, ano a ano ou a cada bloco de anos, estipulando, assim, um patamar de qualidade na educação em todo o país. A intenção é proporcionar um alinhamento de todo o sistema educacional em torno de um texto curricular de base capaz de gerar ações coordenadas para a formação e a capacitação dos professores, a troca de experiências bem-sucedidas entre docentes, escolas e redes, a produção de materiais didáticos e a elaboração de avaliações padronizadas que meçam os avanços educacionais.

Pretendendo promover uma educação de qualidade com equidade, a BNCC foi construída a partir de critérios em torno de competências e habilidades de que os estudantes necessitam para o pleno desenvolvimento na sociedade do século XXI.

A educação por competências preconiza a visão integrada do conhecimento, em que se combinam conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para o desenvolvimento integral do estudante no processo de ensino e de aprendizagem: o conhecimento ("saber") precisa estar vinculado às habilidades ("saber fazer"), às atitudes e aos valores ("saber ser").



Dmitry/Adobe Stock

A BNCC define competências como:

> [...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 2018a, p. 8).

Portanto, o desenvolvimento de uma competência possibilita ao estudante mobilizar múltiplos recursos pessoais (conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, emoções, entre outros) para obter respostas satisfatórias a diferentes problemas.

E qual é a diferença entre as competências e as habilidades apresentadas na BNCC? De maneira simples, consideramos que a Educação Básica deve assegurar o desenvolvimento de competências gerais, que transpassam as áreas do conhecimento e confluem para a formação cidadã. Para que isso aconteça, cada área do conhecimento contribui com competências específicas, relacionadas à aplicação de cada área na resolução de problemas da vida cotidiana e na compreensão e atuação no mundo. Essas competências específicas podem ser desenvolvidas por meio do trabalho com as habilidades (sempre iniciadas com um verbo que indica a ação do estudante na aprendizagem) que estão diretamente relacionadas aos objetos do conhecimento considerados essenciais na construção do aprendizado.

Desse modo, as competências específicas e as habilidades, de maneira integrada entre as áreas do conhecimento e com os Temas Contemporâneos Transversais, contribuem para o desenvolvimento das competências gerais, que visam à formação integral dos estudantes.

2.1. BNCC de Ensino Médio

A BNCC – Etapa Ensino Médio é parte integrante da BNCC e apresenta um conjunto de orientações que deve nortear os currículos das escolas públicas e das escolas privadas de Ensino Médio de todo o Brasil. O documento tem como pretensão promover a elevação da qualidade do ensino no país, por meio de uma referência comum obrigatória para todas as escolas de Educação Básica, respeitando a autonomia assegurada pela Constituição aos entes federados e às escolas.

O texto legal enfatiza os principais objetivos para o Ensino Médio.

> Garantir a **consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos** no Ensino Fundamental é essencial nessa etapa final da Educação Básica. Além de possibilitar o prosseguimento dos estudos a todos aqueles que assim o desejarem, o Ensino Médio deve atender às necessidades de formação geral indispensáveis ao exercício da cidadania e construir "aprendizagens sintonizadas com as **necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes** e, também, com os **desafios da sociedade contemporânea**", como definido na Introdução desta BNCC (p. 14; ênfases adicionadas) (Brasil, 2018a, p. 464-465).

Para que essa finalidade seja alcançada, a BNCC ressalta que é preciso que a escola acolha as juventudes. Faz parte desse acolhimento à diversidade:

> [...] favorecer a atribuição de sentido às aprendizagens, por sua vinculação aos desafios da realidade e pela explicitação dos contextos de produção e circulação dos conhecimentos. (Brasil, 2018a, p. 465).

E para que se possa construir conhecimentos relevantes de maneira sólida, é fundamental considerar a contextualização dos objetos do conhecimento, com respeito às realidades e à história de produção deles.

Além das 10 competências gerais da Educação Básica, a BNCC – Etapa Ensino Médio está organizada por áreas do conhecimento, com a finalidade de integrar 2 ou mais componentes curriculares (disciplinas), de modo a permitir aos estudantes melhor compreender e transformar uma realidade complexa.

> Cada área do conhecimento estabelece competências específicas de área, cujo desenvolvimento deve ser promovido ao longo dessa etapa, tanto no âmbito da BNCC como dos itinerários formativos das diferentes áreas. Essas competências explicitam como as competências gerais da Educação Básica se expressam nas áreas. Elas estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes do Ensino Médio (Brasil, 2018a, p. 33).

Assim, as áreas do conhecimento e os respectivos componentes curriculares destacados são:

- Linguagens e suas Tecnologias: Arte, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa;
- Matemática e suas Tecnologias: Matemática;
- Ciências da Natureza: Biologia, Física e Química;
- Ciências Humanas e Sociais Aplicadas: História, Geografia, Sociologia e Filosofia.

É interessante ressaltar que:

> [...] essa estrutura adota a **flexibilidade** como princípio de **organização curricular**, o que permite a construção de currículos e propostas pedagógicas que atendam mais adequadamente às especificidades locais e à multiplicidade de interesses dos estudantes, estimulando o exercício do **protagonismo juvenil** e fortalecendo o desenvolvimento de seus projetos de vida (Brasil, 2018a, p. 468).

Assim, a organização do trabalho em sala de aula, pela combinação da perspectiva da competência específica com o ponto de vista da habilidade, é fator primordial para que os estudantes consigam desenvolver os objetivos de aprendizagem esperados.

A partir dessa normativa válida para todo o Brasil, cada estado pode construir o próprio documento curricular. Em diálogo com as redes de ensino públicas e as redes de ensino privadas, os currículos estaduais visam contemplar aspectos das demandas e especificidades sociais, econômicas, regionais, culturais e históricas das próprias regiões.

Assim, é oportuno e recomendável considerar adaptações dos materiais didáticos ao planejamento pedagógico, considerando sua autonomia como professor, bem como o currículo estadual instituído, o Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola e as necessidades e vontades específicas dos estudantes.

Mais sobre o assunto

O material *Dimensões e Desenvolvimento das Competências Gerais da BNCC* foi elaborado pelo Movimento pela Base, grupo não governamental e apartidário de pessoas, organizações e entidades que se empenham na implementação da BNCC e do Novo Ensino Médio. Recomendamos a leitura desse material, que apresenta a descrição de cada uma das competências gerais, bem como das dimensões e das subdimensões delas. Disponível em: https://tedit.net/b6nai8. Acesso em: 24 ago. 2020.

2.1.1. Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias

A área de Matemática e suas Tecnologias na BNCC – Etapa Ensino Médio tem por objetivo contribuir para que os estudantes adquiram um entendimento de como a Matemática, como área do conhecimento e como componente curricular, se aplica nas situações cotidianas – tanto isoladamente quanto interligada a outras áreas do conhecimento e a outros componentes curriculares. Para isso, a proposta é que eles ampliem e consolidem os conhecimentos trabalhados nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

São apresentadas 5 competências específicas.

Ilustrações: GIGISTOCK/Shutterstock

A **competência específica 1** (**CEMAT01**) apresenta a Matemática como uma área do conhecimento que favorece a compreensão de elementos e acontecimentos em variados contextos. De modo simples, podemos dizer que utilizamos conhecimentos, estratégias, procedimentos e ferramentas matemáticas para auxiliar na interpretação de contextos que a vida cotidiana apresenta. É a aplicação dos conceitos de Matemática.

A **competência específica 2** (**CEMAT02**) trata primordialmente do envolvimento dos estudantes na proposição de soluções para problemas sociais. Essa competência se relaciona ao entendimento do estudante como membro da sociedade, seja atuando na comunidade escolar, seja em uma atuação mais abrangente. Ela também se relaciona com o projeto de vida nos âmbitos pessoal, social e profissional.

A **competência específica 3** (**CEMAT03**) está vinculada de modo primordial à resolução e à elaboração de problemas. Essa competência e as habilidades associadas a ela deixam claro que conhecimentos, conceitos e procedimentos matemáticos ganham significado ao serem aplicados em situações reais, na resolução de problemas que façam sentido para os estudantes. Também é por meio dessa competência que se relaciona a modelagem matemática, com a qual é possível fazer diferentes representações matemáticas de uma situação e utilizar procedimentos, abstração e generalização com o propósito de construir e resolver situações similares.

A **competência específica 4** (**CEMAT04**) explora os diferentes tipos de registro de representação matemática (registro algébrico, geométrico, estatístico, computacional, entre outros). Por meio dessa exploração, os estudantes adquirem a capacidade de transitar entre esses tipos de registro e, mais do que isso, escolhem qual ou quais deles são mais pertinentes para representar e resolver cada situação ou problema.

Por fim, a **competência específica 5** (**CEMAT05**) tem como objetivo principal que os estudantes investiguem matematicamente, bem como formulem hipóteses e busquem validá-las, utilizando raciocínios lógicos ou deduções obtidas por meio dessas investigações.

Cabe notar que:

> [...] para assegurar o desenvolvimento das competências específicas de área, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas no âmbito da BNCC a todos os estudantes do Ensino Médio. Elas são descritas de acordo com a mesma estrutura adotada no Ensino Fundamental (Brasil, 2018a, p. 33).

Para a etapa do Ensino Médio, a BNCC não indica o trabalho por seriação e não é apresentada a organização das habilidades referentes aos conteúdos em quadros dispostos para cada ano de estudo, como ocorre para o Ensino Fundamental (Anos Iniciais e Anos Finais). As habilidades de Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio estão agrupadas subordinadas às 5 competências específicas, de modo que possam ser trabalhadas em diferentes momentos ao longo dos 3 anos da etapa. Isso contribui para que competências específicas e habilidades possam ser investigadas e reinvestigadas em diferentes momentos, em uma retomada em espiral, sempre que o contexto favorecer essa estrutura.

Mais sobre o assunto

Qual é a diferença entre compreensão e conhecimento? Como é possível verificar se os estudantes estão alcançando os objetivos que permeiam o ensino? Questionamentos como esses e outros mais são abordados no livro *Planejamento para a compreensão*, de Grant Wiggins e Jay McTighe (Porto Alegre: Penso, 2019), de modo combinado com sugestões de estratégias para planejar ações com os estudantes, incentivando-os durante o processo de ensino e aprendizagem.

2.1.2. A BNCC nesta coleção

Esta coleção apresenta conteúdos e modelos didáticos atualizados com os conhecimentos científicos e com as normativas legais da área de educação. Portanto, a abordagem teórico-metodológica, amparada pelo modelo

de ensino proposto pela BNCC, considera a prática de ensino por competências (gerais e específicas das áreas do conhecimento), vinculadas às habilidades de cada área do conhecimento, às atitudes e aos valores, ou seja, levando em conta o desenvolvimento do "saber", do "saber fazer" e do "saber ser".

Para contribuir com a compreensão do modo como competências e habilidades se diferenciam e, ao mesmo tempo, encadeiam-se em diferentes graus de complexidade e de amplitude no decorrer do estudo, apresentamos um exemplo.

Uma das competências gerais da BNCC, que é favorecida com o trabalho proposto no capítulo **2** da Unidade **4** do Volume **1**, é a competência geral **CG02**.

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Essa competência geral permeia diferentes momentos da Unidade citada, nos quais os estudantes pensam nos problemas que lhes são apresentados e mobilizam conhecimentos matemáticos para investigar e desenvolver soluções criativas para solucioná-los. Em toda essa Unidade, as propostas pedagógicas envolvendo esses procedimentos da **CG02** desenvolvem o encadeamento em conjunto com a competência específica **CEMAT03** de Matemática e suas Tecnologias:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Nessa Unidade, os estudantes utilizam conceitos e definições para compreender as características das funções logarítmicas e representá-las graficamente, e aplicam conceitos e procedimentos para identificar a lei de funções logarítmicas que representam situações em diferentes contextos. Em especial, essa competência específica é vinculada, no capítulo **2**, à habilidade **EM13MAT305**:

> Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

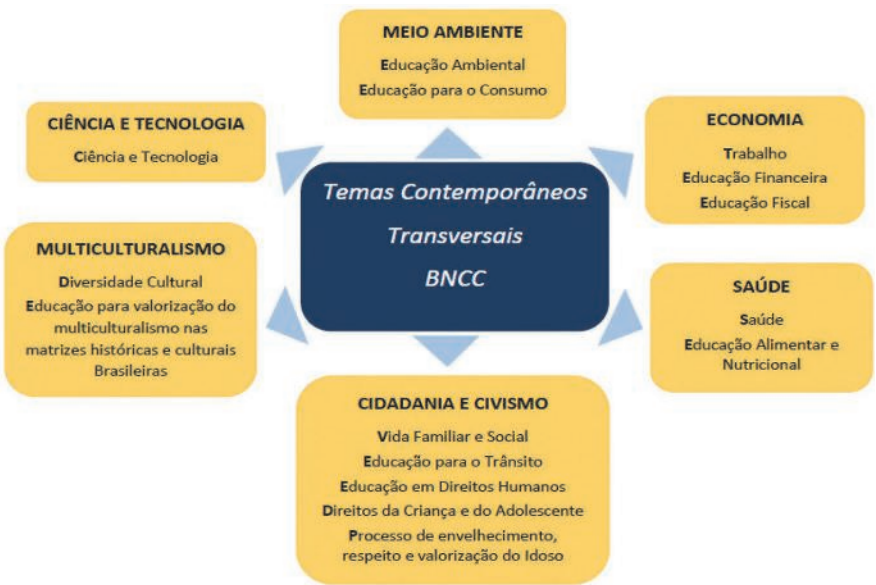
Isso ocorre pois, no referido capítulo, os estudantes exploram o comportamento das funções logarítmicas em problemas que envolvem contextos reais. Também nesse capítulo, para o estudo da poluição sonora, há a proposta de um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

2.2. Interdisciplinaridade e Temas Contemporâneos Transversais

Devemos considerar que os jovens do Ensino Médio estão sendo preparados para o enfrentamento dos desafios do século XXI e para a vida adulta em que poderão vir a exercer profissões, muitas das quais talvez ainda nem existam. Portanto, os desafios com os quais terão de lidar também estão em constante mudança e transformação.

Posteriormente à homologação da BNCC, outros documentos foram elaborados pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) para esclarecer a inserção de temas contemporâneos no ambiente escolar, passando a compor os chamados Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), organizados em 6 macrotemas.

Todos os temas são pautados na legislação brasileira vigente e contemplados em diferentes habilidades dos componentes curriculares, conforme prevê a BNCC, cabendo aos sistemas de ensino e às escolas tratá-los de modo contextualizado, de acordo com as especificidades. Na BNCC, os temas contemporâneos



Disponível em: https://tedit.net/naikz9. Acesso em: 1 set. 2024.

Governo Federal/Ministério da Educação

são indicados como temas "[...] que afetam a vida humana em escala local, regional e global" (Brasil, 2018a, p. 19). Por isso, devem ser abordados, preferencialmente, de maneira transversal e integradora, o que pode ser verificado em diversas propostas feitas nesta coleção.

Esses TCTs abrangem vários conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, e, portanto, favorecem o trabalho alicerçado na educação por competências. Se for considerada a articulação por áreas do conhecimento, a fim de que a interdisciplinaridade possa ser concretizada de modo contextualizado, os TCTs constituem uma oportunidade potente para esse trabalho.

Sendo assim, as competências específicas e as habilidades, de maneira integrada entre as áreas do conhecimento e com os TCTs, contribuem para o desenvolvimento das competências gerais, que visam à formação integral dos estudantes. Percebe-se que a interdisciplinaridade é apontada como uma maneira privilegiada de promover o desenvolvimento de competências visando à compreensão e à atuação no mundo. Na interdisciplinaridade escolar, as noções, finalidades, habilidades e técnicas visam favorecer, sobretudo, o processo de aprendizagem, respeitando os saberes dos estudantes e a integração entre eles (Fazenda, 2008, p. 21). É importante destacar que a realidade não é disciplinar; ela é complexa, relacional, múltipla e rica, bem como o são os saberes e desafios que os estudantes enfrentam e enfrentarão dentro e fora da escola.

2.3. Culturas juvenis e estudantes protagonistas das aprendizagens e dos próprios projetos de vida

Conforme já mencionado, a etapa do Ensino Médio tem por foco a proposição e a organização dos componentes curriculares e, também, de itinerários formativos. Para isso, os sistemas de ensino e as escolas devem construir os próprios currículos e propostas pedagógicas, considerando as características da região, as culturas locais, as necessidades de formação e as demandas e aspirações dos estudantes.

> Os itinerários formativos - estratégicos para a flexibilização da organização curricular do Ensino Médio, pois possibilitam opções de escolha aos estudantes - podem ser estruturados com foco em uma área do conhecimento, na formação técnica e profissional ou, também, na mobilização de competências e habilidades de diferentes áreas, compondo itinerários integrados [...] Assim, a oferta de diferentes itinerários formativos pelas escolas deve considerar a realidade local, os anseios da comunidade escolar e os recursos físicos, materiais e humanos das redes e instituições escolares de forma a propiciar aos estudantes possibilidades efetivas para construir e desenvolver seus projetos de vida e se integrar de forma consciente e autônoma na vida cidadã e no mundo do trabalho. (Brasil, 2018a, p. 477-478).

Qualquer que seja a opção feita, é preciso:

> [...] romper com a centralidade das disciplinas nos currículos e substituí-las por aspectos mais globalizadores e que abranjam a complexidade das relações existentes entre os ramos da ciência no mundo real. Para tanto, podem ser criadas situações de trabalho mais colaborativas, que se organizem com base nos interesses dos estudantes e favoreçam seu protagonismo. Algumas das possibilidades de articulação entre as áreas do conhecimento são: laboratórios, oficinas, clubes, observatórios, incubadoras, núcleos de estudos e núcleos de educação artística (Brasil, 2013, p. 183).

Considerando a necessidade de assumir o protagonismo de sua formação, o estudante é e deve ser o centro de todo o processo educacional, o autor da própria aprendizagem. Objetivando esse protagonismo, sugerimos a proposição constante de metodologias ativas – conforme explicitaremos mais detalhadamente a seguir –, de modo que cada estudante, tendo um papel ativo no processo, possa aprender mais e de maneira mais significativa.

DragonImages/Adobe Stock

Espera-se que o estudante possa construir autonomia em seu processo de aprendizagem, sendo também o protagonista de seu percurso formativo, de maneira que, aprendendo a aprender, possa continuar o processo mesmo depois de ter concluído a Educação Básica.

A BNCC traz um leque mais amplo de competências gerais, que devem ser foco em todas as etapas da Educação Básica e orientar o trabalho pedagógico em todos os componentes curriculares. É o caso, por exemplo, das competências gerais **CG03**, **CG04**, **CG05** e **CG06**, apresentadas a seguir.

> **3.** Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

> **4.** Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

Esse conjunto de competências, como as demais que constam na BNCC, aponta para uma percepção realista acerca das necessidades da juventude atual. Portanto, devem-se levar em conta as expectativas desses jovens e trabalhar com os temas curriculares a partir das realidades que eles vivenciam.

Nesse sentido, importa ressaltar que a juventude não é igual em toda parte; há uma variedade de culturas juvenis que coexistem nas escolas brasileiras. Assim, em sala de aula, é preciso levar em conta a pluralidade de perfis dos estudantes, o que implica considerar múltiplas dimensões: realidades socioeconômicas; personalidades; diferentes interesses; desníveis de aprendizagem e de desenvolvimento psicológico e cognitivo; entre outros.

Contribuir para a construção do projeto de vida desses jovens, como uma das atribuições da escola, implica articular os componentes curriculares, os conhecimentos específicos e as habilidades de cada área com atitudes de respeito ao outro e que combatam comportamentos capacitistas, posturas racistas, o *bullying*, etc.

2.4. Reflexões sobre o docente como mediador

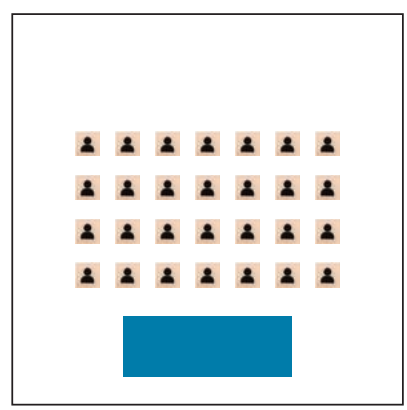
A adoção da prática educacional considerando as metodologias ativas nos leva a repensar a concepção de educação escolar, o papel do professor e a organização dos espaços pedagógicos. Nessa nova perspectiva, cabe a você, professor, a função de organizador, mediador, orientador e promotor da aprendizagem. Isso porque, assumindo que cada estudante deve ser protagonista da própria aprendizagem, ao professor cabe a responsabilidade de planejar, analisar, promover e acompanhar esses percursos. Os professores deixam de ser transmissores do conhecimento para se tornarem promotores e mediadores do conhecimento. Isso não significa que o papel do professor perde importância. Pelo contrário, é preciso que o corpo docente siga atento à pluralidade cultural e às mudanças constantes em nossa sociedade para ser capaz de se manter em diálogo com os estudantes.

De acordo com Demo (2001), existem algumas características e práticas que podem favorecer a formação e a atuação dos professores nessa nova perspectiva. É imprescindível que o professor se dedique à pesquisa, tenha atitude autoral, considere teoria e prática conjuntamente, mantenha-se atualizado constantemente, inclua diferentes recursos tecnológicos em sua prática, imponha abordagem interdisciplinar aos temas trabalhados e tenha como foco a aprendizagem dos estudantes.

Paralelamente, deve considerar que o aprendizado ocorre de maneira dialógica, ou seja, o professor deixa de ser o detentor do conhecimento para assumir o papel de investigador e aprendiz em conjunto com os estudantes. Passa, então, a olhar para o grupo com o intuito de identificar as particularidades, potencialidades e necessidades de cada estudante, sendo essa a razão de ser da atividade docente.

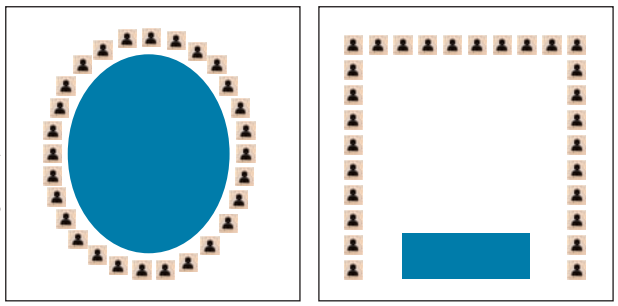
As metodologias ativas são um meio de alcançar esses objetivos. Elas são um conjunto de estratégias de ensino que têm o objetivo de conduzir o estudante à ação para que ele aprenda de maneira participativa e autônoma. Existem várias estratégias para trabalhar com metodologias ativas, e cabe ao professor perceber quais delas são as mais interessantes e adequadas e quais promovem maior engajamento e atuação de cada turma em cada momento, considerando os objetivos traçados. Existem diversas opções interessantes, como a aprendizagem baseada em problemas, a aprendizagem em equipe, a sala de aula invertida e a rotação por estações.

Além disso, para que esse deslocamento de perspectiva na sala de aula seja possível, é importante considerar a variedade de possibilidades estratégicas didáticas. É interessante, portanto, combinar a disposição dos estudantes na sala de aula com as propostas pedagógicas, dependendo do objetivo de cada proposta.



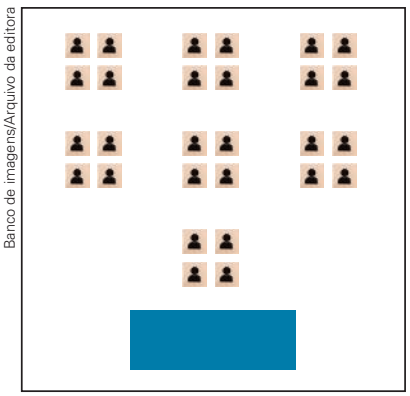
Banco de imagens/Arquivo da editora

A sala de aula que conhecemos como tradicional, com as carteiras enfileiradas, favorece o trabalho individual, especialmente para atividades relacionadas à reflexão. Mas esta é apenas uma – e não a única – possibilidade.



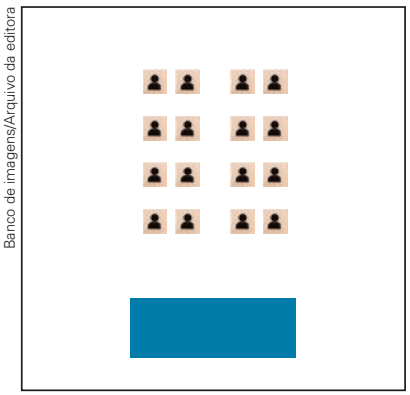
Banco de imagens/Arquivo da editora

Para uma atividade cujo objetivo seja o debate coletivo, a troca de experiências e saberes, bem como a contribuição de cada estudante para com o grupo, a organização das carteiras ao redor do professor ou em U pode ser uma boa opção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

No caso de uma atividade que demande a construção coletiva do significado de um conceito ou a sistematização de uma ideia, pode ser interessante que a turma esteja organizada em grupos de 4 ou 5 estudantes.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A organização em duplas tende a ser uma boa opção, por exemplo, para a resolução de problemas e a realização de atividades, pois a aprendizagem aos pares pode favorecer a troca de saberes.

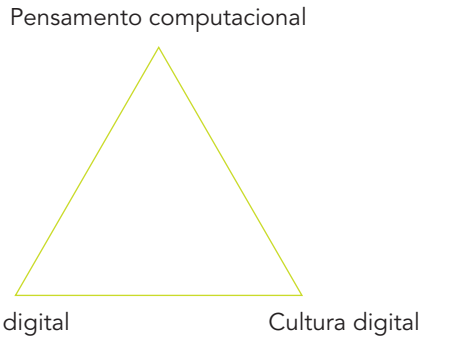
Vale destacar que, para as diferentes configurações, é preciso planejar com antecedência os grupos de trabalho, considerando as necessidades e, também, a diversidade de aspectos étnicos e culturais, bem como as diferentes maneiras de aprender e de se relacionar dos estudantes. A diversidade humana, que naturalmente existe dentro da sala de aula, passa a ser considerada valiosa, pois amplia e enriquece as práticas educacionais.

Mais sobre o assunto

Para conhecer mais sobre a concepção de metodologias ativas, diferentes tipos de metodologia e sugestões de abordagem em sala de aula, indicamos a leitura do livro *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem téorico-prática*, organizado por Lilian Bacich e José Moran (Porto Alegre: Penso, 2018).

2.5. Educação digital

A educação digital é, atualmente, uma necessidade nos mais variados espaços sociais. Diante dessa evidência, o Conselho Nacional de Educação estabeleceu, em 2019, as Normas sobre Computação na Educação Básica – Complemento à BNCC, também conhecida como a BNCC da Computação. Essa normativa foi proposta como um complemento da BNCC que trata do ensino da Computação, um guia que traz habilidades obrigatórias para todas as etapas da Educação Básica. Os conteúdos tratados nesse guia estão divididos em 3 eixos: Pensamento computacional, Mundo digital e Cultura digital.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O eixo de pensamento computacional aborda o raciocínio lógico, considerando a construção de soluções para diversos problemas, com habilidades como descrição de processos, organização e sistematização de informações. O eixo mundo digital trata de habilidades relacionadas ao universo virtual, como funcionamento técnico da internet, das redes e da computação em nuvem. Já o eixo de cultura digital refere-se às discussões políticas, éticas e sociais que envolvem o uso das tecnologias no mundo contemporâneo.

Em 2023, foi promulgada a Lei nº 14.533, que instituiu a Política Nacional de Educação Digital com a finalidade de "potencializar os padrões e incrementar os resultados das políticas públicas relacionadas ao acesso da população brasileira a recursos, ferramentas e práticas digitais, com prioridade para as populações mais vulneráveis". Entre os objetivos, está favorecer o "desenvolvimento de competências dos alunos da Educação Básica para atuação responsável na sociedade conectada e nos ambientes digitais, conforme as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular".

Mais sobre o assunto

O Instituto Ayrton Senna disponibiliza em seu *site* um rico material sobre o assunto: *Educação integral por meio do pensamento computacional – Letramento em programação: relatos de experiências e artigos científicos*, organizado por Amilton Rodrigo de Quadros Martins e Adelmo Antonio da Silva Eloy (1. ed. Curitiba: Appris, 2019). Organizado em seções e capítulos, apresenta artigos sobre tecnologias, programação e ensino de computação e de pensamento computacional na Educação Básica, além de relatos de experiências envolvendo esses e outros temas. Disponível em: https://tedit.net/5nf57z. Acesso em: 8 set. 2024.

2.6. Educação inclusiva

Para incluir estudantes com deficiência, o professor deve favorecer a interação e o respeito à diversidade em sala de aula. A seguir, apresentamos algumas orientações que podem contribuir em sua prática pedagógica.

- Conheça os estudantes, para que cada um seja assistido de modo adequado. Sugerimos uma conversa com eles e as respectivas famílias ou responsáveis, assim é possível compreender o contexto em que esses estudantes estão inseridos e entender as potencialidades e dificuldades desse cenário.
- Pergunte a cada estudante com deficiência qual é a melhor maneira de auxiliá-lo, ao perceber uma dificuldade.
- Caso a família ou responsável faça a entrega de algum documento ou relatório médico, é importante a análise das orientações sobre as adaptações necessárias para o estudante na escola.
- Sempre que possível, planeje as aulas e atividades considerando a acessibilidade, inclusive dos materiais didáticos, o que favorece a inclusão de todos. Por exemplo, ao passar um vídeo em aula, verifique se a resolução e o áudio estão adequados; em alguns casos, é necessário ativar a legenda dos vídeos e apresentá-lo em Libras.
- Valorize as potencialidades dos estudantes e incentive a todos a participar de maneira ativa em sala de aula.
- Seja objetivo ao falar e certifique-se de que cada estudante compreendeu a informação. Incentive-os a participar ativamente do próprio processo de ensino e aprendizagem e pergunte as dificuldades e quais recursos podem ajudá-los.
- Esteja atento a possíveis momentos de preconceito ou *bullying* em sala de aula e na escola, e não permita qualquer ação capacitista ou prática que diminua as potencialidades do estudante com deficiência.
- Estude e se aprofunde sobre os vieses inconscientes do capacitismo – uma opção para isso é buscar a orientação pedagógica da escola, na pessoa de um orientador ou psicólogo.
- Busque conhecer métodos de inclusão e educação especial, mantendo-se sempre atualizado sobre novas metodologias e tecnologias assistivas.

Cabe ressaltar que essas orientações estão articuladas com a Lei nº 13.146/2015, ou Estatuto da Pessoa com Deficiência. Essa legislação é essencial para garantir os direitos das pessoas com deficiência no Brasil. Essa Lei tem como foco ampliar o acesso à educação, ao trabalho, à saúde e à cultura, reforçando o respeito à dignidade e à autonomia das pessoas com deficiência, para que, assim, possamos construir uma sociedade mais justa e com equidade de oportunidades.

Mais sobre o assunto

Para aprimorar ainda mais a prática pedagógica, sugerimos a leitura de algumas dicas valiosas para o tratamento de pessoas com deficiência, seja no dia a dia em sala de aula, seja fora da escola.

ENAP. *Dicas de Atendimento ao Público com Deficiência. Programa de inclusão de pessoas com deficiência*. Disponível em: https://tedit.net/pfjwsz. Acesso em: 8 set. 2024.

Também sugerimos a leitura do artigo indicado a seguir, que visa diferenciar acesso, acessibilidade e inclusão, e apresentar as diferenças epistemológicas, pedagógicas e políticas dessas categorias, que são estruturantes da educação especial na perspectiva da educação inclusiva, projetando a escola como um ecossistema inclusivo.

FREITAS, Marcos Cezar de. Educação inclusiva: diferenças entre acesso, acessibilidade e inclusão. Universidade Federal de São Paulo (Unifesp), Guarulhos. *Scielo Brasil*, 3 jul. 2023. Disponível em: https://tedit.net/d14dnk. Acesso em: 8 set. 2024.

Sugerimos, ainda, a leitura do livro de Mariana Rosa e Karla Garcia Luiz sobre como educar crianças anticapacitistas.

ROSA, Mariana; LUIZ, Karla Garcia. *Como educar crianças anticapacitistas*. Florianópolis, 2023. Disponível em: https://tedit.net/d021mt. Acesso em: 9 set. 2024.

2.7. Argumentação (oral e escrita) e leitura inferencial

No Ensino Médio, intensifica-se o foco da aprendizagem para a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes, que diferem pelas variadas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros.

Diante dessas considerações, a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos

> conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. (Brasil, 2018a, p. 528-529).

Nesse sentido, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas, mobilizando o modo próprio de raciocinar, representar, argumentar e comunicar.

Já no caso das competências diretamente associadas ao ato de representar, a elaboração de registros para evocar um objeto matemático é uma ferramenta potente, pois, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação dos resultados de uma atividade ou de um raciocínio. Em continuidade, a competência de comunicar ganha importância no processo de apresentar e justificar resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. A argumentação e o desenvolvimento dessa competência pressupõem a formulação de conjecturas, bem como a etapa de testá-las e comprová-las, com a apresentação de justificativas, em conjunto com as competências mencionadas anteriormente.

Rawpixel.com/Shutterstock

As atividades de debate, escuta e validação conjuntas proporcionam aos estudantes o aprendizado de conceitos e o desenvolvimento de representações e procedimentos cada vez mais sofisticados e precisos.

No Ensino Médio, torna-se progressivamente mais importante o trabalho em torno do raciocínio dedutivo, ou seja, partir de ao menos uma premissa e chegar a uma conclusão. Nesse sentido, cabe destacar que o trabalho em torno da capacidade de diversificar as formas de raciocínio fica potencializado quando são propostas atividades pedagógicas em que os estudantes podem interagir entre si e, em especial, oralmente. Além disso, a possibilidade de expressar adequadamente um raciocínio por escrito não pode deixar de lado a habilidade correlata de comunicar oralmente esse mesmo raciocínio. Longe de ser algo automático, é preciso aprender e exercitar em sala de aula todas essas possibilidades.

2.8. Pluralismo de ideias e produção de análises (críticas, criativas e propositivas)

Os jovens vivenciam de muitas maneiras a participação na sociedade, inclusive no espaço escolar, em que fortalecem o estreitamento das relações pessoais com o grupo mais próximo, formando, com a participação nesse grupo, uma categoria socialmente produzida. Cada uma dessas categorias particulares adota uma maneira própria de expressar ou reinterpretar as culturas em que estão socialmente inseridas, caracterizando uma cultura juvenil.

Para que possam se desenvolver plenamente e atuar na sociedade, é importante que os estudantes desenvolvam o pensamento crítico e criativo, bem como atitudes propositivas e de respeito ao pluralismo de ideias.

A análise crítica é uma habilidade essencial no mundo contemporâneo. Trata-se de um processo de avaliação cuidadoso e objetivo de informações, ideias ou pontos de vista, o que envolve questionar, examinar e refletir sobre as informações apresentadas.

A atitude propositiva incentiva o indivíduo a buscar soluções e a adotar uma postura construtiva diante das questões. Uma pessoa propositiva concentra-se na elaboração de ideias que representam ganhos para o coletivo e na proposição de soluções e respostas para possíveis dúvidas e problemas. Além disso, é capaz de antecipar obstáculos ou desafios, prever necessidades e propor soluções.

Por sua vez, uma postura criativa diante dos acontecimentos contribui para a participação crítica e cidadã. Nesse sentido, é preciso inspirar os estudantes a pensar em projetos que vão além das fronteiras da sala de aula, envolvendo-os em projetos de pesquisa, atividades sociais e iniciativas comunitárias.

Ao promover, dentro da escola, atitudes e comportamentos de respeito e acolhimento, considerando o pluralismo de ideias e a diversidade inerente à humanidade, podemos contribuir para a cultura de paz, que pode ser entendida como um conjunto de valores, atitudes e comportamentos fundamentais para o respeito à vida, aos direitos humanos e à garantia de liberdades fundamentais do ser humano. É preciso auxiliar os estudantes a compreender que o pluralismo de ideias é algo positivo, e não motivo para violência. O diálogo nutre-se de humildade, confiança e respeito, contribuindo para a compreensão de que é possível viver as diferenças se reconhecermos o direito do outro a ter os próprios pontos de vista.

Mais sobre o assunto

A obra *Práticas educativas e Cultura de Paz: articulando saberes e fazeres*, organizada por Eliana Maria do Sacramento Soares e Lezilda Maria Teixeira (Caxias do Sul, RS: Educs, 2018), é um manual de orientação para professores, com práticas relacionadas à Cultura de Paz. O segundo capítulo destaca práticas na Educação Básica. Disponível em: https://tedit.net/rurj0q. Acesso em: 8 set. 2024.

2.9. Pensamento computacional

O pensamento computacional vem sendo considerado, por alguns autores, tão importante no mundo contemporâneo quanto o desenvolvimento de linguagens, como a língua materna e a Matemática. A origem dessa expressão tem relação com um artigo publicado pela cientista da computação e pesquisadora estadunidense Jeannette Wing (1956-) e com reflexões da psicologia cognitiva, que envolve processos de pensamento que se desenvolvem quando se usam fundamentos da computação.

O conceito de pensamento computacional não se limita aos estudos e aos profissionais da Ciência da Computação, à programação ou ao uso de computadores nem às habilidades de um dos eixos da BNCC da Computação, mas está relacionado às habilidades e aos raciocínios inerentes a eles, que são importantes para todos. Esse conceito envolve resolução de problemas, pensamento recursivo, abstração, algoritmos, fluxogramas, decomposição, análise de erros, planejamento e replanejamento, assim como a criatividade na busca por soluções de problemas.

> Pensamento computacional envolve resolução de problemas, desenvolvimento de sistemas e compreensão do comportamento humano baseando-se nos conceitos fundamentais à ciência da computação. Pensamento computacional inclui uma gama de ferramentas mentais que refletem a abrangência da ciência da computação (Wing, 2006, p. 33, tradução dos autores).

Assim, podemos refletir que o pensamento computacional é um processo de raciocínio que envolve abstração para identificar a principal característica da solução para uma situação, a fim de que essa solução possa se tornar válida para diversos problemas similares. Isso implica que a abstração é algo que não acontece de uma hora para outra, mas somente após decomposições sucessivas do problema em partes menores, menos complexas e mais fáceis de resolver.

Podemos definir 4 pilares para o pensamento computacional:

- **Decomposição**: fragmentar um problema complexo em partes menores e trabalhar uma de cada vez.
- **Abstração**: focar no centro do problema em vez de priorizar os detalhes, analisando-o de maneira mais crítica e sistemática.
- **Pensamento algorítmico**: criar um sequenciamento de passos que, juntos, configuram a resolução do problema.
- **Reconhecimento de padrões**: identificar regularidades que podem favorecer a generalização de uma resolução para problemas similares.

Tanto a BNCC quanto a BNCC da Computação preveem o desenvolvimento do pensamento computacional em todos os anos do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Esse conceito está, de fato, presente quando os estudantes precisam desenvolver uma representação do raciocínio lógico em atividades de todas as áreas do conhecimento. Nesta coleção, ele está presente, por exemplo, em seções, em atividades que envolvem a resolução de problemas, na compreensão do passo a passo de um processo, nos projetos propostos e na elaboração de fluxogramas.

2.10. Resolução e elaboração de problemas

Quando consideramos a importância da resolução de problemas, objetivamos que os estudantes possam identificar o problema e os dados fornecidos, traçar um plano de ação, obter uma possibilidade de resposta e, por fim, validar essa resposta. Apesar de ser muito coerente com a Educação matemática, a resolução de problemas é uma habilidade fundamental para a vida, não sendo restrita a uma área do conhecimento.

O matemático e professor húngaro George Pólya (1887-1985) foi um dos grandes estudiosos da resolução de problemas, e é em muitas das reflexões dele que nos pautamos para a elaboração desta coleção.

Segundo Pólya, no livro *A arte de resolver problemas*, há 4 etapas para a resolução de um problema: a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução desse plano e o retrospecto ou a verificação.

Para compreender um problema, é preciso identificar informações essenciais à resolução: os dados fornecidos, as respostas que precisamos obter e, sobretudo, quais condições ligam esses dados (ou parte deles) às respostas. Nesse momento, é importante promover a reflexão, indagando os estudantes e incentivando-os a criar hipóteses para as quais pode ser útil empregar recursos como desenhos, esquemas, diagramas, entre outros.

Após a compreensão, é preciso elaborar o plano de ação, ou seja, planejar os passos, identificar os recursos e possíveis caminhos para a resolução. De acordo com Pólya (1995, p. 5), "temos um plano quando conhecemos, pelo menos de modo geral, quais as contas, os cálculos

ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita". Nesse momento, é possível perceber que um problema pode ter várias estratégias de resolução, pois, no mundo real, os problemas não aparecem sempre de maneira "fechada" e organizada.

O trabalho em grupos e a elaboração de painéis de solução são estratégias pedagógicas que podem favorecer essa percepção. Para elaborar o plano, incentive os estudantes a se lembrarem de problemas similares que já realizaram, a elaborar desenhos, diagramas e tabelas e a refletir sobre a possibilidade de resolvê-lo por partes. É também no momento do estabelecimento de um plano que deve ocorrer a seleção dos dados fornecidos que serão utilizados (no caso de problemas com excesso de dados) ou de outros dados que não foram expressos no enunciado, mas são necessários para a resolução (problemas com falta de dados).

De acordo com Pólya (1995, p. 8), a execução do plano exige paciência e método porque, tendo sido o plano bem realizado, a prática é basicamente sua aplicação. Após a execução do plano, os estudantes provavelmente chegarão a uma resposta, mas é importante refletir e verificar se ela é coerente. Isso porque podem ter ocorrido erros durante a resolução – e essa percepção é enriquecedora para o processo de aprendizagem. A ação de retrospecto ou verificação pode trazer grandes benefícios quanto à construção e ao aperfeiçoamento das competências e habilidades dos estudantes em resolver problemas.

> Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo (Pólya, 1995, p. V).

Além da resolução de problemas, a BNCC apresenta diversas habilidades com foco na elaboração de problemas, bem como parte do próprio texto da **CG02**: "formular e resolver problemas e criar soluções (até mesmo tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas". O processo de elaboração de problemas é um passo à frente da proposta de resolvê-los, pois exige de cada estudante a plena compreensão não apenas da situação e da pergunta a que se quer responder, mas também de todos os dados que precisam ser fornecidos e dos conceitos que serão utilizados, bem como, é claro, criatividade.

Ground Picture/Shutterstock

Propor um trabalho para ser resolvido inicialmente em duplas ou grupos, seguido de propostas individuais, quando os estudantes se sentirem seguros para isso, também é uma estratégia de aprendizado.

Para atingir o propósito de resolver e elaborar problemas, conforme as diversas propostas didáticas apresentadas nos Volumes desta coleção, diferentes caminhos podem ser seguidos e etapas intermediárias podem ser trilhadas para ampliar o repertório dos estudantes.

Por exemplo, analisar problemas do livro, compreendendo os dados informados, as respostas que precisamos obter e a estrutura do enunciado, permite a elaboração de problemas com estruturas similares ou novas perguntas para o mesmo conjunto de dados. Ainda explorando um problema já formulado, os estudantes também podem refletir e explicar o que ocorreria se algum dado fosse alterado, acrescentado ou retirado. Além disso, a coleta externa de informações para a elaboração de um problema não apenas amplia o repertório dos estudantes e torna a situação significativa para eles como os aproxima de situações às quais eles poderiam ser, de fato, expostos; afinal, no cotidiano estamos constantemente recebendo informações, dados e valores, fazendo cálculos, respondendo a perguntas e tomando decisões.

2.11. Investigação científica e raciocínios lógico-matemáticos

A proposição de problemas e atividades que envolvam o desenvolvimento dos diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático (indução, dedução, abdução e raciocínio por analogia) para analisar e explicar processos de investigação sem dúvida colabora para um ambiente de ensino e de aprendizagem repleto de significados. Nesse sentido, de acordo com as propostas feitas em cada Volume do Livro do Estudante desta coleção, é importante

que os estudantes façam investigações de natureza matemática com cientificismo, pois, desse modo, formalizam os conteúdos enquanto desenvolvem o raciocínio e a lógica.

Se é certo que uma hipótese é um modo de proporcionar uma resposta temporária a uma pergunta, também é certo que o que realmente importa não é que a hipótese esteja correta, mas sim que ela inicie um processo por meio do qual o estudante analise e discuta, compare, avalie, conclua, verifique, valide e demonstre. O raciocínio vai além do ato intelectual em si, transcende-o, estabelece vínculos, formando um processo que exige demonstrações e provas das "verdades" que se estão conhecendo ou investigando. O processo de conhecimento proporcionado pela investigação de acordo com o aspecto científico privilegia novas maneiras de pensar e de o estudante se envolver com a Matemática em ambiente escolar.

Mais sobre o assunto

- No livro *Investigações matemáticas na sala de aula*, de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira (4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. Coleção Tendências em Educação matemática, 7), os autores apresentam desafios e benefícios das práticas de investigação em aulas de Matemática com base em informações coletadas em pesquisas que envolvem professores e estudantes. As análises que surgem das reflexões dessas vivências compõem um rico material para quem deseja implantar investigações matemáticas nas aulas.
- O livro *Iniciação à Filosofia: Ensino Médio*, de Marilena Chaui (3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. único), traz, nas páginas 94 a 97, explicações sobre os tipos de raciocínio por dedução, indução e abdução, mencionados anteriormente.

2.12. Etnomatemática

> Conhecimentos e comportamentos são compartilhados e compatibilizados, possibilitando a continuidade dessas sociedades. Esses conhecimentos e comportamentos são registrados, oral ou graficamente, e difundidos e passados de geração para geração. Nasce, assim, a história de grupos, de famílias, de tribos, de comunidades, de nações (D'Ambrosio, 2019, p. 23).

De acordo com essa citação, da obra *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*, do matemático e professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (1932-2021), um dos pioneiros no estudo da Etnomatemática e, também, precursor e idealizador desse tema, percebe-se que há produção de conhecimento em todas as culturas. Dessas produções, pode-se inferir que algumas são originadas da Matemática, sendo esta subordinada a um contexto social e cultural específico em determinado período histórico. A Matemática surgiu como um dos meios de auxílio para a concretização de necessidades básicas do ser humano, como a construção de moradias, a fabricação de utensílios e a manutenção e contagem dos rebanhos. Desse modo, ao longo da História, tanto a afirmação de identidade dos grupos sociais quanto a história desses mesmos grupos passam pela Matemática.

Stefan Lambauer/Shutterstock

As peças de cestaria do povo Yanomami revelam a presença de conceitos matemáticos, como contagem, simetria e Geometria. Exposição no Museu do Amanhã na cidade do Rio de Janeiro, RJ. Foto de 2022.

De acordo com D'Ambrosio (2019, p. 2), a Etnomatemática busca, dentro de um "ambiente natural, social, cultural e imaginário" (*etno*), "explicar, aprender, conhecer e lidar com" (*matema*) "modos, estilos, artes, técnicas" (*tica*). Nesse sentido, ela aborda as relações interculturais. E o que propõe? O incentivo para que a Matemática venha a ser explicada e entendida dentro de um contexto cultural próprio. De que modo? Explicando os procedimentos de formação, de organização e de transmissão de conhecimentos em sistemas culturais variados. Com qual finalidade? A de conduzir o estudo da Matemática a novas maneiras de relação intercultural.

O ensino e a aprendizagem da Matemática, na perspectiva da Etnomatemática, possibilitam estabelecer uma relação mais construtiva e consistente entre teoria e prática ao considerar experiências cotidianas como um rico material a ser analisado e a respeito do qual se pode refletir.

A Etnomatemática contribui para a decolonização do pensamento. Nas últimas décadas, muitos estudiosos têm destacado que a produção de conhecimento acontece não apenas na Europa e nos Estados Unidos. No entanto, por razões históricas, somos ainda levados a considerar que a ciência válida seria aquela produzida apenas no hemisfério norte.

A decolonialidade do saber nos ajuda a compreender que, mesmo com o fim do período colonial, nós, povos que fomos colonizados, seguimos muitas vezes atribuindo valor apenas ao conhecimento produzido pelos países que foram colonizadores. Portanto, para ampliarmos a

compreensão do mundo em que vivemos, é importante darmos atenção também a outras tradições e a outras produções de saberes, como as latino-americanas e as africanas.

2.13. Uso pedagógico de tecnologias digitais

Ao longo da História, percebemos o desenvolvimento de diferentes tecnologias associadas à inteligência humana. Em um primeiro momento, foi a interação oral que estabeleceu a transmissão das informações e do conhecimento, fazendo-os circular nos diversos grupos sociais. Com a invenção da escrita e, posteriormente, da imprensa, surgiu a possibilidade de divulgar informações em modos de distribuição contínuos e lineares. Já o advento recente da informática tornou possível estabelecer o uso do *hiperlink*, uma ligação que conduz a outras unidades de informação, remetendo a outros documentos.

É fato que a escola está inserida nesse contexto histórico-social, e, por isso, a utilização de tecnologias digitais nas práticas pedagógicas oferece uma enorme contribuição para o processo de ensino e aprendizagem. Ao introduzir e utilizar esses recursos no ambiente escolar, você se propõe a descobrir e experimentar, experimentação que oportuniza um processo de (re)elaboração e (re)adaptação constantes aos conceitos que estão sendo estudados. Exatamente por isso, o uso de tecnologias digitais pelos estudantes jamais deve encontrar ênfase maior no recurso digital em si, em detrimento do papel da aprendizagem.

Assim como a aplicação das metodologias ativas, o uso dos recursos digitais na escola rompe com a transmissão direta de conhecimento do professor – o detentor de todo o conhecimento – para o estudante, que deixa de ter um papel passivo no processo de ensino e aprendizagem. Assim, o uso pedagógico das tecnologias digitais representa um incentivo ao protagonismo dos estudantes.

Para as aulas de Matemática, em especial, diversos recursos e ferramentas tecnológicos podem ser úteis no processo de ensino e aprendizagem, como calculadoras, *softwares* de Geometria dinâmica, planilhas eletrônicas, compiladores de códigos, simuladores e laboratórios virtuais. Para utilizá-los, é importante sempre preparar-se previamente, mapeando os dispositivos que precisarão estar disponíveis e a internet, se for necessário utilizá-la no momento da aula, bem como conhecendo os *softwares* ou aplicativos que serão trabalhados, para que você, professor, possa auxiliar os estudantes sempre que for preciso.

É possível encontrar na internet diversos tutoriais de utilização de diferentes ferramentas tecnológicas para uso em sala de aula, bem como atividades já construídas e que podem proporcionar aos estudantes um momento inicial de conhecimento da plataforma escolhida ou um momento final para ampliação das propostas didáticas apresentadas nesta coleção.

3. Avaliações

A avaliação das aprendizagens é inerente ao processo de aprendizagem, e compreender sua conceituação e aplicação prática é fundamental para promover um ensino de qualidade e o desenvolvimento integral dos estudantes. Aqui buscamos explorar as visões de diferentes educadores de maneira a contribuir para a construção de uma prática avaliativa que vá além da simples aferição de conhecimentos.

Cipriano Luckesi (2002) afirma que a avaliação deve ser contínua e formativa, focada na melhoria do ensino e da aprendizagem. Ela deve servir como ferramenta para a transformação social e promover a reflexão crítica e o desenvolvimento dos estudantes.

Philippe Perrenoud (2001) destaca a importância da avaliação formativa, que busca identificar e superar as dificuldades de aprendizagem ao longo do processo educativo. Ele enfatiza que a avaliação deve ser contextualizada e adaptada às características individuais dos estudantes.

Domingos Fernandes (2009) argumenta que a avaliação deve ser formativa e proporcionar *feedback* constante, auxiliando professores e estudantes a identificarem pontos fortes e aspectos que necessitam de melhoria. De acordo com ele, a prática avaliativa deve ser parte integrante do cotidiano escolar, promovendo a autorregulação e o engajamento dos estudantes.

Jussara Hoffmann[1] (2003) propõe uma avaliação dialógica, em que a interação e a comunicação entre professores e estudantes são fundamentais. Para ela, a avaliação deve ser um ato pedagógico que contribua para a autonomia, a reflexão crítica e o crescimento pessoal dos estudantes.

Ao explorar as concepções de avaliação da aprendizagem desses autores, constrói-se uma visão abrangente e crítica sobre como ela pode ser utilizada de maneira eficaz e justa no contexto educativo, promovendo o desenvolvimento integral dos estudantes e a melhoria contínua do processo de ensino e aprendizagem.

[1] HOFFMANN, Jussara. *Avaliação mediadora*: uma prática em construção da pré-escola à universidade. Porto Alegre: Mediação, 2003.

3.1. A avaliação em Matemática

3.1.1. Por que avaliar?

As avaliações e os resultados delas são úteis para (re)definir a rota, ou seja, é preciso avaliar para planejar a continuidade do trabalho pedagógico. As habilidades matemáticas, especialmente a capacidade de resolver e elaborar problemas, desenvolvem-se ao longo do tempo, como resultado de variadas oportunidades e do confronto com situações do mundo real. Assim, é preciso monitorar esses processos de desenvolvimento das habilidades matemáticas para acompanhar a evolução e a consolidação ao longo do ano letivo.

Além disso, durante as aulas e as avaliações, debatem-se ideias e conceitos matemáticos, partilham-se descobertas, confirmam-se hipóteses e adquirem-se conhecimentos matemáticos pela escrita, pela fala e pela leitura. O próprio ato de comunicar clareia e organiza o pensamento e leva os estudantes a se envolverem na construção do conhecimento de Matemática.

3.1.2. O que avaliar?

Diferentes tipos de avaliação – como os que exemplificaremos a seguir – podem e devem ser aplicados ao longo dos anos letivos da Educação Básica, com distintos propósitos específicos, bem como variados procedimentos e instrumentos de avaliação.

Toda avaliação parte de um planejamento prévio, no qual são estabelecidos os critérios avaliativos que, geralmente, são definidos pelo educador a partir dos objetivos da avaliação e do conjunto de competências e habilidades que se pretendem avaliar.

Assim, é sempre necessário definir o conjunto de habilidades no planejamento da avaliação e, para cada critério/habilidade, compor as atividades e questões que podem auxiliar como ferramenta avaliativa. Nas avaliações em larga escala, como o Enem e o Saeb, são elaboradas matrizes de avaliação nas quais esses critérios são definidos como habilidades descritoras do objeto a ser avaliado.

De modo geral, nas avaliações de Matemática, a depender do tipo de avaliação, é importante mensurar o que os estudantes já sabem, como sabem e como pensam matematicamente, bem como se eles compreenderam os conceitos e os procedimentos e se desenvolveram atitudes positivas em relação à Matemática. A análise da capacidade de mobilizar conhecimentos matemáticos para o desenvolvimento de argumentos, bem como do processo e da criatividade nas soluções dadas pelos estudantes para as situações-problema propostas, também deve ser objeto de avaliação.

3.1.3. Como avaliar?

Definidos os critérios avaliativos, outros procedimentos principais, citados a seguir, são comuns aos diferentes tipos de avaliação.

- Planejamento dos critérios avaliativos (comuns e/ou individuais).
- Elaboração das atividades e questões avaliativas com base nos critérios definidos.
- Aplicação das avaliações.
- Análise e registro dos resultados das avaliações.
- *Feedback* e intervenções educacionais com base nos resultados das avaliações (como seções de revisão e retomada de conteúdos).
- Acompanhamento e monitoramento contínuo.
- Celebração de conquistas.

Na Matemática, especificamente, os diferentes tipos de avaliação devem apresentar situações-problema que envolvam a mobilização de um conjunto de ideias matemáticas, situações abertas que tenham mais de uma solução, propostas de elaboração de problemas envolvendo conteúdos e/ou contextos dados, entre outros tipos de atividades e questões.

O registro dos resultados das avaliações e o acompanhamento de cada estudante durante o ano letivo (ou durante os anos letivos, se possível) são úteis e importantes para melhor condução das aprendizagens individuais e coletivas, monitorando as evoluções e agindo de modo imediato e contínuo para garantir os objetivos educacionais propostos.

Observações sistemáticas feitas em sala de aula, diários de aprendizagem, conversas com os estudantes e coleta de trabalhos para compor portfólios, bem como a criação de registros e relatórios dos resultados das avaliações (em tabelas e/ou gráficos, por exemplo), permitem esse acompanhamento ao longo do tempo, tanto por parte dos professores quanto dos próprios estudantes ou familiares.

A seguir, apresentamos alguns tipos de avaliação e sugestões de instrumentos avaliativos. É importante salientar que, além de escolher estes ou outros tipos de avaliação a serem aplicados no Ensino Médio, você, professor, tem autonomia para selecionar os instrumentos avaliativos e os procedimentos de registro e acompanhamento mais adequados para cada tipo de avaliação, levando em conta o planejamento pedagógico e a realidade dos estudantes.

3.2. Os tipos de avaliação

3.2.1. Avaliação diagnóstica

Luckesi (2002, p. 43) descreve que "para não ser autoritária e conservadora, a avaliação tem a tarefa de ser diagnóstica, ou seja, deverá ser o instrumento dialético do avanço, terá de ser o instrumento da identificação de novos rumos".

Esse tipo de avaliação busca identificar conhecimentos prévios, habilidades, dificuldades e interesses dos estudantes. Permite ao professor planejar e adaptar as estratégias de ensino às necessidades de cada turma, e mesmo de cada estudante, promovendo um processo de ensino e aprendizagem mais personalizado.

Além disso, a avaliação diagnóstica ajuda a detectar possíveis lacunas no conhecimento dos estudantes, possibilitando intervenções pedagógicas precoces para corrigir essas deficiências antes que se tornem obstáculos maiores ao aprendizado.

Como sugestões de instrumentos para avaliação diagnóstica, podem ser úteis: testes diagnósticos, com perguntas objetivas, questões abertas e problemas sobre conhecimentos específicos e habilidades; conversas individuais para explorar percepções, dificuldades e interesses; coleta de trabalhos anteriores dos estudantes para compor um portfólio visando a uma análise mais detalhada do desenvolvimento individual deles ao longo do tempo.

3.2.2. Avaliação formativa

Matui[2] (1995) designa a avaliação em sua concepção formativa como "avaliação dialógica". De acordo com Jorba e Sanmartí:

> a avaliação formativa tem como finalidade fundamental a função ajustadora do processo de ensino-aprendizagem para possibilitar que os meios de formação respondam às características dos alunos. Pretende-se detectar os pontos fracos da aprendizagem, mais do que determinar quais os resultados obtidos com essa aprendizagem.
>
> JORBA, J.; SANMARTÍ, N. A função pedagógica da avaliação. *In*: BALLESTER, M. *et al. Avaliação como apoio à aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2003.

Esse tipo de avaliação visa monitorar o progresso dos estudantes ao longo do processo educativo, identificar dificuldades e reforçar a compreensão dos conteúdos antes que as dificuldades de aprendizagem se tornem maiores. Pode, também, promover a autorregulação dos estudantes, incentivando-os a refletir sobre o próprio aprendizado e a desenvolver habilidades de autoavaliação.

Além da observação sistemática das interações e do comportamento dos estudantes durante as atividades em sala de aula para identificar informações valiosas sobre as habilidades sociais, a motivação e a compreensão dos conteúdos, testes, questionários e *quizzes* (com questões de múltipla escolha, verdadeiro ou falso, perguntas abertas, entre outros) podem ser aplicados regularmente como instrumento para avaliação formativa, pois ajudam a verificar a compreensão dos estudantes sobre tópicos específicos em estudo. O preenchimento de *checklist* de desempenho, como uma lista de verificação, também permite monitorar o cumprimento de etapas específicas ou habilidades durante o desenvolvimento de atividades ou projetos.

3.2.3. Avaliação comparativa

A avaliação comparativa envolve a comparação do desempenho de um estudante com o de outros a partir de critérios preestabelecidos. Tem por objetivo situar o desempenho individual dentro de um contexto maior, identificando tanto os estudantes que se destacam por resultados mais assertivos que a média quanto aqueles que precisam de apoio adicional.

Segundo Fernandes (2009), esse método de avaliação ajuda a identificar padrões de desempenho e diferenças significativas entre grupos de estudantes, fornecendo dados importantes para a tomada de decisões pedagógicas e políticas educacionais. Esse tipo de avaliação é comum durante o Ensino Médio, especialmente em simulados ou em provas oficiais (vestibulares e avaliações como o Enem).

No geral, avaliações comparativas têm o formato de testes padronizados com questões (abertas ou fechadas) que avaliam os mesmos conteúdos e aprendizagens para todos os estudantes e, por isso, permitem uma comparação direta entre diferentes indivíduos ou grupos.

3.2.4. Avaliação ipsativa

A avaliação ipsativa, no contexto educacional, foca no progresso pessoal do estudante ao longo do tempo. Ela permite a cada um perceber as próprias melhorias, identificar áreas de crescimento e estabelecer metas pessoais. Essa abordagem contrasta com as demais avaliações citadas, pois é particularmente motivadora, uma vez que destaca as conquistas individuais e incentiva a autoeficácia e a autoestima, assim como detecta lacunas de aprendizado. Além disso, é especialmente valiosa no Ensino Médio, podendo, inclusive, ser associada às definições de projeto de vida dos estudantes.

Como sugestões de instrumentos avaliativos, podemos citar: autoavaliação, para que os estudantes reflitam sobre as próprias habilidades e os conhecimentos desenvolvidos; diário de aprendizagem, para que eles registrem as próprias experiências de aprendizagem, reflexões, dúvidas e progressos diários ou semanais; contrato de estudo ou plano de estudo, no qual se explicitam os conteúdos, competências ou habilidades que serão trabalhados durante um período para que estes sejam acompanhados.

[2] MATUI, Jiron. *Construtivismo*. São Paulo: Moderna, 1995.

3.2.5. Avaliação somativa

A avaliação somativa é uma abordagem que visa avaliar a aprendizagem dos estudantes ao final de um período, como um semestre ou ano letivo, para determinar se eles alcançaram os objetivos estabelecidos e qual é o nível de competência que demonstram em relação aos conteúdos curriculares previstos.

Esse tipo de avaliação é frequentemente utilizado para atribuir notas e fornecer informações sobre a eficácia do ensino. Por isso, tem função regulatória, subsidiando decisões de recuperação, conselhos de classe e eventuais reprovações, se necessário.

No geral, a avaliação somativa é mensurada com instrumentos como: prova escrita (método tradicional de avaliação, na qual os estudantes respondem a perguntas ou realizam tarefas em período determinado); trabalho escrito (podendo incluir ensaios, relatórios de laboratório, resenhas de livros, pesquisas, entre outros) – usado para aferir a compreensão do conteúdo de modo mais elaborado do que em uma prova escrita; apresentação oral – permite aos estudantes demonstrar os conhecimentos e as habilidades de comunicação ao dissertar sobre um tema específico para o professor ou para a turma.

3.3. Trabalhando o Enem em sala de aula: estratégias para melhorar o desempenho dos estudantes

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), criado em 1998 pelo MEC, avalia a qualidade do Ensino Médio e oferece acesso ao Ensino Superior em universidades públicas e em redes particulares.

Seguem algumas estratégias específicas para trabalhar o Enem em sala de aula, visando melhorar o desempenho dos estudantes nas questões de Matemática e colaborar com o trabalho docente.

- **Revisão dos conceitos fundamentais:** priorize a revisão de tópicos essenciais, como Álgebra, Geometria, Trigonometria e Educação financeira, que são frequentemente abordados nas provas, e aprofunde conceitos básicos e avançados para garantir uma compreensão sólida pelos estudantes.
- **Resolução de problemas contextualizados:** utilize problemas que envolvam situações cotidianas, como cálculos financeiros e análise de gráficos e de dados estatísticos, para demonstrar a aplicação prática da Matemática e ajudar os estudantes a compreenderem a relevância dos conceitos aprendidos.
- **Utilização de simulados e exercícios práticos:** aplique simulados regulares com questões no estilo Enem para familiarizar os estudantes com o formato da prova e melhorar as habilidades de gerenciamento do tempo; após cada simulado, revise as questões e debata com eles estratégias de resolução.
- **Uso de tecnologia educacional:** incorpore ferramentas tecnológicas, como aplicativos de resolução de problemas e plataformas *on-line* de aprendizado, para diversificar o método de ensino e engajar os estudantes.
- **Incorporação de ferramentas tecnológicas:** proponha o uso de aplicativos de resolução de problemas matemáticos e plataformas *on-line* de aprendizado.

4. A coleção da área de Matemática e suas Tecnologias

4.1. Abordagem teórico-metodológica e pressupostos da coleção

A elaboração desta coleção apoia-se em pesquisas em Educação matemática sem perder de vista as orientações oficiais do MEC, de modo especial, a BNCC. Assim, as abordagens teórico-metodológicas que inspiraram esta coleção buscam auxiliar você, professor, a garantir a aprendizagem efetiva dos estudantes e o melhor aproveitamento deles na aquisição de conhecimentos de modo significativo.

Exatamente por isso, nas *Orientações gerais* deste Manual, abordamos aspectos que se entrecruzam na ação pedagógica e na prática educativa que envolvem a resolução e a elaboração de problemas, a argumentação (oral e escrita), a leitura inferencial e as análises (críticas, criativas e propositivas), a investigação científica, as metodologias ativas, o pensamento computacional, o uso pedagógico de tecnologias digitais e a Etnomatemática.

Especialmente sobre o trabalho pedagógico com a resolução e elaboração de problemas, vale destacar que, nesta coleção, procuramos instrumentalizar o estudante para resolver problemas reais. De acordo com a BNCC (Brasil, 2018a, p. 265), espera-se que os estudantes:

> desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações [...].

E isso nos leva a refletir sobre a importância de os problemas explorados em sala de aula serem contextualizados para dar sentido ao aprendizado.

Também pautaram a seleção dessa estrutura: o pluralismo de ideias e o convívio social republicano, a Cultura de Paz, a saúde mental dos estudantes, os TCTs e os princípios de educação integral, de respeito e valorização da diversidade, de relevância, de contemporaneidade e de colaboração. Mas, sem dúvida, o que predominou na seleção desse grupo de enfoques orientadores foi aquilo que eles apresentam e agregam como debates e pontos importantes a fim de que os objetivos de ensino, de aprendizagem e de desenvolvimento discente "ganhem vida" e venham a ser uma realidade possível.

4.2. Estrutura da coleção

Os 3 Volumes do Livro do Estudante desta coleção estão divididos em Unidades, que, por sua vez, são subdivididas em 2 a 4 capítulos cada uma. Cada Unidade apresenta, na **abertura da Unidade**, uma situação referente a algum tema dos capítulos, contendo questões contextualizadas para reflexão que visam preparar os estudantes para os conteúdos que serão abordados nas aulas seguintes.

A **abertura de capítulo** também apresenta situações-problema mais especificamente relacionadas ao conteúdo trabalhado, apresentando questões contextualizadas.

Os capítulos são compostos de tópicos de conteúdo teórico e variadas seções para serem trabalhadas ao longo do estudo.

- ***Atividades***: Essa seção ocorre ao longo do capítulo, intercalada com os tópicos de conteúdo teórico, e têm relação com o respectivo tópico. A seção apresenta atividades e problemas envolvendo contextos cotidianos, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, para o estudante aplicar e aprofundar os conteúdos estudados. Nela também há atividades que visam à elaboração de perguntas e problemas.
- ***Atividades resolvidas***: Nessa seção, há a apresentação da resolução detalhada de atividades e problemas, visando exemplificar estratégias de resolução. Algumas das atividades resolvidas apresentam, também, a resolução passo a passo de um problema, organizada em subtítulos: *Lendo e compreendendo*; *Planejando a solução*; *Executando o que foi planejado*; *Emitindo a resposta*; *Ampliando a atividade* (este é opcional). Perceba que essa seção é organizada de acordo com a perspectiva de resolução de problemas de Pólya.
- ***Tecnologias digitais***: A seção apresenta atividades de investigação, exploração e simulação para serem realizadas utilizando calculadoras, computadores ou *smartphones*, por meio de *softwares* ou aplicativos. Essa prática pode seguir ou preceder um conteúdo específico a ser estudado.
- ***Conexões***: Nessa seção, são propostos textos para leitura e interpretação sobre temas relevantes e atuais que relacionam diferentes áreas do conhecimento e saberes conectados à Matemática com questões para debate e pesquisa para aprofundamento.
- ***Além da sala de aula***: A seção propõe o desenvolvimento passo a passo de projetos interdisciplinares que devem ser executados pelos estudantes e, após o término, apresentados para a comunidade escolar. A ideia de haver mais de um projeto final é que o estudante tenha autonomia para escolher a proposta que faz mais sentido no contexto em que ele está inserido.

Além das seções citadas, os capítulos contêm boxes com diferentes finalidades.

- ***Explore para descobrir***: É um boxe que apresenta teoria e propostas de atividades de exploração, experimentação, verificação e sistematização dos conteúdos apresentados, possibilitando ao estudante formular ideias e criar estratégias.
- ***Sobre o assunto***: A proposta é trazer informações e curiosidades relacionadas aos conteúdos estudados, bem como sugestões de textos, vídeos, simuladores, *sites*, visitas a museus, entre outros, para complementar e aprofundar os estudos ou realizar pesquisas.
- ***Fique atento***: É um boxe que retoma definições ou nomenclaturas, chama a atenção para algo que está sendo estudado no momento e apresenta dicas que podem auxiliar no estudo.
- ***Reflita***: Esse boxe traz questionamentos e reflexões sobre o conteúdo apresentado.

Ao fim de cada Unidade, após o último capítulo, há ainda 2 seções específicas.

- ***Enem e vestibulares***: Essa seção contém sugestões de questões retiradas de provas recentes do Enem e de vestibulares de todas as regiões do Brasil, ela também pode ser utilizada como avaliação de processo e/ou como avaliação de resultado.
- ***Conteúdos e aprendizagens***: Essa seção apresenta um resumo esquemático dos principais pontos dos conteúdos estudados na Unidade. São também sugeridas questões para que o estudante faça uma autorreflexão sobre o próprio aprendizado, como propõe a avaliação ipsativa.

4.2.1. Objetos educacionais digitais da coleção

Cada Volume desta coleção também contém objetos educacionais digitais cujo objetivo é apresentar, retomar, aprofundar e complementar temáticas e conteúdos em estudo.

Para esses objetos, foram cuidadosamente elaborados carrosséis de imagens, vídeos, *podcasts*, infográficos e mapas clicáveis que, juntos, compõem com o livro uma gama de recursos pedagógicos que visam ampliar as oportunidades para a construção do conhecimento por meio da exploração de diferentes linguagens e tipos de mídia, auxiliando a aprendizagem dos estudantes com diferentes conhecimentos prévios e perfis de aprendizagens.

Os objetos educacionais digitais estão indicados no sumário do Livro do Estudante e nas páginas sugeridas para o trabalho. Você encontrará os seguintes ícones indicando a sugestão de um objeto educacional digital:

4.3. Sugestão de cronograma

Na proposta de organização de cronograma em semanas apresentada a seguir, consideramos um calendário escolar anual com previsão de 40 semanas letivas, que podem ser organizadas em bimestres, trimestres ou semestres, de acordo com a quantidade de aulas semanais, com as propostas curriculares estaduais e com o projeto político pedagógico da escola.

Essa distribuição das semanas letivas foi pensada considerando os conteúdos, as atividades e as seções presentes em cada Unidade e capítulo. Ressaltamos, contudo, a importância de também considerar a realidade dos estudantes e da escola e de ajustar o tempo previsto para os blocos pedagógicos, sempre que necessário, bem como alterar a ordem de conteúdos e seções ou ampliar o tempo de estudo dos tópicos, caso seja possível desenvolver mais propostas de pesquisas e de apresentações, metodologias ativas ou ações envolvendo a comunidade escolar.

Também é importante ponderar replanejamentos ao longo do ano letivo, de acordo com os conhecimentos prévios dos estudantes, a necessidade de recuperação de aprendizagens e os resultados dos diferentes tipos de avaliação aplicados no decorrer do ano letivo.

<table>
<tr><th colspan="5">Volume 1</th></tr>
<tr><th>Unidade e capítulo</th><th colspan="4">Sugestão de cronograma</th></tr>
<tr><td>Unidade 1: Conjuntos e função afim
Capítulo 1: Conjuntos</td><td>Semanas 1 a 3</td><td rowspan="3">1º bimestre</td><td rowspan="3">1º trimestre</td><td rowspan="5">1º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: A ideia de função</td><td>Semanas 4 e 5</td></tr>
<tr><td>Capítulo 3: A função afim</td><td>Semanas 6 a 11</td></tr>
<tr><td>Capítulo 4: Funções definidas por mais de uma sentença</td><td>Semanas 12 e 13</td><td rowspan="3">2º bimestre</td></tr>
<tr><td>Unidade 2: Função quadrática
Capítulo 1: A função quadrática</td><td>Semanas 14 a 16</td><td rowspan="3">2º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Análises algébrica e gráfica da função quadrática</td><td>Semanas 17 a 21</td></tr>
<tr><td>Unidade 3: Função exponencial
Capítulo 1: Potenciação e radiciação</td><td>Semanas 22 a 24</td><td rowspan="3">3º bimestre</td><td rowspan="5">2º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: A função exponencial</td><td>Semanas 25 a 28</td></tr>
<tr><td>Unidade 4: Função logarítmica
Capítulo 1: Logaritmo</td><td>Semanas 29 e 30</td><td rowspan="4">3º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: A função logarítmica</td><td>Semanas 31 a 34</td><td rowspan="3">4º bimestre</td></tr>
<tr><td>Unidade 5: Sequências e progressões
Capítulo 1: Sequências</td><td>Semana 35</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Progressão aritmética</td><td>Semanas 36 e 37</td></tr>
<tr><td>Capítulo 3: Progressão geométrica</td><td>Semanas 38 a 40</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Volume 2				
Unidade e capítulo	**Sugestão de cronograma**			
Unidade 1: Regiões planas e área Capítulo 1: Medida de área de regiões planas	Semanas 1 a 5	1º bimestre	1º trimestre	1º semestre
Capítulo 2: Ladrilhamento	Semanas 6 e 7			
Unidade 2: Geometria espacial Capítulo 1: Introdução à Geometria espacial	Semanas 8 a 10			
Capítulo 2: Prisma e cilindro	Semanas 11 a 15	2º bimestre		
Capítulo 3: Pirâmide e cone	Semanas 16 a 18		2º trimestre	
Capítulo 4: Esfera e projeções cartográficas	Semanas 19 a 21			
Unidade 3: Trigonometria Capítulo 1: Semelhança de polígonos	Semanas 22 e 23	3º bimestre		2º semestre
Capítulo 2: Relações trigonométricas	Semanas 24 a 27			
Capítulo 3: Conceitos trigonométricos básicos na circunferência	Semanas 28 a 30		3º trimestre	
Capítulo 4: Funções trigonométricas	Semanas 31 a 33	4º bimestre		
Unidade 4: Matrizes, determinantes e sistemas lineares Capítulo 1: Matrizes e determinantes	Semanas 34 a 36			
Capítulo 2: Sistemas lineares	Semanas 37 a 40			

Volume 3				
Unidade e capítulo	**Sugestão de cronograma**			
Unidade 1: Geometria no plano cartesiano Capítulo 1: Geometria analítica: ponto, reta e circunferência	Semanas 1 a 4	1º bimestre	1º trimestre	1º semestre
Capítulo 2: Transformações geométricas	Semanas 5 a 7			
Unidade 2: Educação financeira Capítulo 1: Fundamentos de Matemática financeira	Semanas 8 a 12			
Capítulo 2: Planejamento e gestão de orçamento pessoal	Semanas 13 a 16	2º bimestre	2º trimestre	
Unidade 3: Análise combinatória e probabilidade Capítulo 1: Análise combinatória: diferentes estratégias de contagem	Semanas 17 a 21			
Capítulo 2: Probabilidade	Semanas 22 a 26	3º bimestre		2º semestre
Unidade 4: Estatística Capítulo 1: Introdução à Estatística	Semanas 27 a 32		3º trimestre	
Capítulo 2: Medidas de tendência central e medidas de dispersão	Semanas 33 a 36	4º bimestre		
Unidade 5: Computação Capítulo 1: Um pouco da história	Semanas 37 e 38			
Capítulo 2: Algoritmos e fluxogramas Capítulo 3: Conceitos iniciais de programação	Semanas 39 e 40			

Para conduzir as aulas com esta coleção, a formação disciplinar do professor deve ser prioritariamente de Matemática.

Para as aulas conjuntas com professores de outras áreas do conhecimento ou outros componentes curriculares, conforme exemplos comentados nas *Orientações específicas* deste Manual, bem como nas orientações que constam nas páginas do Livro do Estudante, planeje antecipadamente o cronograma com os professores envolvidos, como serão ministradas as dinâmicas das aulas e, principalmente, o tempo e o período de duração das propostas.

5. Referências complementares para aprofundamento

Todos os *sites* foram acessados em 8 set. 2024.

5.1. *Sites*

- Canal Futura. Disponível em: https://tedit.net/u2s8rj.
  O Canal Futura, em conjunto com iniciativas privadas, disponibiliza um portal com vários artigos e vídeos (inclusive videoaulas).
- Instituto Ayrton Senna. Disponível em: https://tedit.net/99y0m2.
  O Instituto Ayrton Senna disponibiliza vários cursos gratuitos para a formação continuada do professor.
- Movimento pela Base. Disponível em: https://tedit.net/xxd3dh.
  O portal, mantido por um grupo de apoiadores da BNCC e da educação, disponibiliza uma série de artigos, vídeos e cursos sobre educação.
- Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: https://tedit.net/9ulmhg.
  Nesse *site*, você pode obter informações, provas e gabaritos da competição que é dirigida a estudantes de todo o país, a partir do 6º ano.
- Portal do professor. Disponível em: https://tedit.net/8cvkhm.
  Espaço para acessar sugestões de planos de aula, mídias de apoio, notícias sobre educação e iniciativas do MEC. Nele, você também pode compartilhar planos de aula, participar de debates ou fazer cursos.
- Portal IBGE Educa. Disponível em: https://tedit.net/xlct5g.
  Nesse portal oficial do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), há disponibilização de vários dados de pesquisas estatísticas sobre a população brasileira.
- Projecto Pólya. Disponível em: https://tedit.net/cwgjxf.
  Site do Centro de Matemática da Universidade do Porto (Portugal) especializado na resolução de problemas matemáticos.

5.2. *Podcasts* e vídeos

- Lógica, Matemática e linguagem cotidiana. Disponível em: https://tedit.net/iixbnb.
  Esse vídeo, apresentado pelo professor titular da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP), Nílson José Machado, mostra algumas explicações a respeito dos conceitos de lógica.
- Matemática Humanista. Disponível em: https://tedit.net/geu59c.
  Podcast mantido pelo educador e matemático brasileiro Carlos Eduardo Mathias Motta (1968-) até o ano de 2020, com debates principalmente sobre o ensino de Matemática, com temas como Etnomatemática, dimensões éticas das práticas matemáticas, avaliação, uso pedagógico da calculadora, entre outros.
- Minuto IBGE. Disponível em: https://tedit.net/f4k52s.
  Podcasts curtos, em torno de 1 minuto cada um, trazendo dados e curiosidades obtidos pelo IBGE. Novos áudios são lançados semanalmente e disponibilizados gratuitamente para todas as emissoras de rádio brasileiras.
- Nada Sei. Disponível em: https://tedit.net/7fuxmb.
  Podcasts mantidos pelo Instituto Ayrton Senna que tratam de aspectos distintos da educação no Brasil.
- O homem que viu o infinito
  O filme é baseado na história real do matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920), que fez importantes contribuições para a Teoria dos números e frações contínuas.
- Portal Domínio Público. Disponível em: https://tedit.net/vijv2q.
  Nesse *site* são disponibilizados vídeos que auxiliam o professor no trabalho em sala de aula.
- Quebrando a banca
  Filme baseado em fatos reais que conta a história de um estudante do Instituto de Tecnologia de Massachusetts que, junto de colegas, criou um método para ter vantagem em um famoso jogo de cartas.
- TV Escola. Disponível em: https://tedit.net/mo5scz.
  O portal do TV Escola disponibiliza vídeos com variadas aplicações de conteúdos em situações simples do dia a dia.

5.3. Revistas e periódicos de Educação matemática

- *Bolema*. Disponível em: https://tedit.net/xanusm.
  Boletim de Educação matemática (Bolema) publicado pelo Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp), *campus* de Rio Claro (SP).
- Publicações da Sbem. Disponível em: https://tedit.net/jx6muo.
  Publicações de periódicos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem) sobre Educação matemática.
- *Revista Brasileira de História da Matemática*. Disponível em: https://tedit.net/9n5t42.
  Site com as publicações da *Revista Brasileira de História da Matemática*, da Sociedade Brasileira de História da Matemática
- *Revista EMP*. Disponível em: https://tedit.net/5lat9i.
  A revista *Educação Matemática Pesquisa (EMP)*, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, faz quadrimestralmente divulgações científicas da área, em âmbito internacional.

5.4. Publicações sobre História da Matemática

- BERLINGHOFF, W. P. *A Matemática através dos tempos*: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.
  Nesse livro, o autor apresenta um panorama de pessoas e eventos importantes na história e na construção da Matemática atual.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher: Edusp, 1974.
  Uma grande referência em História da Matemática, esse livro apresenta a evolução da Matemática desde a origem do conceito dos números até as descobertas matemáticas do século XX.
- CARVALHO, D. L. de; MIGUEL, A.; MENDES, I. A.; BRITO, A. de J. *História da Matemática em atividades didáticas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

Nesse livro, o ensino da Matemática é abordado por meio de atividades nas quais a História da Matemática exerce papel central.

- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

  Um grande referencial da História da Matemática, esse livro apresenta narrativas históricas desde a Antiguidade, contextualizadas em panoramas culturais da época abordada.

5.5. Publicações sobre Educação matemática

- BORBA, M. de C. *Tendências internacionais em formação de professores de Matemática*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

  O livro apresenta a experiência de alguns trabalhos de Educação matemática desenvolvidos internacionalmente, relacionando-os com a realidade do ensino brasileiro.

- D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação*: reflexões sobre educação e Matemática. São Paulo/Campinas: Summus/Unicamp, 1986.

  Nesse livro, o autor apresenta um enfoque crítico do que se faz na Educação matemática em diferentes sistemas educacionais, refletindo sobre o relacionamento entre Matemática e bem-estar social.

- NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (org.). *A formação do professor que ensina Matemática*: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

  Nesse livro, os autores demonstram a preocupação com a formação do professor, apresentando perspectivas e resultados de pesquisa de formação docente no campo da Educação matemática.

- PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

  Apresentando práticas de investigação que podem ser levadas para as aulas de Matemática, como a criação de conjecturas, a reflexão e a formalização do conhecimento, esse livro traz resultados de pesquisas sobre as vantagens e as dificuldades de se trabalhar com tal perspectiva em Educação matemática.

- POWELL, A.; BAIRRAL, M. *A escrita e o pensamento matemático*: interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.

  O livro exemplifica e disserta sobre como diferentes tipos de tarefas escritas podem auxiliar os estudantes no aprendizado matemático e no ensino e desenvolvimento profissional, tanto em sala de aula como em aulas à distância.

- POZO, J. I. *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998.

  De acordo com o que o autor propõe nesse livro, ensinar a resolver problemas em cada área do conhecimento significa enfatizar o ensino dos procedimentos e o papel fundamental do professor no incentivo da criação de estratégias por parte dos estudantes.

5.6. Publicações sobre metodologia do ensino de Matemática

- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2006.

  Partindo da conceituação informal da modelagem matemática até chegar à aplicação em problemas complexos e sofisticados, o autor demonstra como a modelagem pode ser aplicada às mais diversas situações, com distintos graus de dificuldade e precisão.

- BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

  Livro concebido com o propósito de auxiliar os professores brasileiros a introduzir nas escolas a aprendizagem baseada em projetos.

- PAIS, L. C. *Ensinar e aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

  O autor propõe nesse livro uma reflexão sobre os aspectos metodológicos do ensino da Matemática, atento à subjetividade do processo cognitivo e à relação entre o saber matemático e os desafios inerentes às ações integradas ao ensino e à aprendizagem escolar.

5.7. Publicações sobre educação

- COLL, C. *et al*. *Psicologia da educação virtual*: aprender e ensinar com as tecnologias da informação e da comunicação. São Paulo: Penso, 2010.

  Esse livro apresenta uma reflexão a respeito do impacto das tecnologias da informação e comunicação nos processos de ensino e aprendizagem.

- FREIRE, P.; SHOR, I. *Medo e ousadia*: o cotidiano do professor. São Paulo: Paz e Terra, 2014.

  Nesse livro, os autores destacam a necessidade da visão colaborativa na construção do conhecimento.

- MORIN, E. *A cabeça bem-feita*: repensar a reforma, reformar o pensamento. Lisboa (Portugal): Bertrand, 2009.

  Nesse livro, o autor defende as razões pelas quais o ensino transdisciplinar é essencial para a formação de cidadãos capazes de lidar com o mundo atual.

- PERRENOUD, P. *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed, 1999.

  Esse livro apresenta perspectivas e limitações na prática em sala de aula para a construção de competências e a transposição didática.

- SARMENTO, M. *et al*. *O futuro alcançou a escola?* O aluno digital, a BNCC e o uso de metodologias ativas de aprendizagem. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

  Nesse livro, vários artigos abordam os novos rumos da educação no Brasil, em um sentido de aproximação com as dinâmicas de sala de aula.

- VALENTE, J. A. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador. *In*: *Tecnologia, currículo e projetos*. Disponível em: https://tedit.net/ruh47I.

  Nesse capítulo do livro, o autor apresenta uma coleção de artigos referentes às novas maneiras de ensinar e desenvolver o currículo ao integrar tecnologias digitais à prática pedagógica voltada à aprendizagem significativa dos estudantes.

- ZABALA, A. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

  O autor propõe, nesse livro, pautas e orientações sobre a ação educativa a partir de uma perspectiva de análise e reflexão.

Orientações específicas

Organização e conteúdos do Volume

Conforme descrevemos nas *Orientações gerais* deste Manual, na concepção desta coleção estão intrínsecas as habilidades e competências específicas de Matemática e suas Tecnologias descritas para o Ensino Médio na BNCC, bem como as competências gerais da Educação Básica e os Temas Contemporâneos Transversais. Isso é percebido em cada Unidade e capítulo de todos os Volumes da coleção, tanto no Livro do Estudante quanto nas orientações apresentadas neste Manual do Professor.

O Livro do Estudante deste Volume **1** tem 5 Unidades, cada uma delas organizada em 2 a 4 capítulos.

A Unidade **1**, Conjuntos e função afim, tem foco na Unidade temática *Números* e *Álgebra* e aborda conteúdos acerca de conjuntos, conjuntos numéricos, bem como a ideia de função, apresentando a definição de função afim.

Na Unidade **2**, Função quadrática, trabalhamos os conceitos relacionados às funções do 2º grau, como aplicações envolvendo valor máximo ou valor mínimo, além da influência dos coeficientes e do discriminante no gráfico da parábola que representa a função.

Na Unidade **3**, Função exponencial, são abordados os conceitos de potenciação e de radiciação com exemplos do mundo real. Estudamos potências com expoentes: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. Além disso, é introduzido o conceito de notação científica e a importância dos algarismos significativos nas medições. Posteriormente, as funções exponenciais e diversas aplicações são analisadas com maior detalhe.

A Unidade **4**, Função logarítmica, tem como foco o estudo dessa função, sendo abordados a resolução de equações exponenciais, o conceito de logaritmo de um número, as propriedades operatórias dos logaritmos, a mudança de base de um logaritmo, a definição de função logarítmica, construção e interpretação de gráfico da função logarítmica e algumas características dessa função.

Na Unidade **5**, Sequências e progressões, estudamos sequências que apresentam padrões, as progressões aritméticas e as progressões geométricas. Inicialmente, apresentamos o estudo de sequências, numéricas ou figurais, e propomos a utilização da língua materna para descrever os termos das sequências para, em seguida, fazer uso da linguagem algébrica para representar diferentes tipos de fórmula que relacionam os termos. Em seguida, apresentamos o estudo formal das progressões aritméticas e progressões geométricas.

Avaliação de aprendizagem

Pensando na concepção desta coleção, de que a avaliação deve ser formativa e continuada, conforme explicitamos nas *Orientações gerais* deste Manual, sugerimos que você organize previamente momentos avaliativos no início de cada bloco pedagógico (Unidade ou capítulo, por exemplo), no decorrer dos blocos e ao término do desenvolvimento deles. Esses momentos, combinados com as avaliações contínuas e com os registros de acompanhamento das avaliações, darão conta dos múltiplos aspectos do processo avaliativo.

Por exemplo, no início de cada capítulo, mensure os conhecimentos prévios dos estudantes para diagnosticar as aprendizagens já efetivadas e aquelas que ainda precisam ser retomadas e/ou recuperadas para possibilitar o melhor desenvolvimento das aprendizagens do capítulo. Após o estudo de determinado tópico ou capítulo, cada estudante, individual ou coletivamente, e mediado por você, pode mensurar a própria compreensão dos objetos do conhecimento e dos conteúdos mobilizados, bem como pode verificar como está desenvolvendo as habilidades relacionadas. Com esse tipo de avaliação qualitativa sistemática, também se torna possível que você faça ajustes nos percursos e metodologias de ensino, ao longo do bloco pedagógico, levando em conta as aprendizagens já desenvolvidas pelos estudantes.

Ainda pensando nos processos de avaliação, visto que uma mesma questão de exames de larga escala pode mobilizar diversos conteúdos estudados, ela também pode constituir a avaliação formativa de uma rede de aprendizagens e habilidades. Assim, avalie a pertinência de sugerir as atividades da seção *Enem e vestibulares* ao término da Unidade ou no decorrer do estudo dela.

Unidade 1: Conjuntos e função afim

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01, CG03, CG04, CG05, CG07, CG09.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EF13MAT101, EF13MAT104, EF13MAT302, EF13MAT314, EF13MAT315, EF13MAT401, EF13MAT404, EM13MAT407, EF13MAT501, EF13MAT506, EF13MAT510.
- Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13CNT102, EM13CNT106.
- Temas Contemporâneos Transversais: *Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Alimentar e Nutricional*; *Educação Ambiental*; *Educação Financeira*; *Educação Fiscal*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Saúde*.

Objetivos pedagógicos

- Compreender o que são conjuntos e ter noções da linguagem de conjuntos.
- Compreender as classificações de uma função em injetiva, sobrejetiva e bijetiva e o conceito de funções inversas.
- Analisar diferentes situações reais que podem ser modeladas por funções, em especial funções afins e funções definidas por mais de uma sentença, resolvendo e elaborando problemas.
- Construir, interpretar e analisar o gráfico de funções afins e de funções definidas por mais de uma sentença, utilizando ou não tecnologias digitais, convertendo representações algébricas em geométricas e vice-versa.

Sugestões para o desenvolvimento das aulas

Neste tópico, apresentamos mais sugestões de abordagens, específicas para a Unidade, pensando nas propostas pedagógicas que motivaram a elaboração dos conteúdos, das atividades e das seções do capítulo.

Abertura da Unidade

O conceito de função é considerado um dos mais importantes e úteis em Matemática, pois o estudo de funções propiciou um grande avanço no desenvolvimento tecnológico. Por meio de modelagem matemática, o trabalho com funções possibilita atribuir tratamento matemático a situações da realidade, permitindo a compreensão de fenômenos.

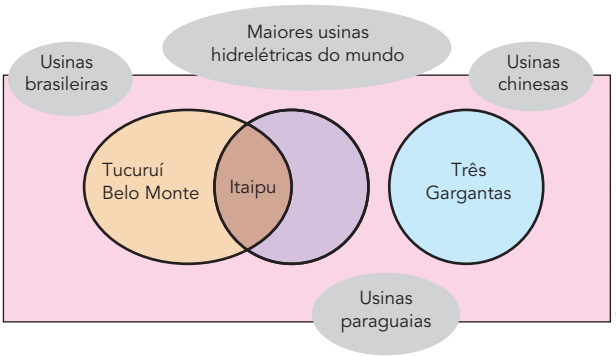
Desse modo, são apresentadas atividades contextualizadas em diferentes situações, como as relacionadas a situações econômicas, sociais e a fatos relativos às Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cuja análise pode ser feita utilizando taxas de variação e/ou gráficos que relacionem 2 grandezas pertinentes aos problemas, permitindo, assim, o trabalho com a habilidade **EM13MAT101**.

A situação de abertura desta Unidade propõe uma investigação sobre a produção de energia elétrica pela Usina Binacional de Itaipu, localizada em Foz do Iguaçu (PR). Tal abordagem temática enquadra-se no Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia*.

Neste contexto, desenvolva com os estudantes uma investigação para estimar a produção energética acumulada de Itaipu a partir do ano de 2023, considerando uma produção anual de 84 000 GWh. Nesse processo, conduza os estudantes a relacionar os valores encontrados com uma função afim (sem ainda defini-la de maneira formal). Ao final, o estudante deverá ser capaz de interpretar os resultados algébricos e geométricos desenvolvidos na atividade de investigação.

Durante esse processo, discuta os aspectos históricos envolvidos na construção da Usina de Itaipu, desenvolvendo assim a **CG01**.

Sugerimos o seguinte exemplo de resposta para o primeiro questionamento: Organização em um diagrama de Venn.



Banco de imagens/Arquivo da editora

No segundo questionamento, temos a seguinte planilha completa.

Estimativa da produção energética acumulada de Itaipu

Ano após 2023	Produção acumulada a partir de 2023 (em GWh)	Proporção entre a produção acumulada e a quantidade inicial (2023)
0 (2023)	84 000	1
1 (2024)	168 000	2
2	252 000	3
3	336 000	4
4	420 000	5
5	504 000	6
6	588 000	7
7	672 000	8
8	756 000	9
9	840 000	10
10	924 000	11

Dados elaborados para fins didáticos.

Mais sobre o assunto

Para aprofundar a discussão sobre a história da Itaipu Internacional e detalhes do funcionamento, inclusive da quantidade de energia produzida, consulte o *site* oficial da usina, disponível em: https://tedit.net/ngo9re. Acesso em: 11 set. 2024.

Capítulo 1

É interessante perceber que os estudantes chegam ao Ensino Médio já com vivências e noções intuitivas sobre conjuntos. Por exemplo, usam a nomenclatura: conjunto dos números naturais, conjunto solução de uma equação, etc.

Neste capítulo o estudante será apresentado a conceitos e ferramentas novas (relações de pertinência e inclusão, operações com conjuntos, conjuntos complementares, intervalos, etc.) e revisará e formalizará a utilização de ferramentas que, de tão corriqueiras, passavam quase despercebidas (conjuntos numéricos, reta numérica, etc.).

A situação-problema **1** aborda a alimentação saudável, que colabora para o desenvolvimento do TCT *Educação Alimentar e Nutricional*.

O tópico "A noção de conjunto e os conjuntos numéricos" traz exemplos de situações em que os números e os conjuntos numéricos são usados no cotidiano. Se julgar oportuno, proponha aos estudantes que listem outras situações que fazem parte do cotidiano deles.

No tópico "Explorando a noção de conjunto", é proposta uma situação contextualizada para que os estudantes utilizem o diagrama de Venn.

No tópico "Formalizando o conceito de conjunto", após a exploração do diagrama de Venn, são apresentadas a formalização do conceito de conjunto e as definições que dialogam com esse conceito, como relações de pertinência e o conceito de subconjuntos.

No tópico "Conjuntos numéricos", existem várias oportunidades para a revisão das operações básicas, como as operações com frações, com decimais e desigualdades. A associação dos números com a reta numérica e os conceitos de grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis são temas que incentivam a discussão e motivam o estudante a estabelecer relações mais elaboradas em relação àquelas que já conheciam.

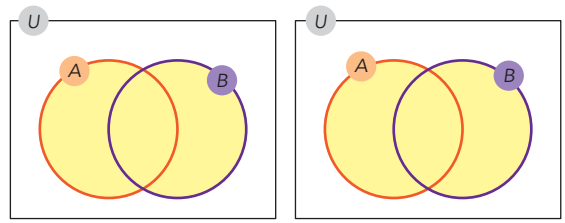
As atividades desse tópico contemplam diversos aspectos da aprendizagem: fixação do uso da linguagem (atividades **1** a **3** e atividade **7**), identificação e classificação (atividades **4** a **6**), ordenação (atividade **5**). Perceba que a atividade **4** é um momento que propicia a exploração do pensamento lógico-dedutivo.

Essas atividades e as deduções propostas contribuem para o desenvolvimento dos diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático, principalmente no que se refere à dedução.

No tópico "Relação de inclusão entre conjuntos", é apresentada a definição da relação de inclusão entre conjuntos citando algumas propriedades decorrentes dessa definição.

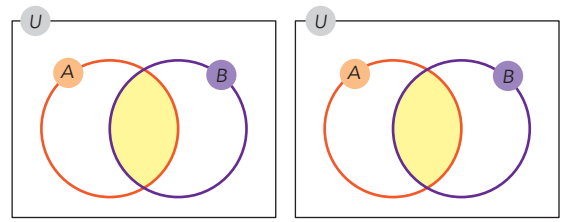
No tópico "Operações com conjuntos", são abordados exemplos e, no *Reflita* (p. 29), é proposto aos estudantes que constatem a veracidade das propriedades apresentadas acerca da união e intersecção de conjuntos. Um exemplo de como responder a esse questionamento está apresentado a seguir.

Propriedade comutativa



Banco de imagens/ Arquivo da editora

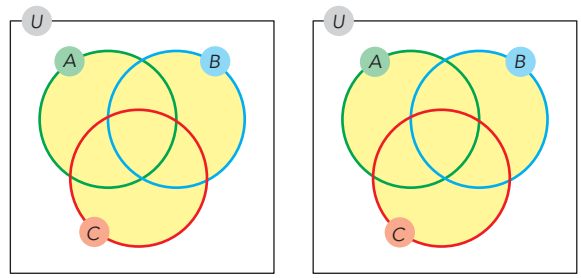
$A \cup B = B \cup A$



Banco de imagens/ Arquivo da editora

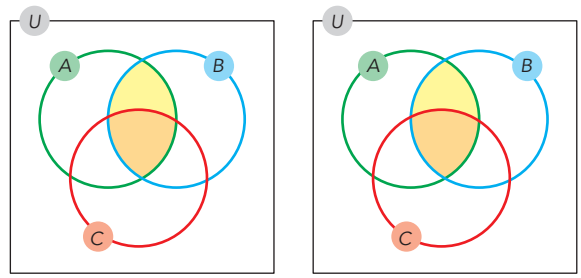
$A \cap B = B \cap A$

Propriedade associativa



Banco de imagens/Arquivo da editora

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$



Banco de imagens/Arquivo da editora

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

A atividade proposta nesse boxe e as reflexões seguintes contribuem para o desenvolvimento dos diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático, principalmente no que se refere à dedução.

No tópico "Complementar de um conjunto", é apresentada a definição de conjunto complementar de um conjunto citando 2 propriedades decorrentes dessa definição.

O tópico "Número de elementos da união de conjuntos" é trabalhado com exemplo numérico para facilitar a compreensão por parte dos estudantes.

Nas atividades **8**, **11** e **12**, auxilie os estudantes a compreender a relação entre os conjuntos numéricos.

A aplicação prática fica mais evidenciada nas atividades **15** a **20**, que abordam a relação de inclusão, conjuntos complementares e fixação do uso da linguagem.

Conexões (p. 33)

Nesta seção, é apresentado um contexto que envolve diferentes tecnologias de armazenamento de dados. Converse com os estudantes, incentivando-os a comentar quais eles mais utilizam ou quais nunca utilizaram. A atividade **1** possibilita aos estudantes aplicarem os conhecimentos apreendidos sobre conjuntos em uma situação do cotidiano. As atividades **2** e **3** propiciam um momento para explorar o uso das tecnologias no cotidiano dos estudantes e os avanços tecnológicos e da ciência de dados.

Capítulo 2

Neste capítulo, é desenvolvida e explorada em diferentes contextos a ideia de função, de maneira algébrica, ao associar e comparar grandezas.

Na situação-problema **1**, é apresentada a produção de sucos em uma fábrica para que os estudantes possam associar a ideia de função com o funcionamento de uma máquina que, por meio de uma série de procedimentos, transforma uma matéria-prima (uma fruta) em um produto final (suco e purê). Trabalhe com os estudantes o fato de que a analogia se estabelece nesse exemplo porque as funções também relacionam um valor a outro.

Na situação-problema **2**, conduza os estudantes em uma atividade investigativa a respeito da dose administrada de certo remédio (em gotas) e a relação com a medida de massa da criança que irá ingerir tal medicamento, assim estabelecendo uma relação matemática entre essas duas grandezas.

Nesta situação, o Tema Contemporâneo Transversal *Saúde* pode ser contemplado, assim como a habilidade **EM13MAT314** na resolução de um problema que envolve grandezas dadas em termos uma da outra. Além disso, a habilidade **EM13MAT101** é contemplada ao interpretar criticamente situações socioeconômicas com o olhar da Matemática, e a habilidade **EM13MAT302** é trabalhada por meio da modelagem de situações utilizando funções afins para resolver diversos problemas.

O tópico "Explorando a ideia de função" apresenta exemplos com os quais os estudantes podem realizar investigações e analisar relações expressas em diferentes contextos.

No 2º exemplo é dada uma base para um futuro trabalho com a habilidade **EM13MAT506**, no que tange à análise da relação entre a medida de comprimento do perímetro e a medida de comprimento do lado de polígonos regulares.

No 3º exemplo e no *Reflita* (p. 38), os algoritmos são utilizados para permitir aos estudantes explorarem a ideia de função.

Mais sobre o assunto

Caso deseje conhecer mais sobre o trabalho com pensamento computacional, sugerimos os seguintes documentos:

- BRACKMANN, C. P. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica*. 2017. 226f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://tedit.net/aihmtl. Acesso em: 5 set. 2024.
- SILVA, E. C. *Pensamento computacional e a formação de conceitos matemáticos nos anos finais do Ensino Fundamental*: uma possibilidade com *kits* de robótica. 2018. 264f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018. Disponível em: https://tedit.net/gz3206. Acesso em: 5 set. 2024.

Na maioria dos casos, não existe um único algoritmo que resolva determinado problema; portanto, os estudantes poderão elaborar diferentes algoritmos que solucionem um problema proposto. Sugerimos que, antes de expor uma solução ou indicar se os algoritmos elaborados por eles estão corretos ou não, peça a eles que os testem com diferentes entradas, de modo que possam verificar se os resultados obtidos condizem com o que era esperado. Cabe destacar que, nesse processo, são trabalhados a decomposição e o reconhecimento de padrões, pilares do pensamento computacional.

Se julgar oportuno, solicite aos estudantes que resolvam as atividades desse tópico em grupos de 3 ou 4 integrantes. A atividade **1**, que requisita a escrita de um algoritmo correspondente a um processo dado, retoma os conhecimentos mobilizados no último exemplo do tópico, favorecendo a habilidade **EM13MAT315**.

Na atividade **3**, apresentamos o trabalho com a habilidade **EM13MAT506**. Você pode pedir aos estudantes que elaborem no caderno outras tabelas análogas a essa, mas para outros polígonos regulares.

No tópico "Formalizando a ideia de função", os estudantes devem trabalhar com a definição de função e é importante que compreendam o que significam as afirmações apresentadas. Por isso, caso necessário, retome os exemplos trabalhados anteriormente e peça a eles que justifiquem e argumentem porque as relações apresentadas são, de fato, funções.

Nas atividades **6** a **8**, os estudantes são convidados a resolver problemas relacionados à representação de funções utilizando diagramas. Explore a diferença entre os conjuntos contradomínio e imagem, cujo processo de abstração pode oferecer a eles certa dificuldade.

Destaque as diferenças entre contradomínio e conjunto imagem de uma função utilizando os exemplos dados. Também aproveite para retomar os significados e as diferenças entre as notações $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_+^*$, como indicado no *Fique atento* (p. 42).

O tópico "Gráfico de funções" apresenta o conteúdo utilizando uma situação concreta ao discutir a vazão de esvaziamento de uma piscina.

No tópico "Formalizando os conceitos de função injetiva, sobrejetiva e bijetiva", são discutidos alguns conceitos de funções. Aproveite o *Explore para descobrir* e o *Reflita* para consolidar a aprendizagem dos estudantes.

O tópico "Explorando a ideia de função inversa" inicia a discussão do conceito de função inversa utilizando a relação entre as medidas de comprimento do lado e de área de uma região limitada por uma figura geométrica plana qualquer, estabelecendo assim uma conexão importante entre a Álgebra e a Geometria.

No tópico "Formalizando a definição de função inversa", é apresentada a definição de função inversa, por meio de exemplos gráficos.

As atividades **10** a **13** solicitam análises de diagramas e gráficos de diferentes funções, enquanto as atividades **14** e **15** discutem funções inversas.

Capítulo 3

Neste capítulo será desenvolvido um estudo exploratório da função afim, aplicada em diferentes contextos, como na construção de funções para determinação da medida de temperatura, da posição de um corpo em um sistema ou da vazão. Destacamos as diversas aplicações em problemas que envolvem as Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Ao longo do capítulo, serão apresentados e formalizados os conceitos relativos à função afim, bem como a construção algébrica e geométrica.

Na situação-problema de abertura de capítulo, a investigação proposta é um caso que envolve a velocidade de um veículo em movimento uniformemente variado – estudado nas Ciências da Natureza e suas Tecnologias –, no qual um corpo sofre variação na medida de velocidade, isto é, apresenta uma aceleração (considerada constante). Esse problema pode ser modelado por meio de uma função polinomial do 1º grau, conhecida como função horária da velocidade. Esta situação permite o trabalho com a habilidade **EM13MAT302**. Além disso, você pode atuar em uma perspectiva interdisciplinar com o professor de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, em especial, o de formação disciplinar de Física, que pode trazer mais atividades desse tipo, comumente abordadas no Ensino Médio.

No tópico "Um pouco da história das funções", você pode analisar com os estudantes os estudos de funções realizados por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1643-1727), que desenvolveram o cálculo integral e diferencial, até os estudos mais recentes sobre a função afim, durante as décadas de 1960 e 1970, em especial os autores pertencentes ao grupo Bourbaki. O desenvolvimento dessa atividade de leitura, no que tange ao processo de identificação de eventos históricos sobre as funções e a Matemática, e o processo histórico de construção do conhecimento, auxiliam a promover o pluralismo de ideias (conquistas científicas são feitos de toda uma comunidade), além de contemplar a **CG01**.

No tópico "Explorando a função afim", ao trabalhar com o *Explore para descobrir* (p. 53), sugerimos que organize a turma em duplas. Em seguida, dedique um tempo para discutir por que, na atividade **4**, não é possível identificar o valor fixo inicial nem o valor por quilômetro rodado cobrado no aplicativo. Peça a eles que apresentem diferentes pares de valores fixo e por quilômetro rodado que satisfaçam a condição dada.

Após a apresentação do conceito de função afim e da lei dessa função, dê oportunidades aos estudantes de conversarem entre si e responderem às perguntas propostas no *Reflita* (p. 54), no tópico "Formalizando a definição de função afim", em especial àquelas que tratam de por que as funções constantes nula e não nula receberam tal nomenclatura.

Neste tópico, também é apresentado um contexto das Ciências da Natureza e suas Tecnologias: o movimento uniforme.

Na atividade **10** do tópico "Valor de uma função afim", é possível trabalhar o Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia*, ao discutir a relação entre temperatura e calor.

O trabalho das atividades desse tópico permite desenvolver a habilidade **EM13MAT302** na análise e construção de uma função polinomial do 1º grau em diferentes contextos.

No tópico "Taxa de variação média da função afim", são apresentadas a taxa de variação média de uma função em um intervalo e, também, as propriedades de funções crescentes e decrescentes.

O contexto da atividade **19** propicia desenvolver uma conversa acerca de temas como a uberização do trabalho. É importante incentivar os estudantes a realizar uma pesquisa e a destacar diferentes perspectivas, principalmente aquelas relacionadas à regulamentação e às questões dos direitos trabalhistas.

Explore com os estudantes os conceitos de uberização e plataformização, que muitas vezes acabam associados a um novo modelo de exploração da força de trabalho, e promova uma conversa com uma abordagem que combata todo preconceito que possa surgir em relação a esses novos tipos de trabalho.

Mais sobre o assunto

Para aprofundar a discussão sobre uberização, consulte o trabalho realizado pela Unicamp, *Dossiê das Violações dos Direitos Humanos no Trabalho Uberizado*, disponível em: https://tedit.net/kin1ly. Acesso em: 5 set. 2024.

Cabe destacar também a atividade **23**, no que tange à investigação e à análise de um problema por meio de um fluxograma, favorecendo a habilidade **EM13MAT315**.

Destaque para os estudantes o conceito de função afim e de taxa de variação em contextos das Ciências da Natureza e suas Tecnologias, como na atividade **24**, na relação entre a medida de temperatura de ebulição da água e a medida de altitude.

Aproveite as atividades **16**, **20** e **23** para trabalhar com problemas relacionados à Matemática financeira e à Educação financeira que podem ser modelados por função afim, em especial no contexto de cálculo de lucro e de juros.

No tópico "Gráfico da função afim", sugerimos que a introdução a esse assunto seja realizada por meio das atividades propostas na seção *Tecnologias digitais*, de maneira que os estudantes possam fazer algumas explorações antes de formalizar e solidificar os conhecimentos.

Destacamos que, nesse tópico, a habilidade **EM13MAT401** é favorecida no que tange à conversão de representações algébricas de funções polinomiais do 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, e a habilidade **EM13MAT501** é favorecida considerando a representação de números expressos em tabelas para apresentá-los no plano cartesiano e a identificação de quando essa representação pode ser modelada por uma função do 1º grau. A habilidade **EM13MAT510** também é favorecida, considerando a utilização de retas como representação gráfica da relação entre conjuntos de dados.

Uma sugestão é, após a apresentação do conteúdo, possibilitar aos estudantes resolverem as atividades **26** e **27**, se possível com o uso de tecnologias.

Nas atividades **28** a **37**, os estudantes podem desenvolver as habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT401**.

Destacamos o caráter interdisciplinar das atividades **31**, **33** e **36** que relacionam linguagem matemática com conhecimentos sobre Física: conversão entre unidades de medida de temperatura, análise de movimento de corpos em movimento uniforme, estudo de vazão de piscinas e cálculo da medida de densidade de materiais.

O trabalho proposto no tópico "Função linear e proporcionalidade" favorece a compreensão de situações que envolvem a proporcionalidade entre 2 grandezas, e ele pode ser desenvolvido associado a contextos da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, como o deslocamento linear de um veículo a velocidade constante.

O conjunto de atividades desse tópico favorece a habilidade **EM13MAT101**. Nas atividades **38** a **42**, são contempladas atividades que envolvem o estudo algébrico e geométrico das funções polinomiais do 1º grau, levando em consideração o caso específico em que o valor inicial da função é nulo, o qual chamamos de função linear.

Na atividade **41**, os estudantes devem interpretar um índice de natureza socioeconômica, o Ideb, investigando o cálculo desse índice e produzindo argumentos que justifiquem por que esse cálculo é feito da maneira apresentada, favorecendo a habilidade **EM13MAT104**.

Explore o tópico "Zero da função afim" explanando a associação entre o zero de uma função e a raiz de uma equação relacionada à essa função. É importante também mostrar a interpretação geométrica desse conceito, favorecendo as múltiplas representações do mesmo conteúdo.

No *Reflita* (p. 83), obtemos as seguintes resoluções.

- Para $x > \frac{5}{2}$, temos $f(x) > 0$, pois todos os pontos cujas coordenadas de x são maiores do que $\frac{5}{2}$ têm coordenadas de y maiores do que 0.

  Para $x < \frac{5}{2}$, temos $f(x) < 0$, pois todos os pontos cujas coordenadas de x são menores do que $\frac{5}{2}$ têm coordenadas de y menores do que 0.
- A intersecção do gráfico da função constante nula (cuja lei é da forma $f(x) = 0$) com o eixo x é o próprio gráfico da função, pois todo ponto do gráfico é da forma $(x, f(x)) = (x, 0)$. Isso condiz com o fato de que todo número real é zero dessa função.

  Já o gráfico da função constante não nula (cuja lei é da forma $f(x) = k$, sendo k um número real não nulo) não intersecta o eixo x, pois todo ponto desse gráfico é da forma $(x, f(x)) = (x, k)$. Isso condiz com o fato de que nenhum número real é zero dessa função.

No tópico "Estudo do sinal da função afim", auxilie os estudantes no estudo do sinal da função afim e suas interpretações com os exemplos fornecidos.

Nas atividades **43** a **47**, são propostas questões que promovem a habilidade **EM13MAT302**. Caso queira complementar o trabalho com proporcionalidade e funções lineares, sugerimos que proponha aos estudantes a atividade **3** da seção *Mais atividades*, apresentado no final destas sugestões.

Tecnologias digitais (p. 64)

Esta seção possibilita aos estudantes compreender a construção de gráficos relacionados à união de todos os pontos do conjunto imagem. Além disso, com o uso do *software*, é possível reconhecer que o gráfico de uma função afim é uma reta.

Tecnologias digitais (p. 69)

Nesta seção, o *software* de Geometria dinâmica será utilizado na análise e no estudo dos coeficientes da função afim.

Conexões (p. 77)

Nesta seção, é abordada uma atividade de Etnomatemática que visa explorar a contextualização proposta por pesquisadores da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) no estudo da função afim a partir da construção das flautas usadas pelo povo Rikbaktsa. Neste estudo, as flautas utilizadas no cotidiano da comunidade têm diferentes medidas de comprimento, que variam conforme a medida de comprimento da mão do artesão responsável por fabricá-las. Além disso, as flautas são construídas com diferentes medidas para obter diferentes sons, já que, quanto maior a medida de comprimento da flauta, mais grave é o som emitido.

Nas atividades propostas nesta seção, as medidas de comprimento dessas flautas são modeladas por meio de uma função afim que associa a medida de comprimento em palmos de mão (unidade de medida de comprimento usada pelos Rikbaktsa) com a medida de comprimento aproximada em centímetros.

Na atividade **4**, esperamos que o estudante indique diferentes contextos que possam ser modelados por uma função afim, em um processo similar àquele realizado pelos professores Rikbaktsa, como no preço de uma mercadoria vendida de acordo com a medida de massa ou na medida de volume de produto de limpeza necessário para limpar uma superfície. Essas atividades visam favorecer o trabalho com a **CG01**.

Além disso, esta seção promove o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT302** e **EM13MAT401**, além de favorecer os Temas Contemporâneos Transversais *Educação para Valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras* e *Diversidade Cultural*.

Mais sobre o assunto

Para ler mais sobre o trabalho com os Rikbaktsa, sugerimos o artigo "Um encontro etnomatemático na educação escolar indígena: a função das flautas dos Rikbaktsa", de José Roberto Linhares de Mattos e Geraldo Aparecido Polegatti (disponível em: https://tedit.net/e1ycmi; acesso em: 5 set. 2024).

Além da sala de aula (p. 87)

Esta seção apresenta um estudo interdisciplinar com Ciências da Natureza e suas Tecnologias sobre a construção do edifício Eastgate Centre, cuja arquitetura foi inspirada no processo de regulação da temperatura dos cupinzeiros. A comparação entre o Eastgate Centre e a estrutura do cupinzeiro, explicando como ambos conseguem eficiência térmica, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT102**. O estudo tecnológico desse edifício, que apresenta um consumo reduzido de energia elétrica em uma região de clima quente, favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT106**. Cabe destacar também que o trabalho com o calor específico favorece o trabalho das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT314**.

Explique aos estudantes que, para escolher os materiais que comporiam a estrutura do Eastgate Centre, o arquiteto Mick Pearce teve que estudar como se dá a variação de algumas grandezas específicas desses materiais: a capacidade térmica (C) de um objeto ou material relaciona a variação da medida de temperatura (ΔT) com a quantidade de calor (ΔQ) recebida. Abordar a capacidade térmica e a eficiência ambiental no processo produtivo permite o desenvolvimento da **CECNT01**.

Nesta seção, são trabalhados os Temas Contemporâneos Transversais *Educação Ambiental* e *Ciência e Tecnologia*, além de proporcionar aos estudantes reflexões que desenvolvem a **CG01**.

No *Indo além* apresente aos estudantes o tema proposto. Durante a realização da pesquisa proposta na etapa **2**, ressalte a importância de buscar fontes diversificadas e confiáveis de informação. Em seguida, promova um debate com a turma sobre cada um dos projetos pesquisados pelos grupos. É importante perceber que alguns pontos que podem tornar uma construção sustentável, também conhecida como construção verde, incluem: eficiência energética, gestão da água, uso de materiais ecológicos e cuidado com a destinação de resíduos.

Espera-se que, ao longo do desenvolvimento desse projeto, os estudantes promovam a consciência socioambiental e se posicionem de maneira ética em relação ao planeta, de modo a favorecer o desenvolvimento da **CG07**.

Capítulo 4

Nesse capítulo, será desenvolvido o estudo sobre as funções definidas por mais de uma sentença, aplicadas em contextos científicos e tecnológicos. Em especial, serão explorados problemas que envolvem a determinação algébrica e geométrica desse tipo de função.

Com esse trabalho, será favorecida a habilidade **EM13MAT404**, ao analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás, etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, conjunto imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. Além disso, os Temas Contemporâneos Transversais *Educação Financeira*, *Educação Fiscal* e *Educação Ambiental* serão contemplados.

Na situação-problema, desenvolva com os estudantes um estudo sobre um problema contextualizado: o cálculo de Imposto sobre a Renda da Pessoa Física (IRPF). Nesta situação, você poderá apresentar aos estudantes algumas informações sobre esse tipo de imposto.

O desenvolvimento da atividade proposta na situação abrange os Temas Contemporâneos Transversais *Educação Financeira* e *Educação Fiscal*, ao inteirar os estudantes em temáticas fundamentais para um processo de tomada de decisão consciente relacionada a finanças e o desenvolvimento da **CG01**.

A seguir descrevemos a resposta do item **a** da situação proposta:

Supomos que essa relação seja representada por uma função afim. Sendo S o rendimento mensal, em reais, e P a alíquota, a lei da função afim $P\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é dada por $P(S) = aS + b$.

Usando os valores $S_1 = 2\,800$ e $P_1 = 0{,}075$, e $S_2 = 2\,900$ e $P_2 = 0{,}15$, temos $a = \dfrac{0{,}15 - 0{,}075}{2\,900 - 2\,800} = \dfrac{0{,}075}{100} = \dfrac{3}{4\,000}$, logo $b = -2{,}025$. Portanto, $S(P) = \dfrac{3}{4\,000}S - 2{,}025$.

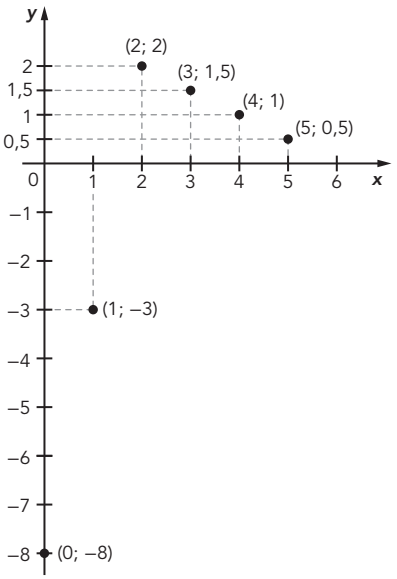
No entanto, $P(3\,000) = \dfrac{3}{4\,000} \cdot 3\,000 - 2{,}025 = 0{,}225 = 22{,}5\% \neq 15\%$.

Logo, a relação entre os rendimentos mensais de uma pessoa e a alíquota não é representada por uma função afim.

No tópico "Explorando a função definida por mais de uma sentença", aborde os exemplos e retome o contexto da tabela de IRPF a fim de obter o gráfico referente aos dados dessa tabela.

No *Explore para descobrir* (p. 91) espera-se que os estudantes obtenham as seguintes respostas.

Na atividade **1**, os pontos são (0; −8), (1; −3), (2; 2), (3; 1,5), (4; 1) e (5; 0,5). Portanto, podemos representar o gráfico a seguir.

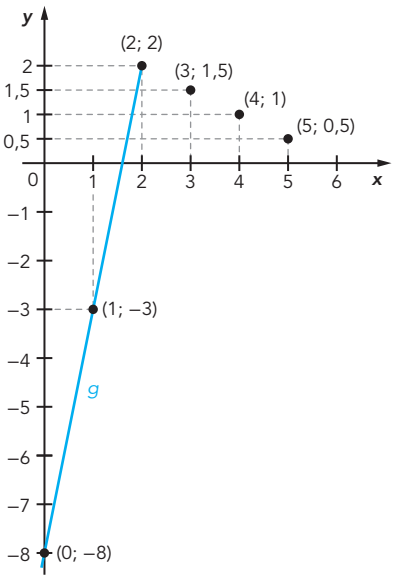


Banco de imagens/Arquivo da editora

A função f não pode ser uma função afim, pois os pontos representados no plano cartesiano não são colineares (isto é, não pertencem a uma mesma reta).

Na atividade **2**, pelo enunciado, $g(0) = -8$, $g(1) = -3$ e $g(2) = 2$. Logo, os pontos (0; −8), (1; −3), (2; 2) pertencem ao gráfico de g. Como esses pontos são colineares, apenas com as informações dadas, não há restrição para a possibilidade de g ser uma função afim.

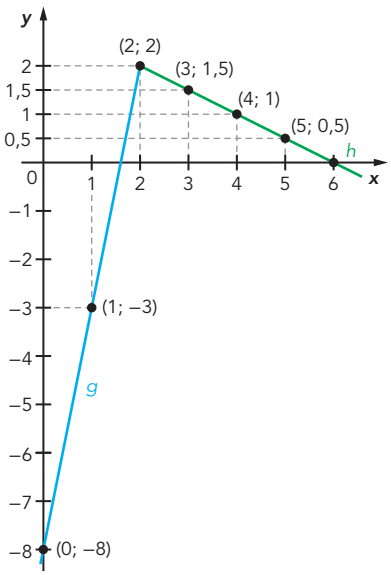
Na atividade **3**, a lei dessa função é $g(x) = 5x - 8$. Podemos representar o gráfico a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Na atividade **4**, pelo enunciado, $h(2) = 2$; $h(3) = 1{,}5$; $h(4) = 1$; e $h(5) = 0{,}5$. Logo, os pontos (2; 2), (3; 1,5), (4; 1) e (5; 0,5) pertencem ao gráfico de h. Como esses pontos são colineares, apenas com as informações dadas não há restrição para a possibilidade de h ser uma função afim.

Na atividade **5**, a lei dessa função é $h(x) = -\frac{1}{2}x + 3$. Podemos representar o gráfico a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Na atividade **6**, podemos interpretar a união dos gráficos de *g* e *h* como o gráfico de *f*. A lei da função *f* é igual à da função *g* se $x \leqslant 2$, e igual à da função *h* se $x \geqslant 2$.

Atividades desse tipo e as demais exploradas nesse tópico colaboram para desenvolver o raciocínio lógico-matemático de abdução.

O desenvolvimento do tópico "Formalizando o conceito de função definida por mais de uma sentença" se dá por meio de exemplos numéricos e gráficos sobre função definida por mais de uma sentença; auxilie os estudantes realizando em conjunto as atividades resolvidas.

Nas atividades **1** a **3**, os estudantes devem resolver problemas que envolvem 2 ou mais variáveis, de maneira algébrica ou gráfica. Na atividade **3**, o Tema Contemporâneo Transversal *Educação Financeira* é contemplado ao retomar a situação apresentada na seção *Atividades resolvidas* (p. 93).

No tópico "Gráfico da função definida por mais de uma sentença" são exemplificados e explorados os gráficos de função definida por mais de uma sentença.

Nas atividades **4** a **6** são contemplados problemas aplicados em um contexto da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, no estudo de gráfico de mudança de fase de uma substância, na construção de um gráfico que relaciona medida de temperatura e a medida de intervalo de tempo, e na interpretação de um gráfico que relaciona medida de intensidade sonora em decibéis e a medida de intervalo de tempo.

Na atividade **7**, o assunto da situação-problema da abertura é retomado e aprofundado, com os estudantes construindo o gráfico da função que relaciona o salário de um contribuinte, em reais, ao valor pago de IRPF por ele, também em reais, e analisando características desse gráfico, como intervalos em que essa função é crescente.

Destacamos que a habilidade **EM13MAT404** é contemplada nessas atividades.

A atividade **8** propõe a compreensão de um fluxograma e, em seguida, a construção de um, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**.

Tecnologias digitais (p. 97)

Nesta seção desenvolva com os estudantes a construção de gráficos utilizando o *software* de Geometria dinâmica. Sugerimos o desenvolvimento desta seção em conjunto com o processo de formalização do conteúdo do tópico "Gráfico da função definida por mais de uma sentença". Além disso, as atividades propostas podem ser realizadas organizando os estudantes em pequenos grupos.

A realização das atividades desta seção desenvolve a habilidade **EM13MAT404** compreendendo os princípios e funcionalidades em diferentes contextos.

Mais atividades

1. Escreva como se lê a implicação $p \Rightarrow q$ sabendo que:

p: n é um número natural par;

q: n é um número escrito na forma $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$.

Resolução:

- Ser um número par implica ser um número escrito na forma $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$.
- Ser um número par acarreta ser um número escrito na forma $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$.
- Se x é um número par, então x é um número escrito na forma $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$.
- Ser um número par é condição suficiente para ser um número escrito na forma $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$.
- Ser um número escrito na forma $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$, é condição necessária para ser um número par.
- Todo número par é escrito na forma $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$.

2. Na atividade anterior, a recíproca $q \Rightarrow p$ é verdadeira? Em caso positivo, como se escreve a equivalência dessas propriedades?

Resolução:

A recíproca $q \Rightarrow p$ é verdadeira. Então:

- ser um número par é equivalente a escrever o número na forma $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$;
- x é um número par se, e somente se, x é escrito na forma $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$;
- ser um número par é condição necessária e suficiente para ser escrito na forma $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$.

Simbolicamente, $p \Leftrightarrow q$.

3. A medida de distância entre São Carlos (SP) e Uberlândia (MG) é, aproximadamente, 400 km.

A medida de intervalo de tempo gasto para um veículo percorrer essa medida de distância depende da medida de velocidade média.

a) Elabore no caderno uma tabela com pelo menos 3 pares de valores para medida de velocidade (em km/h) e medida de intervalo de tempo (em h).

b) No caderno, represente esses pontos em um plano cartesiano. Existe uma reta que passe por todos esses pontos?

c) Nessa situação, a medida de velocidade e a medida de intervalo de tempo são diretamente proporcionais? Justifique.

Resolução:

a) Exemplo de resposta:

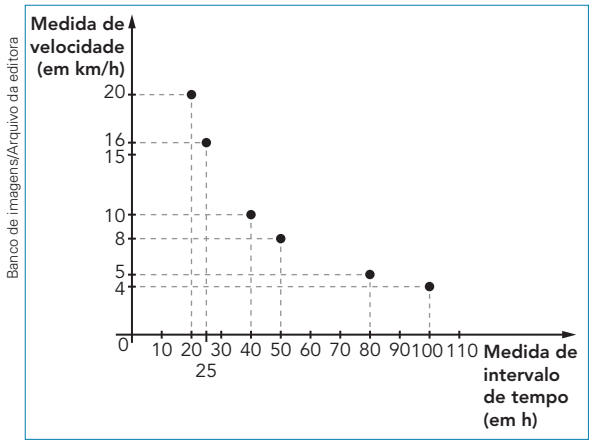
Medida de velocidade e medida de intervalo de tempo em uma viagem

Medida de velocidade (em km/h)	Medida de intervalo de tempo (em h)
50	8
100	4
80	5
25	16
40	10
20	20

Dados elaborados para fins didáticos.

b)

Medida de velocidade e medida de intervalo de tempo em uma viagem



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Não existe uma reta que passe por todos esses pontos.

c) Não, pois os pontos não são colineares.

Unidade 2: Função quadrática

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01, CG02, CG04, CG09.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EF13MAT101, EF13MAT302, EF13MAT314, EF13MAT315, EF13MAT402, EF13MAT502, EF13MAT503, EF13MAT506.
- Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13CNT101, EM13CNT107, EM13CNT204, EM13CNT306, EM13CNT308.
- Temas Contemporâneos Transversais: *Ciência e Tecnologia*; *Educação Alimentar e Nutricional*; *Educação Ambiental*; *Educação para o Consumo*; *Saúde*.

Objetivos pedagógicos

- Investigar diferentes situações reais que podem ser modeladas por funções quadráticas, construindo modelos para resolver problemas.
- Explorar a ideia de função quadrática e algumas das suas propriedades.
- Utilizar tecnologias digitais para explorar e analisar os zeros de funções quadráticas.
- Investigar diferentes situações reais analisando gráficos de funções quadráticas no plano cartesiano.
- Construir, explorar e analisar o gráfico de funções quadráticas no plano cartesiano, utilizando ou não tecnologias digitais.

Sugestões para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

A situação de abertura desta Unidade visa propor uma investigação de um contexto esportivo – os lances em um jogo de basquete –, que são modelados por uma função quadrática. As atividades propostas propiciam a exploração de uma ilustração que representa uma função polinomial do 2º grau, determinando certos pontos do gráfico. Ao final, o estudante deve ser capaz de interpretar os resultados algébricos e geométricos desenvolvidos na atividade de investigação.

Capítulo 1

Nesse capítulo, será desenvolvido um estudo sobre a determinação da lei de uma função quadrática, bem como as suas caraterísticas, relacionando-a em diferentes contextos

matemáticos e científicos. A habilidade **EM13MAT302** será trabalhada ao longo de todo o capítulo.

Na situação-problema inicial, destaque as relações entre preço de venda, desconto, quantidade de bolos vendidos e a determinação do valor pelo qual um bolo é vendido de modo que esta doceria tenha maior lucro. Essa situação é presente no cotidiano de comerciantes, que precisam buscar sempre um equilíbrio entre valores de venda e custo, a fim de obter lucros e altas vendas, que são a base de sucesso de um negócio.

As questões propostas podem ser resolvidas em duplas, para que os estudantes compartilhem ideias e construam juntos soluções melhores.

O tópico "Explorando a função quadrática" relaciona essa função a conhecimentos de Geometria, mais especificamente à quantidade de diagonais em função da quantidade de lados de um polígono.

Na atividade **3** do *Explore para descobrir* (p. 109), espera-se que os estudantes respondam que não, e que eles indiquem que o produto $n \cdot (n - 3)$ fornece o dobro da quantidade de diagonais do polígono, pois nesse cálculo cada diagonal está sendo considerada 2 vezes. Por isso, a expressão correta para obter a quantidade de diagonais de um polígono de n lados é $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$.

Já na atividade **4** desse mesmo boxe, espera que os estudantes calculem $d(3) = 0$, $d(4) = 2$, $d(5) = 5$ e $d(6) = 9$. Espera-se que os estudantes percebam que $d(n)$ não tem uma variação linear; portanto, d não é uma função afim.

No tópico "Formalizando a função quadrática" é definida a função quadrática ou função polinomial do 2º grau e são fornecidos contraexemplos desse tipo de função.

A habilidade **EM13MAT302** é desenvolvida nas atividades **1** a **4**, na identificação de funções quadráticas e seus coeficientes, assim como no cálculo dos valores numéricos de cada função e na construção de modelos matemáticos utilizando essas funções.

O tópico "Valor ou imagem da função quadrática em um ponto" apresenta os zeros da função ou as raízes da equação. Caso seja interessante, aproveite a equação do *Reflita* (p. 111) e apresente aos estudantes a solução soma e produto de equações do 2º grau, que tem a forma $x^2 - Sx + P = 0$, em que S é a soma e das raízes e P, o produto.

Destacamos a atividade **7**, que apresenta uma situação relacionada à Física ao discutir a potência de um gerador elétrico.

No item **c** da atividade **8**, os estudantes devem perceber que não é possível calcular a medida de área com os dados fornecidos na atividade, favorecendo o trabalho com problemas com dados incompletos, que é mais uma das habilidades que os estudantes devem adquirir.

O tópico "Explorando as raízes de uma equação do 2º grau" cita um estudo inicial sobre as raízes de uma equação, trazendo uma abordagem histórica sobre o conteúdo.

A atividade **9** propõe aos estudantes que utilizem o método babilônico para obter as raízes de uma equação do 2º grau. Neste momento é importante ressaltar o contexto histórico da atividade, mostrando a evolução dos conhecimentos matemáticos ao longo do tempo.

Mais sobre o assunto

Para ampliar o trabalho sobre a Matemática dos babilônios e o método deles para resolver problemas equivalentes a equações do 2º grau, sugerimos a leitura do capítulo 1 – Matemáticas na Mesopotâmia e no Egito – do livro *História da Matemática*, da professora do Instituto de Matemática da UFRJ Tatiana Roque. Além de ser o primeiro livro de história geral da Matemática escrito no Brasil, essa obra também apresenta uma abordagem historiográfica atualizada, com especial atenção a críticas a lugares-comuns nessa área.
ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

No tópico "Formalizando o conceito de zeros de uma função quadrática" são apresentados métodos para determinar as raízes de uma equação do 2º grau: por meio do discriminante, pelo método da soma e produto das raízes e, também, completando quadrados.

Nas atividades desse tópico, é interessante discutir com os estudantes qual é o melhor método de resolução em cada caso.

Nesta série de atividades, destacamos a atividade **12**, que propõe o uso de um fluxograma para determinar as raízes de uma equação.

A atividade **17** mostra que a expressão para o cálculo do Índice de Massa Corporal (IMC) pode ser escrita como uma equação do 2º grau, e a atividade **21** aborda conceitos da área financeira, atendendo ao Tema Contemporâneo Transversal *Educação Financeira*.

O item **a** da atividade **18** aborda um problema em que faltam dados para a resolução, pois, com os dados fornecidos, não é possível determinar os zeros dessa função.

A atividade **22** apresenta uma equação do 2º grau que descreve o movimento de um carro em MUV, uma situação de interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Conexões (p. 112)

Esta seção amplia a visão do estudante ao desenvolver um estudo sobre o efeito Joule e a modelagem de um problema com chuveiros elétricos, cuja lei que determina a potência é dada por uma função quadrática. Ao abordar conceitos relacionados à potência em aparelhos elétricos, trabalha de maneira interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, com enfoque nas habilidades **EM13CNT107**, **EM13CNT306** e **EM13CNT308**.

Ao explicar o funcionamento de um chuveiro elétrico, a seção também busca destacar a relação entre os conceitos abordados em sala de aula e os fenômenos presentes no cotidiano, objetivando a valorização da ciência e da tecnologia e dos modos como elas favorecem a sociedade, abordando assim o Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia* e a **CG01**.

Tecnologias digitais (p. 124)

Oriente os estudantes na escolha do *software* ou aplicativos afins, de modo que o programa escolhido apresente todas as funcionalidades necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas. Auxilie-os também nas explorações iniciais do programa e na identificação das ferramentas e das configurações disponíveis, além de como acessá-las.

Capítulo 2

Neste capítulo é desenvolvido um estudo sobre a função quadrática aplicada em diferentes contextos científicos, na análise algébrica e gráfica da função. Desenvolveremos ao longo do capítulo as habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT402**, **EM13MAT503**, **EM13MAT506**, e também abordaremos a **CG02** na valorização do exercício da curiosidade intelectual, recorrendo a uma abordagem reflexiva e científica.

Na situação-problema **1**, é apresentada uma atividade investigativa em uma perspectiva interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, ao modelar o salto realizado por uma perereca da espécie *Acris gryllus*, que tem a capacidade de saltar a uma medida de distância equivalente a 40 vezes a medida de comprimento da própria altura. A trajetória desenvolvida nesse salto é similar a um arco de parábola, cujo modelo matemático é uma função quadrática.

Na situação-problema **2**, o foco é investigar o movimento parabólico descrito por um salto *grand jeté* realizado por bailarinos clássicos. Assim como na situação anterior, esse salto também pode ser modelado pelo gráfico de uma função quadrática. É importante destacar que essa situação serve como um primeiro contato com o estudo sobre pontos de máximo e de mínimo de uma função quadrática, abordando, em um primeiro momento, a ideia por trás destes conceitos, antes da sua formalização matemática.

Nessa situação, o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias, em especial o de formação disciplinar de Arte, pode participar da aula com uma discussão sobre o balé e apresentação de vídeos com alguns dos passos e técnicas desse estilo de dança, em especial, o *grand jeté*, de modo que os estudantes possam compreender melhor a trajetória desse salto.

No *Explore para descobrir* (p. 128) do tópico "Explorando o gráfico da função quadrática", distribua aos estudantes uma folha de papel-manteiga, papel vegetal ou qualquer outra folha que seja translúcida. O objetivo é que eles construam a parábola partindo da sua definição como lugar geométrico. Ao longo da atividade, ressalte que, quanto mais dobras eles fizerem, mais definida ficará a curva.

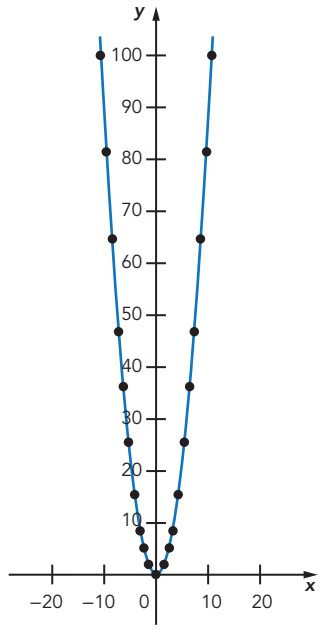
Destacamos também o trabalho com a habilidade **EM13MAT502** na identificação de padrões e criação de conjecturas relacionadas às investigações de relações entre valores numéricos, inclusive na identificação dos casos em que essa relação se dá por uma lei da forma $y = ax^2$, como no tópico "Construção do gráfico de uma função quadrática".

O tópico "Construção do gráfico de uma função quadrática" discute a influência dos coeficientes na representação gráfica da parábola. Caso seja possível, você pode discutir esse conteúdo na aula no laboratório de informática quando estiver desenvolvendo a seção *Tecnologias digitais* (p. 130).

Na atividade **1** do *Explore para descobrir* (p. 135), é esperada a seguinte resolução:

x	$f(x)$
–10	100
–9	81
–8	64
–7	49
–6	36
–5	25
–4	16
–3	9
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Já na atividade **2** desse boxe, espera-se que os estudantes percebam que os pontos da parábola são simétricos em relação ao eixo *y*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

As atividades propostas nesse boxe favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, onde os estudantes aprendem por meio da indução.

Nas atividades **1** a **5** desse tópico, é favorecido o trabalho com a habilidade **EM13MAT402**. Em especial, a atividade **1** favorece essa habilidade também na identificação dos casos em que uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra. Também é favorecido o trabalho com a **EM13MAT502**, no que tange ao reconhecimento de quando as funções são da forma $y = ax^2$. Além disso, essas atividades favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por meio da abdução.

Nas atividades **7** a **13**, a habilidade **EM13MAT402** é favorecida ao analisar se determinados pontos pertencem ou não a uma função em destaque, e na análise da relação entre os coeficientes da função quadrática e aspectos do gráfico dessa função. Essas atividades também favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por meio da indução.

Ao realizar as atividades **14** e **15**, os estudantes trabalham problemas matemáticos associados à determinação dos pontos de máximo e de mínimo de uma função quadrática. É fundamental nesse momento reforçar o conceito de simetria, presente nas parábolas, relacionando o eixo de simetria com o vértice e com o ponto de máximo ou de mínimo. A realização dessas atividades contempla a habilidade **EM13MAT402**.

A atividade **16** pode ser realizada em duplas ou trios, já que propõe uma interação interdisciplinar entre Matemática e Arte.

Na seção *Atividades resolvidas* (p. 148) do tópico "Vértice da parábola, conjunto imagem e valor máximo ou mínimo da função quadrática", são discutidas situações referentes a esportes com bola, como a trajetória de um chute a gol no futebol e, também, de um saque no voleibol, pois o comportamento da bola em ambas as situações pode ser modelado por uma função quadrática.

As atividades **17** a **27**, presentes nesse tópico, propõem uma análise geométrica sobre o eixo de simetria das funções quadráticas, indicando o eixo da parábola e o ponto de máximo ou de mínimo das funções. Reforce que as atividades descrevem diferentes contextos que podem ser modelados com as funções quadráticas, satisfazendo as habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT402** e **EM13MAT503**.

Tecnologias digitais (p. 130)

Esta seção propõe um estudo sobre o cálculo das raízes de uma equação do 2º grau, utilizando como ferramenta um *software* de Geometria dinâmica.

A atividade desta seção investigativa é realizada em 3 passos. Sugerimos que, se possível, apresente a seção antes da formalização do conteúdo. As construções propostas favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, no quesito indução.

Além da sala de aula (p. 152)

Nesta seção, é proposto um projeto interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Nesse projeto, os estudantes são convidados a construir uma horta na escola ou elaborar um plano de cultivo de uma hortaliça que possa ser utilizado por produtores rurais locais. Esse projeto visa ao trabalho com modelagem matemática, principalmente pelo uso das funções do 1º grau e do 2º grau, conhecimentos de unidades de medida e relações entre grandezas, ecologia, sustentabilidade, principalmente ao abordar o reúso de água como possibilidade, e soberania alimentar. Convide o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para auxiliar na pesquisa e no desenvolvimento do projeto: as análises de clima, volume de chuvas, temperaturas médias e tipo de solo serão necessárias.

Finalizada a etapa **3**, cada grupo deve produzir um documento de orientação de plantio ou uma horta comunitária na escola. Nesse momento, avalie se é mais vantajoso os estudantes unirem as pesquisas em um trabalho coletivo. Finalmente, oriente-os a fazer uma manutenção, tanto no projeto da horta na escola quanto nas produções dos agricultores locais, acompanhando o resultado com aferição de dados, registros fotográficos, tabelas e gráficos do resultado. Sugira a continuidade do projeto nos anos seguintes fazendo um rodízio das hortaliças estudadas e/ou plantadas, bem como o envolvimento de outras turmas nesse projeto.

O trabalho proposto colabora com o desenvolvimento de diferentes competências e habilidades da BNCC: **EM13CNT101**, que trata de sustentabilidade e ecologia; **EM13MAT302**, que trata da modelagem de situações reais por meio do estudo das funções do 1º grau e do 2º grau; e **EM13MAT201**, pois faz uso de diferentes unidades de medida em uma proposta efetiva de demanda da região.

Os Temas Contemporâneos Transversais *Educação Ambiental*, *Educação para o Consumo* e *Ciência e Tecnologia* também são trabalhados nesse projeto.

Finalmente, as competências gerais **CG02**; **CG04** (que incentiva o uso de diferentes linguagens e meios de comunicação) e **CG09** (que defende a empatia, diálogo e respeito ao outro) também são favorecidas.

O momento deve ser aproveitado também para discutir a importância do trabalho no campo e a liberdade de uso da terra e escolha de plantio e consumo dos alimentos em uma comunidade, favorecendo assim o trabalho com a soberania alimentar.

Mais sobre o assunto

Para aprofundar essas discussões sugerimos as seguintes referências bibliográficas:

- BRAGA, Marcos Brandão; LIMA, Carlos Eduardo Pacheco. *Reúso de água na agricultura*. Embrapa, Brasília, DF, 2014. Disponível em: https://tedit.net/1jai9y. Acesso em: 11 set. 2024.
- HORTA em casa. *Embrapa Hortaliças*. Disponível em: https://tedit.net/ax8ef4. Acesso em: 11 set. 2024.
- SANTOS JUNIOR, João Pereira dos; MAXIMIANO, Christian Viterbo. *Desenvolvimento da cultura da berinjela submetida a diferentes vazões de gotejamento (Agronomia)*. Real: Repositório Institucional, v. 2, n. 2, 2024. Disponível em: https://tedit.net/cenhxa. Acesso em: 11 set. 2024.

Mais atividades

1. (UFPE) Num voo com capacidade para 100 pessoas, uma companhia aérea cobra R$ 200,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de R$ 4,00 por cada lugar não ocupado (por exemplo, se existirem 10 lugares não ocupados o preço de cada passagem será R$ 240,00). Quantos devem ser os lugares não ocupados para que a companhia obtenha o faturamento máximo?

Resolução:

Seja x o número de lugares não ocupados ($0 \leqslant x \leqslant 100$), o faturamento da empresa é dado pela função f que é definida pela lei $f(x) = (100 - x)(200 + 4x)$. Para obter o faturamento máximo, basta determinar a abscissa do vértice da parábola associada à lei de f. Assim:

$f(x) = 20\,000 + 400x - 200x - 4x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 5\,000 + 50x - x^2$

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2 \cdot (-1)} = 25$

Portanto, temos o faturamento máximo quando 25 lugares não estiverem ocupados.

Unidade 3: Função exponencial

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01, CG02, CG04, CG09.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT101, EM13MAT102, EM13MAT103, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT304, EM13MAT305, EM13MAT308, EM13MAT313, EM13MAT314, EM13MAT316, EM13MAT403, EM13MAT406, EM13MAT407, EM13MAT510, EM13MAT511.
- Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13CNT207, EM13LGG701.
- Temas Contemporâneos Transversais: *Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Ambiental*; *Educação Financeira*; *Educação Fiscal*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Saúde*; *Vida Familiar e Social*.

Objetivos pedagógicos

- Explorar situações relacionadas à potenciação, resolvendo e elaborando problemas utilizando potências e suas propriedades.
- Reconhecer e demonstrar propriedades das potências.
- Utilizar a notação científica para expressar medidas de diferentes grandezas.
- Explorar situações relacionadas à radiciação, resolvendo e elaborando problemas utilizando raízes enésimas aritméticas e as propriedades delas.
- Reconhecer e demonstrar propriedades das raízes enésimas aritméticas.
- Explorar situações relacionadas à função exponencial, resolvendo e elaborando problemas utilizando funções exponenciais.
- Construir o gráfico de funções exponenciais no plano cartesiano, com o uso de tabela de pontos ou com o apoio de tecnologias digitais.
- Identificar características das funções exponenciais e das suas representações gráficas.

Sugestões para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

A situação de abertura desta Unidade propõe uma contextualização sobre a quantidade de bactérias em culturas, e as doenças que podem ser causadas por determinados tipos de bactérias, bem como os tratamentos possíveis para esses casos, essa situação e outras como em dívidas e investimentos envolvendo juros compostos, na quantidade de casos de covid-19, doença que causou uma pandemia mundial em 2020 estão relacionadas com a função exponencial. Essa abordagem favorece o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal *Saúde*.

Mais sobre o assunto

Para mais informações sobre a taxa de crescimento de bactérias, consulte as notas de aula disponíveis em: https://tedit.net/iwqk0n. Acesso em: 11 set. 2024.

Para mais informações sobre bactérias, assista à videoaula da Unifesp, disponível em: https://tedit.net/kmfh4h. Acesso em: 11 set. 2024.

Capítulo 1

O estudo da potenciação e da notação científica foi iniciado nos Anos Finais do Ensino Fundamental e, agora, é retomado e ampliado. Antes de iniciar a exploração das situações propostas, verifique se é necessário retomar a ideia de potência como uma multiplicação de fatores iguais, identificando a base e o expoente da potência.

Na situação-problema **1**, converse com os estudantes sobre o conceito de velocidade da luz. Verifique as informações que eles possuem do assunto. Esses questionamentos oportunizam o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia*.

A situação-problema **2** apresenta uma escada cuja medida de comprimento do corrimão pode ser obtida utilizando o teorema de Pitágoras. Para encontrar essa medida, é necessário calcular uma raiz quadrada. Pergunte aos estudantes em quais outras situações podemos precisar utilizar uma raiz quadrada para obter um valor desejado. Além disso, na situação apresentada, o resultado é um número irracional. Aproveite o item **b** para comentar que, em situações do cotidiano, não costumamos usar números irracionais, porém eles são importantes para cálculos em áreas como Engenharia, Física e Matemática, em que a exatidão é importante.

Aproveite o tópico "Explorando a operação de potenciação" para retomar com os estudantes a potenciação e a sua relação direta com a multiplicação.

Se necessário, utilize a atividade **1** para retomar o conteúdo de conjuntos numéricos, que também foi estudado no Ensino Fundamental. Além disso, o item **e** dessa atividade ajuda no desenvolvimento do raciocínio por indução, ao pedir que o estudante encontre um padrão para a sequência apresentada.

A atividade **2** envolve a pesquisa a respeito de 2 importantes matemáticos que desenvolveram estudos não apenas nessa área, mas em diversas ciências. Converse com os estudantes sobre a importância de pessoas diferentes e até mesmo de áreas distintas para o desenvolvimento da Ciência. Ao abordar e pesquisar o filósofo e matemático René Descartes, por exemplo, verifique se o professor de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas pode auxiliar nos aspectos histórico e filosófico da obra de Descartes, de modo a mobilizar diferentes olhares para um mesmo estudo.

Essas abordagens favorecem o pluralismo de ideias, mostrando que conquistas científicas são feitos de toda uma comunidade. Essas atividades também colaboram com o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, por meio da indução.

No tópico "Formalizando a operação de potenciação" serão apresentadas a definição de potência e suas propriedades. Reforce o caráter indutivo presente nos exemplos do *Fique atento* (p. 163) e também o caráter dedutivo de algumas propriedades.

No *Reflita* (p. 164) os estudantes precisam representar uma razão entre potências de mesma base como um produto de fatores iguais. Para isso, é necessário utilizar argumentos matemáticos conhecidos, o que ajuda a desenvolver a **CGO2**. Acompanhe as demonstrações esperadas como resposta a essas atividades:

Para demonstrar a propriedade, podemos desenvolver os produtos de fatores iguais e simplificar a expressão obtida.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ fatores}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m-n \text{ fatores}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ fatores}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}} =$$

$$= \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{\underbrace{m-n \text{ fatores}}} = a^{m-n}$$

E para o outro boxe:

Para demonstrar cada propriedade, podemos desenvolver os produtos de fatores iguais e simplificar a expressão obtida.

- Propriedade da potência de potência:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ fatores}} =$$

$$= \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ fatores}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ fatores}} \cdot \ldots \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ fatores}}}{\underbrace{n \text{ fatores}}} =$$

$$= \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{\underbrace{m \cdot n \text{ fatores}}} = a^{m \cdot n}$$

- Propriedade da potência do produto:

$$(a \cdot b)^m = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{m \text{ fatores}} =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ fatores}} = a^m \cdot b^m$$

- Propriedade da potência do quociente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{m \text{ fatores}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ fatores}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fatores}}} = \frac{a^m}{b^m}$$

Esses boxes colaboram com o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, por meio da indução e da dedução.

A atividade **7** apresenta os conceitos de *bit* e *byte*, que são muito importantes para o desenvolvimento de tecnologias digitais. Para aproveitar esse tema e desenvolver o Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia*, pode ser interessante propor uma pesquisa sobre o armazenamento de dados em um computador.

Mais sobre o assunto

Para mais informações a respeito de armazenamentos de dados em um computador, consulte o arquivo disponível em: https://tedit.net/1hs73y. Acesso em: 6 set. 2024.

No tópico "Formalizando o conceito de notação científica" é apresentada a notação científica com alguns exemplos, retomando, inclusive, a situação de abertura do capítulo.

Nas atividades **8** a **14**, os estudantes desenvolvem parcialmente a habilidade **EM13MAT313** ao utilizar notações científicas para expressar números e medidas de grandezas em diferentes contextos.

O tema da atividade **12** pode ser ampliado propondo um debate acerca do assunto relacionado ao corpo e à sexualidade, promovendo o cuidado com a saúde física e emocional previsto na **CG08**. É importante mostrar aos estudantes que atitudes preventivas e informações seguras são imprescindíveis. É interessante convidar professores de outras áreas, principalmente de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, e profissionais da área da saúde para a conversa. Essa conversa promove o Tema Contemporâneo Transversal *Saúde*.

Mais sobre o assunto

Para obter mais informações da sífilis, consulte o documento Diagnóstico de sífilis, do Ministério da Saúde (Brasília-DF, 2014). Disponível em: https://tedit.net/c3cfk6. Acesso em: 6 set. 2024.

Nas atividades **14** a **16**, os estudantes vão conversar sobre o consumo de água e outros impactos causados pelo crescimento populacional, desenvolvendo o Tema Transversal Contemporâneo *Educação Ambiental*.

No tópico "Algarismos significativos em medidas", mobilizamos outros aspectos da habilidade **EM13MAT313**, nos quais os estudantes compreendem as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos e reconhecem que toda medição realizada fisicamente é inevitavelmente acompanhada de erro. Por proporcionar a leitura de textos de caráter científico e que empregam unidade de medida de grandezas, com foco na compreensão das incertezas inerentes de medições, também favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103**.

Para ampliar o trabalho com os algarismos significativos em medidas, proponha que busquem, em portais de divulgação científica ou de notícias, pesquisas baseadas em dados experimentais, verificando se a incerteza desses dados foi divulgada no texto. Ressalte que nenhuma publicação é aceita em jornais científicos se os dados apresentados não forem acompanhados das incertezas, embora muitos veículos de comunicação tenham o hábito de ocultar essa informação, seja para facilitar a leitura do público geral, seja para enviesar o teor da reportagem divulgada.

Mais sobre o assunto

Para mais informações sobre erros e incertezas em medidas físicas, leia o texto "Os conceitos de erro e incerteza", disponível em: https://tedit.net/i85rs1. Acesso em: 6 set. 2024.

Na atividade **18**, favorecemos o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT205**, pois ela propõe uma reflexão sobre as noções de incerteza na simulação de uma atividade experimental.

No *Explore para descobrir* (p. 173) do tópico "Explorando a operação de radiciação" os estudantes fazem novas explorações numéricas, agora com raízes, e buscam elaborar conjecturas de possíveis relações matemáticas, bem como exercitam a curiosidade intelectual e recorrem a abordagens matemáticas, mobilizando o desenvolvimento da **CG02**.

Na atividade **2** desse boxe, espera-se que os estudantes percebam que, para esses exemplos, o produto de 2 raízes quadradas é igual à raiz quadrada do produto dos radicandos delas.

As situações propostas nesse tópico favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por meio da indução.

No tópico "Formalizando a operação de radiciação", ao apresentar o exemplo do cálculo de $\sqrt{16}$, deixe claro que esse número não pertence ao conjunto dos números reais, mas que pertence a outro conjunto numérico; isso não significa que esse valor não exista ou que seja uma indeterminação matemática.

A abordagem do boxe *Sobre o assunto* favorece o pluralismo de ideias ao mostrar que as conquistas científicas são feitos de toda uma comunidade, e de pessoas que a compõem, como é o caso de Júlia Pimenta Ribeiro, de 11 anos.

Para resolver a atividade **21**, existem algumas estratégias que podem ser utilizadas, como escolher radicandos

cujo produto seja um quadrado perfeito. Uma maneira fácil de obter isso é fazer o produto de 2 raízes quadradas iguais. Incentive a criatividade dos estudantes, inclusive para que não escolham apenas radicandos naturais.

Conexões (p. 179)

Nesta seção, apresentamos novamente a temática de medições de grandezas, agora contextualizada na realidade dos indígenas que vivem nas aldeias Palikur, ressaltando a pluralidade cultural de procedimentos matemáticos. Assim, está presente o desenvolvimento dos Temas Contemporâneos Transversais *Diversidade Cultural* e *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*.

Ao ler o texto, é provável que os estudantes se recordem de unidades de medida de comprimento como o palmo ou o passo, que estudaram nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Então, na atividade **1**, eles podem explicar o que identificam de diferenças entre os procedimentos usados pelos Palikur e aqueles que eles próprios costumam utilizar.

Na atividade **2**, eles devem buscar na comunidade escolar situações de medição de diferentes grandezas, não apenas de comprimento, percebendo também semelhanças e diferenças com as usadas pelos Palikur e entre elas, bem como benefícios ou limitações no uso de cada uma delas.

Em uma feira livre, por exemplo, há frutas e verduras que são vendidas por quilograma; outros produtos, como temperos, são vendidos em porções (muitas vezes medidas com copinhos ou outro recipiente).

Na atividade **3**, é importante que os estudantes respondam que qualquer medição é acompanhada de imprecisões, e que a escolha dos instrumentos de medida e das unidades pode minimizar os erros instrumentais.

Proponha a leitura do livro citado no *Sobre o assunto* (p. 180) e a visita ao *site* indicado do programa Povos Indígenas no Brasil. Por utilizarem tecnologias digitais de informação e comunicação para acessar informações e produzir conhecimentos, assim como para compreender a diversidade cultural do país, essa proposta promove o desenvolvimento da habilidade **EM13LGG701**. Também é favorecido o trabalho com a Etnomatemática, ao abordar o conteúdo aplicado em determinada região. Este também é um momento para mostrar a importância daquele povo, promovendo o combate a toda forma de preconceito cultural e étnico-racial, abordando o conceito de decolonialidade.

Capítulo 2

No item que solicita uma representação das relações, perceba como os estudantes descrevem a relação entre o par de grandezas. Caso eles apresentem dificuldade em perceber a relação entre as grandezas, proponha que representem alguns valores em uma tabela.

Por exemplo:

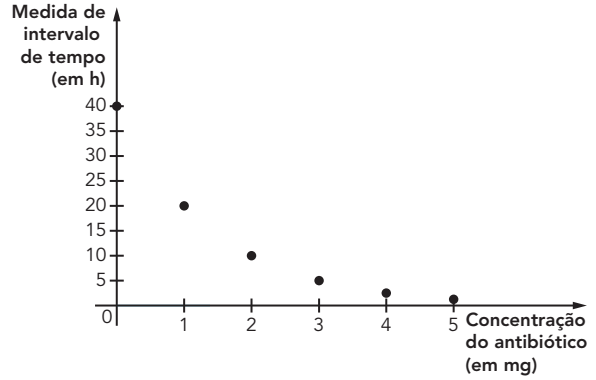
Antibiótico com meia-vida de 1 hora

Medida de intervalo de tempo (em h)	Concentração do antibiótico (em mg)
0	40
1	20
2	10
3	5
4	2,5
5	1,25

Dados elaborados para fins didáticos.

Tendo construído a tabela com os valores, eles também podem representá-los em um plano cartesiano, com o auxílio de uma planilha eletrônica, e observar o decrescimento exponencial.

Antibiótico com meia-vida de 1 hora



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

No tópico "Formalizando o conceito de função exponencial", reforce a relação que ocorre entre um conjunto "de partida" e um conjunto "de chegada" e que todos os elementos do primeiro conjunto devem se relacionar com 1, e apenas 1, elemento do segundo conjunto.

As atividades propostas trabalham os conceitos básicos de função exponencial definidos no tópico anterior. Na atividade **3**, os estudantes têm novamente um exemplo de situação real de aplicação da função exponencial.

Depois da atividade de explorações no laboratório de informática, os estudantes vão estudar algébrica e graficamente as funções exponenciais, desenvolvendo assim aspectos da habilidade **EM13MAT403** e da **CG02**.

No *Reflita* (p. 187) os estudantes devem explicar com as próprias palavras como é o decrescimento dos valores de uma função exponencial decrescente.

Os itens **a** e **b** da atividade **5** permitem mensurar a percepção dos estudantes de quais características da função exponencial são alteradas ao modificar a base.

Sendo a lei da forma $f(x) = a^x$, o valor de $f(0)$ é sempre 1 (ou seja, o gráfico da função sempre intersecta o eixo y no ponto $(0, 1)$) e o valor de $f(1)$ é sempre a.

Na atividade **8**, os estudantes podem escrever qualquer lei da forma $f(x) = a^x$, com $a > 1$, para a função ser crescente, e qualquer lei da forma $g(x) = a^x$, com $0 < a < 1$, para a função ser decrescente. A atividade tem como principal objetivo verificar se eles compreenderam o papel da base da potência na lei da função exponencial. Se for o caso, destaque a condição para que a função seja crescente ou decrescente.

O boxe *Explore para descobrir* (p. 190) do tópico "Ampliando a ideia de função exponencial" ajuda a desenvolver o raciocínio lógico-matemático de indução ao pedir que os estudantes obtenham uma função para definir o montante ao final de t meses do dinheiro aplicado.

As atividades desse boxe favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por meio da indução.

Na atividade resolvida **3** (p. 191), pergunte qual é a unidade de medida da variável t. O enunciado da questão não informa a unidade; porém, considerando a situação, os demais dados e outros contextos relacionados à quantidade de bactérias, podemos supor que é minuto.

A atividade **10** desenvolve o Tema Contemporâneo Transversal *Educação Financeira* ao solicitar uma análise matemática das situações apresentadas para a compra de um aparelho novo.

O contexto e as propostas da atividade **12** merecem um tempo maior de trabalho. Nela, também apresentamos informações sobre centros de pesquisa e propomos aos estudantes uma visita ao *site* do Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (Ipen). Converse com os estudantes e proponha uma pesquisa sobre a importância da descoberta da radioatividade e, também, sobre os perigos dela para a saúde; assim, são trabalhados os Temas Contemporâneos Transversais *Ciência e Tecnologia* e *Saúde*.

Em seguida, no boxe *Sobre o assunto*, apresentamos informações de Marie Curie, importante cientista que, apesar das dificuldades que encontrou na época por ser mulher, apresentou muitos feitos na carreira. Com isso, promovemos a valorização dos conhecimentos científicos e destacamos a importância desses desenvolvimentos para a atualidade, favorecendo a **CG01**. Também destacamos a importância de promover positivamente a imagem da mulher.

Para ampliar a atividade **14** e promover o trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais *Educação Ambiental* e *Ciência e Tecnologia*, proponha uma pesquisa a respeito das causas e consequências da proliferação excessiva das algas e quais são as técnicas e os recursos disponíveis para seu controle.

A pergunta do item **b** da atividade **15** não pode ser respondida, pois o enunciado não fornece todos os dados necessários. Pergunte aos estudantes por que o item **a** tem solução e o item **b** não tem. Esse tipo de problema favorece o trabalho de interpretação de texto e, também, matemático, ao propor a resolução de problemas com dados incompletos.

Dê atenção especial à atividade **16** e às demais atividades que solicitam a elaboração de problemas, como o item **b** da atividade **17**. Em geral, esse tipo de atividade favorece compreensões acerca de como os estudantes aplicam os conceitos explorados até então. Analise os enunciados que foram escritos e se eles elaboraram problemas que continham todos os dados necessários para a resolução.

O item **b** da atividade **17** exige coletas externas de dados para elaborar e resolver o problema. Como cada estudante vai escolher os dados pesquisados, os problemas elaborados podem ser bem variados. Perceba que essa atividade favorece o desenvolvimento do Tema Transversal Contemporâneo *Educação Financeira*.

Na atividade **22**, analise as escolhas de valores para k e a que os estudantes fazem para que a função criada seja crescente. Eles devem escolher valores $k > 0$ e $a > 1$ ou $k < 0$ e $0 < a < 1$.

A atividade **23** proporciona o trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais *Educação para o Consumo* e *Educação Financeira*, pois o estudante deve fazer uma análise matemática da situação para compreender a desvalorização do *videogame* ao longo dos anos e decidir o melhor momento para a sua venda.

Tecnologias digitais (p. 183)

Para que as aprendizagens sejam mais significativas e aplicadas, organizamos a aplicação das atividades desta seção antes da formalização do tópico "Gráfico da função exponencial", de modo a propiciar aos estudantes a manipulação dos gráficos no *software*, explorando, investigando, fazendo simulações e elaborando conjecturas de características das funções. Com isso, o *software* ganha múltiplos propósitos, podendo ser utilizado também para informar e comunicar as conjecturas elaboradas e produzir conhecimentos, favorecendo o desenvolvimento parcial da habilidade **EM13LGG701**.

Organizamos esta seção em 2 momentos, que devem ser seguidos para uma melhor compreensão da investigação proposta. No primeiro momento, os estudantes constroem o gráfico da função exponencial dada por $f(x) = 2x$. Converse com eles sobre a intersecção desse gráfico com o eixo y e a condição para que isso ocorra: $f(x) = 2^0 = 1$.

No segundo momento, explore com os estudantes a construção de funções exponenciais de diferentes bases, utilizando a lei $f(x) = a^x$, na qual a pode assumir diferentes valores, com $a > 0$ e $a \neq 1$. A realização da atividade **2** favorece aspectos da habilidade **EM13MAT304**. Proporcione um momento para que eles expliquem o que perceberam ao alterar o valor do coeficiente a, fazendo uso de argumentações matemáticas.

Depois desta seção, apresentamos a formalização das características das funções exponenciais. Os estudantes

podem compará-las com as conjecturas que fizeram nas funções dadas nesta seção, ampliando e consolidando as características e propriedades de qualquer função exponencial.

Tecnologias digitais (p. 196)

Nesta seção, após ampliar a ideia de função exponencial, propomos a construção do gráfico de funções do tipo exponenciais dadas por $f(x) = b \cdot a^x + c$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$. Para cada coeficiente dessa lei, criamos no *software* de Geometria dinâmica um controle deslizante e, fazendo isso, produzimos nosso próprio simulador do gráfico da função, que nos permite alterar o coeficiente e analisar as alterações proporcionadas no gráfico da função exponencial e mobilizar o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT304**.

A atividade **5** pede que o estudante apresente argumentos sobre o que foi percebido por ele nos itens anteriores, baseados nos cálculos e no comportamento dos gráficos da função, o que proporciona o trabalho com a **CG07**.

Essas atividades também colaboram com o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por meio da indução.

Conexões (p. 198)

Esta seção promove o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT101** e do Tema Contemporâneo Transversal *Educação Financeira*, pois introduz ao estudante diversos tipos de investimentos e os cuidados necessários ao investir. Desse modo, contribui para o aprimoramento da capacidade de interpretar criticamente a diversidade de opções de investimento, avaliando riscos e retornos para tomar decisões responsáveis sobre o gerenciamento de recursos financeiros.

Oriente os estudantes a sempre prestar atenção nas orientações de segurança e proteção para não cair em golpes financeiros.

Além da sala de aula (p. 204)

Esta seção favorece o desenvolvimento da **CG08** e da habilidade **EM13CNT207**, por tratar do aspecto físico e psicoemocional dos jovens, com o intuito de trazer conhecimentos que colaborem com ações de prevenção e promoção da saúde. Se possível, aborde esta seção em conjunto com o professor de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

O anticoncepcional é um método contraceptivo bastante utilizado no país, mas, por falta de conhecimento ou descuido, é muitas vezes utilizado de maneira equivocada. Para promover o desenvolvimento de aspectos das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT304**, converse com os estudantes sobre o significado da meia-vida de um remédio e como o atraso ao se tomar o anticoncepcional causa um efeito similar, pois altera a contagem de hormônios no organismo, diminuindo a eficácia do medicamento.

Para ampliar o trabalho com esta seção, verifique o interesse dos estudantes em desenvolver um projeto de conscientização do assunto com outras turmas do Ensino Médio da escola e até mesmo com familiares, vizinhos ou outros membros da comunidade escolar, promovendo, assim, não apenas o Tema Contemporâneo Transversal *Saúde*, mas também *Vida Familiar e Social*.

A seção *Indo além* apresenta uma proposta de pesquisa de análise de concentração de medicamentos no organismo tendo em vista as dosagens e posologia indicadas pelos laboratórios e médicos. Auxilie os estudantes na pesquisa das informações em fontes confiáveis. Interceda junto à escola para que a pesquisa seja compartilhada com as demais turmas e, potencialmente, com as famílias dos estudantes, funcionários da escola, etc.

Mais atividades

1. (Colégio Naval-RJ) Na natureza há bactérias que se multiplicam tão rapidamente que dobram de volume a cada minuto. Partindo-se de uma bactéria, em 50 min um ambiente estará cheio de bactérias. Em quanto tempo, aproximadamente, esse mesmo processo irá acontecer se o estudo for feito com duas bactérias idênticas?

a) 0,4 hora
b) 0,5 hora
c) 0,6 hora
d) 0,7 hora
e) 0,8 hora

Resolução:

Existem 2 funções distintas, uma vez que apresentam valores iniciais diferentes. Iniciando o estudo com 2 bactérias, podemos representar a medida de volume das bactérias em função da medida de intervalo de tempo, em minutos, por: $V_B(t) = 2 \cdot 2^t$.

Iniciando com apenas 1 bactéria e sabendo que após 50 minutos o ambiente estará cheio de bactérias, a medida de volume das bactérias no ambiente será $V_A(50) = 1 \cdot 2^{50}$.

Temos: $V_B(t) = V_A(50) \Rightarrow 2 \cdot 2^t = 1 \cdot 2^{50} \Rightarrow 2^t = \frac{2^{50}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^t = 2^{49} \Rightarrow t = 49$.

Esse valor está indicado em minutos; transformando em horas, teremos:

$t = \frac{49}{60} \simeq 0{,}8$

Aproximadamente 0,8 hora. Alternativa **e**.

2. (Uema) Numa concessionária de caminhões zero, o vendedor informou ao comprador que a lei matemática que permite estimar a depreciação do veículo comprado é $v(t) = 65\,000 \cdot 4^{-0{,}04t}$, em que $v(t)$ é o valor, em reais, do caminhão, t anos após a aquisição como zero na concessionária.

Segundo a lei da depreciação indicada, o caminhão valerá um oitavo do valor de aquisição com:

a) 37,5 anos.
b) 7,5 anos.
c) 25 anos.
d) 8 anos.
e) 27,5 anos.

Resolução:

Queremos calcular o valor de t para o qual se tem $v(t) = \frac{1}{8} \cdot v(0)$.

Assim, aplicando a lei da função, temos:

$\frac{1}{8} \cdot 65\,000 = 65\,000 \cdot 4^{-0,04t} \Rightarrow 2^{-0,08t} = 2^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow -0,08t = -3 \Rightarrow t = 37,5$

Portanto, o caminhão valerá um oitavo do valor de aquisição em 37,5 anos. Alternativa **a**.

Unidade 4: Função logarítmica

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01, CG02, CG04, CG09.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT101, EM13MAT102, EM13MAT103, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT304, EM13MAT305, EM13MAT308, EM13MAT313, EM13MAT314, EM13MAT316, EM13MAT403, EM13MAT406, EM13MAT407, EM13MAT510, EM13MAT511.
- Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13CNT207, EM13CNT301, EM13CNT306.
- Temas Contemporâneos Transversais: *Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Ambiental*; *Educação Financeira*; *Educação Fiscal*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Vida Familiar e Social*; *Saúde*.

Objetivos pedagógicos

- Explorar situações relacionadas ao logaritmo de um número, resolvendo e elaborando problemas utilizando logaritmos e suas propriedades.
- Explorar a ideia de logaritmo de um número considerando a relação com a potenciação.
- Explorar situações relacionadas à função logarítmica, resolvendo e elaborando problemas utilizando funções logarítmicas.
- Construir o gráfico de funções logarítmicas no plano cartesiano, com o uso de tabela de pontos ou com o apoio de tecnologias digitais.
- Identificar características das funções logarítmicas e das representações gráficas delas.
- Construir em um plano cartesiano o gráfico de uma função logarítmica e o gráfico de uma função exponencial de mesma base, com o apoio de tecnologias digitais, identificando a relação entre essas funções e a relação entre os gráficos delas.

Sugestões para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

Na abertura desta Unidade, são explorados os países da América Latina e do Caribe onde são falados os idiomas conhecidos como românicos, que são os derivados do latim. Os idiomas que predominam são o espanhol, o português e o francês. Auxilie os estudantes nas pesquisas sobre a extensão territorial de alguns países e na quantidade de habitantes do território brasileiro. Os estudantes podem compartilhar essas informações com toda a turma. Esse tema favorece a abordagem da diversidade e diferenças de povos não brasileiros, ao falar dos idiomas de outros países.

Capítulo 1

A simplificação de operações de multiplicação e divisão sempre foi uma necessidade do ser humano. Os logaritmos surgiram no século XVI como um instrumento de cálculo para realizar simplificações, transformando multiplicações e divisões em operações de adição e subtração.

Esse contexto é abordado na situação-problema, onde John Napier (1550-1617), matemático, físico e astrônomo escocês, foi um dos cientistas que mais impulsionou o desenvolvimento dos logaritmos e por isso é atribuída a ele a sua invenção. Mas o matemático inglês Henry Briggs (1561-1630), um grande admirador do trabalho de Napier, desenvolveu os logaritmos de base 10, também chamados de logaritmos comuns. Essas invenções permitiram diversos avanços científicos por meio de simplificações de operações, que culminaram, por exemplo, no Eniac, um dos primeiros computadores.

Atualmente os logaritmos são utilizados em diversas áreas do conhecimento e aplicados em diferentes contextos científicos – desde o cálculo do pH de uma solução até a previsão de magnitudes de terremotos.

Neste capítulo, apresentamos aos estudantes a ideia de logaritmo utilizando elementos da história da Matemática, ao possibilitar a identificação e a análise de eventos históricos com vistas à compreensão dos processos que foram criados.

Na situação-problema, permita que os estudantes explorem as nomenclaturas dadas e a relação delas com a notação matemática do logaritmo. Em seguida, apresente a eles a leitura de $\log_{10} 100 = 2$; lemos: o logaritmo de cem na base dez é igual a dois.

No item **b**, eles também devem perceber regularidades na quantidade de zeros no logaritmando, considerando a base 10 do logaritmo, para estabelecer qual é o valor de cada logaritmo dado. Analise como eles explicam a percepção dos resultados e como utilizam linguagens matemáticas nas explicações. Esse contexto favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático.

No tópico "Explorando a resolução de equações exponenciais", apresentamos a definição de logaritmo a partir da resolução de equações exponenciais, estabelecendo a conexão entre esses conteúdos.

No *Explore para descobrir* (p. 213) os estudantes têm conhecimento para calcular o valor de x nos itens **a** e **b**, pois os números do segundo membro das equações podem ser escritos na forma de potência de mesma base da potência do primeiro membro.

Apesar de eles não terem conhecimentos para resolver a equação do item **c**, o processo de tentativa e de investigação do porquê de não conseguirem resolver é importante para a compreensão da necessidade de novas aprendizagens que se relacionam. Incentive-os a conjecturar por que não conseguiram aplicar as mesmas aprendizagens nessa resolução. Essa abordagem favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático abdutivo.

Mais sobre o assunto

Até a década de 1960, antes do advento das calculadoras eletrônicas, o emprego do logaritmo decimal era de fundamental importância. Para conhecer como eram encontradas as partes decimais (mantissa) desses números, sugerimos o artigo "Como se constrói uma tábua de logaritmos", de Geraldo Ávila, publicado na *Revista do Professor de Matemática*, n. 26. Disponível em: https://tedit.net/19yy83. Acesso em: 6 set. 2024.

No *Reflita* (p. 214) do tópico "Formalizando o conceito de logaritmo de um número", pergunte aos estudantes por que não existem as potências obtidas ao aplicar a definição nos logaritmos dados. Espera-se que eles compreendam que não existe valor de x no expoente da potência que satisfaça cada igualdade.

Destacamos a atividade **6**, que contempla a interpretação de um problema interdisciplinar ao utilizar o valor de logaritmos associado ao cálculo do pH de soluções, atendendo parcialmente à habilidade **EM13MAT305**.

As respostas da atividade **1** do *Explore para descobrir* (p. 217), são: usando a definição de logaritmo, calculamos o valor de cada expressão numérica dada.

a) $\log_2 (8 \cdot 16) = x \Rightarrow 2^x = 8 \cdot 16 \Rightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$

$\log_2 8 = y \Rightarrow 2^y = 8 \Rightarrow 2^y = 2^3 \Rightarrow y = 3$; $\log_2 16 = z \Rightarrow 2^z = 16 \Rightarrow 2^z = 2^4 \Rightarrow z = 4$; $\log_2 8 + \log_2 16 = 3 + 4 = 7$.

b) $\log_3 (9 \cdot 81) = x \Rightarrow 3^x = 9 \cdot 81 \Rightarrow 3^x = 729 \Rightarrow 3^x = 3^6 \Rightarrow x = 6$

$\log_3 9 = y \Rightarrow 3^y = 9 \Rightarrow 3^y = 3^2 \Rightarrow y = 2$; $\log_3 81 = z \Rightarrow 3^z = 81 \Rightarrow 3^z = 3^4 \Rightarrow z = 4$; $\log_3 9 + \log_3 81 = 2 + 4 = 6$.

c) $\log_2 \frac{32}{4} = x \Rightarrow 2^x = \frac{32}{4} \Rightarrow 2^x = 8 = 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

$\log_2 32 = y \Rightarrow 2^y = 32 \Rightarrow 2^y = 2^5 \Rightarrow y = 5$; $\log_2 4 = z \Rightarrow 2^z = 4 \Rightarrow 2^z = 2^2 \Rightarrow z = 2$; $\log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$.

d) $\log_3 \frac{27}{9} = x \Rightarrow 3^x = \frac{27}{9} \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$\log_3 27 = y \Rightarrow 3^y = 27 \Rightarrow 3^y = 3^3 \Rightarrow y = 3$; $\log_3 9 = z \Rightarrow 3^z = 9 \Rightarrow 3^z = 3^2 \Rightarrow z = 2$; $\log_3 27 - \log_3 9 = 3 - 2 = 1$.

e) $\log_2 4^3 = x \Rightarrow 2^x = 4^3 \Rightarrow 2^x = (2^2)^3 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$

$\log_2 4 = y \Rightarrow 2^y = 4 \Rightarrow 2^y = 2^2 \Rightarrow y = 2$; $3 \cdot \log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$.

f) $\log_{10} 100^3 = x \Rightarrow 10^x = 100^3 \Rightarrow 10^x = (10^2)^3 \Rightarrow 10^x = 10^6 \Rightarrow x = 6$

$\log_{10} 100 = y \Rightarrow 10^y = 100 \Rightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$; $3 \cdot \log_{10} 100 = 3 \cdot 2 = 6$.

g) $\log_4 64 = x \Rightarrow 4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3$

$\log_2 64 = y \Rightarrow 2^y = 64 \Rightarrow 2^y = 2^6 \Rightarrow y = 6$; $\log_2 4 = z \Rightarrow 2^z = 4 \Rightarrow 2^z = 2^2 \Rightarrow z = 2$; $\frac{\log_2 64}{\log_2 4} = \frac{6}{2} = 3$.

h) $\log_9 81 = x \Rightarrow 9^x = 81 \Rightarrow 9^x = 9^2 \Rightarrow x = 2$

$\log_3 81 = y \Rightarrow 3^y = 81 \Rightarrow 3^y = 3^4 \Rightarrow y = 4$; $\log_3 9 = z \Rightarrow 3^z = 9 \Rightarrow 3^z = 3^2 \Rightarrow z = 2$; $\frac{\log_3 81}{\log_3 9} = \frac{4}{2} = 2$.

A atividade **10** contempla a interpretação e a resolução de problemas utilizando o valor de logaritmos associados ao cálculo do pH de soluções.

Na atividade **7**, verifique se os estudantes obtêm $\log 9 \simeq \simeq 1$ e se compreendem essa aproximação, já sabendo que $\log 10 = 1$. Como eles utilizaram a aproximação $\log 3 = 0{,}5$ fornecida no enunciado, aplicando as propriedades operatórias, devem ter chegado à conclusão de que $\log 9 \simeq \log 10$. Na realidade, $\log 3 = 0{,}47712125\ldots$ e $\log 9 = 0{,}95424250\ldots$ e os valores dados e calculados são obtidos quando consideramos aproximações para uma casa decimal.

Nas atividades **13** e **26**, os estudantes devem elaborar problemas que tenham estruturas similares às de outros problemas fornecidos. Para que o problema da atividade **22** possa ser resolvido sem que sejam indicadas a medida de massa inicial e a medida de massa em um instante t, é necessário informar uma em função da outra, por exemplo, $Q(t)$ é 8% de Q_0, ou $Q(t)$ corresponde a $\frac{Q_0}{4}$.

Para usar os valores aproximados de log 2 e log 7, eles podem escolher situações em que a medida de massa se reduz a $\frac{1}{7}$ ou $\frac{1}{49}$, por exemplo, variando a meia-vida da substância.

Capítulo 2

Neste capítulo, os estudantes vão desenvolver o estudo das funções logarítmicas, relacionando-as com aplicações em contextos científicos, como no cálculo da magnitude de abalos sísmicos, da medida de intervalo de tempo em um processo de tomada de decisão ou da medida de nível sonoro.

A habilidade **EM13MAT305** é desenvolvida ao longo de todo o capítulo, na resolução e na elaboração de problemas relacionados às funções logarítmicas, aplicados em diferentes contextos.

Na situação-problema **1**, desenvolva com os estudantes uma investigação sob perspectiva científica, tecnológica e interdisciplinar, explorando a medida de energia liberada por terremotos e a magnitude considerada, na escala Richter. Proponha aos estudantes uma conversa sobre os efeitos causados por abalos sísmicos, como *tsunamis* e terremotos nos locais atingidos.

No boxe *Sobre o assunto* (p. 226), apresentamos algumas referências bibliográficas relacionadas aos sensores que detectam abalos sísmicos e uma proposta de pesquisa que favorece o desenvolvimento da **CG01** e do Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia*. Essa pesquisa também favorece o trabalho com a habilidade **EM13CNT301** por meio da construção, da elaboração e da hipótese e da previsão científica de técnicas de previsão de terremotos e de construções preparadas para tremores.

Como as pesquisas podem ser bem amplas, sugerimos organizar os estudantes em grupos, de modo que cada grupo escolha um tema a ser estudado. Depois, os grupos organizam apresentações ou seminários compartilhando o fruto das descobertas e desenvolvendo a **CG05**, pela compreensão e pela utilização de tecnologias digitais de informação e de comunicação, tanto para acessar informações como, se quiserem, para comunicar o que pesquisaram.

Mais sobre o assunto

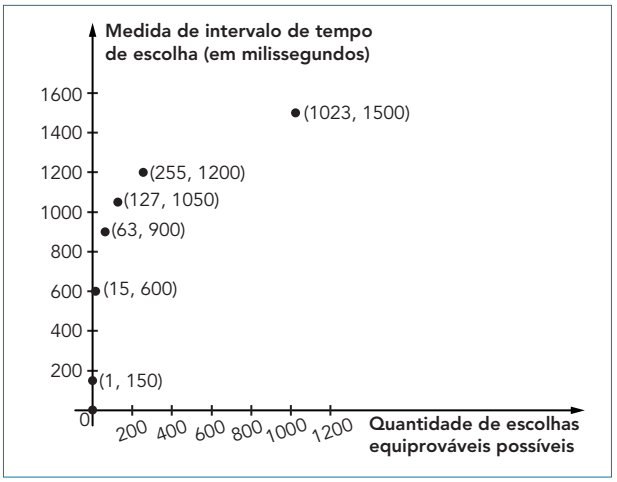
Para complementar o tema, sugerimos algumas referências bibliográficas (acesso em: 6 set. 2024).

- *Pesquisa Fapesp*: por que a terra treme no Brasil. Disponível em: https://tedit.net/lbko25.
- *A escala Richter*. Disponível em: https://tedit.net/khsd52
- *Terremotos*: magnitude, intensidade e tipos de ondas. Disponível em: https://tedit.net/uk1q6a.

Na situação-problema **2**, os estudantes investigam o processo de escolha e a medida de intervalo de tempo necessária para a escolha. Essa situação propicia associar processos rotineiros a um estudo realizado pelo psicólogo britânico William Edmund Hick (1912-1974) e o psicólogo estadunidense Ray Hyman (1928-). Por meio de modelagens matemáticas, eles estabeleceram uma expressão, conhecida como lei de Hick-Hyman (ou lei de Hick), que permite fazer previsões da medida de intervalo de tempo do processo de tomada de decisão usando uma função do tipo logarítmica. Faça com os estudantes um levantamento de situações do cotidiano em que as pessoas precisam tomar decisões em um curto intervalo de tempo (como decisões no trânsito, sejam elas motoristas, passageiros ou pedestres) e de como esse intervalo de tempo para as decisões pode impactar as consequências.

Para o item **a** obtemos o seguinte gráfico:

Relação entre a medida de intervalo de tempo e a quantidade de escolhas possíveis



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

No tópico "Formalizando a definição de função logarítmica" é apresentada e ilustrada a definição da função logarítmica, definida como inversa da função exponencial.

A habilidade **EM13MAT305** é desenvolvida nas atividades de resolução e elaboração de problemas que envolvem funções do tipo logarítmica – por exemplo, as atividades **3** e **4**. Para resolver a atividade **4**, os estudantes devem identificar quais dados são relevantes ou não para a resolução, já que as informações dos demais eventos não são necessárias para o cálculo do índice de morte para praticantes de *base jumping*.

As atividades propostas colaboram com o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por meio da analogia.

Depois da seção *Tecnologias digitais*, apresentamos a formalização das características das funções exponenciais. Os estudantes podem compará-las com as conjecturas que fizeram nas funções dadas na seção anterior, ampliando e consolidando as características e propriedades de qualquer função logarítmica.

Pode ser interessante, no tópico "Algumas características da função logarítmica", retomar com os estudantes as características das funções injetora, bijetora e sobrejetora.

A pergunta do *Ampliando a atividade* (p. 237), na atividade resolvida **1**, pode ser utilizada para ressaltar com os estudantes como um crescimento de 4 unidades na magnitude corresponde a multiplicar a medida de energia liberada por 10^6. Usando outros pares de valores de magnitude, eles podem verificar que o crescimento dessas grandezas não é linear.

No *Sobre o assunto* (p. 237), ressaltamos a busca por simuladores de terremotos, compreendendo e utilizando tecnologias digitais de informação e comunicação para acessar informações e ampliar os conhecimentos (**CG05**) sobre abalos sísmicos. Há muitos museus físicos que contam com simuladores desse tipo. Vídeos e simuladores *on-line* também oportunizam experiências virtuais dos simuladores, favorecendo o Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia*.

O trabalho proposto nesses boxes favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por meio da dedução.

Destacamos que a atividade **17** colabora com o desenvolvimento dos Temas Contemporâneos Transversais *Educação Financeira* e *Educação Fiscal*.

A atividade **20** proporciona aos estudantes um momento de elaboração do enunciado de um problema cujos dados foram informados. Como são apresentadas as informações de 2 terremotos diferentes, é provável que os enunciados elaborados por eles, bem como as escolhas e as interpretações dos dados, sejam bem diversos. Do mesmo modo, as estratégias de resolução dos problemas poderão ser diferentes em cada proposta.

As atividades propostas favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, também são apresentadas atividades com dados incompletos ou com mais dados do que o necessário. Na atividade **19**, como não há dados suficientes, os estudantes são instigados a argumentar sobre situações como essa.

Tecnologias digitais (p. 230)

Para que as aprendizagens sejam mais significativas e aplicadas, propusemos a aplicação das atividades desta seção antes da formalização do tópico "Gráfico da função logarítmica", de modo a propiciar aos estudantes a manipulação dos gráficos no *software* de Geometria dinâmica.

Verifique o melhor momento para trabalhar esta seção, que pode ser proposta também com os estudantes organizados em pequenos grupos. Perceba que nesta seção, são propostos 3 momentos, que devem ser seguidos para melhor compreensão da investigação proposta.

Além da sala de aula (p. 242)

O trabalho ao longo desta seção favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT207** e **EM13CNT306**, proporcionando um trabalho interdisciplinar com Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de aplicação de um conteúdo matemático, a função do tipo logarítmica, e da habilidade **EM13MAT305**.

As habilidades **EM13CNT306** e **EM13CNT207** são trabalhadas quando os estudantes reconhecem os riscos que as pessoas, e principalmente os jovens, assumem ao usar fones de ouvido por muito tempo ou com alto volume. Esse reconhecimento pode ser levado para além do espaço escolar, a fim de desenvolver e divulgar ações de prevenção e de promoção da saúde e do bem-estar.

Habilidades da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias também são parcialmente desenvolvidas nesta seção, discutindo problemas do cotidiano dos estudantes sob a perspectiva científica, levando-os a refletir sobre os riscos aos quais se expõem e a buscar maneiras de mitigar essa exposição. Considerando as habilidades e as competências desenvolvidas nesta seção, é oportuno o trabalho em conjunto com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Juntos, explorem com os estudantes o fenômeno físico/biológico associado à audição humana e os efeitos causados por altos níveis sonoros em diferentes ambientes.

Por utilizar conhecimentos historicamente construídos para explicar o mundo em que os estudantes vivem, esta seção também desenvolve a **CG01**.

É importante conversar com os estudantes sobre os riscos envolvidos na exposição excessiva a sons altos. Como o dano à audição ocorre de médio a longo prazo, os alertas à saúde são frequentemente ignorados. Sinais como dores de cabeça e zumbido no ouvido podem ser sintomas de que o indivíduo está utilizando fones de ouvido por tempo excessivo e/ou em volume acima do recomendado. Essa conversa favorece um trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais *Trabalho* e *Saúde*.

Na seção *Indo além*, é proposto um projeto de estudo e investigação de poluição sonora na escola. Sugerimos o uso do aplicativo Sound Meter, que transforma o *smartphone* em um decibelímetro e permite a aferição de ruído. Disponível em: https://tedit.net/7tczpy. Acesso em: 6 set. 2024.

Mais sobre o assunto

Mais informações sobre como abordar a conservação de energia podem ser encontradas na dissertação *Uma aula sobre energia mecânica e sua conservação através do uso de analogias*, de Vitor Ribeiro de Souza e Antônio Carlos Fontes dos Santos, disponível em: https://tedit.net/agiihj (acesso em: 6 set. 2024).

Para melhor auxiliar os estudantes, recomendamos a palestra do professor José Luiz Pastore Mello sobre o trabalho com projetos no qual ele descreve, entre outras, sua experiência com estudantes do Ensino Médio na aplicação de um projeto similar ao proposto aqui. Disponível em: https://tedit.net/vws7dg (acesso em: 6 set. 2024).

Mais atividades

1. **(Uesb-BA)** Uma pesquisa realizada na primeira década do século XXI revelou que, a partir do ano 2000, em determinada região do Brasil, a expectativa de vida, em anos, sofreu modificação e é dada pela função $E(t) = 12[150 \log t - 491]$, sendo t o

ano do nascimento da pessoa. Considerando-se $\log 2\,000 = 3{,}32$, pode-se afirmar que uma pessoa dessa região que tenha nascido no ano 2000 tem expectativa de viver, aproximadamente:

a) 68 anos.
b) 72 anos.
c) 76 anos.
d) 84 anos.
e) 92 anos.

Resolução:

Nesse caso, temos $t = 2\,000$. Então:
$E(2\,000) = 12[150 \cdot \log 2\,000 - 491] =$
$= 12[150 \cdot 3{,}32 - 491] =$
$= 12[498 - 491] = 12 \cdot 7 = 84$

Logo, uma pessoa que nasceu no ano 2000 nessa região tem expectativa de vida de 84 anos. Alternativa **d**.

2. **(Enem)** Em 2011, a costa nordeste do Japão foi sacudida por um terremoto com magnitude de 8,9 graus na escala Richter. A energia liberada E por esse terremoto, em kWh, pode ser calculada por $R = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, sendo $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh e R a magnitude desse terremoto na escala Richter.

Considere 0,84 como aproximação para log 7.

Disponível em: http://oglobo.globo.com. Acesso em: 2 ago. 2012.

A energia liberada pelo terremoto que atingiu a costa nordeste do Japão em 2011, em kWh, foi de:

a) $10^{10{,}83}$.
b) $10^{11{,}19}$.
c) $10^{14{,}19}$.
d) $10^{15{,}51}$.

Resolução:

Nesse caso, queremos saber o valor de E tal que $R = 8{,}9$.

$8{,}9 = \frac{2}{3} \cdot \log\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow 13{,}35 = \log E - \log 7 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log E = 11{,}19 \Rightarrow E = 10^{11{,}19}$

Portanto, a energia liberada por esse terremoto foi de $10^{11{,}19}$ kWh.

Alternativa **b**.

Unidade 5: Sequências e progressões

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01, CG02, CG04, CG09.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT103, EM13MAT311, EM13MAT314, EM13MAT315, EM13MAT401, EM13MAT405, EM13MAT507, EM13MAT508.
- Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13CNT204, EM13LGG303, EM13LGG304, EM13CHS101.
- Temas Contemporâneos Transversais: *Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Ambiental*; *Educação Financeira*; *Educação Fiscal*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Saúde*; *Vida Familiar e Social*.

Objetivos pedagógicos

- Compreender a ideia de sequência e utilizar a língua materna e a linguagem algébrica para representar os termos das sequências.
- Identificar padrões em sequências numéricas e escrever a fórmula de recorrência, a fórmula do termo geral e/ou a lei da função associada a cada uma delas.
- Explorar os termos de progressões (aritméticas ou geométricas) e deduzir fórmulas para determinar um termo qualquer ou a soma dos termos desse tipo de sequência.
- Resolver e elaborar problemas utilizando a fórmula do termo geral ou a fórmula da soma dos termos de progressões (aritméticas ou geométricas).
- Identificar uma progressão aritmética como uma função afim de domínio discreto e representá-la graficamente percebendo o comportamento dos pontos que representam a progressão.
- Identificar uma progressão geométrica como uma função exponencial de domínio discreto e representá-la graficamente.

Sugestões para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

Sequências e padrões sempre intrigaram os matemáticos ao longo do tempo. Os matemáticos da escola pitagórica investigaram e descobriram que a vibração produzida por fios esticados (como as cordas de instrumentos musicais) emitia sons com frequências que formavam uma sequência numérica. Séculos depois, o matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), popularmente conhecido como Fibonacci, apresentou uma curiosa sequência numérica que descreve diversos fenômenos e é explorada na abertura deste capítulo.

Proponha uma atividade de pesquisa para que os estudantes conheçam um pouco mais sobre a história de Fibonacci. Desse modo, eles vão se aprofundar em um tema importante da história da Matemática e compreender como o conhecimento é construído ao longo do tempo.

Capítulo 1

Este capítulo é destinado a explorar sequências, numéricas e figurais, retomando conhecimentos e habilidades que já foram mobilizados no Ensino Fundamental para que possam ser ampliados e consolidados.

Para aproveitar a temática da situação-problema, proponha aos estudantes que pesquisem a respeito da história e da criação de *emojis*, favorecendo o desenvolvimento da **CG01**.

No exemplo da situação-problema, proponha aos estudantes que explorem o padrão apresentado e a formação dos próximos termos da sequência. Observe como explicam as respostas das questões propostas; apesar de utilizarem a língua materna na explicação, ela está embasada em linguagens e raciocínios matemáticos.

O tópico "Explorando a ideia de sequência" é desenvolvido a partir da investigação de sequências em situações cotidianas, nas quais os estudantes analisam um padrão de repetição ou de recorrência dos termos sendo, nesse momento, importante mapear os conhecimentos prévios deles.

Se necessário, explore com os estudantes mais exemplos de sequências numéricas e retome a fórmula de recorrência e a fórmula do termo geral, estudados nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

No tópico "Formalizando a definição de sequência como uma função", ao formalizar a definição de sequência como uma função, verifique a necessidade de retomar os conceitos de função, domínio, conjunto imagem e lei da função. Ressalte que, nas sequências, o domínio da função é o conjunto dos números naturais não nulos, ou seja, é um domínio discreto.

As atividades **1**, **2** e **3** exploram diretamente as sequências numéricas, sendo que a atividade **3** explora as sequências em um contexto de saúde e dosagem de antibióticos. Esta atividade **3** atende ao Tema Contemporâneo Transversal *Saúde*, assim como o *Sobre o assunto* (p. 256).

Nas atividades **5**, **6** e **7**, os estudantes trabalham com sequências figuradas e devem criar as leis de formação das sequências. Já na atividade **8**, analise as estratégias que os estudantes utilizam para que a sequência seja infinita e formada apenas por números inteiros negativos, e peça que compartilhem as respostas com os colegas.

Capítulo 2

Neste capítulo, propomos um estudo das progressões aritméticas, construídas a partir da recorrência dos termos, para posterior exploração e formalização da fórmula do termo geral, da fórmula da soma dos termos de uma PA finita e da representação gráfica dos termos. Perceba que essas fórmulas nada mais são que exemplos de algoritmos que servem para cálculos, ou seja, algoritmos que resolvem uma série de problemas semelhantes. Assim, ao investigar, registrar e utilizar as fórmulas (os algoritmos), favorecemos o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**.

Ao longo do capítulo, também é desenvolvida a habilidade **EM13MAT507** na identificação de propriedades, na exploração e demonstração de fórmulas e na resolução de problemas que envolvem progressões aritméticas, bem como na associação de progressões aritméticas a funções afins de domínios discretos.

Na situação-problema **1**, propomos uma investigação matemática envolvendo o movimento de queda livre de um objeto, o que contempla aspectos da habilidade **EM13CNT204**, na análise dos movimentos de objetos na Terra, sob interações gravitacionais. Para que os estudantes compreendam com mais detalhes os conceitos físicos relacionados, você pode combinar a participação do professor de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Outra sequência numérica é explorada na situação-problema **2**, considerando o número atômico dos elementos da Tabela Periódica, o que novamente permite a colaboração do professor de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Nesse caso, a sequência formada é uma progressão aritmética de razão 1.

Observe que, no *Reflita* (p. 260) do tópico "Formalizando o conceito de progressão aritmética", propomos aos estudantes revisitar as sequências exploradas nas páginas anteriores, de modo a constatar que são progressões aritméticas, e calcular a razão delas.

No *Explore para descobrir* (p. 260) são apresentadas atividades que propõem aos estudantes discutir a classificação de uma progressão aritmética a partir da razão dela, sendo que, no item **c**, a resposta deve ser apresentada por meio de um raciocínio indutivo: a partir da razão, deduz-se a classificação da PA.

As situações propostas favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por meio da indução.

As atividades do *Explore para descobrir* (p. 261) do tópico "Explorando o termo geral de uma progressão aritmética" conduzem os estudantes à indução da fórmula do termo geral de uma PA qualquer, que será deduzida e formalizada na sequência.

Na atividade **1** desta seção, perceba que a resolução é obtida pelo uso raciocínio por analogia para se obter os termos seguintes em uma PA.

Durante o trabalho com o tópico "Formalizando a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética" é importante ressaltar que não existe o termo a_0 em sequências (o índice pertence ao conjunto dos números naturais não nulos), mas às vezes é conveniente considerarmos um termo fictício a_0 que seria anterior ao a_1. Esse termo é apenas uma técnica de cálculo que permite associar uma PA de maneira imediata aos dados de algumas situações-problema. Um exemplo é apresentado na questão do cálculo do valor do *smartphone*.

No *Fique atento* (p. 262), para auxiliar na compreensão do avanço e do retrocesso dos termos de uma progressão aritmética, mostre aos estudantes um esquema ou peça a eles que tentem mostrar esquematicamente a relação entre os termos utilizando o termo geral e os termos exemplificados.

A seção *Atividades resolvidas* (p. 262) apresenta situações contextualizadas que abordam os Temas Contemporâneos Transversais *Ciência e Tecnologia* e *Saúde*. Reforce com os estudantes a importância da atividade resolvida **2**, que permite o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal *Saúde*, no âmbito do autocuidado em todas as faixas etárias.

Como sugerido no item **c** da atividade resolvida **2**, organize um debate em classe considerando os conceitos da necropolítica sobre a responsabilidade que um Estado possui de promover ações para a saúde pública; ao não realizar tais cuidados para com a população, o Estado se torna responsável por muitas mortes que poderiam ser evitáveis. Dentro desse contexto, alguns tópicos que podem ser mencionados são: o saneamento básico, o SUS brasileiro e a distribuição de medicamentos gratuitos; ou até mesmo atitudes pontuais, como restaurantes a baixo preço, distribuição de cobertores e casas de acolhimento para a população em situação de rua, entre outros.

Dessa maneira, as situações propostas favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por meio da analogia e a abordagem da necropolítica. Auxilie os estudantes nessa pesquisa e compartilhe os dados levantados por eles.

Mais sobre o assunto

Para conhecer mais os conceitos da necropolítica, consulte o artigo *Necropolítica explicada*: O que é necropolítica. Disponível em: https://tedit.net/0nyw1w. Acesso em: 6 set. 2024.

Os diversos blocos de atividades que compõem este capítulo mobilizam o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT507** e da modelagem de situações reais utilizando progressões aritméticas. Destacamos algumas delas: as atividades **12**, **13**, **17**, **18**, **19**, **20**, **22**.

Algumas atividades também propõem a resolução de problemas que envolvem progressões aritméticas em diferentes contextos. Além disso, nas atividades **15** e **23**, os estudantes devem elaborar problemas baseando-se na estrutura de outro problema dado.

Na atividade **13**, os estudantes se deparam com um problema contextualizado: os *bots*. Proponha que façam a pesquisa do item **b**, sobre os malefícios dos *spam bots* e como eles podem afetar a sociedade, estabelecendo um paralelo com a veloz disseminação das *fake news*. O desenvolvimento dessa atividade contempla as competências **CG01** e a **CG05**.

Os problemas apresentados nas atividades **18** a **20** exploram o desmatamento no Brasil e as tragédias de rompimento de barragens que ocorreram nas cidades mineiras de Mariana e Brumadinho, favorecendo o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal *Educação Ambiental*. Em ambos os problemas, os estudantes utilizam-se da modelagem de uma progressão aritmética para estimar a quantidade de pessoas em uma campanha e a quantidade de alertas emitidos por um carro de som.

Por propiciar um posicionamento crítico perante os contextos de relevância social, a **CG01** é mobilizada nas atividades citadas, e aspectos da habilidade **EM13LGG303**, na atividade **19**. Se for do interesse dos estudantes, a conversa proposta na atividade **19** pode ser ampliada para que sejam formuladas propostas que visem reduzir o desmatamento na região, no estado ou no país, favorecendo também o desenvolvimento da habilidade **EM13LGG304**.

A atividade **21** destaca a preocupação com a redução do consumo de açúcar no mundo, o que favorece os Temas Contemporâneos Transversais *Saúde* e *Educação Alimentar e Nutricional*, na perspectiva não apenas do autocuidado, mas também na perspectiva da saúde pública e da conscientização de toda a população.

Na atividade **22** também está presente o desenvolvimento dos Temas Contemporâneos Transversais *Educação Ambiental* e *Saúde*, bem como da habilidade **EM13LGG303**, no contexto dos problemas causados pelas enchentes no país e de debates sobre o assunto. Assim, essa atividade promove o desenvolvimento das competências **CG05** e **CG07**.

Destacamos a atividade **24** que solicita a análise de um fluxograma, o que ressalta o pensamento computacional e atende à habilidade **EM13MAT315**.

Na atividade **3** do *Explore para descobrir* (p. 268) do tópico "Progressão aritmética e função", ao associar progressão aritmética e função, se necessário, faça perguntas que ajudem os estudantes a perceber o que as leis das funções das atividades **1** e **2** têm em comum.

As atividades propostas neste tópico mobilizam a associação de progressões aritméticas e funções afins de domínio $\mathbb{N}^*$ e a representação gráfica dos termos das progressões.

As atividades do *Explore para descobrir* (p. 269) do tópico "Explorando a soma dos termos de uma progressão aritmética finita" permitem que os estudantes criem estratégias para calcular a soma dos termos de uma progressão aritmética finita, inspirando-se, caso queiram, na estratégia utilizada por Gauss. Essa valorização do conhecimento historicamente construído, prevista pela **CG01**, é oportuna para o momento com vistas a explicar estratégias de cálculo e continuar aprendendo.

O exemplo de resposta do item **c** para este boxe é:

$$\overbrace{8 + \underbrace{10 + 12}_{22} + 14}^{22} + \underbrace{16 + 18}_{34} + \overbrace{20 + 22}^{42} = 120$$

2 parcelas de 22 + 1 parcela de 34 + 1 parcela de 42 = 120.

As situações propostas favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por meio da dedução.

No trabalho com o tópico "Formalizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética finita", discuta com os estudantes a formalização da fórmula da soma dos termos de uma PA finita.

A resposta do *Reflita* (p. 271) é:

Para a PA (8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22), temos:

$$S_8 = \frac{(8 + 22) \cdot 8}{2} = \frac{30 \cdot 8}{2} = 120$$

Para a PA (1, 2, 3, 4, ..., 99, 100), temos:

$$S_{100} = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5\,050$$

Para a PA (30, 34, 38, ..., 74), temos:

$$S_{12} = \frac{(30 + 74) \cdot 12}{2} = \frac{104 \cdot 12}{2} = 624$$

Para a PA (30, 34, 38, ..., 74, 78), temos:

$$S_{13} = \frac{(30 + 78) \cdot 13}{2} = \frac{108 \cdot 13}{2} = 702$$

As situações propostas favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por meio da dedução.

Na atividade **33**, os estudantes retomam a fórmula usada no começo do capítulo, na sequência de números triangulares, para deduzi-la utilizando os conhecimentos da soma dos termos de uma progressão aritmética finita. Caso seja necessário, dê uma dica aos estudantes para que deduzam a fórmula: pensem na soma da quantidade de pontos em cada linha de uma figura dessa sequência.

O Tema Contemporâneo Transversal *Educação Financeira* está presente na atividade **38**. Para responder ao item **c**, proponha uma conversa com os estudantes sobre como eles fariam e quais seriam outras opções de compra do equipamento.

Capítulo 3

Neste capítulo, desenvolvemos um estudo das progressões geométricas visando identificar padrões e recorrência dos termos, para, em seguida, formalizar a fórmula do termo geral e as fórmulas da soma dos termos de uma PG finita e de uma PG infinita.

Ao longo de todo o capítulo, a habilidade **EM13MAT508** é desenvolvida, na identificação e na associação de progressões geométricas a funções exponenciais de domínios discretos, na identificação de propriedades, na exploração e demonstração de fórmulas e na resolução de problemas envolvendo progressões geométricas.

Na situação-problema, os estudantes investigam um contexto de crescimento populacional, com comportamento exponencial, que é modelado por uma PG. Desenvolva com eles a ideia de como esse crescimento acontece, destacando o aspecto geométrico da sequência quando comparado às progressões aritméticas.

Por terem estudado as funções exponenciais no capítulo **2** da Unidade **3** deste Volume, espera-se que os estudantes apresentem a lei de uma função do tipo exponencial no item **c**, com domínio $\mathbb{N}^*$, como a apresentada como exemplo de resposta ou outra análoga a ela.

As respostas para os itens propostos na situação-problema de abertura de capítulo são:

c) Exemplo de resposta: 1980 corresponde a $x = 0$, 1990 corresponde a $x = 1$ e 2000 corresponde a $x = 2$.

Então, para $x = 0$ temos que $f(0) = 4\,000 \cdot 2^0 = 4\,000$, para $x = 1$ temos que $f(1) = 4\,000 \cdot 2^1 = 8\,000$ e para $x = 2$ temos que $f(2) = 4\,000 \cdot 2^2 = 16\,000$. Então, $f(x) = 4\,000 \cdot 2^x$.

e) 512 000 e 1 024 000 habitantes, respectivamente.

Nos anos 2050 e 2060, x corresponderá a 7 e 8, respectivamente. Logo, para $x = 7$ temos que $f(7) = 4\,000 \cdot 2^7 = 512\,000$ e para $x = 8$ temos que $f(8) = 4\,000 \cdot 2^8 = 1\,024\,000$.

f) Na década de 2070 temos: $f(9) = 4\,000 \cdot 2^9 = 2\,048\,000$.

Na década de 2080 temos: $f(10) = 4\,000 \cdot 2^{10} = 4\,096\,000$.

Portanto, entre as décadas de 2070 e 2080.

Para ampliar o trabalho, proponha um levantamento estatístico do crescimento ou do decrescimento populacional do município, do estado ou do país. Os dados de censos anteriores podem ser obtidos no *site* do IBGE.

Assim como no capítulo sobre as "Progressões aritméticas", as atividades do *Explore para descobrir* (p. 275) do tópico "Explorando o termo geral de uma progressão geométrica" conduzem os estudantes à indução da fórmula do termo geral de uma progressão geométrica qualquer, que será deduzida e formalizada na sequência.

As respostas do boxe *Reflita* (p. 275) são:

Utilizando a fórmula do termo geral ($a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$) na atividade **1** do *Explore para descobrir*, temos:

$a_2 = 3 \cdot 2^{2-1} = 3 \cdot 2^1 = 3 \cdot 2 = 6$;

$a_3 = 3 \cdot 2^{3-1} = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$;

$a_4 = 3 \cdot 2^{4-1} = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$;

$a_8 = 3 \cdot 2^{8-1} = 3 \cdot 2^7 = 3 \cdot 128 = 384$;

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Utilizando a fórmula do termo geral ($a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$) na atividade **2** do *Explore para descobrir*, temos:

$$a_3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2};\ a_4 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4};\ a_{10} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{512} = \frac{1}{256};\ a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

As situações propostas favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por meio da dedução.

No tópico "Formalizando a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica", assim como foi comentado para as PAs, é importante ressaltar que não existe o termo a_0 em sequências (o índice pertence ao conjunto dos números naturais não nulos), mas que ele é apenas uma técnica de cálculo que permite associar uma PG de maneira imediata aos dados de algumas situações-problema, como proposto na resolução do exemplo do cálculo da quantidade de estudantes de uma escola.

Nos termos da progressão geométrica, para auxiliar na compreensão do avanço e do retrocesso citados no *Fique atento* (p. 276), mostre aos estudantes um esquema ou peça que tentem mostrar esquematicamente a relação entre os termos. Como sugestão, solicite que demonstrem para uma PG de termos.

As atividades que compõem este capítulo mobilizam o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT508** e da modelagem de situações reais utilizando progressões geométricas. Por exemplo: as atividades **11** e **12**, que solicitam a dedução de fórmulas e a demonstração de propriedades de progressões geométricas.

Na atividade **1**, os estudantes devem verificar se as progressões indicadas são geométricas. Para as que não forem, solicite que verifiquem se elas são progressões aritméticas.

Destacamos também a atividade **4**, na qual os estudantes devem justificar sua resposta para uma sequência numérica que é ao mesmo tempo uma PA e uma PG. Dê aos estudantes a oportunidade de argumentar, explicando a classificação que deram à sequência numérica constante dada e o motivo para essa classificação.

Na atividade **6**, temos um problema com falta de dados. Analogamente, o primeiro ou algum outro termo da PG deveria ser informado para que a pergunta pudesse ser respondida. Para ampliar a atividade, proponha aos estudantes que escolham algum termo para a PG e, então, respondam à pergunta.

Para trabalhar o pensamento computacional, as atividades **15** e **16** apresentam fluxogramas com as etapas para obter certo resultado, o que atende à habilidade **EM13MAT315**.

As atividades propostas favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por meio da dedução e da abdução.

Na atividade **3** do *Explore para descobrir* do tópico "Progressão geométrica e função", ao associar progressão geométrica e função, se necessário, faça perguntas que ajudem os estudantes a perceber o que as leis das funções das atividades **1** e **2** têm em comum.

Reforce com os estudantes as condições para que uma PG possa ser associada a uma função exponencial.

Explore ainda mais as progressões geométricas com as atividades em grupos e com o uso de calculadora propostas no *Explore para descobrir* do tópico "Explorando a soma dos termos de uma progressão geométrica finita".

No tópico "Formalizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica finita", apresente a dedução da fórmula da soma dos termos para os estudantes e discuta com eles os exemplos apresentados nas *Atividades resolvidas*.

No tópico "Um pouco da história das progressões geométricas", os estudantes conhecem um pouco da história relacionada às progressões geométricas, tendo a oportunidade de observar fotos de trechos do papiro de Rhind. Pela identificação e pela análise de eventos históricos, com vistas à compreensão dos processos pelos quais foram criados, essa abordagem favorece aspectos da habilidade **EM13CHS101**.

As atividades desse tópico contemplam a discussão e a aplicação da fórmula da soma dos termos de uma PG finita. Portanto, é também proposta uma atividade clássica desse assunto, que é a da lenda sobre a invenção do xadrez na atividade **24**. Segundo a lenda, o inventor do jogo de xadrez solicita ao rei, como pagamento por sua criação, uma certa quantidade de grãos de trigo. Para que os estudantes resolvam essa atividade recomenda-se o uso de uma calculadora científica ou de uma planilha eletrônica devido ao enorme número de casas necessárias para o resultado.

A atividade **25** retoma a proposta de elaboração de um problema que utilize a fórmula da soma dos termos de uma PG finita.

No tópico "Explorando a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita", apresentamos aos estudantes explorações relacionadas à soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. Nesse caso, é possível estabelecer uma relação, pois os termos da progressão convergem para determinado valor, e, assim, a soma deles também. A representação da reta numerada proposta no *Explore para descobrir* (p. 289) é um bom artifício para visualizar concretamente essa convergência dos valores.

Observe que as somas indicadas nos itens **a**, **b**, **c** e **d** do *Explore para descobrir* (p. 289) também podem ser calculadas usando a fórmula da soma dos n termos de uma PG finita. No item **f**, considerando as observações feitas da soma dos 2, 3, 4 e 5 primeiros termos da PG, os estudantes podem levantar hipóteses sobre o que acontece com essas somas.

No tópico "Formalizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita", apresentamos a formalização da expressão para o cálculo da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita quando a razão está entre -1 e 1.

Na atividade **26**, perceba que é comum, ao resolver problemas dessa natureza, utilizar-se da representação simplificada sem a necessidade explícita do termo "limite". O conceito de limite é explorado de modo mais detalhado durante o curso universitário na disciplina de Cálculo.

A atividade **28** relaciona a soma dos termos de uma PG infinita às dízimas periódicas. No Ensino Fundamental, os estudantes aprenderam a transformar dízimas periódicas em frações; agora, com os conhecimentos deste capítulo, aprendem a obter a fração utilizando a soma dos termos de PGs infinitas e o conceito de limite.

Conexões (p. 283)

Para iniciar o trabalho com esta seção, coloque no quadro as expressões *fake news* e boato, e então pergunte para os estudantes o que elas significam. Depois desse *brainstorming* inicial, solicite a eles que leiam o texto da seção e, em grupos, respondam às questões propostas, debatendo-as em seguida.

É importante destacar que o trabalho com esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **CG05** e **CG07** e da habilidade **EM13LGG303**.

Sobre o texto apresentado na seção, sugerimos comentar que tanto o *bullying* como as *fake news* são marcantes no século XXI, e a necessidade de prevenção, enfrentamento e superação de fenômenos violentos está necessariamente ligada aos contextos político, social, comunitário, moral e educativo.

Ao contrário do que muitas pessoas pensam, as *fake news* e o *bullying* não atingem somente as crianças e os jovens, mas também os adultos. As consequências são perversas, podendo arruinar a imagem do indivíduo, além de outras consequências.

Nesta seção, quando nos referimos ao *bullying* disseminado entre os pares, entendemos que ele pode ser fruto de um tipo de *fake news* devastadora. Então, é importante educar os estudantes de maneira que eles não sejam criadores de espaços hostis na internet, ao evitar que *fake news* sejam viralizadas, e dialogando sobre quais são as consequências que os invasores de perfis podem sofrer. Jovens e crianças informados são mais críticos, ativos e, consequentemente, mais seguros.

Comparando a disseminação de boatos antes e depois da popularização da internet e das redes sociais, percebe-se uma diferença significativa na velocidade e alcance. Antigamente, as notícias eram transmitidas principalmente por meios oficiais como rádio e jornais, ao passo que atualmente, as redes sociais permitem o compartilhamento instantâneo para uma audiência global. Isso exige uma abordagem crítica do consumo de informações *on-line*, especialmente para evitar a propagação de *fake news*.

Esse fenômeno está intrinsicamente relacionado ao conceito de pós-verdade. A partir da indicação de leitura apresentada nesta seção, que menciona eventos políticos internacionais associados ao termo, é possível levar os estudantes a refletir sobre como a pós-verdade se expressa na política brasileira.

Mais sobre o assunto

No artigo "Ainda as séries infinitas", publicado na *Revista do Professor de Matemática*, n. 31, o autor Geraldo Ávila continua apresentando séries infinitas relacionando-as agora a dízimas periódicas. Esse artigo é sequência do "As séries infinitas" e apresenta contextos históricos de sequências, exemplificando com diferentes tipos de sequência, entre elas, as progressões geométricas. Ambos os artigos foram publicados na *Revista do Professor de Matemática*. Sugerimos a leitura de ambos para se aprofundar no assunto. Disponíveis em: https://tedit.net/7u6k2s e https://tedit.net/qylvw4. Acessos em: 6 set. 2024.

Mais atividades

1. Como sugestão de ampliação do estudo, proponha aos estudantes que representem uma dízima periódica qualquer, como a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. Apresente a eles o exemplo citado e resolvido no artigo "Ainda as séries infinitas" – indicado no *Mais sobre o assunto* – que resolve a dízima 0,777... como a soma dos termos de uma PG infinita e do modo estudado no Ensino Fundamental.

Resolução:

Resposta pessoal.

2. Resolva as seguintes questões justificando suas respostas:

a) Considerando $\mathbb{N}^*$, a sequência (100, 97, 94, ...) tem quantos termos?

b) Quantos múltiplos de 5 existem entre 5 e 125?

Resolução:

a) Temos que $a_n = 100 + (n - 1) \cdot (-3) \Rightarrow a_n = 100 - 3n + 3 \Rightarrow a_n = 103 - 3n$.

Então, temos: $103 - 3n > 0 \Rightarrow 103 > 3n \Rightarrow n < \frac{103}{3} < 34$.

34 termos.

b) Temos que $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow a_n = 5 + 5n - 5 \Rightarrow a_n = 5n$.

Então, temos: $a_n = 125 \Rightarrow 5n = 125 \Rightarrow n = 25$.

25 múltiplos.

Resoluções

Junto das atividades e questões presentes no Livro do Estudante, apresentamos no Manual do Professor as respostas e as orientações das respostas esperadas. Nas próximas páginas, complementando as respostas já presentes página a página, apresentamos as resoluções das atividades.

Unidade 1

Capítulo 1

Atividades

4. **a)** Verdadeira; dado qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, podemos considerar o subconjunto $\{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}^*$. Esse conjunto é finito e tem exatamente n elementos.

b) Falsa; o conjunto dos números naturais é infinito e, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, sempre existe o sucessor $n + 1 \in \mathbb{N}$ e que é maior do que n.

c) Verdadeira, todo número natural tem um sucessor em $\mathbb{N}$, sendo que o conjunto dos naturais é infinito e o sucessor de qualquer número natural n pode ser obtido por $n + 1$.

d) Falsa; o elemento $0 \in \mathbb{N}$ e não tem antecessor em $\mathbb{N}$.

6. **a)** Temos que o primeiro número natural maior do que $-\sqrt{3}$ é o 0, e que o último número natural menor do que $+\sqrt{5}$ é o 2. Considerando o intervalo entre 0 e 2, temos o número natural 1. Portanto, existem 3 números naturais no intervalo analisado: 0, 1 e 2.

O primeiro número inteiro maior do que $-\sqrt{3}$ é -1 e o último número natural menor do que $+\sqrt{5}$ é 2. Considerando o intervalo entre -1 e 2, temos 4 números inteiros: -1, 0, 1 e 2.

b) Existem infinitos números racionais e infinitos números irracionais entre esses números, pois no conjunto dos números reais, aos quais eles pertencem, há sempre 1 número real entre 2 números reais distintos.

7. **d)** Se p e q são números pares, então podemos escrever: $p = 2n$ e $q = 2m$, em que n e m podem assumir qualquer valor natural (0, 1, 2, 3, ...).

Assim, $p + q = 2n + 2m = 2(n + m) = 2k$, pois a soma de 2 números naturais n e m resulta em um número natural k. Como $p + q$ está representado por $2k$, sendo k um número natural, concluímos que $p + q$ é um número par, como queríamos demonstrar.

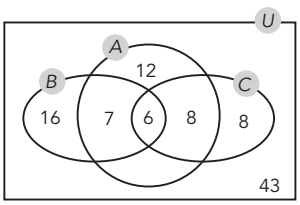
12. **a)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

b) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, então $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

c) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$ e $\varnothing \cap \mathbb{N} = \varnothing$, então $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}) \cap \mathbb{N} = \varnothing$.

d) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$, então $(\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}) \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

17. Sejam A, B e C os conjuntos que representam as pessoas que acompanham os canais **A**, **B** e **C**, respectivamente. Temos:



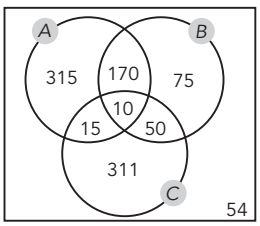
Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) $100\% - (16\% + 7\% + 6\% + 12\% + 8\% + 8\%) = 100\% - 57\% = 43\%$; logo, 43% não acompanham nenhum desses canais.

b) $13\% - 6\% = 7\%$; logo, 7% acompanham os canais **A** e **B** e não acompanham o canal **C**.

c) $16\% + 7\% + 6\% + 8\% + 8\% + 12\% = 57\%$; logo, 57% acompanham pelo menos 1 canal.

18. Sejam A, B e C os conjuntos que representam as famílias que assistem aos programas A, B e C, respectivamente. Temos:



Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) $1000 - (315 + 170 + 10 + 15 + 50 + 75 + 311) + 1000 - 946 = 54$; logo, 54 famílias.

b) $510 - (170 + 10 + 15) = 510 - 195 = 315$; logo, 315 famílias.

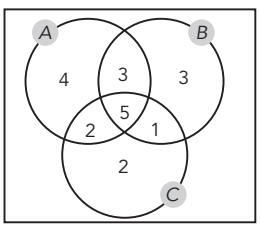
c) $311 + 54 = 365$; logo, 365 famílias.

20. **a)** Do enunciado, temos que a quantidade de elementos de B é 12 e que a quantidade de elementos que pertencem simultaneamente a B e a C é 6. Assim, temos que $n(B - C)$ é $12 - 6 = 6$; logo 6 elementos.

b) Como $n(A \cap C) = 7$, $n(A - C) = 7$ e $(A \cap C) \cup (A - C) = A$, temos: $n(A) = n((A \cap C) \cup (A - C)) = 7 + 7 = 14$; logo 14 elementos.

c) Como $n(A) = 14$, $n(B) = 12$ e $n(A \cap B) = 8$, temos: $n(A \cup B) = 14 + 12 - 8 = 18$; logo, 18 elementos.

d) Com as informações obtidas no enunciado e nos itens anteriores, podemos construir o diagrama de Venn.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

$4 + 3 + 5 + 2 + 1 + 2 + 3 = 20$; logo, 20 elementos.

Capítulo 2

Atividades

1. **a)** Entrada 0: $4 \cdot 0 - 1 = -1$

Entrada 1: $4 \cdot 1 - 1 = 3$

Entrada 2: $4 \cdot 2 - 1 = 7$

Entrada 3: $4 \cdot 3 - 1 = 11$

Entrada 4: $4 \cdot 4 - 1 = 15$

Números de saída: -1; 3; 7; 11; 15.

b) Entrada 0: $5 \cdot 0 - 6 = -6$

Entrada 1: $5 \cdot 1 - 6 = -1$

Entrada 2: $5 \cdot 2 - 6 = 4$

Entrada 3: $5 \cdot 3 - 6 = 9$

Entrada 4: $5 \cdot 4 - 6 = 14$

Números de saída: −6; −1; 4; 9; 14.

c) Entrada 0: $(0 + 2) \cdot 3 = 6$

Entrada 1: $(1 + 2) \cdot 3 = 9$

Entrada 2: $(2 + 2) \cdot 3 = 12$

Entrada 3: $(3 + 2) \cdot 3 = 15$

Entrada 4: $(4 + 2) \cdot 3 = 18$

Números de saída: 6; 9; 12; 15; 18.

5. **a)** Sendo x a quantidade de unidades vendidas, a receita, em reais, é dada por $R(x) = 0{,}8x$, e o custo, em reais, é dado por $C(x) = 40 + 0{,}3x$. O lucro, em reais, é dado então por $L(x) = R(x) - C(x) = 0{,}5x - 40$.

Para que não haja nem lucro nem prejuízo, $L(x)$ deve ser igual a 0.

$0{,}5x - 40 = 0 \Rightarrow 0{,}5x = 40 \Rightarrow x = 80$; logo, 80 unidades.

d) Exemplo de pergunta: Qual é a quantidade de unidades que o fabricante deve vender para obter um lucro de R$ 500,00?

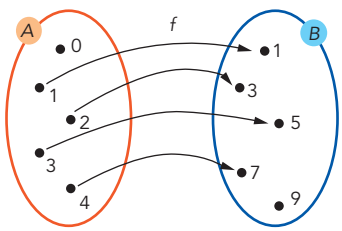
6. **a)** Não, pois o elemento 5 de A não está relacionado a um elemento em B.

b) Representa.

c) Não, pois o elemento −2,7 de A não está relacionado a um elemento em B e porque os elementos 0,5 e $-\frac{1}{3}$ de A estão, cada um, relacionados a mais de um elemento de B.

d) Não, pois os elementos 1 e 2 de A estão, cada um, relacionados a mais de um elemento de B.

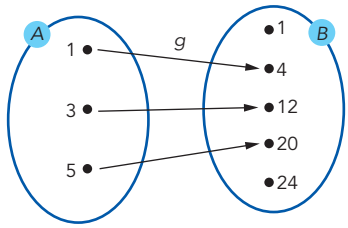
7. **a)**



WYM Design/Arquivo da editora

b) Não, pois o elemento 0 de A não está relacionado a um elemento em B.

9. **a)**



WYM Design/Arquivo da editora

10. **a)** Não é injetiva, pois existem linhas horizontais que intersectam o gráfico mais de uma vez.

b) Não é injetiva, pois existem linhas horizontais que intersectam o gráfico mais de uma vez.

c) É injetiva, pois não existem linhas horizontais que intersectam o gráfico mais de uma vez.

d) É injetiva, pois não existem linhas horizontais que intersectam o gráfico mais de uma vez.

14. **a)** Temos: $f(x) = -6x + 2$; substituindo $f(x)$ por y, temos: $y = -6x + 2$; trocando x e y, temos: $x = -6y + 2$; isolando y, temos: $-6y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{2 - x}{6}$; logo, $f^{-1}(x) = \frac{2 - x}{6}$.

Capítulo 3

Atividades

3. **a)** 10 min = $\frac{1}{6}$ hora

$S_1\left(\frac{1}{6}\right) = 174 + 93 \cdot \frac{1}{6} = 189{,}5$

$S_2\left(\frac{1}{6}\right) = 235 - 90 \cdot \frac{1}{6} = 220$

As posições são km 185 e km 220.

b) $S_1(t) - S_2(t) = 30 \Rightarrow 174 + 93t - (235 - 90t) = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 174 - 235 + 93t + 90t = 30 \Rightarrow 183t = 91 \Rightarrow t = \frac{91}{183}$

$S_2(t) - S_1(t) = 30 \Rightarrow 235 - 90t - (174 + 93t) = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 235 - 174 - 90t - 93t = 30 \Rightarrow 183t = 31 \Rightarrow t = \frac{31}{183}$

Os instantes são $\frac{91}{183}$ h e $\frac{31}{183}$ h.

4. **a)** $35 = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow 315 = 5F - 160 \Rightarrow F = 95$; logo, 95 °F.

b) $C = \frac{5}{9}(2C - 32) \Rightarrow 9C = 10C - 160 \Rightarrow C = 160$; logo, 160 °C.

5. $C = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow C = \frac{5}{9}(120 - 32) \Rightarrow C \simeq 48{,}9$; logo, aproximadamente 48,9 °C.

6. $C = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow 50 = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow 450 = 5F - 160 \Rightarrow$

$\Rightarrow F = 122$; logo, 122 °F.

7. Queremos saber a medida de temperatura, em graus Fahrenheit, em que temos $5C = F$, logo:

$C = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow C = \frac{5}{9}(5C - 32) \Rightarrow 9C = 25C - 160 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 10$

$F = 5 \cdot 10 = 50$; logo, 50 °F.

9. $328 = 5 \cdot \left(\frac{T_F - 32}{9}\right) + 273 \Rightarrow 55 \cdot 9 = 5T_F - 160 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_F = 131$; logo, é 131 °F. Alternativa **c**.

10. **a)** Resposta esperada: Os responsáveis do menino estavam conversando sobre uma diminuição brusca na medida de temperatura e queriam avisá-lo para que ele pudesse se prevenir. O menino entendeu que ele havia derrubado algum objeto na casa.

13. **a)** $a = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{5 - (-7)}{1 - (-3)} = \frac{12}{4} = 3$

$b = f(x) - ax \Rightarrow b = f(1) - 3 \cdot 1 \Rightarrow b = 2$

$f(x) = 3x + 2$

b) $a = \frac{f(-1) - f(2)}{-1 - 2} = \frac{7 - 1}{-1 - 2} = \frac{6}{-3} = -2$

$b = f(x) - ax \Rightarrow b = f(-1) - (-2) \cdot (-1) \Rightarrow b = 5$

$f(x) = -2x + 5$

14. **a)** $a = 3$ e $b = 1$, logo, $f(x) = 3x + 1$.

b) $a = 2$ e $b = 10$; logo, $f(x) = 2x + 10$.

c) $a = -1$ e $b = 3$; logo, $f(x) = -x + 3$.

d) $a = -2$ e $f(2) = 5$; logo, $-2 \cdot 2 + b = 5 \Rightarrow b = 9$, assim, $f(x) = -2x + 9$.

15. **d)** Exemplo de problema: Uma empresa no setor de vendas oferece aos estagiários um salário fixo de R$ 900,00 mais uma comissão de 2% (em reais) sobre o total vendido. Outra empresa no mesmo setor não oferece salário fixo para os estagiários dela, mas paga 8% (em reais) de comissão sobre o total vendido. Para um total de vendas de R$ 13.000,00, qual é o salário recebido em cada empresa?

16. **a)** $a = \frac{280 - 150}{20 - 10} = \frac{130}{10} = 13$; logo, R$ 13,00 por dia.

b) Vamos comparar ambas as taxas de variação média para determinar qual aplicação apresenta o melhor desempenho em termos de lucro diário acumulado.

- $\frac{250 - 100}{20 - 10} = \frac{150}{10} = 15$; logo, R$ 15,00 por dia.
- A aplicação **B** é financeiramente mais vantajosa no período estudado.

17. **a)**

Medidas de um retângulo

Medida de comprimento da largura (em cm)	Medida de perímetro (em cm)
1	12
1,5	13
2	14
3	16
4	18

Dados elaborados para fins didáticos.

20. **d)** Exemplo de problema: Um tanque com medida de capacidade de 50 litros estava inicialmente com 20 litros de água. A torneira que abastece esse tanque foi aberta, enchendo-o de água com vazão de 5 litros por segundo; contudo, ao mesmo tempo, uma rachadura no tanque provocou um vazamento com vazão de 2 litros por segundo. Após quanto tempo a água chegou na borda do tanque?

22. A lei da função afim pode ser $f(x) = ax + b$, em que x é a concentração de SO_2 e $f(x)$ indica a quantidade de mortes. Pelos dados da tabela, temos:

- $f(401) = 106 \Rightarrow a \cdot 401 + b = 106 \Rightarrow b = 106 - 401a$
- $f(500) = 109 \Rightarrow a \cdot 500 + b = 109 \Rightarrow 500a +$ $+ 106 - 401a = 109 \Rightarrow a = \frac{3}{99} = \frac{1}{33}$

Logo, $b = 106 - 401 \cdot \frac{1}{33} \Rightarrow b = \frac{3\,097}{33}$.

A lei da função é $f(x) = \frac{1}{33}x + \frac{3\,097}{33}$.

Para $f(x) = 115$, temos:

$\frac{1}{33}x + \frac{3\,097}{33} = 115 \Rightarrow x = \left(115 - \frac{3\,097}{33}\right) \cdot 33 = 698$

A concentração é 698 µg/m³.

24. $t(a) = -\frac{a}{300} + 100 \Rightarrow t(3\,000) = -\frac{3\,000}{300} + 100 = 90$

$t(a) = -\frac{a}{300} + 100 \Rightarrow t(-430) = -\frac{-430}{300} + 100 \simeq 101{,}43$

Portanto, as medidas de temperaturas de ebulição da água no pico da Neblina e na região do mar Morto são 90 °C e aproximadamente 101,43 °C, respectivamente.

25. **a)** Sendo $C(x) = ax + b$, temos:

$a = \frac{C(900) - C(600)}{900 - 600} = \frac{15\,800 - 14\,000}{900 - 600} = \frac{1\,800}{300} = 6$

$b = C(x) - 6x = C(600) - 6 \cdot 600 = 14\,000 - 3\,600 =$ $= 10\,400$

Portanto, $C(x) = 6x + 10\,400$.

b) $C(1\,200) = 6 \cdot 1\,200 + 10\,400 = 17\,600$; logo, R$ 17.600,00.

27. A tabela obtida pelo professor pode ser representada da seguinte maneira:

Valor da hora de aula

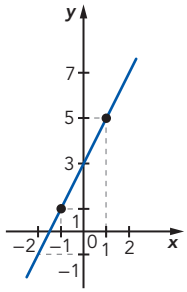
Quantidade de de aulas (em h)	Valor (em R$)
1	$12{,}50 + 30 \cdot 1 = 42{,}50$
2	$12{,}50 + 30 \cdot 2 = 72{,}50$
3	$12{,}50 + 30 \cdot 3 = 102{,}50$
4	$12{,}50 + 30 \cdot 4 = 132{,}50$
5	$12{,}50 + 30 \cdot 5 = 162{,}50$
6	$12{,}50 + 30 \cdot 6 = 192{,}50$
7	$12{,}50 + 30 \cdot 7 = 222{,}50$

Dados elaborados para fins didáticos.

A quantidade de aulas e o valor pago estabelecem uma função afim cuja lei é $f(x) = 12{,}50 + 30x$, em que x é a quantidade de aulas, em horas, e y é o valor a pagar em reais. Portanto, essa função pode ser representada por uma reta.

28. **a)**

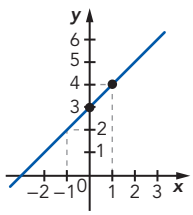
x	$f(x)$
-1	$2 \cdot (-1) + 3 = 1$
1	$2 \cdot (1) + 3 = 5$



Banco de imagens/Arquivo da editora

b)

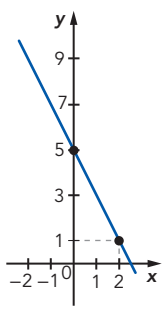
x	$f(x)$
0	$0 + 3 = 3$
1	$1 + 3 = 4$



Banco de imagens/Arquivo da editora

c)

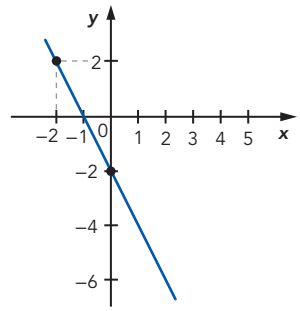
x	$f(x)$
0	$-2 \cdot (0) + 5 = 5$
2	$-2 \cdot (2) + 5 = 1$



Banco de imagens/Arquivo da editora

d)

x	$f(x)$
-2	$-2 - 2 \cdot (-2) = 2$
0	$-2 - 2 \cdot (0) = -2$



Banco de imagens/Arquivo da editora

29. **a)** Os pontos $A(-3, 0)$ e $B(0, 2)$ pertencem à reta; logo, $f(x_1) = f(-3) = 0$ e $f(x_2) = f(0) = 2$; assim, $a = \frac{2 - 0}{0 - (-3)} = \frac{2}{3}$. Temos $b = f(0) = 2$; logo, $y = \frac{2}{3}x + 2$.

b) Os pontos $A(0, 2)$ e $B(4, 0)$ pertencem à reta; logo, $f(x_1) = f(0) = 2$ e $f(x_2) = f(4) = 0$; assim, $a = \frac{0 - 2}{4 - 0} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. Temos $b = f(0) = 2$; logo, $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

c) Os pontos $A(0, 0)$ e $B(2, 20)$ pertencem à reta; logo, $f(x_1) = f(0) = 0$ e $f(x_2) = f(2) = 20$; assim, $a = \frac{20 - 0}{2 - 0} = \frac{20}{2} = 10$. Temos $b = f(0) = 0$; logo, $y = 10x$.

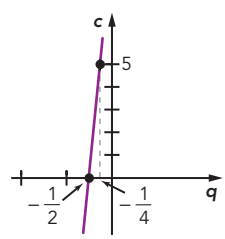
d) Os pontos $A(0, 20)$ e $B(2, 0)$ pertencem à reta; logo, $f(x_1) = f(0) = 20$ e $f(x_2) = f(2) = 0$; assim, $a = \frac{0 - 20}{2 - 0} = \frac{-20}{2} = -10$. Temos $b = f(0) = 20$; logo, $y = -10x + 20$.

e) Os pontos $A(2, 16)$ e $B(4, 20)$ pertencem à reta; logo, $f(x_1) = f(2) = 16$ e $f(x_2) = f(4) = 20$; assim, temos que $a = \frac{20 - 16}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$. Temos $f(x) = 2x + b \Rightarrow 16 = 2 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 12$; logo, $y = 2x + 12$.

f) Os pontos $A(1, 15)$ e $B(-4, 20)$ pertencem à reta; logo, $f(x_1) = f(1) = 15$ e $f(x_2) = f(-4) = 20$; assim, temos que $a = \frac{20 - 15}{-4 - 1} = \frac{5}{-5} = -1$. Temos $f(x) = -x + b \Rightarrow 15 = -1 + b \Rightarrow b = 16$; logo, $y = -x + 16$.

30. Escolhemos valores para q e substituindo na lei da função, temos:

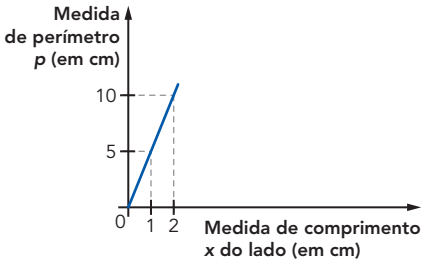
q	c
$-\frac{1}{2}$	$10 + 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
$-\frac{1}{4}$	$10 + 20 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 5$



Banco de imagens/Arquivo da editora

31. Podemos escrever a lei da função da seguinte maneira: $Y = aC + b$; logo, $Y = aC + 20 \Rightarrow 80 = a \cdot 100 + 20 \Rightarrow$ $\Rightarrow 100a = 60 \Rightarrow a = \frac{60}{100} \Rightarrow a = 0{,}6$. A lei da função é $Y = 0{,}6C + 20$. Alternativa **c**.

32. **d)**



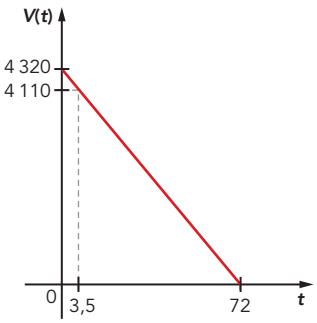
WYM Design/Arquivo da editora

f) p é uma função linear, porque a lei é do tipo $f(x) = ax$, com $a \neq 0$.

p não é uma função identidade, porque a lei é do tipo $f(x) = ax$, com $a \neq 1$.

33. **a)** $V = \frac{40 - 10}{3} = \frac{30}{3} = 10$; logo, 10 m/s.

34. **c)**



WYM Design/Arquivo da editora

d) $V(t) = 60t$, nesse caso, a vazão vai corresponder à taxa de variação para esvaziar a piscina, mas apresentada com o sinal contrário. Isso ocorre porque, nesse caso, o valor refere-se à vazão para encher a piscina, que deve estar inicialmente vazia.

e) Exemplo de problema: A medida de volume V, em litros, de água de uma piscina que está sendo esvaziada é dada pela lei $V(t) = -20t + 3\,500$, em que t é a medida de intervalo de tempo em horas.

a) Calcule a medida de volume de água contida na piscina exatamente 3 horas e meia depois que ela começou a ser esvaziada.

b) Determine a medida de intervalo de tempo necessário para a piscina esvaziar totalmente.

c) Construa no caderno um gráfico demonstrativo dessa situação.

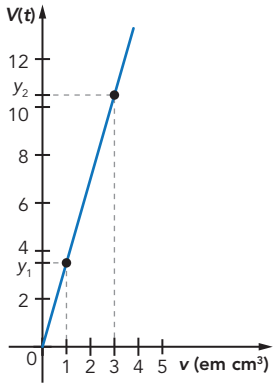
35. O valor inicial é $b = 200$; logo: $a = \frac{0 - 200}{8 - 0} = -\frac{200}{8} =$ $= -25$.

Temos a função dada por $f(t) = -25t + 200$; portanto, $f(5) = -25 \cdot 5 + 200 = 75$; logo, 75 pessoas. Alternativa **d**.

36. **a)** $d = \frac{m}{V} = \frac{1{,}706}{2} = 0{,}853$; logo, $d = 0{,}853$ kg/L.

b) $\frac{1{,}706}{2} = \frac{4{,}265}{k} \Rightarrow 0{,}853k = 4{,}265 \Rightarrow k = \frac{4{,}265}{0{,}853} = 5$; logo, $k = 5$.

d) Exemplo de problema: Considere o gráfico a seguir, que representa a medida de massa em função da medida de volume de um material. Depois, faça o que se pede.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que a medida de densidade desse material é 3,51 g/cm³, calcule os valores de y_1 e y_2.

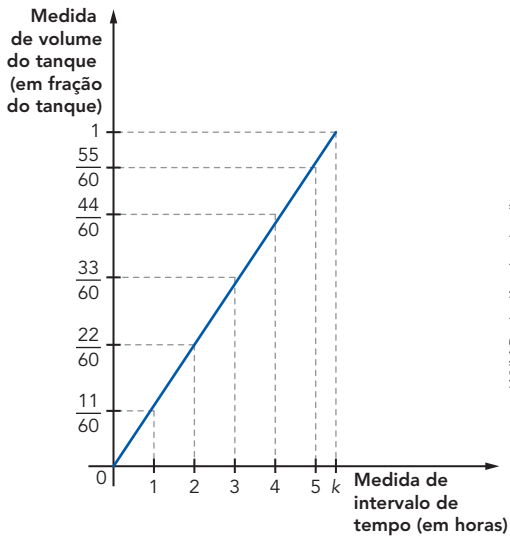
37. **a)** Ao final da 1ª hora, a 1ª torneira encheu $\frac{1}{10}$ do tanque e a 2ª torneira, $\frac{1}{12}$.

Juntas, terão enchido $\frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{6 + 5}{60} = \frac{11}{60}$.

Logo, a cada hora, as 2 torneiras juntas enchem mais $\frac{11}{60}$ do tanque.

Portanto, ao final de cada uma das 5 primeiras horas, as torneiras terão enchido $\frac{11}{60}$, $\frac{22}{60}$, $\frac{33}{60}$, $\frac{44}{60}$ e $\frac{55}{60}$ do tanque.

b) Seja k a quantidade de horas que leva para o tanque encher. Graficamente, temos:



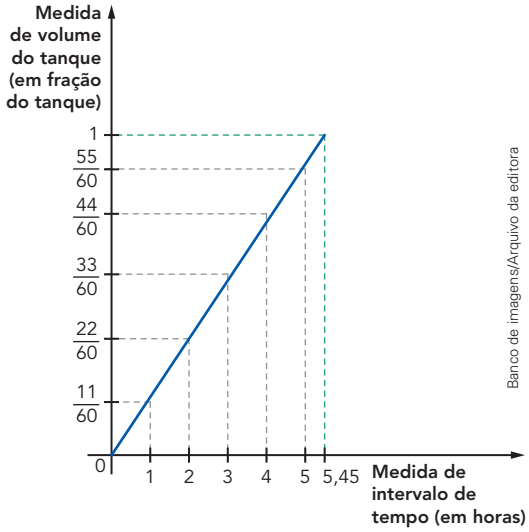
WYM Design/Arquivo da editora

Pelo gráfico, a função que relaciona a medida de intervalo de tempo t, em horas, com a medida de volume do tanque, em fração do tanque que está preenchida de água, é $R(t) = \frac{11}{60}t$.

Logo, $R(k) = 1 \Rightarrow \frac{11}{60}k = 1 \Rightarrow k = \frac{60}{11} \simeq 5{,}45$.

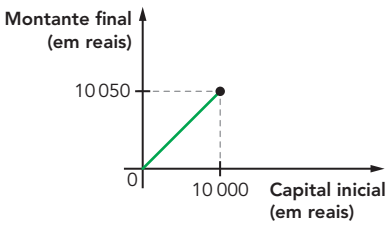
A medida de intervalo de tempo gasto para encher o tanque será aproximadamente 5,45 horas.

O gráfico fica, então, da seguinte maneira:



Banco de imagens/Arquivo da editora

39. **a)**



WYM Design/Arquivo da editora

b) Sim, pois o gráfico dessa função é uma semirreta que tem como origem o ponto (0, 0) e satisfaz as condições estabelecidas para que as grandezas sejam **diretamente proporcionais**:

- y é uma função crescente de x;
- se multiplicarmos x por 1,005, então o valor correspondente de y também ficará multiplicado por 1,005, ou seja, $f(1{,}005 \cdot 10\,000) = 1{,}005 \cdot 10\,050$ para todo valor de x do domínio da função e todo $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Não, pois o gráfico dessa função não é uma semirreta que tem como origem o ponto (0, 0), ou seja, não se trata de uma função linear e não satisfaz todas as condições estabelecidas para que seja uma função de grandezas diretamente proporcionais. A única condição contemplada é que a função é crescente.

d) O custo total da viagem de 15 km utilizando a empresa **A** é R$ 35,00 (pois $f(15) = 3{,}5 + 2{,}1 \cdot 15$).

Utilizando a empresa **B**, o custo é fixo em R$ 32,00.

A opção mais vantajosa financeiramente é pagar o valor fixo de R$ 32,00, pois o valor total é menor em comparação com o custo usando a empresa **A**.

No entanto, considerando que o destino do cliente fica a 3 km do ponto onde o transporte da empresa **B** o deixará, a empresa **A** é mais vantajosa quando consideramos a praticidade. Por isso, dependendo das prioridades do passageiro, tanto a empresa **A** quanto a **B** podem ser consideradas vantajosas.

42. Exemplo de problema: Um vendedor de jogos obteve uma receita bruta de R$ 48.000,00 com a venda de 400 unidades de um *videogame*. Escreva no caderno a lei de formação da função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ que relaciona a receita bruta obtida em função do preço p por x unidades desse jogo. Depois, responda: Qual será o valor da receita bruta se 500 unidades forem vendidas?

43. Exemplos de resolução:

a) $3 - 4x > x - 7 \Rightarrow 3 + 7 > x + 4x \Rightarrow 10 > 5x \Rightarrow x < 2$; logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$.

b) $\frac{x}{4} - \frac{3(x-1)}{10} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{10x - 12x + 12}{40} \leqslant \frac{40}{40} \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x \leqslant 40 - 12 \Rightarrow -x \leqslant 14 \Rightarrow x \geqslant -14$; logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -14\}$.

44. **a)** $f(x) = 5x - 230$, com $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pois 5 é o valor de venda de cada unidade e 230 é a despesa inicial.

b) $f(x) < 0 \Rightarrow 5x - 230 < 0 \Rightarrow 5x < 230 \Rightarrow x < 46$

O comerciante terá prejuízo se vender menos do que 46 unidades.

c) $f(x) = 315 \Rightarrow 5x - 230 = 315 \Rightarrow 5x = 545 \Rightarrow x = 109$

A quantidade de unidades x deve ser igual a 109.

d) $f(x) > 280 \Rightarrow 5x - 230 > 280 \Rightarrow 5x > 510 \Rightarrow x > 102$

A quantidade de unidades x deve ser maior do que 102.

e) $100 < f(x) < 180 \Rightarrow 100 < 5x - 230 < 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 < x - 46 < 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 + 46 < x - 46 + 46 < 36 + 46 \Rightarrow 66 < x < 82$

ou

$100 < 5x - 230 \Rightarrow 5x > 100 + 230 \Rightarrow 5x > 330 \Rightarrow$

$\Rightarrow x > 66$

$5x - 230 < 180 \Rightarrow 5x < 180 + 230 \Rightarrow 5x < 410 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < 82$

Logo, $66 < x < 82$.

A quantidade de unidades x deve ser maior do que 66 e menor do que 82.

45. **c)** Para que o plano **A** seja mais econômico, devemos ter:

$f(x) < g(x) \Rightarrow 50x + 100 < 40x + 180 \Rightarrow 10x < 80 \Rightarrow$
$\Rightarrow x < 8$

Para que o plano **B** seja mais econômico, devemos ter:

$f(x) > g(x) \Rightarrow 50x + 100 > 40x + 180 \Rightarrow 10x > 80 \Rightarrow$
$\Rightarrow x > 8$

Para que os 2 planos sejam equivalentes, devemos ter:

$f(x) = g(x) \Rightarrow 50x + 100 = 40x + 180 \Rightarrow 10x = 80 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 8$

Assim, o plano **A** é mais econômico para $x < 8$; o **B**, para $x > 8$; e eles são equivalentes para $x = 8$.

d) Se o paciente realizar, no total, 11 consultas, por exemplo, sendo 8 delas cobertas por ambos os planos e 3 delas cobertas pelo plano **A**, mas não pelo **B**, então teremos os seguintes valores para cada plano:

Plano **A**: $50 \cdot 11 + 100 = 650$, ou seja, o gasto total será R$ 650,00.

Plano **B**: $40 \cdot 8 + 180 + 3 \cdot 100 = 800$, ou seja, o gasto total será R$ 800,00.

Assim, considerando a informação, o plano **A** é mais econômico para essas 11 consultas, e, nas condições anteriores, em que ambos os planos cobriam as mesmas consultas, o plano **B** era mais vantajoso para essa quantidade.

47. Analisando o gráfico, podemos concluir que, para 30 minutos por mês, o plano **C** apresenta menor custo do que os outros e, para 90 minutos, o plano **B** apresenta menor custo. Logo, o plano **C** seria o melhor para a esposa e o plano **B** seria o melhor para o marido. Alternativa **e**.

Tecnologias digitais (p. 69)

1. **a)** Quando o valor de a é positivo, o gráfico representa uma função crescente. Quando $a = 0$, o gráfico está na horizontal (paralelo ao eixo x). Já quando o valor de a é negativo, o gráfico representa uma função decrescente.

b) O coeficiente b é igual ao valor da ordenada do ponto em que o gráfico intersecta o eixo y. Por isso, se o valor de b é positivo, quanto maior for esse valor, mais acima da origem o gráfico da função intersecta o eixo y. Se o valor de b é negativo, quanto menor for esse valor, mais abaixo da origem o gráfico intersecta o eixo y. Por fim, se b for igual a zero, o gráfico intersecta o eixo y na origem do plano cartesiano.

2. **a)** Sendo P_A e P_B os preços, em reais, do frete nas lojas **A** e **B**, respectivamente, e x a quantidade de livros comprados, temos $P_A(x) = 3x + 5$ e $P_B(x) = 2x + 10$.

b) $P_A(4) = 3 \cdot 4 + 5 = 17$ e $P_B(4) = 2 \cdot 4 + 10 = 18$.

Portanto, o preço de frete é mais barato na loja **A**.

c) Para menos de 5 livros, o preço do frete é menor na loja **A**; para 5 livros, o valor do frete é o mesmo nas 2 lojas; e, para mais de 5 livros, o valor do frete é menor na loja **B**.

Conexões (p. 77)

1. Medida de comprimento das flautas rikbaktsas

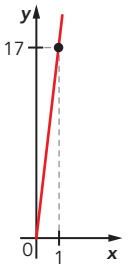
Tipo de flauta	Medida de comprimento na unidade de medida rikbaktsa (em palmos)	Medida de comprimento aproximada (em centímetros)
Izowytsik	4	68
Iharaiktsa	4,5	76,5
Tsapukte	5	85
Izowy	5,5	93,5

Fonte dos dados: MATTOS, José Roberto Linhares de; POLEGATTI, Geraldo Aparecido. Um encontro etnomatemático na educação escolar indígena: a função das flautas dos Rikbaktsa. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. *Anais* [...]. Curitiba: PUC-PR, 2013. Disponível em: https://tedit.net/k5pqik. Acesso em: 24 jun. 2024.

Considerando os pontos (4, 68) e (5, 85), temos: $a = \frac{85 - 68}{5 - 4} = 17$.

$f(5) = 85 \Rightarrow 17 \cdot 5 + b = 85 \Rightarrow b = 85 - 85 \Rightarrow b = 0$; logo, $f(x) = 17x$.

2.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Capítulo 4

Atividades

2. Para $x < 1$, o gráfico da função f é uma semirreta que passa pelos pontos (0, 1) e (1, –1); portanto, a lei da função é dada por $f(x) = -2x + 1$.

Para $1 \leqslant x \leqslant 5$, o gráfico da função f é um segmento de reta que passa pelos pontos (1, –1) e (5, 3); portanto, a lei da função é dada por $f(x) = x - 2$.

Para $x > 5$, o gráfico da função f é uma semirreta horizontal que passa pelo ponto (5, 3); portanto, a lei da função é a lei da função constante dada por $f(x) = 3$.

Portanto, $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, \text{ se } x < 1 \\ x - 2, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 5. \\ 3, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

3. **a)** Seja t a tarifa a pagar, em reais, e c o consumo de água, em m^3.

Se $c < 11$, então $t(c) = 35{,}85$.

Se $11 \leqslant c < 21$, então $t(c) = 35{,}85 + 5{,}62 \cdot (c - 10) = -20{,}35 + 5{,}62c$.

Se $21 \leqslant c \leqslant 50$, então $t(c) = 35{,}85 + 5{,}62 \cdot 10 + 14{,}00 \cdot (c - 20) = -187{,}95 + 14c$.

Se $c > 50$, então $t(c) = 35{,}85 + 5{,}62 \cdot 10 + 14{,}00 \cdot 30 + 15{,}43 \cdot (c - 50) = -259{,}45 + 15{,}43c$.

$$t(c) = \begin{cases} 35{,}85, \text{ se } c < 11 \\ -20{,}35 + 5{,}62c, \text{ se } 11 \leqslant c < 21 \\ -187{,}95 + 14c, \text{ se } 21 \leqslant c \leqslant 50 \\ -259{,}45 + 15{,}43c, \text{ se } c > 50 \end{cases}$$

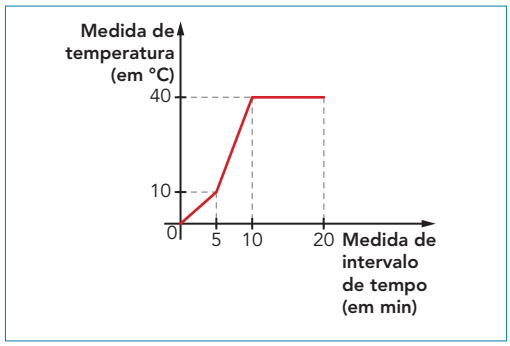
4. **a)** O ponto de ebulição é alcançado quando a medida de temperatura atinge 90 °C, portanto, a afirmação está incorreta.

b) Entre 50 min e 60 min, temos uma função afim definida por f: [50, 60] → ℝ tal que $f(t) = 6t - 270$, portanto, a afirmação está incorreta.

c) A substância está somente no estado líquido no intervalo de tempo de 50 min a 60 min. A medida desse intervalo é 10 min, portanto, a afirmação está correta.

Alternativa **c**.

5. **a)**



WYM Design/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Seja x a medida de intervalo de tempo em minutos e $y = f(x)$ a medida de temperatura em °C.

- No intervalo $0 \leqslant x \leqslant 5$, temos $y = ax$.

  Para $x = 5$, temos $y = 10$, então: $10 = 5a \Rightarrow a = 2$; logo, $y = 2x$.

- No intervalo $5 < x \leqslant 10$, temos $y = ax + b$.

  Para $x = 5$, temos $y = 10$, então: $5a + b = 10$.

  Para $x = 10$, temos $y = 40$, então: $40 = a \cdot 10 + b \Rightarrow 10a + b = 40$.

  Assim, teremos o sistema:

  $\begin{cases} 5a + b = 10 \\ 10a + b = 40 \end{cases}$

  Isolando $b = 10 - 5a$ e substituindo na 2ª equação, temos: $10a + 10 - 5a = 40 \Rightarrow 5a = 30 \Rightarrow a = 6$.

  Substituindo a na 1ª equação, temos: $5 \cdot 6 + b = 10 \Rightarrow 30 + b = 10 \Rightarrow b = 10 - 30 \Rightarrow b = -20$.

  Logo, substituindo os valores encontrados em $y = ax + b$, temos $y = 6x - 20$.

- No intervalo $10 < x \leqslant 20$, temos $y = 40$.

- A lei da função é $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 6x - 20, \text{ se } 5 < x \leqslant 10. \\ 40, \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \end{cases}$

c) $x = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot 2 \Rightarrow y = 4$

$x = 8 \Rightarrow y = 6 \cdot 8 - 20 \Rightarrow y = 28$

$x = 12 \Rightarrow y = 40$

Aos 2 minutos, a medida de temperatura era 4 °C; aos 8 minutos, era 28 °C; e, aos 12 minutos, era 40 °C.

d) Em [0, 5], pois, nesse intervalo, a medida de temperatura t, em graus Celsius, e a medida de intervalo de tempo decorrido x estão relacionados por uma função linear de lei $t(x) = 2x$.

6. **b)** Seja t a medida de intervalo de tempo, em horas. Para $3 \leqslant t \leqslant 4$, a medida de intensidade sonora S em função de t é uma função afim, pois o gráfico dado mostra que o gráfico de S é um segmento de reta.

Se $S(t) = at + b$, então:

- $100 = a \cdot 3 + b \Rightarrow 3a + b = 100$
- $120 = a \cdot 4 + b \Rightarrow 4a + b = 120$

Isolando b na 1ª equação, temos: $b = 100 - 3a$.

Substituindo b na 2ª equação, temos: $4a + 100 - 3a = 120 \Rightarrow a = 20$.

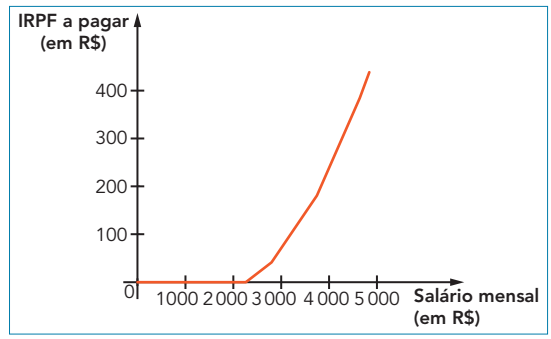
Substituindo a na 1ª equação, temos: $3 \cdot 20 + b = 100 \Rightarrow 60 + b = 100 \Rightarrow b = 100 - 60 \Rightarrow b = 40$.

Portanto, $S(t) = 20t + 40$.

Como 3 h 15 min = 3,25 h, temos: $S(3{,}25) = 20 \cdot 3{,}25 + 40 = 105$.

Portanto, a medida de intensidade sonora é 105 dB.

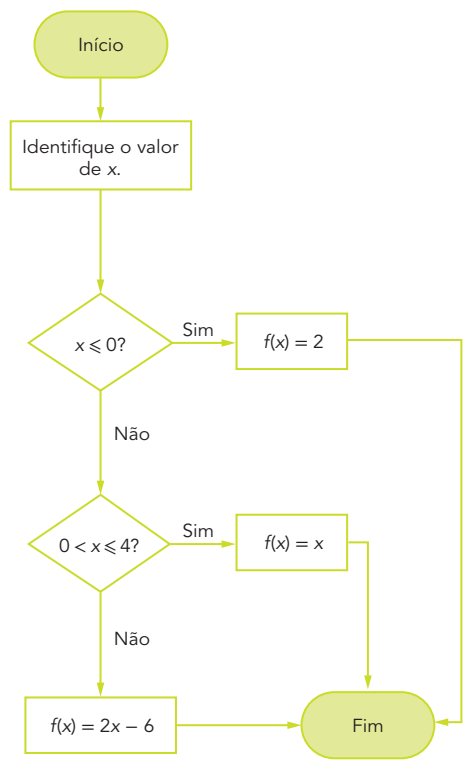
7. **c)**



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: BRASIL. Subsecretaria de Tributação e Contencioso. IRPF (Tributação de 2024). *Receita Federal*, 4 maio 2023 [atualizado em: 9 fev. 2024]. Disponível em: https://tedit.net/josysz. Acesso em: 26 jun. 2024.

8. **b)**



Banco de imagens/Arquivo da editora

Enem e vestibulares (p. 102)

1. Podemos realizar a seguinte análise das alternativas:

a) Falsa. Não existe intersecção entre os conjuntos dos números racionais e o conjunto dos números irracionais.

b) Falsa. Apenas dízimas periódicas podem ser representadas na forma de fração.

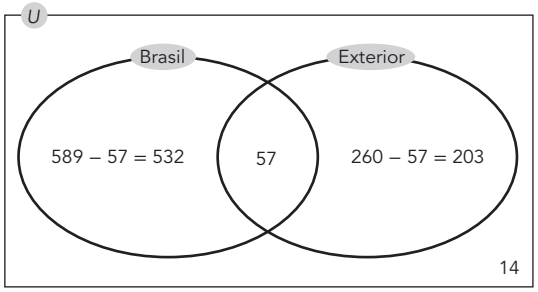
c) Verdadeira. Números irracionais não podem ser escritos em forma de fração ou de dízimas periódicas.

d) Falsa. Um contraexemplo da afirmação é: a soma de 2 números irracionais opostos é 0, que é um número racional.

e) Falsa. O conjunto dos números reais é a união dos conjuntos dos números racionais e dos conjuntos dos números irracionais.

Alternativa **c**.

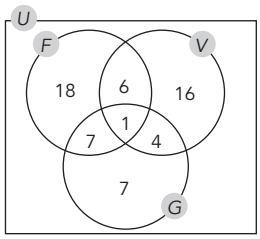
2.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, temos: 532 + 57 + 203 + 14 = 806; logo, 806 pessoas. Alternativa **b**.

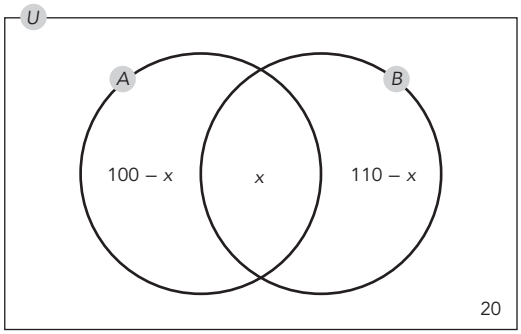
3. Considerando que todos os colaboradores praticam pelo menos um dos 3 esportes, sendo F o conjunto de pessoas que jogam futebol, V o conjunto de pessoas que jogam voleibol e G o conjunto de pessoas que jogam golfe, temos o seguinte diagrama:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Logo, o total de funcionários será dado por: 18 + 16 + + 7 + 4 + 6 + 7 + 1 = 59. Alternativa **a**.

4. Considerando x como a quantidade de pessoas com ambos os antígenos, devemos iniciar o preenchimento do diagrama pela intersecção dos conjuntos A (presença do antígeno A) e B (presença do antígeno B).



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como a união de todos os subconjuntos do diagrama corresponde ao total de pessoas, segue que: 100 − x + + x + 110 − x + 20 = 200 ⇒ x = 30. Alternativa **a**.

5. Sabendo que o faturamento é R$ 28,00 a cada calçado (28x), basta subtrair deste valor o custo fixo mensal R$ 20.000,00, ou seja, a função lucro L: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é dada por $L(x) = 28x - 20\,000$. Alternativa **b**.

6. São 2 voltas de arame, cada uma com x metros (2x). Logo, $f(x) = 160 + 15 \cdot 2x$, ou, ainda, $f(x) = 160 + 30x$, com f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Alternativa **d**.

7. Calculando o custo total para cada hotel, temos funções H: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que:

$H_1(7) = 180 + 2{,}5 \cdot 7 + 6 = 203{,}50$

$H_2(1{,}6) = 200 + 2{,}5 \cdot 1{,}6 + 6 = 210{,}00$

$H_3(4{,}5) = 199 + 2{,}5 \cdot 4{,}5 + 6 = 216{,}25$

$H_4(1{,}5) = 190 + 2{,}5 \cdot 1{,}5 + 6 = 199{,}75$

$H_5(1{,}2) = 205 + 2{,}5 \cdot 1{,}2 + 6 = 214{,}00$

Logo, o hotel escolhido foi o $\mathbf{H_4}$. Alternativa **d**.

8. A função lucro/prejuízo é dada pela diferença entre o preço total de venda e o custo total de produção, ou seja, $L(x) = 280x - (0{,}42 \cdot 400 \cdot x + 12\,800)$, com L: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, em que x representa a quantidade de pacotes vendidos. Simplificando a expressão, temos: $L(x) = 112x - 12\,800$. Para que não haja prejuízo, teremos: $112x - 12\,800 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{12\,800}{112} \Rightarrow x \geqslant 114{,}3$.

Portanto, devem ser vendidos, no mínimo, 115 pacotes. Alternativa **e**.

9. Pelo gráfico, podemos perceber que o carro faz 13 km/L com gasolina; logo, foram 43 L de gasolina, pois $\frac{559}{13} = 43$.

Se o percurso total tinha medida de comprimento de 1009 km, então foram 1009 km − 559 km = 450 km com álcool. Novamente pelo gráfico, o carro faz 9 km/L de álcool; ou seja, foram 50 L de álcool, pois $\frac{450}{9} =$ $= 50$. Logo, o rendimento médio do carro no percurso foi $\frac{1009}{43 + 50} \simeq 10{,}84$. Alternativa **c**.

10. A pessoa ficou sem receber sinal de internet em todos os momentos em que o gráfico coincide com o eixo das abscissas, ou seja, entre os minutos 10 e 12 (totalizando 2 minutos) e 16 e 20 (totalizando 4 minutos). Assim, a medida de intervalo de tempo no qual a pessoa ficou sem internet é 6 minutos. Alternativa **a**.

11. Sabendo-se que a relação é descrita por uma função afim f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, cuja lei é dada por $f(x) = ax + b$, é possível determinar a taxa de variação a do valor do equipamento em relação à medida de intervalo de tempo com base nos dados do enunciado, em que $f(0) = 180\,000$ e $f(3) = 135\,000$.

$$a = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{135\,000 - 180\,000}{3 - 0} = -15\,000$$

Assim, em 2 anos, o valor diminuirá em R$ 15.000,00, por 2 vezes, ou seja, em R$ 30.000,00. Como temos 135 000 − 30 000 = 105 000, o valor do equipamento será R$ 105.000,00. Alternativa **a**.

12. $L(y) = 4 \cdot 40\,200 \Rightarrow L(y) = 160\,800 \Rightarrow 8y + 200 =$ $= 160\,800 \Rightarrow 8y = 160\,600 \Rightarrow y = 20\,075$. Portanto, o investimento deverá ser R$ 20.075,00. Alternativa **d**.

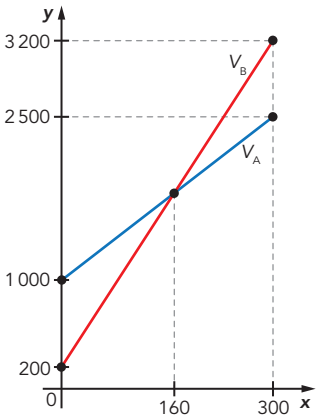
13. **a)** A torneira que abastece o tanque é fechada no mesmo instante em que o registo que o esvazia é aberto.

Nesse momento, temos: $V_1(t_1) = V_2(t_1) \Rightarrow 3t_1 + 13 = -2t_1 + 58 \Rightarrow t_1 = 9$, que é o instante em que a medida de volume é máxima. Logo, $V_1 = 3 \cdot 9 + 13 = 40$, ou seja, 40 mil litros.

b) Basta considerar que $V_2 = 0$, ou seja, $-2t + 58 = 0 \Rightarrow t = 29$; então, 29 horas. Pelo item anterior, sabemos que o tanque leva 9 horas para encher; então demora 20 horas (29 − 9 = 20) para que o tanque se esvazie completamente depois que o registro foi aberto.

14. **a)** As expressões que representam o valor a ser pago (V) em cada lugar, em função da quantidade de pessoas (p), são: $V_A = 5p + 1000$ e $V_B = 10p + 200$, com $V_A: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ e $V_B: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Para que a escolha seja indiferente, temos que: $V_A = V_B \Rightarrow 5p + 1000 = 10p + 200 \Rightarrow 5p = 800 \Rightarrow p = 160$; ou seja, 160 pessoas.

b) Sabendo-se que o número máximo de pessoas em ambos os lugares é 300 pessoas, temos: $V_A(300) = 5 \cdot 300 + 1000 = 2500$ e $V_B(300) = 10 \cdot 300 + 200 = 3200$. Segue a representação gráfica das funções descritas no item **a**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O salão escolhido deve ser o **A**, pois, a partir de 160 pessoas, o gráfico do valor pago V_A está abaixo do valor pago em V_B.

Unidade 2

Capítulo 1

Atividades

2. **a)** A função é quadrática, com $a = 2 \neq 0$, $b = 0$ e $c = 0$.

b) A função é afim, portanto não é quadrática.

c) $f(x) = x(x - 1)(x - 2) = x(x^2 - 3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

Como o maior expoente de x é 3, a função não é quadrática.

d) $f(x) = 3x(x - 1) = 3x^2 - 3x = 3x^2 - 3x + 0$

A função é quadrática, com $a = 3$, $b = -3$ e $c = 0$.

As funções quadráticas são as dos itens **a** e **d**.

4. **a)** $f(x) = 2x^2 = 2x^2 + 0x + 0$

$a = 2$, $b = 0$ e $c = 0$.

b) $f(x) = 2(x^2 - 6x + 9) + 5 = 2x^2 - 12x + 23$

$a = 2$, $b = -12$ e $c = 23$.

c) $f(x) = x^2 - x - 6$

$a = 1$, $b = -1$ e $c = -6$.

5. **a)** $f(0) = -2 \cdot (0)^2 = 0$

$f(1) = -2 \cdot (1)^2 = -2$

$f(2) = -2 \cdot (2)^2 = -8$

$f(3) = -2 \cdot (3)^2 = -18$

$f(4) = -2 \cdot (4)^2 = -32$

$f(5) = -2 \cdot (5)^2 = -50$

b) $f(0) = 3 \cdot (0)^2 - 5 \cdot 0 = 0$

$f(1) = 3 \cdot (1)^2 - 5 \cdot 1 = -2$

$f(2) = 3 \cdot (2)^2 - 5 \cdot 2 = 2$

$f(3) = 3 \cdot (3)^2 - 5 \cdot 3 = 12$

$f(4) = 3 \cdot (4)^2 - 5 \cdot 4 = 28$

$f(5) = 3 \cdot (5)^2 - 5 \cdot 5 = 50$

9. **b)** 1º passo: $8 : 2 = 4$

2º passo: $4^2 = 16$

3º passo: $105 \cdot 1 + 16 = 121$

4º passo: $\sqrt{121} = 11$

5º passo: $11 - 4 = 7$

6º passo: $\frac{7}{1} = 7$

10. **a)** $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 9$

$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = 3$ e $x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = 0$

b) $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$

f não tem zeros reais.

c) $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 36$

$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = -2$ e $x_2 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = 4$

d) $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0$

$x_1 = x_2 = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$

e) $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$

$x_1 = x_2 = \frac{-(-8)}{2 \cdot 1} = 4$

f) $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 = 81 - 100 = -19 < 0$

f não tem zeros reais.

15. **a)** $f(x) = x^2 + 10x + 21 \Rightarrow f(x) = (x^2 + 10x + 25) - 25 + 21 \Rightarrow f(x) = (x + 5)^2 - 4$

$f(x) = 0 \Rightarrow (x + 5)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x + 5)^2 = 4$

Logo, $x' + 5 = 2 \Rightarrow x' = -3$ ou $x'' + 5 = -2 \Rightarrow x'' = -7$.

b) $f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f(x) = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 \Rightarrow f(x) = (x - 1)^2 - 4$

$f(x) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 4$

Logo, $x' - 1 = 2 \Rightarrow x' = 3$ ou $x'' - 1 = -2 \Rightarrow x'' = -1$.

16. $h^2 \cdot 40 - 120 = 0 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{120}{40}} = \sqrt{3} \simeq 1{,}7$; logo, $h \simeq 1{,}7$ m.

Alternativa **d**.

17. **a)** Não é possível definir os zeros da função, uma vez que não sabemos o valor de c nem há dados suficientes para calculá-lo.

b) $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = x^2 + 6x + c$

Para $f(x) = 0$ e $x = 2$, temos:

$2^2 + 6 \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow 4 + 12 + c = 0 \Rightarrow c = -16$

c) $f(x) = x^2 + 6x - 16$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 10}{2} = -3 \pm 5 \Rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = -8$

Sim, a função f tem 2 zeros, 2 e -8.

18. Como o termo entre parênteses é sempre um número maior do que ou igual a zero, para que a função assuma o menor valor, o ideal é que esse número seja o menor possível, que nesse caso é zero. Assumindo $x - 1 = 0$, então $f(x) = 10$. Portanto, o menor valor que ela pode assumir é 10.

19. $f(x) = -3x^2 - x + 1 =$

$= -\left(3x^2 + x + \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{12} + 1 =$

$= -\left(\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} + \frac{12}{12} = -\left(\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{13}{12}$

Depois do completamento de quadrados, temos um termo ao quadrado na lei da função f. Como esse termo tem sinal negativo, quanto menor for o valor dele, maior será o valor da função. Nesse caso, se o termo for nulo, então a função assume o valor máximo. Portanto, o maior valor que ela pode assumir é $\frac{13}{12}$.

20. **a)** O lucro da empresa é a diferença entre a receita e a despesa, ou seja, $L(d) = R(d) - D(d)$. Temos:

$L(d) = R(d) - D(d) = (-d^2 + 52d + 660) - (22d + 804) \Rightarrow$

$\Rightarrow L(d) = -d^2 + 30d - 144$

b) Se não houve lucro nem prejuízo, pode-se dizer que $L(d) = 0$. Logo:

$L(d) = 0 \Rightarrow -d^2 + 30d - 144 = 0 \Rightarrow d^2 - 30d + 144 = 0$

$\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144 = 324 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 18$

$d_1 = \frac{-(-30) - 18}{2 \cdot 1} = 6$ e $d_2 = \frac{-(-30) + 18}{2 \cdot 1} = 24$

Assim, as soluções da equação são $d_1 = 6$ e $d_2 = 24$.

Os dias em que a empresa não teve lucro nem prejuízo, portanto, foram 6 e 24 de setembro.

c) Para o dia 5: $L(5) = -5^2 + 30 \cdot 5 - 144 \Rightarrow L(5) = -19$

Ou seja, nesse dia houve prejuízo de 19 mil reais.

Para o dia 10: $L(10) = -10^2 + 30 \cdot 10 - 144 \Rightarrow L(10) = 56$

Ou seja, nesse dia houve lucro de 56 mil reais.

Para o dia 20: $L(20) = -20^2 + 30 \cdot 20 - 144 \Rightarrow L(20) = 56$

Ou seja, nesse dia houve lucro de 56 mil reais também.

Portanto, analisando apenas pelo lado financeiro, seria melhor para a empresa ficar fechada no dia 5, pois é o único dia entre os citados em que teve prejuízo.

21. $147 = 2t^2 - 40t + 347 \Rightarrow 2t^2 - 40t + 200 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2 - 20t + 100 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{20}{2} =$

$= 10$; logo, o carro deveria ter freado por 10 segundos.

Alternativa **d**.

22. Quantidade de amigos que inicialmente deveria comparecer ao jantar: x.

Despesa de cada um se não houvesse falta: $\frac{420}{x}$.

Despesa de cada um com as faltas: $\frac{420}{x - 3}$.

Como cada um teve de pagar R$ 18,00 a mais, teremos:

$\frac{420}{x} = \frac{420}{x - 3} - 18 \Rightarrow 420(x - 3) = 420x - 18x(x - 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow 420x - 1260 = 420x - 18x^2 + 54x \Rightarrow$

$\Rightarrow 18x^2 - 54x - 1260 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 70 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x + 7) = 0 \Rightarrow x_1 = -10$ e $x_2 = 7$

Logo, o grupo de amigos é composto de 7 amigos, mas só compareceram ao jantar 4 amigos (pois $7 - 3 = 4$).

Conexões (p. 112)

2. $P = \frac{U^2}{R} = \frac{110^2}{50} = 242$

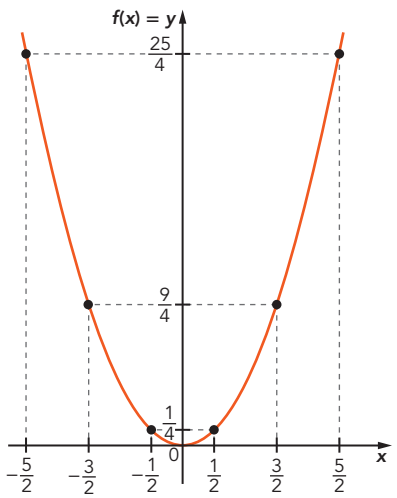
$P = \frac{U^2}{R} = \frac{220^2}{50} = 968$

242 W para 110 V e 968 W para 220 V.

Capítulo 2

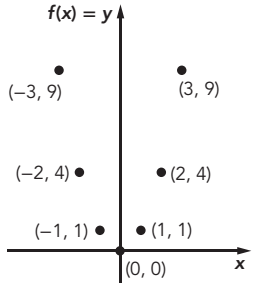
Atividades

2. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{2}$ e $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$.



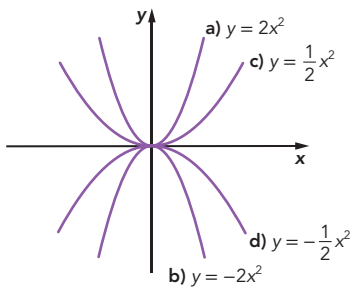
Banco de imagens/Arquivo da editora

3.



Banco de imagens/Arquivo da editora

5.



WYM Design/Arquivo da editora

6. **d)** Analisando a tabela, podemos perceber que os pontos dados apresentam as seguintes características:

- Os pontos são simétricos em relação ao eixo y:

  $f(-3) = 27 = f(3)$

  $f(-2) = 12 = f(2)$

  $f(-1) = 3 = f(1)$

  $f(-0) = 0 = f(0)$

- $f(x)$ é diretamente proporcional ao quadrado da variável x:

  $f(-3) = 27 = (-3)^2 \cdot 3$

  $f(-2) = 12 = (-3)^2 \cdot 3$

  $f(-1) = 3 = (-1)^2 \cdot 3$

  $f(0) = 0 = 0^2 \cdot 3$

  $f(1) = 1 = 1^2 \cdot 3$

  $f(2) = 12 = 2^2 \cdot 3$

  $f(3) = 27 = 3^2 \cdot 3$

  Sendo assim, a relação entre os valores apresenta características de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$. Se assumirmos que $a = 3$ e de acordo com o padrão analisado, temos que $f(x) = 3x^2$ é a função procurada.

7. Para $x = 2$: $f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$. O ponto $A(2, 0)$ pertence à parábola.

Para $x = 4$: $f(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2$. O ponto $B(4, -2)$ não pertence à parábola.

Para $x = -1$: $f(-1) = (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$. O ponto $C(-1, 12)$ pertence à parábola.

Alternativas **a** e **c**.

8. Para $x = 2$, temos: $f(2) = 1 \Rightarrow (m + 1) \cdot (2)^2 - 1 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4m + 4 - 1 = 1 \Rightarrow 4m = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$.

9. **a)** $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 30 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 6) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x' = 5$ e $x'' = 6$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 30$

Eixo x: (5, 0) e (6, 0); eixo y: (0, 30).

b) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 7) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x' = 3$ e $x'' = -7$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = -21$

Eixo x: (3, 0) e (−7, 0); eixo y: (0, −21).

c) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 36 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 6) = 0 \Rightarrow x' = 6$ e $x'' = -6$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = -36$

Eixo x: (6, 0) e (−6, 0); eixo y: (0, −36).

d) $f(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1$

$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} \Rightarrow x' = \frac{1}{2}$ e $x'' = \frac{1}{3}$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$

Eixo x: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$; eixo y: (0, 1).

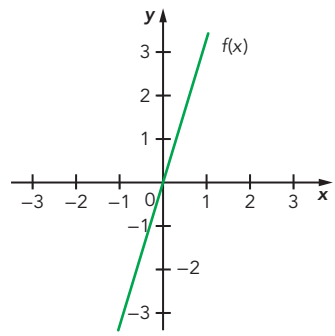
11. $c = 4$, pois é o ponto em que a curva intersecta o eixo y.

$f(x) = a(x - (-1))(x - 4) = a(x + 1)(x - 4) = ax^2 - 3ax - 4a \Rightarrow$
$\Rightarrow b = -3a$ e $c = -4a$

$c = 4 \Rightarrow -4a = 4 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = 3$

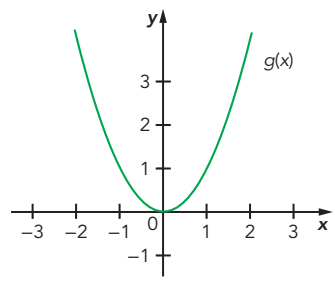
$f(x) = -x^2 + 3x + 4$

12. **a)** $f(x) = 4x$. Essa é uma função afim.



WYM Design/Arquivo da editora

b) $g(x) = x^2$. Essa é uma função quadrática.



WYM Design/Arquivo da editora

c) Dobrando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é dobrada e a medida de área é quadruplicada.

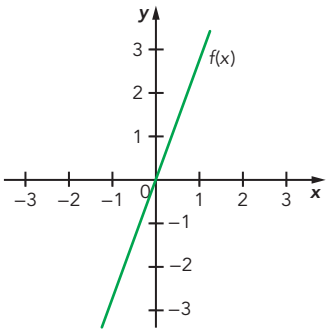
Triplicando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é triplicada e a medida de área é multiplicada por 9.

Resposta esperada: Isso ocorre pois $f(x)$ é diretamente proporcional a x na função afim relacionada à medida de comprimento, enquanto $g(x)$ é diretamente proporcional ao quadrado de x na função quadrática relacionada à medida de área.

d) Multiplicando por n a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é multiplicada por n e a medida de área é multiplicada por n^2.

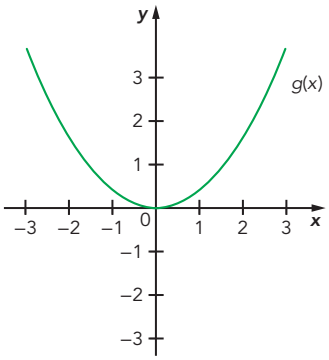
e) Para o terreno em formato de triângulo equilátero:

Item **a**: $f(x) = 3x$. Essa é uma função afim.



WYM Design/Arquivo da editora

Item **b**: $g(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Essa é uma função quadrática.



WYM Design/Arquivo da editora

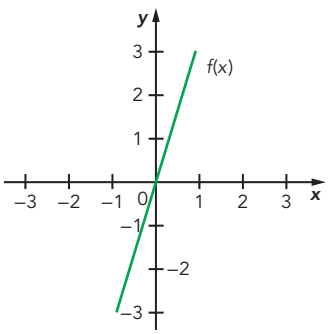
Item **c**: Dobrando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é dobrada e a medida de área é quadruplicada.

Triplicando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é triplicada e a medida de área é multiplicada por 9.

Item **d**: Multiplicando por n a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é multiplicada por n e a medida de área é multiplicada por n^2.

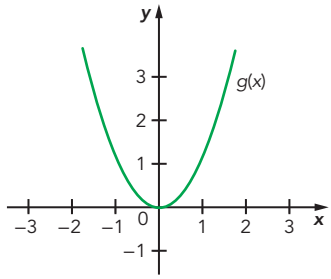
f) Para o terreno em formato de hexágono regular:

- Item **a**: $f(x) = 6x$. Essa é uma função afim.



WYM Design/Arquivo da editora

Item **b**: $g(x) = \frac{x^2 3\sqrt{3}}{2}$. Essa é uma função quadrática.



WYM Design/Arquivo da editora

Item **c**: Dobrando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é dobrada e a medida de área é quadruplicada.

Triplicando a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é triplicada e a medida de área é multiplicada por 9.

Item **d**: Multiplicando por n a medida de comprimento x do lado, a medida de perímetro é multiplicada por n e a medida de área é multiplicada por n^2.

13. **c)** Não. Exemplo de resposta: Se a função fosse do tipo $f(x) = ax^2$, então o vértice seria na origem do plano cartesiano, ou seja, teríamos que $f(0) = 0$, o que não é o caso, pois, de acordo com a tabela, temos que $f(0) = 3$.

d) Assumindo que a função quadrática procurada existe, sabemos que a equação relacionada a ela tem raízes $x' = -1$ e $x'' = 3$. Assim, temos que a forma fatorada da equação é do tipo $y = a(x + 1)(x - 3)$.

Substituindo as coordenadas do ponto (1, 4) nessa equação, temos:

$$4 = a(1 + 1)(1 - 3) \Rightarrow 4 = a(2)(-2) \Rightarrow a = \frac{4}{-4} = -1$$

Portanto, a lei que expressa a relação entre os valores pode ser dada por $y = -(x + 1)(x - 3)$ ou $y = -x^2 + 2x + 3$.

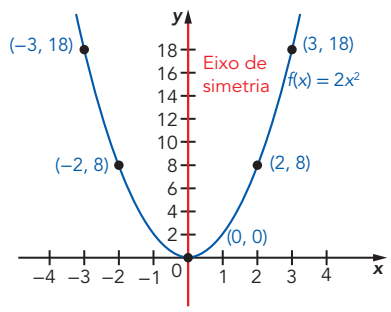
Testando a função encontrada para o restante dos valores, obtemos:

$f(0) = -(0 + 1)(0 - 3) = 3$

$f(2) = -(2 + 1)(2 - 3) = 3$

Assim, podemos concluir que existe uma função $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ à qual pertencem todos os pontos da tabela.

17.



WYM Design/Arquivo da editora

$f(x) = 2x^2$

18. **a)** $c = 3$, pois é o ponto em que a curva intersecta o eixo y.

O vértice é $V(1, 2)$.

Pela forma canônica: $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V = a(x - 1)^2 + 2 = ax^2 - 2ax + a + 2$.

Como $c = 3$, temos $a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$.

Logo, $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

b) $c = 2$, pois é o ponto em que a curva intersecta o eixo y.

O vértice é $V(0, 2)$.

Pela forma canônica: $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V = a(x - 0)^2 + 2 = ax^2 + 2$.

Como $f(1) = 3$, temos $a \cdot 1^2 + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$.

Logo, $f(x) = x^2 + 2$.

c) $c = 0$, pois é o ponto em que a curva intersecta o eixo y.

O vértice é $V(2, 4)$.

Pela forma canônica: $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V = a(x - 2)^2 + 4 = ax^2 - 4ax + 4a + 4$.

Como $c = 0$, temos: $4a + 4 = 0 \Rightarrow a = -1$.

$f(x) = -1x^2 - 4 \cdot (-1)x + 4 \cdot (-1) + 4 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x$

20. Como $a > 0$, a ordenada do vértice indica o valor mínimo que a função pode assumir em todo o domínio dela.

a) $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{80}{2} = 40$; logo, 40 unidades.

b) $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{5\,600}{4} = 1400$; logo, R$ 1.400,00.

c) Sabemos que o custo de produção de 40 unidades por dia com o fornecedor original é R$ 1.400,00.

Para determinar o custo com o outro fornecedor, vamos calcular o valor de $C'(x)$ para $x = 40$; assim, temos: $C'(x) = x^2 - 100x + 3\,500 \Rightarrow C'(40) = 40^2 - 100 \cdot 40 + 3\,500 \Rightarrow C'(40) = 1100$.

Com o novo fornecedor, o custo é R$ 1.100,00, enquanto o custo original era R$ 1.400,00. Portanto, vale a pena trocar.

d) Resposta pessoal.

21. Como $a < 0$, a ordenada do vértice indica o valor máximo que a função pode assumir em todo o domínio dela.

a) $t_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$; logo, 2 s.

b) $h_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-40}{-4} = 10$; logo, 10 m.

c) $-t^2 + 4t + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 40$

$t = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{-2} \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 - \sqrt{10} \text{ (não convém)} \\ t_2 = 2 + \sqrt{10} \simeq 5{,}16 \end{cases}$

5,16 min $\simeq$ 5 min 10 s = 310 s; logo, em aproximadamente 310 s.

22. Seja x a quantidade de lugares vazios ($0 \leqslant x \leqslant 40$). A função que indica o lucro da empresa é dada por $L(x) = (40 - x)(20 + 2x) = -2x^2 + 60x + 800$.

Análise esperada: Como o valor da abscissa do vértice é 15, temos o lucro máximo da empresa quando 15 passageiros forem transportados.

Algebricamente, temos que a abscissa do vértice da parábola da função $L(x)$ é dada por:

$L(x) = -2x^2 + 60x + 800 \Rightarrow x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{2 \cdot (-2)} = 15$

24. Como a medida de temperatura quando a câmara foi ligada era 12 °C, então $T(0) = 12 \Rightarrow 0 - 8 \cdot 0 + k = 12 \Rightarrow k = 12$.

Assim, temos que $T(t) = t^2 - 8t + 12$.

a) $T(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 6 \end{cases}$

A medida de temperatura será 0 °C nos instantes 2 min e 6 min.

b) $t_{mín} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2} = 4$. A medida de temperatura foi mínima aos 4 min.

c) $T(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 12 = 16 - 32 + 12 = -4$. A medida de temperatura mínima foi −4 °C.

d) A câmara foi desligada quando $t = 10$. Então: $T(10) = 10^2 - 8 \cdot 10 + 12 = 32$.

Ao desligar a câmara, a medida de temperatura era 32 °C.

25. **a)** Medida de perímetro: 200 metros.

Medida de largura da quadra: x metros.

Medida de comprimento da quadra: y metros.

$2x + 2y = 200 \Rightarrow y = 100 - x$

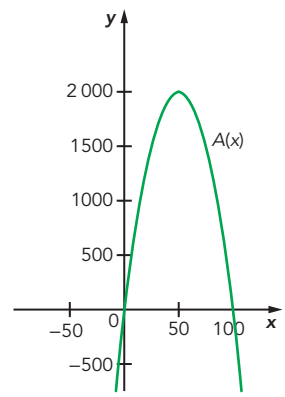
A medida de área é dada por: $A(x) = (100 - x) \cdot x = 100x - x^2$.

b) O valor de x quando a medida de área é máxima é dado pela abscissa do vértice da parábola correspondente.

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{-2} = 50$

Portanto, as medidas de largura e de comprimento devem ser 50 m e 50 m.

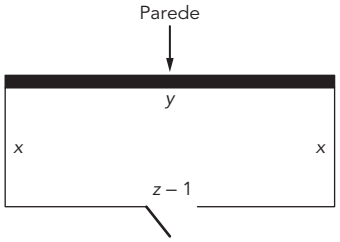
c)



WYM Design/Arquivo da editora

26. Suponha que a medida de largura é x metros e que a medida de comprimento é z metros.

A imagem a seguir representa o galinheiro com essas medidas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O total de tela gasto nessa situação é dado por $z - 1 + x + x = 15$. Logo, $z = 16 - 2x$.

A medida de área é dada por: $A(x) = (16 - 2x) \cdot x = 16x - 2x^2$.

O valor de x quando a medida de área é máxima é dado pela abscissa do vértice da parábola correspondente.

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-16}{-4} = 4$

$A(4) = 16 \cdot 4 - 2 \cdot (4^2) = 64 - 32 = 32$

A maior medida de área que podemos obter é 32 m².

27. Vamos determinar a função de retorno, sendo $R(x)$ o retorno financeiro e x o preço de cada livro.

Considerando o preço do livro igual a 0, o retorno é 0 real, ou seja, $A(0, 0)$ pertence ao gráfico de $R(x)$.

Considerando o preço do livro igual a 20 reais, o retorno é R$ 4.000, ou seja, $B(20, 4\,000)$ pertence ao gráfico de $R(x)$.

Considerando o preço do livro igual a 18 reais, o retorno é R$ 5.400, ou seja, $C(18, 5\,400)$ pertence ao gráfico de $R(x)$.

A lei da função quadrática que dá a receita da empresa será do tipo: $R(x) = ax^2 + bx + c$. Substituindo os pontos obtidos:

$f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow R(x) = ax^2 + bx$

$f(20) = 4\,000 \Rightarrow a \cdot 20^2 + b \cdot 20 = 4\,000 \Rightarrow 400a + 20b = 4\,000 \Rightarrow 20a + b = 200 \Rightarrow b = 200 - 20a$

$f(18) = 5\,400 \Rightarrow a \cdot 18^2 + b \cdot 18 = 5\,400 \Rightarrow 324a + 18b = 5\,400 \Rightarrow 18a + b = 300 \Rightarrow 18a + 200 - 20a = 300 \Rightarrow -2a = 100 \Rightarrow a = -50$

Logo, temos: $b = 200 - 20a \Rightarrow 200 - 20(-50) \Rightarrow b = 1200$

Portanto, a função de retorno é dada por $R(x) = -50x^2 + 1200x$.

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1200}{-100} = 12$

Para obter o maior valor de venda possível, o preço de cada livro deve ser R$ 12,00.

Enem e vestibulares (p. 155)

1. Para determinarmos a medida de intervalo de tempo (t) em que ocorre a maior quantidade de infectados, precisamos calcular a abscissa do vértice. Temos:

$x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_V = \frac{-10}{2 \cdot (-1)} = 5$

Alternativa **c**.

2. Para determinarmos a medida de altura máxima, precisamos calcular a ordenada do vértice: $y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_V = \frac{-\left(30^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 0\right)}{4 \cdot (-3)} = \frac{900}{12} = 75$; logo, 75 metros. Alternativa **d**.

3. A medida de altura máxima atingida pela bola é calculada pela ordenada do vértice. Temos:

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-\left(2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8\right)}{4 \cdot (-1)} = \frac{-36}{-4} = 9$

Alternativa **c**.

4. 4 000 camisetas correspondem a 40 lotes. Logo, temos:

$L(40) = 2500 \cdot 40 + 10 \cdot 40 \Rightarrow L(40) = 100\,000 + 16\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(40) = 116\,000$

Portanto, o lucro obtido com 4 000 camisetas é R$ 116.000,00.

Alternativa **a**.

5. A alternativa **a** é a correta, pois $f(0) = -0^2 + 0 + 6 = 6$.

A alternativa **b** é incorreta, pois, como $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 25 > 0$, o gráfico intersecta o eixo das abscissas em 2 pontos distintos.

A alternativa **c** é incorreta, pois $x_V = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} = 0{,}5$.

Logo, a abscissa do vértice é 0,5, não −2.

A alternativa **d** é incorreta, pois, como $a < 0$, a abscissa do vértice representa o ponto onde a função deixa de ser crescente e passa a ser decrescente. Sendo assim, ela é crescente até o ponto de abscissa 0,5, não no intervalo $[-2, 3]$.

A alternativa **e** é incorreta, pois $a < 0$, resultando em uma parábola cuja concavidade é voltada para baixo.

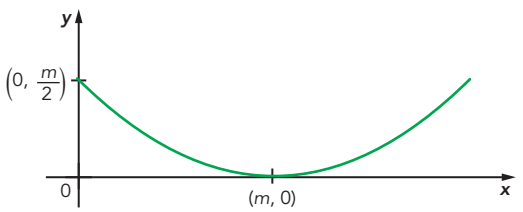
6. Sabendo que a forma canônica da função quadrática é $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$ e que $M(5, 10)$ é o vértice, segue que $f(x) = a(x - 5)^2 + 10$. Substituindo o ponto $Q(13, 0)$, temos:

$0 = a(13 - 5)^2 + 10 \Rightarrow a = -\frac{5}{32}$

Logo, $d = f(0) = -\frac{5}{32}(0 - 5)^2 + 10 = \frac{195}{32}$.

Alternativa **e**.

7. Podemos considerar que o gráfico da parábola pode ser representado da seguinte maneira:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Para determinar a lei da função, podemos utilizar o ponto $(m, 0)$ na forma canônica:

$f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V \Rightarrow f(x) = a(x - m)^2 + 0$

Utilizando o ponto $\left(0, \frac{m}{2}\right)$:

$\frac{m}{2} = a(0 - m)^2 + 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2m}$

Logo, temos:

$f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2m}(x - m)^2$

Alternativa **a**.

8. Como n é o número de assentos desocupados, a lei da função $r(n)$ que indica a receita da empresa é $r(n) = (900 + 50n)(90 - n) \Rightarrow r(n) = -50n^2 + 3\,600n + 81\,000$.

Assim, o número de assentos desocupados para que a receita seja máxima será dado pela abscissa do vértice, ou seja:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(3\,600)}{2(-50)} = 36$$

Como $r(36) = -50(36)^2 + 3\,600(36) + 81\,000 = 145\,800$, a maior receita que a empresa poderá obter está entre R$ 140.000,00 e R$ 150.000,00. Alternativa **a**.

9. **a)** Sendo x a quantidade de convidados excedentes e $R(x)$ a receita obtida nessa situação, temos:

$R(x) = (150 - 0{,}5x)(100 + x) = -0{,}5x^2 + 100x + 15\,000$

A quantidade de convidados excedentes que resulta em receita máxima corresponde ao valor de x no vértice:

$$x_V = -\frac{100}{2 \cdot (-0{,}5)} = 100$$

Logo, para que se tenha receita máxima, é necessário que haja 200 convidados no total (100 + 100 = 200).

b) Para 160 convidados, ou seja, 60 convidados excedentes, a receita bruta será:

$R(60) = -0{,}5 \cdot 60^2 + 100 \cdot 60 + 15\,000 \Rightarrow R(60) = -1800 + 6\,000 + 15\,000 \Rightarrow R(60) = 19\,200$

Portanto, a receita do *buffet* em uma formatura com 160 convidados é R$ 19.200,00.

Unidade 3

Capítulo 1

Atividades

14. 9,7 bilhões = $9{,}7 \cdot 10^9$. Então: $9{,}7 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 150$ L = $= 531075 \cdot 10^9$ L $\simeq 5{,}3 \cdot 10^{14}$ L. Aproximadamente $5{,}3 \cdot 10^{14}$ L.

15. Mantendo o consumo médio por pessoa por dia, podemos calcular a razão entre a quantidade de habitantes em 2100 e 2022, sabendo que 11 bilhões = $11 \cdot 10^9$.

$(11 \cdot 10^9) : (8 \cdot 10^9) \simeq 1{,}375$

Logo, o consumo será aproximadamente 37,5% maior em 2100.

18. A medida de comprimento estimada é de 15,8 cm, e, como a menor divisão da régua é de 1 cm, a incerteza da medição é 0,5 cm. Então, a maneira correta de indicar a medida de comprimento do objeto é $(15{,}8 \pm 0{,}5)$ cm, sendo o algarismo 8 o duvidoso.

Capítulo 2

Atividades

4. **a)** $f(2) = 4 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ (pois a não pode ser negativo)

Então, $f(x) = 2^x$.

Lei de formação: $f(x) = 2^x$

$D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) =]0, +\infty[$

Como $a > 0$, a função é crescente.

b) $f(1) = 0{,}7 \Rightarrow a^1 = 0{,}7 \Rightarrow a = 0{,}7$

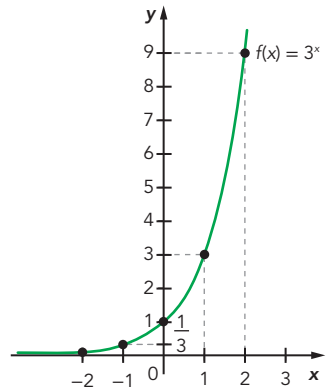
Então, $f(x) = (0{,}7)^x$.

Lei de formação: $f(x) = (0{,}7)^x$

$D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) =]0, +\infty[$

Função decrescente.

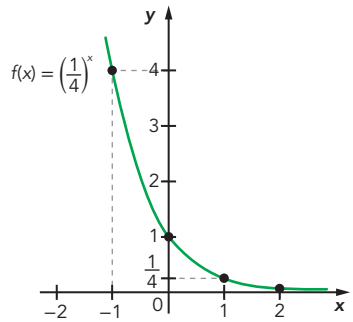
5. **a)**



WYM Design/Arquivo da editora

$D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) =]0, +\infty[$

b)



WYM Design/Arquivo da editora

$D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) =]0, +\infty[$

10. **a)** Para calcular o valor do aparelho no mercado de segunda mão, após 4 anos de uso, podemos aplicar a lei que representa a depreciação anual de valor. Como o aparelho perde $\frac{1}{4}$ do valor original a cada ano, ele retém $\frac{3}{4}$ do valor do ano anterior. Se o valor original do aparelho é R$ 3.840,00, o valor após t anos pode ser calculado da seguinte maneira:

Valor no ano t: $V(t) = 3\,840 \times \left(\frac{3}{4}\right)^t$

Valor no ano 4: $V(4) = 3\,840 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 1215$

Portanto, o valor do *smartphone* no mercado de segunda mão após 4 anos será R$ 1.215,00.

b) Para determinar a melhor opção, podemos comparar o valor do aparelho nas 2 situações:

Entregando na loja onde deseja comprar um novo *smartphone*, o usuário receberá 40% do valor do aparelho, assim:

$0{,}4 \times 3840 = 1536$; portanto, o valor que ele receberá pelo aparelho usado nessa situação é R$ 1.536,00.

Vendendo no mercado de segunda mão, o consumidor receberá o valor calculado no item **a**, que é R$ 1.215,00.

Considerando os 2 valores, podemos afirmar que a opção mais vantajosa financeiramente para o consumidor é entregar o aparelho na loja onde ele deseja comprar o novo celular, pois assim receberá R$ 1.536,00, enquanto vendendo no mercado de segunda mão, ele receberá apenas R$ 1.215,00.

11. Queremos saber após quantas horas t o aparelho terá 20% da carga inicial, ou seja, $Q(t) = 0{,}2 \cdot Q_0$. Então:

$Q(t) = Q_0 \cdot 5^{-0{,}1t} \Rightarrow 0{,}2 \cdot Q_0 = Q_0 \cdot 5^{-0{,}1t} \Rightarrow \frac{1}{5} = 5^{-0{,}1t} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{-1} = 5^{-0{,}1t} \Rightarrow -1 = -0{,}1t \Rightarrow t = 10$

Assim: 6 horas + 10 horas = 16 horas.

Portanto, após 10 horas teremos essa situação, ou seja, às 16 horas.

Alternativa **d**.

12. Considerando os dados do enunciado, temos que a função que relaciona a quantidade de carbono-11 presente em função da medida de intervalo de tempo é $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$.

Devemos ter $N(t) = 0{,}25 \cdot N_0$. Então:

$0{,}25N_0 = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Rightarrow \frac{1}{4}N_0 = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} \Rightarrow 2 = \frac{t}{20} \Rightarrow t = 40$

Portanto, a medida de intervalo de tempo é 40 min.

13. Temos que a função que relaciona a atividade de C-14 no fóssil em função da medida de intervalo de tempo é dada por $A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$. Pelo enunciado, temos $A(t) = 7$ e $A_0 = 896$. Então:

$7 = 896 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow \frac{7}{896} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow 7 = \frac{t}{5730} \Rightarrow t = 40110$

Portanto, o fóssil tem aproximadamente 40 mil anos.

Alternativa **d**.

14. Chamamos de S_0 a medida de área da superfície do lago coberta pela espécie de alga no início da pesquisa.

Na primeira situação, temos que a medida de área da superfície coberta em função da medida de intervalo de tempo t, em dias, é dada por $S(t) = S_0 \cdot 3^t$. Assim, após 301 dias, temos $S(301) = S_0 \cdot 3^{301}$, que é a medida de área de toda a superfície do lago.

Na segunda situação, temos 3 espécies de alga inicialmente cobrindo a mesma medida de área S_0, que, após uma medida de intervalo de tempo t, vão ocupar a medida de área total $S_0 \cdot 3^{301}$. Então:

$S_0 \cdot 3^t + S_0 \cdot 3^t + S_0 \cdot 3^t = S_0 \cdot 3^{301} \Rightarrow 3^t + 3^t + 3^t = 3^{301} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot 3^t = 3^{301} \Rightarrow 3^{t+1} = 3^{301} \Rightarrow t + 1 = 301 \Rightarrow t = 300$

Logo, as algas teriam coberto toda a superfície do lago em 300 dias.

15. **a)** Queremos saber o valor de t tal que $Q(t) = \frac{Q_0}{3}$.

Então:

$Q(t) = Q_0 \cdot 3^{-0{,}1t} \Rightarrow \frac{Q_0}{3} = Q_0 \cdot 3^{-0{,}1t} \Rightarrow 3^{-1} = 3^{-0{,}1t} \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 = -0{,}1t \Rightarrow t = 10$

Logo, depois de 10 meses, a quantidade de água se reduzirá à terça parte da quantidade inicial.

16. Exemplo de problema: Após 4 anos de uso, o valor de um *freezer* passou de R$ 4.200,00 para R$ 2.755,62. Qual foi a taxa anual de desvalorização desse *freezer*?

17. **a)** Exemplo de problema: Qual é o montante final obtido ao aplicar o capital inicial de R$ 25.000,00, na aplicação C, por 10 meses?

19. Cada gráfico representa uma função do tipo $f(x) = b \cdot a^x$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$. Analisando os pontos destacados, determinamos o valor de a e b em cada função.

a) Conhecemos os pontos (0, 2) e (1, 6) que pertencem ao gráfico da função. Então:

$f(0) = 2 \Rightarrow b \cdot a^0 = 2 \Rightarrow b = 2$

$f(1) = 6 \Rightarrow b \cdot a^1 = 6 \Rightarrow 2 \cdot a = 6 \Rightarrow a = 3$

Logo, $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

Então, o domínio é o conjunto dos números reais e o conjunto imagem é o conjunto dos números reais positivos. A função é crescente no domínio.

b) Conhecemos os pontos (1, 3), (0, 6) e (–1, 12) que pertencem ao gráfico da função. Usando os pontos (1, 3), (0, 6), obtemos:

$f(0) = 6 \Rightarrow b \cdot a^0 = 6 \Rightarrow b = 6$

$f(1) = 3 \Rightarrow b \cdot a^1 = 3 \Rightarrow 6 \cdot a = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Também poderíamos ter escolhido um desses pontos e o ponto (–1, 12) para calcular os valores de a e b.

Logo, $f(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Então, o domínio é o conjunto dos números reais e o conjunto imagem é o dos números positivos do conjunto dos números reais. A função é decrescente no domínio.

20. Exemplo de problema: Os coelhos são conhecidos por se reproduzirem de maneira rápida e eficiente na natureza. Uma vez que são presas naturais, eles se reproduzem de maneira exponencial para manter a espécie viva. A lei da função f representa a quantidade de filhotes que uma coelha deu à luz no intervalo de tempo de x anos.

$f(x) = 2 \cdot 3^x$

Determine a quantidade de filhotes que essa coelha pariu em uma medida de intervalo de tempo de 3 anos.

21. Temos:

$h(1) = 79{,}041 + 6{,}39 \cdot 1 - e^{3{,}261 - 0{,}993 \cdot 1} = 79{,}041 +$

$+ 6{,}39 - e^{2{,}268} \simeq 85{,}431 - 9{,}7 = 75{,}731$

$v(1) = 6{,}39 + 0{,}993 \cdot e^{3{,}261 - 0{,}993 \cdot 1} \simeq 6{,}39 + 0{,}993 \cdot 9{,}7 =$

$= 16{,}0221$

Logo, de acordo com o modelo, quando a criança atinge 1 ano, ela tem aproximadamente 75,7 cm de medida de altura e a taxa de crescimento é aproximadamente 16 cm/ano. Alternativa **a**.

23. **a)** O valor do *videogame* de quarta geração após t anos pode ser dado por:

$f(t) = 2\,000 \times (0{,}75)^t$

b) Após 2 anos, temos:

$f(2) = 2\,000 \times (0{,}75)^2 \Rightarrow f(2) = 1125$

Portanto, o valor do *videogame* de quarta geração após 2 anos é R$ 1.125,00.

Após 3 anos, temos:

$f(3) = 2\,000 \times (0{,}75)^3 \Rightarrow f(3) = 843{,}75$

Portanto, o valor do *videogame* de quarta geração após 3 anos é R$ 843,75.

c) Após 2 anos, temos: $50 \times 24 = 1200$

Após 3 anos, temos: $50 \times 36 = 1800$

Portanto, após 2 anos, ela terá economizado R$ 1.200,00 e, após 3 anos, R$ 1.800,00.

24. **a)** Para calcular a quantidade inicial de aves em cada uma das populações, basta considerar $t = 0$.

$f(0) = 2^{0+2} + 17 = 4 + 17 = 21$

$g(0) = 2^{0+1} + 81 = 2 + 81 = 83$

Logo, havia 21 marrecos-de-pequim e 83 marrecos-corredores-indianos.

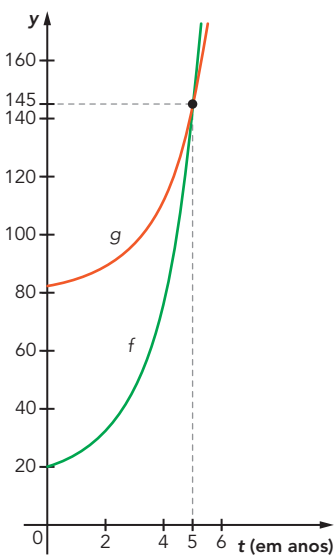
b) As populações teriam a mesma quantidade de aves quando $f(t) = g(t)$. Assim:

$f(t) = g(t) \Rightarrow 2^{t+2} + 17 = 2^{t+1} + 81 \Rightarrow 2^t \cdot 2^2 + 17 = 2^t \cdot 2^1 + 81 \Rightarrow 4 \cdot 2^t - 2 \cdot 2^t = 81 - 17 \Rightarrow 2 \cdot 2^t = 64 \Rightarrow 2^t = 32 \Rightarrow 2^t = 2^5 \Rightarrow t = 5$

Logo, as populações teriam a mesma quantidade de aves depois de 5 anos.

c) Podemos calcular o valor de $f(5)$ ou de $g(5)$, que são iguais, e marcar a intersecção dos gráficos no plano cartesiano.

$f(5) = 2^{5+2} + 17 = 2^7 + 17 = 128 + 17 = 245$



WYM Design/Arquivo da editora

Tecnologias digitais (p. 196)

1. Exemplos de resposta: Com $b > 0$, temos $f(x) > 0$, e com $b < 0$, temos $f(x) < 0$; conforme alteramos o valor de b, os valores de $f(x)$ aumentam mais rapidamente quando $b > 0$ e diminuem mais rapidamente quando $b < 0$; alterando o valor de b, alteramos o ponto de intersecção do gráfico com o eixo x, que é o ponto $(0, b)$.

2. Exemplo de resposta: Com $a > 1$, temos que a função f é crescente em todo o domínio e, com $0 < a < 1$, temos que f é decrescente; alterando o valor de a, não alteramos o ponto de intersecção do gráfico com o eixo y.

3. Exemplo de resposta: Para qualquer $b > 0$, valem as observações feitas na atividade **2**. Para $b < 0$, temos que a função f é decrescente para $a > 1$ e é crescente para $0 < a < 1$; alterando o valor de a, não alteramos o ponto de intersecção do gráfico com o eixo x.

4. Exemplo de resposta: Conforme aumentamos o valor de c, transladamos o gráfico da função f para cima e, conforme diminuímos o valor de c, o transladamos para baixo; alterando o valor de c, alteramos o ponto de intersecção do gráfico com o eixo y, que é o ponto $(0, b + c)$.

6. **a)** $f(x) = 4^x$ é crescente, pois $b > 0$ e $a > 0$.

Para $f(x) = 4^x$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$, ou $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$, ou $\text{Im}(f) =]0, +\infty[$.

b) $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 2$ é decrescente, pois $b > 0$ e $0 < a < 1$.

Para $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 2$, $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 2\}$, ou $\text{Im}(h) =]2, +\infty[$.

c) $h(x) = -2 \cdot 3^x + 1$ é decrescente, pois $b < 0$ e $a > 0$.

Para $h(x) = -2 \cdot 3^x - 1$, $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < -1\}$, ou $\text{Im}(h) =]-\infty, -1[$.

d) $j(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$ é decrescente, pois $b > 0$ e $0 < a < 1$.

Para $j(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$, $\text{Im}(j) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -2\}$, ou $\text{Im}(j) =]-2, +\infty[$.

Enem e vestibulares (p. 206)

1. Um número em notação científica é da forma $a^x \times 10^n$, com $1 \leqslant a < 10$ e n um número inteiro. Logo, para a medida de diâmetro do vírus *influenza*, temos: $0{,}00011 = 0{,}00011 \times \frac{10^4}{10^4} = 1{,}1 \times 10^{-4}$.

Portanto, em notação científica, a medida de comprimento do diâmetro é $1{,}1 \times 10^{-4}$ mm. Alternativa **d**.

2. A quantidade de bactérias é dada por $f(t) = c3^{2t}$. Logo, a quantidade inicial de bactérias ($t = 0$) é dada por $f(0) = c3^{2 \cdot 0} \Rightarrow f(0) = c$.

Para que a quantidade inicial de bactérias fique multiplicada por 9, temos:

$9c = c3^{2t} \Rightarrow 3^2 = 3^{2t} \Rightarrow 2 = 2t \Rightarrow t = 1$

Portanto, t é igual a 1 hora. Alternativa **a**.

3. A partir do enunciado, temos que o valor da peça após t anos da restauração é dado por $v(t) = 2500(1{,}03)^t$. Queremos saber a lei da função que representa o valor da peça após m meses da restauração.

Como cada ano tem 12 meses, temos que $t = \frac{m}{12}$. Portanto, a expressão que corresponde ao valor da peça é $v(m) = 2\,500(1{,}03)^{\frac{m}{12}}$. Alternativa **e**.

4. Para resolver essa atividade, podemos pensar na comparação de potências de mesma base: para $0 < a < 1$, temos $a^m < a^n$ se, e somente se, $m > n$, para quaisquer $m \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R}$. Logo, sendo $0 < X < 1$ o índice que o primeiro país recebeu, temos que $X^3 < X^2 < X < X^{\frac{1}{2}} < X^{\frac{1}{3}}$. Logo, o país que obteve o maior índice foi o quinto. Alternativa **c**.

5. Conforme o enunciado, devemos considerar uma função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ do tipo $f(x) = a \cdot b^x$, com $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$.

Analisando o gráfico para os meses de janeiro ($x = 1$) e março ($x = 3$), temos:

$f(1) = 120 \Rightarrow a \cdot b^1 = 120$

$f(3) = 480 \Rightarrow 480 = a \cdot b^3 \Rightarrow 480 = a \cdot b^1 \cdot b^2 \Rightarrow 480 = 120 \cdot b^2 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

Logo, $120 = a \cdot 2 \Rightarrow a = 60$.

Para saber a produção no mês de fevereiro ($x = 2$), calculamos: $f(2) = 60 \cdot 2^2 \Rightarrow f(2) = 240$.

A produção foi 240 milhares de unidades. Alternativa **c**.

6. Analisando o enunciado, temos: $Q(x) = Q_0 \cdot 3^x$, em que Q^0 corresponde a quantidade inicial de células e x corresponde à medida de intervalo de tempo decorrida, em horas. Temos que: $t = 2x \Rightarrow x = \frac{t}{2}$.

Então: $Q(x) = Q_0 \cdot 3^x \Rightarrow Q(x) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}}$. Alternativa **d**.

7. Do enunciado, temos a lei de formação $Q(t) = 25 \cdot 3^{2t-7}$.

Queremos saber o valor de t quando a quantidade de indivíduos é 54 675. Assim, temos:

$Q(t) = 25 \cdot 3^{2t-7} \Rightarrow 54\,675 = 25 \cdot 3^{2t-7} \Rightarrow 2\,187 = 3^{2t-7} \Rightarrow 3^7 = 3^{2t-7} \Rightarrow 2t - 7 = 7 \Rightarrow 2t = 14 \Rightarrow t = 7$

Portanto, demora 7 dias para que a cultura alcance a quantidade de 54 675 indivíduos. Alternativa **b**.

8. Pelo enunciado, sabemos que a lei que modela essa função é $f(x) = V \cdot a^x$.

Temos um valor inicial de R$ 200.000,00, que ocorre quando $x = 0$. Logo, temos: $f(0) = 200\,000 \Rightarrow V \cdot a^0 = 200\,000 \Rightarrow V = 200\,000$

Temos: $f(4) = \frac{200\,000}{2} = 100\,000$ e $f(4) = 200\,000 \cdot a^4$.

Logo, $100\,000 = 200\,000 \cdot a^4 \Rightarrow \frac{1}{2} = a^4$.

$f(8) = 200\,000 \cdot a^8 = 200\,000 \cdot (a^4)^2 =$

$= 200\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 50\,000$

O valor será R$ 50.000,00. Alternativa **c**.

9. Do enunciado, temos a lei da função, assim, a medida de intervalo de tempo t necessária para obter o volume com medida de 2 m³ é dada por:

$2 = 2 \cdot \left(2^{\frac{t}{12}} - 1\right) \Rightarrow 1 = 2^{\frac{t}{12}} - 1 \Rightarrow 2 = 2^{\frac{t}{12}} \Rightarrow 1 = \frac{t}{12} \Rightarrow t = 12$

Portanto, a medida de intervalo de tempo necessária é 12 minutos. Alternativa **e**.

10. O ponto em destaque no gráfico indica que $K(m) = 6\,563$. Temos:

$6\,563 = 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}m} + 2 \Rightarrow \frac{6\,561}{81} = 3^{\frac{1}{3}m} \Rightarrow \frac{3^8}{3^4} = 3^{\frac{1}{3}m} \Rightarrow 3^4 = 3^{\frac{1}{3}m} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 = \frac{1}{3}m \Rightarrow m = 12$

O valor de m é 12. Alternativa **d**.

11. Podemos representar as medidas de massa de **A** e **B** em função da medida de intervalo de tempo, em horas, respectivamente, por: $M_A(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{20}}$ e $M_B(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{15}}$.

Considerando que cada dia tem 24 horas, em 5 dias, temos 120 horas, pois $t = 5 \cdot 24 = 120$.

Para calcular a razão entre as amostras radioativas após 5 dias, temos:

$$\frac{M_A(120)}{M_B(120)} = \frac{100 \cdot 2^{-\frac{120}{20}}}{100 \cdot 2^{-\frac{120}{15}}} \Rightarrow \frac{M_A(120)}{M_B(120)} = \frac{2^{-6}}{2^{-8}} \Rightarrow \frac{M_A(120)}{M_B(120)} = 4$$

A razão entre as medidas de massa é 4. Alternativa **d**.

12. Do enunciado, temos a lei da função, portanto, a dose de radioterapia aplicada a uma distância de 33 mm da borda de tratamento é dada por:

$f(3{,}3) = 100 \cdot e^{-0{,}1(3{,}3 - 0{,}3)} + 60 \cdot (1 - e^{-0{,}1(3{,}3 - 0{,}3)}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(3{,}3) = 100 \cdot e^{-0{,}3} + 60 \cdot (1 - e^{-0{,}3})$

Considerando $e^{-0{,}3} = 0{,}74$, teremos:

$f(3{,}3) = 100 \cdot 0{,}74 + 60 \cdot (1 - 0{,}74) \Rightarrow f(3{,}3) = 74 + 15{,}6 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(3{,}3) = 89{,}6$

Portanto, temos que a dose aplicada a 33 mm ou 3,3 cm da borda de tratamento é 89,6%. Alternativa **e**.

13. Para $y = 1$ e $x = 0$, temos:

$1 = 46 - k \cdot 3^{-0{,}1 \cdot 0} \Rightarrow 1 = 46 - k \cdot 1 \Rightarrow k = 45$

Portanto, o valor de k é 45.

Para $y = 31$ (quantidade de alunos contaminados), temos:

$31 = 46 - 45 \cdot 3^{-0{,}1 \cdot x} \Rightarrow -15 = -45 \cdot 3^{-0{,}1x} \Rightarrow \frac{1}{3} = 3^{-0{,}1x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{-1} = 3^{-0{,}1x} \Rightarrow -1 = -0{,}1x \Rightarrow x = 10$

Portanto, foram necessárias 10 horas para que 31 estudantes fossem contaminados.

14. Sabendo que no 20º dia ambos os municípios tinham a mesma quantidade de infectados e que no município **A** essa quantidade é 24, temos:

$24 = \frac{3}{2} \cdot (4)^{\left(\frac{20-8}{3k}\right)} \Rightarrow 16 = 4^{\frac{12}{3k}} \Rightarrow 4^2 = 4^{\frac{12}{3k}} \Rightarrow 2 = \frac{4}{k} \Rightarrow k = 2$

Queremos determinar a quantidade de infectados no município **B** no 26º dia, temos:

$N(26) = \frac{3}{2} \cdot (4)^{\left(\frac{26-8}{3 \cdot 2}\right)} \Rightarrow N(26) = \frac{3}{2} \cdot 4^{\frac{18}{6}} \Rightarrow N(26) = \frac{3}{2} \cdot 4^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow N(26) = 96$

São 96 infectados.

Unidade 4

Capítulo 1

Atividades

1. **a)** $\log_3 27 = x \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$

b) $\log_5 125 = x \Rightarrow 5^x = 125 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$

c) $\log 10\,000 = x \Rightarrow 10^x = 10^4 \Rightarrow x = 4$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 32 \Rightarrow 2^{-x} = 2^5 \Rightarrow x = -5$

e) $\log 0{,}01 = x \Rightarrow 10^x = 0{,}01 \Rightarrow 10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2$

f) $\log_2 0{,}5 = x \Rightarrow 2^x = 0{,}5 \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow x = -1$

g) $\log_2 \sqrt{8} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{8} \Rightarrow 2^x = \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

h) $\log_4 \sqrt{32} = x \Rightarrow 4^x = \sqrt{32} \Rightarrow \left(2^2\right)^x = \left(2^5\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{5}{4}$

i) $\log_{\frac{1}{4}} 16 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 16 \Rightarrow 4^{-x} = 4^2 \Rightarrow x = -2$

2. **a)** $a^3 = 8 \Rightarrow a^3 = 2^3 \Rightarrow a = 2$

b) $a^4 = 81 \Rightarrow a^4 = 3^4 \Rightarrow a = 3$

c) $a^0 = 1, \forall\, a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

d) $a^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow a^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

6. **a)** Limão: $pH = 2{,}0 \Rightarrow -\log x = 2{,}0 \Rightarrow \log x = -2{,}0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 10^{-2}$; logo, $[H^+] = 10^{-2}$ mol/L.

Tomate: $pH = 4{,}5 \Rightarrow -\log x = 4{,}5 \Rightarrow \log x = -4{,}5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 10^{-4{,}5}$; logo, $[H^+] = 10^{-4{,}5}$ mol/L.

Portanto, o limão é o mais ácido.

b) Pela consequência 3 da definição, $\log_a a^n = n$, obtemos:

$pH = -\log 10^{-9} = -(-9) = 9$ (soda cáustica)

Analogamente:

$pH = -\log 10^{-13} \Rightarrow pH = -(-13) = 13$ (água sanitária)

Portanto, a água sanitária é a mais alcalina.

c) $[H^+] = 10^{-8} \Rightarrow pH = 8$

$[H^+] = 10^{-3} \Rightarrow pH = 3$

Então, o pH da solução analisada tinha valor entre 3 e 8. Das soluções apresentadas na imagem, a água da torneira, o leite, a água da chuva e o tomate podem ter sido as analisadas pelo químico.

7. **a)** $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 \simeq 0{,}3 + 0{,}5 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 6 \simeq 0{,}8$

b) $\log 9 = \log 3^2 = 2 \cdot \log 3 \simeq 2 \cdot 0{,}5 \Rightarrow \log 9 \simeq 1$

c) $\log 1{,}5 = \log (3 : 2) = \log 3 - \log 2 \simeq 0{,}5 - 0{,}3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 1{,}5 \simeq 0{,}2$

d) $\log 24 = \log (3 \cdot 8) = \log 3 + \log 8 = \log 3 + \log 2^3 \simeq$
$\simeq 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 \Rightarrow \log 24 \simeq 1{,}4$

e) $\log 144 = \log (9 \cdot 16) = \log 9 + \log 16 = \log 3^2 + \log 2^4 \simeq$
$\simeq 2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}3 \Rightarrow \log 144 \simeq 2{,}2$

f) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \simeq 1 - 0{,}3 \Rightarrow \log 5 \simeq 0{,}7$

8. $\log 125\,000 = \log (125 \cdot 1\,000) = \log 5^3 + \log 10^3 \simeq 3 \cdot 0{,}7 +$
$+ 3 \cdot 1 \Rightarrow \log 125\,000 \simeq 5{,}1$

Ou: $\log 125\,000 = \log 50^3 = 3 \cdot (\log 50) = 3 \cdot (\log 5 +$
$+ \log 10) \simeq 3 \cdot (0{,}7 + 1) \Rightarrow \log 125\,000 \simeq 5{,}1$

$\log 5\,000\,000 = \log (5 \cdot 10^6) = \log 5 + \log 10^6 \simeq 0{,}7 +$
$+ 6 \cdot 1 \Rightarrow \log 5\,000\,000 \simeq 6{,}7$

Logo, o computador processa 125 000 *bits* em aproximadamente 5,1 ms; e 5 000 000 *bits* em aproximadamente 6,7 ms.

10. **a)** $pH = -\log (2 \cdot 10^{-5}) = -(\log 2 + \log 10^{-5}) \simeq$
$\simeq -(\log 2 - 5 \cdot \log 10) \simeq -(0{,}3 - 5 \cdot 1) \Rightarrow pH \simeq 4{,}7$

b) $pH = -\log (0{,}5 \cdot 10^{-4}) = -\log (2^{-1} \cdot 10^{-4}) =$
$= -\log (2 \cdot 10^4)^{-1} = \log (2 \cdot 10^4) = \log 2 + \log 10^4 =$
$= \log 2 + 4 \cdot \log 10 \simeq 0{,}3 + 4 \cdot 1 \Rightarrow pH \simeq 4{,}3$

c) $pH = -\log (0{,}2 \cdot 10^{-6}) = -\log (2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-6}) =$
$= -\log (2 \cdot 10^{-7}) = -(\log 2 + \log 10^{-7}) =$
$= -(\log 2 - 7 \cdot \log 10) \simeq -(0{,}3 - 7 \cdot 1) \Rightarrow pH \simeq 6{,}7$

11. $S = \log_2 (1{,}4)^2 = 2 \cdot \log_2 1{,}4 = 2 \cdot \log_2 (2 \cdot 7 : 10) =$
$= 2 \cdot (\log_2 2 + \log_2 7 - \log_2 10) = 2 \cdot \left(1 + \frac{\log 7}{\log 2} - \frac{\log 10}{\log 2}\right) \simeq$
$\simeq 2 \cdot \left(1 + \frac{0{,}845}{0{,}301} - \frac{1}{0{,}301}\right) \simeq 2 \cdot (1 + 2{,}807 - 3{,}322) \Rightarrow$
$\Rightarrow S \simeq 0{,}97$

Alternativa **d**.

12. Se depois de 3 anos a quantidade de material radioativo inicial se reduz à metade, então temos $Q(3) = \frac{Q_0}{2}$.

Assim:

$\frac{Q_0}{2} = Q_0 \cdot a^3 \Rightarrow a^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

Substituindo o valor de a na expressão dada, obtemos:

$Q(t) = Q_0 \cdot \left[2^{-\frac{1}{3}}\right]^t \Rightarrow Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$

Agora, queremos saber o valor de t tal que $Q(t) = \frac{Q_0}{9}$.

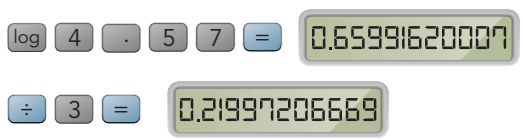
Então:

$\frac{Q_0}{9} = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} \Rightarrow \frac{1}{9} = 2^{-\frac{t}{3}} \Rightarrow 3^{-2} = 2^{-\frac{t}{3}} \Rightarrow \log 2^{-\frac{t}{3}} =$
$= -\frac{t}{3} \cdot \frac{\log 2}{\log 3} = -2 \Rightarrow -\frac{t}{3} \cdot \frac{0{,}30}{0{,}48} = -2 \Rightarrow -\frac{t}{3} \cdot \frac{\log 2}{\log 3} =$
$= -2 \Rightarrow -\frac{t}{3} \cdot \frac{0{,}30}{0{,}48} \simeq -2 \Rightarrow -0{,}3t \simeq -2{,}88 \Rightarrow t \simeq 9{,}6$

Logo, em aproximadamente 9,6 anos a quantidade de material radioativo reduz-se a $\frac{1}{9}$ da quantidade inicial.

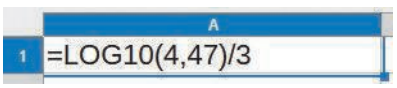
14. **a)** Com a calculadora científica:

Banco de imagens/ Arquivo da editora

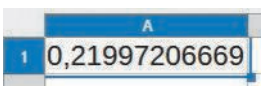


Com uma planilha eletrônica:

Reprodução/ LibreOffice



Reprodução/ LibreOffice

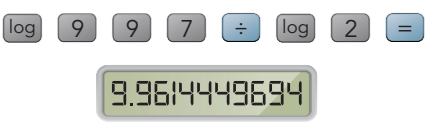


Portanto, $\log \sqrt[3]{4{,}57} \simeq 0{,}22$.

b) $\log_2 997 = \frac{\log 997}{\log 2}$ (realizamos a mudança de base)

Com a calculadora científica:

Banco de imagens/ Arquivo da editora



Com uma planilha eletrônica:

Reprodução/ LibreOffice

	A
1	=LOG10(997)/LOG10(2)

Reprodução/ LibreOffice

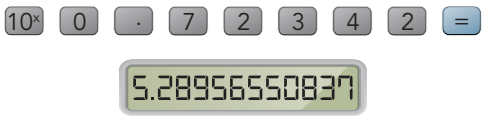
	A
1	9,9614496943982

Portanto, $\log_2 997 \simeq 9{,}96$.

c) $\log_{10} x = 0{,}72342 \Rightarrow 10^{0{,}72342} = x$

Com uma calculadora científica:

Banco de imagens/ Arquivo da editora



Com uma planilha eletrônica:

Reprodução/ LibreOffice

	A
1	=10^0,72342

	A
1	5,289565508

Portanto, $\log_{10} x = 0{,}72342 \Rightarrow x \simeq 5{,}29$.

16. A relação que relaciona o montante M de uma aplicação em determinada medida de intervalo de tempo t é $M = C(1 + i)^t$, em que C é o capital inicial e i é a taxa de juros compostos.

Pelo enunciado, temos um capital $C = 800\,000$, aplicado à taxa de juros compostos anual $i = 12\% = 0{,}12$, e um montante $M = 800\,000 + 700\,000 = 1\,500\,000$. Queremos saber a medida de intervalo de tempo t correspondente a esse montante. Assim:

$M = C(1 + i)^t \Rightarrow 1\,500\,000 = 800\,000(1 + 0{,}12)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow (1{,}12)^t = \frac{15}{8} \Rightarrow \log_{1{,}12} 1{,}875 = t \Rightarrow \frac{\log 1{,}875}{\log 1{,}12} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \simeq \frac{0{,}273001}{0{,}049218} \simeq 5{,}547$; logo o montante é atingido após aproximadamente 5,547 anos, ou seja, cerca de 5 anos e meio.

18. **a)** Queremos saber a medida de intervalo de tempo t para a qual $M = 1300$, sabendo que $C = 1000$ e $i = 1{,}5\% = 0{,}015$ ao mês.

$1300 = 1000(1 + 0{,}015)^t \Rightarrow \frac{1300}{1000} = 1{,}015^t \Rightarrow 1{,}3 =$

$= 1{,}015^t \Rightarrow t = \log_{1{,}3} 1{,}015 \Rightarrow t = \frac{\log 1{,}3}{\log 1{,}015} \simeq 17{,}6$; logo, a pessoa terá esse montante após 18 meses.

b) Para $i = 1\% = 0{,}01$, temos:

$1300 = 1000 \cdot (1{,}01)^t \Rightarrow 1{,}3 = (1{,}01)^t \Rightarrow t = \log_{1{,}01} 1{,}3 =$

$= \frac{\log 1{,}3}{\log 1{,}01} \simeq 26{,}3$; logo, a pessoa teria esse montante após 27 meses.

19. **a)** Pelo enunciado, queremos saber o valor de t para o qual $M = 600$, dados $C = 505$ e $i = 9\% = 0{,}09$ ao mês. Então:

$600 = 505(1 + 0{,}09)^t \Rightarrow 120 = 101 \cdot (1{,}09)^t \Rightarrow \frac{120}{101} = (1{,}09)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow \log \frac{120}{101} = \log (1{,}09)^t \Rightarrow \log 120 - \log 101 = t \cdot \log 1{,}09 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 120 - \log 101}{\log 1{,}09} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 12 + \log 10 - (\log 1{,}01 + \log 100)}{\log 1{,}09} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \simeq \frac{\log (2^2 \cdot 3) + 1 - (0{,}004 + 2)}{0{,}038} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \simeq \frac{2 \cdot \log 2 + \log 3 + 1 - (0{,}004 + 2)}{0{,}038} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \simeq \frac{2 \cdot 0{,}3 + 0{,}48 + 1 - (0{,}004 + 2)}{0{,}038} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \simeq \frac{2{,}08 - 2{,}004}{0{,}038} \Rightarrow t \simeq \frac{0{,}076}{0{,}038} \Rightarrow t \simeq 2$

Logo, a dívida chegará a R$ 600,00 em aproximadamente 2 meses.

21. Considerando que a medida de temperatura da água fervente é 100 °C, temos: $\Delta T_0 = 100\ °C - 30\ °C = 70\ °C$. Após 5 minutos, passamos a ter: $\Delta T(5) = 65\ °C - 30\ °C = 35\ °C$.

Mas sabemos que $\Delta T(5) = \Delta T_0 \cdot e^{-\alpha \cdot 5}$; então:

$35 = 70 \cdot e^{-5\alpha} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-5\alpha} \Rightarrow \log \frac{1}{2} = \log e^{-5\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 2^{-1} = \log (e^{-\alpha})^5 \Rightarrow -\log 2 = 5 \cdot \log e^{-\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log e^{-\alpha} \simeq \frac{-\log 2}{5} \Rightarrow \log e^{-\alpha} \simeq \frac{-0{,}3}{5} \Rightarrow \log e^{-\alpha} \simeq -0{,}06$

Após t minutos, temos: $\Delta T(t) = 37\ °C - 30\ °C = 7\ °C$.

Então:

$7 = 70 \cdot e^{-\alpha t} \Rightarrow \frac{1}{10} = e^{-\alpha t} \Rightarrow \log \frac{1}{10} = \log e^{-\alpha t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 10^{-1} = \log (e^{-\alpha})^t \Rightarrow -1 = t \cdot \log e^{-\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 \simeq t \cdot (-0{,}06) \Rightarrow t \simeq \frac{-1}{-0{,}06} \Rightarrow t \simeq 16{,}\overline{6}$

Alternativa **b**.

23. Exemplo de problema: Uma substância radioativa se desintegra a uma taxa de 8% ao ano. Em quantos anos teremos $\frac{1}{10}$ da quantidade inicial dessa substância?

25. $Q(t) = Q_0 \cdot (2{,}7)^{-rt} \Rightarrow \frac{Q_0}{2} = Q_0 \cdot (2{,}7)^{-0{,}04t} \Rightarrow \frac{1}{2} = (2{,}7)^{-0{,}04t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log (2{,}7)^{-0{,}04t} = \log \frac{1}{2} \Rightarrow -0{,}04t \cdot \log 2{,}7 = \log 0{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 0{,}5}{-0{,}04 \cdot \log 2{,}7} \Rightarrow t \simeq \frac{-0{,}30}{-0{,}04 \cdot 0{,}43} \Rightarrow t \simeq 17$

Logo, a meia-vida dessa substância é aproximadamente 17 anos.

26. Exemplo de problema: Uma substância radioativa se desintegra a uma taxa de 6% ao ano. Em quantos anos 80 g dessa substância se reduzirão a 8 g?

Capítulo 2

Atividades

3. **a)** Para $t = 0$, temos: $L(0) = \log_2 (0 + 2) = \log_2 2 = 1$; logo, no primeiro ano de verificação o lucro foi R$ 1.000,00.

b) Como o lucro é R$ 3.000,00, temos que $L(t) = 3$. Então: $L(t) = \log_2 (t + 2) \Rightarrow 3 = \log_2 (t + 2) \Rightarrow$ $\Rightarrow t + 2 = 2^3 \Rightarrow t = 8 - 2 = 6$; logo, $t = 6$ corresponde ao sétimo ano de verificação.

c) Analogamente:

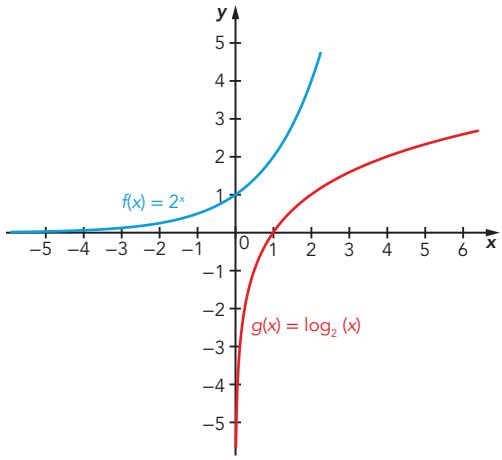
$L(0) = \log_2 (0 + 4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

$L(t) = \log_2 (t + 4) \Rightarrow 3 = \log_2 (t + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow t + 4 = 2^3 \Rightarrow t = 8 - 4 = 4$

Logo, no primeiro ano de análise o lucro foi R$ 2.000,00, e o lucro de R$ 3.000,00 corresponde ao quinto ano de análise.

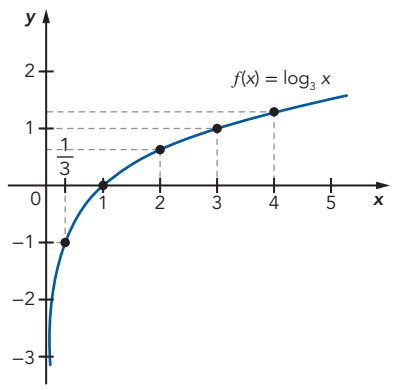
5. **b)**



Banco de imagens/Arquivo da editora

7. **a)**

$y = \log_3 x$	x
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3

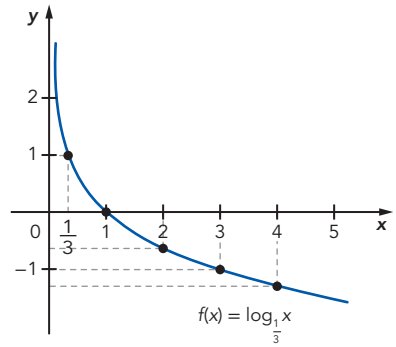


Banco de imagens/Arquivo da editora

D$(f) = \mathbb{R}_+^*$; Im$(f) = \mathbb{R}$; a função é crescente.

b)

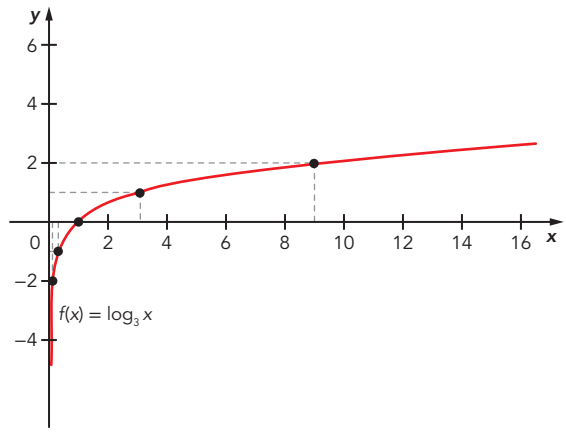
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	x
2	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{3}$
0	1
-1	3



WYM Design/Arquivo da editora

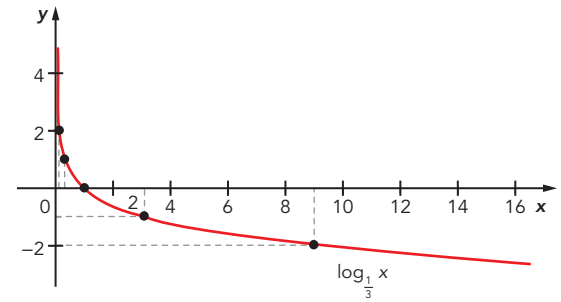
D$(f) = \mathbb{R}_+^*$; Im$(f) = \mathbb{R}$; a função é decrescente.

9. **a)**



Banco de imagens/Arquivo da editora

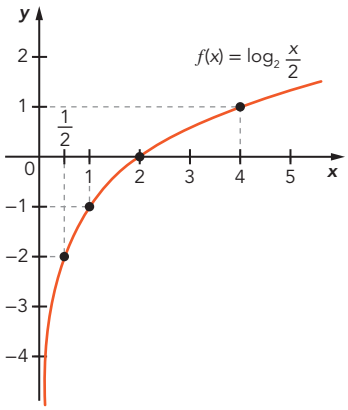
b)



Banco de imagens/Arquivo da editora

13. a)

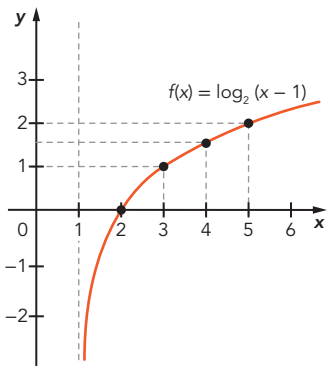
$y = \log_2 \frac{x}{2}$	x
-2	$\frac{1}{2}$
-1	1
0	2
1	4
2	8



WYM Design/Arquivo da editora

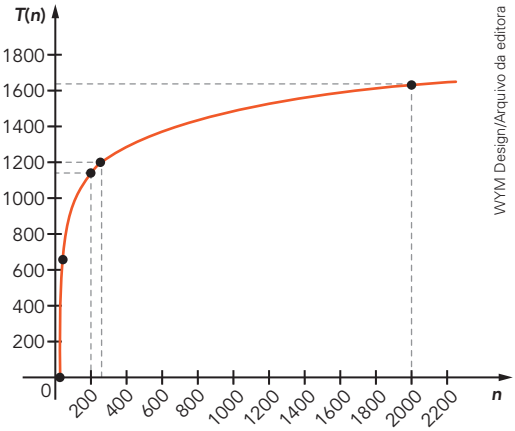
b)

$y = \log_2 (x - 1)$	x
-2	$\frac{5}{4}$
-1	$\frac{3}{2}$
0	2
1	3
2	8



WYM Design/Arquivo da editora

14. e)



WYM Design/Arquivo da editora

15. $h(t) = 4{,}5 \Rightarrow 4{,}5 = 1{,}5 + \log_2 \left(\frac{1}{2} + t\right) \Rightarrow 3 = \log_2 \left(\frac{1}{2} + t\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + t = 2^3 \Rightarrow t = 7{,}5$; logo, devem transcorrer 7,5 anos.

16. $n(0) = 10 + 21 \cdot \log_{64} (0 + 4) = 10 + 21 \cdot \log_{2^6} 2^2 = 10 +$

$+ 21 \cdot \frac{2}{6} \log_2 2 = 10 + 21 \cdot \frac{1}{3} = 17$; logo, havia 17 funcionários na data de fundação.

17. a)

t	$I(t) = 10 \cdot \log_2 (1 + t)$
0	0
1	10
2	Aproximadamente 15,8
3	20
4	Aproximadamente 23,2

O gráfico depende do *software* escolhido pelos estudantes.

c) Caso o valor $t = 3$ não tenha sido utilizado para representar o gráfico, então:

$I(t) = 20 \Rightarrow 20 = 10 \cdot \log_2 (1 + t) \Rightarrow \log_2 (1 + t) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + t = 2^2 \Rightarrow t = 3$

d) Exemplo de pergunta: Qual será o total de impostos a pagar dessa instituição após 15 anos da instalação da empresa?

18. $T(n) = 7 \Rightarrow 7 = 2 + \log_2 n \Rightarrow \log_2 n = 5 \Rightarrow n = 2^5 = 32$

Logo, a enxadrista conseguiu antever 32 jogadas.

20. Exemplo de problema: Qual foi a medida de energia liberada pelo terremoto que atingiu a Bolívia, em 22 de junho de 2024, e teve medida de magnitude 4,3?

21. $NS(I) = 20 \Rightarrow 20 = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow 2 = \log_0 \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^2 = \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow I = 10^{-10}$

Logo, a medida de intensidade sonora do relógio de parede é 10^{-10} W/m^2.

22. O ronco mais alto já registrado emitiu 93 dB e o ronco moderado emite 50 dB.

$NPS = 93 \Rightarrow 93 = 120 + 10 \cdot \log I \Rightarrow 10 \cdot \log I = -27 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log I = -2{,}7 \Rightarrow I = 10^{-2{,}7}$
$NPS = 50 \Rightarrow 50 = 120 + 10 \cdot \log I \Rightarrow 10 \cdot \log I = -70 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log I = -7 \Rightarrow I = 10^{-7}$
Assim: $\frac{10^{-2{,}7}}{10^{-7}} = 10^{4{,}3}$.
Temos que $10^4 < 10^{4{,}3} < 10^5$, ou seja, $10\,000 < 10^{4{,}3} < 100\,000$.
Alternativa **d**.

23. Exemplo de problema: Para proteger os ouvidos dos consumidores, alguns *smartphones* contam com configurações que definem um limite de volume de mídia para fones de ouvido de aparelhos de áudio *bluetooth*. Supondo que um par de fones de ouvido esteja configurado para não ultrapassar uma medida de nível sonoro igual a 80 dB, determine, em W/m², a medida de intensidade sonora desse ruído.

Enem e vestibulares (p. 246)

1. $28 = 26 + \log_3 (1{,}5t) \Rightarrow 2 = \log_3 (1{,}5t) \Rightarrow 3^2 = 1{,}5t \Rightarrow$
$\Rightarrow t = \frac{9}{1{,}5} \Rightarrow t = 6$
Alternativa **e**.

2. $N = \log I^{10} - \log I_0^{10} = \log \left(8 \cdot 10^{-8}\right)^{10} - \log \left(10^{-12}\right)^{10} =$
$= \log \left(\frac{8 \cdot 10^{-8}}{10^{-12}}\right)^{10} = \log \left(2^3 \cdot 10^4\right)^{10} = \log 2^{30} + \log 10^{40} =$
$= 30 \cdot \log 2 + 40 \cdot \log 10 \simeq 30 \cdot 0{,}3 + 40 \cdot 1 = 49$
Como a medida de intensidade do som é 49 dB, o funcionário deve adotar a medida preventiva **II**. Alternativa **b**.

3. Temos:
$\log (2{,}5 \cdot 10^{-18}) = \log (5^2 \cdot 10^{-19}) = \log 5^2 + \log 10^{-19} =$
$= 2 \cdot \log 5 - 19 \cdot \log 10 = 2 \cdot \log \left(\frac{10}{2}\right) - 19 \cdot \log 10 =$
$= 2 \cdot (\log 10 - \log 2) - 19 \cdot \log 10 = 2 \cdot (1 - 0{,}301) - 19 =$
$= -17{,}602$
Alternativa **e**.

5. Usando os dados do terremoto em São Francisco, temos:
$8{,}3 = \log \left(\frac{I_{SF}}{S}\right) \Rightarrow \frac{I_{SF}}{S} = 10^{8{,}3} \Rightarrow I_{SF} = S \cdot 10^{8{,}3}$
Como a medida de intensidade do terremoto entre a Colômbia e o Equador foi 4 vezes maior, então:
$I_{CE} = 4I_{SF} = 4 \cdot S \cdot 10^{8{,}3} \Rightarrow M = \log \left(\frac{4 \cdot S \cdot 10^{8{,}3}}{S}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow M = \log 2^2 + \log 10^{8{,}3} \Rightarrow M = 2 \cdot \log 2 + 8{,}3 \cdot \log 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow M \simeq 2 \cdot 0{,}3 + 8{,}3 \cdot 1 \Rightarrow M = 8{,}9$
A medida de magnitude foi igual a aproximadamente 8,9 graus. Alternativa **e**.

6. Para encontrar o fóssil mais antigo, basta calcular a medida de intervalo de tempo t para cada um dos 5 fósseis. Sendo $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$, temos:
$\frac{Q(t)}{Q_0} = 2^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow -\frac{t}{5730} = \log_2 \left(\frac{Q(t)}{Q_0}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 5730 \cdot \log_2 \left(\frac{Q(t)}{Q_0}\right) - 1 \Rightarrow t = 5730 \cdot \log_2 \left(\frac{Q_0}{Q(t)}\right)$
Como todas as medidas de intervalo de tempo são calculadas pela mesma expressão, o fóssil que apresentar o maior valor para a razão $R_i = \frac{Q_0}{Q(t)}$ será o mais antigo.
Logo:
$R_1 = \frac{128}{32} = \frac{2^7}{2^5} = 4$, $R_2 = \frac{256}{8} = \frac{2^8}{2^3} = 32$, $R_3 = \frac{512}{64} = \frac{2^9}{2^6} =$
$= 8$, $R_4 = \frac{1024}{512} = \frac{2^{10}}{2^9} = 2$, $R_5 = \frac{2\,048}{128} = \frac{2^{11}}{2^7} = 16$
Portanto, o fóssil mais antigo é o fóssil 2. Alternativa **b**.

7. E_7 é a medida de energia liberada pelo terremoto de medida de magnitude 7 e E_3, a medida de energia liberada pelo terremoto de medida de magnitude 3. Então:
$\begin{cases} \log_{10} E_7 = K + \frac{3}{2} \cdot 7 \\ \log_{10} E_3 = K + \frac{3}{2} \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_7 = 10^{K + \frac{21}{2}} \\ E_3 = 10^{K + \frac{9}{2}} \end{cases}$
Como queremos a razão entre as medidas de energia, temos: $\frac{E_7}{E_3} = \frac{10^{K + \frac{21}{2}}}{10^{K + \frac{9}{2}}} \Rightarrow \frac{E_7}{E_3} = 10^{K + \frac{21}{2} - \left(K + \frac{9}{2}\right)} \Rightarrow \frac{E_7}{E_3} = 10^6$.
Alternativa **e**.

8. Podemos representar a quantidade de bactérias em função da medida de intervalo de tempo, em horas, por $B(t) = 1000 \cdot (2{,}4)^{\frac{t}{3{,}5}}$. Para determinar em qual medida de intervalo de tempo a quantidade de bactérias chegará a $4 \cdot 10^{10}$, basta resolver a equação $4 \cdot 10^{10} =$
$= 1000 \cdot (2{,}4)^{\frac{t}{3{,}5}}$; logo, temos:
$\frac{4 \cdot 10^{10}}{10^3} = (2{,}4)^{\frac{t}{3{,}5}} \Rightarrow \frac{t}{3{,}5} = \log_{2{,}4} 4 \cdot 10^7 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 3{,}5 \cdot \log_{2{,}4} 4 \cdot 10^7 \Rightarrow t = 3{,}5 \cdot \left(\frac{\log 4 \cdot 10^7}{\log 2{,}4}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 3{,}5 \cdot \left(\frac{2 \cdot \log 2 + 7 \cdot \log 10}{\log \left(\frac{2^3 \cdot 3}{10}\right)}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow t \simeq 3{,}5 \cdot \left(\frac{2 \cdot 0{,}30 + 7 \cdot 1}{3 \cdot 0{,}30 + 0{,}48 - 1}\right) \Rightarrow t = 70$
Alternativa **b**.

9. Para duplicar o capital inicial, o valor final deve ser $F = 2C$. Temos ainda que $x = 0{,}8\% = 0{,}008$.
Logo, $2C = C\,(1 + 0{,}008)^n \Rightarrow 2 = (1{,}008)^n \Rightarrow n = \log_{1{,}008} 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1{,}008}$.
Pela tabela, temos que $\log 1{,}008 \simeq 0{,}003$ e $\log 2 \simeq 0{,}30$; portanto, $n \simeq \frac{0{,}3}{0{,}003} = 100$.
Alternativa **c**.

10. Queremos encontrar o valor de C, sabendo que $t = 600$ e $m(600) = 4$; logo:
$4 = 40e^{-C \cdot 600} \Rightarrow \frac{1}{10} = e^{-C \cdot 600} \Rightarrow -C \cdot 600 = \log_e \frac{1}{10} \Rightarrow$
$\Rightarrow C = \frac{1}{600} \log_e \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} \Rightarrow C = \frac{1}{600} \log_e 10$
Alternativa **e**.

11. **a)** Utilizando a função dada, temos:

$Q(0) = C = 5 \cdot 10^6$

Nos primeiros 10 minutos, apenas $\frac{1}{10}$ das bactérias sobrevive, ou seja:

$Q(10) = \frac{1}{10} \cdot C$

Substituindo na função, temos: $Q(10) = C \cdot 10^{-b \cdot 10}$, portanto:

$\frac{1}{10} \cdot C = C \cdot 10^{-b \cdot 10} \Rightarrow 10^{-1} = 10^{-b \cdot 10} \Rightarrow b = 0{,}1$

Após 20 min, a quantidade de bactérias será: $Q(20) = 5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-0{,}1 \cdot 20} = 5 \cdot 10^4$

b) Queremos obter t de tal forma que:

$Q(t) = \frac{1}{2} C$ e $b = 3$

Substituindo na função, temos: $\frac{1}{2} C = C \cdot 10^{-3t}$, portanto:

$\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log 10^{-3t}$

$\log 1 - \log 2 = -3 \cdot t \cdot \log 10 \Rightarrow -0{,}3 = -3 \cdot t \Rightarrow t = 0{,}1$

0,1 min = 6 s

Logo, na outra amostra, a medida de intervalo de tempo necessária para que a quantidade de bactérias fique reduzida à metade é 6 segundos.

12. **a)** Sejam $[H^+]_A$ e $[H^+]_E$ a concentração de íons de hidrogênio da água e a concentração de íons de hidrogênio da bebida energética, respectivamente. Então:

$$\begin{cases} 7 = -\log [H^+]_A \\ 3 = -\log [H^+]_E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [H^+]_A = 10^{-7} \\ [H^+]_E = 10^{-3} \end{cases}$$

Como queremos saber quantas vezes uma concentração é maior que a outra, basta fazer a razão entre elas:

$\frac{[H^+]_E}{[H^+]_A} = \frac{10^{-3}}{10^{-7}} \Rightarrow \frac{[H^+]_E}{[H^+]_A} = 10^4$

Ou seja, a concentração de íons de hidrogênio da bebida energética é 10 000 vezes maior do que a da água.

b) Queremos calcular o pH quando $[H^+] = 0{,}0072$ mol/L. Então:

$pH = -\log(0{,}0072) \Rightarrow pH = -\log\left(\frac{2^3 \cdot 3^2}{10^4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow pH = -(\log 2^3 + \log 3^2 - \log 10^4) \Rightarrow$

$\Rightarrow pH \simeq 4 - 3 \cdot 0{,}3 - 2 \cdot 0{,}48 \Rightarrow pH = 2{,}14$

O pH do suco de limão é, aproximadamente, 2,14.

Unidade 5

Capítulo 1

Atividades

1. Para $a_n = 3n + 2n \in \mathbb{N}^*$, teremos:

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3 \cdot 3 + 2 = 11$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$

Os 4 primeiros termos são (5, 8, 11, 14).

2. **a)** $a_1 = -2$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = (-1)^2 \cdot a_1 = 1 \cdot (-2) = -2$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = (-1)^3 \cdot a_2 = (-1) \cdot (-2) = 2$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = (-1)^4 \cdot a_3 = 1 \cdot 2 = 2$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = (-1)^5 \cdot a_4 = (-1) \cdot 2 = -2$

Os 5 primeiros termos são (−2, −2, 2, 2, −2).

b) $a_1 = 1$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2a_1 + 3 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 2a_2 + 3 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 2a_3 + 3 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = 2a_4 + 3 = 2 \cdot 29 + 3 = 61$

Os 5 primeiros termos são (1, 5, 13, 29, 61).

4. **a)** $n = 1 \Rightarrow a_1 = 7 \cdot 1 = 7$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 7 \cdot 2 = 14$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 7 \cdot 3 = 21$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 7 \cdot 4 = 28$

etc.

A sequência é (7, 14, 21, 28, ...).

b) $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

A sequência é $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}\right)$.

Capítulo 2

Atividades

2. **a)** $a_2 = a_1 + r = 7 + 4 = 11$

$a_3 = a_2 + r = 11 + 4 = 15$

$a_4 = a_3 + r = 15 + 4 = 19$

$a_5 = a_4 + r = 19 + 4 = 23$

(7, 11, 15, 19, 23)

b) $a_2 = a_1 + r = -6 + 8 = 2$

$a_3 = a_2 + r = 2 + 8 = 10$

$a_4 = a_3 + r = 10 + 8 = 18$

(−6, 2, 10, 18)

5. $n = 12$; $a_1 = -8$; $a_{12} = 36$

$a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow 36 = -8 + 11r \Rightarrow 11r = 44 \Rightarrow r = 4$

6. $a_1 = 6$; $r = 8$; $a_n = 62$

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 62 = 6 + (n - 1)8 \Rightarrow 62 = 6 + 8n - 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8n = 64 \Rightarrow n = 8$

7. Sendo $a_3 = 20$ e $a_{14} = 75$, podemos escrever que:

$a_{14} = a_3 + 11r \Rightarrow 75 = 20 + 11r \Rightarrow 55 = 11r \Rightarrow r = 5$

$a_7 = a_3 + 4r \Rightarrow a_7 = 20 + 4 \cdot (5) \Rightarrow a_7 = 40$

8. Podemos considerar a progressão aritmética dos múltiplos de 9 entre 1 e 5 000. Então: (9, ..., 4 995).

$a_1 = 9$; $a_n = 4\,995$; e $r = 9$.

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 4\,995 = 9 + (n - 1)9 \Rightarrow 4\,986 = (n - 1)9 \Rightarrow n - 1 = 554 \Rightarrow n = 555$

10. Seja $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ a progressão aritmética de razão r correspondente à produção da indústria ao longo do ano; assim, a_1 é a produção em janeiro, a_2 é a produção em fevereiro, e assim por diante, até a_{12}, que é a produção em dezembro. Temos que:

$a_{10} = 190 \Rightarrow a_1 + 9r = 190$

$a_8 - a_3 = 50 \Rightarrow a_1 + 7r - (a_1 + 2r) = 50 \Rightarrow a_1 + 7r - a_1 - 2r = 50 \Rightarrow 5r = 50 \Rightarrow r = 10$

Assim, $a_{11} = a_{10} + r = 190 + 10 = 200$.

Portanto, foram produzidas 200 máquinas em novembro desse ano.

11. Pelo termo geral da PA, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos que: $2\,020 = a_1 + (n - 1) \cdot 34$.

Vamos considerar que $a_1 = 1\,500$. Então:

$2\,020 = 1\,500 + (n - 1) \cdot 34 \Rightarrow 2\,020 = 1\,466 + 34n \Rightarrow$

$\Rightarrow 34n = 554 \Rightarrow n = \frac{554}{34} \simeq 16{,}29$

O cometa passou 16 vezes próximo à Terra.

12. A quantidade de seguidores a cada dia é uma PA (3, 20, 37, 54, ..., a_n),em que $a_1 = 3$ e $r = 20 - 3 = 17$.

O termo geral da PA é $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 17 = 3 + 17n - 17 = 17n - 14$.

Então: $17n - 14 = 1\,000 \Rightarrow 17n = 1\,014 \Rightarrow n \simeq 59{,}65$.

Portanto, após 60 dias a ação do *bot* ultrapassará 1 000 pessoas contactadas.

14. Temos que:

$a_{n-1} = x - r$

$a_n = x$

$a_{n+1} = x + r$

De acordo com o enunciado, temos:

$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = 24 \Rightarrow x - r + x + x + r = 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$

$a_{n-1} \cdot a_n \cdot a_{n+1} = 120 \Rightarrow (x - r) \cdot (x) \cdot (x + r) = 120 \Rightarrow$

$\Rightarrow (8 - r) \cdot (8) \cdot (8 + r) = 120 \Rightarrow 64 - r^2 = 15 \Rightarrow r^2 = 49 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 7$ ou $r = -7$

Logo, temos (1, 8, 15) para $r = 7$ ou (15, 8, 1) para $r = -7$.

15. Exemplo de problema: Sabe-se que 3 números inteiros estão em PA. Determine os 3 primeiros termos dessa PA sabendo que ela é decrescente, que a soma deles é -3 e o produto é 48.

16. Temos:

$(3x - 4) - (x - 2) = (x + 6) - (3x - 4) \Rightarrow 2x - 2 = -2x + 10 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$

Logo, $x = 3$ e a razão é 4.

17. Considerando apenas os degraus que precisam receber o suporte, temos a PA (5, 8, 11, 14, ...), em que $a_1 = 5$ e a razão é $r = 8 - 5 = 3$.

O termo geral é:

$a_n = a_1 + (n - 1)r = 5 + (n - 1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 2 + 3n$

Fazendo $3n + 2 = 215$, temos: $3n = 213 \Rightarrow n = 71$; logo, serão utilizados 71 suportes.

18. Considerando a quantidade de novos voluntários a cada ano, podemos formar a progressão aritmética (2, 5, 8, 11, ...), de razão $r = 3$. Calculamos então a_{10}.

$a_{10} = 2 + (10 - 1) \cdot 3 = 29$; logo, 29 pessoas vão aderir no 10º ano.

20. **a)** Com medida de velocidade de 6 m/s e soando um alarme a cada 5 s, então o carro soa o alarme a cada 30 m. Assim, temos uma PA com $a_1 = 0$, $r = 30$ e $a_n = 3\,240$. Calculamos então o valor de n.

$3\,240 = 0 + (n - 1) \cdot 30 \Rightarrow n - 1 = 108 \Rightarrow n = 109$

b) Com medida de velocidade 9 m/s e soando um alarme a cada 4 s, temos que o carro soa o alarme a cada 36 m. Como ele percorrerá uma medida de distância maior entre cada alerta, ele emitirá ao todo menos alertas no mesmo percurso.

Nesse caso, temos uma PA com $a_1 = 0$, $r = 36$ e $a_n = 3\,240$. Calculamos então o valor de n.

$3\,240 = 0 + (n - 1) \cdot 36 \Rightarrow n - 1 = 90 \Rightarrow n = 91$

21. **a)** De janeiro de 2023 (a_1) até abril de 2026 (a_n), temos 41 meses, sendo $a_1 = 80$ e $a_n = a_{41} = 50$. Então:

$50 = 80 + 40 \cdot r \Rightarrow r = -0{,}75$

Assim:

$a_{30} = 80 + 29 \cdot (-0{,}75) = 58{,}25$

O consumo mensal de açúcar no 30º mês de diminuição será 58,25 gramas por dia.

22. **a)** Consideramos a sequência (0, 30, 60, ..., 4 980), de razão $r = 30$. Então:

$4\,980 = 0 + (n - 1) \cdot 30 \Rightarrow n - 1 = 166 \Rightarrow n = 167$

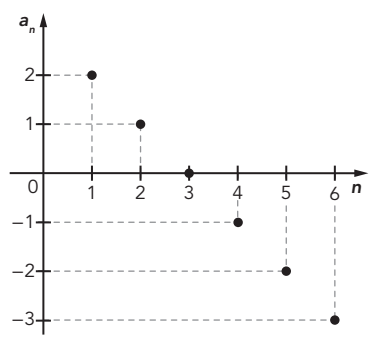
23. Exemplo de problema: Em uma via pública, um projeto prevê a instalação de 5 postes de iluminação. Esses postes devem se situar ao longo da via, de maneira que estejam com medidas de distância iguais um do outro e das marcações de 35 m e 200 m. Determine a localização das marcações onde os postes devem ser instalados.

24. **a)** Para a PA com $a_1 = 1$ e $r = 4$, obtemos: $a_2 = 1 + 4 = 5$; $a_3 = 5 + 4 = 9$; $a_4 = 9 + 4 = 13$.

Para a PA com $a_1 = 7$ e $r = -4$, obtemos: $a_2 = 7 - 4 = 3$; $a_3 = 3 - 4 = -1$; $a_4 = -1 - 4 = -5$; $a_5 = -5 - 4 = -9$.

b) Exemplo de resposta: Nesse fluxograma, a condição é testada a 1ª vez para $k = 1$, a 2ª vez para $k = 2$, a 3ª vez para $k = 3$, e assim por diante, até a enésima vez para $k = n$, quando a resposta é "Não" e o ciclo é encerrado. Assim, para $n = 527$, a condição é testada 527 vezes.

25.



WYM Design/Arquivo da editora

Os pontos se alinham de maneira que todos eles pertencem à mesma reta.

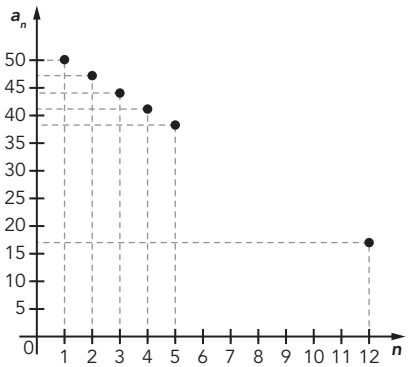
26. A PA associada a essa função é formada pelos valores de $f(x)$, tal que $x \in \mathbb{N}^*$. Determinamos então os 7 primeiros termos:

$a_1 = f(1) = -0{,}5 \cdot 1 + 1 = 0{,}5$
$a_2 = f(2) = -0{,}5 \cdot 2 + 1 = 0$
$a_3 = f(3) = -0{,}5 \cdot 3 + 1 = -0{,}5$
$a_4 = f(4) = -0{,}5 \cdot 4 + 1 = -1$
$a_5 = f(5) = -0{,}5 \cdot 5 + 1 = -1{,}5$
$a_6 = f(6) = -0{,}5 \cdot 6 + 1 = -2$
$a_7 = f(7) = -0{,}5 \cdot 7 + 1 = -2{,}5$

Logo, a PA é (0,5; 0; −0,5; −1; −1,5; −2; −2,5; ...).

27. **a)** $a_1 = 50$, $r = -3$ e $n = 12$; f: {1, 2, 3, 4, 5, ..., 12} → ℝ tal que $f(x) = -3x + 53$.

b)



WYM Design/Arquivo da editora

28. Temos que $a_1 = 5$ e $r = a_2 - a_1 = 6 - 5 = 1$. Então:
$a_n = 5 + (n - 1) \cdot 1 = 5 + n - 1 = n + 4$
Logo, $a_n = n + 4$, com $n \geqslant 1$.

29. $a_2 = -9 + 7 = -2$
$a_3 = -2 + 7 = 5$
$a_4 = 5 + 7 = 12$
$a_5 = 12 + 7 = 19$
$a_6 = 19 + 7 = 26$
Portanto, a soma é:
$-9 - 2 + 5 + 12 + 19 + 26 = 51$

30. $a_1 = 5$; $a_2 = 8$; $r = 3$.
$a_4 = 5 + (4 - 1) \cdot 3 = 14$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(5 + 14)4}{2} = 19 \cdot 2 = 38$$

31. Exemplo de resposta: Em uma PA constante, a razão é nula. Para $r = 0$, temos $a_n = a_1$ e, então:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1)n}{2} = \frac{2a_1 \cdot n}{2} = a_1 \cdot n$$

A soma dos termos de uma PA infinita constante é dada por: $S_n = a_1 \cdot n$.

32. Temos a PA (20, 17, ..., a_n), com $a_1 = 20$ e $r = -3$.
$a_n = 20 + (5 - 1)(-3) = 8$

$$S_n = \frac{(20 + 8)5}{2} = 14 \cdot 5 = 70$$

Em 5 h, ele percorrerá 70 km.

33. Em cada figura, a quantidade de pontos em cada linha, de cima para baixo, forma a PA (1, 2, 3, ..., b_n), com $b_1 = 1$, $r = 1$ e b_n correspondendo à posição da figura na sequência de números triangulares, ou seja, corresponde a n na PA dos números triangulares (1, 3, 6, 10, 15, ..., a_n). Por exemplo, na 5ª figura, $b_5 = 5$, há 5 pontos na base da figura.
Para calcular a soma da quantidade de pontos em cada figura, podemos usar a fórmula:

$$S_n = \frac{(b_1 + b_n)n}{2} = \frac{(1 + n)n}{2}$$

Ou seja, a quantidade de pontos em cada figura é $a_n = S_n = \frac{(1 + n)n}{2} = \frac{n(n + 1)}{2}$, como queríamos demonstrar.

34. PA $(x - r, x, x + r)$
$x - r + x + x + r = 180° \Rightarrow 3x = 180° \Rightarrow x = 60°$
$x - r = 40° \Rightarrow 60° - r = 40° \Rightarrow r = 20°$
$x + r = 60° + 20° = 80°$
As medidas de abertura dos ângulos são 60° e 80°.

35. **a)** A PA dada tem 20 termos e, dos pares de termos dados, a_7 e a_{14} são os únicos equidistantes dos extremos.

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_6}_{\text{6 termos}}, a_7, \ldots, a_{14}, \underbrace{a_{15}, \ldots, a_{19}, a_{20}}_{\text{6 termos}}$$

b) A soma dos índices de termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos índices dos termos extremos $(1 + n)$.

36. Podemos escrever todos os termos em função de a_1 e r.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_2 = a_1 + r$
$a_{n-1} = a_1 + (n - 2)r$
Então:
$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_1 + (n - 2)r = a_1 + a_1 + (n - 1)r = a_1 + a_n$, como queríamos demonstrar.

37. Representando os 3 termos consecutivos em função do termo intermediário, temos:
$a_{n-1} = x - r$
$a_n = x$
$a_{n+1} = x + r$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{x - r + x + r}{2} = \frac{2x}{2} = x \Rightarrow a_n = x$$

38. **a)** 1ª opção: Esta é uma progressão aritmética, em que o primeiro termo é 100 e a razão é 10.
Para encontrar o valor economizado no 12º mês, temos:
$a_{12} = a_1 + a_{11} \cdot r \Rightarrow a_{12} = 100 + 11 \cdot 10 \Rightarrow a_{12} = 210$
Para encontrar a soma dos 12 meses, temos:

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} \Rightarrow S_{12} = (100 + 210) \cdot 6 \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_{12} = 1860$

Na 1ª opção, o total economizado após 12 meses será R$ 1.860,00.

2ª opção: A soma total S será dada pelo produto da quantidade de meses pelo valor economizado em cada mês, assim temos:

$S = 12 \cdot 200 = 2\,400$

Na 2ª opção, o total economizado após 12 meses será R$ 2.400,00.

b) Para a 1ª opção, vamos determinar a quantidade de meses necessária para economizar R$ 4.500,00 usando a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética:

$$4\,500 = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\,500 = \frac{\big(100 + 100 + (n-1)\cdot 10\big)n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\,000 = 190n + 10n^2 \Rightarrow 10n^2 + 190n - 9\,000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 19n - 900 = 0$$

Usando a fórmula de resolução de equação do 2º grau, temos:

$\Delta = (19)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-900) = 3\,961$

Logo, $n = \frac{-19 \pm \sqrt{3\,961}}{2 \cdot 1}$

Considerando a raiz positiva, $n \simeq 22$, ou seja, em 22 meses a estudante consegue juntar R$ 4.500,00.

Para a 2ª opção, temos:

$4\,500 = 200 \cdot n \Rightarrow n = 22{,}5$

Embora as medidas de intervalo de tempo sejam próximas, na 1ª opção a estudante conseguirá comprar o *notebook* em 22 meses, enquanto na 2ª opção ela precisará de 23 meses (considerando meses inteiros). Portanto, a 1ª opção é mais vantajosa.

39. Exemplo de problema: Determine o valor total a ser pago em um imóvel sabendo que ele será financiado com as seguintes condições de pagamento: 1ª parcela de R$ 300,00 e as demais aumentam R$ 2,00 a cada mês, até completar 30 anos.

Ampliando a atividade (p. 263)

a) Temos que 23,6 milhões de pessoas corresponde a 23 600 000. Assim:

23 600 000 : 0,15 ≃ 157 333 333; logo, aproximadamente 157,3 milhões de pessoas.

b) $157\,333\,333 \cdot 0{,}3 \cdot 2\,640 = 124\,607\,999\,736$

$157\,333\,333 \cdot 0{,}7 \simeq 110\,133\,333$

Logo, serão gastos R$ 124.607.999.736,00 com o subsídio dos medicamentos, e aproximadamente 110,13 milhões de pessoas não terão acesso aos medicamentos gratuitos.

Capítulo 3

Atividades

1. **a)** $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = 3$; logo, é PG e $q = 3$.

b) $\frac{4}{2} \neq \frac{6}{4} \neq \frac{8}{6} \neq \frac{10}{8} \neq \frac{12}{10}$; logo, não é PG.

c) $\frac{200}{400} = \frac{100}{200} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$; logo, é PG e $q = \frac{1}{2}$.

2. **a)** Temos $a_1 = 1$, $q = \frac{5}{1} = 5$ e $n = 5$; logo, $a_5 = a_1 \cdot q_4 = 1 \cdot 5^4 = 1 \cdot 625 = 625$.

b) Temos $a_1 = 9$, $q = \frac{27}{9} = 3$ e $n = 10$; logo, $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 9 \cdot 3^9 = 3^2 \cdot 3^9 = 3^{11} = 177\,147$.

5. Sendo $a_4 = 24$ e $a_8 = 384$, podemos escrever que:

$a_8 = a_4 \cdot q^4 \Rightarrow 384 = 24 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{384}{24} \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow q = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$, então $a_6 = a_4 \cdot q^2 \Rightarrow a_6 = 24 \cdot (\pm 2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_6 = 24 \cdot 4 \Rightarrow a_6 = 96$

7. (200; 220; 242; 266,2; 292,82; 322,102; ...)

Como cada termo da sequência a partir de 220 é dado pelo anterior multiplicado por 1,1, temos uma PG de razão $q = 1{,}1$.

8. Temos a PG (3 000, x, 27 000), $a_1 = 3\,000$, $a_2 = x$ e $a_3 = 27\,000$. Podemos escrever que:

$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} \Rightarrow 27\,000 = 3\,000 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{27\,000}{3\,000} \Rightarrow$

$\Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow q = \sqrt{9} = \pm 3$

Como a produção não pode ser negativa, temos $q = 3$.

$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} \Rightarrow a_2 = 3\,000 \cdot 3 \Rightarrow a_2 = 9\,000$

9. **a)** Temos $a_1 = 30\,000$ e $q = 2$. Podemos escrever:

$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1} \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow a_4 = 30\,000 \cdot 2^3 \Rightarrow a_4 = 30\,000 \cdot 8 \Rightarrow a_4 = 240\,000$

b) Nesse caso temos $q = 3$. Podemos escrever:

$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1} \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow a_4 = 30\,000 \cdot 3^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_4 = 30\,000 \cdot 27 \Rightarrow a_4 = 810\,000$

10. Em cada ano a população é 102% a população do ano anterior. Ou seja, a cada ano a população P_0 é multiplicada por 102% = 1,02. Assim, temos a razão $q = 1{,}02$. Nesse caso, podemos escrever a PG:

$(P_0; P_0 \cdot 1{,}02; P_0 \cdot (1{,}02)^2; P_0 \cdot (1{,}02)^3; \ldots; P_0 \cdot (1{,}02)^{10}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (200\,000; 200\,000 \cdot 1{,}02; 200\,000 \cdot (1{,}02)^2;$

$200\,000 \cdot (1{,}02)^3; \ldots; 200\,000 \cdot (1{,}02)^{10})$

Assim, $P_{10} = P_0 \cdot (1{,}02)^{10} = 200\,000 \cdot (1{,}02)^{10} \simeq 243\,800$; logo, são aproximadamente 243 800 habitantes.

11. Podemos escrever todos os termos em função de a_1 e q.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; $a_2 = a_1 \cdot q$; $a_{n-1} = a_1 \cdot q^{n-2}$.

Então:

$a_2 \cdot a_{n-1} = a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^{n-2} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot a_n$ (como queríamos demonstrar).

12. Representando os 3 termos consecutivos em função do termo intermediário, $a_{n-1} = \frac{x}{q}$, $a_n = x$ e $a_{n+1} = x \cdot q$, obtemos: $a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (a_n)^2 \Rightarrow \frac{x}{q} \cdot x \cdot q = x^2 \Rightarrow x^2 = x^2$.

14. Exemplo de problema: A população de uma cidade, atualmente de 400 000 habitantes, cresce 5% ao ano. Qual será a quantidade de habitantes dessa população daqui a 5 anos?

15. Para calcular a quantidade de regiões triangulares na etapa **4**, devemos calcular o valor do termo a_5.

$n = 5$

$a_k = 1$

$k = 1$

- A condição $1 < 5$ é verdadeira, logo:

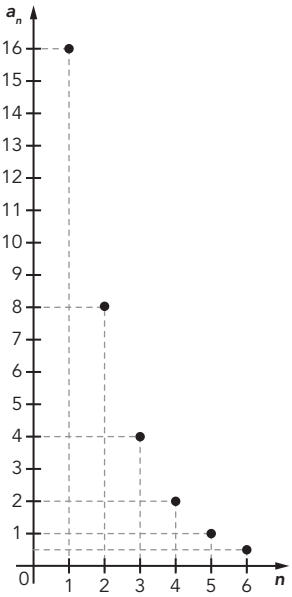
  $a_k = 1 \cdot 3 = 3$

  $k = 1 + 1 = 2$

- A condição $2 < 5$ é verdadeira, logo:
  $a_k = 3 \cdot 3 = 9$
  $k = 2 + 1 = 3$
- A condição $3 < 5$ é verdadeira, logo:
  $a_k = 9 \cdot 3 = 27$
  $k = 3 + 1 = 4$
- A condição $4 < 5$ é verdadeira, logo:
  $a_k = 27 \cdot 3 = 81$
  $k = 4 + 1 = 5$
- A condição $5 < 5$ é falsa, logo:
  $a_k = a_5 = 81$

81 é o 5º termo da sequência; logo, são 81 regiões triangulares na 4ª etapa.

17.



WYM Design/Arquivo da editora

Os pontos estão desalinhados, de maneira que todos eles pertencem a uma curva.

19. **a)** Temos $a_1 = 1$, $a_n = 512$ e $q = 2$. Então, podemos escrever:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 512 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^9 = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 10$

$S_{10} = 1 \cdot \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 1023$

b) Temos $a_1 = 5$, $a_n = 1280$ e $q = 4$. Então, podemos escrever:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 1280 = 5 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 5 \cdot 2^8 = 5 \cdot 2^{2n-2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2n - 2 = 8 \Rightarrow n = 5$

$S_5 = 5 \cdot \dfrac{1 - 4^5}{1 - 4} = 1705$

c) Temos $a_1 = 1$, $a_n = 2^{10}$ e $q = 2^2$. Então, podemos escrever:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 2^{10} = 1 \cdot (2^2)^{n-1} \Rightarrow 2^{10} = 1 \cdot 2^{2n-2} \Rightarrow 2^{10} =$
$= 2^{2n-2} \Rightarrow 2n - 2 = 10 \Rightarrow n = 6$

$S_6 = 1 \cdot \dfrac{1 - 2^{2 \cdot 6}}{1 - 2^2} = 1365$

20. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 256 = 2 \cdot q^{n-1} \Rightarrow q^{n-1} = 128 \Rightarrow q^n \cdot q^{-1} =$
$= 128 \Rightarrow q^n = 128q$

$S_n = 510 = 2 \cdot \dfrac{1 - 128q}{1 - q} \Rightarrow 255 = \dfrac{1 - 128q}{1 - q} \Rightarrow$
$\Rightarrow 255 - 255q = 1 - 128q \Rightarrow -255q + 128q = 1 - 255 \Rightarrow$
$\Rightarrow -127q = -254 \Rightarrow q = 2$

21. $765 = 3 \cdot \dfrac{(1 - 2^n)}{1 - 2} \Rightarrow 2^n - 1 = 255 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 8$

22. $x = S_6 = 1 \cdot \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{63}{64} \cdot 2 = \dfrac{63}{32}$

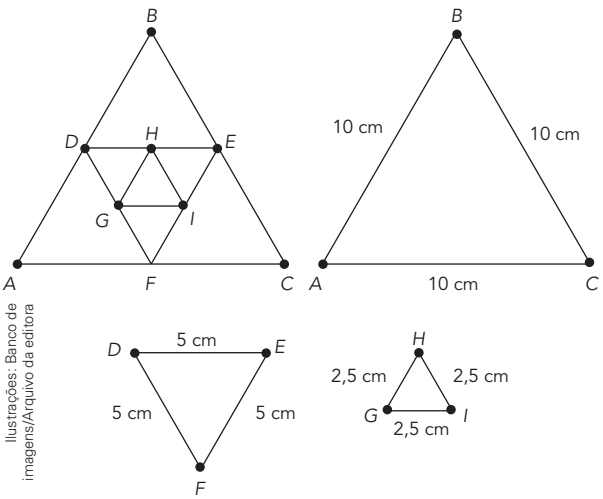
23. $S_{12} = 4 \cdot \dfrac{1 - 5^{12}}{1 - 5} = \cancel{4} \cdot \dfrac{1 - 5^{12}}{\cancel{-4}} = -1 + 5^{12} = 244\,140\,624$

24. $S_{64} = 1 \cdot \dfrac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1 =$
$= 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

25. Exemplo de problema: A cada ano, a quantidade de passageiros de uma companhia aérea cresce 3% em relação ao ano anterior. Se havia 600 000 passageiros em 2016, calcule a quantidade total de passageiros de 2016 a 2023.

30. Representando as medidas de comprimento dos lados dos triângulos por ℓ e as medidas de perímetro por P, temos que:

- A medida de perímetro do 1º triângulo, o $\triangle ABC$, pode ser representada por:
  $P_1 = \ell_1 \cdot 3 = 10 \cdot 3 = 30$
- A medida de perímetro do 2º triângulo, o $\triangle DEF$, pode ser representada por:
  $P_2 = \ell_2 \cdot 3 = 5 \cdot 3 = 15$
- A medida de perímetro do 3º triângulo, o $\triangle GHI$, pode ser representada por:
  $P_3 = \ell_3 \cdot 3 = 2{,}5 \cdot 3 = 7{,}5 = \dfrac{15}{2}$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, devemos calcular a soma dos termos da PG infinita $\left(30, 15, \dfrac{15}{2}, \ldots\right)$, na qual $a_1 = 30$ e $q = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{a_1}{1 - q} = \dfrac{30}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{30}{\frac{1}{2}} = 30 \cdot \dfrac{2}{1} = 30 \cdot 2 = 60$

Portanto, a soma das medidas de perímetro é 60 cm.

Conexões (p. 285)

1. Temos uma PG em que $a_0 = 2$, $a_1 = 6$, $a_2 = 6 \cdot 3 = 18$ e $q = 3$, e a medida de intervalo de tempo transcorrida é n intervalos de 10 minutos.

Considerando que todos os moradores receberam a mensagem, então podemos concluir que a quantidade de pessoas do condomínio que receberam a mensagem, exceto 2, pois Pedro e João que iniciaram a divulgação das *fake news*, é a soma dos termos dessa PG. Logo:

$S = 240 = 6 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} \Rightarrow \frac{240}{6} = \frac{3^n - 1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^n - 1 = 80 \Rightarrow 3^n = 3^4 \Rightarrow n = 4$

Assim: $4 \cdot 10 = 40$.

Portanto, foram 4 intervalos de 10 minutos ou 40 minutos para que todos recebessem as *fake news*.

Enem e vestibulares (p. 291)

1. $a_{21} = 2 + 20 \cdot 2 = 42$; o 21º termo da progressão harmônica será $\frac{1}{42}$. Alternativa **b**.

2. Como $L = 12$ m, temos que a distância mínima será $D_{mín} = 0{,}6 \cdot 12$ m $= 7{,}2$ m e a distância aceitável, $D_{aceitável} = 2{,}9 \cdot 12$ m $= 34{,}8$ m.

Assim, como a medida de distância entre 2 fileiras consecutivas é 1 m, obtemos a progressão aritmética (7,2; 8,2; 9,2; ...; a_n; ...) para representar a distância, em metros, de cada fileira de poltronas em relação à tela.

Buscamos $a_n \leqslant 34{,}8$, de modo que a_n seja o maior inteiro que satisfaz a condição dada.

$a_n \leqslant 34{,}8 \Rightarrow 7{,}2 + (n-1) \cdot 1 \leqslant 34{,}8 \Rightarrow n \leqslant 28{,}6$

Portanto, $n = 28$. Alternativa **c**.

3. Admitindo que r seja o valor de cada acréscimo (razão):

Janeiro: 1500

Fevereiro: $1500 + r$

Março: $1500 + 2r$

Abril: $1500 + 3r$

Maio: $1500 + 4r$

$1500 + 4r = 5000 \Rightarrow 4r = 3500 \Rightarrow r = 875$

$1500 + 3 \cdot 875 = 4125$

Alternativa **c**.

4. Note que a quantidade de discos aumenta em cada etapa, o que pode ser representado pela progressão aritmética (5, 9, 13, 17, ...) de razão $r = 4$ e $n = 200$. Portanto, na etapa 200 teremos:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow a_{200} = 5 + (200 - 1) \cdot 4 \Rightarrow a_{200} = 5 + 199 \cdot 4 \Rightarrow a_{200} = 801$

Alternativa **c**.

5. A quantidade de acessos cresce de acordo com a progressão aritmética (152, 154, 156, 158, 160, ...), em que $a_1 = 152$ e a razão $r = 2$. Para calcular a_{10}, podemos escrever:

$a_{10} = a_5 + 5r \Rightarrow a_{10} = 160 + 5 \cdot 2 = 170$.

Alternativa **b**.

6. A quantidade de palitos em cada etapa cresce segundo a progressão aritmética (3, 5, 7, ..., $2n + 1$, ...) cujo 1º termo $a_1 = 3$, $a_n = 245$, a razão $r = 2$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Com isso, podemos escrever:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow 245 = 3 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow 245 = 3 + 2n - 2 \Rightarrow 245 = 1 + 2n \Rightarrow 2n = 244 \Rightarrow n = 122$

Alternativa **c**.

7. Temos uma PA com $a_1 = 1000$, $r = -20$ e $n = 24$.

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{24} = 1000 + (24 - 1)(-20) = 1000 - 460 = 540$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{24} = \frac{(1000 + 540) \cdot 24}{2} = 1540 \cdot 12 = 18\,480$

Alternativa **a**.

8. A quantidade de bactérias cresce segundo uma PG em que o primeiro termo é N_0 e a razão é 2. Logo, a sequência será: N_0, $2N_0$, $4N_0$, $8N_0$, $16N_0$, $32N_0$. Alternativa **d**.

9. **a)** Se $a_1 = 5$ e $a_3 = 45$, então:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow 45 = 5 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{45}{5} \Rightarrow q = 3$

Agora que determinamos a razão q da progressão geométrica, sabemos que $a_1 = 5$ e que $n = 6$. Podemos escrever:

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_6 = 5 \cdot \frac{1-3^6}{1-3} = 5 \cdot \frac{1-729}{-2} = 5 \cdot \frac{-728}{-2} = 5 \cdot 364 = 1820$

A soma é 1820.

b) A soma dos números inteiros positivos menores do que 112 é dada por $\left(\frac{1+111}{2}\right) \cdot 111 = 6216$.

O número n de múltiplos positivos de 4 menores do que 112 é dado por $108 = 4 + (n-1) \cdot 4 \Rightarrow n = 27$.

Logo, segue que a soma dos múltiplos de 4 menores do que 112 é dada por $\left(\frac{4+108}{2}\right) \cdot 27 = 1512$.

Portanto, $6216 - 1512 = 4704$.

c) Se $S_n = n(2n + 1)$, com $n \geqslant 1$, podemos escrever:

$S_{20} = S_{19} + a_{20} = 20 \cdot (2 \cdot 20 + 1) = 20 \cdot (40 + 1) = 20 \cdot 41 = 820$

$S_{19} = 19 \cdot (2 \cdot 19 + 1) = 19 \cdot (38 + 1) = 19 \cdot 39 = 741$

Com isso, podemos escrever que:

$a_{20} = S_{20} - S_{19} \Rightarrow a_{20} = 820 - 741 \Rightarrow a_{20} = 79$

Referências bibliográficas comentadas

Todos os *sites* foram acessados em 9 set. 2024.

Para a concepção desta coleção, diversos livros, artigos científicos, documentos oficiais do governo, revistas científicas, dissertações e *sites* foram consultados com o intuito de trazer materiais atualizados e que visam dar suporte às aprendizagens previstas para o Ensino Médio. Conheça as principais referências bibliográficas deste Volume.

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem téorico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

Nesse livro, os estudantes são colocados no centro do processo educacional por meio do uso de metodologias ativas que favorecem a aprendizagem. O livro serve de referência para a concepção teórica das metodologias ativas e para as propostas de sua utilização nas práticas pedagógicas adotadas nesta coleção.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

A autora defende, nesse livro, a ideia de que a maneira como um estudante encara os próprios erros pode ser uma poderosa ferramenta no processo de aprendizagem e de ensino. Esses pontos foram levados em consideração durante a elaboração dos textos teóricos sobre avaliação encontrados neste Manual e da proposta didática desta coleção.

BOALER, J. *O que a Matemática tem a ver com isso?* Como professores e pais podem transformar a aprendizagem da Matemática e inspirar sucesso. Porto Alegre: Penso, 2019.

Essa obra apresenta um enfoque interessante sobre a aprendizagem da Matemática. A autora afirma que alguns fatores interferem no melhor entendimento dessa área, como a abordagem baseada em projetos, a avaliação que incentiva a aprendizagem e as estratégias e maneiras fundamentais de trabalhar, o que norteou a elaboração das propostas de avaliação que se encontram neste Manual. Também define o conceito do aprendizado da Matemática e a importância dele.

BORBA, M. de C. *et al*. *Fases das tecnologias digitais em Educação matemática*: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

O livro trata das mudanças ocorridas nas aulas de Matemática em consequência da inserção das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem. Inspirou a elaboração das propostas didáticas que utilizam tecnologias digitais desta coleção.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher: Edusp, 1974.

O autor apresenta e explica aspectos da História da Matemática, considerando a ordem cronológica e o local dos acontecimentos, desde a origem do conceito de número até os desenvolvimentos matemáticos do século XX. Ao longo dos capítulos, são apresentadas definições matemáticas importantes e as pessoas que trabalharam nelas. O livro foi utilizado como referência para dados históricos que se encontram neste Volume.

BRASIL. *Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: Senado Federal, 1996. Disponível em: https://tedit.net/81p5f9.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional é um marco regulatório fundamental que estabelece as diretrizes gerais para a organização e o funcionamento da educação no Brasil. Abrange todos os níveis e modalidades de ensino, desde a Educação Infantil até a Educação Superior, e define princípios como a igualdade de condições para o acesso e a permanência na escola, a liberdade de aprender e ensinar, bem como a valorização dos profissionais da educação brasileira.

BRASIL. *Lei n. 13.005, de 25 de junho de 2014*. Aprova o Plano Nacional de Educação – PNE e dá outras providências. Brasília, DF: MEC, 2014.

O Plano Nacional de Educação (PNE) foi instituído em 2014. O documento define 20 tópicos para garantir o acesso à educação de qualidade no Brasil até 2024, quando devem ser determinadas novas metas para o novo ciclo de anos. As metas e as estratégias específicas do PNE são estabelecidas para todos os níveis e modalidades de ensino no Brasil. Neste Manual, o documento foi utilizado para a elaboração de orientações didáticas.

BRASIL. Lei n. 14.533, de 11 de janeiro de 2023. Institui a Política Nacional de Educação Digital [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, edição extra, ano CLXI, n. 8-B, p. 1, 11 jan. 2023.

Promulgado em 2023, esse documento apresenta a lei que estabelece a criação da Política Nacional de Educação Digital (PNED). Esse documento foi consultado para guiar a elaboração das orientações e das propostas de atividades que envolvem a educação digital nesta coleção.

BRASIL. *Lei n. 14.945, de 31 de julho de 2024*. Altera a Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a fim de definir diretrizes para o Ensino Médio, [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, p. 5, 1º ago. 2024.

Essa lei foi promulgada pelo presidente da República e, até o fechamento desta coleção, era a versão mais atualizada da legislação para o Novo Ensino Médio. O documento foi usado, principalmente, como guia na concepção desta coleção e nas orientações didáticas encontradas neste Manual.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018a. Disponível em: https://tedit.net/pot336.

O texto da BNCC norteou a elaboração dos 3 Volumes desta coleção, seja nos textos destinados aos professores, seja nos propostos aos estudantes, assim como na proposta didática de distribuição dos conteúdos. As páginas introdutórias da BNCC e as dedicadas à etapa do Ensino Médio orientaram especificamente a vinculação entre os tópicos trabalhados nesta coleção em conformidade com as diretrizes desse documento normativo.

BRASIL. Ministério da Educação. *Computação*: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://tedit.net/93oura.

Em 2022, a BNCC foi complementada com diretrizes específicas que incluem o ensino de Computação no currículo escolar brasileiro. O documento, que visa promover o desenvolvimento de habilidades dos estudantes associadas ao pensamento computacional e à cultura digital, foi utilizado para a elaboração de algumas das seções e atividades desta coleção, bem como para as orientações didáticas deste Manual.

BRASIL. Ministério da Educação. *Projeto de vida*: *ser ou existir*. Caderno de práticas. Disponível em: https://tedit.net/nhft2i.

Nesse Caderno de práticas, são apresentadas algumas reflexões sobre o papel da escola no projeto de vida dos estudantes. O material foi utilizado como referência para a elaboração de atividades que envolvem projetos e as respectivas orientações didáticas.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília, DF: MEC, 2013. Disponível em: https://tedit.net/dtxfyz.

As Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCNs) são um conjunto de definições de princípios, fundamentos e procedimentos da Educação Básica elaborado com o objetivo de orientar e de assistir escolas e redes no desenvolvimento do projeto pedagógico. Essas diretrizes também fornecem subsídios para a elaboração de materiais didáticos e, por isso, foram consultadas e consideradas na elaboração desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. *Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva*. Brasília, DF: MEC, 2008. Disponível em: https://tedit.net/evvdwt.

Essa política, em conformidade com o documento disponível no portal do Ministério da Educação (MEC), estabelece as diretrizes fundamentais para a inclusão de estudantes com necessidades educacionais especiais no sistema regular de ensino. Também enfatiza a importância de garantir o acesso, a participação e a aprendizagem de todos os estudantes, independentemente das condições físicas, sensoriais,

intelectuais ou múltiplas. O documento foi utilizado na elaboração das orientações que se encontram neste Manual e nas propostas de adaptação de atividades desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019a. Disponível em: https://tedit.net/gsxbfi.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019b. Disponível em: https://tedit.net/iu2eqx.

De acordo com a BNCC, os Temas Contemporâneos Transversais buscam contextualizar o que é ensinado por meio de temas que interessam aos estudantes, além de serem relevantes para o desenvolvimento deles como cidadãos. Por isso, devem ser incorporados aos currículos e às propostas pedagógicas escolares, de preferência de maneira transversal e integradora. Após a homologação da BNCC, visando esclarecer a inserção desses temas, esses 2 documentos foram elaborados pelo Ministério da Educação e passaram a servir de referencial para a concepção dos textos teóricos deste Manual, bem como de diversas propostas didáticas desta coleção.

BRASIL. Ministério dos Direitos Humanos. *Plano Nacional de Educação em Direitos Humanos*. Brasília, DF: Comitê Nacional de Educação em Direitos Humanos, 2018b. Disponível em: https://tedit.net/xr6rff.

Nessa publicação oficial, são apresentadas reflexões sobre a educação pautada em direitos humanos. Elas foram consideradas na elaboração das orientações didáticas e nas propostas de atividades desta coleção.

CARRAHER, T. N. (org.). *Aprender pensando*: contribuição da psicologia cognitiva para a educação. 19. ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

Essa obra apresenta algumas ideias sobre as contribuições dos estudos da psicologia cognitiva para a educação, oferecendo uma análise sobre como os processos cognitivos influenciam a aprendizagem e o desenvolvimento dos estudantes. Foi considerada na elaboração das propostas didáticas desta coleção.

CARVALHO, D. L. de. *Metodologia do ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 2011.

Esse livro contribui para a reflexão sobre estratégias que favorecem o ensino e a aprendizagem de Matemática, pois aborda diversas metodologias e estratégias de ensino que visam facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos pelos estudantes, promovendo um aprendizado significativo e contextualizado. Em razão dessas abordagens, serviu de referência para a concepção desta coleção.

CHAUI, M. *Iniciação à Filosofia*. Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. único.

Nesse livro didático, a autora apresenta conceitos e reflexões da Filosofia, incluindo os tipos de raciocínio (indução, dedução e abdução). Os conceitos explicados por ela foram utilizados como fio condutor das atividades que envolvem raciocínio lógico matemático nesta coleção.

COLL, C. Atenção à diversidade e qualidade do ensino. *Revista Educação Especial*, Santa Maria, n. 22, 2003. Disponível em: https://tedit.net/c2qv0d.

Nesse artigo, o autor compartilha reflexões sobre as implicações do olhar inclusivo no processo de ensino e aprendizagem e considera a diversidade inerente à condição humana. Essa abordagem norteou a elaboração das orientações didáticas deste Manual.

COSTA, A. C. G. da. *Protagonismo juvenil*: adolescência, educação e participação democrática. Salvador: Fundação Odebrecht, 2000.

A educação é abordada, nessa obra, considerando o jovem o núcleo central do processo educativo, o que condiz com a concepção pedagógica adotada nesta coleção. Para explanar essa realidade, o livro apresenta a descrição de projetos desenvolvidos na prática envolvendo experiências de protagonismo juvenil. Essas propostas foram consideradas na elaboração de algumas seções da coleção e em sugestões deste Manual.

CULTURA de paz: da reflexão à ação. Balanço da Década Internacional da Promoção da Cultura de Paz e Não Violência em Benefício das Crianças do Mundo. Brasília, DF: Unesco; São Paulo: Associação Palas Athena, 2010. Disponível em: https://tedit.net/l01hml.

Essa publicação da Unesco, que trata da cultura de paz, foi consultada para a elaboração deste Manual. A leitura desse texto contribui para a compreensão desse assunto, que compõe também o cotidiano escolar, levando em conta que os estudantes, que são o futuro de nossa sociedade, precisam internalizar a cultura da legitimidade e do respeito entre todos os cidadãos como modo de ser e viver.

D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

A leitura dessa obra favorece o exame crítico das tendências de educação matemática. O autor argumenta que a educação matemática deve ir além das fórmulas e algoritmos, incorporando aspectos históricos, filosóficos e culturais para promover uma compreensão mais profunda e significativa da Matemática. Essa obra forneceu subsídios para a construção das concepções e propostas desta coleção.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 1).

O autor apresenta uma análise da relação entre Matemática e Etnomatemática, ressaltando a importância da Etnomatemática no ensino ocidental, além de apresentar resultados de pesquisas do mundo todo na área. O livro foi utilizado como referencial teórico para a concepção desta coleção.

DEMO, P. *Professor/Conhecimento*. Brasília, DF: Unb, 2001. p. 1-12. Disponível em: https://tedit.net/vlho7e.

Nesse artigo, o autor apresenta reflexões sobre as características necessárias ao professor no mundo contemporâneo, as quais foram consideradas na elaboração das orientações didáticas desta coleção.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*. 2. ed. Campinas: Papirus, 2003.

Nesse artigo, o autor compartilha parte dos resultados das pesquisas que realizou sobre diferentes registros de representações semióticas na aprendizagem de Matemática. Esses resultados foram utilizados na elaboração de propostas didáticas para este Manual.

ELLEMBERG, J. *O poder do pensamento matemático*: a ciência de como não estar errado. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

O autor mostra, nesse livro, a necessidade de haver maior embasamento no pensamento matemático, considerando que existem casos em que a intuição pode falhar. De maneira motivadora, incentiva essa busca por mais conhecimento e leva o leitor a desenvolver o olhar crítico por meio de exemplos reais e instigantes, o que inspirou propostas didáticas utilizadas nesta coleção.

FAZENDA, I. *O que é interdisciplinaridade*. São Paulo: Cortez, 2008.

Esse livro explora a interdisciplinaridade não apenas como integração de disciplinas, mas também sob a perspectiva da busca de novos conhecimentos. A autora debate como a interdisciplinaridade pode enriquecer a prática pedagógica, facilitando a construção de conhecimentos mais significativos e contextualizados, fazendo um paralelo entre como isso pode se refletir na formação e na prática pedagógica. As atividades e seções interdisciplinares desta coleção foram propostas usando esse material como embasamento bibliográfico.

FERNANDES, D. *Avaliar para aprender*: fundamentos, práticas e políticas. São Paulo: Unesp, 2009.

Ao apresentar um panorama completo sobre o que e como avaliar, o autor afirma que a avaliação deve ir além da simples mensuração de resultados, sendo um processo contínuo e formativo que contribui para o desenvolvimento integral dos estudantes. Esses estudos foram considerados na elaboração de atividades e na proposição de avaliações nesta coleção.

FRAENKEL, Renato. Logaritmos: um curso alternativo. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: SBM, v. 4, 1984.

O artigo apresenta a utilidade dos logaritmos em alguns problemas práticos, com aplicações que podem ser propostas em sala de aula. Essas aplicações serviram de inspiração para propostas pedagógicas desenvolvidas na Unidade 4 deste Volume.

FREITAS, M. C. de. Educação inclusiva: diferenças entre acesso, acessibilidade e inclusão. *Cadernos de Pesquisa (Fundação Carlos Chagas)*, São Paulo, v. 53, e10084, 3 jul. 2023. Disponível em: https://tedit.net/8fq46o.

O autor explora as nuances e distinções fundamentais entre os conceitos de acesso, acessibilidade e inclusão no contexto educacional, o que foi considerado nas orientações didáticas deste Manual. Argumenta, ainda, que, embora frequentemente sejam usados de modo intercambiável, esses termos têm significados distintos, que impactam diretamente a eficácia das políticas e práticas educacionais inclusivas.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WÁGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2.

O primeiro capítulo do livro é destinado a progressões aritméticas e progressões geométricas. A obra traz, além de uma teoria concisa, diversos

exemplos e atividades contextualizados envolvendo essas progressões, os quais serviram de estudo para a elaboração do capítulo 3 da Unidade 5 deste Volume.

LIMA, E. L. *Matemática e ensino*. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).

O autor apresenta uma visão sobre escolas, professores e estudantes e sugere uma melhor abordagem por parte dos professores sobre os temas matemáticos, o que foi considerado na elaboração das orientações didáticas desta coleção. Ressalta, ainda, que qualquer estudante nas séries iniciais é capaz de aprender Matemática.

LOPES, L. *Manual de funções exponenciais e logarítmicas*. São Paulo: Interciência, 1999.

Traz uma ampla abordagem teórica das funções exponenciais e das funções logarítmicas, apresentando fórmulas e definições desses tipos de função. As concepções teóricas usadas na elaboração deste Volume também foram consultadas nesta obra.

LOPES, L. *Manual de progressões*. São Paulo: Interciência, 1998.

O autor expõe resultados teóricos importantes das progressões acompanhados de exercícios variados, que serviram de inspiração para as propostas didáticas escolhidas para o capítulo 3 da Unidade 5 deste Volume.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*. São Paulo: Cortez, 2002.

Nesse livro, estão compilados estudos sobre a temática de avaliação. A obra alicerçou e corroborou os comentários sobre possíveis procedimentos propostos neste Manual de como avaliar os estudantes favorecendo a educação integral, e não apenas a mensuração quantitativa de notas.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem na escola:* reelaborando conceitos e criando a prática. 2. ed. Salvador: Malabares Comunicações e Eventos, 2005.

O autor propõe uma reavaliação dos métodos e objetivos da avaliação, argumentando que ela deve ser um processo contínuo e formativo, voltado para o desenvolvimento integral dos estudantes, em vez de apenas um mecanismo de classificação e exclusão. A abordagem descrita por esse autor foi considerada na elaboração de atividades e propostas de avaliação nesta coleção.

MAIA, D. *Função quadrática*: um estudo didático de uma abordagem computacional. 2007. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: https://tedit.net/fezya3.

A dissertação apresenta uma abordagem para o trabalho com as funções quadráticas utilizando tecnologias digitais com foco na conversão entre representações algébricas e representações geométrica e gráfica e na análise da relação entre os coeficientes dessas funções e as características dos gráficos delas. Esse trabalho serviu de referência para aspectos didáticos das seções *Tecnologias digitais* deste Volume.

MATTOS, J. R. L.; POLEGATTI, G. A. Um encontro etnomatemático na educação escolar indígena: a função das flautas dos Rikbaktsa. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-12.

Nesse artigo, os autores fazem uma profunda investigação de enfoque etnomatemático nas práticas sociais do povo Rikbaktsa (grupo indígena de Mato Grosso) e como elas se relacionam com os processos de ensino e aprendizagem de funções afins. O artigo foi utilizado como referência na elaboração do texto de uma das seções *Além da sala de aula* deste Volume e, também, como alicerce teórico e metodológico na elaboração das atividades propostas na seção e nas sugestões de desenvolvimento referentes a ela.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 17, n. 33, jan./abr. 2006. Disponível em: https://tedit.net/ddvf63.

Esse artigo apresenta considerações sobre a avaliação especificamente em Matemática. As autoras discutem os desafios e as limitações das abordagens tradicionais de avaliação, que muitas vezes se concentram apenas na memorização e na aplicação mecânica de fórmulas. Essa concepção pedagógica faz parte dos pressupostos desta coleção.

PERRENOUD, P. *A avaliação*: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 2001.

O autor afirma que a avaliação tradicionalmente se concentra na certificação, ou seja, na validação de conhecimentos e habilidades adquiridas, muitas vezes resultando em práticas que priorizam a memorização e a padronização. Em contrapartida, ele defende uma lógica de aprendizagem, na qual a avaliação é vista como um processo contínuo e formativo, destinado a apoiar o desenvolvimento dos estudantes e a promover uma compreensão mais profunda e significativa dos conteúdos. Esse livro foi utilizado na concepção das propostas avaliativas desta coleção.

PERRENOUD, P. *As competências para ensinar no século XXI*: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Tradução: Cláudia Schilling e Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002.

A educação por competências com base no desenvolvimento de habilidades e valores não é uma novidade no âmbito educacional, e sim uma perspectiva de ensino já caracterizada como adequada ao século XXI. Esse livro foi utilizado para a elaboração tanto dos textos deste Manual como para embasar a concepção pedagógica desta coleção de ensino por competências.

PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

A metodologia de resolução de problemas descrita nesse livro inspirou o modo de encaminhar o desenvolvimento dos assuntos abordados nesta coleção, bem como as etapas e os passos propostos na resolução de problemas. O livro fornece ferramentas essenciais para professores e estudantes.

PÓLYA, G. *Mathematical discovery on understanding, learning and teaching problem solving*. New York: John Wiley & Sons, 2009. 2 v.

Destinado a estudantes e professores, esse livro indica estratégias, descritas também neste Manual, para a resolução de problemas, além de reforçar a importância da compreensão e do aprendizado durante esse processo. Para alcançar os objetivos, o autor ressalta que é essencial a observação dos dados e das condições, assim como persistência e paciência.

ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Em ordem cronológica, a autora apresenta fatos da história da Matemática sob um olhar crítico, analisando mitos e lendas perpetuados por muito tempo. Inicia com a abordagem de conceitos matemáticos desenvolvidos na Mesopotâmia, passando por Egito, Grécia, França e Alemanha. É o primeiro livro brasileiro a retratar a História da Matemática, sendo utilizado, por exemplo, como referência para o desenvolvimento da fórmula usada para calcular as raízes de uma equação do 2º grau na Unidade 2 deste Volume.

SKOVSMOSE, O. *Educação crítica*: incerteza, matemática, responsabilidade. Tradução: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).

Nesse livro, é descrito, com base em ideias filosóficas e sociológicas, um cenário de questionamentos (de ordem não apenas teórica, como também prática) que envolvem fundamentos da Educação matemática crítica relacionados à ação pedagógica de professores. O livro serviu de referência bibliográfica para a elaboração do projeto didático desta coleção.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, Maria Ignez. *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2000.

As autoras compartilham pesquisas, reflexões e sugestões relacionando a leitura, a escrita e a resolução de problemas, teoria que é o fio condutor desta coleção.

SOUSA, R. M. *O uso do GeoGebra no ensino da função quadrática*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2014.

Esse trabalho, norteado por uma metodologia de estudo de caso, é um estudo e pesquisa sobre o ensino das funções quadráticas com estudantes do 1º ano do Ensino Médio que se utiliza de um *software* de Geometria dinâmica. Além de servir de inspiração para o trabalho nas seções *Tecnologias digitais* deste Volume, também foi usado como referencial teórico para a metodologia na qual se baseia essa seção e para as sugestões de trabalho com ela neste Manual.

WING, J. M. Computational thinking. Tradução: Cleverson Sebastião dos Anjos. *Communications of the ACM*, v. 49, n. 3, p. 33-35, 2006.

Esse artigo apresenta a tradução do trabalho "Computational Thinking", da pesquisadora Jeannette Wing. O texto discorre a respeito do percurso de ideias relacionadas aos estudos dessa pesquisadora sobre o pensamento computacional. Foi referência bibliográfica para a elaboração deste Manual e das propostas didáticas relacionadas ao pensamento computacional nesta coleção.