Luiz Roberto Dante
Fernando Viana

VOLUME II
2º ANO

Ensino Médio
Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

PNLD EM 2026 – 2029 – CATEGORIA 1 – MATERIAL DE DIVULGAÇÃO

CÓDIGO DA COLEÇÃO:
0111P26010120814

DO SEU JEITO

Matemática



MANUAL DO PROFESSOR

editora ática

MANUAL DO PROFESSOR



Ensino Médio
Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

DO SEU JEITO

Matemática

Luiz Roberto Dante

Livre-docente em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp-SP), *campus* Rio Claro.

Doutor em Psicologia da Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).

Licenciado em Matemática pela Unesp-SP, *campus* Rio Claro.

Pesquisador em Ensino e Aprendizagem da Matemática pela Unesp-SP, *campus* Rio Claro.

Atuou como professor do Ensino Fundamental e do Ensino Médio na rede pública de ensino.

Autor de materiais didáticos e paradidáticos de Matemática para estudantes e professores da Educação Básica.

Fernando Viana

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB).

Licenciado e mestre em Matemática pela UFPB.

Professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB).

Professor do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e de cursos pré-vestibulares há mais de 20 anos.

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

1ª edição, São Paulo, 2024.

editora ática

editora ática

Direção executiva de negócio e editorial: Flavia Alves Bravin

Direção de negócio: Volnei Korzenieski

Direção editorial: Lidiane Vivaldini Olo

Gerência de conteúdo: Alice Ribeiro Silvestre

Edição: Pamela Hellebrekers Seravalli (ger.), Marina Muniz Campelo, Juliana Aparecida Bomjardim Soares, Marília Kerr (assist.), Julia Lima Souza, Daniela Gratner Schuck, João Paulo Caixeta, Saulo Augusto Nascimbem e Julia Correa Bueno (assist.)

Produção editorial: Renata Galdino

Revisão: Letícia Bento Pieroni (ger.), Carlos Eduardo Sigrist (coord.), Anderson Félix (líder de projeto), Aline Vieira, Ana Paula C. Malfa, Bruno Freitas, Daniela Lima, Danielle Modesto, Diego Carbone, Gabriela M. Andrade, Helena Settecerze, Heloísa Schiavo, Kátia Godoi, Luciana B. Azevedo, Luis Boa Nova, Luiz Gustavo Bazana, Luiza Thomaz, Malvina Tomaz, Marilia Lima, Paula de Jesus, Raquel Taveira, Ricardo Miyake e Vanessa P. Santos

Arte: Fernanda Costa da Silva (ger.), Erika Tiemi Yamauchi e Kleber de Messas (coord.), Thainá Fidelis Antenucci Cezar (ed. arte) e Estúdio Diagrami (diagramação)

Digital: Daniela Teves Nardi (ger.), Rafael Pereira de Paula Freitas (coord. produção multimídia), Daniella dos Santos Di Nubila (coord. produção digital) e Rogério Fábio Alves (coord. conteúdo digital e publicação)

Ilustrações: Bruna Ishihara, Dam d'Souza, Ericson Guilherme Luciano, Hector Gómez, Luis Moura, Paulo Manzi, R2 Editorial e WYM Design

Cartografia: Fernanda Costa da Silva (ger.), Eric Fuzii (coord.) e Alexandre Bueno

Design: Fernanda Costa da Silva (ger.), Erik Taketa (coord.), Luis Vassallo (proj. gráfico) e Talita Guedes (capas)

Licenciamentos: Flávio Matuguma

Licenciamento e iconografia: Roberta Bento (ger.), Iron Mantovanello (coord.), Alice Matoso, Claudia Balista, Douglas Cometti, Mariana Valeiro, Paula Squaiella, Roberta Freire, Thaisi Albarracin Lima (pesquisa e licenciamento), Fernanda Crevin (tratamento de imagens), Beatriz Alves dos Santos, Daniel Scucuglia, Ligia Dona, Liliane Rodrigues, Raísa Maris Reina, Sabrina Regina de Marinho e Sueli Ferreira (analista de licenciamento)

Foto de capa: ViDi Studio/stock.adobe.com, sibillin/Shutterstock e Kaspars Grinvalds/Shutterstock

Pré-impressão: Michel Shimamoto (coord.), Alessandro de Oliveira Queiroz, Camilla Félix Cianelli Chaves, Debora Fernandes, Diego Rodrigues de Lima, Fernanda de Oliveira, Lucas Meireles dos Santos e Valmir da Silva Santos

Todos os direitos reservados por Editora Ática S.A.

Alameda Santos, 960, 4º andar, setor 1
Cerqueira César – São Paulo – SP – CEP 01418-002
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
atendimento@aticascipione.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Dante, Luiz Roberto
Do seu jeito : Matemática : área de Matemática e suas Tecnologias : volume 2 : Ensino médio / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2024.

ISBN 978-65-2670-272-7 - aluno
ISBN 978-65-2670-273-4 - professor

1. Matemática (Ensino médio) I. Viana, Fernando

CDD 510.7
24-4415

Angélica Ilacqua - Bibliotecária - CRB-8/7057

2024
Código da obra CL 721783
CAE 876533 (AL) / 876534 (PR)
1ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Envidamos nossos melhores esforços para localizar e indicar adequadamente os créditos dos textos e imagens presentes nesta obra didática. Colocamo-nos à disposição para avaliação de eventuais irregularidades ou omissões de créditos e consequente correção nas próximas edições. As imagens e os textos constantes nesta obra que, eventualmente, reproduzam algum tipo de material de publicidade ou propaganda, ou a ele façam alusão, são aplicados para fins didáticos e não representam recomendação ou incentivo ao consumo.

Impressão e acabamento

Apresentação

Querido estudante,

Ao elaborar esta coleção de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, consideramos o que há de mais moderno no processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento.

Nosso objetivo com a coleção é proporcionar a você condições necessárias para compreender e aplicar as principais ideias e ferramentas da Matemática no seu nível de ensino, atribuindo-lhes significado e possibilitando a resolução de problemas do mundo real. Além disso, a coleção foi concebida de modo a dar espaço para que você escolha os próprios meios de aprender e de ser protagonista do seu processo de aprendizagem, desenvolvendo a educação de maneira integral.

Todos os conceitos essenciais, próprios do Ensino Médio, foram explorados ao longo dos Volumes de maneira simples, intuitiva e compreensível para sua aprendizagem. As resoluções mecanizadas e o formalismo excessivo foram evitados; mantivemos, porém, o rigor necessário, coerente com o nível para o qual a coleção é proposta.

Na abertura de cada Unidade, apresentamos uma imagem relacionada aos conteúdos que você vai estudar, com o objetivo de lhe dar uma percepção de alguns dos temas que estarão presentes. Esperamos que isso instigue sua curiosidade!

Em seguida, em cada capítulo, há situações contextualizadas e, muitas vezes, integradas, que expressam os conteúdos e temas estudados. Nelas você pode analisar e investigar a utilização da Matemática de maneira simples, espontânea e eficiente, além de refletir sobre a presença e a importância dela no cotidiano.

No decorrer de cada capítulo, apresentamos textos, atividades e problemas significativos, que abordam fatos históricos e contextualizam a construção dos conteúdos estudados, bem como expõem e promovem a resolução de problemas relacionados a situações reais ou a outras áreas do conhecimento, explorando as tecnologias digitais – tão presentes em nossa vida – para proporcionar o desenvolvimento do pensamento computacional.

Desse modo, esta coleção de Matemática engloba todas as competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como as competências específicas e as habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias previstas para o Ensino Médio.

Sugestões e críticas para o aprimoramento deste trabalho serão sempre consideradas. Seja muito bem-vindo ao estudo da Matemática e suas Tecnologias que esta coleção lhe proporciona!

Forte abraço,

Os autores

Conheça seu livro

Este Volume está organizado em Unidades e capítulos. Nele você encontrará textos, boxes e seções. Conheça a seguir a estrutura deste Volume.

UNIDADE

Na **abertura** de cada Unidade, apresentamos uma imagem relacionada a um ou mais conteúdos ou temas abordados no decorrer dela. O texto e as questões apresentados propõem reflexões sobre os assuntos da Unidade e buscam introduzir, direta ou indiretamente, os conteúdos que serão estudados.



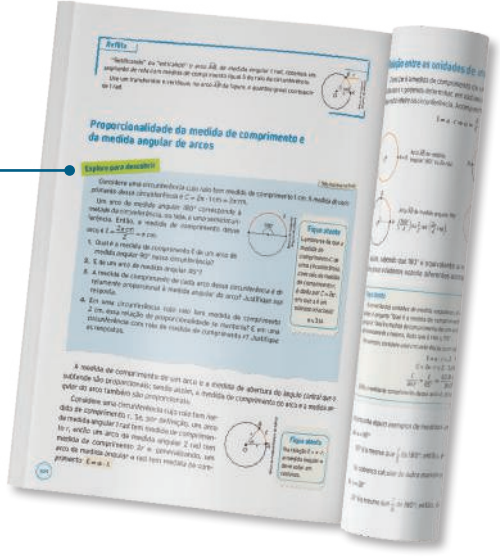


CAPÍTULO

Na **abertura** de cada capítulo, você encontra algumas **situações-problema** e questões relacionadas a elas que permitem investigações e explorações, preparando-o para os conteúdos do capítulo.

EXPLORE PARA DESCOBRIR

Atividades de exploração, experimentação, verificação e sistematização dos conteúdos apresentados no capítulo são indicadas nesse boxe, possibilitando que você formule ideias e crie estratégias de compreensão e de resolução de problemas.



FIQUE ATENTO

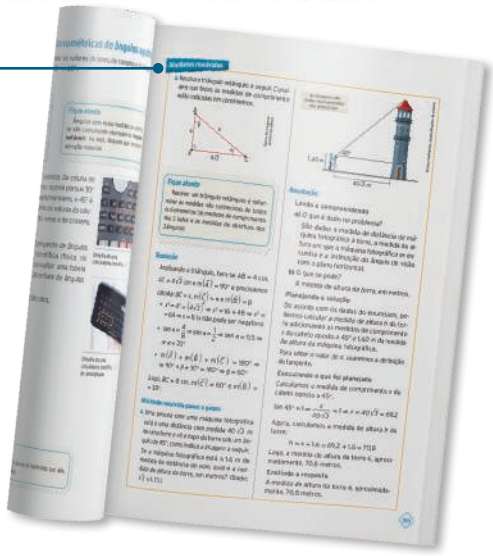
Boxe em que retomamos definições ou nomenclaturas, destacamos pontos importantes do conteúdo em estudo e apresentamos dicas que podem auxiliá-lo no seu estudo.

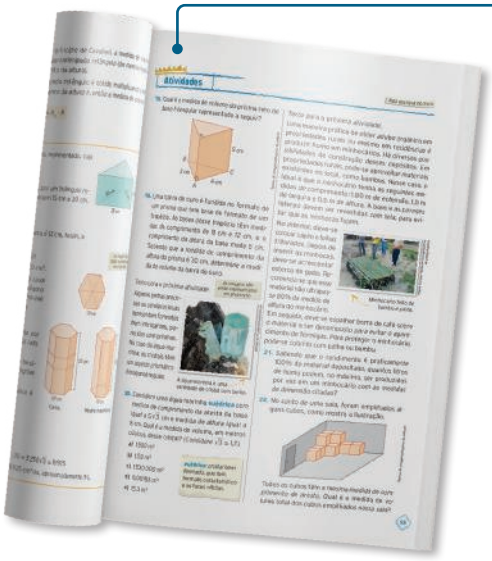
REFLITA

Questionamentos e reflexões sobre o conteúdo apresentado são propostos nesse boxe.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

Acompanhe a resolução detalhada de atividades e problemas, bem como exemplificações de estratégias de resolução e o passo a passo da resolução de um problema.



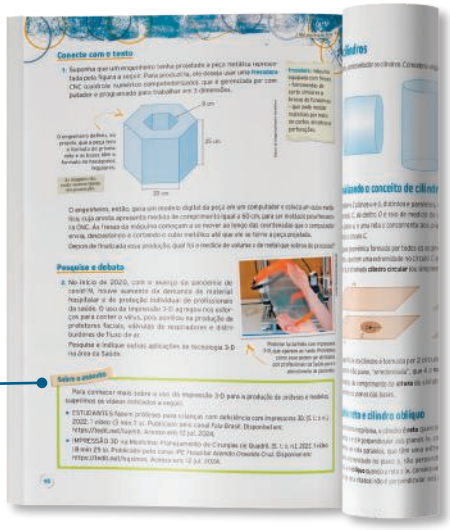


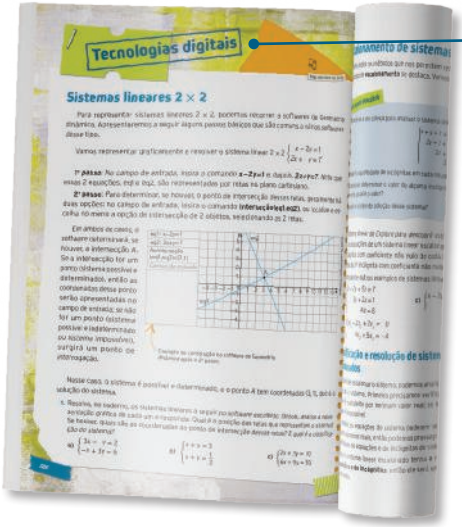
ATIVIDADES

Aqui você encontra atividades e problemas envolvendo contextos cotidianos, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, para você aplicar e aprofundar os conteúdos estudados. Há também atividades que visam à elaboração de perguntas e problemas.

SOBRE O ASSUNTO

Indicamos nesse boxe informações e curiosidades relacionadas aos conteúdos estudados, bem como sugestões de textos, vídeos, simuladores, museus, visitas, entre outros, para complementar e aprofundar seus estudos ou mesmo realizar pesquisas.





TECNOLOGIAS DIGITAIS

Nessa seção, propomos a utilização de diversas tecnologias, como calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* livres. Elas são muito úteis para fazer explorações e simulações de figuras geométricas, calcular medidas estatísticas, construir e manipular representações gráficas, organizar dados em planilhas, entre outras muitas utilidades.



CONEXÕES

Temas relevantes e atuais que relacionam diferentes áreas do conhecimento são explorados na seção. Apresentamos uma seleção de atividades que oferecem oportunidades de interpretação de textos e imagens, podendo incluir aplicação, pesquisa, ampliação e debate do tema da seção.



ALÉM DA SALA DE AULA

Nessa seção, propomos diferentes projetos interdisciplinares a serem compartilhados com a comunidade escolar. Cada projeto oferece mais de uma possibilidade de produto final, permitindo que você tenha autonomia para escolher a proposta mais relevante de acordo com sua realidade e seus objetivos.



ENEM E VESTIBULARES

Aqui propomos questões recentes e diversificadas do Enem e de vestibulares de todas as regiões do Brasil relacionadas aos conteúdos estudados no capítulo.



CONTEÚDOS E APRENDIZAGENS

Nessa seção, os principais conceitos estudados na Unidade são reapresentados de modo visual, atrativo e organizado. Em seguida, são propostas perguntas para que você reflita sobre o próprio aprendizado.

ÍCONES

Os ícones que acompanham algumas atividades e seções indicam a oportunidade de você explorar questões de Educação financeira, utilizar tecnologias digitais durante seu aprendizado, realizar as propostas coletivamente, em dupla ou em grupo, além de expor oralmente suas respostas e opiniões.

Educação financeira | **Tecnologias digitais** | **Dupla** | **Grupo** | **Oral**

Sumário

O trabalho com a BNCC 11

Unidade 1: Regiões planas e área 12

Capítulo 1: Medida de área de regiões planas 14
Explorando a ideia de área 16
Medida de área de polígonos 16
- Região limitada por um quadrado 16
- Região limitada por um retângulo 18
- Região limitada por um paralelogramo 19
- Região limitada por um triângulo 20
- Região limitada por um trapézio 24
- Região limitada por um losango 24
- Região limitada por um hexágono regular 25
- Região limitada por um polígono regular 26

Conexões: Produtividade do roçado 30
Região determinada por um círculo 32
- Setor circular 33
- Coroa circular 34

Regiões poligonais semelhantes e razão entre as medidas de área 36
Cálculo aproximado de medidas de área 39

Tecnologias digitais: Cálculo aproximado da medida de área de regiões poligonais 40
Conexões: A Geometria por trás da arte 44

Capítulo 2: Ladrilhamento 46
A ideia de ladrilhamento 47

Tecnologias digitais: Ladrilhamento 48
Ladrilhamentos regulares e ladrilhamentos semirregulares 50

Além da sala de aula: Marjorie Rice 55
Enem e vestibulares 57
Conteúdos e aprendizagens 59

Unidade 2: Geometria espacial 60

Capítulo 1: Introdução à Geometria espacial 62
Geometria espacial de posição 63
- Posições relativas de ponto e reta e de ponto e plano no espaço 63
- Posições relativas de pontos no espaço 64
- Posições relativas de 2 retas distintas no espaço 64
- Determinação de um plano 66
- Posições relativas de 2 planos distintos no espaço 66
- Posições relativas de 1 reta e 1 plano 67
- Perpendicularismo no espaço 68
- Projeção ortogonal de 1 ponto sobre 1 plano 71
- Distâncias 71

Poliedro 74
- Poliedro convexo e poliedro não convexo 75
- Relação de Euler 76
- Poliedro regular 78

Capítulo 2: Prisma e cilindro 81
- Os prismas 82
- Formalizando o conceito de prisma 82
- Prisma reto e prisma oblíquo 83
- Prisma regular 83
- Caso particular de prisma: o paralelepípedo 83
- Nomenclatura de prisma 84

Medida de área da superfície de um prisma 85
Medida de volume de um prisma 88
- Cubo unitário 88
- Medida de volume de um paralelepípedo retângulo 89
- Princípio de Cavalieri 92
- Medida de volume de um prisma qualquer 93

Conexões: Tecnologias 3-D 97
Os cilindros 99
- Formalizando o conceito de cilindro 99
- Cilindro reto e cilindro oblíquo 99
- Secções de um cilindro 101

Medida de área da superfície de um cilindro reto 102
Medida de volume de um cilindro 104

Tecnologias digitais: Medida de área e de volume de prismas e cilindros 107
Além da sala de aula: Cisterna 112

Capítulo 3: Pirâmide e cone ... 114
As pirâmides ... 115
Formalizando o conceito de pirâmide ... 115
Pirâmide reta e pirâmide oblíqua ... 116
Pirâmide regular ... 116
Caso particular de pirâmide regular: o tetraedro regular ... 116
Nomenclatura de pirâmide ... 117
Medida de área da superfície de uma pirâmide ... 118
Medida de volume de uma pirâmide ... 118
Cálculo da medida de volume de uma pirâmide triangular ... 120
Cálculo da medida de volume de uma pirâmide qualquer ... 121
Os cones ... 124
Formalizando o conceito de cone ... 124
Cone reto e cone oblíquo ... 124
Secções do cone reto ... 126
Medida de área da superfície de um cone reto ... 127
Medida de volume de um cone ... 130
Tecnologias digitais: Medida de área e de volume de pirâmides e cones ... 133

Capítulo 4: Esfera e projeções cartográficas ... 135
As esferas ... 137
Um pouco da história da medida de volume de uma esfera ... 137
Medida de volume de uma esfera ... 138
Explorando o cálculo da medida de área da superfície da esfera ... 140
Formalizando o cálculo da medida de área de uma superfície esférica ... 141
Sistema de coordenadas geográficas ... 145
Projeções cartográficas ... 146
Projeção cilíndrica ... 146
Projeção cônica ... 146
Projeção azimutal ... 147
Projeção de Robinson ... 147
Tecnologias digitais: Investigando deformações em uma projeção cartográfica ... 148
Enem e vestibulares ... 153
Conteúdos e aprendizagens ... 155

Unidade 3: Trigonometria ... 156

Capítulo 1: Semelhança de polígonos ... 158
Explorando o teorema de Tales ... 159
Feixe de retas paralelas ... 159
Formalizando o teorema de Tales ... 160
Figuras semelhantes ... 161
Polígonos semelhantes ... 162
Explorando o conceito de semelhança de triângulos ... 163
Formalizando o conceito de semelhança de triângulos ... 164
Conexões: Artesanato e semelhança de polígonos ... 168

Capítulo 2: Relações trigonométricas ... 170
Formalizando as relações métricas no triângulo retângulo ... 171
Explorando as razões trigonométricas no triângulo retângulo ... 176
Formalizando algumas razões trigonométricas no triângulo retângulo ... 177
Definição de seno, cosseno e tangente usando semelhança de triângulos ... 177
Relações entre seno, cosseno e tangente ... 179
Cálculo do valor das razões trigonométricas de ângulos agudos ... 182
Conexões: Ângulo reto em construções quilombolas ... 186
Formalizando a definição de seno e cosseno de ângulos obtusos ... 188
Lei dos senos ... 189
Lei dos cossenos ... 195

Capítulo 3: Conceitos trigonométricos básicos na circunferência ... 201
Arcos e ângulos em uma circunferência ... 202
Unidades para medir ângulos e arcos ... 203
Proporcionalidade da medida de comprimento e da medida angular de arcos ... 204
Relação entre as unidades de medida angular de arcos ... 205

Circunferência orientada e circunferência trigonométrica 208
Circunferência orientada 208
Circunferência trigonométrica 209
Arcos côngruos (ou arcos congruentes) 211
Explorando a ideia de seno e cosseno de um número real 215
Formalizando a definição de seno e cosseno de um número real 217
Redução ao 1º quadrante 218
Além da sala de aula: Eratóstenes e a medida de comprimento da circunferência da Terra 221
Capítulo 4: Funções trigonométricas 224
A função seno 225
Gráfico da função seno 225
Periodicidade da função seno 227
Sinal dos valores da função seno 227
Algumas características da função seno 228
A função cosseno 228
Gráfico da função cosseno 229
Sinal dos valores da função cosseno 230
Algumas características da função cosseno 230
As senoides e os fenômenos periódicos 231
Tecnologias digitais: Construção de senoides 234
Além da sala de aula: O que as mudanças climáticas podem causar 243
Enem e vestibulares 245
Conteúdos e aprendizagens 247

Unidade 4: Matrizes, determinantes e sistemas lineares 248
Capítulo 1: Matrizes e determinantes 250
Explorando as matrizes 251
Formalizando a definição de matriz 252
Representação genérica de uma matriz 252
Diagonais de uma matriz 253
Operações com matrizes 255
Igualdade de matrizes 255
Adição e subtração de matrizes 256
Multiplicação de número real por matriz 259
Matriz transposta 260
Multiplicação de matrizes 262
Determinante de uma matriz 266
Determinante de ordem 2 266
Determinante de ordem 3 266
Conexões: Matrizes e a primeira imagem de Marte 269
Capítulo 2: Sistemas lineares 272
Formalizando o conceito de sistemas lineares 273
Equações lineares 273
Solução de uma equação linear 273
Sistemas lineares 275
Solução de um sistema linear 276
Os métodos da substituição e da adição para resolver sistemas lineares 277
Classificação e representação gráfica de sistemas lineares 283
Tecnologias digitais: Sistemas lineares 2×2 286
Escalonamento de sistemas lineares 287
Classificação e resolução de sistemas lineares escalonados 287
Sistemas lineares equivalentes 289
Processo para escalonamento de um sistema linear 290
Sistemas lineares, matrizes e determinantes 296
Discussão de um sistema linear não escalonado 297
Enem e vestibulares 299
Conteúdos e aprendizagens 301

Tabela de razões trigonométricas 302
Respostas 303
Lista de siglas 314
Referências bibliográficas comentadas 315
Transcrição de áudios 318

Objetos Educacionais Digitais (OEDs)



Atividade agropecuária em alguns estados brasileiros 31



Fontes de energia: vantagens e desvantagens... 38



Técnicas de desenho 45



Princípio de Cavalieri 92



O consumo de água no mundo 105



Pirâmides 115



Medidas de área, de volume e variação de grandezas 155



Tales de Mileto 160



Pontes e treliças 170



Relações métricas e Teorema de Pitágoras 172



Circunferência e transformações geométricas 202



Sistemas de equações de 1º grau com 2 incógnitas ... 275



Transcrição de áudios 318

O trabalho com a BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece o que cada estudante precisa aprender em cada etapa da Educação Básica, de maneira a estabelecer um currículo básico comum a todos os estudantes brasileiros.

Com o propósito de estabelecer uma educação de qualidade e com equidade, a BNCC foi elaborada considerando critérios claros, focados nos conhecimentos e nas habilidades essenciais para o desenvolvimento dos estudantes na sociedade do século XXI.

Nesta coleção, trabalhamos ao longo dos 3 Volumes todas as competências e habilidades da BNCC e os Temas Contemporâneos Transversais. A seguir apresentamos aqueles que são trabalhados em cada Unidade deste Volume.

Para conhecer os textos correspondentes aos códigos indicados, consulte o documento oficial disponível em: https://tedit.net/pot336 (acesso em: 4 ago. 2024).

Volume 2				
Unidade	**Competência geral da Educação Básica (CG)**	**Competência específica de Matemática e suas Tecnologias (CEMAT)**	**Habilidade de Matemática e suas Tecnologias (EM13MAT)**	**Tema Contemporâneo Transversal (TCT)**
Unidade 1	CG01, CG02, CG03, CG05, CG07, CG09	CEMAT01, CEMAT03, CEMAT05	EM13MAT105, EM13MAT307, EM13MAT308, EM13MAT315, EM13MAT505	*Ciência e Tecnologia; Direitos da Criança e do Adolescente; Diversidade Cultural; Educação Ambiental; Saúde; Trabalho*
Unidade 2	CG01, CG02, CG04, CG06, CG07, CG09, CG10	CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03, CEMAT05	EM13MAT102, EM13MAT201, EM13MAT309, EM13MAT314, EM13MAT504, EM13MAT509	*Ciência e Tecnologia; Diversidade Cultural; Educação Ambiental; Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras; Saúde*
Unidade 3	CG01, CG02, CG03, CG04, CG05, CG06, CG07, CG09	CEMAT03	EM13MAT306, EM13MAT308	*Diversidade Cultural; Educação Ambiental; Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*
Unidade 4	CG01, CG02, CG10	CEMAT03	EM13MAT301, EM13MAT315	*Ciência e Tecnologia; Educação Financeira; Educação para o Trânsito*

UNIDADE 1

Regiões planas e área



A Amazônia Legal é uma região de medida de área de aproximadamente 5 015 068,18 km². Essa região é composta dos estados do Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins e Mato Grosso, além de alguns municípios do estado do Maranhão, totalizando cerca de 58,9% do território nacional. A Floresta Amazônica brasileira está localizada dentro dessa porção do território. Estima-se que nela podem ser encontradas 60 mil espécies de plantas e animais vertebrados, o equivalente a 15% da biodiversidade mundial.

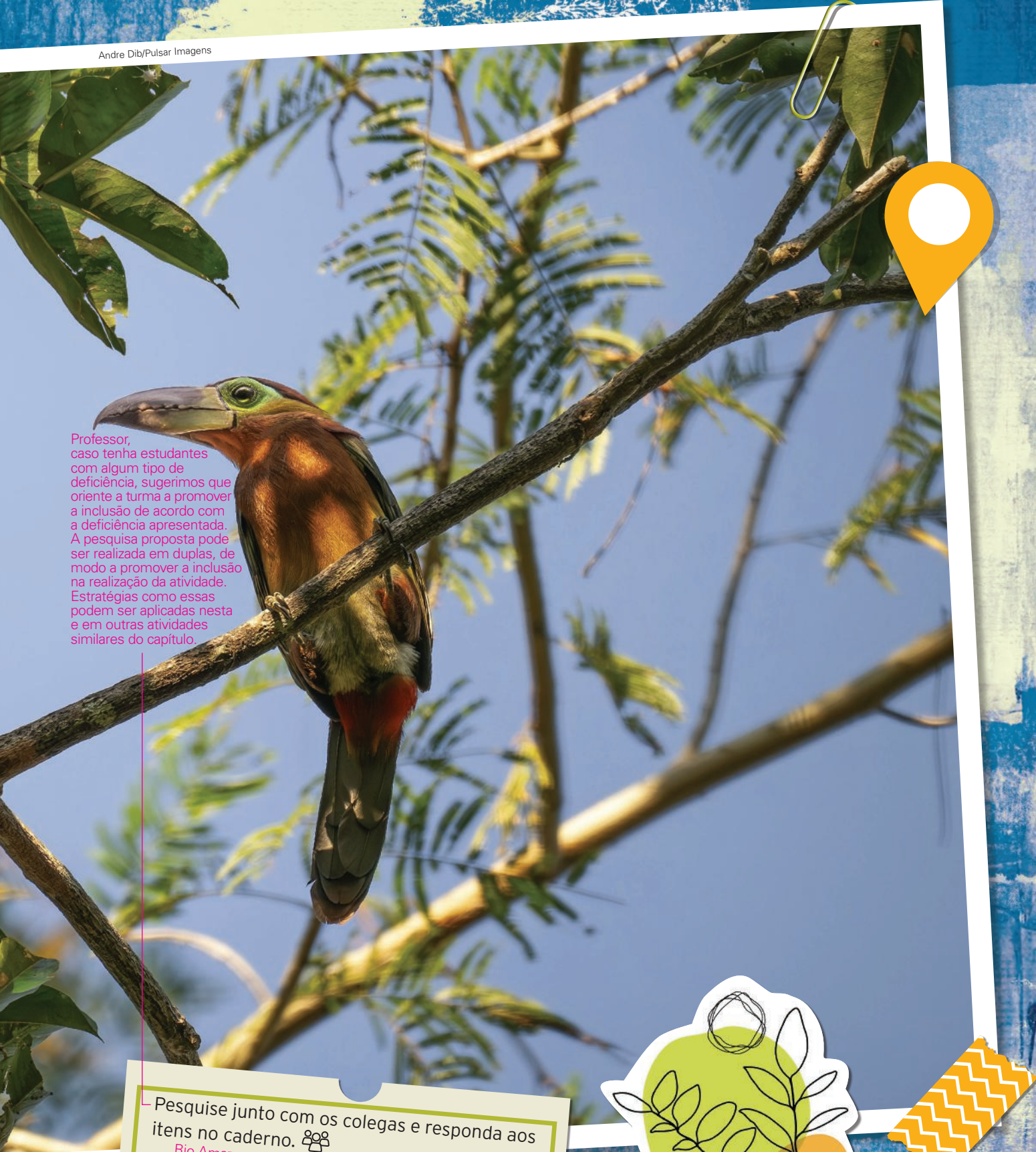
Fontes dos dados: GUIMARÃES, Carlos Alberto. IBGE atualiza limites de municípios no mapa da Amazônia Legal. *Agência IBGE Notícias*, Rio de Janeiro, 13 jul. 2021. Disponível em: https://tedit.net/wc9fka; A AMAZÔNIA importa. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 10 ago. 2020. Estúdio Folha. Disponível em: https://tedit.net/cyd6k2. Acesso em: 10 jul. 2024.

Foto de um saripoca-de-coleira (*Selenidera reinwardtii*) no bioma amazônico, no Parque Estadual Chandless, em Manoel Urbano (Acre). Foto de 2024.

Aproximadamente 8 510 295 km².

Professor, peça aos estudantes que pesquisem a diferença entre a porção de área chamada Amazônia Legal e a porção de área que compõe a Floresta Amazônica. Depois, promova uma roda de conversa para debater as descobertas. Aproveite essa oportunidade para destacar a importância da preservação da biodiversidade e do planejamento para o desenvolvimento sustentável dessa região, tão importante para o Brasil e para o mundo.

Andre Dib/Pulsar Imagens



Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Pesquise junto com os colegas e responda aos itens no caderno.

- Qual é o maior rio que passa pelo Brasil? Qual é a medida de extensão dele?

Rio Amazonas; aproximadamente 6 900 km.

- Qual é, aproximadamente, a medida de área do território nacional?

CAPÍTULO 1

Medida de área de regiões planas

Situação-problema 1

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Quadra de esportes

Você conhece esportes como vôlei, futsal ou basquete? Todos eles acontecem em uma quadra com formato retangular. Quadras como essas podem ser encontradas em praças, parques, estádios, entre outros lugares.



Monkey Business Images/Shutterstock

A prática de esportes é um direito de crianças e adolescentes.

Algumas estudantes de uma escola ficaram curiosas para saber qual era a medida de área da quadra de esportes em que costumavam jogar basquete e perceberam que, para isso, precisavam determinar a medida de área de uma região retangular. Com a ajuda de uma trena, elas verificaram que a quadra retangular tinha as seguintes medidas de comprimento: 20 m por 40 m. Além disso, elas sabem que uma região quadrada de lado com 1 m de medida de comprimento tem 1 m^2 de medida de área, uma região quadrada de lado com 2 m de medida de comprimento tem 4 m^2 de medida de área e uma região quadrada de lado com 3 m de medida de comprimento tem 9 m^2 de medida de área.

Considerando essas informações, faça o que se pede no caderno.

a) Qual relação você percebe entre a medida de comprimento do lado e a medida de área de cada região quadrada citada?

b) Explique como é possível calcular a medida de área de uma região retangular conhecendo apenas as medidas de comprimento dos lados. Resposta esperada: É possível utilizar o mesmo raciocínio do item anterior e multiplicar as medidas de comprimento dos lados.

c) Utilize as medidas de comprimento da quadra e determine a medida de área dela. $20\ m \cdot 40\ m = 800\ m^2$

a) Resposta esperada: A medida de área é igual ao quadrado da medida de comprimento do lado da região quadrada. Sendo ℓ a medida de comprimento do lado, a medida de área é dada por $\ell \cdot \ell$ ou ℓ^2.

Situação-problema 2

Pixel

Você sabe o que é um *pixel*?

O *pixel* é o menor elemento de uma imagem digital. Isso significa que fotografias digitais e vídeos, por exemplo, são formados por uma grande quantidade de *pixels*.

O termo *pixel* originou-se da combinação das palavras da expressão *picture element*, que em português significa "elemento da imagem".

Quando ampliamos uma imagem digital, além da resolução adequada para impressão ou da tela em que ela é exibida, é possível perceber vários *pixels*, que parecem pequenas regiões quadradas. Quanto mais *pixels* uma imagem contém, maior é a resolução dela.



reisegraf.ch/Shutterstock

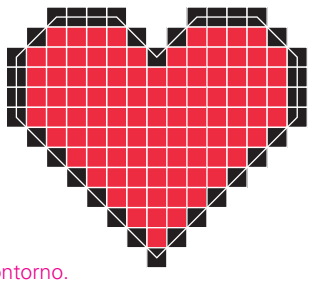
Na região ampliada desta imagem, é possível notar os *pixels*.

Sobre o assunto

Para conhecer mais sobre o *pixel*, sugerimos o texto a seguir.

PORTILHO, Gabriela. O que é um *pixel*? *Superinteressante*, 4 jul. 2018. Disponível em: https://tedit.net/445v6r. Acesso em: 10 jul. 2024.

Suponha que uma gráfica tenha recebido um desenho de coração ilustrado com pequenas regiões quadradas que lembram *pixels* e precisa adaptá-lo para que o resultado seja um coração completo, sem as bordas pontiagudas das regiões quadradas. Para alcançar esse efeito, um profissional de gráfica deve contornar, com um fio contínuo, o desenho do coração, para que fique no formato desejado.



Ericson Guilherme Luciano/ Arquivo da editora

a) Qual estratégia poderíamos utilizar para determinar a medida de área aproximada do modelo final do desenho de coração?

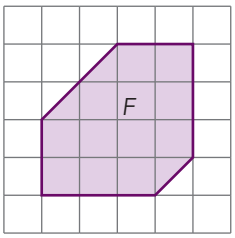
Exemplo de resposta: Contar a quantidade de pequenas regiões quadradas no interior do contorno.

b) Qual é a medida aproximada de área do modelo final do desenho de coração? Considere que cada pequena região quadrada é uma unidade de medida de área. Contando as pequenas regiões quadradas, encontramos 129 como medida de área.

Explorando a ideia de área

Suponha que queiramos determinar a medida de área da região plana indicada por F na malha quadriculada a seguir. Para isso, precisamos comparar F com uma unidade de medida de área que chamaremos de U. O resultado dessa comparação é um número que indica quantas vezes a região F contém a unidade de medida de área U.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



U

Unidade de medida de área: U.

O número obtido dessa maneira é a medida de área de F.

Então, a área da região plana F mede 13,5 U.

Medida de área de polígonos

Região limitada por um quadrado

Uma região limitada por um quadrado também pode ser chamada de região quadrada.

Fique atento

Quadrado é todo quadrilátero que tem os 4 lados com a mesma medida de comprimento e os 4 ângulos com medida de abertura igual a 90°.

Vamos estabelecer agora, como unidade de medida de área, uma região quadrada cuja medida de comprimento do lado seja igual a 1 unidade de comprimento. Ela será chamada **região quadrada unitária**.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

1 1 1

Região quadrada unitária.

Qualquer região quadrada cujo comprimento do lado meça 1 terá, por definição, medida de área igual a 1.

Consideremos uma região quadrada Q cujo comprimento do lado mede n, em que n é um número natural. Essa região pode ser decomposta em n^2 regiões quadradas justapostas, cada uma de lado com medida de comprimento unitária e, portanto, com medida de área 1. Logo, a medida de área A da região quadrada Q é n^2.

$$A = n^2$$

Fique atento

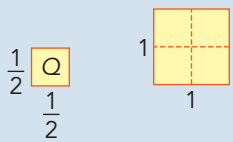
Nesta obra, consideramos o polígono como uma linha poligonal fechada simples (a linha não se cruza).

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Estudamos que a medida de área de uma região quadrada é igual ao quadrado da medida de comprimento do lado dessa região. Será que essa relação também vale para regiões quadradas cuja medida de comprimento do lado é $\frac{1}{n}$, em que $n \in \mathbb{N}^*$?

1. Considere as figuras representadas a seguir. Em quantas regiões quadradas iguais a Q a região quadrada unitária foi decomposta? 4 regiões quadradas iguais a Q.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Sendo A a medida de área da região Q, temos: $4 \cdot A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$.

2. Determine a medida de área da região Q a partir da relação entre a medida de área da região quadrada unitária e a quantidade de regiões quadradas em que a região unitária foi decomposta.

3. Sabendo que a região unitária pode ser decomposta em n^2 regiões quadradas dispostas em n fileiras, com n regiões quadradas em cada uma e sem espaços entre elas, todas iguais a Q, reescreva, no caderno, a relação obtida no item anterior utilizando essa informação.

Sendo $\frac{m}{n}$ (com $m, n \in \mathbb{N}^*$) a medida de comprimento do lado de uma região quadrada Q e m^2 a quantidade de regiões quadradas em que ela foi decomposta, a medida de área da região quadrada Q é dada por:

$$m^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}$$

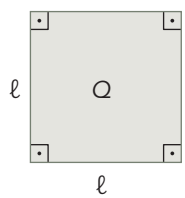
É possível provar que, se a medida de comprimento do lado de uma região quadrada Q for um número irracional k, ainda assim a medida de área A da região Q será dada por:

$$A = k^2$$

Assim, podemos dizer que se a medida de comprimento do lado de uma região quadrada Q for um número real ℓ positivo, ainda assim a medida de área A da região Q será dada por:

$$A = \ell^2$$

A medida de área de uma região quadrada é igual ao quadrado da medida de comprimento do lado dessa região.



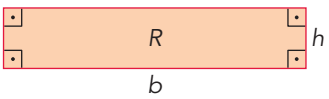
Banco de imagens/Arquivo da editora

3. Professor, a ideia é que os estudantes substituam 4 por n^2 na fórmula que obtiveram na atividade **2**. Como as n^2 regiões nas quais a região quadrada unitária foi dividida são iguais a 4, substituindo na fórmula, temos: $n^2 \cdot A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{n^2}$ ou $A = \left(\frac{1}{n}\right)^2$. Logo, a medida de área de Q é igual a $\frac{1}{n^2}$.

Região limitada por um retângulo

Uma região limitada por um retângulo também pode ser chamada de região retangular.

Considere uma região retangular R cujo comprimento da base mede b e o comprimento da altura mede h, em que b e h são números reais positivos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

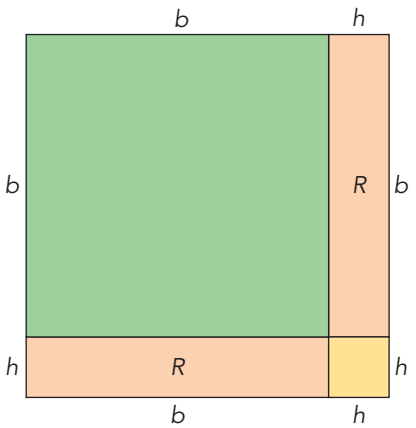
Fique atento

Retângulo é todo quadrilátero que tem os 4 ângulos retos.

Vamos provar que, se a medida de comprimento da base (b) e a medida de comprimento da altura (h) forem números reais positivos quaisquer, a medida de área A da região retangular R será dada por:

$$A = b \cdot h$$

Podemos construir uma região quadrada Q cuja medida de comprimento do lado é $b + h$, que contém 2 regiões retangulares R, e mais 2 regiões quadradas, uma cujo comprimento do lado mede b e outra cujo comprimento do lado mede h.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de área A_Q dessa região quadrada Q é dada pelo quadrado de uma soma:

$$A_Q = (b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2 \quad \text{(I)}$$

Como a região quadrada amarela e a região quadrada verde têm medidas de área, respectivamente, iguais a h^2 e b^2, concluímos que:

$$A_Q = b^2 + h^2 + 2 \cdot A \text{ (em que } A \text{ é a medida de área de } R) \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), chegamos a:

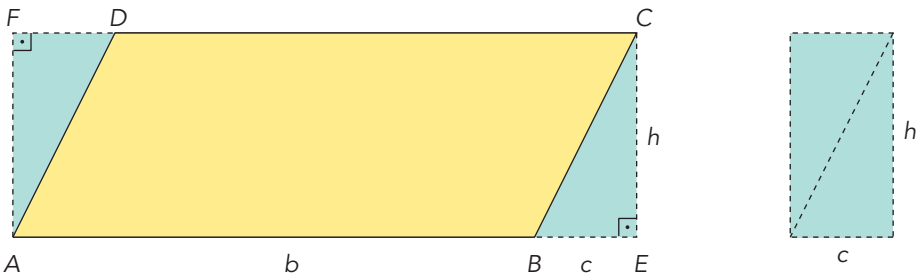
$$A = b \cdot h$$

A medida de área de uma região retangular é igual ao produto da medida de comprimento da base pela medida de comprimento de altura dela.

Região limitada por um paralelogramo

Vamos determinar a medida de área de uma região plana limitada por um paralelogramo *ABCD*, tomando como base $\overline{AB}$, de medida de comprimento *b*, e altura $\overline{CE}$ (perpendicular a $\overline{AB}$), de medida de comprimento *h*.

Considere a figura geométrica plana representada a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A região limitada pelo paralelogramo está contida em uma região retangular cuja medida de comprimento da base é $b + c$ e cuja medida de comprimento da altura é *h*. A medida de área dessa região retangular é dada por:

$$(b + c)h = bh + ch$$

Note que essa região retangular é formada pela região limitada pelo paralelogramo mais 2 regiões limitadas cada uma por um triângulo retângulo cuja medida de comprimento da base é *c* e o comprimento da altura mede *h*. Juntas, as regiões limitadas pelo triângulo retângulo formam uma região retangular de medida de área *ch*. Assim:

$$bh + ch = A + ch$$

Em que *A* é a medida de área da região limitada pelo paralelogramo *ABCD*.

Portanto:

$$A = b \cdot h$$

A medida de área de uma região limitada por um paralelogramo é igual ao produto da medida de comprimento de uma das bases pela medida de comprimento da altura correspondente à base escolhida.

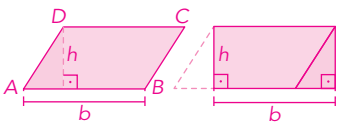
Fique atento

Esse resultado não depende da base escolhida para o paralelogramo. Se tivéssemos escolhido outro lado do paralelogramo como base e tomado a altura correspondente, o resultado seria o mesmo.

Fique atento

Paralelogramo é todo quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

Reflita: Exemplo de resposta: Dividir a região limitada por um paralelogramo com um corte perpendicular à base escolhida, de maneira que a região fique dividida em 2 partes: uma limitada por um triângulo retângulo e outra, por um trapézio também retângulo. Depois reposicionar as 2 regiões formando uma região retangular cujas dimensões coincidam com as dimensões da região limitada pelo paralelogramo inicial.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro

Reflita

De que outro modo poderíamos mostrar que a medida de área de uma região limitada por um paralelogramo é igual ao produto da medida de comprimento de uma das bases pela medida de comprimento da altura correspondente à base escolhida? Registre no caderno.

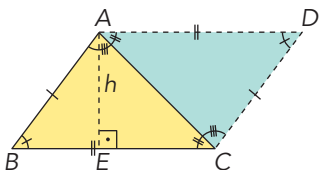
Região limitada por um triângulo

Uma região limitada por um triângulo também pode ser chamada de região triangular.

Conhecendo a medida de área de uma região limitada por um paralelogramo, podemos determinar a medida de área de uma região triangular, porque toda região triangular é metade da região limitada por um paralelogramo de mesma medida de comprimento de base e de altura.

Dada uma região triangular ABC, cuja medida de área queremos determinar, representamos segmentos de reta paralelos aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, determinando o ponto D e a região limitada pelo paralelogramo $ABCD$. Consideremos a altura $\overline{AE}$ de medida de comprimento h dessa região.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



Já sabemos que, se a medida de comprimento de $\overline{BC}$ é b, então a medida de área da região limitada pelo paralelogramo mede bh. Os triângulos ABC e ADC são congruentes (pelo caso de congruência de triângulos ALA: têm 1 lado e os 2 ângulos adjacentes a ele respectivamente congruentes). Logo, as medidas de área das regiões limitadas por esses triângulos são iguais.

Assim, sendo A a medida de área da região limitada pelo paralelogramo $ABCD$ e A_{ABC} a medida de área da região triangular ABC, temos:

$$A = 2 \cdot A_{ABC}$$

ou

$$bh = 2 \cdot A_{ABC}$$

Portanto:

$$A_{ABC} = \frac{bh}{2} \text{ ou } A_{ABC} = \frac{1}{2}bh$$

A medida de área de uma região triangular é igual à metade do produto da medida de comprimento da base pela medida de comprimento da altura correspondente.

Professor, o estudo de congruência de triângulos é proposto pela BNCC para os Anos Finais do Ensino Fundamental. Se necessário, retome esse conteúdo.

Fique atento

Dois triângulos são congruentes quando têm lados correspondentes congruentes e ângulos correspondentes congruentes.

Reflita

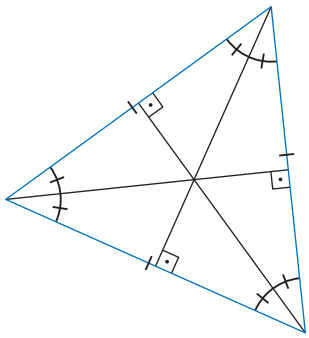
Não escreva no livro

Se escolhêssemos outra base, a medida de área do triângulo seria a mesma? Justifique.

Sim, pois o resultado não depende da base escolhida.

Região limitada por um triângulo equilátero

No triângulo equilátero, todos os lados são congruentes, todos os ângulos internos são congruentes e toda altura é também mediana do triângulo e bissetriz de um dos ângulos internos.



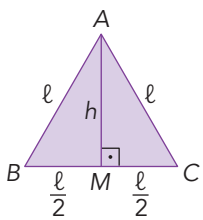
Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

A mediana de um triângulo é o segmento de reta que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

A bissetriz de um ângulo interno de triângulo é o segmento de reta que tem extremidades no vértice desse ângulo e no lado oposto a ele, dividindo o ângulo interno em dois ângulos congruentes.

Acompanhe a seguir o cálculo da medida de área de uma região limitada por um triângulo equilátero, usando a base com medida de comprimento ℓ e a altura com medida de comprimento h.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

O triângulo AMC é retângulo em M; portanto, vale o teorema de Pitágoras:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Professor, o estudo do teorema de Pitágoras é proposto pela BNCC para os Anos Finais do Ensino Fundamental. Se necessário, retome esse conteúdo.

Logo, a medida de área da região limitada pelo triângulo ABC é dada por:

$$A = \frac{\ell \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, temos:

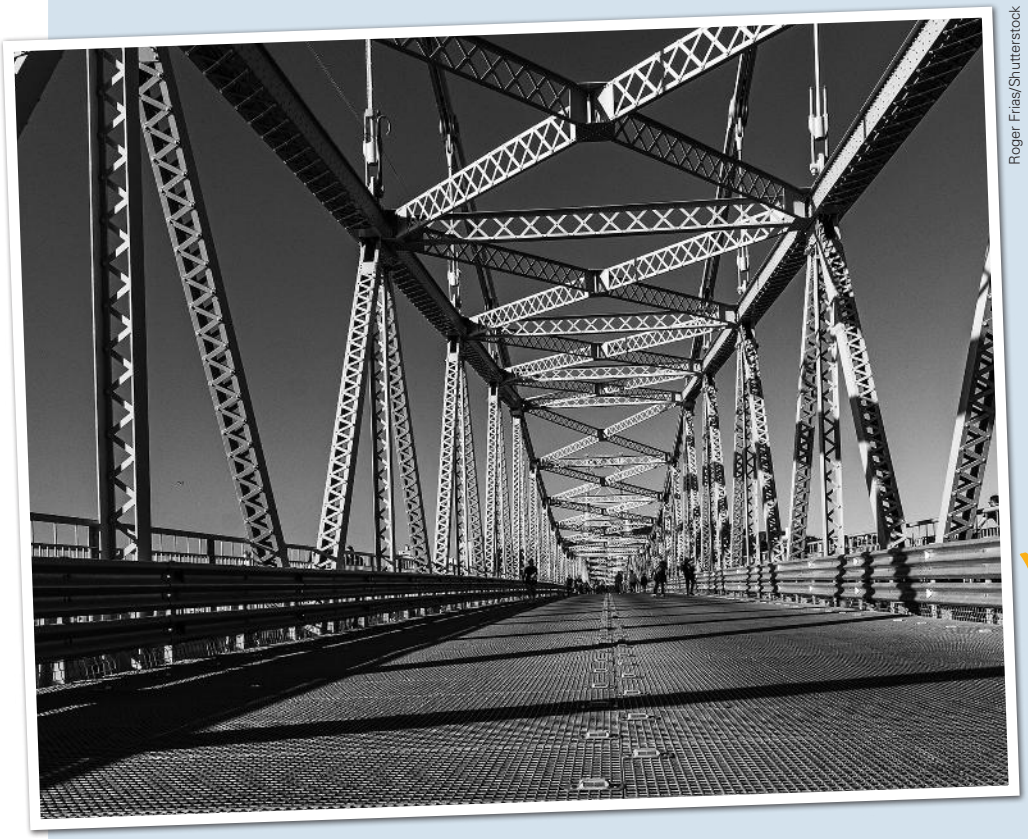
$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ (medida de área da região limitada pelo triângulo equilátero cujo lado tem medida de comprimento ℓ).

Explore para descobrir

Professor, para a realização das atividades propostas neste boxe, providencie com antecedência palitos de madeira para sorvete e fita adesiva.

Não escreva no livro

Treliça é um tipo de estrutura comum na construção civil e é utilizada, por exemplo, na construção de telhados, torres de transmissão de energia, pontes, entre outras obras. Esse tipo de estrutura lembra uma malha triangulada.



Roger Frias/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

Detalhe de estrutura de treliça da ponte Hercílio Luz em Florianópolis, Santa Catarina. Foto de 2024.

Mas por que as treliças são compostas de formatos triangulares? Para entender um dos motivos pelos quais as treliças apresentam esses formatos, faça o que se pede a seguir.

1. Use 3 palitos de sorvete e fita adesiva para compor uma estrutura como a apresentada na imagem a seguir.



Dotta2/Arquivo da editora

2. Agora, use 4 palitos de sorvete e fita adesiva para compor uma estrutura que lembre um quadrado.



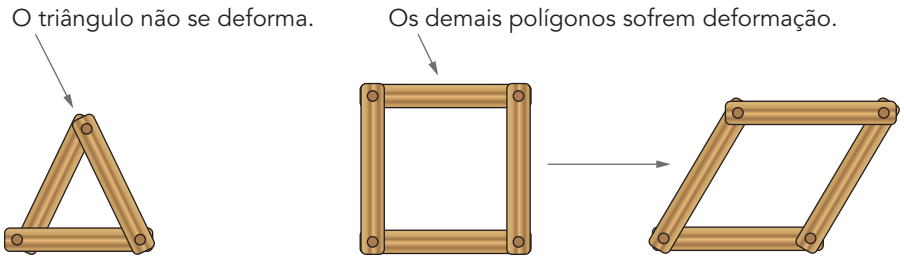
Dotta2/Arquivo da editora

3. Com as mãos, pressione de diferentes maneiras as 2 estruturas. Qual delas é mais resistente à deformação? Resposta esperada: A estrutura triangular.

Provavelmente você percebeu que a estrutura triangular sofreu menos deformação do que a estrutura quadrada. É por isso que as treliças são compostas de formatos triangulares, devido à rigidez dessa figura. A deformação pode desestabilizar uma estrutura.

O triângulo é o único polígono rígido.

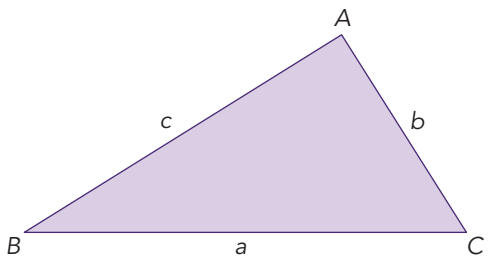
Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora



Região triangular sendo conhecidos os 3 lados

Conhecidas as medidas de comprimento a, b e c dos 3 lados de um triângulo, a medida de área A da região limitada por esse triângulo também pode ser calculada pela **fórmula de Heron**.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Sendo a medida do semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, a medida de área da região triangular é dada por:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Esse resultado é conhecido como fórmula de Heron.

Não escreva no livro

Reflita

O que significa medida do semiperímetro de um polígono?

A medida do semiperímetro de um polígono é a metade da soma das medidas de comprimento dos lados de um polígono.

Sobre o assunto

Heron de Alexandria, geômetra e mecânico grego, esteve no auge da produção intelectual em torno de 62 d.C.

Para conhecer a demonstração da fórmula de Heron, acesse os seguintes *sites*.

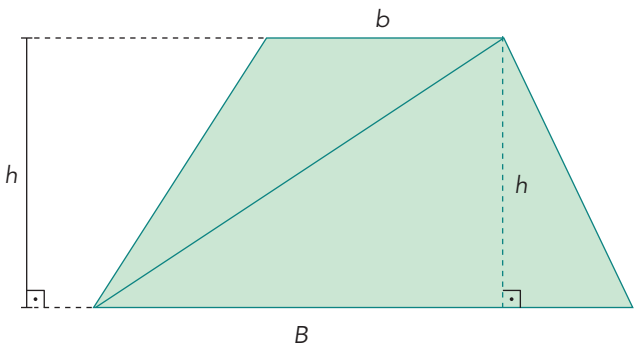
- DEMONSTRAÇÃO da fórmula de Heron (1 de 2). 1 vídeo (11 min 13 s). Publicado por Khan Academy. Disponível em: https://tedit.net/5371lc. Acesso em: 10 jul. 2024.
- DEMONSTRAÇÃO da fórmula de Heron (2 de 2). 1 vídeo (12 min 8 s). Publicado por Khan Academy. Disponível em: https://tedit.net/fbhcae. Acesso em: 10 jul. 2024.

Região limitada por um trapézio

Se uma região geométrica plana pode ser decomposta em regiões cujas medidas de área já sabemos calcular, então, a medida de área dessa região plana será a soma das medidas de área das regiões em que ela foi decomposta.

Assim, para determinar a medida da área de uma região limitada por um trapézio, vamos decompô-la em 2 regiões menores representando uma das diagonais do trapézio. Considere uma região limitada por um trapézio cujos comprimentos das bases medem b e B e o comprimento da altura mede h.

Dividimos o trapézio em 2 triângulos: um cujo comprimento da base mede B e o comprimento da altura mede h e outro cujo comprimento da base mede b e o comprimento da altura mede h.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dessa maneira, a medida de área A da região limitada pelo trapézio é dada por:

$$A = \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{Bh + bh}{2} = \frac{(B + b)h}{2}$$

Então:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

A medida de área de uma região limitada por um trapézio é igual à metade da soma das medidas de comprimento das bases multiplicada pela medida de comprimento da altura.

Fique atento

Trapézio é todo quadrilátero com um só par de lados paralelos (bases).

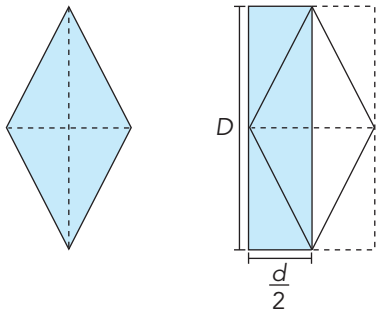
Região limitada por um losango

Todo losango é um paralelogramo; assim, a medida de área de uma região limitada por um losango pode ser calculada pelo produto da medida de comprimento da base pela medida de comprimento da altura. Entretanto, em geral, em uma região limitada por um losango são indicadas as medidas de comprimento das diagonais, D e d.

Fique atento

Losango é todo quadrilátero que tem os 4 lados com medidas de comprimento iguais.

Uma região limitada por um losango tem a mesma medida de área de uma região retangular com o comprimento da altura medindo D e o comprimento da base medindo $\frac{d}{2}$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ao representar as 2 diagonais do losango, que são perpendiculares entre si, obtemos 4 regiões limitadas por triângulos retângulos congruentes. (caso LAL de congruência de triângulos).

Assim, temos:

$$A = D \cdot \frac{d}{2} \text{ ou } A = \frac{Dd}{2}$$

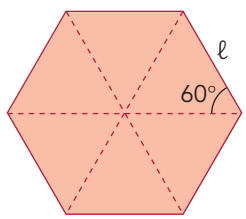
A medida de área de uma região limitada por um losango é igual à metade do produto das medidas de comprimento das diagonais.

Fique atento

Como todo quadrado é um losango, às vezes é conveniente calcular a medida de área de uma região quadrada em função da medida de comprimento das diagonais, que têm a mesma medida d. Nesse caso, a medida de área da região quadrada é dada por $A = \frac{d^2}{2}$.

Região limitada por um hexágono regular

Uma região limitada por um hexágono regular, cuja medida de comprimento dos lados é ℓ, pode ser decomposta em 6 regiões limitadas por triângulos equiláteros cujas medidas de comprimento do lado são ℓ.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Logo, a medida de área A de uma região limitada por um hexágono regular é dada por:

$$A = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

Ou seja:

$$A = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

Fique atento

Polígono regular é aquele que tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

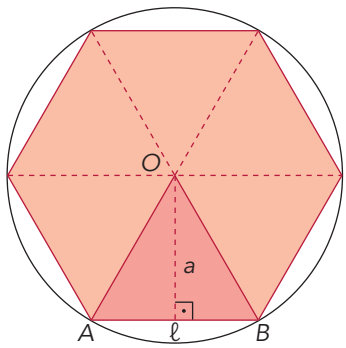
Região limitada por um polígono regular

Se um polígono regular tem n lados, ele pode ser decomposto em n triângulos isósceles. Em cada um desses triângulos, a medida de comprimento da base é igual à medida de comprimento do lado (ℓ) e a medida de comprimento da altura é igual à medida de comprimento do apótema (a) do polígono regular.

Considerando um dos lados de um polígono regular, o apótema é o segmento de reta que tem uma extremidade no centro da circunferência circunscrita ao polígono e outra extremidade nesse lado. Também podemos dizer que o apótema de um polígono regular é o raio da circunferência inscrita nesse polígono.

Portanto, a medida de área de uma região limitada por um polígono regular de n lados pode ser escrita assim:

$$A = n \cdot \frac{\ell a}{2} \text{ ou } A = \frac{n\ell}{2} \cdot a \text{ ou } A = pa \text{ ou } A = \frac{aP}{2}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Em que:

ℓ: medida de comprimento do lado do polígono;

a: medida de comprimento do apótema do polígono;

$n\ell$: medida de perímetro (P);

p: medida de semiperímetro;

P: medida de perímetro ($P = 2p$).

Fique atento

Em polígonos regulares, o apótema em relação a cada um dos lados tem a mesma medida de comprimento.

Reflita

Não escreva no livro

A medida de área de uma região limitada por um pentágono regular é dada por $A = \frac{5}{2}\ell a$ e a de uma região limitada por um octógono regular é dada por $A = 4\ell a$.

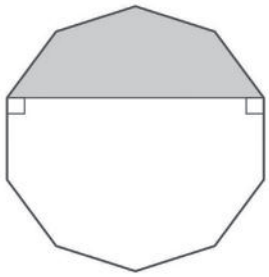
Escreva no caderno uma relação para determinar a medida de área de uma região limitada por um decágono regular em função das medidas de comprimento do lado e do apótema do decágono.

Sendo a a medida de comprimento do apótema e ℓ a medida de comprimento do lado do decágono, a medida de área é dada por $\frac{10 \times 1 \times a}{2} = 51a$.

Atividades resolvidas

Atividade resolvida passo a passo

1. (FGV-SP) A área de um polígono regular pode ser calculada pela fórmula $A = \frac{Pa}{2}$, em que P é o perímetro e a é o apótema do polígono. Em um decágono regular, uma de suas diagonais forma ângulos retos com seus lados, conforme mostra a figura.



Reprodução/FGV-SP, 2022.

Sendo 100 cm² a área desse decágono, a área do pentágono destacado vale:

a) 20 cm². **c)** 30 cm². **e)** 40 cm².

b) 25 cm². **d)** 35 cm².

Resolução

Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dada a fórmula para o cálculo da medida de área da região limitada por um polígono regular e a medida de área da região limitada pelo decágono apresentado.

b) O que se pede?

Pede-se a medida de área da região limitada pelo pentágono destacado.

Planejando a solução

Para simplificar a resolução do problema, podemos dividi-la em etapas.

I. Representação de 1 diagonal paralela à apresentada na figura de maneira a obter 1 região retangular cuja medida de comprimento dos lados é conhecida e 2 regiões pentagonais.

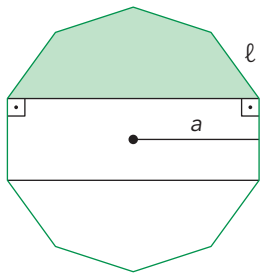
II. Cálculo da medida de área da região retangular.

III. Cálculo da medida de área de região pentagonal destacada.

Executando o que foi planejado

Etapa I

Representando 1 diagonal paralela à primeira, podemos dividir a figura original, a região limitada pelo decágono regular, em 3 figuras: 2 regiões limitadas por pentágonos de mesma medida de área e 1 região limitada por 1 retângulo de medida de área dada por $2a \cdot \ell$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Etapa II

Sendo ℓ a medida de lado do decágono, temos que a medida de perímetro é $10 \cdot \ell$. Assim:

$$A = \frac{Pa}{2} = \frac{10 \cdot \ell \cdot a}{2} = 5\ell a$$

Considerando que a medida de área do decágono é 100 cm², temos:

$$100 = 5\ell a \Rightarrow \ell a = 20$$

Sendo $2a$ e ℓ as medidas de comprimento dos lados da região retangular, temos:

$$A = 2a \cdot \ell \Rightarrow A = 2 \cdot 20 \Rightarrow A = 40$$

Logo, a medida de área da região retangular é 40 cm².

Etapa III

A medida de área das 2 regiões pentagonais é igual à medida de área da região limitada pelo decágono menos a medida de área da região retangular. Como as 2 regiões pentagonais têm a mesma medida de área, temos:

$$A_{pent} = \frac{100 - 40}{2} = 30 \Rightarrow A_{pent} = 30$$

Portanto, a área do pentágono destacado mede 30 cm².

Emitindo a resposta

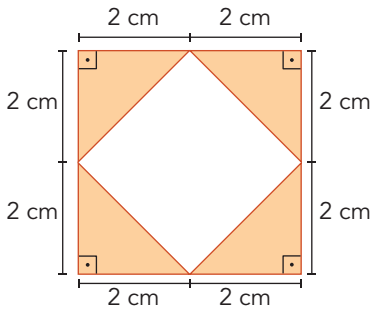
A resposta é a alternativa **c**.

Professor, na atividade **1**, retome com os estudantes os passos realizados na atividade resolvida anterior. Destaque a estratégia de decomposição usada e oriente-os que usem a mesma abordagem na atividade **1**. Além disso, reforce os aspectos do algoritmo/passos usados na resolução de problemas parecidos.

Atividades

Não escreva no livro

1. Qual é a medida de área da região colorida da figura apresentada? E qual é a medida de área da região não colorida? 8 cm²; 8 cm².



Banco de imagens/Arquivo da editora

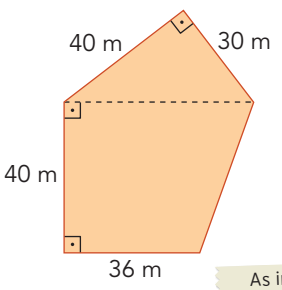
2. Um terreno tem o formato de um trapézio cujas medidas de comprimento das bases são 20 m e 14 m e a da altura é 11 m. Nesse terreno, construiu-se uma piscina retangular de 8 m por 5 m. No restante do terreno foi colocado um revestimento de cerâmica. Qual é a medida de área da parte em que foi colocado o revestimento de cerâmica? 147 m²

3. Qual é a medida de área de uma região limitada por um paralelogramo cujas medidas de comprimento dos lados são 10 cm e 16 cm?

Não é possível responder a essa pergunta, pois faltam dados.

4. Uma pedra de cerâmica tem o formato de um hexágono regular com medida de comprimento do lado igual a 8 cm. Qual é a medida de área dessa pedra?

5. Feito o estudo de um terreno, foram determinadas as medidas indicadas na figura representada a seguir. Nessas condições, qual é a medida de área desse terreno? 2320 m²



Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Professor, no item **b** da atividade **6**, reforce aos estudantes a importância de utilizarem fontes confiáveis. Eles podem consultar, por exemplo, o *site* do Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (Cepea). Disponível em: https://tedit.net/eshhpv. Acesso em: 12 jul. 2024.

Texto para as atividades **6** e **7**.

O Brasil produziu aproximadamente 125,549 milhões de toneladas de soja na safra de 2021/2022. Nesse período, a medida de área plantada foi estimada em 41,492 milhões de hectares e a produtividade média foi 3026 kg/ha (quilogramas por hectare).

Fonte dos dados: CONAB. *Acompanhamento da Safra Brasileira de Grãos*: safra 2022/2023 – 5º levantamento, Brasília (DF), v. 10, n. 5, fev. 2023. Disponível em: https://tedit.net/kozn5w. Acesso em: 10 jul. 2024.

Considere 1 ha = 10 000 m².

6. Suponha que um produtor rural é pecuarista, mas também reserva uma parte da propriedade dele para a cultura de grãos e pretende plantar soja. A região destinada à soja terá o formato retangular, em que um dos lados terá medida de comprimento igual a 200 m. Técnicos agrícolas estimaram a produção em 3000 kg/ha.

a) Considerando que 1 saca de soja contém 60 kg desse grão, qual deve ser a medida de comprimento do outro lado dessa região retangular para que o produtor rural possa colher 1200 sacas de soja? 1200 m

b) Pesquise o preço da saca de soja e descubra qual valor o produtor conseguirá arrecadar com essa produção.

A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

7. Agora, suponha que, para a próxima safra, o produtor rural pretenda manter o formato da região destinada ao cultivo de soja, a medida de comprimento de um dos lados do retângulo seja b, a produtividade seja de 3600 kg/ha e ele pretenda colher 1500 sacas. É possível obter uma fórmula para determinar a medida de comprimento x do outro lado do retângulo? Se sim, qual é a fórmula? Sim; $x = \frac{250\,000}{b}$.

Texto para a próxima atividade.

A NBR 9050/2020 estabelece critérios e parâmetros técnicos a serem observados quanto ao projeto, construção, instalação e adaptação do meio urbano e rural, e de edificações às condições de acessibilidade. O intuito é proporcionar a utilização de maneira autônoma, independente e segura do ambiente, das edificações, mobiliário e equipamentos urbanos e elementos a maior quantidade possível de pessoas independente de idade, estatura ou limitação de mobilidade ou percepção.

NOVA versão da NBR 9050 (2020) de acessibilidade já é exigida por órgão de análise de projetos. *CAU/DF*, Brasília, DF, 11 ago. 2020. Disponível em: https://tedit.net/229qx6. Acesso em: 22 ago. 2024.

4. Como $\frac{3 \cdot 8^2\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3}$, a medida de área pedida é $96\sqrt{3}$ cm².

Professor, aproveite o texto para promover um debate entre os estudantes a respeito dos direitos de acessibilidade e inclusão, além do combate ao preconceito contra pessoas que usam cadeira de rodas. Faça questionamentos como: "A norma apresentada no texto é cumprida pela escola?"; "Essa norma costuma ser cumprida nos estabelecimentos que você frequenta?"; "Porque é importante cumprir as normas de acessibilidade?".

8. A elevação total do topo de uma rampa em relação ao solo tem medida de comprimento igual a 25 cm. Sabendo que a base dessa rampa, construída no plano horizontal do solo, tem medida de comprimento igual a 3,12 m e a medida de comprimento da largura do piso do vão de circulação é 1,4 m, qual é a medida de área, em metros quadrados, do piso dessa rampa? Use uma calculadora para efetuar os cálculos. Alternativa **a**.



Nomad_Soul/Shutterstock

A Norma Brasileira (NBR) 9050 indica os níveis máximos de inclinação admitidos para uma rampa de acesso.

a) 4,382 **c)** 5,04 **e)** 5,4

b) 4,438 **d)** 5,218

As imagens não estão representadas em proporção.

Texto para as atividades **9** e **10**.

A instalação de porcelanato retificado permite que as peças sejam colocadas próximas umas das outras para diminuir o espaço das juntas, necessitando de pouco rejunte. Esse tipo de revestimento apresenta bordas retas e tem as folhas cortadas somente depois da queima, para evitar o encolhimento das peças. Com isso, o corte é feito de maneira precisa e evita rebarbas que impeçam a aproximação entre as peças.

9. Para o piso de uma sala retangular, com lados de medidas de comprimento de 5 m por 7 m, foram usados porcelanatos retificados quadrados, com lados de medida de comprimento de 50 cm, sem rejunte e sem deixar sobras ou fazer cortes. Qual alternativa corresponde à quantidade de peças de porcelanato utilizada? Alternativa **d**.

a) 35 **c)** 105 **e)** 160

b) 70 **d)** 140

10. Considere que a sala descrita na atividade anterior tem um rodapé cuja altura mede 15 cm. No caderno, elabore um problema que utilize essa informação e outras que você julgar relevantes. Em seguida, peça a um colega que resolva o problema que você criou e, depois, confiram juntos a resolução.

O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Texto para a próxima atividade.

O termo **trabalho**, usado em Física, tem relação com a energia transferida pela aplicação de uma força ao longo de um deslocamento. Então, pode-se dizer que há trabalho quando uma força é aplicada em um corpo, provocando uma mudança no movimento.

Um exemplo prático dessa definição é o de uma pessoa que quer mudar a posição de um armário e, para isso, empurra-o exercendo uma força paralela ao chão. Ao deslocar o armário, foi realizado um trabalho.

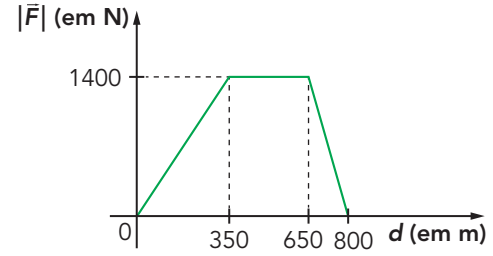


R2E/Arquivo da editora

Em uma representação gráfica no plano cartesiano de uma força de intensidade F (em newton) aplicada em função da medida de um deslocamento d (em metro), o trabalho (em joule) realizado por essa força pode ser obtido determinando a medida de área da região limitada pela curva e o eixo x, pois ela é numericamente igual ao trabalho realizado.

11. Este gráfico representa o módulo da força motora que age no movimento de um carro, em que o eixo vertical representa a intensidade da força aplicada e o eixo horizontal, a medida de distância percorrida.

Módulo da força no movimento de um carro



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

1 540 000 joules.

Qual é o trabalho realizado por essa força que atua na direção do movimento do carro, sabendo que o veículo partiu do repouso?

Professor, na atividade **8**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Conexões

Produtividade do roçado

O estado do Pará é o maior produtor de mandioca do Brasil. A mandioca, também conhecida como macaxeira ou aipim, é uma planta nativa da América do Sul e estima-se que tenha sido domesticada há milhares de anos pelos povos indígenas brasileiros.

Renato Soares/Pulsar Imagens



Mandioca descascada em balaio de palha.

As imagens não estão representadas em proporção.

Brasil político: Pará



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 93.

Sobre o assunto

A mandioca foi eleita pela Organização das Nações Unidas (ONU) o alimento do século XXI. A produção desse alimento é fundamental para a soberania alimentar brasileira, contribuindo direta e indiretamente para a segurança alimentar de milhões de pessoas. Para saber mais sobre o assunto, acesse o vídeo e leia o texto recomendado a seguir.

- MANDIOCA: alimento do século 21. [*S. l.*: *s. n.*], 2018. 1 vídeo (45 min 19 s). Publicado pelo canal TV Embrapa. Disponível em: https://tedit.net/3vxj0u. Acesso em: 10 jul. 2024.
- MANDIOCA ajuda a diminuir pobreza no campo. *Embrapa*, 3 fev. 2015. Disponível em: https://tedit.net/wynhbs. Acesso em: 15 jul. 2024.

Na região paraense, a agricultura familiar é uma das principais responsáveis pela produção da mandioca e dos subprodutos dessa planta, como a farinha, o beiju e a tapioca.

WS-Studio/Shutterstock



Farinha de mandioca.

Cadu De Castro/Pulsar Imagens



Beiju, prato de origem indígena que é feito com a massa da mandioca.

Odu Mazza/Shutterstock



Prato de tapioca. A tapioca, diferentemente do beiju, é feita com a goma da mandioca.

Professor, comente com os estudantes que a busca pela soberania alimentar está intimamente relacionada ao apoio à agricultura familiar, à proteção ambiental e à melhoria da segurança alimentar. Explique que, no Brasil, a produção de mandioca contribui significativamente com essa causa, sendo que nas regiões Norte e Nordeste a agricultura familiar é responsável por mais de 85% da produção.

Ao longo do tempo, diversas estratégias de cultivo e de organização de trabalho foram desenvolvidas e passadas de geração em geração. Na cidade de Igarapé-Açu, no Pará, é comum utilizar uma unidade de medida chamada **tarefa**, usada para calcular a medida de área de plantio. Os agricultores conseguem estimar a medida de área de plantio necessária para produzir determinada quantidade de mandioca e/ou subprodutos dessa raiz a partir da medida de área necessária para o plantio de cada muda da planta.



Cadu De Castro/Pulsar Imagens

Pessoa colhendo mandioca-brava em Mocajuba (PA). Foto de 2022.

Nessa cidade, a tarefa equivale a 3 025 m². Então, em uma região com medida de área de 1 m², podem ser plantados 8 pés de maniva (muda da mandioca). Assim, uma tarefa corresponde ao plantio de 24 200 pés de maniva.

Mapa clicável

Fontes dos dados: BARBOSA, Verônica Tavares; MENDES, Roberto de Souza; ARAÚJO, Ester Figueiredo. A Etnomatemática: uma proposta para ensinar a matemática a alunos da EJA inseridos nas escolas do campo. *In*: SEMANA NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 16., 2020, Itacoatiara. *Anais eletrônicos* [...]. Itacoatiara: Ufam, 2020. Disponível em: https://tedit.net/jjlrsp; MAGNUS, Maria Carolina Machado; SILVA, Silvio Domingos Mendes da. Dos lugares-mundo às matemáticas-mundo: o lugar-saber-matemática-mundo do seu João. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 23, n. 1, p. 391-419, 2021. Disponível em: https://tedit.net/5w1h0r; AGRICULTURA familiar sustenta a produção de mandioca e a mesa do paraense. *Agência PA* (SECOM), 9 mar. 2018. Disponível em: https://tedit.net/3ruune. Acesso em: 10 jul. 2024.

Conecte com o texto

1. Sabendo que para produzir 1 saca de mandioca são necessários 40 pés de maniva, determine no caderno, em m², a medida de área de plantio necessária para produzir 6 sacas.

1. Em uma região com medida de área de 1 m², podem ser plantados 8 pés de maniva. Logo, para 40 pés de maniva, ou seja, 1 saca de mandioca, é necessária uma região de medida de área de 5 m², pois 40 ÷ 8 = 5. Sendo assim, para produzir 6 sacas de mandioca, é necessário destinar uma medida de área de 30 m², pois 5 · 6 = 30.

Pesquise e debata

2. Será que os moradores da comunidade em que você vive utilizam unidades de medida não padronizadas para indicar a medida de área de uma superfície ou região? Pense no modo como familiares, vizinhos ou amigos realizam esse tipo de medição.

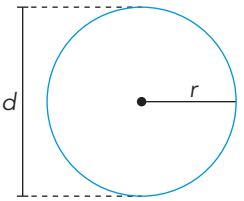
a) Pesquise quais são as unidades de medida de área utilizadas no Sistema Internacional de Unidades (SI). A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

b) Converse com familiares e conhecidos a respeito das unidades de medida de área que eles conhecem ou utilizam. Depois, responda no caderno: A unidade de medida de área que as pessoas da sua comunidade usam é diferente da usada no SI? Resposta pessoal.

c) Qual relação é possível estabelecer entre as unidades de medida de área usadas na sua comunidade e as do SI? Justifique. Resposta pessoal.

Região determinada por um círculo

Para iniciar o estudo da medida de área de uma região limitada por um círculo, vamos retomar o conceito do número π.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Durante séculos, estudiosos buscaram determinar a razão entre a medida de comprimento do perímetro (C) e a medida de comprimento do diâmetro (d) de uma circunferência.

Em 250 a.C., Arquimedes de Siracusa (*c.* 287 a.C.-*c.* 212 a.C.) demonstrou, como estudaremos adiante, que esse número está entre 3,1408 e 3,1429. Atualmente, sabemos que essa razão é um número irracional com infinitas casas decimais e, para facilitar os cálculos, adotamos o símbolo π para representá-lo e valores aproximados para π, como $\pi \simeq 3{,}14$. Assim, temos que:

$$\frac{C}{d} = \pi \text{ ou } C = 2\pi r$$

em que r corresponde à medida de comprimento do raio da circunferência.

Sobre o assunto

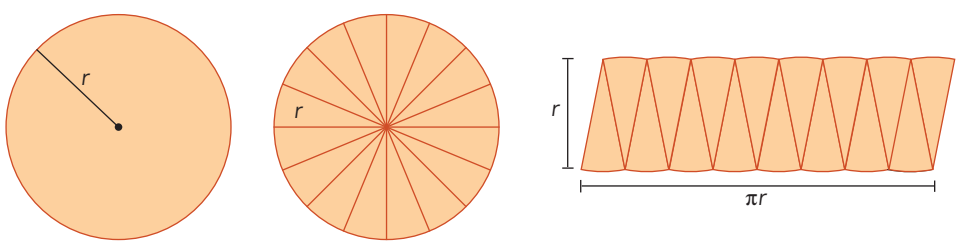
A busca por aproximações do número π continua no século XXI, porém agora com a ajuda de supercomputadores. Em 2021, cientistas suíços calcularam o número π com 62,8 trilhões de casas decimais. Para saber mais sobre essa façanha, leia a notícia indicada a seguir.

BRITO, Sabrina. Cientistas suíços calculam novo recorde de dígitos do número Pi. *Veja*, São Paulo, 7 ago. 2021. Disponível em: https://tedit.net/4as50f. Acesso em: 10 jul. 2024.

Agora, vamos mostrar 2 maneiras, entre outras, de determinar a medida de área de um círculo.

1ª maneira: Usando um círculo dividido em setores

O círculo apresentado a seguir foi dividido, a partir do centro, em uma quantidade par de regiões planas com a mesma medida de área. Essas regiões formaram uma figura cujo contorno lembra um paralelogramo. A medida de comprimento da base dessa figura corresponde à metade da medida de comprimento da circunferência $\left(\frac{2\pi r}{2} = \pi r\right)$ e a altura tem medida de comprimento r.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

A medida de área aproximada dessa figura, que é também a medida de área do círculo, é $A = (\pi r) \cdot r = \pi r^2$, isto é:

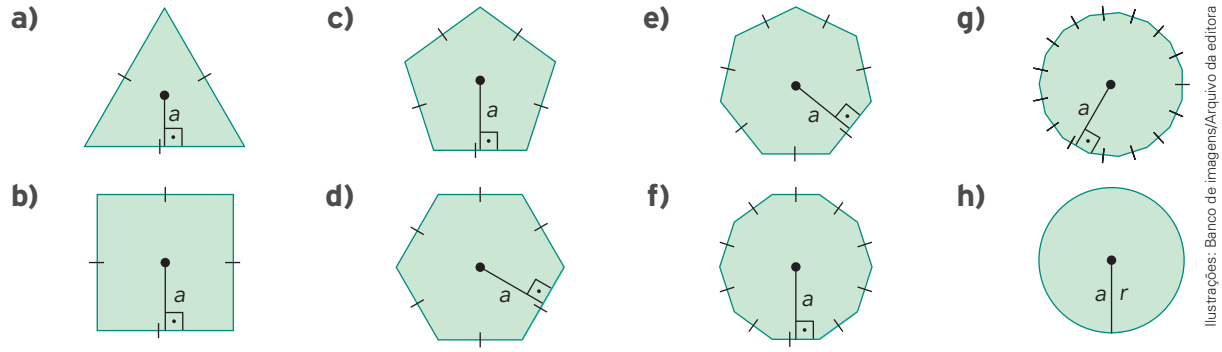
$$A = \pi r^2$$

Professor, o estudo da medida de comprimento de uma circunferência é proposto pela BNCC para os Anos Finais do Ensino Fundamental. Se necessário, retome esse conteúdo.

2ª maneira: Usando polígonos regulares

Já estudamos que a medida de área de uma região limitada por um polígono regular é dada por $A = \frac{aP}{2}$, em que a é a medida de comprimento do apótema e P é a medida de comprimento do perímetro.

Acompanhe a sequência de figuras apresentadas a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Conforme aumentamos a quantidade de lados do polígono regular que limita a região, mais ele se parece com um círculo. Como consequência, temos que a medida de comprimento do apótema se aproxima da medida de comprimento do raio (r) e a medida de comprimento do perímetro do polígono se aproxima da medida de comprimento da circunferência ($2\pi r$).

Assim, a medida de área do círculo pode ser dada por:

$$A = \frac{aP}{2} = \frac{r \cdot 2\pi r}{2} = \pi r^2$$

Ou seja:

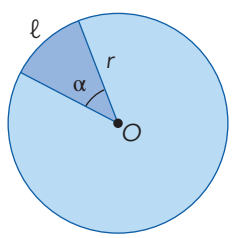
$$A = \pi r^2$$

A medida de área do círculo é igual ao produto de π pelo quadrado da medida de comprimento do raio.

Setor circular

Considere a figura a seguir, que apresenta um círculo de centro O com raio de medida de comprimento r e um ângulo central cuja medida de abertura é α. Chamamos de **setor circular** de centro O, raio de medida de comprimento r e ângulo central de medida de abertura α, em graus, a parte de um círculo limitada por 2 raios e 1 arco do círculo.

A parte representada em azul-escuro na figura representa um setor circular. No tópico "Região determinada por um círculo", por exemplo, o círculo foi dividido em uma quantidade par de setores circulares.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Ângulo central é um ângulo cujo vértice é o centro do círculo.

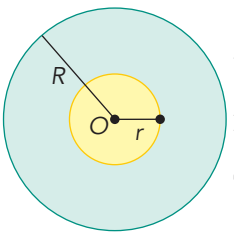
O setor circular é uma fração do círculo, e a medida de área A do setor circular é diretamente proporcional à medida de abertura do ângulo central. Duplicando ou triplicando a medida de abertura do ângulo central, a medida de área do setor circular duplica ou triplica, respectivamente. Um semicírculo, por exemplo, é um setor circular cujo ângulo central tem medida de abertura de 180° (metade de 360°) e cuja medida de área é metade da medida de área do círculo.

A medida de comprimento ℓ do arco também é diretamente proporcional à medida de abertura α do ângulo central. Então, podemos escrever:

$$\frac{A_{setor}}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360°} = \frac{\ell}{2\pi r} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{\ell \cdot r}{2}$$

Coroa circular

Dados 2 círculos concêntricos (de mesmo centro) cujos comprimentos dos raios medem r e R, com $r < R$, chamamos de **coroa circular** a parte limitada por esses 2 círculos.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

A medida de área A de uma coroa é dada por:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Atividades resolvidas

2. Calcule quantas pessoas cabem, aproximadamente, em uma praça circular cujo raio tem 20 m de medida de comprimento, considerando uma capacidade de ocupação de 5 pessoas por metro quadrado. (Use $\pi \simeq 3{,}14$.)

Resolução

Temos que $A = \pi r^2$, $\pi \simeq 3{,}14$ e $r = 20$ m. Assim:

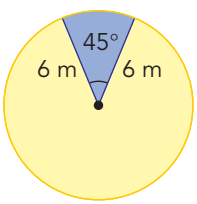
$$A \simeq 20^2 \cdot 3{,}14 \Rightarrow A \simeq 1256$$

Então, a medida de área é, aproximadamente, 1256 m².

$$1256 \cdot 5 = 6\,280$$

Logo, cabem aproximadamente 6 280 pessoas nessa praça.

3. Calcule a medida de área do setor circular destacado de roxo-escuro na figura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução

Medida de área do setor: $\frac{A_{setor}}{\pi \cdot 6^2} = \frac{45°}{360°} \Rightarrow A_{setor} = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 36 = \frac{9\pi}{2}$

A área do setor circular mede $\frac{9\pi}{2}$ m².

Atividades

12. a) Temos que $d = 20$ cm; logo, $r = 10$ cm. Portanto, a medida de perímetro, dada por $2 \cdot \pi \cdot 10 = 20\pi$, é 20π cm.

b) $\pi \cdot 10^2 = 100\pi$; logo, $A = 100\pi$ cm^2.

Não escreva no livro

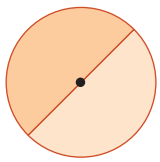
12. Considere um círculo de 20 cm de medida de comprimento do diâmetro. No caderno, determine:

a) a medida de perímetro desse círculo;

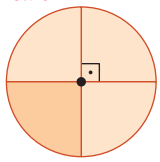
b) a medida de área desse círculo.

13. Determine a medida de área dos setores circulares destacados de laranja-escuro nas figuras a seguir. O raio de cada figura tem medida de comprimento de 6 cm.

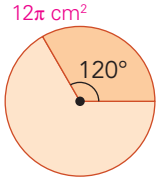
a) 18π cm^2



b) 9π cm^2



c) 12π cm^2

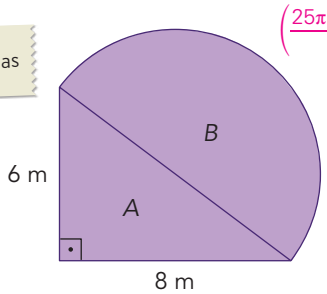


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

15. Como $\pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 1^2 = 8\pi$, a medida de área pedida é igual a 8π cm^2.

14. Um terreno, que custa R$ 15.000,00, tem o formato da figura apresentada a seguir. Considerando as medidas de comprimento indicadas e que a parte *B* é um semicírculo, calcule a medida de área desse terreno.

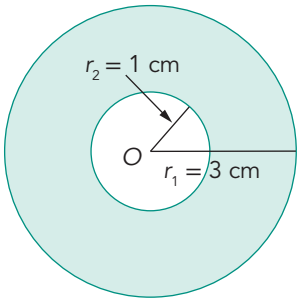
As imagens não estão representadas em proporção.



$\left(\frac{25\pi + 48}{2}\right)$ m^2

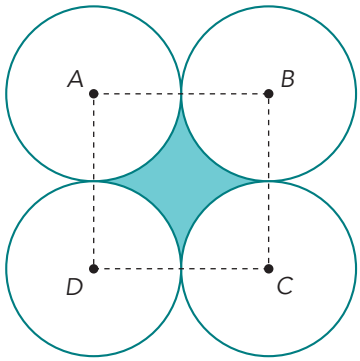
Banco de imagens/Arquivo da editora

15. Qual é a medida de área da arruela representada a seguir?



Banco de imagens/Arquivo da editora

16. A medida de perímetro do quadrado *ABCD* da figura é 32 cm. Calcule a medida de área da parte colorida da figura. $16(4 - \pi)$ cm^2



Banco de imagens/Arquivo da editora

Texto para a próxima atividade.

Dizemos que um elemento químico é radioativo quando ele é capaz de emanar energia por meio de ondas ou de partículas. Alguns elementos conhecidos pela radioatividade são o plutônio, o urânio e o rádio. Um grave evento envolvendo radiação foi a explosão da usina nuclear de Chernobyl, na Ucrânia, em 1986. Depois desse evento, foi definido que ninguém poderia morar a menos de 30 km de onde a explosão aconteceu, para evitar contaminações por radiação.

Ucrânia: Planta nuclear de Chernobyl



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte: CHMIELEWSKI, Kenny. *Encyclopaedia Britannica*, Inc. Cidade: País, 200-.

Professor, se considerar oportuno, ao desenvolver a atividade **17**, comente com os estudantes a importância da adequação às normas de segurança do trabalho em todas as atividades ocupacionais; tais normas visam minimizar ocorrências como acidentes, doenças ocupacionais, entre outras. Questione os estudantes sobre o que é segurança do trabalho e se sabem citar algum exemplo de medida de segurança adotada na escola ou em outros lugares que frequentam.

17. a) Como $\pi \cdot 30^2 = 900\pi \simeq 2826$; logo, $A = 2826$ km^2.

19. $\frac{11,5}{2} = 5,75$; $\pi \cdot r^2 = 4,41\pi \Rightarrow r = 2,1$; $5,75 - 2,1 = 3,65$. Alternativa **b**.

Não escreva no livro

17. Considerando as informações apresentadas no texto e $\pi \simeq 3,14$, responda aos itens no caderno.

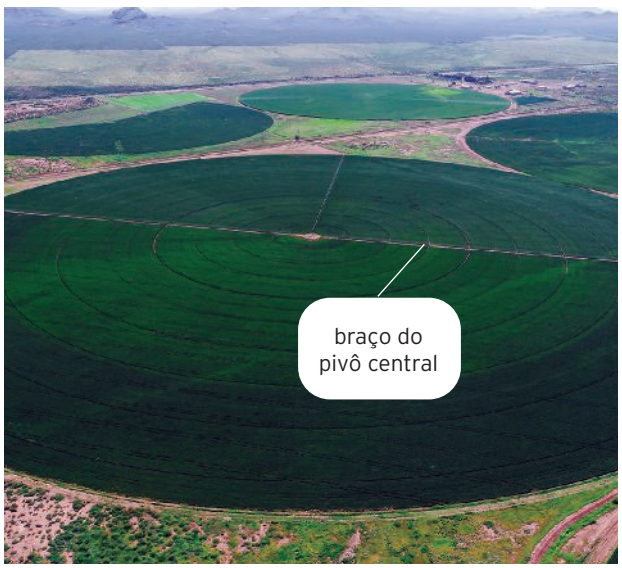
a) Qual foi a medida de área da região mínima que precisou ser desocupada após a explosão da usina?

b) Faça uma pesquisa sobre outros acidentes nucleares e escreva no caderno medidas de segurança que devem ser tomadas pelas indústrias para evitar acidentes como esses. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Texto para a próxima atividade.

O pivô central de irrigação é um método no qual a irrigação é feita por meio de uma torre com uma estrutura suspensa que gira de maneira circular sobre uma região também circular.

Johan Fehr Enns/Shutterstock



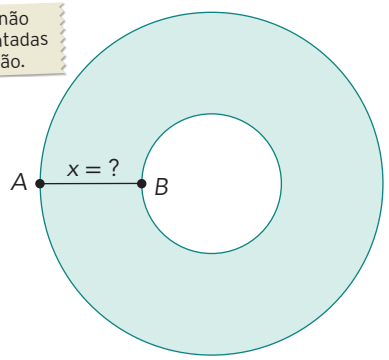
Pivô central de irrigação de uma plantação.

Se utilizado corretamente, esse método de irrigação proporciona excelentes vantagens e resultados. Alguns produtores chegam a atingir uma produtividade de 15 000 kg/ha.

18. Considerando $\pi \simeq 3,14$, calcule a receita bruta que pode ser obtida com essa produtividade em uma área coberta por um pivô central cujo comprimento do braço mede 200 m, sabendo que uma saca de 60 kg do produto é cotada em R$ 47,00. Use uma calculadora para realizar os cálculos. R$ 147.580,00

19. Analise a figura representada a seguir.

As imagens não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que os pontos A e B da figura pertencem ao mesmo diâmetro da circunferência maior, que esse diâmetro tem 11,5 cm de medida de comprimento e que a medida de área limitada pela circunferência menor é $4,41\pi$ cm^2, qual é a medida de comprimento x do segmento de reta $\overline{AB}$, em centímetros?

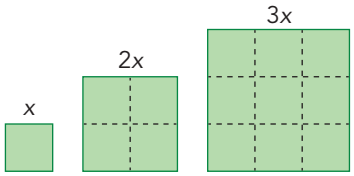
a) 3,5 **c)** 3,75 **e)** 4

b) 3,65 **d)** 3,85

Regiões poligonais semelhantes e razão entre as medidas de área

Nos Anos Finais do Ensino Fundamental, você estudou que polígonos semelhantes têm ângulos homólogos congruentes e lados homólogos proporcionais. Por exemplo, todos os quadrados são semelhantes entre si.

Considere 3 regiões limitadas por quadrados com lados de medidas de comprimento x, $2x$ e $3x$, respectivamente.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que a medida de área de cada região limitada por esses quadrados é, respectivamente, x^2, $4x^2$ e $9x^2$. Quando dobramos a medida de comprimento do lado, a medida de área não dobra (ela quadruplica). E, quando triplicamos a medida de comprimento do lado, a medida de área não triplica (ela nonuplica, ou seja, é multiplicada por 9).

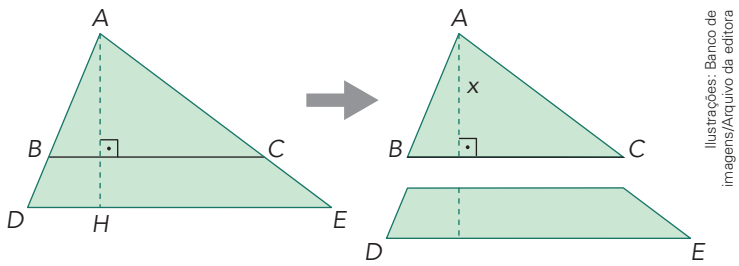
É possível provar que a medida de área de uma região limitada por um polígono é proporcional ao **quadrado** da medida de comprimento do lado.

Se 2 polígonos forem semelhantes e a razão entre as medidas de comprimento dos lados homólogos for k, então a razão entre as medidas de área das regiões limitadas por esses polígonos será k^2.

Essa propriedade também pode ser entendida pelo princípio da proporcionalidade: tomemos um retângulo, com medidas de comprimento x e y dos lados, cuja área da região limitada por ele mede $A(x, y)$. A medida de área da região limitada por um retângulo semelhante a esse, com medidas de comprimento kx e ky dos lados, será $A(kx, ky)$, acompanhe: $A(kx, ky) = k \cdot k \cdot A(x, y) = k^2 \cdot A(x, y)$. Podemos estender essa propriedade para quaisquer superfícies semelhantes.

Atividades resolvidas

4. A representação de uma região limitada por um triângulo escaleno de medida de comprimento de altura $AH = 10$ cm foi cortada perpendicularmente à altura $\overline{AH}$, de modo que as 2 regiões planas resultantes tivessem a mesma medida de área. A que medida de distância do vértice A foi feito o corte?



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução

Se as 2 regiões resultantes do corte (uma região triangular cujo comprimento da altura mede x e uma região limitada por um trapézio) têm a mesma medida de área, então a medida de área de cada uma delas é igual à metade da medida de área da região triangular original. O triângulo menor é semelhante ao maior, pois o corte foi perpendicular à altura, portanto, paralelo à base.

A razão entre as medidas de comprimento das alturas dos triângulos é:

$$k = \frac{h_2}{h_1} = \frac{x}{10}$$

A razão entre as medidas de área é:

$$k^2 = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então:

$$\frac{x}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 5\sqrt{2} \simeq 7{,}1$$

Logo, o corte foi feito a aproximadamente 7,1 cm do vértice A.

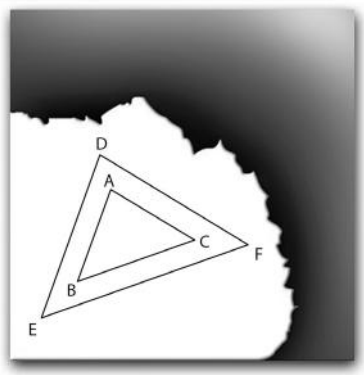
20. **(Etec-SP)**

O papel das doenças na conservação da vida selvagem é por vezes subestimado. Durante expedições no Polo Sul, acredita-se que os cães utilizados para o transporte de trenós tenham transmitido o vírus da cinomose canina a uma espécie de foca que habitava essa região, levando à ocorrência de extensa mortalidade desses animais.

<https://tinyurl.com/y23ykngw> Adaptado. Acesso em: 10 jul. 2024.

Suponha que, em determinado período de uma expedição, esse vírus tenha se propagado na região delimitada pelo triângulo *ABC*, da figura, em que:

Reprodução/Etec-SP, 2019.



- a medida de $\overline{AC}$ é igual a 70 km;
- o ângulo $B\hat{A}C$ é reto;
- o ângulo $A\hat{B}C$ mede 45°.

Professor, destaque para os estudantes a importância de calcular a proporção da figura apresentada em uma atividade a partir dos dados numéricos fornecidos, caso não seja explicitamente pedido que essa análise deva ser feita utilizando as medidas da figura, pois elas nem sempre apresentam a proporção correta.

Após um mês, essa doença atingiu a área correspondente ao triângulo *DEF*, em que:

- a medida de $\overline{DF}$ é igual a 140 km;
- o ângulo $E\hat{D}F$ é reto;
- o ângulo $D\hat{E}F$ mede 45°.

20. $\triangle ABC \overset{AA}{\sim} \triangle DEF$, pois $m(B\hat{A}C) = m(E\hat{D}F)$ e $m(A\hat{B}C) = m(D\hat{E}F)$. Ademais, a razão de semelhança k da medida de comprimento dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ é dada por $\frac{DF}{AC} = 2$ e, consequentemente, a razão entre as medidas de área é igual a 4.
Alternativa **d**.

Sobre a área do triângulo *DEF*, é correto afirmar que ela é:

a) a metade da área *ABC*.
b) a quarta parte da área *ABC*.
c) o dobro da área *ABC*.
d) o quádruplo da área *ABC*.
e) o sétuplo da área *ABC*.

Texto para a próxima atividade.

Os aparelhos elétricos são projetados para operar dentro de certos valores nominais de tensão, corrente e potência. A escolha adequada do fio condutor é crucial para a segurança e o funcionamento eficiente dos aparelhos, uma vez que fios com bitola (área da seção transversal) insuficiente para a corrente elétrica necessária podem superaquecer. Por isso é importante pensar na resistência elétrica de um fio, que depende do comprimento e área da seção transversal dele, pois ela é um fator importante na escolha e no desempenho da fiação para cada situação.

A medida de área da seção transversal do fio é dada pela medida de área (A) da seção circular da parte condutora, $A = \pi r^2$, sendo r a medida de comprimento do raio do círculo.

Infográfico clicável

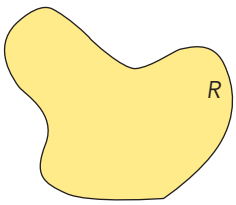
A instalação elétrica de um imóvel deve ser planejada desde a fase de projeto, considerando o uso de aparelhos elétricos. A bitola do fio deve ser escolhida conforme a finalidade: 1,5 mm² para circuitos de iluminação e 2,5 mm² para circuitos de tomadas, conforme a norma ABNT NBR 5410:2004.

21. Um condutor com raio de medida de comprimento de 0,68 mm será utilizado para a instalação elétrica de iluminação de uma residência. Verifique se há riscos de sobreaquecimento no fio.

A medida de área de um condutor que tem medida de comprimento de raio de 0,68 mm, dada por $\pi \cdot 0{,}68^2 \simeq 1{,}45$, é igual a 1,45 mm². Portanto, abaixo da seção mínima recomendada para esse tipo de instalação (1,5 mm²), há risco de sobreaquecimento do fio.

Cálculo aproximado de medidas de área

Estudamos diferentes estratégias para o cálculo da medida de área de uma região plana. Além de dividi-la em regiões poligonais cuja medida de área sabemos calcular, há outras possibilidades, como estudaremos em seguida.



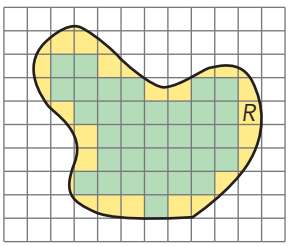
Banco de imagens/ Arquivo da editora

Você saberia calcular a medida de área da região *R* representada?

Qual método podemos adotar para determinar a medida de área de regiões planas com formatos parecidos com o dessa região?

Para responder a essas perguntas, podemos usar o procedimento, descrito em passos, a seguir.

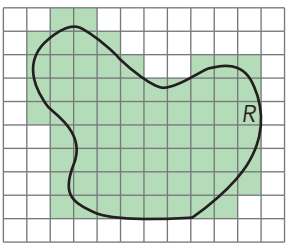
- **1º passo**: Decalcamos essa região em uma malha quadriculada.
- **2º passo**: Considerando a região quadrada limitada por um quadradinho da malha como unidade de medida de área, contamos todos os quadradinhos inteiros da região.



O resultado obtido será 34 quadradinhos.

Dizemos que a **medida de área por falta** da região *R* é 34 ▢.

- **3º passo**: Em seguida, contamos o menor número possível de quadradinhos inteiros que cobrem *R* totalmente.



Assim, temos 69 quadradinhos inteiros cobrindo a região *R*.

Dizemos que a **medida de área por excesso** da região *R* é 69 ▢.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Conseguiu descobrir qual pode ser a medida de área dessa região?

A medida de área da região *R* é maior do que 34 ▢ e menor do que 69 ▢. Uma aproximação razoável para essa medida de área é dada pela média aritmética dos valores encontrados:

$$\frac{34 + 69}{2} = 51{,}5$$

Considerando que a medida de área de cada região quadrada limitada pelo quadrado da malha utilizada nesse caso é 0,25 cm², pois $(0{,}5\text{ cm})^2 = 0{,}25\text{ cm}^2$, então a medida de área aproximada *A* da região *R* é dada por:

$$A \simeq 51{,}5 \cdot 0{,}25\text{ cm}^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A \simeq 12{,}88\text{ cm}^2$$

Tecnologias digitais

Cálculo aproximado da medida de área de regiões poligonais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Vamos agora utilizar um *software* de Geometria dinâmica para calcular a medida de área aproximada de regiões poligonais e comparar com os valores exatos obtidos no próprio *software*.

Para as atividades propostas nesta seção, recomenda-se selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que ofereça essa função. A seguir, apresentamos alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* desse tipo.

1º passo: Acesse as configurações de exibição e habilite as opções para exibir a malha e as malhas principais e secundárias, caso essas opções estejam desabilitadas.

2º passo: Vamos construir sobre a malha quadriculada um pentágono irregular cuja fórmula para calcular a medida de área, em princípio, não conhecemos. Para isso, localize e selecione a ferramenta "Polígono" e, em seguida, determine 5 pontos (de preferência usando vértices dos quadrados da malha principal), como mostrado na imagem.

Professor, verifique se o *software* considera o polígono como uma região poligonal.

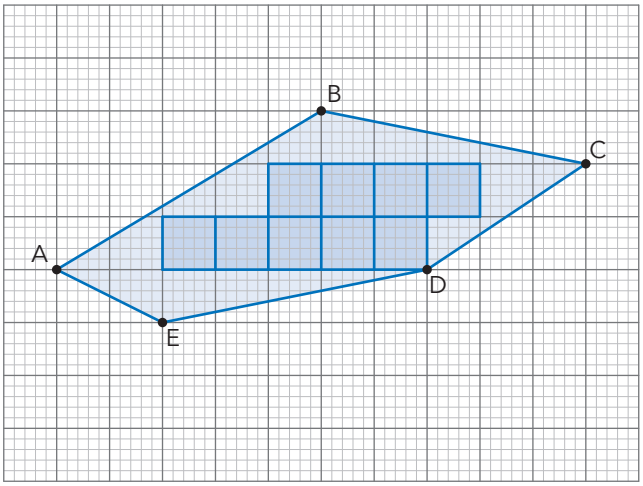
3º passo: Vamos fazer o cálculo aproximado da medida de área da região limitada pelo pentágono. Para isso, vamos considerar a região quadrada limitada por um quadradinho da malha como unidade de medida de área e fazer a média entre a quantidade de quadradinhos que são inteiros da malha internos à região e a quantidade de quadradinhos da malha que cobrem totalmente essa região.

Fique atento

Lembre-se de adaptar as instruções de acordo com o *software* escolhido, já que as interfaces e os procedimentos podem variar.

Professor, oriente os estudantes na escolha do *software* ou aplicativo para os cálculos de modo que o programa escolhido apresente todas as funcionalidades necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir. Auxilie-os também nas explorações iniciais do programa e na identificação das ferramentas e das configurações disponíveis, além de como acessá-las.

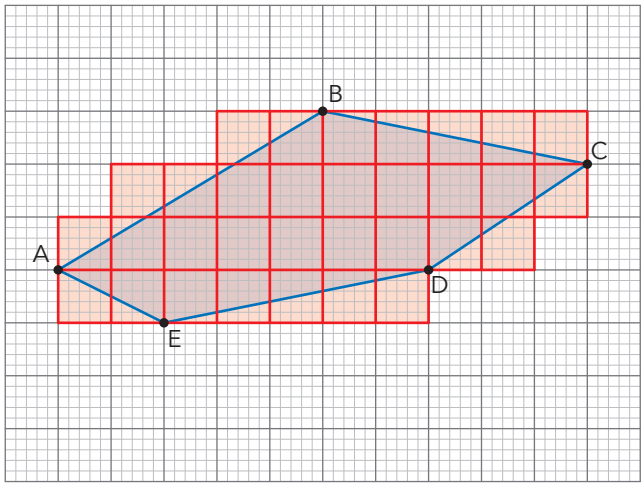
Guilherme Luciano/Arquivo da editora



Exemplo de construção em um *software* de Geometria dinâmica que mostra os quadradinhos totalmente contidos no interior da região limitada pelo polígono.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Nesse exemplo, temos 9 quadradinhos inteiros no interior da região limitada pelo pentágono e 32 quadradinhos cobrem totalmente a região. Portanto, a medida de área aproximada da região limitada pelo pentágono é dada por: $\frac{9 + 32}{2} = 20{,}5$, ou seja, a medida de área é, aproximadamente, 20,5 unidades.

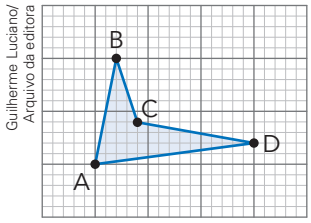


Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção em um *software* de Geometria dinâmica que mostra os quadradinhos contidos em toda a região limitada pelo polígono.

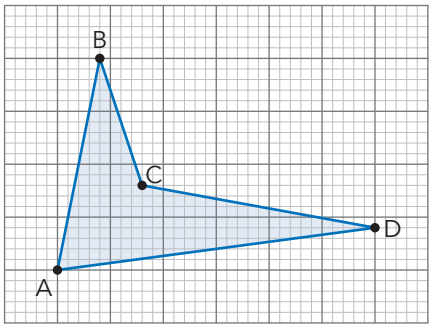
4º passo: Agora, vamos verificar, com o auxílio do *software*, qual é a medida de área exata dessa região limitada pelo pentágono. Para isso, localize a ferramenta de cálculo da medida de área para calcular a medida de área da região poligonal criada.

Note que, nesse exemplo, obtivemos a medida de área exata com o uso da estratégia por falta e por excesso. Nem sempre, porém, essa precisão será possível. Em resultados em que houver divergência entre os valores obtidos para a medida de área, podemos utilizar a malha secundária para contar os quadradinhos, lembrando de dividir o resultado obtido pela quantidade de quadradinhos contidos em cada quadradinho da malha primária, para garantir a mesma unidade de medida. Em outras palavras, quanto menores os quadradinhos da malha, melhor será a aproximação da medida de área desejada. Analise outro exemplo a seguir.



Guilherme Luciano/ Arquivo da editora

Figura **1**.



Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Figura **2**.

Professor, oriente os estudantes a construir a figura com o auxílio da ferramenta de construção de polígono.

1. Depois de salvar seu projeto no *software*, inicie um novo. Repita o 1º passo e o 2º passo para construir o quadrilátero apresentado na figura **1**.

A resposta depende do *software* utilizado pelos estudantes.

2. Repita o 3º passo e o 4º passo para determinar a medida de área aproximada e a medida de área exata da região limitada pelo quadrilátero. Depois, compare os resultados obtidos.

O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
Professor, destaque aos estudantes que não é incomum haver pequenas divergências nas contagens realizadas. Essas variações podem ocorrer devido à perspectiva de quem analisa, ao avaliar os quadradinhos cortados pela linha poligonal representada.

Fique atento

Também podemos alterar o tamanho das malhas quando damos *zoom* nas figuras construídas na maioria dos *sofwares*. A figura **2** é obtida do *zoom* da figura **1**, por exemplo. Porém, quanto mais quadradinhos, mais trabalhosa será a contagem, o que pode não compensar o ganho na aproximação, dependendo da necessidade.

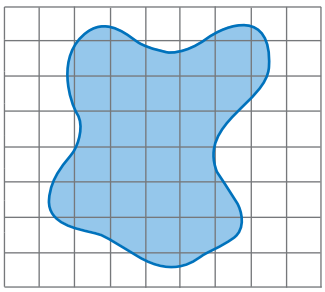
22. Inicialmente, devemos contar as pequenas regiões quadradas inteiras no interior da figura (18) e o menor número de pequenas regiões quadradas que conseguem cobri-la completamente (45). Em seguida, calculamos a média aritmética dessas quantidades: $\frac{18 + 45}{2} = 31{,}5$.

Portanto, uma estimativa para a medida de área pedida é 31,5 unidades.

Atividades

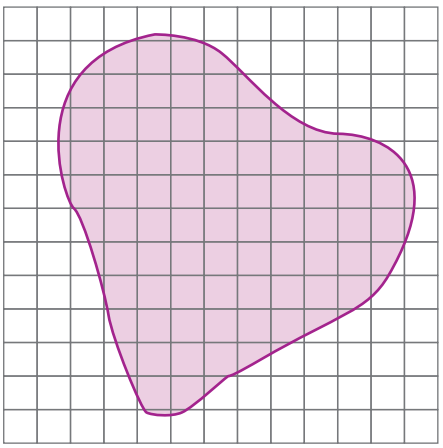
Não escreva no livro

22. Calcule a medida de área aproximada da região plana apresentada. Use a região plana limitada por um quadradinho da malha como unidade de medida de área.



Banco de imagens/Arquivo da editora

23. Samuel derrubou um copo de suco de uva no carpete. Ao ver a mancha, decidiu tentar tirá-la utilizando um produto de limpeza. No entanto, não conseguiu removê-la: ela havia diminuído, mas ficou com o formato representado pela figura.



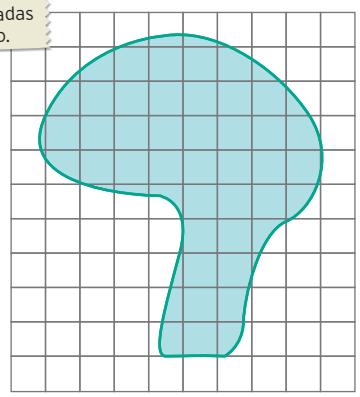
WYM Design/Arquivo da editora

O carpete tem formato quadrado, como representado pela malha quadriculada, e a medida de área dele é 0,6084 m². Qual é a medida de área aproximada, em cm², da mancha que ficou no carpete após a utilização do produto de limpeza? 2 898 cm²

24. Uma equipe de monitoramento utilizou imagens aéreas para determinar a medida de área aproximada de uma mancha de petróleo no oceano, ocasionada pelo vazamento de um navio.

Para fazer o cálculo aproximado, foi usada uma malha quadriculada 10 × 10, em que o comprimento do lado de cada quadrado mede 1,2 cm.

As imagens não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que a equipe fez o cálculo usando a imagem apresentada, qual foi a medida de área aproximada obtida? 64,08 cm²

Texto para a próxima atividade.

Desde 2004, o Brasil usa um sistema de imagens de satélite para detectar, em tempo real, o desmatamento no território.

Uma maneira de calcular a medida de área desmatada é por aproximação, usando a técnica de falta e de excesso, apresentada neste tópico.

25. Determine a medida aproximada de área preservada retratada na imagem considerando a região limitada por um quadradinho da imagem como unidade de medida de área.

Aproximadamente 7,5 unidades de medida de área.



PLANETOBSERVER/SPL/Fotoarena

Imagem de satélite apresentando zona desmatada em Rondônia. A área preservada na parte inferior da imagem corresponde ao território indígena Igarapé Lage. Foto de 2022.

26. Uma consultoria ambiental foi contratada para realizar um estudo sobre a poluição da lagoa Rodrigo de Freitas, no município do Rio de Janeiro (RJ). Para isso, é necessário descobrir a medida de área aproximada da superfície da lagoa.

27. Se contarmos os pontos destacados na figura, encontraremos 96 posicionados na fronteira e 157 no interior dela. Desse modo, pelo teorema de Pick, temos que a medida de área da figura, dada por $A = 157 + \frac{96}{2} - 1 = 204$, é 204 unidades.

a) Pesquise na internet uma imagem aérea da lagoa Rodrigo de Freitas e, com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, calcule a medida de área aproximada da superfície da lagoa, em km². Utilize o passo a passo que você aprendeu na seção *Tecnologias digitais* deste capítulo e considere a escala indicada na imagem. 2 km²

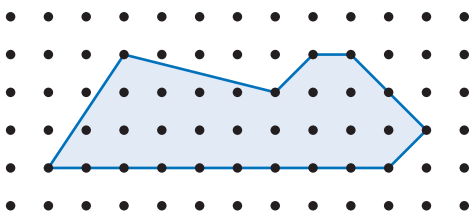
b) Pesquise na internet qual é a medida de área da superfície da lagoa. A medida que você obteve está próxima da real? Resposta pessoal.

Texto para a próxima atividade.

O teorema de Pick, descrito pelo matemático austríaco Georg Pick (1859-1942), é capaz de fornecer a medida de área de uma região limitada por um polígono simples cujos vértices sejam pontos de uma malha pontilhada levando em consideração apenas a quantidade de pontos internos (i) e a quantidade de pontos na fronteira do polígono (f). A relação é a seguinte:

$$A = i + \frac{f}{2} - 1$$

Na figura apresentada a seguir, por exemplo, a quantidade de pontos internos é 15 e a quantidade de pontos na fronteira é 16.



Ericson Guilherme Luciano/ Arquivo da editora

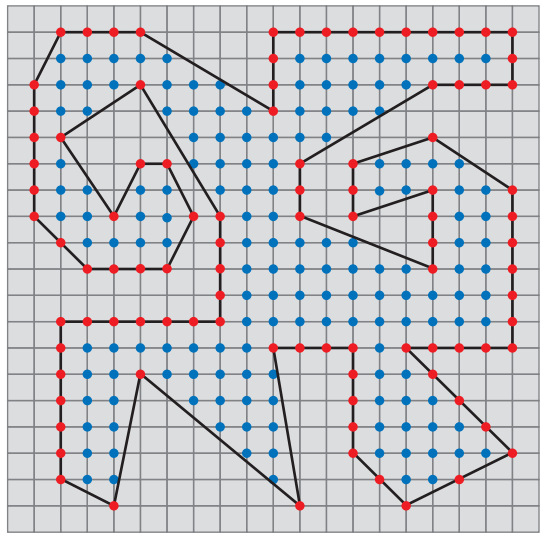
Então, a medida de área da região limitada pelo polígono é:

$$A = 15 + \frac{16}{2} - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = 22 \text{ unidades}$$

Fique atento

O teorema de Pick só pode ser usado se todos os vértices da poligonal forem pontos da malha pontilhada. Em situações práticas, como o cálculo da medida de área de regiões inacessíveis de maneira rápida e com o auxílio de imagens de satélite, o teorema de Pick pode ajudar, desde que troquemos a curva fronteira por uma poligonal nas condições impostas pelo teorema.

27. Use o teorema de Pick para determinar a medida de área da região poligonal apresentada a seguir.

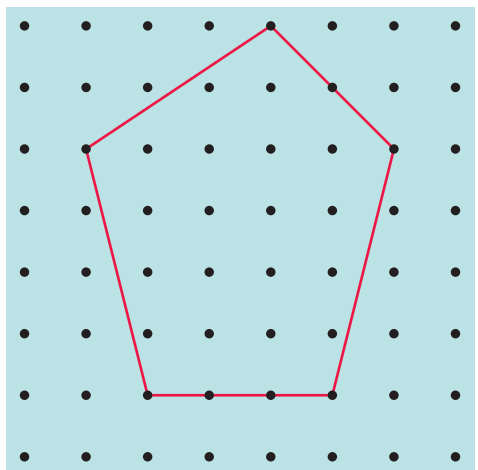


WYM Design/Arquivo da editora

Texto para a próxima atividade.

O Geoplano é um tabuleiro com pinos que estão localizados na mesma medida de distância uns dos outros, na horizontal e na vertical. Com o auxílio de elásticos ou barbantes, é possível construir diferentes figuras poligonais.

28. Se no Geoplano representado a seguir a medida de distância entre pinos consecutivos for 1 cm:



WYM Design/Arquivo da editora

a) como você faria para calcular a medida de área delimitada pelo elástico?

b) qual seria a medida de área da região limitada pelo elástico? 21 cm²

29. Como você explicaria para um colega sua estratégia de resolução da atividade anterior? No caderno, monte um fluxograma que indique o passo a passo da sua estratégia. Resposta pessoal.

Professor, na atividade **29**, é fundamental que os estudantes compreendam que o fluxograma serve como um algoritmo para a resolução de problemas similares. Além disso, é importante que eles percebam que essa abordagem de pensamento computacional pode ser aplicada a diferentes problemas e contextos. Para isso, é necessário que reconheçam padrões diversos e abstraiam a situação de modo a identificar e aplicar um algoritmo já conhecido ou desenvolverem um novo.

Conexões

A Geometria por trás da arte

As imagens não estão representadas em proporção.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual. Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Arte, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.



O Homem Vitruviano, de Leonardo da Vinci, 1490 (lápis e tinta sobre papel, de 34 cm × 24 cm).

Reprodução/Galeria da Academia, Veneza, Itália.

A Geometria tem muitas aplicações práticas no dia a dia. As formas geométricas são muito utilizadas para compreender e representar o espaço em que vivemos. Nas mãos de um artista, a Geometria pode ser uma ferramenta poderosa, pois trata-se de um recurso de grande utilidade não apenas para o processo de produção, mas também para o processo criativo.

Em 1490, Leonardo da Vinci (1452-1519) produziu uma das mais famosas ilustrações dele: *O Homem Vitruviano*. Nessa obra, o artista ilustrou o corpo de um homem inscrito em um círculo e em um quadrado. O centro do círculo corresponde ao umbigo do homem, e as proporções empregadas na construção seriam as ideais, de acordo com a concepção do artista.

Sobre o assunto

Para saber mais sobre a vida e a obra de Leonardo da Vinci, sugerimos assistir a um vídeo sobre a genialidade desse artista e ler uma reportagem acerca dos segredos da obra citada.

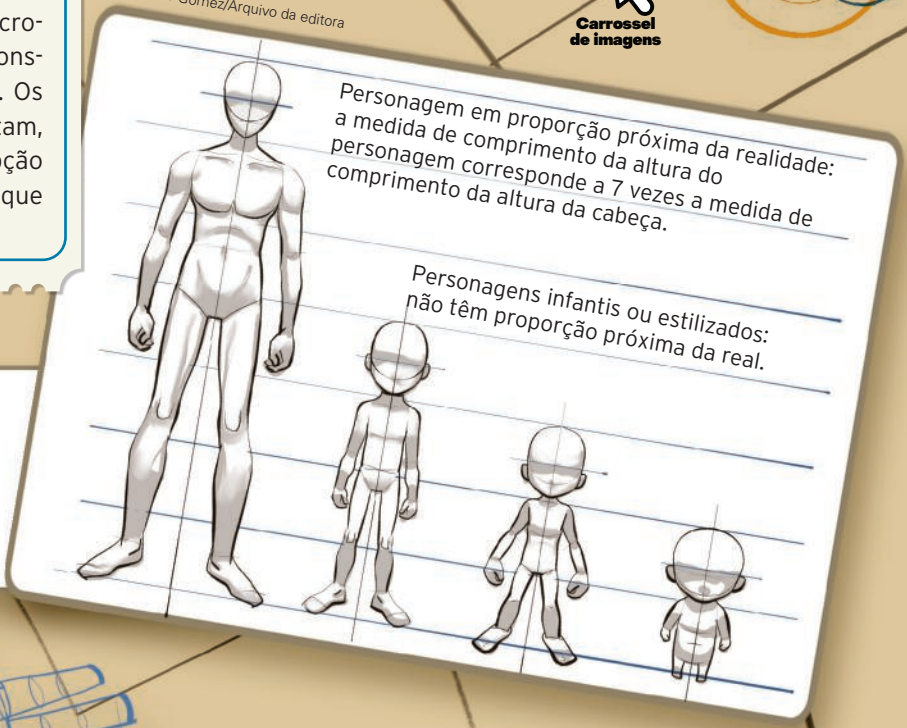
- A OBRA e a genialidade de Leonardo da Vinci. [*S. l.*: *s. n.*], 2021. 1 vídeo (4 min 9 s). Publicado pelo canal *History* Brasil. Disponível em: https://tedit.net/pqxljy. Acesso em: 10 jul. 2024.
- CONSIGLIO, Keka. 10 segredos sobre o desenho mais famoso de Leonardo da Vinci. *Istoé*, [*s. l.*], 25 jun. 2021. Disponível em: https://tedit.net/6utdku. Acesso em: 10 jul. 2024.

Fique atento

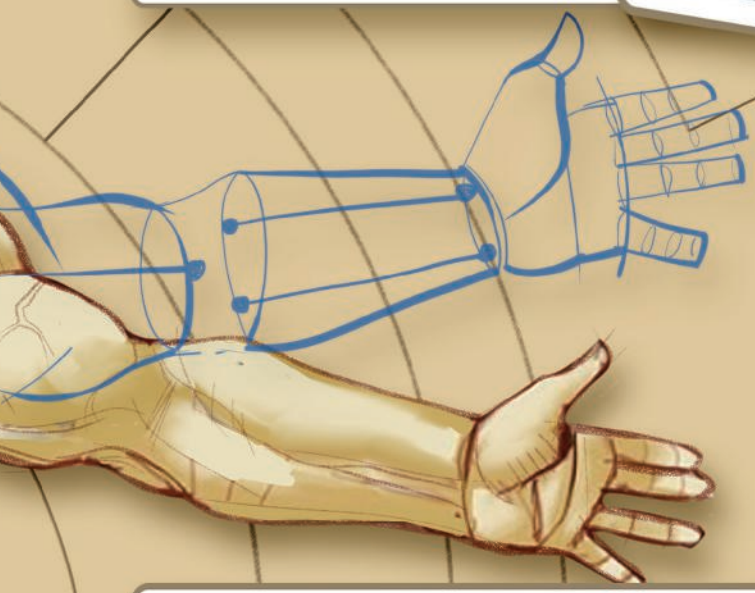
Esboço, também conhecido como croqui ou *sketch*, é o estágio inicial na construção de uma ilustração ou projeto. Os traços utilizados nessa fase apresentam, com poucas informações, a concepção inicial do que será desenvolvido e que dará origem ao produto final.

Carrossel de imagens

Héctor Gomez/Arquivo da editora



As formas geométricas são amplamente utilizadas no traçado de ilustradores. Na criação de personagens, por exemplo, a proporção entre as medidas de comprimento da altura da cabeça e do corpo define o estilo artístico ou a idade do personagem representado.



O traço utilizado para essa releitura da obra de Leonardo da Vinci é comum nas histórias em quadrinhos japonesas, chamadas **mangás**, que diferem das demais HQs devido a traços com características muito particulares. Embora nessa representação o personagem apresente proporções próximas às reais, os olhos, o tórax e os braços são maiores do que na realidade.

Uma das técnicas de desenho usada na ilustração de mangás é o esboço com formas geométricas, que ajuda a manter a proporção entre os membros e a estruturar o corpo dos personagens.

Conecte com o texto

1. Como estudamos, a Geometria e, mais especificamente, os polígonos, podem ser percebidos em diversas manifestações culturais e artísticas. Converse com os colegas e reflitam juntos sobre outras maneiras de expressão artística, além dos mangás, que usam os polígonos na estrutura.

Exemplos de resposta: Dobradura de papel (conhecida como *origami*), esculturas, mosaicos.

Pesquise e debata

2. Além dos mangás, houve um movimento artístico no século XX em que é possível identificar uma forte presença de polígonos. Pablo Picasso foi um dos principais precursores desse movimento. Pesquise e identifique que movimento artístico é esse. Cubismo.

3. Pesquise as técnicas usadas para desenhar mangás. Em seguida, faça um esboço de um desenho no estilo mangá em uma folha de papel sulfite, utilizando exclusivamente formas poligonais. Troque seu esboço com o de um colega e finalize o esboço que ele criou. Depois, responda à seguinte pergunta: É possível criar um desenho complexo e com traços orgânicos, ou seja, inspirado na natureza, apenas usando polígonos? Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2

Ladrilhamento

Não escreva no livro

Situação-problema

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Criando um ladrilhamento

O artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972) aplicou em muitas das obras dele padrões bem criativos. Leia uma citação feita por ele.

> Esta é a fonte mais rica de inspiração, de onde eu alguma vez bebi e ela não está ainda seca. Os desenhos simétricos aqui representados mostram como uma superfície pode ser dividida regularmente em figuras iguais, respectivamente, preenchida com elas. As figuras devem confinar umas com as outras sem que resultem áreas livres.
>
> ESCHER, M. C. *Gravuras e desenhos*. Tradução de Maria Odete Gonçalves. Hamburgo: Taschen, 1994. p. 7.



M.C. Escher's Symmetry Watercolor E94, Fish/© 2020 The M.C. Escher Company - The Netherlands. All rights reserved. www.mcescher.com

Peixes, de M. C. Escher, 1955 (aquarela de 359 mm × 268 mm).

Você já percebeu que é comum o uso de certos padrões de imagens e de figuras que se encaixam em cerâmicas de paredes, pisos ou calçadas? Quem nunca brincou de pisar apenas nas partes de determinada cor ou formato enquanto caminhava por uma rua?

Em situações como essas, é comum encontrar regiões limitadas por figuras geométricas que, quando justapostas, cobrem perfeitamente o plano, sem deixar espaços entre elas e sem haver sobreposições. Você já se perguntou como esse padrão é obtido?

Em uma folha à parte, represente um quadrado e tente preenchê-lo com regiões limitadas por figuras geométricas planas que se repitam. Depois dessa experiência, pense um pouco em como foi o processo de criação e responda às perguntas a seguir no caderno. Respostas pessoais.

a) Quais figuras geométricas você utilizou?

b) Você conseguiu preencher todo o quadrado ou sobrou algum espaço vazio?

c) Você seguiu alguma estratégia para preencher o quadrado?

d) Você acredita que algumas formas geométricas, ou combinações delas, podem facilitar essa montagem?

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade.

A ideia de ladrilhamento

Ladrilhar (ou pavimentar) é recobrir uma superfície com regiões limitadas por figuras geométricas planas regulares ou irregulares (os ladrilhos), colocadas uma ao lado da outra, sem espaços vazios e sem sobreposição entre elas.

Fique atento

Os ladrilhamentos também são conhecidos como **mosaicos** ou **tesselação**.

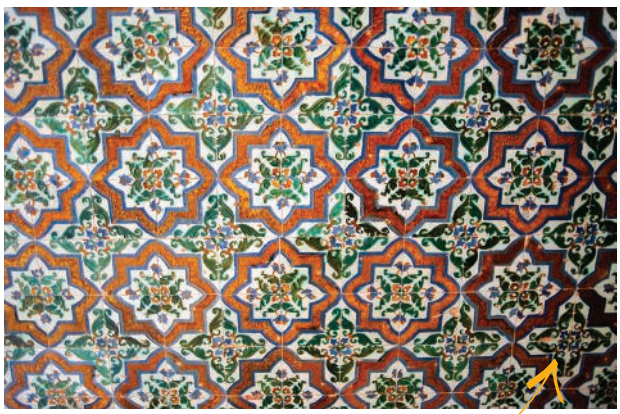


Alexey Krav/Shutterstock

Instalação de piso composto de peças de concreto com formato retangular e quadrado. No ladrilhamento não pode haver espaços vazios ou sobreposição entre as peças usadas.

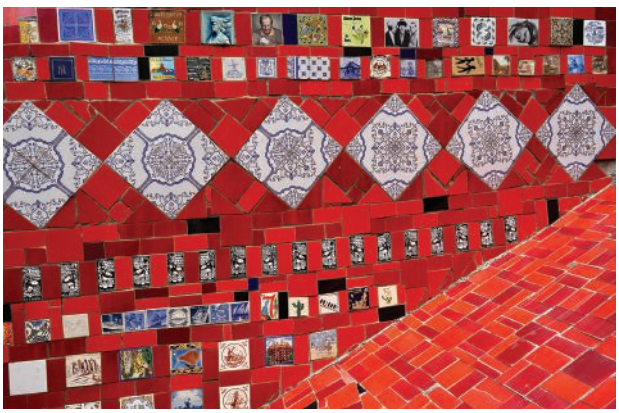
Estima-se que a arte de ladrilhar data de aproximadamente de 5000 a.C., iniciando-se com a aplicação de pedras para revestir o chão e as paredes de casas. Desde então, as mais diversas civilizações aplicaram a técnica de ladrilhamento para decorar casas, templos, palácios, etc.

As imagens não estão representadas em proporção.



Rosanne de Vries/Shutterstock

Parede do Palácio de Alhambra, em Granada, Espanha. A maior parte da estrutura foi construída entre 1248 e 1354. Foto de 2020.



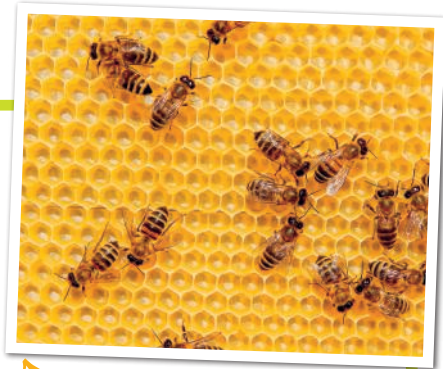
Andrew Sutherland/Alamy/Fotoarena

Parede da escadaria Selarón, no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2023.

Sobre o assunto

Certos elementos na natureza se desenvolvem de maneira ordenada, seguindo um padrão bem determinado. Um exemplo disso é uma colmeia de abelhas, que apresenta padronização no formato e na distribuição dos favos.

Para saber mais sobre esse assunto, você pode ler o livro *As maravilhas da Matemática*, de Malba Tahan. Rio de Janeiro: Bloch, 1987.



weter78/Shutterstock

Parte de uma colmeia de abelhas.

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Ladrilhamento

Vamos utilizar algumas funções e ferramentas de *softwares* de Geometria dinâmica que permitem construir diferentes tipos de malha a partir de um polígono, além de nos ajudar a investigar quais polígonos regulares podem ladrilhar perfeitamente o plano.

Para as atividades propostas a seguir, sugerimos selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que permita a construção de polígonos. Na sequência, apresentamos alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* desse tipo.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

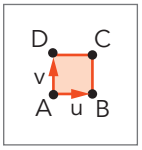
Malha quadriculada

1º passo: Na janela de visualização do *software* selecionado, represente um pequeno quadrado, que será a base da malha. Para isso, localize e utilize a ferramenta para criar um polígono regular, determine 2 pontos (*A* e *B*) e insira a quantidade de lados do polígono (neste caso, são 4).

Assim, obteremos um quadrado cujos vértices são os pontos *A*, *B*, *C* e *D*.

2º passo: Para construir a malha quadriculada, precisamos replicar, lado a lado, o quadrado obtido no passo anterior. Por isso, vamos criar 2 vetores: o vetor $\overrightarrow{AB}$, que é necessário para replicar esse quadrado para a direita, e o vetor $\overrightarrow{AD}$, que é necessário para replicar esse quadrado para cima.

Para isso, localize e selecione a ferramenta para criação de vetor e, para definir $\overrightarrow{AB}$, clique nos pontos *A* e *B*, nessa ordem. Em seguida, para definir $\overrightarrow{AD}$, clique na ferramenta e nos pontos *A* e *D*, nessa ordem. O *software* deve nomear os vetores de *u* e *v*, respectivamente.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Exemplo de construção no *software* de Geometria dinâmica após o 2º passo.

Fique atento

Caso o *software* selecionado não exiba o nome de alguns elementos (por exemplo, dos vetores), experimente selecionar o objeto que não está nomeado, acessar as configurações dele e selecionar a opção de exibir o rótulo/nome.

3º passo: Vamos criar 2 controles deslizantes – um para determinar a quantidade de colunas de quadrados da malha e outro para determinar a quantidade de linhas. Localize e selecione a ferramenta de controle deslizante e, em seguida, clique em um ponto próximo ao topo da janela de visualização. Indique o nome do primeiro controle, que será "coluna", valor mínimo 0, valor máximo 20 e incremento 1. Repita esse procedimento para criar o segundo controle, que chamaremos de "linha", com valor mínimo 0, valor máximo 10 e incremento também 1.

Fique atento

O valor que digitamos após o nome de um controle deslizante será o valor inicial; nesse caso, deixamos tanto a coluna quanto a linha iguais a 1. Se você quiser que o valor inicial seja 2, por exemplo, basta digitar: **linha=2**.

4º passo: Localize e selecione a opção para exibir o campo de entrada de comandos. Insira o comando a seguir.

L1=Sequência(Transladar(pol1,i*u),i,0,coluna−1)

Esse comando constrói uma sequência de polígonos congruentes ao quadrado que foi representado inicialmente (nomeado por **pol1**) e transladado na direção do vetor *u*. A quantidade de elementos da sequência é dada pelos 2 últimos parâmetros da fórmula: **0** significa que o primeiro polígono da lista será transladado "0 vez" (portanto, corresponde ao próprio quadrado inicial); e **coluna−1** significa que o último polígono dessa sequência será transladado uma vez a menos do que o indicado no controle deslizante nomeado "coluna".

5º passo: Finalmente, vamos transformar a lista **L1** (que corresponde a uma linha de quadradinhos) em um retângulo composto de quadradinhos. Para isso, vamos usar um comando muito parecido com o anterior. No campo de entrada, insira o comando a seguir.

L2=Sequência(Transladar(L1,i*v),i,0,linha−1)

Fique atento

A quantidade de polígonos nessa sequência, que inicia em zero e varia até **coluna−1**, será exatamente igual ao número indicado no controle deslizante nomeado coluna. Verifique!

Reflita

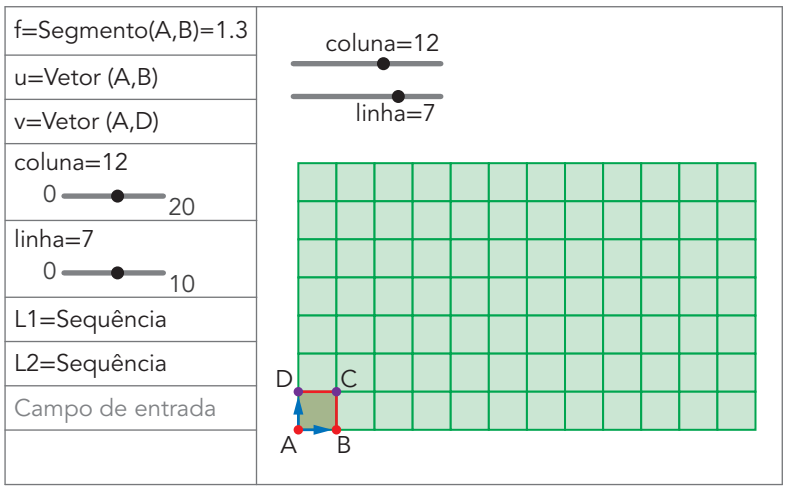
Depois de analisar o comando que você digitou no 5º passo, responda no caderno.

a) Qual é o efeito que esse comando causa à lista **L1**? O comando repete os elementos de **L1**. Replica a linha de quadradinhos para cima.

b) Qual vetor define a direção da sequência de figuras gerada por **L2**? O vetor *v*.

c) Quantos quadradinhos haverá na sequência **L2** se o controle deslizante "linha" indicar o número 2? 2 quadradinhos.

6º passo: Agora, podemos controlar a quantidade de linhas e colunas da malha quadriculada apenas movendo os controles deslizantes.



Exemplo de construção no *software* de Geometria dinâmica após o 6º passo.

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

1. Explique de que modo você construiria uma malha quadriculada composta de 135 quadradinhos apenas movimentando os controles deslizantes "linha" e "coluna".

1. Exemplo de resposta: Posicionando o controle deslizante "linha" no número 9 e o controle "coluna" no número 15.

2. Usando o *software* escolhido, crie uma malha no plano cartesiano usando outra figura geométrica plana.

Resposta pessoal. Exemplo de resposta: malha hexagonal regular ou malha triangular regular.

Ladrilhamentos regulares e ladrilhamentos semirregulares

As imagens não estão representadas em proporção.

Em quais condições é possível pavimentar o plano utilizando apenas regiões limitadas por polígonos regulares?



Suti Stock Photo/Shutterstock

Pavimento composto de regiões limitadas por hexágonos regulares.



chirajut/Shutterstock

Pavimento composto de regiões limitadas por quadrados e octógonos regulares.

Estudamos, na seção *Tecnologias digitais*, que é possível construir malhas usando quadrados. As regiões limitadas por esse polígono cobrem perfeitamente o plano. Mas, para responder à pergunta anterior, temos de verificar as medidas de abertura dos ângulos dos demais polígonos regulares.

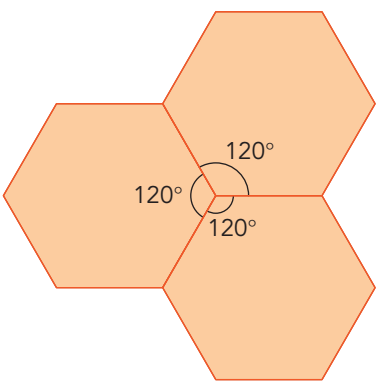
Para que não haja espaço entre as regiões limitadas por polígonos regulares e não ocorra a sobreposição delas, é necessário que a soma das medidas de abertura dos ângulos adjacentes desses polígonos seja 360°, ou seja, uma volta completa. E como determinar qual é a medida de abertura de um ângulo interno de um polígono regular?

Sabemos que a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a $(n - 2) \cdot 180°$, e, no caso dos polígonos regulares, como os ângulos internos são congruentes, podemos indicar a medida de abertura a_i dividindo $(n - 2) \cdot 180°$ pela quantidade de lados n do polígono. Dessa maneira, podemos representar essa medida por:

$$a_i = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$$

Por exemplo, qual é a medida de abertura de cada um dos ângulos internos de um hexágono regular?

$$a_i = \frac{(6 - 2) \cdot 180°}{6} = \frac{4 \cdot 180°}{6} = 120°$$

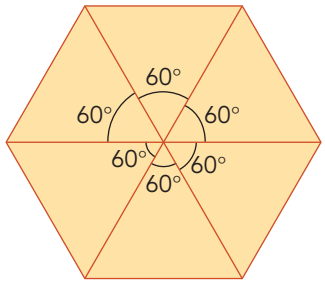
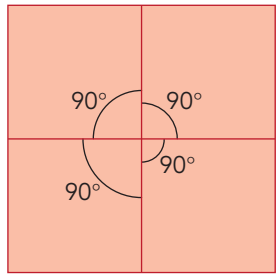
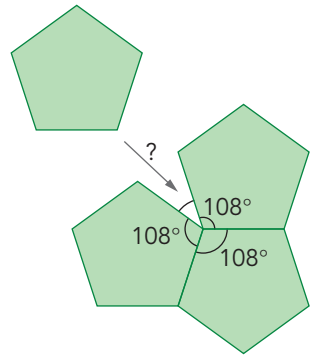


Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, ao juntarmos 3 regiões limitadas por hexágonos regulares, todos com um dos vértices em um ponto em comum do plano, teremos um ângulo com medida de abertura igual a 360° (pois $360° = 120° + 120° + 120°$) e não teremos espaços vazios nem sobreposições entre as regiões limitadas, o que possibilita ladrilhar o plano.

Será que acontece o mesmo com outros polígonos regulares?

Analise o que ocorre quando justapomos regiões limitadas por triângulos equiláteros, quadrados e pentágonos regulares.

Triângulo equilátero	Quadrado	Pentágono regular
		
$4 \times 60° = 360°$ Permite ladrilhar o plano.	$4 \times 90° = 360°$ Permite ladrilhar o plano.	Não permite ladrilhar o plano.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Reflita

Professor, sugerimos que utilize um *software* de Geometria dinâmica para mostrar que não é possível ladrilhar um plano usando apenas heptágonos regulares.
As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Não é possível ladrilhar o plano usando heptágonos regulares. Por que isso ocorre? E no caso de polígonos regulares com mais de 7 lados, é possível compor um ladrilhamento utilizando regiões limitadas por apenas um desses tipos de polígono?

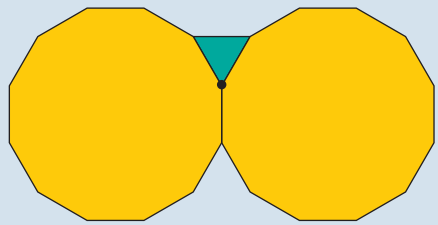
Utilizando apenas um tipo de região limitada por um polígono regular, só é possível compor um ladrilhamento com regiões limitadas por triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos regulares. Os ladrilhamentos compostos de regiões limitadas por apenas um tipo de polígono regular são chamados de ladrilhamentos **regulares** ou **platônicos**.

É possível ladrilhar superfícies planas utilizando regiões limitadas por mais de um tipo de polígono regular. Esses ladrilhamentos são chamados de **semirregulares** ou **arquimedianos**.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Analise um dos vértices do ladrilhamento semirregular composto de uma região limitada por um triângulo equilátero e regiões limitadas por dodecágonos regulares.



Banco de imagens/Arquivo da editora

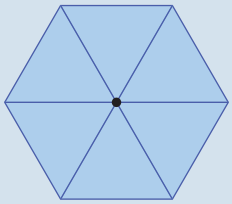
Em torno de cada vértice desse ladrilhamento, há 2 regiões limitadas por dodecágonos regulares, cujas medidas de abertura dos ângulos internos são iguais a 150°, e uma região limitada por um triângulo equilátero, cuja medida de abertura dos ângulos internos é igual a 60°. Podemos representar a quantidade de lados das regiões em torno desse vértice por (12, 12, 3), e as medidas de abertura dos ângulos em torno do vértice por (150°, 150°, 60°).

Não escreva no livro

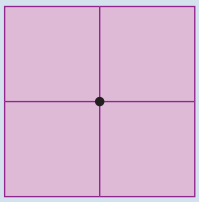
No caderno, represente a quantidade de lados das regiões e as medidas de abertura dos ângulos em torno do vértice destacado em cada um dos ladrilhamentos a seguir.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

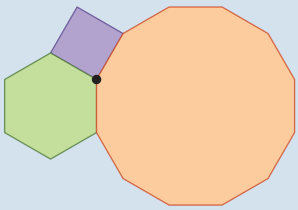
a) (3, 3, 3, 3, 3, 3) e (60°, 60°, 60°, 60°, 60°, 60°).



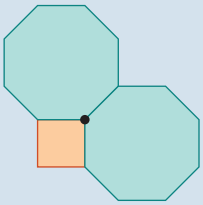
b) (4, 4, 4, 4) e (90°, 90°, 90°, 90°).



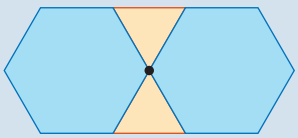
c) Exemplo de resposta: (4, 6, 12) e (90°, 120°, 150°).



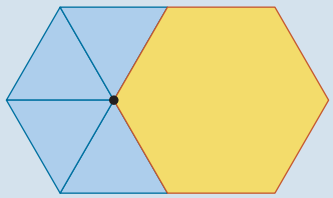
d) Exemplo de resposta: (4, 8, 8) e (90°, 135°, 135°).



e) Exemplo de resposta: (3, 6, 3, 6) e (60°, 120°, 60°, 120°).



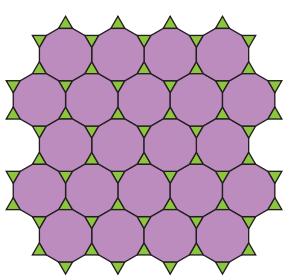
f) Exemplo de resposta: (3, 3, 3, 3, 6) e (60°, 60°, 60°, 60°, 120°).

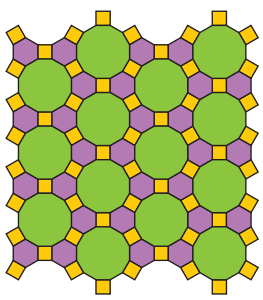


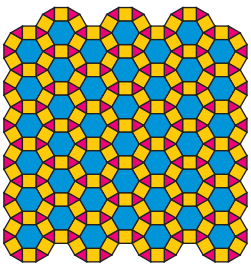
2. Nos ladrilhamentos representados na atividade anterior, qual é a soma das medidas de abertura dos ângulos ao redor de cada vértice? Como estudado nos itens da atividade anterior, a soma das medidas de abertura dos ângulos em torno do vértice destacado é sempre igual a 360°.

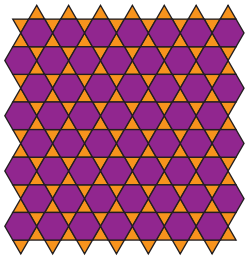
Podemos ladrilhar superfícies planas utilizando regiões limitadas por mais de um tipo de polígono regular, considerando que a intersecção entre esses polígonos seja sempre um lado, um vértice ou encontra-se vazia e de modo que a distribuição entre os polígonos em torno de cada vértice seja sempre a mesma. Existem apenas 8 tipos de ladrilhamento semirregular; analise 4 deles a seguir.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora









Note que, para todos os ladrilhamentos que estudamos (regulares e semirregulares), sempre são atendidas as seguintes condições:

- os ladrilhos são regiões limitadas por polígonos regulares;
- a intersecção de 2 polígonos é sempre um lado, um vértice ou encontra-se vazia;
- a distribuição dos polígonos ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

Atividades

Professor, o estudo das transformações geométricas é proposto pela BNCC para os Anos Finais do Ensino Fundamental. Se necessário, retome esse conteúdo.

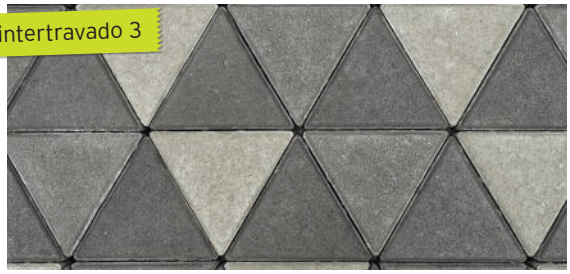
Não escreva no livro

Texto para a próxima atividade.

Peça aos estudantes que considerem que a rotação realizada pelo instalador é em relação à região que corresponde a um dos "vértices" da figura que representa o formato da face do bloco (que funcionará como o centro de rotação).

O piso chamado **intertravado** é composto de blocos de concreto que se "encaixam" facilmente para ladrilhar ou pavimentar calçadas, praças, estacionamentos, ciclovias, entre outros espaços. Eles apresentam diversos formatos e, ao serem colocados no chão, o instalador pode fazer uma rotação do bloco em uma medida de abertura de ângulo, dependendo do formato da face superior da peça.

1. Copie o quadro a seguir no caderno, compondo na primeira coluna apenas o nome das imagens, e complete-o indicando o formato da face superior dos blocos, bem como a medida de abertura do ângulo de rotação que permite o encaixe desses blocos.

As imagens não estão representadas em proporção. Imagem	Formato da face superior	Medida da abertura do ângulo de rotação
Piso intertravado 1  4289phongphan saelee6395/Shutterstock	Hexágono regular	60°
Piso intertravado 2  Busiukas/Shutterstock	Quadrado	90°
Piso intertravado 3  pattang/Shutterstock	Triângulo equilátero	120°
Piso intertravado 4  Hatai/Shutterstock	Dodecágono não regular	120°

Professor, indique aos estudantes que, para completar o quadro, basta analisar as fotografias, identificando o formato da face superior dos blocos que compõem o piso, e lembrar que um polígono regular de *n* lados tem *n* eixos de simetria radial (de rotação).

2. Ladrilhos com formato de triângulo equilátero e ladrilhos com formato de quadrado, ou ladrilhos com formato de triângulo equilátero com ladrilhos com formato de hexágono regular.

Não escreva no livro

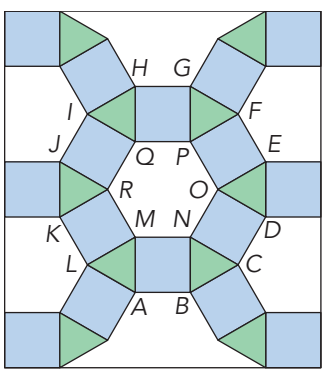
Texto para a próxima atividade.

Se essa rua
Se essa rua fosse minha
Eu mandava
Eu mandava **ladrilhar**
Com pedrinhas
Com pedrinhas de brilhante
Para o meu
Para o meu amor passar.

Cantiga popular.

2. Na famosa cantiga de roda, o eu lírico deseja ladrilhar uma rua com pedrinhas de brilhante. Suponha que as pedrinhas de brilhante sejam ladrilhos e que ele disponha de ladrilhos com os seguintes formatos: triangular, quadrangular, pentagonal e hexagonal, todos regulares e com a mesma medida de comprimento do lado. Porém, ele deve utilizar exatamente 2 desses tipos para ladrilhar a rua. Quais formatos podem ser escolhidos?

3. Antes de iniciar uma pintura no teto de uma loja, João fez um esboço em uma folha qualquer. Nesse esboço, representou vários polígonos e coloriu a região interior de alguns deles, compondo a imagem a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

No meio do serviço, João decidiu deixar a figura do centro do teto (*MNOPQR*) sem pintar. Sabendo que a figura formada pelos vértices *ABCDEFGHIJKL* é um dodecágono regular e que a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$ é 42 cm, qual é a medida de área aproximada da região limitada pelo polígono *MNOPQR*? Considere $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.

a) 749,7 cm²
b) 4 498,2 cm²
c) 2 249,1 cm²
d) 8 996,4 cm²
e) 947,7 cm²

Alternativa **b**.

4. Pretende-se revestir todas as paredes de uma cozinha com azulejos quadrados com lados de medida de comprimento de 15 cm. As medidas de dimensão desse cômodo seriam: piso de 4,5 m × 6 m e pé-direito de 3 m. Em cada uma das paredes menores há uma porta ocupando um espaço de 0,90 m × 2,10 m e em uma das outras paredes, uma janela de 2,10 m × 0,45 m.



Anastasiia Makarova/Shutterstock

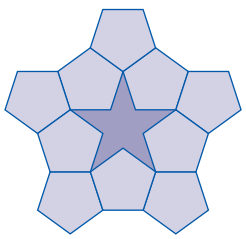
Azulejos portugueses com diferentes motivos gráficos compondo imagens que apresentam simetrias de reflexão, rotação e translação.

Considerando que não há perda nem desperdício de material e que o fornecedor só entrega caixas com 300 peças, quantas caixas devem ser compradas?

a) 8 caixas.
b) 9 caixas.
c) 10 caixas.
d) 12 caixas.
e) 15 caixas.

Alternativa **b**.

5. Camila calculou a soma das medidas de abertura dos ângulos internos da figura formada no centro do mosaico ilustrado a seguir e obteve 180°.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Depois ela refez as contas e percebeu que cometeu um erro no cálculo anterior. Qual foi o valor correto obtido por Camila?

a) 1440°
b) 360°
c) 540°
d) 1800°
e) 1260°

Alternativa **a**.

Professor, a atividade **4** favorece o desenvolvimento do TCT *Diversidade Cultural*.

Além da sala de aula

Marjorie Rice

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.
Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de História, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Marjorie Rice (1923-2017) nasceu em São Petersburgo, nos Estados Unidos, e foi criada em uma pequena fazenda no sul de Oregon, onde frequentou uma escola de campo.

Rice sempre teve interesse nos padrões, cores e formatos da natureza. Enquanto estava cursando o Ensino Médio, ela estudou **taquigrafia** e digitação, e, apesar de ter interesse no curso de Matemática, não tinha permissão para frequentá-lo. Alguns anos após concluir o Ensino Médio, Marjorie se casou, tornando-se mãe de 5 filhos e dona de casa em período integral. Ela nunca perdeu o interesse pela Matemática e continuava estudando por conta própria.

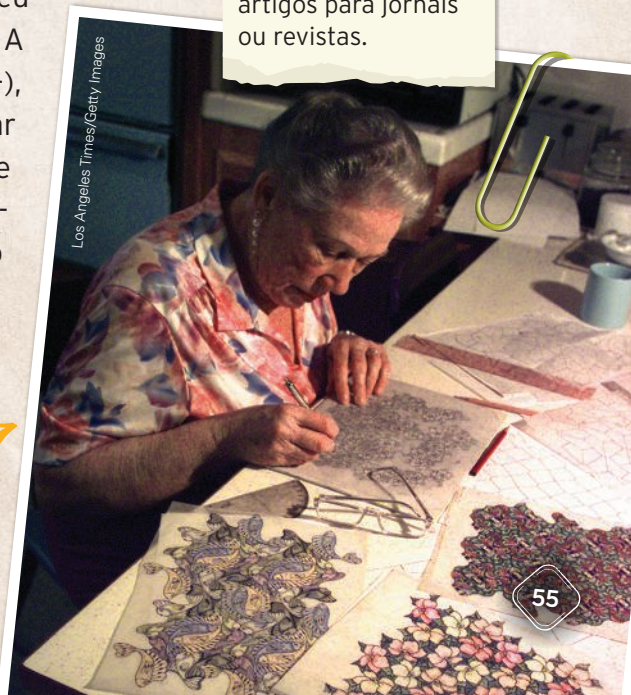
No final de 1975, Marjorie se deparou com um problema matemático publicado pelo escritor e matemático estadunidense Martin Gardner (1914-2010) na revista *Scientific American*. Mesmo tendo apenas conhecimentos de Matemática do Ensino Médio, ela empenhou-se para resolver o problema.

O problema proposto era relativo à pavimentação de um plano utilizando regiões limitadas por **pentágonos convexos**. Apesar do interesse científico, por não ter formação específica em Matemática, Rice não estava habituada com a notação que os **articulistas** utilizavam na revista. Então, para resolver o problema, trabalhou por um longo tempo utilizando a própria notação.

Encontrou (entre dezenas de casos de ladrilhamento do plano) não 1, mas 4 outros casos de regiões limitadas por pentágonos convexos que pavimentavam o referido plano. Quando submeteu à revista a descoberta, por não utilizar a linguagem usual da área, sofreu certo preconceito da sociedade matemática da época. A matemática estadunidense Doris Schattschneider (1939-), especialista em ladrilhamento e responsável por validar artigos da revista, chamou o registro pessoal de Marjorie de "hieróglifos", mas acabou confirmando as descobertas dela e foi responsável pela divulgação do trabalho nos anos seguintes. Em 1995, Schattschneider organizou uma palestra na Associação Americana de Matemática sobre os ladrilhamentos de Rice, que estava presente e foi aplaudida em pé por todos os presentes.

taquigrafia: técnica de escrita que utiliza caracteres abreviados especiais, permitindo que se anotem palavras com a mesma rapidez com que são pronunciadas.

articulistas: pessoas que escrevem artigos para jornais ou revistas.



Marjorie Rice trabalhando em ladrilhos na mesa da cozinha, nos Estados Unidos. Foto de 1998.

Assim como Rice teve a pesquisa dela negligenciada pela comunidade matemática da época, tendo a descoberta publicada somente em 1978, outros casos similares ocorreram e ainda ocorrem hoje. A distinção e a desigualdade – de gênero e sociocultural – reduzem o espaço da mulher tanto no que diz respeito à inserção no ensino acadêmico quanto no convívio em espaços tradicionalmente tidos como masculinos. Casos como o de Rice demonstram quanto a ciência e a sociedade estão em constante transformação. Ações coletivas e políticas públicas vêm mudando esse cenário para que as mulheres ocupem espaços, produzam e sejam reconhecidas pelas suas próprias soluções e pesquisas.

Indo além: Histórias de mulheres inspiradoras que viraram filme

Pensando na história de Marjorie Rice, propomos a realização de um projeto de valorização das mulheres da comunidade escolar por meio da exibição e discussão de 3 filmes que retratam a história de superação de mulheres em diferentes situações.

Etapas

1. Organização

De acordo com as orientações do professor, organizem-se em três grandes grupos.

2. Pesquisa

Cada grupo será responsável pela exibição de um filme:

- Grupo **1**: ESTRELAS Além do Tempo. Direção: Theodore Melfi. Estados Unidos: Fox 2000 Pictures, 2016.
- Grupo **2**: JOY – O nome do sucesso. Direção: David O. Russell. Estados Unidos: Fox 2000 Pictures, 2015.
- Grupo **3**: RADIOACTIVE. Direção: Marjane Satrapi. Reino Unido: Amazon Studios, 2019.

3. Desenvolvimento

- Cada grupo deve assistir ao filme indicado. Depois, façam um levantamento dos temas que podem ser tratados em um bate-papo informal após a exibição do filme.
- Convidem mulheres da comunidade escolar que possam compartilhar as histórias delas, assim como fizeram as protagonistas dos filmes.

4. Produto final

Opção 1: Sessão de cinema na escola seguida de um bate-papo sobre a valorização das mulheres.

- Escolham a data e o local para exibir o filme para a comunidade escolar.
- Preparem um roteiro para o bate-papo e compartilhem com os apresentadores e convidados.

Opção 2: Seminário e debate sobre os temas presentes nos filmes.

- Pesquisem e preparem um seminário sobre as mulheres que protagonizaram os filmes.
- Debatam com a turma as dificuldades enfrentadas pelas protagonistas, se ainda são presentes hoje e como superá-las.
- Enumerem ações práticas que possam ser feitas na escola para potencializar a presença das mulheres nas carreiras científicas e como empreendedoras.

Professor, para conferir representações gráficas das demais soluções e mais informações referentes ao estudo sobre a pavimentação do plano, recomendamos a leitura da dissertação de mestrado: SOARES, Henrique de Oliveira. *Um estudo sobre a pavimentação do plano euclidiano.* 2019. 75 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2019.

Enem e vestibulares

Não escreva no livro

3. $A = 3A_{piso} + 3A_{espelho} + 2A_{parede} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 3 \cdot (0{,}25 + 0{,}20) + 2 \cdot 0{,}20 \cdot (0{,}25 + 0{,}50 + 0{,}75) \Rightarrow A = 1{,}95$

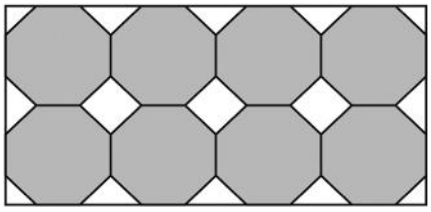
Portanto, a área a ser revestida mede 1,95 m².
Alternativa **e**.

1. **(Enem)** Azulejo designa peça de cerâmica vitrificada e/ou esmaltada usada, sobretudo, no revestimento de paredes. A origem das técnicas de fabricação de azulejos é oriental, mas sua expansão pela Europa traz consigo uma diversificação de estilos, padrões e usos, que podem ser decorativos, utilitários e arquitetônicos.

Disponível em: www.itaucultural.org.br. Acesso em: 31 jul. 2012.

Azulejos no formato de octógonos regulares serão utilizados para cobrir um painel retangular conforme ilustrado na figura.

Reprodução/Enem, 2020.



Entre os octógonos e na borda lateral dessa área, será necessária a colocação de 15 azulejos de outros formatos para preencher os 15 espaços em branco do painel. Uma loja oferece azulejos nos seguintes formatos:

1 – Triângulo retângulo isósceles;

2 – Triângulo equilátero;

3 – Quadrado.

Os azulejos necessários para o devido preenchimento das áreas em branco desse painel são os de formato:

a) 1. **c)** 1 e 2. **e)** 2 e 3.
b) 3. **d)** 1 e 3.

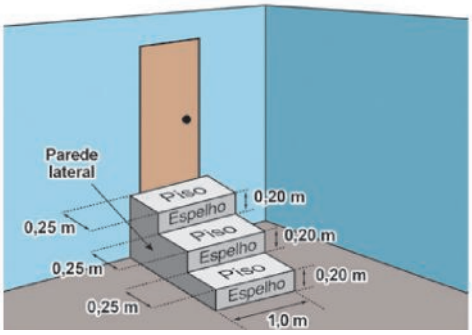
Alternativa **d**.

2. **(ESA)** No início do século passado, foi criado na matemática o *gugol*, número que inspirou o nome do famoso *site* de pesquisa. Sabendo que 1 *gugol* equivale a 10^{100} e imaginando, hipoteticamente, um quadrado de área igual a 1 *gugol*, marque a alternativa que representa o valor da diagonal desse quadrado.

a) $10^{50}\sqrt[3]{3}$ **c)** $10^{100}\sqrt{3}$ **e)** $10^{50}\sqrt{3}$
b) $10^{100}\sqrt{2}$ **d)** $10^{50}\sqrt{2}$

Alternativa **d**.

3. **(Enem)** A figura representa uma escada com três degraus, construída em concreto maciço, com suas medidas especificadas.



Reprodução/Enem, 2023.

Nessa escada, pisos e espelhos têm formato retangular, e as paredes laterais têm formato de um polígono cujos lados adjacentes são perpendiculares. Pisos, espelhos e paredes laterais serão revestidos em cerâmica.

A área a ser revestida em cerâmica, em metro quadrado, mede:

a) 1,20. **c)** 1,65. **e)** 1,95.
b) 1,35. **d)** 1,80.

4. **(Unicamp-SP)** Sr. Gauss tem uma pizzaria, chamada π-zzaria, que vende dois tipos de *pizzas* circulares: uma individual, de diâmetro *d*; e uma de 20 cm de diâmetro, partida em quatro pedaços iguais.

Considerando que o preço de uma *pizza* é proporcional à sua área, qual precisa ser o valor de *d* para que quatro *pizzas* individuais custem o mesmo que a *pizza* mencionada, de quatro pedaços? Alternativa **c**.

a) 6 cm. **c)** 10 cm.
b) 8 cm. **d)** 12 cm.

5. **(Enem)** O dono de uma loja pretende usar cartões imantados para a divulgação de sua loja. A empresa que fornecerá o serviço lhe informa que o custo de fabricação do cartão é de R$ 0,01 por centímetro quadrado e que disponibiliza modelos tendo como faces úteis para impressão:

- um triângulo equilátero de lado 12 cm;
- um quadrado de lado 8 cm;
- um retângulo de lados 11 cm e 8 cm;
- um hexágono regular de lado 6 cm;
- um círculo de diâmetro 10 cm.

O dono da loja está disposto a pagar, no máximo, R$ 0,80 por cartão. Ele escolherá, dentro desse limite de preço, o modelo que tiver maior área de impressão.

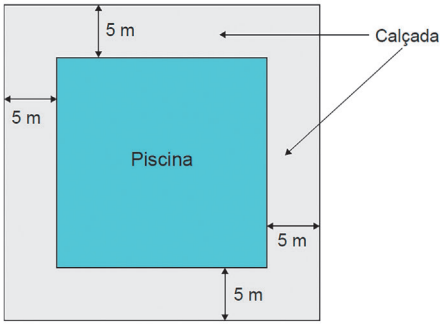
Use 3 como aproximação para π e use 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Nessas condições, o modelo que deverá ser escolhido tem como face útil para impressão um:

a) triângulo.
b) quadrado.
c) retângulo.
d) hexágono.
e) círculo.

Alternativa **e**.

6. **(Enem)** Na planta baixa de um clube, a piscina é representada por um quadrado cuja área real mede 400 m². Ao redor dessa piscina, será construída uma calçada, de largura constante igual a 5 m.



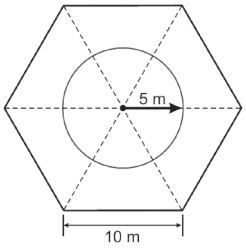
Reprodução/Enem, 2023.

Qual é a medida da área, em metro quadrado, ocupada pela calçada?

a) 1000
b) 900
c) 600
d) 500
e) 400

Alternativa **d**.

7. **(UPM-SP)**



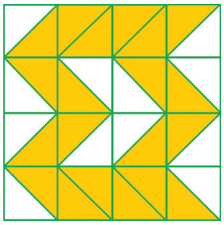
Reprodução/UPM-SP, 2023.

O piso da cozinha da casa da minha tia tem um formato de um hexágono regular, com 10 m de lado e tem no centro um círculo pintado de amarelo, com 5 m de raio. O valor da área da região do piso que não é ocupada pelo círculo é:

Alternativa **c**.

a) $10(30\sqrt{3} - \pi)$ m².
b) $25(12\sqrt{3} - \pi)$ m².
c) $25(6\sqrt{3} - \pi)$ m².
d) $5(30\sqrt{3} - \pi)$ m².
e) $10(15\sqrt{3} - \pi)$ m².

8. **(Unifimes-GO)** A figura indica um ladrilhamento, em amarelo, feito sobre uma malha quadriculada de 4 por 4.



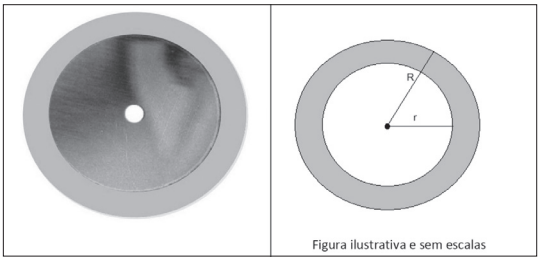
Reprodução/Unifimes-GO, 2020.

A porcentagem dessa malha ocupada pelo ladrilhamento é igual a:

a) 56%.
b) 60%.
c) 58,5%.
d) 64%.
e) 62,5%.

Alternativa **e**.

9. **(UFU-MG)** Considere o disco diamantado [a seguir].



Reprodução/UFU-MG, 2023.

Esse disco corresponde a dois círculos concêntricos de raios, respectivamente, R e r, em que $R > r$, conforme indicado na figura da direita. Além disso, a área da região sombreada dessa figura à direita é igual a 20π cm², e a diferença entre os raios é de 2 cm.

Com base nessas informações, resolva os itens [a seguir no caderno], **justificando suas respostas**. As justificativas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

a) Determine os valores, em cm, dos raios r e R.
$R = 6$ cm; $r = 4$ cm.
b) Determine o comprimento de um segmento de reta interno à região sombreada, posicionado de tal maneira que tenha o maior comprimento possível. $4\sqrt{5}$ cm

Conteúdos e aprendizagens

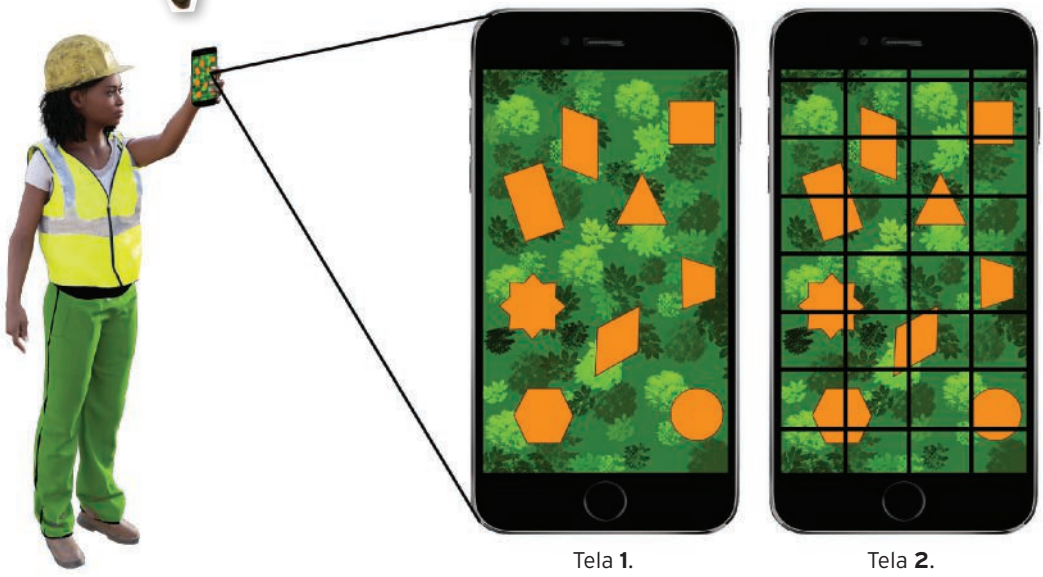


Ilustrações: Luis Moura/Arquivo da editora



André Dib/Pulsar Imagens

Regiões planas e áreas

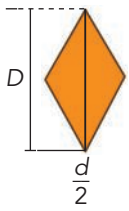


Tela **1**.

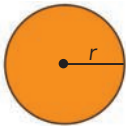
Tela **2**.

Analise a seguir as áreas limitadas pelas figuras geométricas planas que aparecem nas telas.

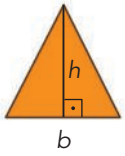
losango



círculo



triângulo

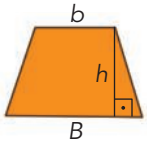


O monitoramento de áreas florestais via satélite permite acompanhar em tempo real atividades de desmatamento ilegal e ajudar na preservação da fauna e da flora.

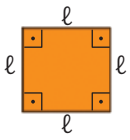
polígono regular



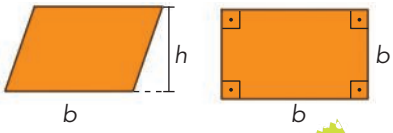
trapézio



quadrado



paralelogramo e retângulo



- Sei determinar expressões para o cálculo da medida de área de regiões planas?
- Sei utilizar diferentes métodos para a obtenção da medida de área de uma região plana?
- Compreendo como um ladrilhamento do plano pode ser usado para calcular a medida de área desse plano? Respostas pessoais.

UNIDADE 2

Geometria espacial



Akarawut/Shutterstock

A Matemática está presente em diversas atividades e profissões. A Geometria, por exemplo, é utilizada frequentemente na construção civil, desde o início da obra, com a concepção do projeto arquitetônico, até a execução, a finalização e a manutenção de diversas construções, como casas, prédios e pontes.

Equipe de profissionais analisa projeto de construção.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta abertura encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

As imagens não estão representadas em proporção.



D and D Photo Sudbury/Shutterstock

Bola de demolição.



Christopher PB/Shutterstock

Misturador de concreto.



Ronnie Chua/Shutterstock

Reservatório Muttart, no Canadá, construído com estrutura metálica. Foto de 2024.



bogubogu/Shutterstock

Assentamento de parede de tijolos.

- Pesquise os diferentes instrumentos que são utilizados em uma obra. Escreva alguns deles no caderno. Exemplo de resposta: Teodolito, bola de demolição e misturador de concreto.
- Imagine que você deseja pintar as paredes de uma sala; como faria para definir a quantidade de tinta necessária? Resposta pessoal.
- Em um canteiro de obras, em que situações pode ser necessário empregar o cálculo da medida de volume?

Exemplo de resposta: O cálculo da medida de volume pode ser usado para calcular a quantidade de cimento necessária para encher uma laje ou para definir o tamanho da caixa-d'água necessária para armazenar uma quantidade de água suficiente para abastecer uma família de 4 pessoas.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

CAPÍTULO 1

Introdução à Geometria espacial

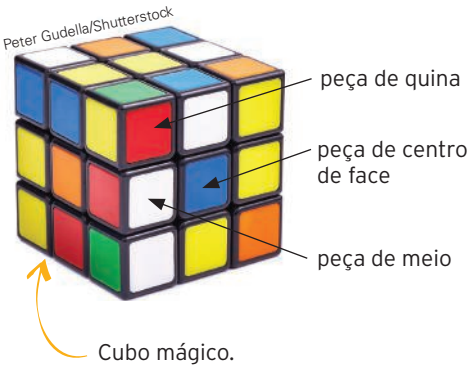
Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação-problema

Cubo mágico

O cubo mágico, também conhecido como cubo de Rubik, foi desenvolvido em 1974 pelo professor Erno Rubik (1944-). O brinquedo é um tipo de quebra-cabeça tridimensional com o formato de um cubo feito com pequenas peças, também com formato cúbico, que se movimentam em torno do eixo central. Para solucionar o cubo mágico, é preciso movimentar as peças até que cada face apresente apenas uma cor.



Cubo mágico.

O cubo mágico foi inventado pelo escultor e professor de arquitetura húngaro Erno Rubik. Em 1974, ele juntou, com elásticos, oito pequenos blocos de madeira, construindo um cubo.

Depois, Rubik pintou os seis lados do cubo com seis cores diferentes, para que, quando alguém girasse as faces do cubo, pudesse visualizar os movimentos realizados. [...]

Originalmente, o brinquedo foi chamado de Cubo Mágico, nome que foi mudado para O Cubo de Rubik [...].

YAZBEK, Letícia. Quem inventou o cubo mágico? *Recreio*, [*s. l.*], 29 maio 2022. Disponível em: https://tedit.net/5k9r8s. Acesso em: 10 jul. 2024.

No caderno, responda às perguntas a seguir sobre o cubo mágico (ou cubo de Rubik).

a) As peças do centro de cada face do cubo mágico são sempre fixas e têm apenas 1 adesivo com uma única cor. Quantas peças de centro há no cubo mágico?
Como o cubo mágico tem 6 faces, há 6 peças de centro.

b) As peças de meio pertencem sempre a 2 faces adjacentes (lados vizinhos do cubo) e têm 2 adesivos de cores diferentes. Quantas são as peças de meio?

c) As peças de quina pertencem a 3 faces simultaneamente e são compostas de 3 adesivos de 3 cores distintas. Quantas são as peças de quina do cubo mágico?
Há 1 peça de quina correspondente a cada vértice. Portanto, há 8 peças de quina.

d) Quantos adesivos há em um cubo mágico?
$6 + (12 \cdot 2) + (8 \cdot 3) = 6 + 24 + 24 = 54$; logo, há 54 adesivos no cubo mágico.

b) Há 1 peça de meio correspondente a cada aresta. Portanto, há 12 peças de meio.

Sobre o assunto

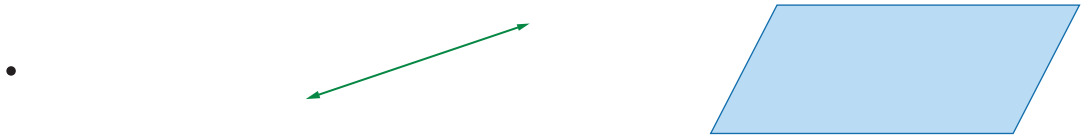
O tempo recorde de solução do cubo mágico, por seres humanos, é de 3,13 segundos. O recorde foi estabelecido pelo estadunidense Max Park (2001-) no dia 11 de junho de 2023 durante um evento na Califórnia. Leia a matéria do *UOL* sobre esse caso, "Jovem resolve cubo mágico em 3 segundos e bate recorde mundial nos EUA", publicada em 15 jun. 2023 e disponível em: https://tedit.net/pm8au0. Acesso em: 18 jul. 2024.

Geometria espacial de posição

Neste capítulo, o estudo da Geometria de posição no espaço será feito de maneira intuitiva, apoiado essencialmente na análise de modelos, figuras e objetos.

Note como representaremos os entes primitivos da Geometria.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora



ponto (A, B, C, ...) reta (r, s, p, ...) plano (α, β, γ, ...)

Você já pode ter notado que conceitos como ponto, reta, plano e espaço nunca foram definidos porque são intuitivos, estão em nossa mente de maneira natural e os distinguimos espontaneamente: tanto a reta quanto o plano são conjuntos de infinitos pontos.

Professor, comente com os estudantes que os conceitos primitivos são os elementos iniciais do estudo que vamos começar agora. Outros conceitos serão definidos a partir deles, e as propriedades da Geometria resultarão dessas relações.

Posições relativas de ponto e reta e de ponto e plano no espaço

Como o ponto é um elemento da reta e do plano, dizemos que ele pertence ou não a eles.

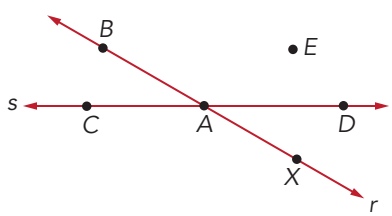
- Dados 1 ponto P e 1 reta r, podemos ter uma, e apenas uma, das situações: P **pertence** a r ou P **não pertence** a r.
- Dados 1 ponto P e 1 plano α, podemos ter uma, e apenas uma, das situações: P **pertence** a α ou P **não pertence** a α.

Fique atento

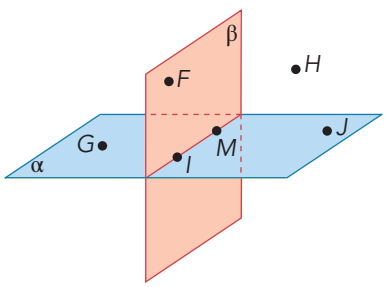
Utilizamos o símbolo $\in$ quando queremos dizer que um elemento **pertence** a um conjunto ou a uma figura geométrica e o símbolo $\notin$ quando queremos dizer que um elemento **não pertence** a um conjunto ou a uma figura geométrica. Neste caso, podemos escrever: $P \in r$ ou $P \notin r$.

Considere alguns exemplos a seguir.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora



B pertence a r.
B não pertence a s.
E não pertence a r.
E não pertence a s.



F pertence a β.
F não pertence a α.
H não pertence a α.
H não pertence a β.

Não escreva no livro

Reflita

Qual é a posição do ponto X em relação às retas r e s? E dos pontos M e G em relação aos planos α e β?

X pertence a r; X não pertence a s; M pertence a α; M pertence a β; G pertence a α; G não pertence a β.

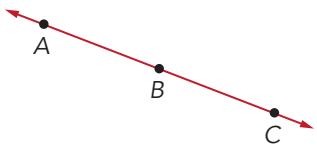
Posições relativas de pontos no espaço

Dois ou mais pontos são **colineares** se existe uma reta que passa por eles e são **coplanares** se existe um plano que contém todos eles.

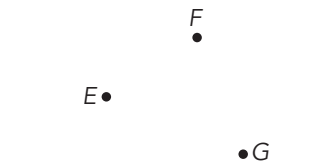
Fique atento

Dada uma reta no espaço, existem **infinitos** pontos na reta e **infinitos** pontos fora dela; dado um plano no espaço, existem **infinitos** pontos no plano e **infinitos** pontos fora dele.

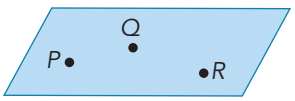
Analise as figuras a seguir.



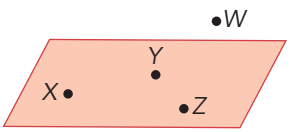
A, *B* e *C* são pontos colineares.



E, *F* e *G* não são pontos colineares.



P, *Q* e *R* são pontos coplanares.



X, *Y*, *Z* e *W* são pontos não coplanares.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Os seguintes axiomas relacionam os entes primitivos da Geometria:

1º) 2 pontos distintos determinam 1 única reta.

2º) 3 pontos não colineares determinam 1 único plano.

3º) Se 2 pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida nesse plano.

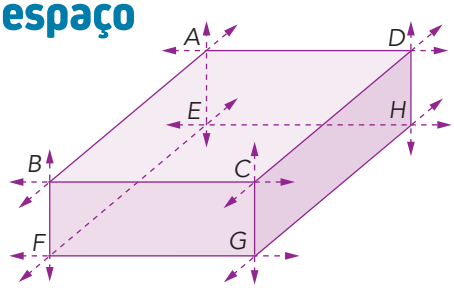
Professor, retome com os estudantes que os axiomas são afirmações admitidas como verdadeiras sem a necessidade de demonstração.

Posições relativas de 2 retas distintas no espaço

Analise o bloco retangular representado.

São 12 as arestas do bloco retangular: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$.

São 6 as faces, determinadas por: *ABCD*, *EFGH*, *CDHG*, *BCFG*, *ADHE* e *ABFE*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

De agora em diante, indicaremos o plano determinado por 3 pontos não colineares, por exemplo, *A*, *B* e *C*, simplesmente por plano (*ABC*).

Na figura anterior: plano (*ABC*) = plano (*ABD*) = plano (*ACD*) = plano (*BCD*).

O exemplo anterior nos ajuda a compreender as posições relativas de retas distintas quaisquer no espaço.

Duas ou mais retas são chamadas **retas coplanares** quando existe um plano que contém todas elas.

As retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DA}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ do exemplo analisado são coplanares, porque o plano (*ABCD*) as contém. As retas $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{DH}$ também são coplanares, porque o plano (*AEHD*) contém essas 3 retas.

Fique atento

$\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são retas coplanares. $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são retas não coplanares.

Perceba que as retas coplanares $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ não têm ponto comum. Isso também acontece com as retas coplanares $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$.

Retas coplanares que não têm ponto comum são chamadas **retas paralelas**.

Alguns pares de retas paralelas são: $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{DH}$, etc. O par de retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ tem 1 único ponto comum, isto é, as retas intersectam-se em 1 ponto. Isso também acontece com $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.

Não escreva no livro

Reflita

$\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são retas paralelas. Justifique.

$\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são retas coplanares porque estão contidas no mesmo plano (*ADGF*). Como essas retas não têm ponto comum, elas são paralelas.

Retas que têm 1 único ponto comum são chamadas **retas concorrentes**.

Outros pares de retas concorrentes são: $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{DH}$, etc.

Dadas as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, não existe um plano que contenha ambas; isso também ocorre, por exemplo, com os pares de retas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{EF}$.

Dadas 2 retas, quando não existe um plano que contenha ambas, elas são chamadas **retas reversas** (ou não coplanares).

Reflita

$\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ são retas reversas. Justifique.

Não existe um plano que contém as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{FH}$; portanto, elas são reversas.

Duas retas que têm 2 pontos distintos em comum, pelo axioma que estudamos, têm todos os pontos em comum.

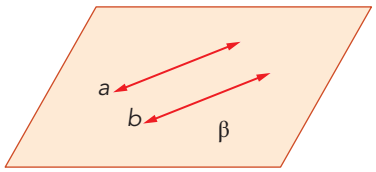
Duas retas que têm todos os pontos em comum são chamadas **retas coincidentes**.

Determinação de um plano

Estudamos que, quando temos 3 pontos não colineares, existe 1 único plano que passa por eles, e a recíproca é verdadeira; considerando 1 único plano, há 3 pontos não colineares contidos nesse plano. Além disso, estudamos que, se 2 pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida nesse plano.

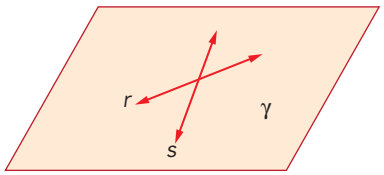
Em decorrência dos axiomas anteriores, pode-se determinar que 1 reta e 1 ponto não pertencente à reta determinam 1 único plano. Assim, podemos determinar 1 plano por meio de 2 retas paralelas distintas, 2 retas concorrentes ou 1 reta e 1 ponto que não pertence a ela.

- 2 retas paralelas distintas determinam 1 plano.



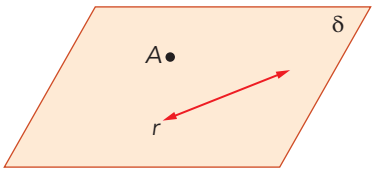
β: plano determinado pelas retas *a* e *b*.

- 2 retas concorrentes determinam 1 plano.



γ: plano determinado pelas retas *r* e *s*.

- 1 reta e 1 ponto fora dela determinam 1 plano.



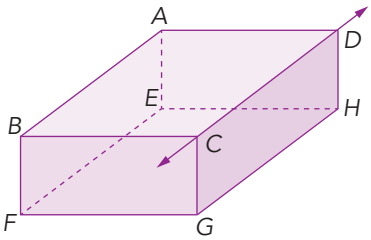
δ: plano determinado pela reta *r* e pelo ponto *A*.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Posições relativas de 2 planos distintos no espaço

Analise o bloco retangular representado.

As faces representam os planos que as contêm. Alguns desses planos têm pontos em comum, outros não. Por exemplo, o plano (*ABCD*) e o plano (*EFGH*) não têm ponto comum; já o plano (*ABCD*) e o plano (*CDHG*) têm todos os pontos da reta $\overleftrightarrow{CD}$ em comum.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Dois planos que não têm pontos comuns são chamados **planos paralelos**.

Nesse bloco retangular, o plano (*ABCD*) é paralelo ao plano (*EFGH*) e o plano (*ADHE*) é paralelo ao plano (*BCGF*).

Se 2 planos distintos não são paralelos, então eles têm 1 única reta comum.

Dois planos distintos que têm 1 reta comum são chamados **planos secantes** (ou **concorrentes**).

No bloco retangular apresentado, o plano (*ABCD*) e o plano (*CDHG*) são secantes e a intersecção deles é a reta $\overleftrightarrow{CD}$. O plano (*EFGH*) e o plano (*ABFE*) são secantes e a intersecção deles é a reta $\overleftrightarrow{EF}$.

Fique atento

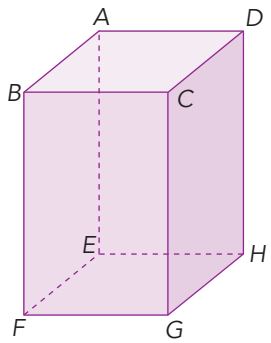
Utilizamos o símbolo // quando queremos indicar que dois elementos são paralelos. Neste caso, podemos escrever: plano (*ADHE*) // plano (*BCGF*).

Dois planos que têm 3 pontos distintos em comum, pelo axioma que estudamos, têm todos os pontos comuns.

Dois planos que têm todos os pontos em comum são chamados **planos coincidentes**.

Posições relativas de 1 reta e 1 plano

Banco de imagens/Arquivo da editora

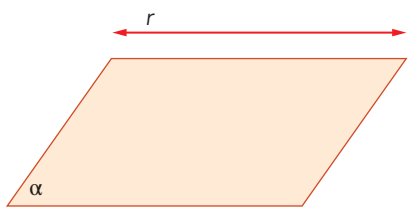


Considerando o bloco retangular representado, notamos que:

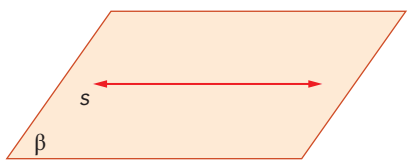
- o plano determinado pela face *EFGH* contém as retas $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{HG}$, $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{EF}$;
- as retas $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{CG}$, $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{DH}$ intersectam o plano determinado pela face *EFGH*;
- as retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são paralelas ao plano determinado pela face *EFGH*.

Estas são as 3 posições possíveis de 1 reta em relação a 1 plano no espaço:

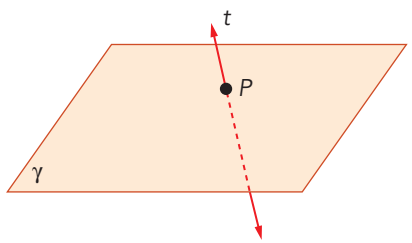
A reta *r* é **paralela** ao plano α (*r* e α não têm ponto comum).



A reta *s* **está contida** no plano β (β e *s* têm em comum todos os pontos de *s*).



A reta *t* **intersecta** o plano γ em um único ponto *P*. Então, a reta *t* é secante (ou concorrente) ao plano γ.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

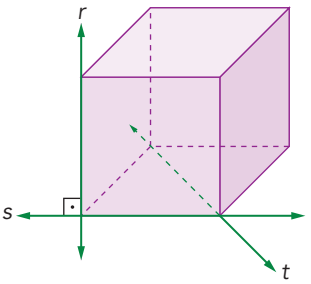
Perpendicularismo no espaço

Retas perpendiculares e retas ortogonais

Sabemos que 2 retas distintas no espaço podem ser paralelas, concorrentes ou reversas. Quando são concorrentes e formam ângulos retos (com medida de abertura 90°), são **retas perpendiculares**.

Pela representação do cubo, podemos perceber que:

- r e s são retas concorrentes e perpendiculares ($r \perp s$);
- s e t são retas concorrentes, mas não são perpendiculares. Dizemos que s e t são **retas oblíquas**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Considere 2 retas reversas a e b e 1 reta c paralela à reta a e concorrente com b.

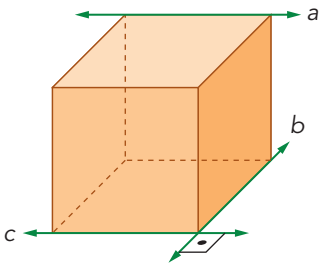
Se c e b forem perpendiculares, dizemos que as retas a e b são chamadas **retas ortogonais**.

Fique atento

Consideramos que retas perpendiculares sempre são ortogonais.

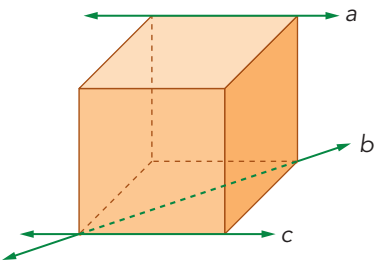
Em cada representação de cubo a seguir, podemos identificar 2 retas reversas a e b e a reta c, paralela à reta a e concorrente com b.

As retas a e b são reversas e ortogonais.



Banco de imagens/Arquivo da editora

As retas a e b são reversas, mas não são ortogonais.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Reflita

Não escreva no livro

Justifique as afirmações feitas sobre as 2 figuras representadas.

- Na 1ª figura, as retas a e b são reversas, pois não há um plano que passa pelas 2 retas. As retas a e b são ortogonais porque existe uma reta paralela à reta a que é perpendicular à reta b (a reta c, por exemplo).
- Na 2ª figura, as retas a e b são reversas, pois não há um plano que passe pelas 2 retas. As retas c e a são paralelas, mas as retas c e b são oblíquas. Logo, as retas a e b não são ortogonais.

Reta e plano perpendiculares

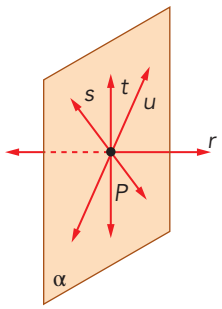
Estudamos que, dados uma reta r e um plano α, podem ocorrer 3 situações:

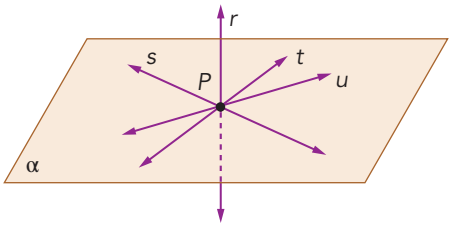
- a reta é paralela ao plano ($r \parallel \alpha$);
- a reta está contida no plano; ou
- a reta intersecta o plano em 1 único ponto P.

Agora, vamos verificar que, quando a reta intersecta o plano, ela pode ou não ser perpendicular a ele.

Uma reta que intersecta um plano é **perpendicular** a ele quando, e somente quando, ela é perpendicular a todas as retas desse plano que passam pelo ponto de intersecção.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

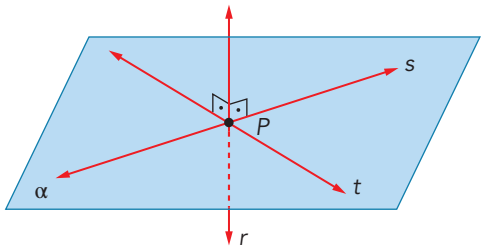




$r \perp s$
$r \perp t$
$r \perp u$
r é perpendicular a α.

Observação: Para que uma reta seja perpendicular a um plano, é necessário e suficiente que ela seja perpendicular a 2 retas concorrentes desse plano no ponto de intersecção.

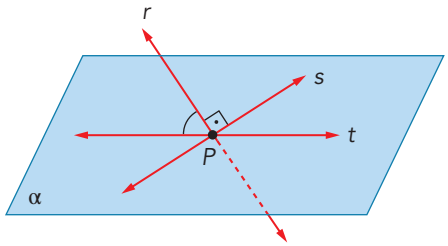
Banco de imagens/Arquivo da editora



$r \perp s$
$r \perp t$
r é perpendicular a α.

Se uma reta intersecta um plano e não é perpendicular a ele, dizemos que ela é **oblíqua** ao plano.

Banco de imagens/Arquivo da editora

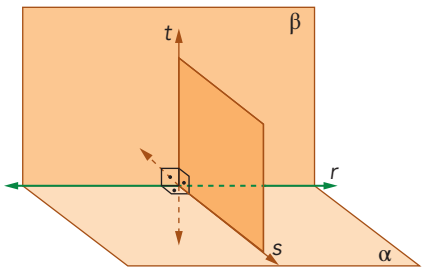


t está contida em α.
s está contida em α.
$r \perp s$
r não é perpendicular a α.

Planos perpendiculares

Consideremos 2 planos concorrentes α e β. Representemos um plano γ perpendicular à reta r, que é a intersecção dos planos α e β, e que intersecta α e β nas retas s e t, respectivamente.

Quando s e t formam um ângulo reto, como indicado na figura, dizemos que α e β são **planos perpendiculares**. Note que, se α e β são perpendiculares, então a reta r de α é perpendicular às retas s e t. Assim, s é uma reta de α que é perpendicular a β.



Banco de imagens/Arquivo da editora

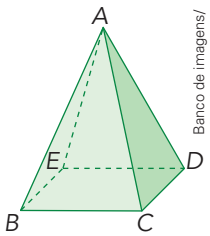
Dois planos distintos são **perpendiculares** se, e somente se, um deles contém uma reta perpendicular ao outro.

Se 2 planos concorrentes não são perpendiculares, dizemos que eles são **planos oblíquos**.

Atividades

Não escreva no livro

1. Considere a pirâmide de base quadrada representada e verifique se as retas indicadas em cada item são paralelas, concorrentes ou reversas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$. Concorrentes.

b) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{ED}$. Reversas.

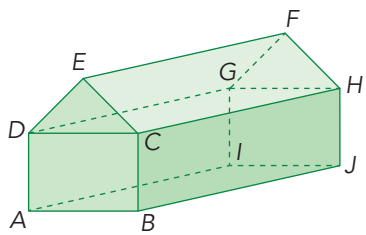
c) $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{ED}$. Paralelas.

d) $\overleftrightarrow{BE}$ e $\overleftrightarrow{AE}$. Concorrentes.

e) $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AE}$. Reversas.

f) $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. Concorrentes.

2. Analise o sólido geométrico representado a seguir. Depois, responda às questões no caderno.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual é a posição relativa dos planos determinados pelas faces *EFHC* e *DEFG*? Planos secantes.

b) A reta $\overleftrightarrow{AI}$ é intersecção de quais planos determinados pelas faces desse sólido geométrico? Plano (*ABJI*) e plano (*ADGI*).

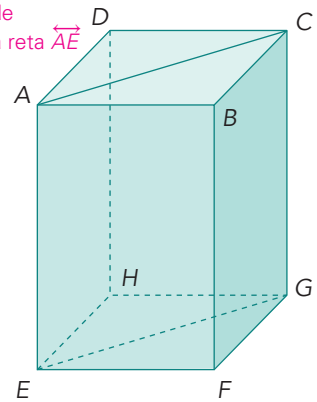
c) Qual é o plano determinado por uma das faces do sólido que é paralelo ao plano determinado pela face *ADGI*? Plano (*BCHJ*).

d) Qual é a reta de intersecção dos planos secantes determinados por *BCHJ* e *ECHF*? Reta $\overleftrightarrow{CH}$.

e) Há algum plano determinado por uma das faces do sólido que é paralelo ao plano determinado pela face *ABJI*? Em caso afirmativo, qual é esse plano? Não. O plano *CDGH* é paralelo, mas não é determinado por uma face do sólido.

3. Considerando o bloco retangular representado e os planos determinados pelas faces dele, faça o que se pede no caderno.

c) Sim. Exemplo de justificativa: Pois a reta $\overleftrightarrow{AE}$ (ou a reta $\overleftrightarrow{CG}$) é perpendicular ao plano (*EFGH*).



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Cite todos os planos perpendiculares ao plano (*ABFE*). Plano (*ABCD*), plano (*EFGH*), plano (*ADHE*), plano (*BCGF*).

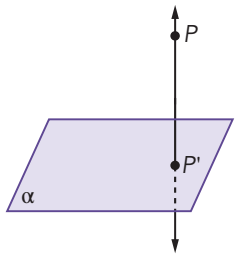
b) Quais são os 2 planos que contêm a reta $\overleftrightarrow{DH}$ e são perpendiculares ao plano (*EFGH*)? Plano (*ADHE*) e plano (*CDHG*).

c) O plano (*ACGE*) é perpendicular ao plano (*EFGH*)? Justifique.

d) A reta $\overleftrightarrow{CG}$ é perpendicular ao plano (*EFGH*). Qual é a posição do plano (*CDHG*) e do plano (*BCGF*) em relação ao plano (*EFGH*)? Os 2 planos são perpendiculares ao plano (*EFGH*).

Projeção ortogonal de 1 ponto sobre 1 plano

Representamos a reta perpendicular ao plano α que passa pelo ponto P e encontramos P'. O ponto P' é chamado **projeção ortogonal** do ponto P sobre o plano α.

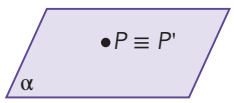


Banco de imagens/ Arquivo da editora

Fique atento

A projeção ortogonal do ponto P sobre o plano α é um ponto que pertence à reta perpendicular ao plano α que passa por P.

Observação: Quando P pertence ao plano α, os pontos P e P' coincidem (indicamos assim: $P \equiv P'$).



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Distâncias

Sempre que calculamos a medida de uma distância, a menos que seja especificado de outra maneira, assumimos que estamos buscando a menor medida de distância possível entre os pontos considerados.

Distância entre 2 pontos

Dados 2 pontos distintos A e B, a medida de distância entre A e B é a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$.

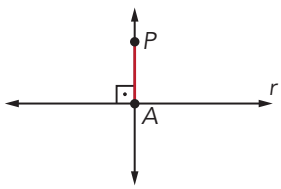
Banco de imagens/ Arquivo da editora



Distância de 1 ponto a 1 reta

Dados 1 ponto P e 1 reta r do espaço, podemos representar 1 reta que passa por P e é perpendicular a r no ponto A. A medida de distância do ponto P à reta r é a medida de distância entre os pontos P e A, ou seja, é a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{PA}$.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



Não escreva no livro

Reflita

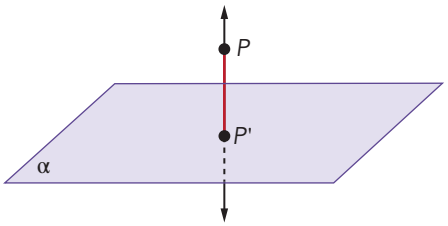
Em que condições a medida de distância entre P e r é igual a 0?

Quando P pertence à reta r.

Distância de 1 ponto a 1 plano

Dados 1 ponto P e 1 plano α, podemos determinar P', que é a projeção ortogonal de P sobre α. A medida de distância do ponto P ao plano α é a medida de distância entre os pontos P e P', ou seja, é a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{PP'}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Não escreva no livro

Reflita

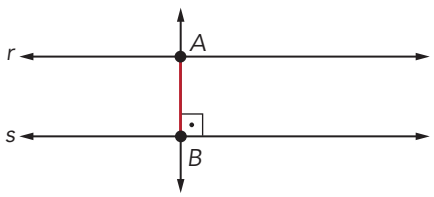
Qual é a medida de distância entre P e α quando P pertence a α?

A medida de distância é 0.

Distância entre 2 retas distintas e paralelas

Dadas 2 retas r e s distintas e paralelas, a medida de distância entre r e s é a medida de distância de qualquer ponto de uma delas a outra reta.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

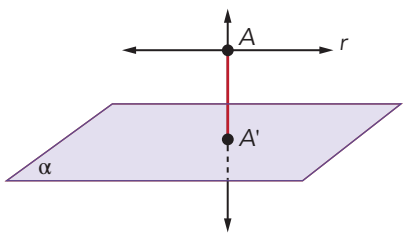


Observação: A medida de distância entre 2 retas concorrentes é 0.

Distância de 1 reta a 1 plano (quando a reta é paralela ao plano)

Dados 1 reta r e 1 plano α tais que $r \parallel \alpha$, a medida de distância da reta r ao plano α é a medida de distância de qualquer ponto de r ao plano α.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



Reflita

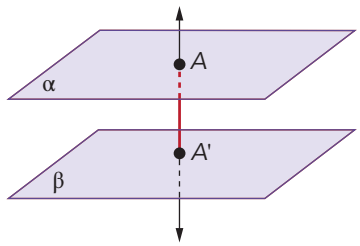
Se uma reta está contida em um plano, qual é a medida de distância da reta ao plano?

A medida de distância é 0.

Observação: A medida de distância entre um plano e uma reta oblíqua a ele é 0.

Distância entre 2 planos distintos e paralelos

Dados 2 planos distintos α e β, tais que $\alpha \parallel \beta$, a medida de distância entre esses 2 planos é a medida de distância de qualquer ponto de um deles ao outro plano.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Reflita

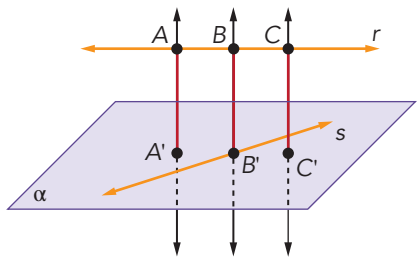
Quando a medida de distância entre 2 planos é 0?

Quando os planos são coincidentes ou concorrentes.

Observação: A medida de distância entre planos concorrentes é 0.

Distância entre 2 retas reversas

Dadas 2 retas reversas r e s, vamos considerar um ponto qualquer de r e o plano α que contém s e é paralelo a r. A medida de distância entre r e s é a medida de distância entre esse ponto e o plano.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Reflita

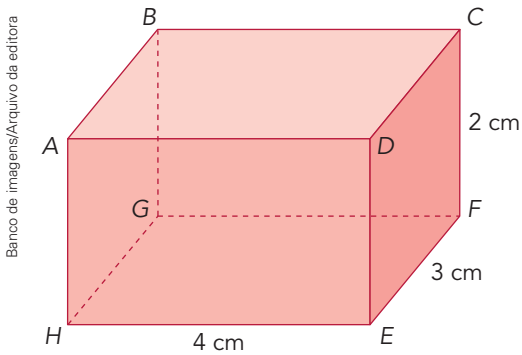
É possível a medida de distância entre 2 retas reversas ser 0? Justifique.

Não é possível. Se a medida de distância fosse 0, existiria ao menos 1 ponto comum a essas 2 retas. Se esse ponto fosse único, as retas seriam concorrentes e, portanto, estariam em um mesmo plano. Caso o ponto não fosse único, as 2 retas teriam todos os pontos em comum (retas coincidentes).

Atividades

Não escreva no livro

4. Considere um bloco retangular com as medidas de comprimento das arestas indicadas a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

No caderno, determine as medidas de distância:

a) entre os pontos A e B; 3 cm

b) entre os pontos H e F; 5 cm

c) entre os pontos C e E; $\sqrt{13}$ cm

d) entre os pontos D e H; $2\sqrt{5}$ cm

e) do ponto médio de $\overline{AB}$ à reta $\overleftrightarrow{CD}$; 4 cm

f) do ponto médio de $\overline{BC}$ à reta $\overleftrightarrow{HE}$; $\sqrt{13}$ cm

g) do ponto F ao plano (ABG); 4 cm

h) entre as retas $\overleftrightarrow{HE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$; 2 cm

i) entre as retas $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{BH}$; 4 cm

j) da reta $\overleftrightarrow{BD}$ ao plano (EFH); 2 cm

k) entre os planos (ADE) e (BGF); 3 cm

l) entre as retas $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{BD}$; 2 cm

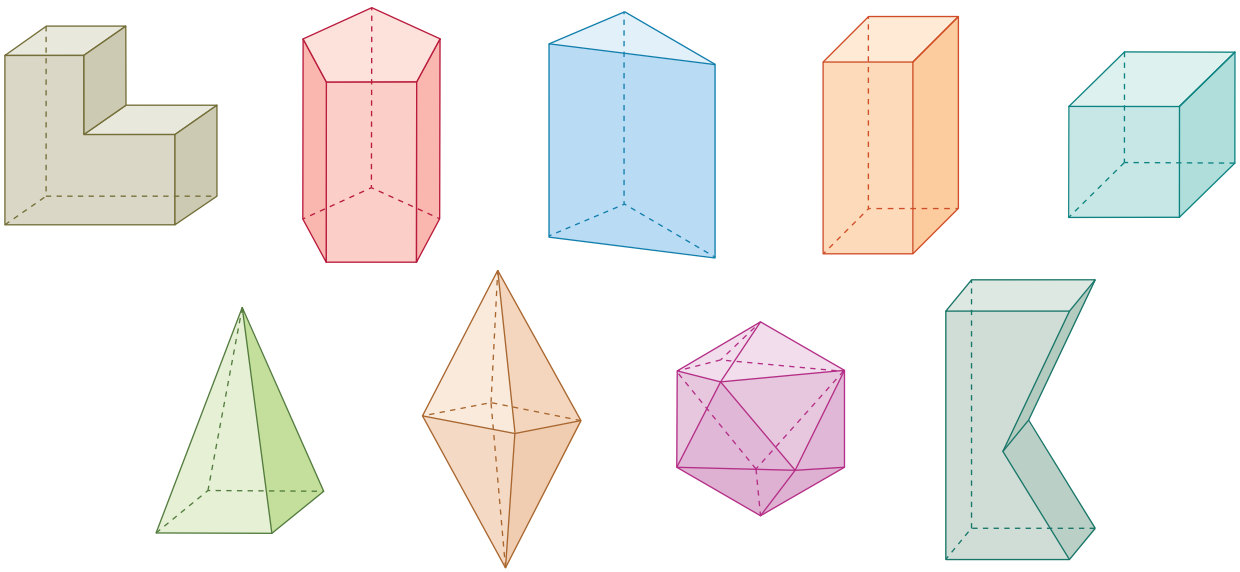
m) entre os pontos B e E. $\sqrt{29}$ cm

Fique atento

Ponto médio de um segmento de reta é o ponto que o divide em 2 partes iguais, ou seja, em 2 segmentos de reta de mesma medida de comprimento.

Poliedro

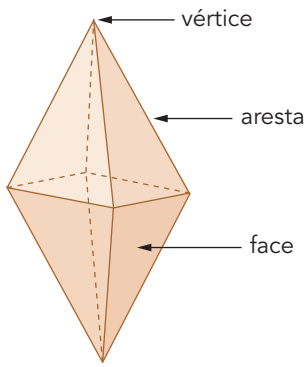
As figuras geométricas espaciais representadas a seguir são exemplos de **poliedros**.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Poliedro é uma figura geométrica espacial, também chamada sólido geométrico, formada pela reunião de uma quantidade finita n, sendo $n \geqslant 4$, de polígonos e pela região do espaço limitada por eles. Cada lado de um desses polígonos é também lado de outro único polígono.

As regiões planas limitadas por esses polígonos são as **faces** do poliedro, e cada lado de um polígono, que é comum a exatamente 2 faces, é chamado **aresta** do poliedro. Cada **vértice** de uma face é um vértice do poliedro. A intersecção de 2 faces quaisquer do poliedro é um lado comum dessas faces (é uma aresta do poliedro), ou é um vértice do poliedro, ou é vazia.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

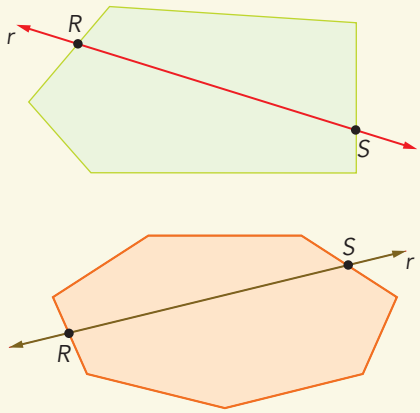
Cada vértice do poliedro é um ponto comum a 3 ou mais arestas.

Poliedro convexo e poliedro não convexo

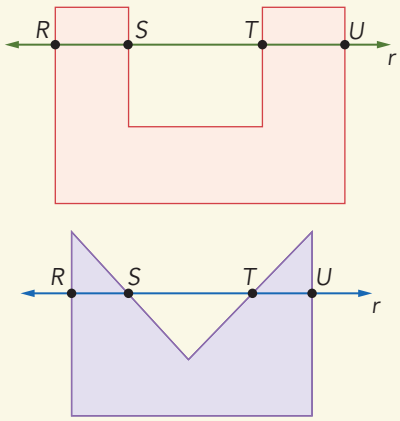
Uma **região poligonal** é **convexa** quando o segmento de reta que tem extremidades em quaisquer 2 pontos da região está totalmente contido nela.

Podemos dizer também que uma região poligonal é convexa se qualquer reta que não seja coincidente com um dos lados dela intersecta o contorno da região em, no máximo, 2 pontos.

Regiões poligonais convexas



Regiões poligonais não convexas

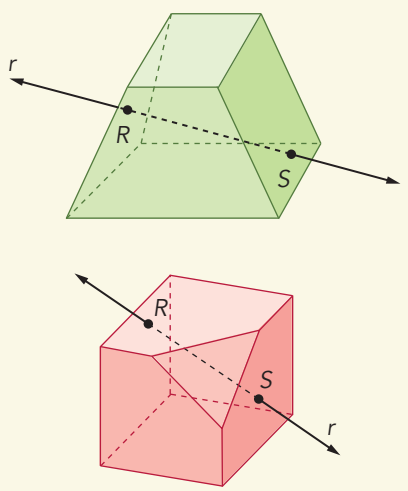


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

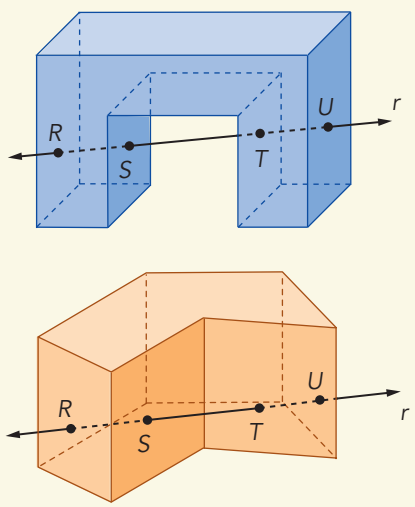
Um **poliedro** é **convexo** quando o segmento de reta que tem extremidades em quaisquer 2 pontos do poliedro está totalmente contido nele.

Podemos dizer também que um poliedro é convexo se qualquer reta não contida no plano que contém qualquer uma das faces dele intersecta as faces do poliedro em, no máximo, 2 pontos.

Poliedros convexos



Poliedros não convexos



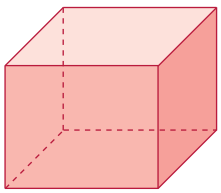
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

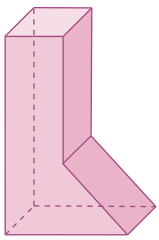
Não escreva no livro

5. Classifique cada um dos poliedros em convexo ou não convexo.

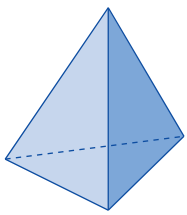
a) Convexo.



b) Não convexo.



c) Convexo.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

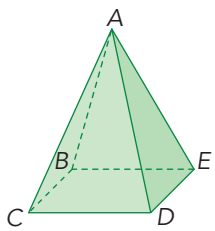
Reflita

Qual é a quantidade mínima de faces que um poliedro deve ter?
4 faces.

Fique atento

O estudo que será feito a partir daqui vai considerar apenas os poliedros convexos. Por isso, sempre que aparecer a palavra **poliedro** sem especificar se é convexo ou não, deve-se subentender que ele é convexo.

6. Analise o poliedro representado a seguir e responda às perguntas no caderno.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) Qual é a quantidade de faces, de arestas e de vértices desse poliedro?
5 faces, 8 arestas e 5 vértices.

b) Qual é a forma de cada face?
4 faces triangulares e 1 face quadrangular.

c) O vértice *C* é comum a quantas arestas?
3 arestas.

d) O vértice *A* é comum a quantas arestas?
4 arestas.

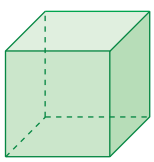
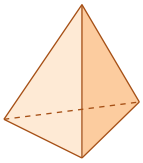
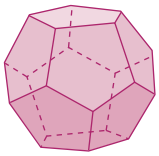
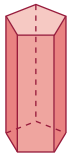
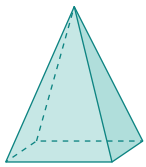
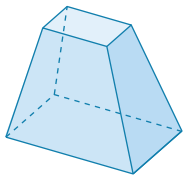
Relação de Euler

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) descobriu uma importante relação entre a quantidade de vértices (V), a quantidade de arestas (A) e a quantidade de faces (F) de um poliedro convexo.

Essa relação pode ser escrita assim:

$$V - A + F = 2 \text{ (relação de Euler)}$$

Acompanhe os exemplos a seguir:

Cubo	Tetraedro	Dodecaedro	Prisma de base pentagonal	Pirâmide de base quadrangular	Hexaedro
					
$F = 6$ $V = 8$ $A = 12$	$F = 4$ $V = 4$ $A = 6$	$F = 12$ $V = 20$ $A = 30$	$F = 7$ $V = 10$ $A = 15$	$F = 5$ $V = 5$ $A = 8$	$F = 6$ $V = 8$ $A = 12$

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Note que, para cada um dos poliedros, a quantidade de arestas é igual à soma da quantidade de faces com a quantidade de vértices menos 2 unidades.

O valor 2 da relação de Euler é uma característica de todos os poliedros convexos.

Reflita

Não escreva no livro

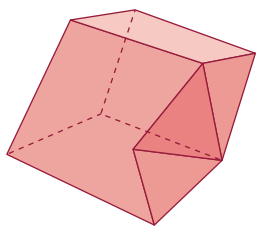
No cubo, temos: $8 - 12 + 6 = 2$.

Escreva no caderno a relação de Euler para os outros poliedros convexos representados neste tópico.

Tetraedro: $4 - 6 + 4 = 2$
Dodecaedro:
$20 - 30 + 12 = 2$
Prisma de base pentagonal:
$10 - 15 + 7 = 2$
Pirâmide de base quadrada:
$5 - 8 + 5 = 2$
Hexaedro: $8 - 12 + 6 = 2$

Observações:

1ª) Em alguns poliedros não convexos, vale também a relação de Euler. O poliedro não convexo representado a seguir é um exemplo.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

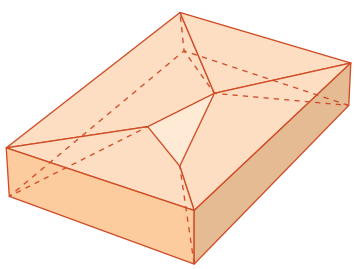
$V = 9$
$A = 15$
$F = 8$

$V - A + F = 2$
$9 - 15 + 8 = 2$

Fique atento

Todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler, mas nem todo poliedro que satisfaz a relação de Euler é convexo.

2ª) A expressão $V - A + F$ pode assumir valores diferentes de 2 quando o poliedro não é convexo. O poliedro não convexo representado a seguir é um exemplo.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

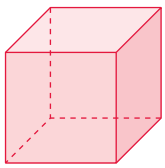
$V - A + F \neq 2$
$11 - 23 + 12 = 0$

3ª) Dados 3 números, V, A e F, tais que $V - A + F = 2$, nem sempre existe um poliedro que tenha V vértices, A arestas e F faces. Por exemplo, $V = 1$, $A = 3$ e $F = 4$.

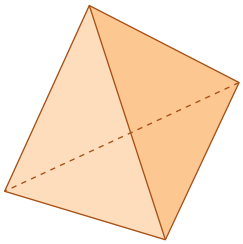
Poliedro regular

Um poliedro convexo é **regular** quando todas as faces são regiões limitadas por polígonos regulares e congruentes e em todos os vértices concorre a mesma quantidade de arestas.

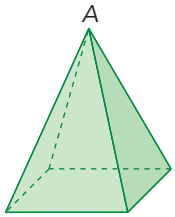
Acompanhe a seguir exemplos de poliedros regulares e de poliedros não regulares.



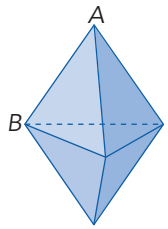
Poliedro regular.



Poliedro regular.



Poliedro não regular: as faces não são regiões limitadas por polígonos regulares e, para o vértice *A* convergem 4 arestas, enquanto convergem apenas 3 arestas nos demais vértices.



Poliedro não regular: as faces são regiões limitadas por polígonos regulares e congruentes, mas para o vértice *A* convergem 3 arestas e para *B* convergem 4 arestas.

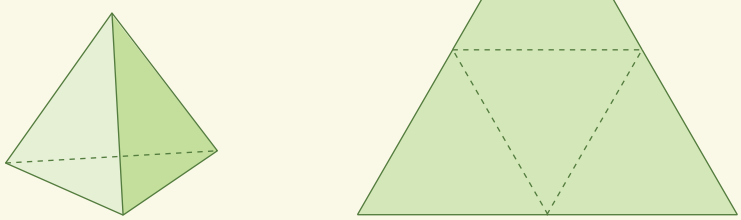
Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Propriedade: existem apenas 5 poliedros regulares convexos

Acompanhe a seguir a representação de cada um dos poliedros regulares convexos e a respectiva planificação das superfícies deles.

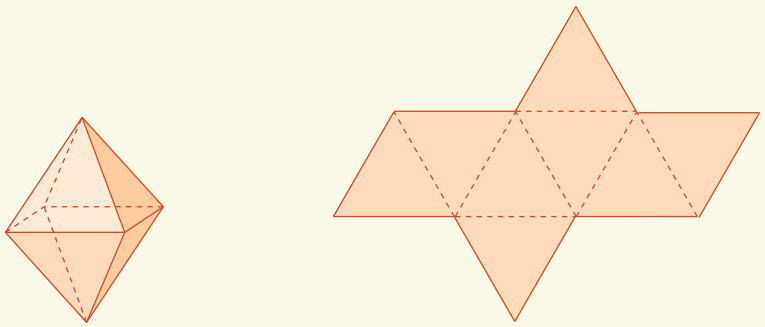
> **Fique atento**
> Um polígono regular tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

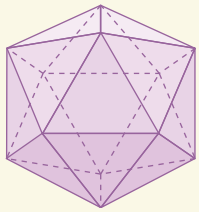


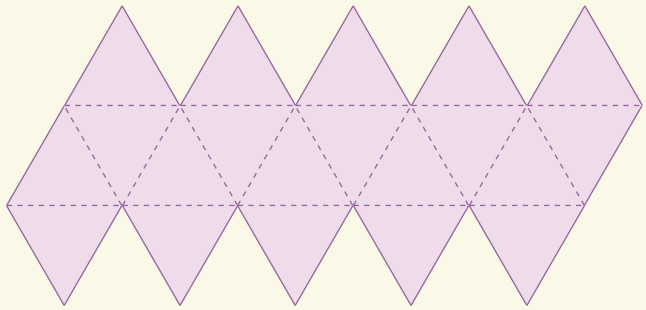
Tetraedro: 4 faces limitadas por triângulos equiláteros e 3 arestas que concorrem em cada vértice.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



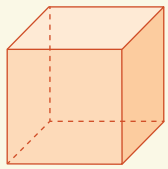
Octaedro: 8 faces limitadas por triângulos equiláteros e 4 arestas que concorrem em cada vértice.

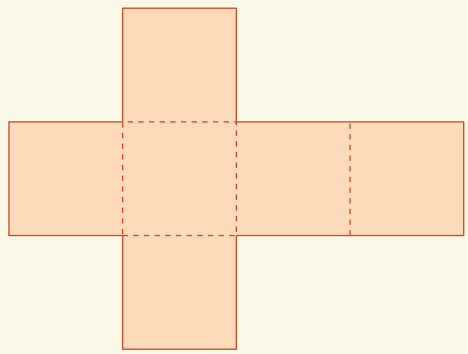




Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

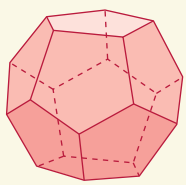
Icosaedro: 20 faces limitadas por triângulos equiláteros e 5 arestas que concorrem em cada vértice.

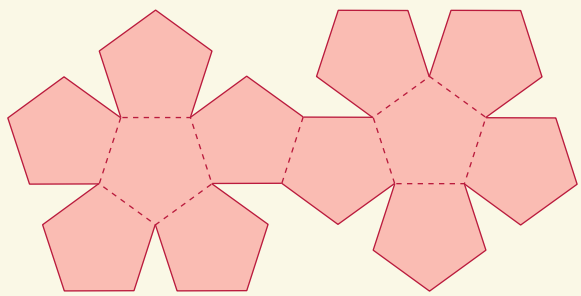




Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Cubo: 6 faces quadradas e 3 arestas que concorrem em cada vértice.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Dodecaedro: 12 faces pentagonais regulares congruentes e 3 arestas que concorrem em cada vértice.

Reflita

Não escreva no livro

Verifique a relação de Euler para cada um dos poliedros regulares convexos.

Tetraedro: $4 - 6 + 4 = 2$
Octaedro: $6 - 12 + 8 = 2$
Icosaedro: $12 - 30 + 20 = 2$
Cubo: $8 - 12 + 6 = 2$
Dodecaedro: $20 - 30 + 12 = 2$

Atividades resolvidas

1. Determine a quantidade de arestas e a quantidade de vértices de um poliedro convexo com 5 faces quadradas e 4 faces triangulares.

Resolução

Como o poliedro tem 5 faces quadradas, calculamos: $5 \cdot 4 = 20$; então, são 20 arestas.
O poliedro tem 4 faces triangulares: $4 \cdot 3 = 12$; então, são 12 arestas.
Como cada aresta foi contada 2 vezes, a quantidade total de arestas é:

$$A = \frac{20 + 12}{2} = 16$$

Temos, então, $F = 9$ e $A = 16$.

Aplicando a relação de Euler:

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 16 + 9 = 2 \Rightarrow V = 9$$

Logo, o poliedro tem 16 arestas e 9 vértices.

7. $V - A + F = 2 \Rightarrow 20 - 30 + F = 2 \Rightarrow F = 2 + 10 \Rightarrow F = 12$; logo, 12 faces.

8. $F - 20 + F = 2 \Rightarrow 2F = 22 \Rightarrow F = 11$; logo, 11 faces.

9. $V - 12 + 7 = 2 \Rightarrow V = 2 + 5 = 7$; portanto, 7 vértices.

Atividades

Não escreva no livro

7. Em um poliedro convexo, a quantidade de vértices é 20 e a de arestas é 30. Qual é a quantidade de faces?

8. Em um poliedro convexo de 20 arestas, a quantidade de faces é igual à quantidade de vértices. Quantas faces tem esse poliedro?

9. Um poliedro convexo de 12 arestas apresenta 1 face hexagonal e 6 faces triangulares. Quantos vértices tem esse poliedro?

10. Qual é a quantidade de faces de um poliedro convexo de 20 vértices de maneira que em cada vértice concorrem 5 arestas?

11. Determine a quantidade de vértices de um poliedro convexo que tem 30 faces quadradas, 20 faces hexagonais e 12 faces decagonais. 120 vértices.

Texto para a próxima atividade.

Uma das estruturas da Geometria molecular (que estuda como os átomos se distribuem espacialmente em uma molécula) é a octaédrica. Octaedro é um sólido geométrico de 8 faces e, se ele é regular, todas as faces têm a forma de um triângulo equilátero. A quantidade de faces, vértices e arestas desse sólido pode ser obtida por meio da relação de Euler $V - A + F = 2$. O hexafluoreto de enxofre, SF_6, é um composto que apresenta geometria octaédrica, na qual cada átomo de flúor representa um vértice desse sólido.

12. Supondo que, na representação geométrica, todos os átomos de flúor possam ser ligados aos átomos de flúor adjacentes a eles por linhas, quantas linhas seriam necessárias para ligar todos esses átomos? Alternativa **d**.

a) 6 **d)** 12

b) 8 **e)** 14

c) 10

Professor, a atividade **13** favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

Texto para a próxima atividade.

As Copas do Mundo de Futebol masculino da Federação Internacional de Futebol (Fifa) trazem consigo as histórias de milhares de torcedores apaixonados por esse esporte. A cada Copa é utilizada uma nova versão de bola. A bola da Copa de 2002, chamada de Fevernova, levou 3 anos para ser desenvolvida e tinha 6 camadas de diferentes materiais, o que lhe proporcionava um deslocamento aéreo mais preciso e previsível.

13. A bola de futebol usada na Copa de 2022, antes de ser inflada, tem o formato parecido com o de um icosaedro truncado, sólido que tem 12 faces pentagonais regulares e 20 hexagonais regulares. Para costurar essas faces lado a lado, formando a superfície da bola, usam-se 20 cm de linha em cada aresta do poliedro. Assumindo que não haja desperdício, qual é a medida de comprimento total, em metros, de linha necessária para costurar toda a bola? 18 m

10. Como em cada vértice concorrem 5 arestas, temos:
$A = \frac{20 \cdot 5}{2} = 50$
$V - A + F = 2 \Rightarrow 20 - 50 + F = 2 \Rightarrow F = 2 + 30 = 32$; logo, 32 faces.

CAPÍTULO 2

Prisma e cilindro

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Diversidade Cultural*.

Professor, no item **c**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade.

Situação-problema

Tambores e teclados

As imagens não estão representadas em proporção.

O tambor é um instrumento de percussão utilizado em diferentes culturas, com formatos e nomes variados. Frequentemente é utilizado em escolas de samba, em desfiles musicais, em algumas bandas ou como componente de uma bateria. No Brasil, acredita-se que os tambores mais antigos são os indígenas, construídos de modo artesanal e com materiais naturais. Alguns tambores têm formato que lembra o de um cilindro. No dia a dia, é mais comum encontrarmos tambores feitos de plástico e de aço, no entanto, eles podem ser confeccionados com diferentes tipos de material.



I am Elizabeth/Shutterstock

Alfaia.



volkovslava/Shutterstock

Tambor.

Já o teclado é um instrumento musical formado por teclas que, quando pressionadas, emitem diferentes sons. Diferentemente do tambor, esse é um instrumento eletrônico que apresenta mecanismos que geram sons armazenados na memória do dispositivo. Esse instrumento musical tem o formato que lembra um prisma.



Oleksiy Mark/Shutterstock

Teclado musical.

a) No tambor, a parte mais clara tem o formato que lembra qual figura geométrica plana? O círculo.

b) Como você descreveria a forma de um cilindro? E a de um prisma? Respostas pessoais.

c) De que modo você representaria a planificação da superfície de um cilindro? Faça um esboço no caderno. Resposta esperada: Representação de 1 região retangular e 2 círculos com a mesma medida de comprimento de raio para representar a planificação da superfície de um cilindro.

d) É possível seccionar um prisma por um plano de modo que a secção determine uma região de mesma forma e de mesmas medidas de comprimento dos lados em relação a alguma das faces? Sim, basta que o plano seja paralelo às bases.

Sobre o assunto

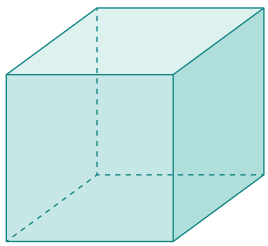
Acesse o *link* a seguir para realizar o *tour* virtual pela exposição *Fruturos*. Além de aprender mais sobre a cultura amazônica, é possível conhecer um pouco dos instrumentos musicais de origem indígena, como o tãpo, tambor utilizado pelo povo Ashaninka.

MUSEU DO AMANHÃ. *Fruturos*: tempos amazônicos. Rio de Janeiro: Museu do Amanhã, 2022. Disponível em: https://tedit.net/lahqzz. Acesso em: 12 jul. 2024.

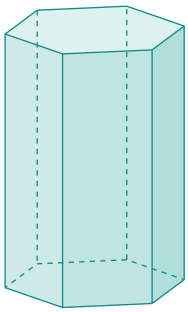
Os prismas

Dentre os poliedros mais conhecidos, destacamos os prismas. Considere alguns exemplos a seguir.

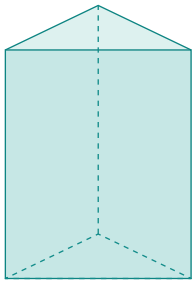
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Cubo.



Prisma de base hexagonal.



Prisma de base triangular.

Não escreva no livro

Reflita

Que características esses poliedros têm em comum?

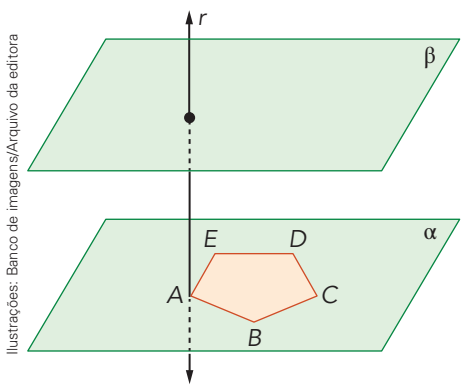
Exemplo de resposta: As características comuns que se destacam nos poliedros são a dupla de faces paralelas, congruentes e opostas unidas por faces retangulares.

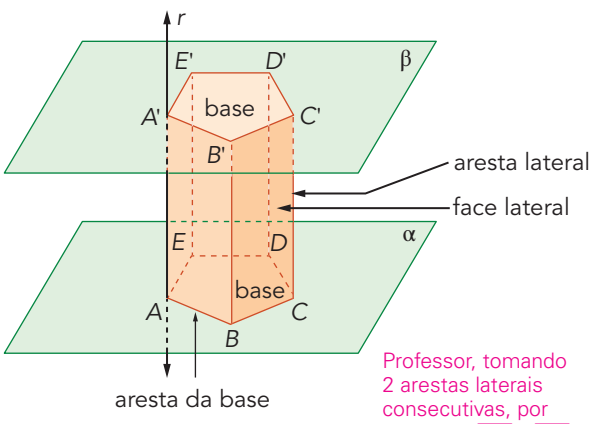
Formalizando o conceito de prisma

Considere 2 planos α e β, distintos e paralelos, uma região limitada por um polígono convexo qualquer, por exemplo, *ABCDE*, contida no plano α, e uma reta *r* concorrente aos planos α e β e que não intersecta a região poligonal *ABCDE*.

A figura geométrica formada por todos os segmentos de reta paralelos à reta *r*, que tem uma extremidade na região poligonal *ABCDE* e outra extremidade no plano β, é chamada **prisma**.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora





Os segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$ são chamados **arestas laterais** do prisma. Todas as arestas laterais são paralelas entre si, pois são paralelas à reta *r*, e têm a mesma medida de comprimento.

Arestas laterais consecutivas determinam paralelogramos, e as regiões planas limitadas por esses paralelogramos são chamadas **faces laterais** do prisma.

As bases *ABCDE* e *A'B'C'D'E'* são congruentes. A medida de comprimento da **altura** do prisma é a medida de distância entre as bases.

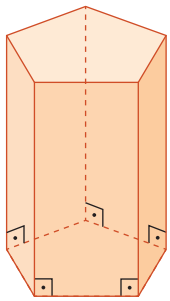
Professor, tomando 2 arestas laterais consecutivas, por exemplo, $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$, temos que os pontos *A*, *A'*, *B'* e *B* estão sobre o mesmo plano, pois as arestas laterais $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ são paralelas. Além disso, os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ também são paralelos (pois estão contidos em retas coplanares que não se intersectam por estarem contidas em planos paralelos). Logo, o quadrilátero *AA'B'B*, que limita a face lateral do prisma, é um paralelogramo.

Prisma reto e prisma oblíquo

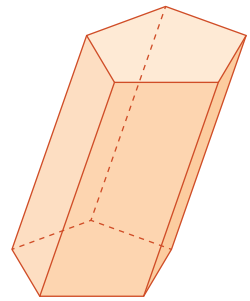
O prisma é **reto** quando a reta *r* concorrente aos planos α e β é perpendicular aos planos (e, consequentemente, as arestas laterais do prisma são perpendiculares às bases), e é **oblíquo** quando a reta *r* (e, consequentemente, as arestas laterais) não é perpendicular aos planos.

Assim, em um prisma reto, as faces laterais são retangulares.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Prisma reto.

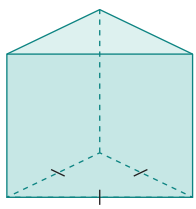


Prisma oblíquo.

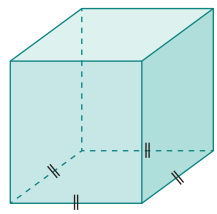
Prisma regular

Quando as bases de um prisma reto são regiões limitadas por polígonos regulares, ele é chamado **prisma regular**. Acompanhe alguns exemplos a seguir.

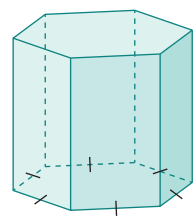
Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora



Prisma triangular regular.



Prisma quadrangular regular.



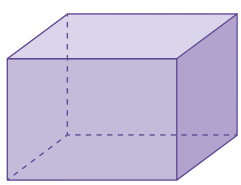
Prisma hexagonal regular.

Caso particular de prisma: o paralelepípedo

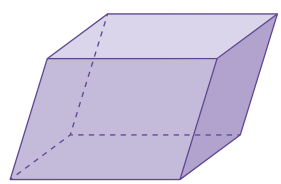
Paralelepípedo é um prisma cujas bases são regiões planas limitadas por paralelogramos. Se o paralelepípedo for reto, então ele é chamado **paralelepípedo retorretângulo**, ou **paralelepípedo retângulo** ou **bloco retangular**.

No paralelepípedo retângulo, todas as faces são retangulares.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Paralelepípedo retângulo.



Paralelepípedo oblíquo.

Não escreva no livro

Reflita

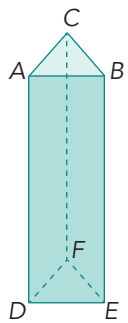
Em um paralelepípedo, qualquer uma das faces pode ser tomada como base?

Sim, pois 2 faces opostas quaisquer estão situadas em planos paralelos e são ligadas por arestas paralelas entre si.

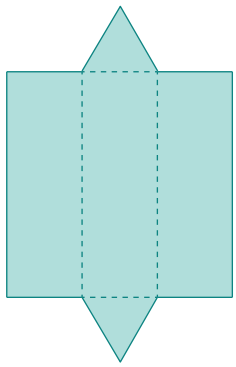
Nomenclatura de prisma

O prisma recebe nomes específicos de acordo com a forma das bases. Acompanhe alguns exemplos a seguir.

a) Prisma reto de base triangular ou prisma reto triangular.



Prisma reto de base triangular.



Planificação da superfície de um prisma reto de base triangular.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro

Reflita

Quantas faces apresenta um prisma reto com bases limitadas por regiões pentagonais? E quantas arestas laterais?

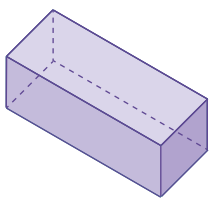
7 faces; 5 arestas laterais.

Bases: regiões triangulares *ABC* e *DEF*.

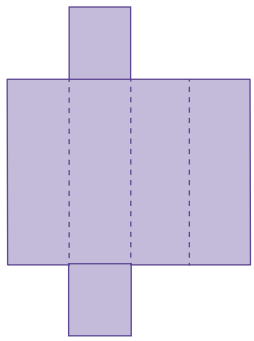
Faces laterais: regiões limitadas pelos quadriláteros *ABED*, *ACFD* e *BCFE*.

Arestas laterais: $\overline{AD}$, $\overline{CF}$ e $\overline{BE}$.

b) Prisma reto de base retangular.



Prisma reto de base retangular.



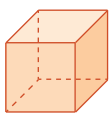
Planificação da superfície de um paralelepípedo retângulo.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

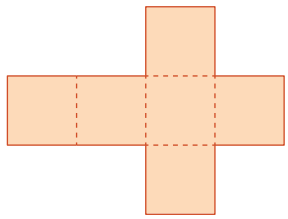
Fique atento

Um paralelepípedo retângulo é um prisma reto em que qualquer face pode ser considerada base.

c) Cubo ou hexaedro regular.



Cubo ou hexaedro regular.



Planificação da superfície de um cubo.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Medida de área da superfície de um prisma

Explore para descobrir

1. A diagonal do piso do elevador tem medida de comprimento 2 m, dada por $\sqrt{(1{,}2)^2 + (1{,}6)^2} = 2$. Logo, a diagonal do elevador tem medida de comprimento de 2,9 m, dada por $\sqrt{(2)^2 + (2{,}1)^2} = 2{,}9$, em que 2 m corresponde à medida de comprimento da diagonal do piso e 2,1 m corresponde à medida de altura do elevador.

Portanto, como a maior medida de comprimento é 2,9 m, não seria possível entrar com o cano no elevador.

Não escreva no livro

1. Para fazer manutenção na residência, Juliana teve de comprar alguns canos de PVC, que são vendidos em pedaços, com medida de comprimento de 3 m. No entanto, quando recebeu o material em casa, ficou na dúvida se ele caberia no elevador, que pode ser modelado como um bloco retangular cujas dimensões têm medida de comprimento 1,2 m, 1,6 m e 2,1 m.

Considerando as medidas de comprimento das dimensões informadas, bem como a medida de comprimento do cano, é possível entrar com o cano no elevador? Qual seria a maior medida de comprimento possível para um cano entrar nesse elevador? Considere apenas a medida de comprimento do cano.

2. Calcule a medida de comprimento da diagonal do paralelepípedo retângulo cujas dimensões têm medida de comprimento a, b e c, todas indicadas na mesma unidade de medida de comprimento. A medida de comprimento da diagonal é igual a $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

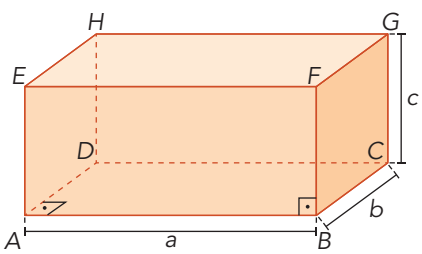
3. Calcule a medida de comprimento da diagonal de um cubo cuja aresta tem medida de comprimento a. $a\sqrt{3}$

Em todo prisma, vamos considerar:

- **superfície lateral**: é formada por todas as faces laterais;
- **área lateral**: é a área da superfície lateral;
- **superfície total**: é formada por todas as faces laterais e pelas bases;
- **área total**: é a área da superfície total.

No caso do paralelepípedo retângulo e do cubo, em que qualquer face serve de base, falamos apenas da medida de área total. Sendo assim, em um paralelepípedo retângulo cujas dimensões têm medidas de comprimento a, b e c, a medida de área total é dada por:

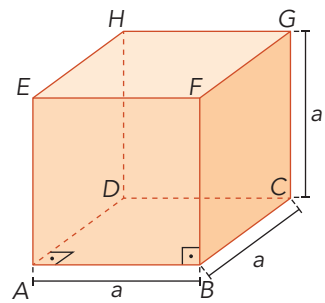
$$A_T = 2(ab + ac + bc)$$



Paralelepípedo retângulo.

Já em um cubo cuja medida de comprimento da aresta é a, a superfície total é formada por 6 regiões quadradas de lado com medida de comprimento a e, portanto, a medida de área total do cubo é dada por:

$$A_T = 6a^2$$

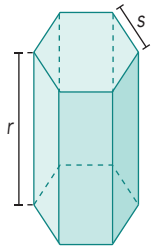


Cubo.

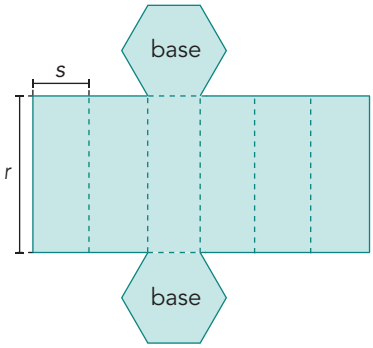
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

1. Em um prisma hexagonal regular, a medida de comprimento da aresta da base é 3 cm e a medida de comprimento da aresta lateral é 6 cm. Calcule a medida de área total desse prisma. (Considere $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.)



Prisma hexagonal regular.



Planificação da superfície de um prisma hexagonal regular.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução

Temos:

r: medida de comprimento da aresta lateral, que é 6 cm.

s: medida de comprimento da aresta da base, que é 3 cm.

Assim:

Medida de área lateral: $A_\ell = 6(r \cdot s) = 6(6 \cdot 3) = 108$. Portanto, $A_\ell = 108$ cm².

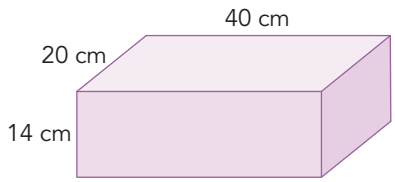
Medida de área da base: $A_b = \frac{3(s)^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3(3)^2\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$. Portanto, $A_b = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm².

Medida de área total do prisma:

$$A_T = A_\ell + 2A_b = 108 + 2 \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2} = \left(108 + 27\sqrt{3}\right) \simeq 153{,}9$$

Logo, temos $A_T \simeq 153{,}9$ cm².

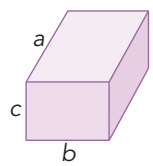
2. Uma indústria precisa fabricar 10 000 caixas de sabão que têm o formato de um paralelepípedo retângulo e as medidas indicadas na figura. Desprezando as abas, calcule le quantos metros quadrados de papelão serão necessários para fabricar todas as caixas.



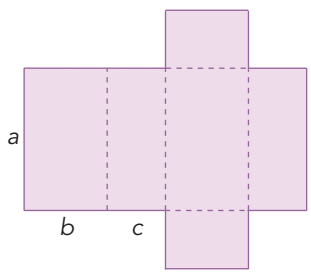
Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução

A caixa tem formato de um paralelepípedo retângulo:



Paralelepípedo retângulo.



Planificação da superfície de um paralelepípedo retângulo.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

1. $d = \sqrt{10^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{100 + 36 + 64} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$; logo, $d = 10\sqrt{2}$ cm.

2. $d = a\sqrt{3} \Rightarrow d = 10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 30$; logo, $d = 30$ cm.

Todo paralelepípedo retângulo é formado por 6 faces:

- 2 retangulares de medidas de comprimento a e b;
- 2 retangulares de medidas de comprimento a e c;
- 2 retangulares de medidas de comprimento b e c.

Assim, temos que a medida de área total é $A_T = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$.

Nesse caso, temos: $A_T = 2(40 \cdot 20 + 40 \cdot 14 + 20 \cdot 14) = 2(800 + 560 + 280) = 3\,280$. Logo, $A_T = 3\,280$ cm².

Como são 10 000 caixas, temos: $A = 3\,280 \cdot 10\,000 = 32\,800\,000$. Logo, 32 800 000 cm² = 3 280 m².

Portanto, serão necessários pelo menos 3 280 m² de papelão.

Fique atento

Se 1 m = 100 cm, então 1 m² = 10 000 cm².

3. O cubo tem 12 arestas; logo, cada aresta tem medida de comprimento de 4 cm, dado que $\frac{48}{12} = 4$; logo, $d = 4\sqrt{3}$ cm.

Atividades

4. $A_T = 6a^2 = 6 \cdot 6^2 = 216$; logo, $A_T = 216$ cm².

Não escreva no livro

1. Quanto mede o comprimento da diagonal de um paralelepípedo retângulo no qual as medidas de comprimento das dimensões são 10 cm, 6 cm e 8 cm?

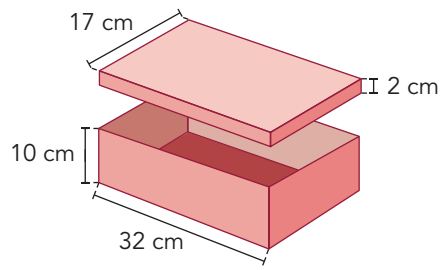
2. O comprimento da aresta de um cubo mede $10\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida de comprimento da diagonal desse cubo.

3. Em um cubo, a soma das medidas de comprimento de todas as arestas é 48 cm. Calcule a medida de comprimento da diagonal desse cubo.

4. Um cubo tem o comprimento da aresta medindo 6 cm. Qual é a medida de área total desse cubo?

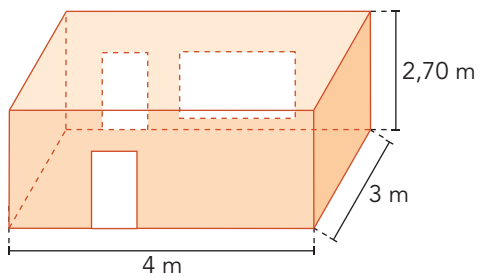
5. Modifique a informação apresentada na atividade anterior de modo que a medida de área desse cubo seja 121,5 cm².

6. Quantos centímetros quadrados de papelão são gastos para fazer uma caixa de sapatos com formato de bloco retangular e a tampa conforme as medidas de comprimento indicadas na imagem? 2 264 cm²



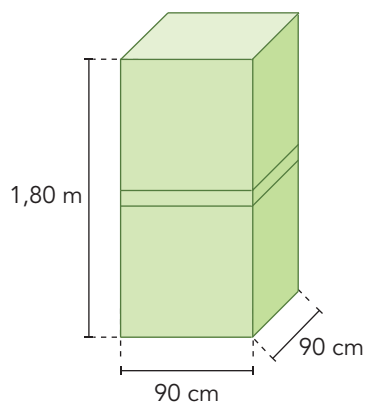
Banco de imagens/Arquivo da editora

7. Quantos metros quadrados de azulejo são necessários para revestir até o teto as 4 paredes de uma cozinha com as medidas de comprimento indicadas na imagem? Sabe-se que cada porta tem 1,60 m² de medida de área e a medida de área da janela é 2 m². 32,6 m²



Banco de imagens/Arquivo da editora

8. Quantos metros quadrados de madeira são gastos, aproximadamente, para fabricar 100 caixas para transportar geladeiras? O formato e as medidas de comprimento de cada caixa estão indicados na imagem.

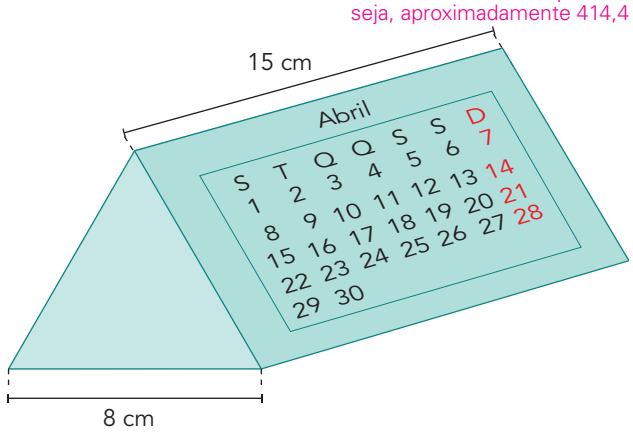


Banco de imagens/Arquivo da editora

5. $A_T = 6a^2 \Rightarrow 6a^2 = 121{,}5 \Rightarrow a = 4{,}5$. Logo, alterando a medida de comprimento da aresta para 4,5 cm, obtemos 121,5 cm² de medida de área.

$A_T = 4(0{,}90 \cdot 1{,}80) + 2(0{,}90 \cdot 0{,}90) = 6{,}48 + 1{,}62 = 8{,}1$; $100 \cdot 8{,}1 = 810$; logo, são gastos 810 cm².

9. Um calendário tem o formato e o tamanho apresentados na imagem. Quantos centímetros quadrados de papelão são necessários para fazer esse calendário, sabendo que a parte triangular tem formato de um triângulo equilátero? (Dado: $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.) $A_T = 3(8 \cdot 15) + 2 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 360 + 32\sqrt{3} \simeq 414{,}4$. Ou seja, aproximadamente 414,4 cm² de papelão.

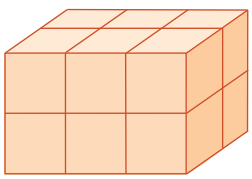


Banco de imagens/Arquivo da editora

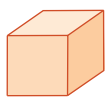
Medida de volume de um prisma

Suponha que queiramos medir o espaço ocupado por um sólido *S*. Para isso, precisamos comparar *S* com uma unidade de medida de volume. O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes o sólido *S* contém a unidade de medida de volume. Esse número é a medida de volume de *S*.

Por exemplo, a medida de volume do sólido *S* representado a seguir é 12 unidades de volume: 12 U.



Sólido *S*.

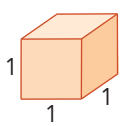


Unidade de medida de volume: U.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Cubo unitário

Vamos estabelecer como **unidade de medida de volume** um cubo cuja medida de comprimento da aresta é 1 unidade de comprimento. Ele será chamado **cubo unitário**.



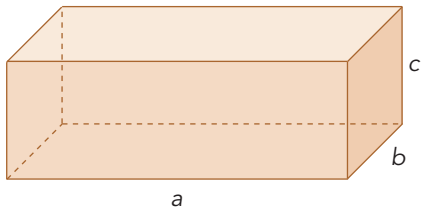
Cubo unitário.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Qualquer cubo cuja medida de comprimento da aresta seja 1 terá, por definição, medida de volume igual a 1.

Medida de volume de um paralelepípedo retângulo

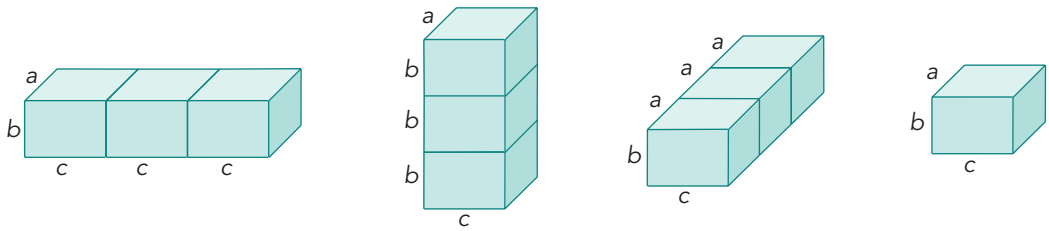
Como estudamos, o paralelepípedo retângulo é um poliedro que tem 6 faces retangulares. Ele tem 3 dimensões: comprimento, largura e altura, cujas medidas são, respectivamente, a, b e c. Assim, indicaremos a medida de volume desse paralelepípedo retângulo por $V(a, b, c)$ e a medida de volume do cubo unitário por $V(1, 1, 1) = 1$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de volume do paralelepípedo retângulo é proporcional à medida de comprimento de cada uma das dimensões, ou seja, se mantivermos constantes as medidas de 2 das dimensões e multiplicarmos a medida da terceira dimensão por um número natural qualquer não nulo, a medida de volume também será multiplicada pelo mesmo número natural. Isso pode ser notado no exemplo a seguir.

$$V(a, b, 3c) = V(a, 3b, c) = V(3a, b, c) = 3V(a, b, c)$$



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

É possível provar que esse fato, constatado com um número natural não nulo, vale para qualquer número real positivo. Ou seja, mantida constante a medida de 2 das dimensões do paralelepípedo retângulo, a medida de volume é proporcional à medida da terceira dimensão. Assim, temos:

$$V(a, b, c) = a \cdot V(1, b, c) = ab \cdot V(1, 1, c) = abc \cdot V(1, 1, 1) = abc \cdot 1 = abc$$

Logo: $V(a, b, c) = abc$.

Note que $a \cdot c$ é a medida de área da base do paralelepípedo retângulo e b é a medida de comprimento da altura. Chamando de A_b a medida de área da base de um paralelepípedo qualquer e de h a medida de comprimento da altura, podemos escrever:

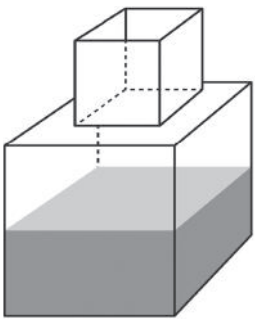
$$V = A_b \cdot h$$

Portanto, a medida de volume de um paralelepípedo retângulo é dada pelo produto das medidas de comprimento das 3 dimensões.

Atividades resolvidas

Atividade resolvida passo a passo

3. **(Enem)** Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Reprodução/Enem, 2014.

Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

a) 8 **b)** 10 **c)** 16 **d)** 18 **e)** 24

Resolução

Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dado o formato do depósito de armazenamento de leite, composto de 2 partes cúbicas, com a parte maior apresentando uma aresta com medida de comprimento igual ao dobro da medida de comprimento da aresta da parte menor. Além disso, é informada a medida de intervalo de tempo que a torneira leva para encher determinada parte do depósito.

b) O que se pede?

Pede-se a medida de intervalo de tempo necessária para a torneira encher completamente o depósito, considerando que a vazão seja constante.

Planejando a solução

Uma das maneiras de solucionar o problema é calcular a medida de volume do depósito, considerando que a medida de comprimento da aresta da parte cúbica maior seja igual a $2a$ e a da parte cúbica menor, a. Calculada a medida de volume do depósito, comparamos o valor obtido com a medida de volume da parte do depósito que já está preenchida, e assim, por regra de 3 simples, encontraremos a medida de intervalo de tempo necessária para preencher o restante do depósito.

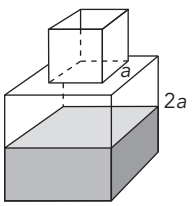
Executando o que foi planejado

- Medida de volume do depósito de armazenamento:

$$V_T = (2a)^3 + (a)^3 = 8a^3 + a^3 = 9a^3$$

- Medida de volume da parte do depósito que já está preenchida:

$$V_C = 2a \cdot 2a \cdot a = 4a^3$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Cálculo da medida de intervalo de tempo necessária para preencher o restante do depósito:

Sendo V_P a medida de volume do restante do depósito que precisa ser preenchido:

$$V_P = V_T - V_C$$

$$V_P = 9a^3 - 4a^3 = 5a^3$$

$4a^3$ ——— 8 min

$5a^3$ ——— x min

$$x = \frac{40a^3}{4a^3} \text{ min} \Rightarrow x = 10 \text{ min}$$

Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **b**.

Ampliando a atividade

a) Considere que *a* seja igual a 2 metros e que o valor do metro quadrado do material de que é feito o depósito seja R$ 95,00. Quanto o fazendeiro gastou para construir o depósito? E qual será a vazão da torneira que o preenche, em litros/segundo (L/s)?

R$ 10.640,00; aproximadamente 66,7 L/s.

b) Troque ideias com os colegas sobre o armazenamento dos produtos que consumimos diariamente e os processos de produção, transporte e venda. Conversem sobre a importância do correto armazenamento de produtos consumíveis e as consequências do armazenamento incorreto.

b) Exemplo de resposta: Os produtos para consumo devem seguir diversas regras de armazenamento para evitar intoxicação, no caso de alimentos, ou reações adversas e perda de eficácia, no caso de medicamentos, por exemplo. Os locais de venda também devem sempre atentar a essas regras e ao prazo de validade dos produtos disponíveis em estoque, a fim de proteger a saúde do consumidor.

As imagens não estão representadas em proporção.

Atividades

Não escreva no livro

10. Qual é a medida de volume de um cubo cujo comprimento da aresta mede 5 cm?

$V = 5^3 = 125$; logo, $V = 125$ cm³.

11. Qual é a medida de comprimento da aresta de um cubo cuja área total mede 600 dm² e cujo volume mede 1000 dm³?

$V = a^3 \Rightarrow 1\,000 = a^3 \Rightarrow a = 10$; logo, $a = 10$ dm.

12. Em um paralelepípedo retângulo, as medidas de comprimento das arestas da base são 4 cm e 7 cm. Sabendo que a medida de comprimento da altura do paralelepípedo é 5 cm, determine a medida de volume dele.

$V = 4 \cdot 7 \cdot 5 = 140$; logo, $V = 140$ cm³.

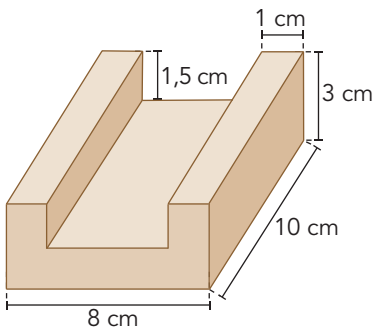
13. Quantos litros de água são necessários para encher uma caixa-d'água cujas dimensões medem 1,20 m por 0,90 m por 1 m? (Lembre-se: 1000 L = 1 m³.)

13. $V = 1{,}20 \cdot 0{,}90 \cdot 1 = 1{,}08$; 1 000 L = 1 m³ ⇒ 1,08 m³ = 1 080 L; logo, serão necessários 1 080 L para encher a caixa-d'água.

14. Considere uma caixa cúbica cujo comprimento da aresta mede 20 cm. Quantos dados cúbicos cujo comprimento da aresta mede 2 cm podem ser colocados nessa caixa?

15. Qual é a medida de volume de um sólido cujo formato parece com um bloco retangular com um corte e cujas medidas de comprimento estão representadas na imagem a seguir?

Medida de volume do sólido sem o corte:
$V_1 = 8 \cdot 10 \cdot 3 = 240$
Medida de volume do pedaço que falta:
$V_2 = 1{,}5 \cdot 6 \cdot 10 = 90$
Assim:
$V_T = 240 - 90 = 150$
Logo, $V_T = 150$ cm³.



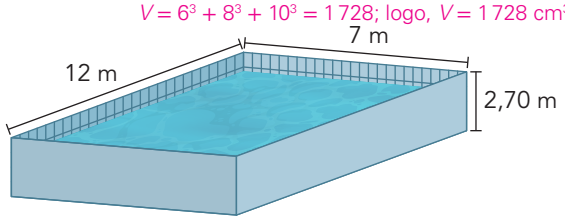
Banco de imagens/Arquivo da editora

14. $V_C = (20)^3 = 8000$; $V_D = 2^3 = 8$; $\frac{8000}{8} = 1\,000$; logo, podem ser colocados 1 000 dados na caixa.

16. Três cubos de chumbo, cujas arestas têm medidas de comprimento 6 cm, 8 cm e 10 cm, são fundidos em uma só peça cúbica. Qual é a medida de volume da peça cúbica obtida?

$V = 6^3 + 8^3 + 10^3 = 1\,728$; logo, $V = 1\,728$ cm³.

17. Considere a piscina representada e as medidas de comprimento das dimensões indicadas. Sabendo que essa piscina tem formato de bloco retangular, qual é a quantidade máxima de água, em litros, que essa piscina pode conter?

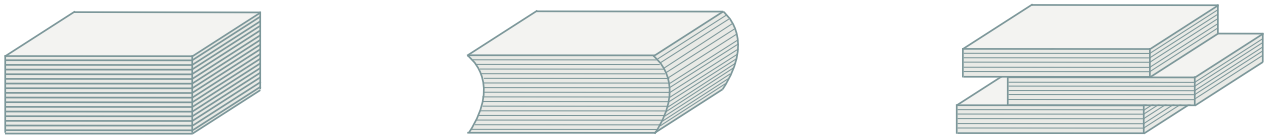


Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Medida de volume da piscina: $V = 12 \cdot 7 \cdot 2{,}70 = 226{,}8$
Como 1 m³ = 1 000 L, temos que 226,8 m³ = 226 800 L.
Portanto, a piscina pode conter até 226 800 L de água.

Princípio de Cavalieri

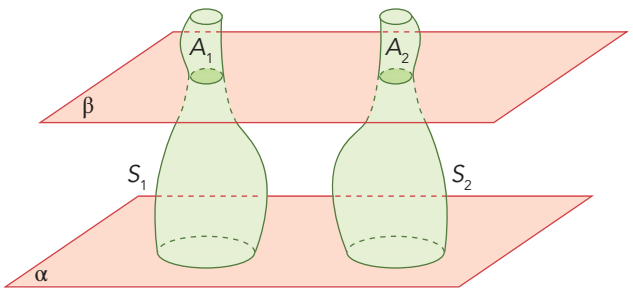
Imagine 3 pilhas com a mesma quantidade de folhas de papel, arrumadas de maneiras diferentes, como representado a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que qualquer plano horizontal que seccione as 3 pilhas terá intersecções de mesma medida de área (uma folha). Note também que as 3 pilhas têm medidas de volume iguais (só mudam os formatos).

Essa situação pode ser usada para ilustrar o **princípio de Cavalieri**, que estudaremos a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos considerar os sólidos S_1 e S_2 apoiados em um plano horizontal α. Consideremos também o plano β, paralelo a α, que, ao seccionar S_1, também secciona S_2, determinando 2 regiões planas de medidas de área A_1 e A_2.

Nessas condições, se para todo plano β temos $A_1 = A_2$, então a medida de volume V_1 do sólido S_1 é igual à medida de volume V_2 do sólido S_2.

$$A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$$

A seguir, estudaremos por que esse princípio simplifica o cálculo da medida de volume de sólidos geométricos.

Vídeo

Reflita

Não escreva no livro

O princípio de Cavalieri pode ser utilizado para obter a medida de volume de um prisma qualquer? Como isso poderia ser feito?

Sim. Espera-se que os estudantes percebam que poderia ser utilizado o paralelepípedo retângulo, cujo cálculo da medida de volume eles já estudaram, para obter a medida de volume de um prisma qualquer.

Sobre o assunto

O matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que foi discípulo de Galileu, publicou em 1635 a **teoria do indivisível**, que contém o que hoje é conhecido como "princípio de Cavalieri". Entretanto, essa teoria, que permitia que se encontrassem rapidamente e com exatidão as medidas de área e de volume de muitas figuras geométricas, foi duramente criticada na época. Segundo críticos, a teoria não se mostrava suficientemente embasada.

Mal sabiam eles que o princípio de Cavalieri seria um dos pilares do que hoje conhecemos como cálculo integral, ajudando a definir a noção de integral.

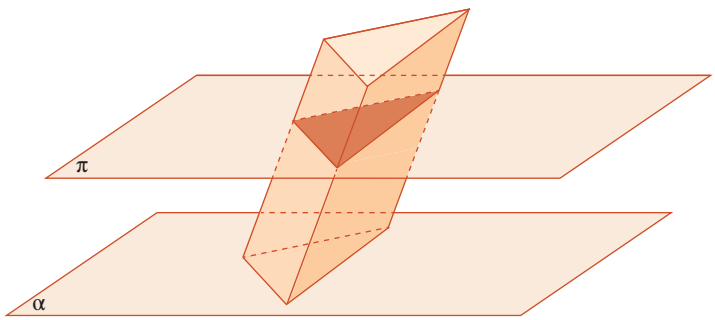
Fonte dos dados: INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647). *E-cálculo*, São Paulo, c2012. Disponível em: https://tedit.net/tw4kx2. Acesso em: 12 jul. 2024.

Para saber mais a respeito do princípio de Cavalieri, acesse o *site* indicado anteriormente ou assista ao vídeo disponível em: https://tedit.net/0fzh99. Acesso em: 12 jul. 2024.

Medida de volume de um prisma qualquer

Para calcular a medida de volume de um prisma qualquer, aplicamos o princípio de Cavalieri.

Inicialmente, notamos que, em um prisma qualquer com a base contida em um plano α, se o plano π é paralelo a α, a secção determinada por π no prisma será sempre congruente à base e, por isso, essa secção e a base terão sempre medidas de área iguais.

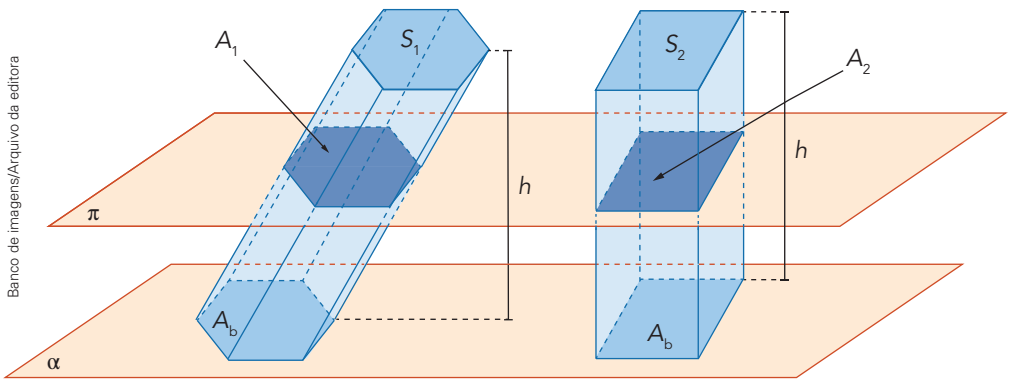


Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Em todo prisma, uma secção paralela à base é congruente a essa base.

Podemos agora calcular a medida de volume de um prisma qualquer utilizando o paralelepípedo retângulo como auxílio.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos considerar um prisma S_1, cuja área da base mede A_b e a medida de comprimento da altura é h, e um paralelepípedo retângulo S_2, cuja área da base mede A_b e a medida de comprimento da altura é h. O plano α que contém as bases é horizontal. Qualquer plano horizontal π que secciona os 2 sólidos determina no prisma S_1 uma região plana, cuja medida de área A_1 é igual a A_b, e no paralelepípedo retângulo S_2 determina uma região plana cuja medida de área A_2 é igual a A_b.

Como a medida de área A_1 é igual a A_b e a medida de área A_2 é igual a A_b, para qualquer plano horizontal π, temos:

$$A_1 = A_2$$

Pelo princípio de Cavalieri, concluímos que a medida de volume dos sólidos S_1 e S_2 é igual.

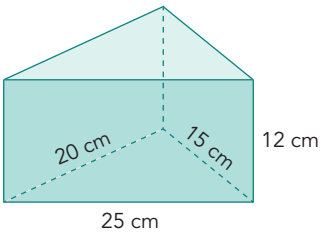
Considerando um prisma qualquer, pelo princípio de Cavalieri, a medida de volume do prisma é igual à medida de volume de um paralelepípedo retângulo (de mesma medida de área da base e mesma medida de comprimento da altura).

Como a medida de volume do paralelepípedo retângulo é obtida multiplicando a medida de área da base A_b pela medida de comprimento da altura h, então a medida de volume V do prisma é dada por:

$$V = A_b \cdot h$$

Atividades resolvidas

4. Calcule a medida de volume do prisma reto representado, cuja base é um triângulo retângulo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução

A base desse prisma é uma região limitada por um triângulo retângulo cujos comprimentos dos catetos medem 15 cm e 20 cm. Então:

$$A_b = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$$

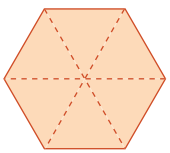
A medida de comprimento da altura do prisma é 12 cm. Assim, a medida de volume é dada por:

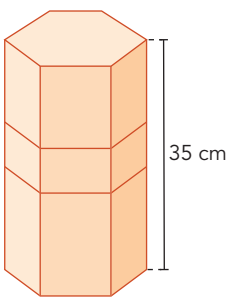
$$V = A_b \cdot h = 150 \cdot 12 = 1800$$

Logo, a medida de volume do prisma é 1800 cm³.

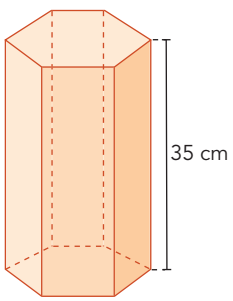
5. Um engenheiro quer encher de areia uma caixa cuja base é uma região limitada por um hexágono regular. Qual é a medida de volume do prisma que representa essa caixa? (Considere $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.)

As imagens não estão representadas em proporção.





Caixa.



Modelo matemático.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução

A base dessa caixa é uma região limitada por um hexágono regular cujo comprimento do lado mede 10 cm.

Sabemos que uma região limitada por um hexágono regular pode ser decomposta em 6 regiões limitadas por triângulos equiláteros.

Logo, a medida de área da base dessa caixa é dada por:

$$A_b = 6 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 25\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$$

Portanto, $A_b = 150\sqrt{3}$ cm².

A medida de volume do prisma é dada por:

$$V = A_b \cdot h = 150\sqrt{3} \cdot 35 = 5250\sqrt{3} \simeq 8925$$

A medida de volume é, aproximadamente, 8925 cm³ ou, aproximadamente, 9 L.

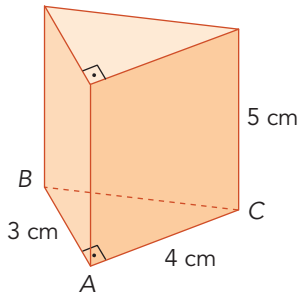
18. $V = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 30$; logo, $V = 30\ cm^3$.

19. $V = \frac{(8 + 12) \cdot 5}{2} \cdot 30 = 1\,500$; logo, $V = 1\,500\ cm^3$.

Atividades

Não escreva no livro

18. Qual é a medida de volume do prisma reto de base triangular representado a seguir?



Banco de imagens/Arquivo da editora

19. Uma barra de ouro é fundida no formato de um prisma que tem base de formato de um trapézio. As bases desse trapézio têm medidas de comprimento de 8 cm e 12 cm, e o comprimento da altura da base mede 5 cm. Sabendo que a medida de comprimento da altura do prisma é 30 cm, determine a medida de volume da barra de ouro.

Texto para a próxima atividade.

As imagens não estão representadas em proporção.

Algumas pedras preciosas ou semipreciosas apresentam formatos bem intrigantes, parecidos com prismas. No caso da água-marinha, os cristais têm um aspecto prismático hexagonal regular.



Minakryn Ruslan/Shutterstock

A água-marinha é uma variedade de cristal com berilo.

20. Considere uma água-marinha **euédrica** com medida de comprimento da aresta da base igual a $5\sqrt{3}$ cm e medida de altura igual a 8 cm. Qual é a medida de volume, em metros cúbicos, desse cristal? (Considere $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.)

a) $1530\ m^3$ Alternativa **d**.

b) $1{,}53\ m^3$

c) $1\,530\,000\ m^3$

d) $0{,}00153\ m^3$

e) $15{,}3\ m^3$

euédrico: cristal bem formado, que tem formato característico e as faces nítidas.

Texto para a próxima atividade.

Uma maneira prática de obter adubo orgânico em propriedades rurais ou mesmo em residências é produzir humo em minhocários. Há diversas possibilidades de construção desses depósitos. Em propriedades rurais, pode-se aproveitar materiais existentes no local, como bambus. Nesse caso, o ideal é que o minhocário tenha as seguintes medidas de comprimento: 1,80 m de extensão, 1,0 m de largura e 0,6 m de altura. A base e as paredes laterais devem ser revestidas com tela, para evitar que as minhocas fujam.

No interior, deve-se colocar capim e folhas triturados. Depois de inserir as minhocas, deve-se acrescentar esterco de gado. Recomenda-se que esse material não ultrapasse 80% da medida de altura do minhocário.



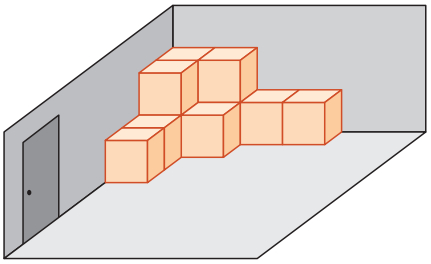
Maria Eunice Paula de Souza/Acervo da pesquisadora

Minhocário feito de bambu e palha.

Em seguida, deve-se espalhar borra de café sobre o material a ser decomposto para evitar o aparecimento de formigas. Para proteger o minhocário, pode-se cobri-lo com palha ou bambu.

21. Sabendo que o rendimento é praticamente 100% do material depositado, quantos litros de humo podem, no máximo, ser produzidos por vez em um minhocário com as medidas de dimensão citadas? 864 L

22. No canto de uma sala, foram empilhados alguns cubos, como mostra a ilustração.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Todos os cubos têm a mesma medida de comprimento de aresta. Qual é a medida de volume total dos cubos empilhados nessa sala?

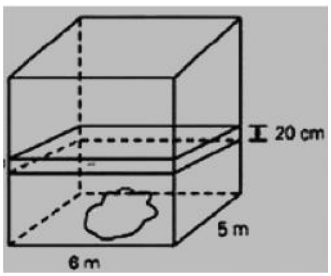
Não é possível responder a essa pergunta, pois faltam dados.

23. Uma mala grande com medidas de comprimento das dimensões iguais a 70 cm, 30 cm e 50 cm, respectivamente, corresponde a quantos blocos retangulares de 1 dm^3?

a) 100 **b)** 105 **c)** 110 **d)** 115

Alternativa **b**.

24. **(IFG-GO)** Considere um aquário em forma de paralelepípedo reto de base retangular, contendo água até certo nível e com dimensões da base medindo 6 metros e 5 metros. Após a imersão de certo objeto sólido nesse aquário, o nível da água subiu 20 cm sem que água transbordasse. Nessas condições, é **correto** afirmar que o volume desse objeto sólido em metros cúbicos é de:



Reprodução/IFG, 2018.

a) 0,6 m^3. **c)** 60 m^3.

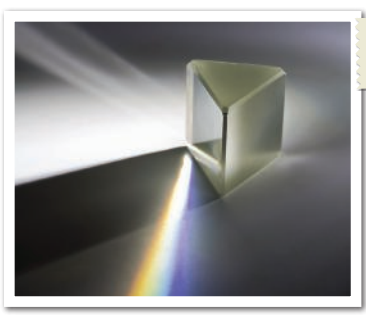
b) 6 m^3. **d)** 600 m^3.

$V = 6 \cdot 5 \cdot 0{,}2 = 6$; logo, $V = 6\ m^3$. Alternativa **b**.

Texto para a próxima atividade.

Prismas ópticos são comumente usados para separar a luz branca policromática nas 7 cores monocromáticas que são visíveis para os seres humanos. Isso acontece porque a luz branca, quando incide na superfície do prisma, refrata em um índice diferente para cada cor que a compõe. Por exemplo, o roxo desvia mais do que o vermelho.

25. Suponha que um professor de Física deseje construir um prisma triangular regular de vidro cuja medida de comprimento da aresta da base seja 5 cm e cuja medida de altura seja 30 cm. De quantos cm^3 de vidro ele necessitará? (Considere $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.) 324,375 cm^3



MilanB/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

Prisma óptico.

26. **(FGV-SP)** Uma piscina tem o formato de um paralelepípedo retângulo com as dimensões: 10 m de comprimento, 4 m de largura e 1,5 m de altura. Inicialmente, a piscina está vazia e é preenchida com água que jorra de um tubo a uma vazão de 250 litros por minuto. Depois de duas horas e meia, qual a porcentagem do volume de água em relação ao volume total da piscina? Alternativa **b**.

a) 52,5% **d)** 57,5%

b) 62,5% **e)** 60%

c) 55%

27. Elabore, no caderno, mais 2 perguntas para a atividade anterior e troque o caderno com um colega, de modo que um responda às perguntas que o outro elaborou. Depois, confira as respostas do colega. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

28. Uma resma de papel-ofício contém 500 folhas. Quando devidamente empilhadas, elas podem ter o formato de paralelepípedo. Ao inclinarmos essa resma conforme sugere a representação das figuras **1** e **2**, notaremos que a medida de altura da pilha não se altera.

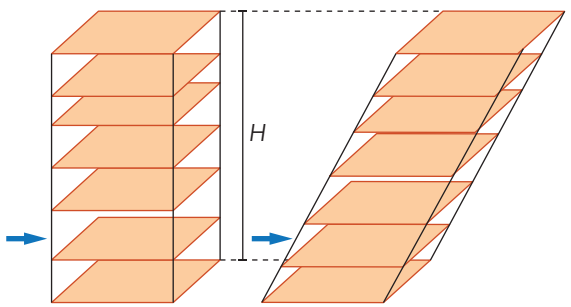


Figura **1**. Figura **2**.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Supondo também que nenhuma folha será retirada, então:

a) a medida de volume da figura **2** será maior do que a da figura **1**.

b) a medida de volume da figura **2** será menor do que a da figura **1**.

c) a medida de volume da figura **2** pode ser menor do que a da figura **1**, mas depende da inclinação.

d) a alteração depende da medida de área da folha.

e) a medida de volume não se altera.

28. Segundo o princípio de Cavalieri, 2 sólidos com mesma medida de altura têm medidas de volume iguais se as secções planas (no caso, uma folha qualquer da resma) de mesma medida de altura apresentarem a mesma medida de área. Sendo assim, as alternativas **a**, **b**, **c** e **d** são incorretas, pois a medida de volume não se altera. Alternativa **e**.

Conexões

Não escreva no livro

Tecnologias 3-D

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

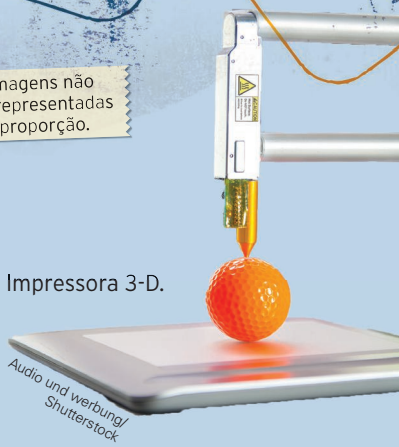
As imagens não estão representadas em proporção.

Tecnologias 3-D envolvem o processo de criar ou replicar digitalmente objetos, personagens, cenários e fenômenos em 3 dimensões por meio de cenas estáticas ou animadas.



MarinaGrigorivna/Shutterstock

Boneco impresso em impressora 3-D.



Audio und werbung/ Shutterstock

Impressora 3-D.

No entretenimento

Valendo-se da tecnologia 3-D, a indústria de filmes de animação e de jogos consegue produzir cenas que às vezes se confundem com cenas reais. O uso de aparelhos de realidade virtual, assim como fotos ou filmagens em 360°, permite um profundo nível de imersão.



Luis Moura/Arquivo da editora; Prostock-studio/Shutterstock

Aparelhos de realidade virtual são usados por empresas de jogos eletrônicos, de educação e outras.

Na indústria

A modelagem 3-D permite a otimização de processos industriais em larga escala. Simulações digitais podem ser realizadas para testar a viabilidade e a eficiência e realizar previsões sobre comportamentos sob as mais diversas situações e condições; reduzindo os custos, os riscos e o tempo envolvidos nos processos.

Engenheiros podem usar tecnologia 3-D para estudar ou elaborar peças digitalmente simuladas.



Gorodenkoff/Shutterstock

Na odontologia

Impressões 3-D podem ser usadas para criar diversos tipos de equipamento e próteses para uso humano. Diversas cirurgias podem ser guiadas com auxílio de objetos impressos, chamados guias cirúrgicos, que foram criados por meio de um planejamento digital do ato cirúrgico. Outra possibilidade de uso das impressões 3-D em cirurgias e implantes é a impressão de modelos do paciente.

Protetores bucais podem ser desenvolvidos e testados digitalmente.



Oleh Dubyna/Shutterstock



Stock Holm/ Shutterstock

Modelo de prótese dentária impresso em 3-D.



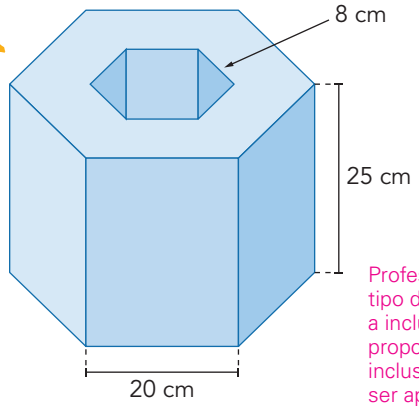
Vei Xhion Tan/ Shutterstock

Guia cirúrgico feito em impressora 3-D.

Conecte com o texto

1. Suponha que um engenheiro tenha projetado a peça metálica representada pela figura a seguir. Para produzi-la, ele deseja usar uma **fresadora** CNC (controle numérico computadorizado), que é gerenciada por computador e programada para trabalhar em 3 dimensões.

fresadora: máquina equipada com fresas – ferramentas de corte similares a brocas de furadeiras – que pode moldar materiais por meio de cortes, entalhos e perfurações.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O engenheiro definiu, no projeto, que a peça tem o formato de prisma reto e as bases têm o formato de hexágonos regulares.

As imagens não estão representadas em proporção.

Professor, na atividade **2**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

O engenheiro, então, gera um modelo digital da peça em um computador e coloca um cubo metálico, cuja aresta apresenta medida de comprimento igual a 60 cm, para ser moldado pela fresadora CNC. As fresas da máquina começam a se mover ao longo das coordenadas que o computador envia, desbastando e cortando o cubo metálico até que ele se torne a peça projetada.

Depois de finalizada essa produção, qual foi a medida de volume x de metal que sobrou do processo?

$x = \left(216\,000 - 12\,600\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^3$

Pesquise e debata

2. No início de 2020, com o avanço da pandemia de covid-19, houve aumento da demanda de material hospitalar e de proteção individual de profissionais da saúde. O uso da impressão 3-D agregou nos esforços para conter o vírus, pois auxiliou na produção de protetores faciais, válvulas de respiradores e distribuidores de fluxo de ar.

Pesquise e indique outras aplicações de tecnologia 3-D na área da Saúde. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.



Lucie Peclova/Shutterstock

Protetor facial feito com impressora 3-D, que aparece ao fundo. Protetores como esse podem ser utilizados por profissionais da Saúde para o atendimento de pacientes.

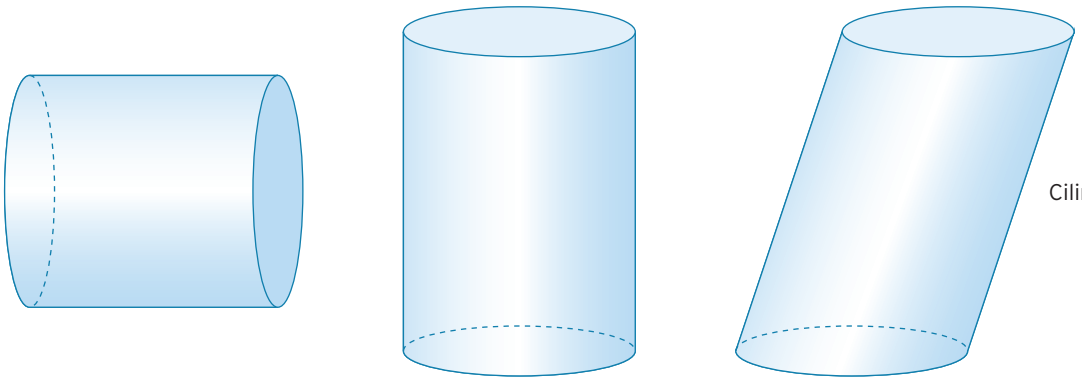
Sobre o assunto

Para conhecer mais sobre o uso da impressão 3-D para a produção de próteses e modelos, sugerimos os vídeos indicados a seguir.

- ESTUDANTES fazem próteses para crianças com deficiência com impressoras 3D. [*S. l.*: *s. n.*], 2022. 1 vídeo (3 min 7 s). Publicado pelo canal *Fala Brasil*. Disponível em: https://tedit.net/iuyeib. Acesso em: 12 jul. 2024.
- IMPRESSÃO 3D na Medicina: Planejamento de Cirurgias de Quadril. [*S. l.*: *s. n.*], 2022. 1 vídeo (8 min 25 s). Publicado pelo canal *IPE Hospital Alemão Oswaldo Cruz*. Disponível em: https://tedit.net/hqximm. Acesso em: 12 jul. 2024.

Os cilindros

Agora, vamos estudar os cilindros. Considere alguns exemplos a seguir.



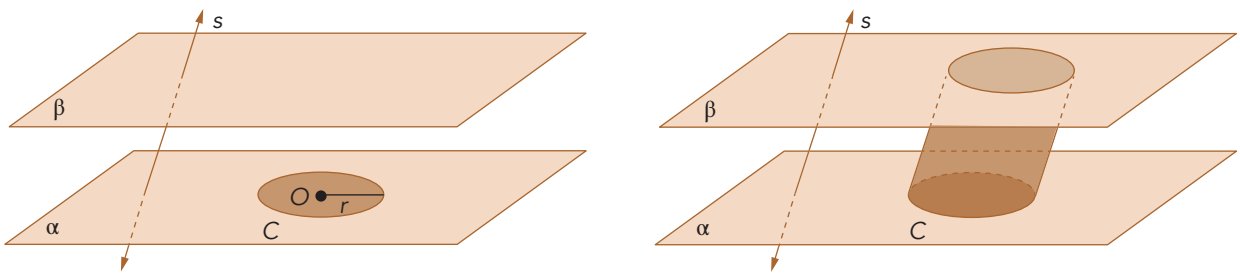
Cilindros.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Formalizando o conceito de cilindro

Considere 2 planos α e β, distintos e paralelos, um círculo qualquer, por exemplo, C, de centro O e raio de medida de comprimento r, contido no plano α, e uma reta s concorrente aos planos α e β e que não intersecta o círculo C.

A figura geométrica formada por todos os segmentos de reta paralelos à reta s, que tem uma extremidade no círculo C e a outra extremidade no plano β, é chamada **cilindro circular** (ou simplesmente **cilindro**).



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A superfície do cilindro é formada por 2 círculos, que são as **bases**, e uma parte não plana, "arredondada", que é a **superfície lateral**.

A medida de comprimento da **altura** do cilindro é a medida de distância entre os planos das bases.

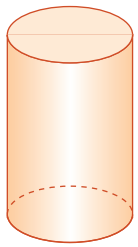
Cilindro reto e cilindro oblíquo

Assim como no prisma, o cilindro é **reto** quando a reta s concorrente aos planos α e β é perpendicular aos planos (e, consequentemente, os segmentos de reta paralelos, que têm uma extremidade no círculo C e a outra extremidade no plano β, são perpendiculares às bases do cilindro), e é **oblíquo** quando a reta s (e, consequentemente, esses segmentos de reta citados) não é perpendicular aos planos.

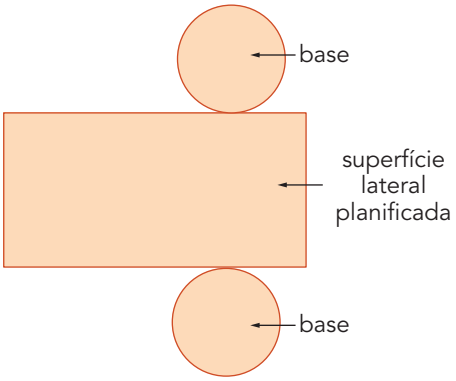
Analise os exemplos de cilindro a seguir.

a) Cilindro reto

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



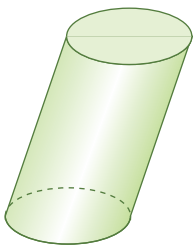
Cilindro reto.



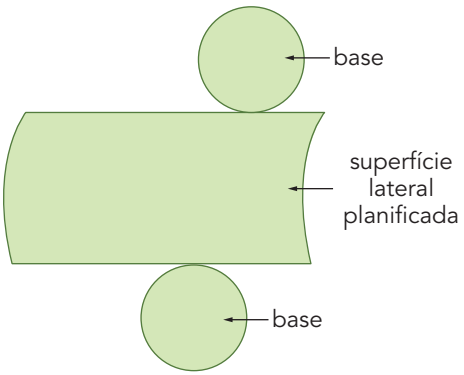
Planificação da superfície de um cilindro reto.

b) Cilindro oblíquo

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Cilindro oblíquo.

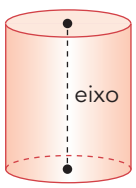


Planificação da superfície de um cilindro oblíquo.

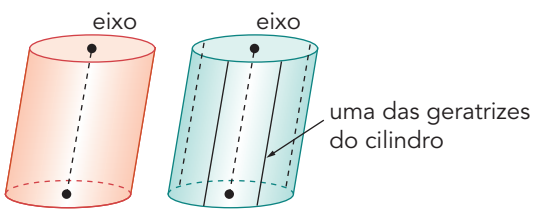
Assim, em um cilindro reto, a superfície lateral planificada é uma região retangular, e, em um cilindro oblíquo, é uma região com lados curvos.

O segmento de reta determinado pelos centros das bases de um cilindro é chamado **eixo** do cilindro. No cilindro reto, o eixo é perpendicular às bases e, no cilindro oblíquo, o eixo não é perpendicular às bases. No caso do cilindro reto, a medida de comprimento do eixo coincide com a medida de comprimento da altura do cilindro.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Cilindro reto.



Cilindros oblíquos.

Não escreva no livro

Reflita

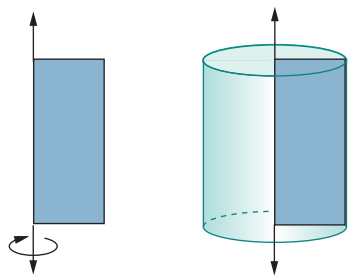
Em que caso a altura e a geratriz de um cilindro têm a mesma medida de comprimento?

Quando o cilindro é reto.

Os segmentos de reta paralelos ao eixo, cujas extremidades são pontos das circunferências que limitam as bases, são chamados **geratrizes** do cilindro.

Um cilindro reto também pode ser obtido ao girar uma região retangular em torno de uma reta que contém um dos lados dele. Por isso, o cilindro circular reto pode ser chamado também **cilindro de revolução**, uma vez que o sólido é obtido por meio da rotação de uma região limitada por um retângulo em torno do eixo determinado por um lado dele.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

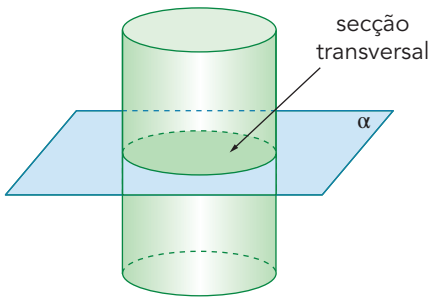


Secções de um cilindro

Secção transversal

A secção transversal de um cilindro é a intersecção do cilindro com um plano paralelo às bases. Ela é um círculo congruente às bases do cilindro.

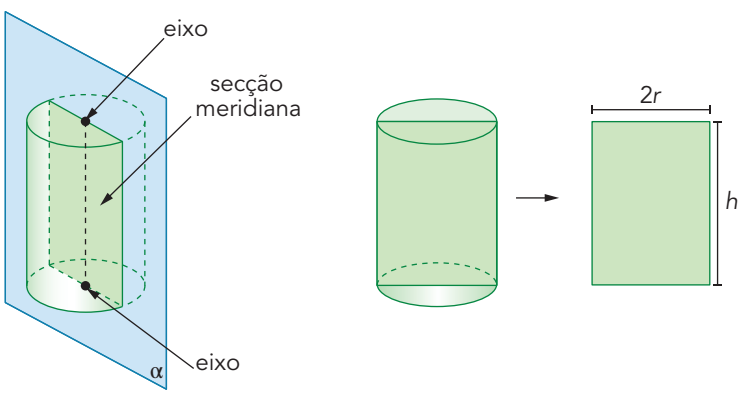
Banco de imagens/Arquivo da editora



Secção meridiana

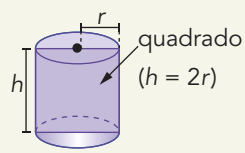
A secção meridiana de um cilindro é a intersecção do cilindro com um plano que contém o eixo dele. A secção meridiana de um cilindro reto é uma região retangular.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Fique atento

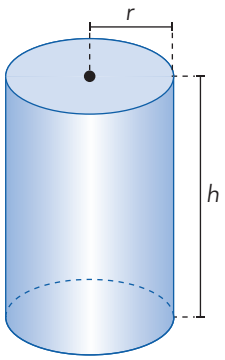
Se a secção meridiana for uma região quadrada, dizemos que o cilindro é **equilátero**. Nesse caso, $h = 2r$.



Cilindro equilátero.

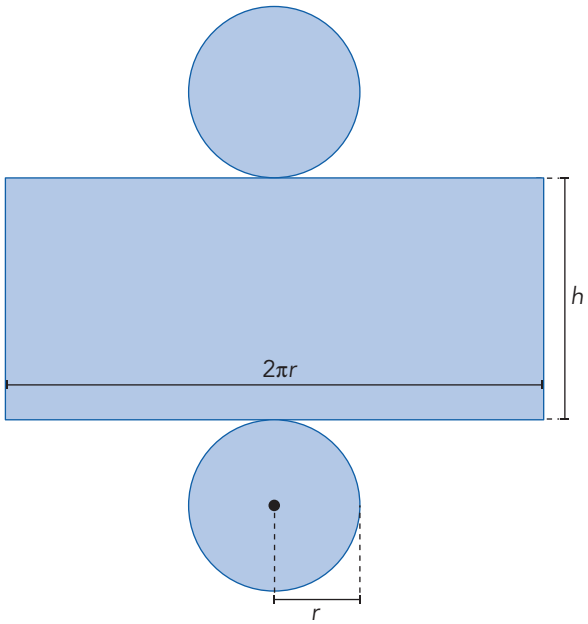
Medida de área da superfície de um cilindro reto

A superfície total do cilindro é formada pela superfície lateral mais as superfícies das 2 bases.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Cilindro reto.



Planificação da superfície de um cilindro reto.

Fique atento

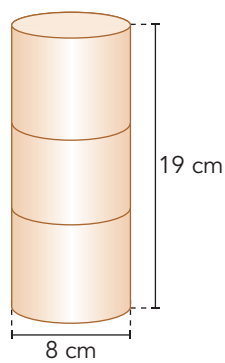
A superfície lateral planificada do cilindro reto é uma região retangular cujas dimensões são: a altura do cilindro, com medida de comprimento h, e o comprimento da circunferência da base, com medida $2\pi r$. Cada base do cilindro é um círculo com medida de área igual a πr^2.

Assim:

- **medida de área lateral**: $A_\ell = (2\pi r)h = 2\pi rh \Rightarrow A_\ell = 2\pi rh$
- **medida de área das bases**: $2A_b = 2\pi r^2$
- **medida de área total**: $A_T = A_\ell + 2A_b = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) \Rightarrow A_T = 2\pi r(h + r)$

Atividades resolvidas

6. Quantos centímetros quadrados de material são usados para fabricar a embalagem cilíndrica representada, considerando que ela não tem nenhum tipo de preenchimento e que o cilindro é reto?



Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução

Temos os seguintes dados:

- medida de comprimento do diâmetro: $d = 8$ cm;
- medida de comprimento do raio: $r = 4$ cm;
- medida de comprimento da altura: $h = 19$ cm.

Vamos resolver esse problema em função de π. Acompanhe:

$$A_\ell = 2\pi rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 19 = 152\pi$$

$$2A_b = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 4^2 = 32\pi$$

$$A_T = 152\pi + 32\pi = 184\pi$$

São necessários 184π cm^2 de material.

30. $A_\ell = 2\pi rh \Rightarrow A_\ell = 2\pi \cdot 5h \Rightarrow 20\pi = 10\pi h \Rightarrow h = \frac{20\pi}{10\pi} \Rightarrow h = 2$; $A_T = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 5(2 + 5) = 10\pi \cdot 7 = 70\pi$.

A medida de altura é 2 cm, e a medida de área total é 70π cm^2.

Atividades

Não escreva no livro

Fique atento

Considere que os cilindros mencionados, exceto nos casos em que forem explicitamente classificados como de outro tipo, são cilindros retos.

29. Um estojo com formato cilíndrico tem base com 8 cm de medida de comprimento do diâmetro e 15 cm de medida de comprimento da altura. Quantos centímetros quadrados de material são necessários, aproximadamente, para fabricar esse estojo? (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.)

29. $2A_b = 2(\pi \cdot 4^2) = 32\pi$

$A_\ell = 2\pi \cdot 4 \cdot 15 = 120\pi$

$A_T = 2A_b + A_\ell = 32\pi + 120\pi = 152\pi$

Portanto, serão necessários 152π cm^2 ou, aproximadamente, 477 cm^2 de material para fabricar o estojo.

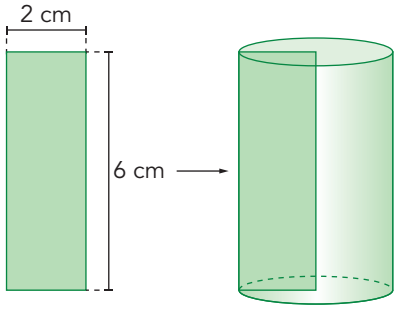


Petr Malyshev/Shutterstock

Estojo em formato cilíndrico.

30. Sabe-se que a medida de área lateral de um cilindro é 20π cm^2. Se o comprimento do raio da base mede 5 cm, calcule a medida de comprimento h da altura e a medida de área total A_T do cilindro.

31. O cilindro representado foi obtido por meio da rotação da região limitada por um retângulo em torno do eixo determinado pelo lado, cujo comprimento mede 6 cm. Calcule a medida de área total desse sólido.



$2A_b = 2\pi r^2 = 2(\pi \cdot 2^2) = 8\pi$

$A_\ell = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi$

$A_T = 8\pi + 24\pi = 32\pi$

Portanto, a medida de área total do cilindro é 32π cm^2.

32. Exemplo de problema: Considere uma embalagem em formato de cilindro reto cuja altura meça 5 cm e o diâmetro, 8 cm. Quantos centímetros quadrados de material são usados para fabricar o rótulo da embalagem, considerando que o rótulo cobre toda a superfície dela?

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

32. Elabore, no caderno, um problema que envolva o cálculo da medida de área total de um cilindro e que possa ser ilustrado pela foto apresentada. Troque o caderno com um colega, de modo que um resolva a atividade que o outro elaborou. Depois, confira a resposta do colega.

As imagens não estão representadas em proporção.



Anton Tolmachov/Shutterstock

Produtos pastosos costumam ser embalados em recipientes cilíndricos porque eles não apresentam "quinas", evitando que parte do conteúdo fique preso nelas e que ocorra desperdício.

33. Duas latas têm formato cilíndrico. A lata mais alta tem o dobro da medida de altura da outra, mas a medida de comprimento do diâmetro da lata mais alta é metade da medida de comprimento do diâmetro da lata mais baixa.

Em qual das latas foi utilizado menos material na fabricação?

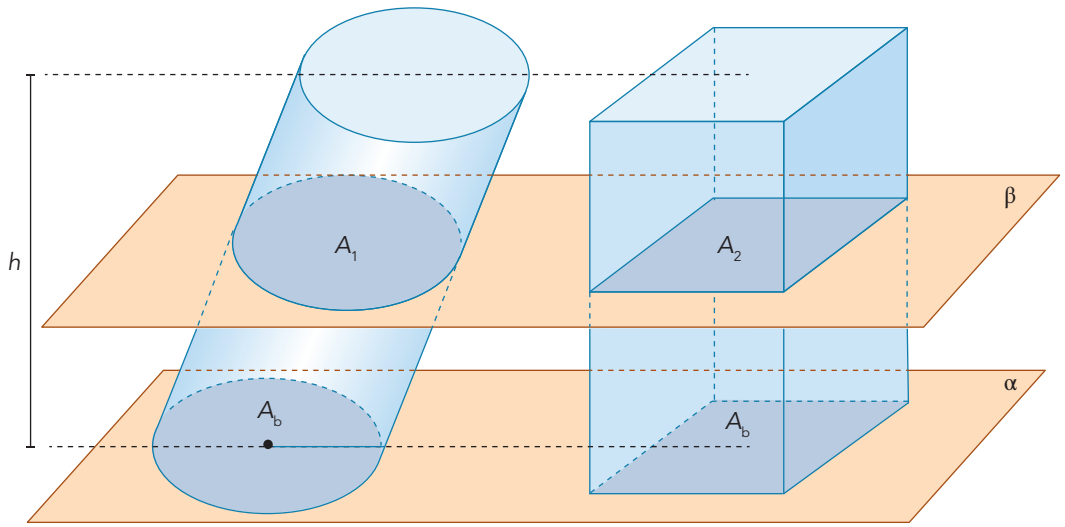
Medida de área total da lata mais baixa: $A_T = 2\pi(2r) \cdot (h + 2r) = 4\pi r(h + 2r) = 4\pi rh + 8\pi r^2$.
Medida de área total da lata mais alta: $A_T = 2\pi r(2h + r) = 4\pi rh + 2\pi r^2$.
Logo, utilizou-se menos material na lata mais alta.

Medida de volume de um cilindro

Vamos usar o princípio de Cavalieri para determinar a medida de volume de um cilindro.

Dado um cilindro com a base contida em um plano α, vamos considerar um paralelepípedo retângulo, também com a base contida em α, que tem a medida de área da base igual à medida de área da base do cilindro e a medida de comprimento da altura igual à do cilindro.

Cada plano β, paralelo a α, que secciona um dos sólidos também secciona o outro, e as secções determinadas por β em cada um deles têm a mesma medida de área das bases.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como a medida de área A_1 é igual a A_b e a medida de área A_2 é igual a A_b para qualquer plano horizontal β, temos:

$$A_1 = A_2$$

Então, pelo princípio de Cavalieri, temos que a medida de volume do cilindro e a do paralelepípedo retângulo são iguais. Tomando um cilindro qualquer, pelo princípio de Cavalieri, a medida de volume do cilindro é igual à medida de volume de um paralelepípedo retângulo (de mesma medida de área da base e mesma medida de altura).

Como a medida de volume do paralelepípedo retângulo é obtida multiplicando a medida de área da base A_b pela medida de comprimento h da altura, segue que a medida de volume V do cilindro é dada por:

$$V = A_b \cdot h$$

Sendo a base do cilindro um círculo de raio de medida de comprimento r e área de medida πr^2, temos:

$$V = \pi r^2 h$$

Fique atento

Note que a medida de volume do cilindro é calculada da mesma maneira que calculamos a medida de volume de um prisma: multiplicando a medida de área da base pela medida de comprimento da altura.

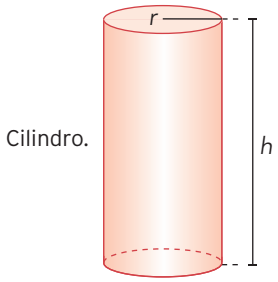
Atividades resolvidas

7. Desprezando a medida de espessura do vidro, qual é a medida de capacidade de um copo cilíndrico cujo comprimento do diâmetro da base mede 6 cm e cujo comprimento da altura mede 16 cm? (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.)



ifong/Shutterstock

Copo cilíndrico com suco de laranja.



Cilindro.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

A capacidade é uma grandeza que se relaciona com o volume, uma vez que ela é o volume interno de um recipiente.

Resolução

Se o diâmetro tem medida de comprimento de 6 cm, então $r = 3$ cm.

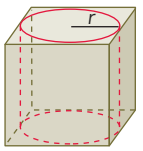
Assim, temos:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 16 = 144\pi \simeq 452$$

Como $1\ cm^3 = 1$ mL, a medida de capacidade do copo é, aproximadamente, 452 mL.

As imagens não estão representadas em proporção.

8. A imagem mostra a representação de um cilindro inscrito em um cubo. A medida de volume do cilindro é $64\pi\ cm^3$. Calcule a medida de volume do cubo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução

Como a medida de altura do cilindro é igual à medida de comprimento do diâmetro, temos:

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 64\pi = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow 2r^3 = 64 \Rightarrow r^3 = 32 \Rightarrow r = 2\sqrt[3]{4}$$

Considerando que a medida de comprimento da aresta do cubo é igual à medida de comprimento do diâmetro da base do cilindro, temos:

$$a = 2r = 4\sqrt[3]{4}$$

Assim, a medida de volume do cubo é dada por:

$$V = a^3 = \left(4\sqrt[3]{4}\right)^3 = 256$$

Portanto, a medida de volume do cubo é $256\ cm^3$.

Atividade resolvida passo a passo

Infográfico clicável

9. **(Enem)** Um povoado com 100 habitantes está passando por uma situação de seca prolongada e os responsáveis pela administração pública local decidem contratar a construção de um reservatório. Ele deverá ter a forma de um cilindro circular reto, cuja base tenha 5 metros de diâmetro interno, e atender à demanda de água da população por um período de exatamente sete dias consecutivos. No oitavo dia, o reservatório vazio é completamente reabastecido por carros-pipa.

Considere que o consumo médio diário por habitante é de 120 litros de água. Use 3 como aproximação para π. Nas condições apresentadas, o reservatório deverá ser construído com uma altura interna mínima, em metro, igual a:

a) 1,12. **b)** 3,10. **c)** 4,35. **d)** 4,48. **e)** 5,60.

Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

São dados no problema o formato do reservatório que será construído, a medida de comprimento do diâmetro da base dele, a quantidade de habitantes da cidade, o consumo médio diário de água por habitante e a medida de intervalo de tempo que o reservatório deve levar para atender à demanda.

b) O que se pede?

Pede-se a medida de altura mínima que o reservatório deve ter para atender à demanda da população.

Planejando a solução

Precisamos, inicialmente, determinar quantos litros de água esse reservatório precisa conter para atender uma demanda de 7 dias, ou seja, qual deve ser a medida de volume ocupada pela água nesse reservatório. Para isso, devemos calcular a medida de volume de água que 100 habitantes consomem durante o período de 7 dias.

Em seguida, devemos converter essa medida de volume, obtida em litros, para metros cúbicos.

Depois, basta calcular o valor da medida de comprimento h da altura a partir da medida de volume obtida e da medida de comprimento r do raio desse reservatório.

Executando o que foi planejado

Consumo diário de água para 100 habitantes:

$$100 \cdot 120 = 12\,000$$

Demanda de água em 7 dias:

$$7 \cdot 12\,000 = 84\,000$$

$$84\,000 \text{ L} = 84\,000 \text{ dm}^3 = 84 \text{ m}^3$$

Portanto, deve haver uma medida de volume de água igual a 84 m^3 armazenada no reservatório.

Considerando $\pi \simeq 3$ e $r = 2{,}5$ m (pois $5 \div 2 = 2{,}5$), temos:

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 84 \simeq 3 \cdot (2{,}5)^2 \cdot h \Rightarrow 18{,}75h = 84 \Rightarrow h = 4{,}48$$

Portanto, a medida mínima de comprimento da altura do reservatório deve ser, aproximadamente, 4,48 m.

Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **d**.

Ampliando a atividade

a) Qual deve ser a medida mínima de comprimento da altura desse reservatório se a medida de comprimento do diâmetro da base for 8 m e se o consumo diário por habitante for 110 litros (quantidade recomendada pela ONU)?

b) Pesquise informações sobre o consumo médio diário de água por habitante na região em que você vive e no Brasil. Esse consumo é igual ou diferente do recomendado pela ONU? Depois, converse com os colegas sobre as informações que obteve.

A resposta depende da pesquisa realizada pelo estudante.

a) Consumo diário de água para 100 habitantes: $100 \cdot 110 = 11\,000$.
Demanda de água em 7 dias: $7 \cdot 11\,000 = 77\,000$.
Portanto, é preciso que a medida de volume de água armazenada no reservatório seja 77 m^3.
$V = \pi r^2 h \Rightarrow 77 \simeq 3 \cdot (4)^2 \cdot h \Rightarrow 48h = 77 \Rightarrow h \simeq 1{,}6$
Logo, $h \simeq 1{,}6$ m.

Tecnologias digitais

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Medida de área e de volume de prismas e cilindros

Vamos agora utilizar um *software* de Geometria dinâmica para calcular as medidas de área e de volume de um cilindro e de um prisma de base triangular.

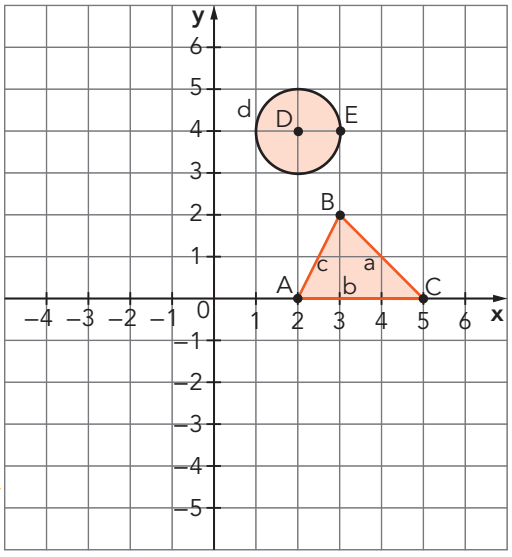
Para as atividades propostas a seguir, sugerimos selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que permita esse tipo de construção em 3-D. Na sequência, apresentamos alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* desse tipo.

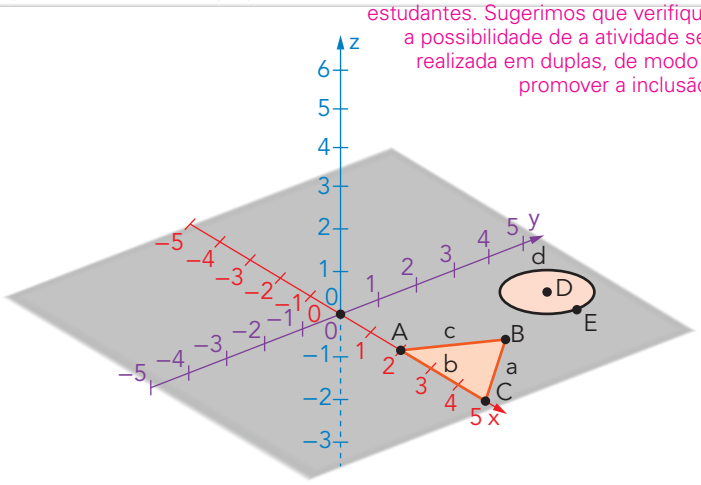
1º passo: Vamos representar sobre a malha quadriculada do *software* escolhido regiões limitadas por uma circunferência e por um triângulo (que serão as bases dos sólidos geométricos). Para isso, localize e selecione a ferramenta de construção de polígonos e, em seguida, determine os vértices do $\triangle ABC$. Depois, localize e selecione a ferramenta de construção de um círculo, de modo que um segmento de reta $\overline{DE}$ seja o raio da circunferência d.

2º passo: Localize e selecione a opção de visualização em 3-D. O programa deve mostrar as figuras geométricas obtidas no passo anterior considerando a posição delas no espaço.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Guilherme Luciano/Arquivo da editora





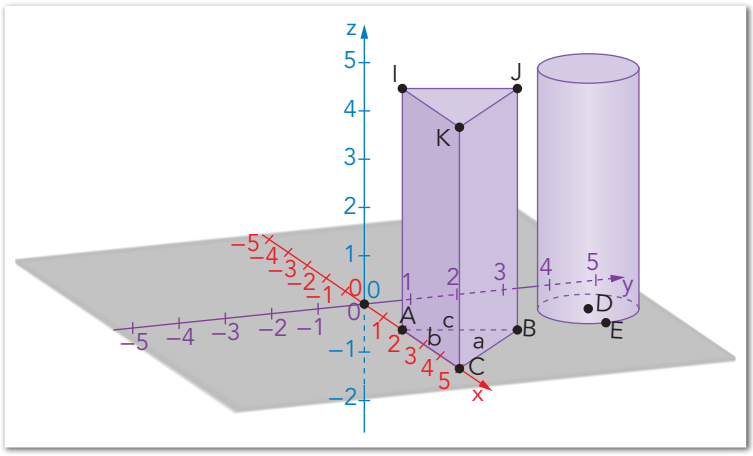
Exemplo de construção no *software* de Geometria dinâmica após o 2º passo.

3º passo: Localize e selecione a ferramenta que constrói um prisma a partir de uma base poligonal. Clique sobre o $\triangle ABC$ representado e, na janela que o programa abrir, insira a medida de comprimento da altura igual a 5 unidades. Assim, obteremos um prisma de base triangular e de medida de comprimento da altura igual a 5 unidades.

Fique atento

Lembre-se de adaptar as instruções de acordo com o *software* escolhido, já que as interfaces e os procedimentos podem variar.

4º passo: Repita o procedimento do passo anterior, mas, agora, clicando sobre a circunferência *d* e definindo como 5 unidades a medida de comprimento da altura. Assim, obteremos um cilindro de medida de comprimento da altura igual a 5 unidades.



Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção no *software* de Geometria dinâmica após o 4º passo.

5º passo: Localize e selecione a ferramenta que determina a medida de área de uma região e clique em uma das bases de cada sólido e nas 3 faces laterais do prisma triangular. Dessa maneira, serão exibidos na tela rótulos informando a medida de área de cada uma dessas regiões.

6º passo: Localize e selecione a ferramenta que obtém a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{DE}$, que equivale à medida de comprimento do raio da circunferência.

1. A partir das medidas de área obtidas, calcule a medida de área lateral do cilindro.
O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

2. A partir das medidas obtidas para o prisma e para o cilindro, calcule a medida de área total desses sólidos geométricos. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

7º passo: Localize e selecione a ferramenta que apresenta as medidas de volume de cada um desses sólidos geométricos.

3. Um maquinário industrial utiliza peças maciças de metal com formato de prisma de base quadrada com medidas de comprimento das dimensões iguais a 3 cm × 3 cm × 7 cm. Devido a uma alteração no projeto do maquinário que utiliza essas peças, elas passarão a ter um formato cilíndrico, cuja medida de comprimento da altura deverá ser 6 cm e a medida de comprimento do raio deverá ser 2 cm. Utilizando as ferramentas do *software*, determine:

a) a medida de volume da peça com formato de prisma e da nova peça com formato de cilindro; 63 cm^3; 75,4 cm^3.

b) a medida de área da superfície total da peça com formato de prisma e da nova peça com formato de cilindro. (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.) 102 cm^2; aproximadamente 100,5 cm^2.

4. Analisando as medidas obtidas na atividade anterior, responda ao que se pede.

a) Qual peça necessitará de maior quantidade de metal para ser fabricada?
A peça com formato cilíndrico, ou seja, a peça com a maior medida de volume.

b) Uma alteração no projeto de fabricação, que ainda necessita de aprovação, prevê como parte do acabamento a pintura da superfície das peças que compõem o maquinário. Qual peça necessitaria de maior quantidade de tinta para ser finalizada?
A peça com formato de prisma, ou seja, a peça com a maior medida de área superficial.

5. No caderno, elabore um problema que envolva a medida de área superficial e a medida de volume de uma peça industrial com formato de prisma de base pentagonal regular e de um cilindro. Depois, troque o caderno com um colega, de modo que um resolva o problema que o outro elaborou usando o *software* escolhido. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

35. $V \simeq 3 \cdot 1^2 \cdot 2 \simeq 6$; logo, $V \simeq 6\,000$ L.

38. $V = \pi r^2 h \simeq 3{,}14 \cdot (0{,}5)^2 \cdot 1{,}25 \simeq 0{,}98$; logo, $V \simeq$ 0,98 m³.

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

34. Mário está no supermercado decidindo qual lata de leite condensado comprar para uma receita que pede 300 mL desse produto. As latas cilíndricas não informam a medida de volume, mas a medida de massa, em gramas. Então, ele decide estimar as medidas de comprimento das dimensões de cada lata para ter uma ideia da medida de volume e obtém os seguintes resultados:

- Lata **1**: medida de comprimento da altura é 10 cm e medida de comprimento do diâmetro é 8 cm. Preço: R$ 5,00.
- Lata **2**: medida de comprimento da altura é 12 cm e medida de comprimento do diâmetro é 6 cm. Preço: R$ 4,80.

Adote $\pi \simeq 3$ para resolver os itens a seguir no caderno.

a) Considerando as medidas de comprimento das dimensões das latas, qual opção é mais adequada para seguir a receita de modo que sobre a menor quantidade de produto possível? Justifique sua resposta com os cálculos. Lata **2**.

b) Agora, considere que Mário fará a receita em grande quantidade, para vender, e pretende comprar a lata de leite condensado com o menor custo por mL. Qual lata ele deve escolher? Lata **1**.

35. Qual é a medida de volume, em litros, de uma caixa-d'água no formato de um cilindro reto cujo raio da base tem medida de comprimento 1 metro e medida de altura 2 metros? (Considere $\pi \simeq 3$.)

36. O reservatório de tinta de uma caneta esferográfica tem formato cilíndrico. O comprimento do diâmetro da base mede 2 mm e a altura da caneta mede 12 cm. Desprezando a medida de espessura do plástico, calcule quantos mL de tinta podem ser acondicionados nesse reservatório. (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.)
Aproximadamente 0,377 mL.

37. Um cano cilíndrico de plástico tem 70 cm de medida de altura. O comprimento do raio externo mede 10 cm e o do raio interno mede 6 cm. Qual é a medida de volume de plástico usada para fazer esse cano?
$4\,480\pi$ cm³



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Texto para a próxima atividade.



Ricardo Teles/Pulsar Imagens

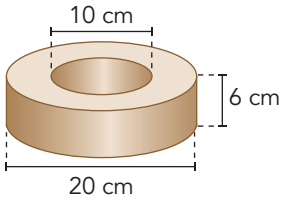
Queima de casca do coco-babaçu em Igarapé do Meio (MA). Foto de 2023.

A comunidade quilombola Ilha de São Vicente está localizada em Araguatins, no Tocantins. Faz parte da cultura local cozinhar usando um fogão caipira, um tipo de fogão feito de barro, abastecido com carvão do coco-babaçu ou lenha. O carvão vegetal do coco-babaçu é produzido na própria comunidade. A produção é feita em uma caieira, um tipo de trincheira com formato de cilindro. Nela, colocam-se pedaços de madeira para atear fogo e depois jogam-se as cascas de coco-babaçu ou o coco inteiro até preencher completamente o buraco. Depois, cobre-se o buraco com folhagens de babaçu e terra.

Fonte dos dados: LOPES, Rita de Cássia D. *Identidade e territorialidade na comunidade remanescente de quilombo Ilha de São Vicente na região do Bico do Papagaio – Tocantins*. 2019. 301 f. Tese (Doutorado em Antropologia) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

38. Calcule a medida de volume do buraco de uma caieira com medida de comprimento do diâmetro igual a 1 m e medida de comprimento da altura igual a 1,25 m. (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.)

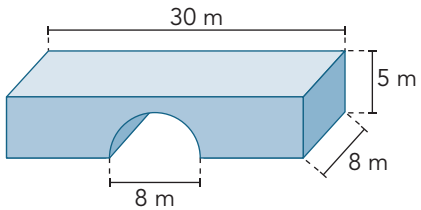
39. Uma peça de madeira tem o formato de um cilindro reto com uma cavidade interna, também cilíndrica.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que essa peça tem as medidas de comprimento das dimensões indicadas na imagem, determine a medida de volume de madeira empregada para fabricar essa peça. (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.) Aproximadamente, 1 413 cm^3.

40. Uma ponte de concreto tem as medidas de comprimento das dimensões indicadas na ilustração a seguir. A estrutura dessa ponte tem o formato de um paralelepípedo retângulo sem a metade de um cilindro, como mostra a imagem.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Qual é a medida de volume de concreto usado para construir a ponte? (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.) Aproximadamente, 999 m^3.

41. Uma polpa de açaí é vendida em 2 tipos de embalagens cilíndricas. Uma delas (figura **I**) tem raio da base com medida de comprimento x e altura com medida de comprimento y. A outra (figura **II**) tem raio da base com medida de comprimento $\frac{x}{2}$ e altura com medida de comprimento $2y$. A embalagem representada pela figura **I** é vendida por R$ 16,00, e a outra, por R$ 10,00.

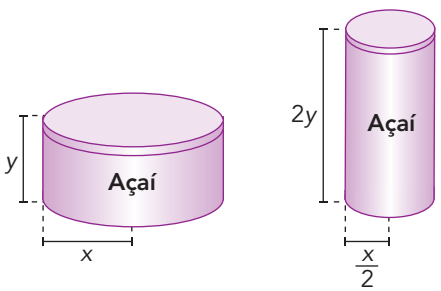


Figura **I**. Figura **II**.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual das 2 embalagens é mais vantajoso comprar, considerando a razão entre o preço e a medida de volume de cada embalagem? Embalagem representada pela figura **I**.

b) No caderno, cite 3 características de um produto que podem levar o consumidor a concluir que a versão mais cara vale mais a pena. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

42. Um reservatório cilíndrico, cuja altura tem medida 10 m e cujo comprimento do diâmetro da base mede 4 m, está inicialmente vazio. A torneira usada para encher o reservatório tem uma vazão de $\frac{\pi}{15}$ L/min.

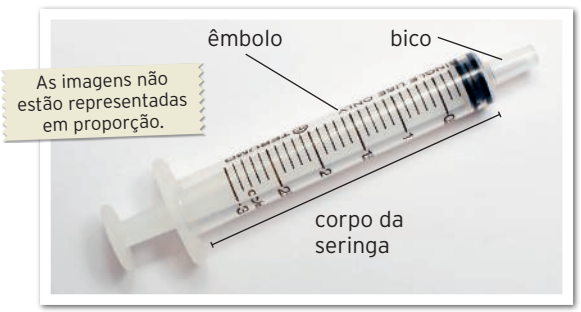
a) Determine a medida de volume V de água, em litros, no reservatório 1 hora após a abertura da torneira. 4π L

b) Determine a medida de altura h, em metros, que a água alcança no reservatório 2 horas após a abertura da torneira. 0,002 m

c) Determine a medida de intervalo de tempo total, em horas, necessária para encher totalmente o reservatório. 10 h

Texto para a próxima atividade.

Em 1647, o físico, matemático, filósofo moralista e teólogo francês Blaise Pascal (1623-1662) inventou a seringa como subproduto das pesquisas dele. A seringa, objeto essencial na rotina atual das equipes de enfermagem, é constituída por um tubo oco, um êmbolo e uma agulha e é utilizada para inserir substâncias líquidas por aplicação na veia, na pele, no tecido muscular, etc.



muhammad afzan bin avang/Shutterstock

43. O corpo de uma seringa tem o formato cilíndrico com medida de altura 10 cm, medida de comprimento do diâmetro da base 3 cm e medida de altura do êmbolo 2 cm. Qual é a medida de capacidade aproximada dessa seringa, em mililitros, sabendo que ela foi completamente cheia com água? (Despreze a espessura do plástico e considere $\pi \simeq 3{,}14$.)

a) 22 **c)** 70 **e)** 282

b) 56 **d)** 226

Alternativa **b**.

Professor, na atividade **44**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão.

44. Considere um estudo que mostra o consumo médio de água no setor de comércio e serviços. A tabela seguinte mostra esses dados em alguns dos setores.

Consumo médio de água por tipo de estabelecimento

Estabelecimento	Consumo (em L/dia)	Por unidade
Aeroporto	10 a 12	Passageiro
Cinema e teatro	2	Poltrona
Creche	50 a 80	Criança
Escola (externato)	50	Estudante
Escola (semiexternato)	100	Estudante
Escola (internato)	150	Estudante
Hospital e casa de saúde	250	Leito
Hotel (com cozinha e lavanderia)	250 a 350	Hóspede
Restaurante	25	Refeição

Fonte dos dados: FEDERAÇÃO DO COMÉRCIO DE BENS, SERVIÇOS E TURISMO DO ESTADO DE SÃO PAULO. *Água*: o que o empresário do setor do comércio e serviços precisa saber e fazer para preservar este precioso recurso. São Paulo: Fecomércio, 2014.

Uma escola que trabalha em regime de externato recebe 125 estudantes em cada um dos 2 turnos em que funciona (manhã e tarde) e a caixa-d'água deve ser completada a cada 2 dias. Um construtor foi encarregado de construir um reservatório de água que atendesse à demanda apresentada na tabela. Esse reservatório teria formato cilíndrico, com altura de medida 2,5 m. Para atender a essas necessidades, qual deve ser, aproximadamente, a medida de comprimento do raio da base desse reservatório? Despreze a espessura da caixa-d'água e use uma calculadora para efetuar os cálculos. (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.) Alternativa **b**.

a) 1,2 **c)** 2,5 **e)** 3,2

b) 1,8 **d)** 2,8

45. No caderno, elabore uma atividade utilizando algum dos dados apresentados na tabela da atividade anterior. Em seguida, troque o caderno com um colega, de modo que um resolva a atividade que o outro elaborou. Depois, confira as respostas do colega. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

46. Na angioplastia coronária, um cateter balão inicialmente vazio é inserido em um vaso sanguíneo para que, quando inflado, aumente o fluxo de sangue nesse vaso. Considere um procedimento de angioplastia em que a medida de comprimento inicial do raio do balão aumenta até que o balão tenha o formato de cilindro, cuja base tem 8 mm de medida de comprimento de diâmetro, e a altura tenha 13 mm de medida de comprimento.

Qual é a medida de volume aproximada desse balão, em mm^3, após ser inflado? (Considere $\pi \simeq 3$.)

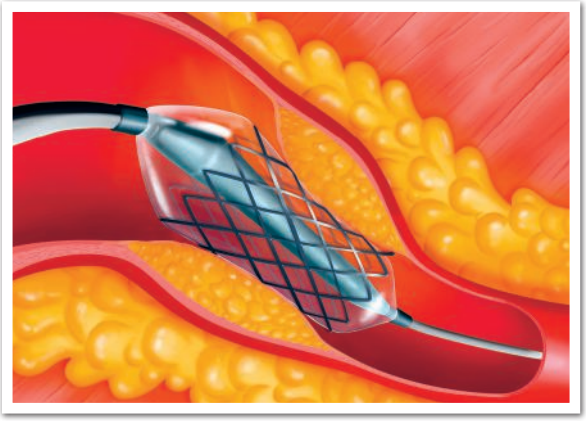
a) 570 mm^3 $V \simeq 3 \cdot 4^2 \cdot 13 = 624$; logo, $V \simeq 624$ mm^3.

b) 600 mm^3 Alternativa **c**.

c) 624 mm^3

d) 680 mm^3

e) 730 mm^3



MARIE SCHMITT/BSIP/Alamy/Fotoarena

Ilustração da aplicação de um cateter balão em procedimento de angioplastia. Os elementos da imagem não estão representados em proporção. Imagem em cores fantasia.

Além da sala de aula

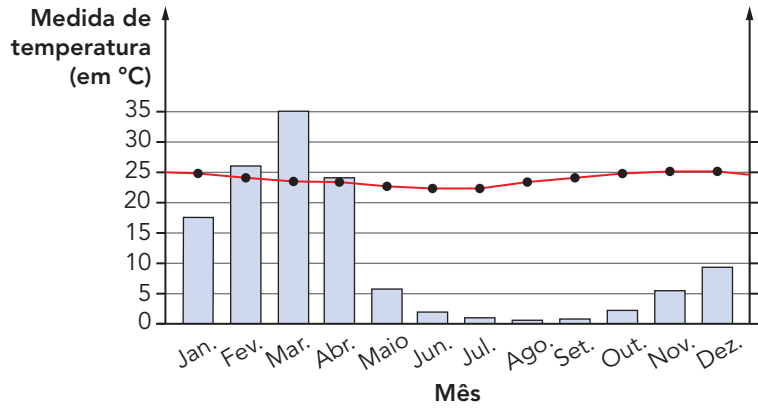
Cisterna

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual. Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação para o Consumo* e *Vida Familiar e Social*. Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com os professores de Física e de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

O município de Araripe, no Ceará, tem uma das piores médias de chuvas do Brasil. De acordo com o banco de dados do *Climate-Data.org*, o acumulado de chuvas anual médio do município no período apurado foi 726 mm, com aproximadamente 80% desse volume concentrado nos primeiros 4 meses do ano.

Analisando as informações do climograma, que mostra os dados médios da medida de volume de chuva e das medidas de temperatura, percebemos que uma grande estiagem ocorre a partir do mês de maio e que há um volume um pouco maior de chuva entre janeiro e abril.

Climograma: Araripe-CE (1991-2021)



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: CLIMATE-DATA.ORG. Disponível em: https://tedit.net/vusppe. Acesso em: 17 jun. 2024.

Professor, pergunte aos estudantes se eles sabem o que significa 1 mm de precipitação. Explique que essa indicação corresponde à medida de volume de 1 L de chuva que se acumulou sobre uma superfície cuja medida de área é 1 m². De fato, 1 L por m² corresponde a:

$$\frac{1\ L}{1\ m^2} = \frac{1\ dm^3}{1\ m^2} = \frac{0{,}001\ m^3}{1\ m^2} = 0{,}001\ m = 1\ mm$$

A água geralmente é recolhida dos telhados das casas e conduzida a esse tipo de reservatório.

A água escorre pelo telhado, cai na calha e passa pelo filtro, que recolhe galhos, folhas e outros resíduos que são descartados.

Cisternas podem ser feitas de placas ou do mesmo material de caixas-d'água e podem comportar cerca de 70 mil litros de água na parte cilíndrica.

Para aproveitar a água dos períodos com maior precipitação de chuva, algumas comunidades constroem cisternas. As cisternas são estruturas em formato de cilindro, geralmente com uma tampa cônica, capazes de armazenar a água das chuvas.

Luis Moura/Arquivo da editora

Indo além: Projeto de construção de uma cisterna

Ter uma cisterna pessoal ou coletiva pode ser uma oportunidade de economia de água e, consequentemente, de dinheiro, mas, principalmente nas regiões mais áridas do Brasil, é uma questão de sobrevivência, pois são locais que enfrentam vários meses de estiagem.

Seja qual for a situação da sua região, ter um projeto de construção de uma cisterna em mãos pode ser útil, e é exatamente esse projeto que vamos elaborar.

Etapas

1. Organização

Reúnam-se em grupos de 3 a 5 estudantes.

2. Pesquisa

Definam qual será o tamanho aproximado da cisterna que vocês vão construir. Para calcular esse valor, é preciso tomar como referência o consumo de água que a cisterna deve abastecer, como o de um conjunto de residências ou de um pequeno comércio.

Outro fator a ser considerado é a medida de área que será utilizada para coleta da água para a cisterna, por exemplo, o telhado de uma residência ou a laje de um galpão.

3. Desenvolvimento

- Acessem, no *site* da Embrapa, a cartilha de construção de cisterna de placas, disponível em: https://tedit.net/kfjpcf (acesso em: 23 jul. 2024) e tomem-na como referência para a construção do projeto.
- Consultem fornecedores e distribuidores de material de construção da região para saber os preços do material necessário e incluir um orçamento no projeto.

4. Produto final

Opção 1: Cisterna para a escola

- Conversem com a administração da escola para entender o consumo de água, quais são os custos e se há alguma iniciativa para utilização de água da chuva.
- Avaliem também se a escola tem um local (telhado, por exemplo) onde se pode usar calhas para captar a água da chuva e destiná-la até uma cisterna.
- Verifiquem se há espaço necessário para a construção de uma cisterna (ou a compra; existem cisternas plásticas que não requerem construção, apenas instalação).
- Finalmente, se houver interesse e as condições anteriores forem favoráveis, façam um projeto de cisterna para ser implementado na escola.

Opção 2: Projeto de cisterna personalizado

- Consultem com os moradores e comerciantes locais se há alguma iniciativa de uso de água da chuva na região e, se não houver, apresentem a possibilidade de construção e uso de uma cisterna.
- Façam um projeto de cisterna que possa ser personalizado: ampliado, reduzido, modificado, etc., a depender da necessidade das pessoas que vão utilizá-lo.
- Disponibilizem o projeto de modo gratuito para a comunidade escolar e, se houver de fato uma implantação de cisterna, ofereçam o apoio necessário para o desenvolvimento dessa ação.

CAPÍTULO 3

Pirâmide e cone

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação-problema

Esta situação-problema favorece o desenvolvimento do TCT *Diversidade Cultural*.

Construções antigas

As imagens não estão representadas em proporção.

Você conhece as pirâmides do Egito? São monumentos históricos que remetem à cultura de uma civilização antiga. Entre elas, as pirâmides de Gizé são consideradas uma das 7 maravilhas do mundo antigo, cujas bases cobrem uma medida de área de aproximadamente 55 mil metros quadrados. A maior e mais famosa das pirâmides de Gizé, Quéops, foi construída por volta de 2550 a.C. com medida de altura igual a 147 metros. Já as pirâmides de Quéfren e Miquerinos têm, respectivamente, 143 e 65 metros de medida de altura, aproximadamente.



Anas nasser/Shutterstock

As pirâmides de Gizé – Quéfren, Quéops e Miquerinos – foram construídas próximas ao rio Nilo, no Egito. Foto de 2023.

O formato do sólido geométrico cone também foi explorado nas construções feitas por diferentes povos. Na cidade de Alberobello, região da Puglia, na Itália, o formato cônico pode ser identificado no telhado de casas de pedra conhecidas como *trulli*. Essa região é declarada pela Unesco como Patrimônio Mundial, assim como aquela onde estão localizadas as pirâmides de Gizé.



BBA Photography/Shutterstock

Construção de pedra conhecida como *trulli*, com telhado cônico. Alberobello, Itália. Foto de 2024.

Mas o que seriam uma pirâmide e um cone? O que os difere entre si e dos demais poliedros?

a) As laterais das pirâmides de Gizé lembram qual figura geométrica? Triângulos ou regiões limitadas por triângulos.

b) A base de uma pirâmide pode ter diferentes formas? Sim.

c) Como você descreveria um cone? Exemplo de resposta: O cone tem superfície lateral arredondada e uma base que é uma região limitada por uma circunferência.

Sobre o assunto

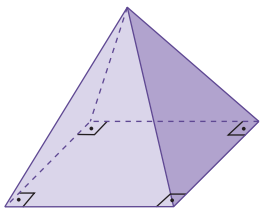
Em maio de 2024, cientistas publicaram um estudo que ajuda a explicar a localização escolhida pelos antigos egípcios para a construção das pirâmides: concluiu-se que ali já existiu uma ramificação do rio Nilo, o que facilitaria o transporte de pessoas e dos blocos pesados que foram utilizados na construção. Leia mais sobre o caso na notícia publicada pela BBC.

CURSINO, Malu. Cientistas dizem ter desvendado mistério sobre construção de pirâmides egípcias. *BBC News Brasil*, 17 maio 2024. Disponível em: https://tedit.net/2qorf7. Acesso em: 25 jul. 2024.

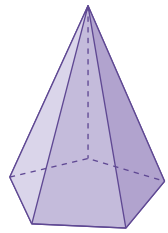
As pirâmides

Agora vamos estudar com mais detalhes outro poliedro: a pirâmide. Acompanhe alguns exemplos de pirâmide a seguir.

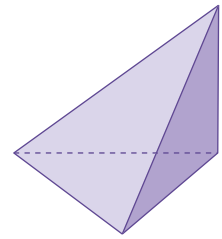
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Pirâmide de base quadrada ou pirâmide quadrangular.



Pirâmide de base pentagonal ou pirâmide pentagonal.



Pirâmide de base triangular ou tetraedro.

Reflita

Não escreva no livro

Que características esses poliedros têm em comum? Qual é a relação entre a quantidade de lados do polígono que limita a base desse sólido e a quantidade de faces laterais?

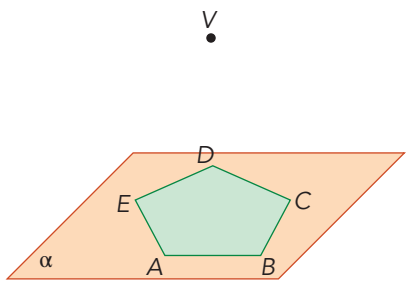
Exemplo de resposta: As características que se destacam nessas figuras são faces laterais triangulares e base única. Em uma pirâmide, a quantidade de lados do polígono que limita a base é igual à quantidade de faces laterais.

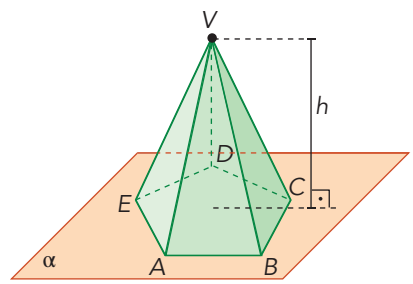
Formalizando o conceito de pirâmide

Carrossel de imagens

Considere um plano α, uma região limitada por um polígono convexo, por exemplo *ABCDE*, contida nesse plano, e um ponto *V* exterior ao plano α.

A figura geométrica formada por todos os segmentos de reta que têm uma extremidade na região poligonal *ABCDE* e outra extremidade no ponto *V* é chamada **pirâmide**.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Os segmentos de reta $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ e $\overline{VE}$ são chamados **arestas laterais** da pirâmide. Arestas laterais consecutivas determinam triângulos, e as regiões triangulares limitadas por esses triângulos são chamadas **faces laterais** da pirâmide.

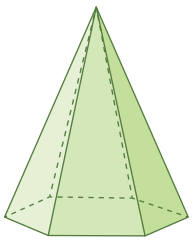
O ponto *V* é chamado **vértice** da pirâmide, e a medida de comprimento da **altura** da pirâmide é a medida de distância do vértice *V* ao plano da base, indicada por *h*.

Professor, a medida de distância do vértice *V* ao plano da base corresponde à medida de comprimento do segmento de reta que tem uma extremidade no vértice e outra no plano da base e que é perpendicular a esse plano.

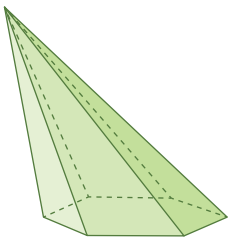
Pirâmide reta e pirâmide oblíqua

A pirâmide é **reta** quando a projeção do vértice da pirâmide coincide com o centro da base. Quando essa condição não é satisfeita, a pirâmide é **oblíqua**.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Pirâmide reta.



Pirâmide oblíqua.

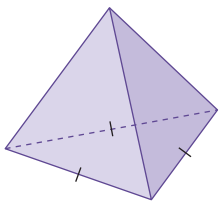
Fique atento

O centro da base de uma pirâmide é o centro da circunferência circunscrita ao polígono da base.

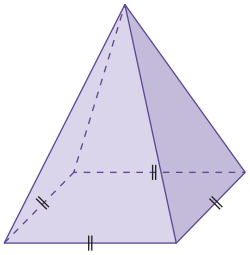
Pirâmide regular

Uma pirâmide é **regular** quando ela é reta e a base é uma região limitada por um polígono regular. Uma consequência da definição de pirâmide regular é o fato de todas as arestas laterais dela serem congruentes, assim como todas as faces laterais. Acompanhe alguns exemplos a seguir.

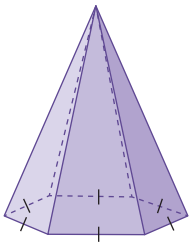
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Pirâmide triangular regular.



Pirâmide quadrangular regular.

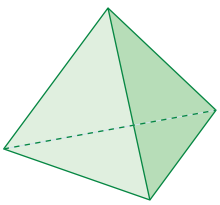


Pirâmide hexagonal regular.

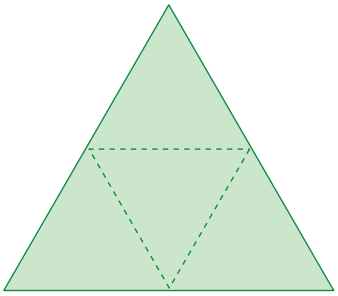
Caso particular de pirâmide regular: o tetraedro regular

Tetraedro regular é uma pirâmide formada por 4 regiões limitadas por triângulos congruentes e equiláteros. Nele, qualquer uma das faces pode ser considerada a base.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Tetraedro regular.



Planificação da superfície de um tetraedro.

Não escreva no livro

Reflita

No tetraedro regular, por que qualquer uma das faces pode ser tomada como base?

Porque todas as faces são triangulares e congruentes.

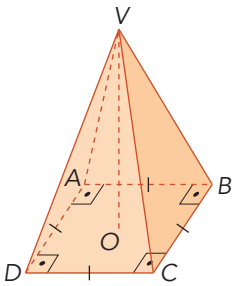
Professor, destaque aos estudantes que o tetraedro regular não é a única pirâmide em que qualquer uma das faces pode ser tomada como base.

Nomenclatura de pirâmide

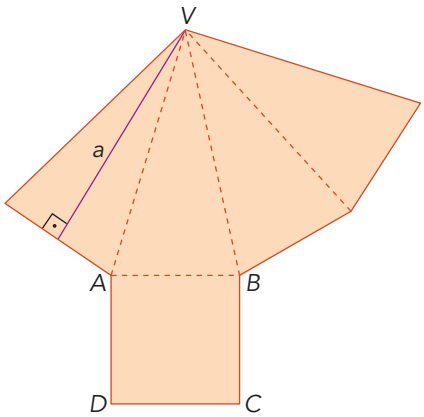
Assim como o prisma, a pirâmide recebe nomes de acordo com a forma da base. Considere alguns exemplos.

a) Pirâmide reta de base quadrada ou pirâmide regular quadrangular.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Pirâmide reta de base quadrada.



Planificação da superfície de uma pirâmide reta de base quadrada.

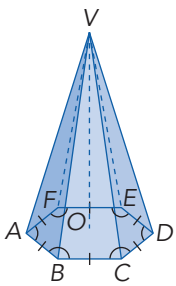
Nesse caso, podemos ainda afirmar que:

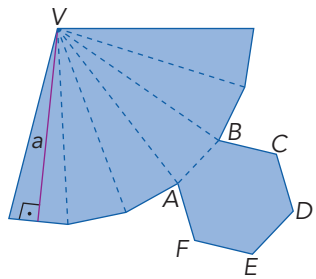
- o segmento de reta $\overline{VO}$, cujas extremidades são o vértice da pirâmide e o centro da base, é a altura da pirâmide;
- as faces laterais são triângulos isósceles e congruentes;
- a altura de cada face lateral é chamada **apótema** da pirâmide regular e tem medida de comprimento a.

b) Pirâmide reta de base hexagonal ou pirâmide regular hexagonal.

Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Pirâmide reta de base hexagonal.





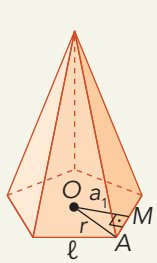
Planificação da superfície de uma pirâmide reta de base hexagonal.

Fique atento

Em toda pirâmide regular, podemos identificar a medida de comprimento da aresta da base (ℓ), da aresta lateral (ℓ_1), do raio da circunferência circunscrita à base (r), do apótema da pirâmide (a), do apótema da base (a_1) e da altura da pirâmide (h).

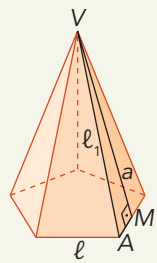
Acompanhe, em uma pirâmide regular pentagonal, a aplicação do teorema de Pitágoras em 4 importantes triângulos retângulos formados a partir dessas medidas.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



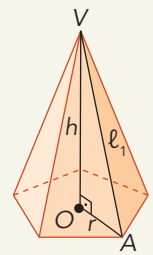
$\triangle OMA$

$r^2 = (a_1)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$



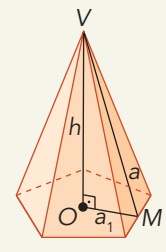
$\triangle VMA$

$\ell_1^2 = a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$



$\triangle VOA$

$\ell_1^2 = h^2 + r^2$



$\triangle VOM$

$a^2 = h^2 + (a_1)^2$

Medida de área da superfície de uma pirâmide

Assim como nos prismas, nas pirâmides temos:

- **superfície lateral**: é formada por todas as faces laterais;
- **área lateral**: é a área da superfície lateral;
- **superfície total**: é formada por todas as faces laterais e pela base;
- **área total**: é a área da superfície total.

Atividades

Não escreva no livro

1. Determine a medida de área total de uma pirâmide regular cuja altura tem medida de comprimento de 15 cm e cuja base é uma região limitada por um quadrado com lados de 16 cm de medida de comprimento. 800 cm²

2. Determine a medida de área total de uma pirâmide regular hexagonal sabendo que a medida de comprimento da aresta da base é 8 cm e a da altura da pirâmide é 12 cm. $288\sqrt{3}$ cm²

3. Uma escultura de concreto tem o formato de uma pirâmide regular de base quadrada em que todas as arestas (da base e laterais) têm medidas de comprimento iguais a 5 m. Essa escultura, que tem a base diretamente colocada sobre o solo, deverá ser pintada em 2 demãos com uma tinta acrílica comprada em galões de 18 L, suficientes para pintar 180 m² por demão. Qual é a quantidade de galões necessária para pintar essa escultura? (Considere $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.) Alternativa **e**.

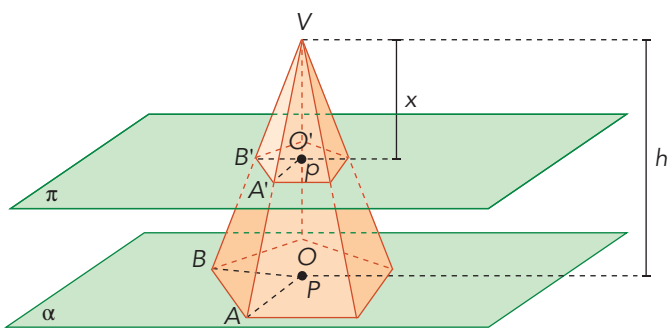
a) 1,5 galão.
b) 2 galões.
c) 2,5 galões.
d) 3 galões.
e) Menos da metade de 1 galão.

4. Elabore, no caderno, um problema se inspirando na atividade anterior. Em seguida, troque de caderno com um colega, de modo que um resolva o problema que o outro elaborou. Depois, confira as respostas do colega. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Medida de volume de uma pirâmide

Considere a figura geométrica representada a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Fique atento

Polígonos semelhantes têm ângulos congruentes e segmentos de reta correspondentes proporcionais. Se $\frac{a}{b}$ é a razão constante entre a medida de comprimento dos segmentos de reta correspondentes, então $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ é a razão entre as medidas de área das regiões limitadas pelos polígonos.

A pirâmide tem a base P contida no plano α e é seccionada pelo plano horizontal π, paralelo a α.

A secção da pirâmide pelo plano π é uma região poligonal p semelhante à base P. Note que, ao seccionarmos uma pirâmide por um plano paralelo à base, obtemos 2 sólidos, e um deles é uma pirâmide menor do que à original e semelhante a ela. A pirâmide menor tem base p e altura de medida de comprimento x (distância do ponto V ao plano π), e a pirâmide original tem base P e altura de medida de comprimento h.

Fique atento

O outro sólido geométrico obtido ao seccionar uma pirâmide por um plano paralelo à base e cujas bases são p e P é chamado **tronco de pirâmide**.

Se 2 figuras geométricas planas são semelhantes, com razão k entre as medidas de comprimento das dimensões lineares correspondentes, então as medidas de área correspondentes têm razão k^2. No caso, k é a razão entre as medidas de comprimento h e x, das alturas das pirâmides semelhantes.

$$k = \frac{h}{x} \Rightarrow k^2 = \left(\frac{h}{x}\right)^2$$

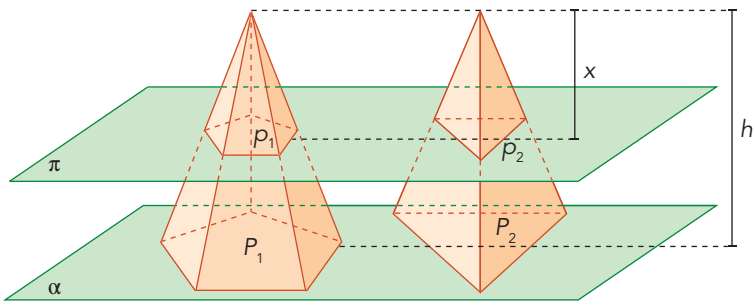
Assim, se p e P são semelhantes, então:

$$\frac{\text{medida de área de } P}{\text{medida de área de } p} = \left(\frac{h}{x}\right)^2$$

Vamos agora considerar 2 pirâmides cujas medidas de área das bases são iguais e que têm a mesma medida de comprimento da altura. Vamos analisar o que acontece com as medidas de área das secções transversais situadas a uma mesma medida de distância do vértice da pirâmide. Já estudamos que:

$$\frac{\text{medida de área de } P_1}{\text{medida de área de } p_1} = \left(\frac{h}{x}\right)^2 = \frac{\text{medida de área de } P_2}{\text{medida de área de } p_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{medida de área de } P_1}{\text{medida de área de } p_1} = \frac{\text{medida de área de } P_2}{\text{medida de área de } p_2}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

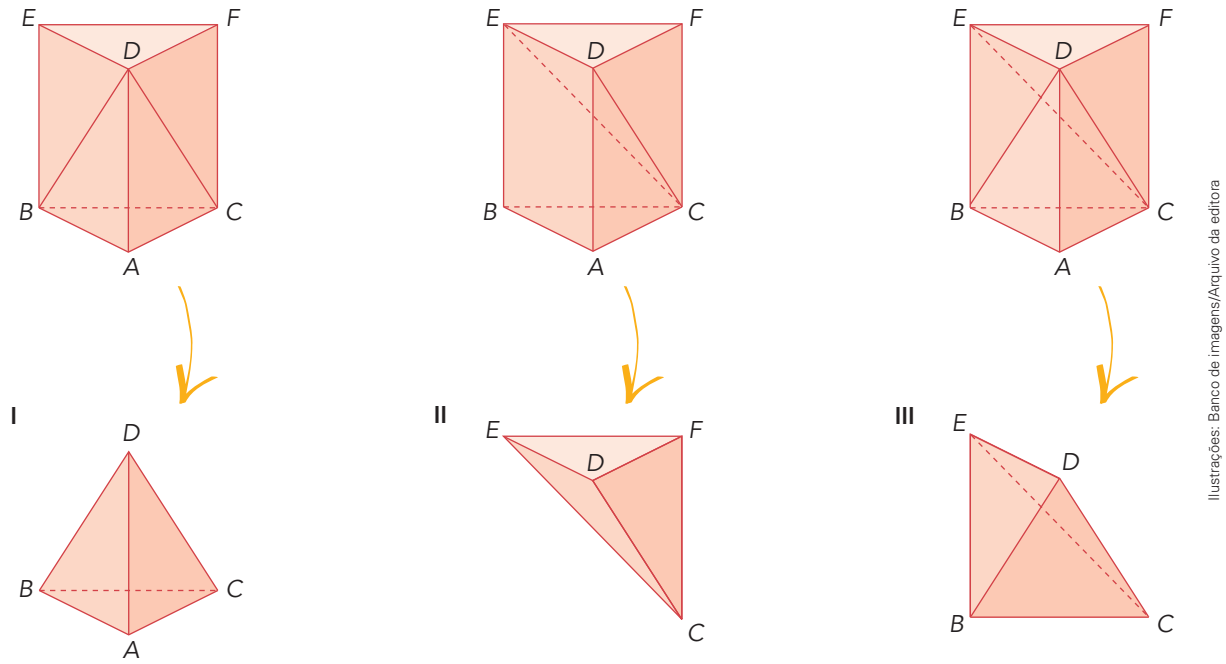
Como consideramos inicialmente que a medida de área de P_1 é igual à medida de área de P_2, concluímos que a medida de área de p_1 é igual à medida de área de p_2 para qualquer plano horizontal π.

Então, pelo princípio de Cavalieri, as medidas de volume das pirâmides são iguais, ou seja:

Pirâmides com medidas de área das bases iguais e medidas de comprimento da altura iguais têm medidas de volume iguais.

Cálculo da medida de volume de uma pirâmide triangular

Vamos agora decompor um prisma reto triangular em 3 pirâmides, como mostrado a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observações:

1ª) As pirâmides **I** e **II** têm bases congruentes e alturas com medidas de comprimento iguais. De fato, os triângulos *ABC* e *DEF*, que limitam as regiões das bases, são congruentes e a medida de distância do ponto *D* ao plano *ABC* é igual à medida de distância do ponto *C* ao plano *DEF*, essa é a medida de altura do prisma original. Logo, **I** e **II** têm a mesma medida de volume.

2ª) As pirâmides **II** e **III** também têm bases congruentes e alturas com medidas de comprimento iguais. De fato, os triângulos *CEF* e *ECB*, que limitam as regiões das bases, são congruentes, pois cada um deles é a metade do paralelogramo *BCFE* e a altura de cada uma dessas pirâmides é a distância de *D* ao plano *BCFE*. Logo, **II** e **III** têm a mesma medida de volume. Assim, $V_{I} = V_{II}$ e $V_{II} = V_{III}$; portanto, as 3 medidas de volume são iguais.

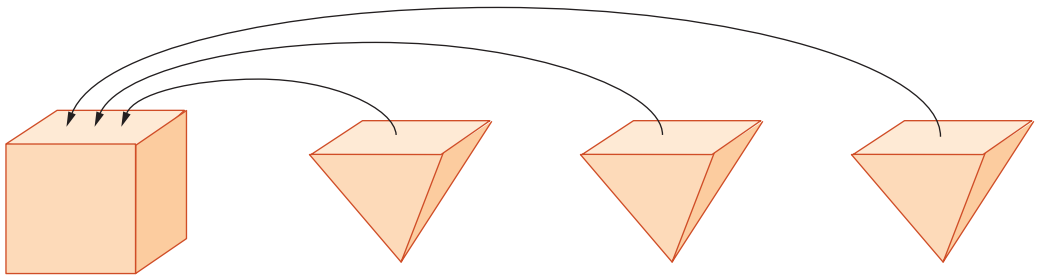
Como a medida de volume do prisma pode ser calculada por $V_{prisma} = V_{I} + V_{II} + V_{III}$, igualando as medidas de volume das pirâmides $V_{I} = V_{II} = V_{III} = V$, temos:

$$V_{prisma} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{prisma}}{3}$$

Como a medida de volume do prisma é obtida multiplicando a medida de área da base (A_b) pela medida de comprimento da altura (h), temos que a medida de volume de cada pirâmide é dada por:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

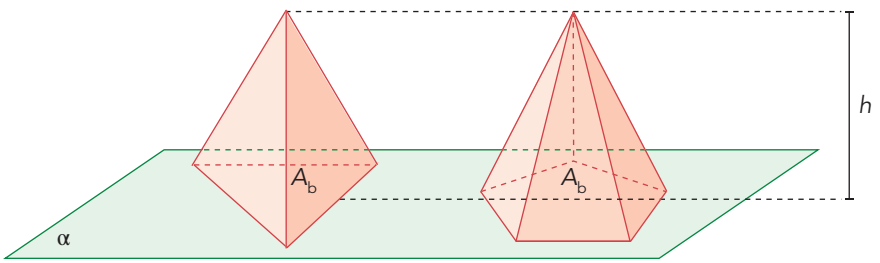
3ª) A propriedade citada na 2ª observação pode ser verificada experimentalmente. Se quiséssemos encher de água uma vasilha com formato de prisma usando um recipiente com formato de pirâmide, com mesma medida de área de base e mesma medida de comprimento da altura, seria necessário usá-lo 3 vezes para encher a vasilha.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

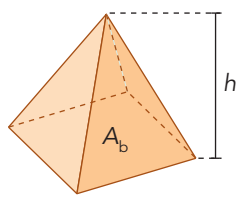
Cálculo da medida de volume de uma pirâmide qualquer

Agora, para determinarmos a medida de volume de uma **pirâmide qualquer**, usaremos a conclusão anterior e o princípio de Cavalieri. Assim, dada uma pirâmide qualquer, consideramos uma pirâmide triangular que tenha a mesma medida de área da base e a mesma medida de comprimento da altura que uma pirâmide qualquer.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O princípio de Cavalieri garante que 2 pirâmides com medidas de área da base iguais e com a mesma medida de comprimento da altura têm medidas de volume iguais. Então a medida de volume de uma pirâmide qualquer é igual à medida de volume de uma pirâmide triangular (de mesma medida de área da base e mesma medida de comprimento da altura).



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como a medida de volume da pirâmide triangular é obtida calculando $\frac{A_b \cdot h}{3}$, concluímos que a medida de volume de uma pirâmide qualquer é dada por:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Atividades resolvidas

1. Calcule a medida de volume de uma pirâmide de base quadrada cujo comprimento da aresta da base mede 4 cm e a medida de comprimento da altura é 7 cm.

Resolução

$$A_b = 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 16\text{ cm}^2$$

$$h = 7\text{ cm}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{16\text{ cm}^2 \cdot 7\text{ cm}}{3} \simeq 37{,}3\text{ cm}^3$$

2. Qual é a medida de volume de um tetraedro regular de aresta com medida de comprimento a?

Resolução

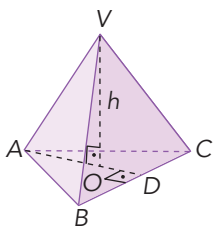
Sabemos que, em um tetraedro regular, as 4 faces são regiões limitadas por triângulos equiláteros.

Vamos calcular a medida de área da base:

$$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

(medida de área de uma região limitada por um triângulo equilátero de lado com medida de comprimento a)

Calculamos, agora, a medida de comprimento da altura do tetraedro:



Banco de imagens/ Arquivo da editora

- O é o centro do triângulo equilátero ABC.
- $\overline{AD}$ é a mediana do $\triangle ABC$ relativa ao lado $\overline{BC}$.
- $AO = \frac{2}{3} AD$
- $\overline{AD}$ também é a altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado $\overline{BC}$: $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Das análises feitas, podemos concluir que:

$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Considerando o triângulo retângulo AOV ($A\hat{O}V$ é reto), temos:

$$(AV)^2 = (AO)^2 + (OV)^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow h^2 = \frac{2a^3}{3} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vamos, agora, calcular a medida de volume:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{36} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Então, a medida de volume do tetraedro regular é $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

5. $V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{15^2 \cdot 9}{3} = 675$; logo, $V = 675\ cm^3$.

6. $V = \frac{10^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1\,000\sqrt{2}}{12} = \frac{250\sqrt{2}}{3}$; logo, $V = \frac{250\sqrt{2}}{3}\ cm^3$.

Atividades

Não escreva no livro

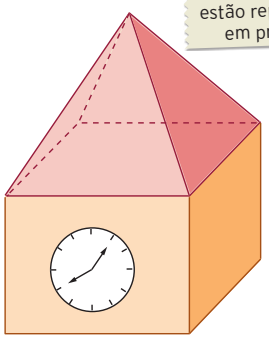
5. Calcule a medida de volume de uma pirâmide de base quadrada cujo comprimento da aresta da base mede 15 cm e cujo comprimento da altura mede 9 cm.

6. Uma peça maciça de cristal tem o formato de um tetraedro. Sabendo que o comprimento de cada aresta da peça mede 10 cm, qual é a medida de volume dessa peça?

7. A parte mais alta de uma torre com um relógio tem o formato de uma pirâmide de base quadrada cujo comprimento da aresta da base mede 6 m e o comprimento da altura mede 4 m. Sabendo que essa parte da torre foi construída utilizando o mesmo tipo de material, determine a medida de volume do material utilizado.

$V = \frac{6^2 \cdot 4}{3} = 48$; logo, $V = 48\ m^3$.

As imagens não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

8. A pirâmide de Quéops é a mais antiga das 7 maravilhas do mundo e foi construída por volta de 2550 a.C.

Suponha que as medidas de comprimento da altura e de volume dessa pirâmide sejam, aproximadamente, 147 m e 2 592 100 m^3. Considerando que ela seja uma pirâmide quadrada regular, quanto deve medir, aproximadamente, o comprimento da aresta da base da pirâmide? (Use uma calculadora para efetuar os cálculos e registre a resposta no caderno.)

a) 230 m
b) 245 m
c) 255 m
d) 260 m
e) 265 m

$V = \frac{\ell^2 \cdot h}{3} \Rightarrow 2\,592\,100 = \frac{\ell^2 \cdot 147}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \ell = 230$; logo, $\ell = 230$ m.

Alternativa **a**.

Texto para a próxima atividade.

A pirâmide de Kukulcán, construída pelos maias no século XII, onde hoje fica o estado mexicano de Yucatã, tem 4 fachadas, e cada uma delas conta com uma escadaria principal que leva ao templo (último patamar).



Dmitry Eagle Orlov/Shutterstock

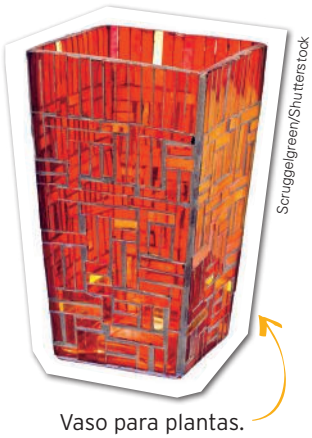
Pirâmide de Kukulcán (ou Templo de Kukulcán) na antiga cidade de Chichén Itzá, no México. Foto de 2022.

9. Se o comprimento da altura da pirâmide Kukulcán mede 30 m e o comprimento da aresta da base mede 56 m, qual é a medida de distância aproximada percorrida por um arqueólogo que sobe uma das escadarias centrais do templo? Aproximadamente 41 m.

10. Um vaso para plantas tem o formato parecido com um tronco de pirâmide quadrangular regular cujas medidas internas são: o comprimento da aresta da base maior mede 32 cm, o comprimento da aresta da base menor mede 20 cm e a altura mede 40 cm.

Qual é a medida de capacidade máxima aproximada de substrato suportada por esse vaso, em litros?

a) 25,12
b) 25,98
c) 26,34
d) 27,04
e) 27,52 Alternativa **e**.



Scruggelgreen/Shutterstock

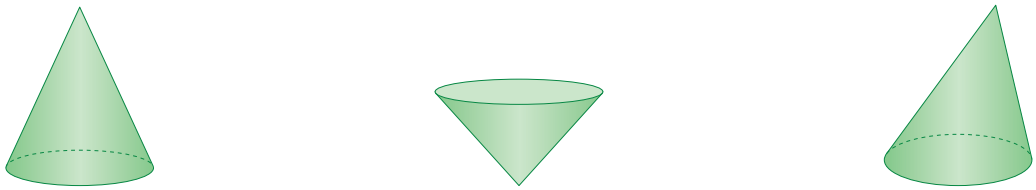
Vaso para plantas.

Professor, na atividade **8**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Os cones

Vamos estudar agora os cones. Analise os exemplos a seguir.

Cones.



Ericson Guilherme Luciano/ Arquivo da editora

Formalizando o conceito de cone

Considere um plano α, um círculo R contido nesse plano e um ponto P não pertencente ao plano α.

A figura geométrica formada por todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no círculo R e outra extremidade no ponto V é chamada **cone circular** (ou **cone**).



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A superfície do cone é formada por uma parte plana, o círculo, que é a **base**, e uma parte não plana, "arredondada", que é a **superfície lateral**.

O ponto V é chamado **vértice** do cone, e a medida de comprimento da **altura** do cone é a medida de distância do vértice V ao plano da base.

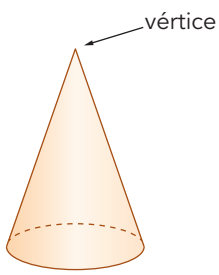
Professor, a medida de distância do vértice V ao plano da base corresponde à medida de comprimento do segmento de reta que tem uma extremidade no vértice e outra no plano da base e que é perpendicular a esse plano.

Cone reto e cone oblíquo

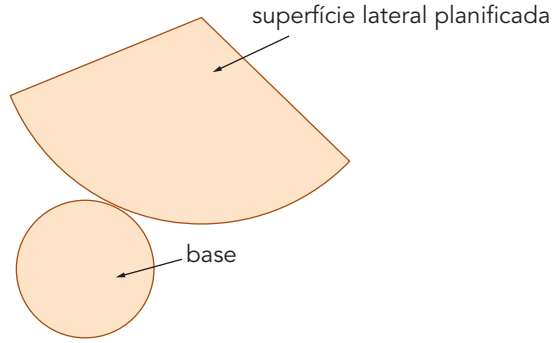
Assim como na pirâmide, o cone é **reto** quando a projeção do vértice do cone coincide com o centro da base, que neste caso é o centro da circunferência. Quando essa condição não é satisfeita, o cone é **oblíquo**.

Analise os exemplos de cone a seguir.

a) Cone reto



Cone reto.

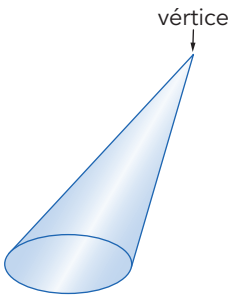


Planificação da superfície de um cone reto.

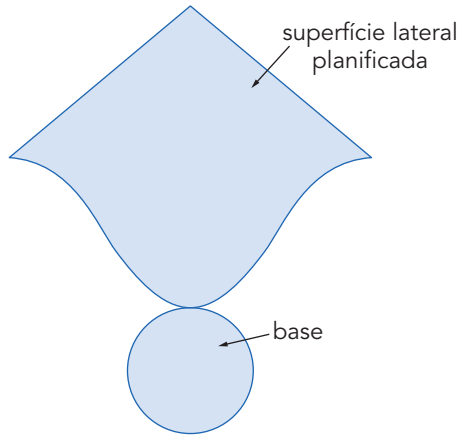
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Cone oblíquo

Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora



Cone oblíquo.

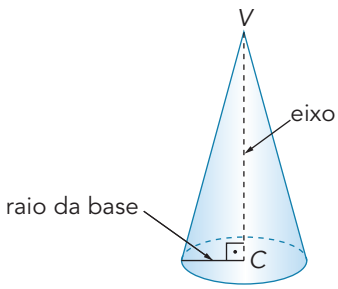


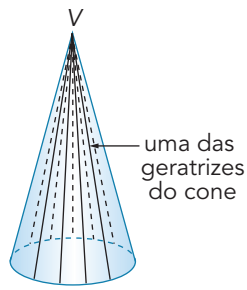
Planificação da superfície de um cone oblíquo.

O **eixo** do cone é o segmento de reta determinado pelo vértice e pelo centro da base do cone. No cone reto, o eixo é perpendicular à base e, no cone oblíquo, o eixo não é perpendicular à base. No caso do cone reto, a medida de comprimento do eixo coincide com a medida de comprimento da altura do cone.

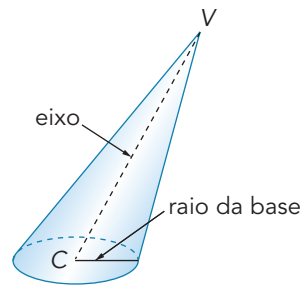
Cada segmento de reta que tem uma extremidade no vértice e a outra extremidade em um ponto da circunferência que limita a base é chamado **geratriz** do cone.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora





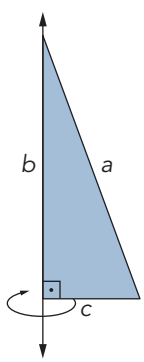
Cone reto.

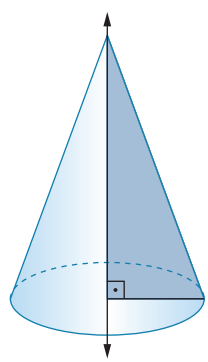


Cone oblíquo.

Um cone reto pode ser obtido ao girar uma região limitada por um triângulo retângulo em torno de uma reta que contém um dos catetos dele. Por esse motivo, o cone reto é chamado também de **cone de revolução**.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora





Não escreva no livro

Reflita

Na representação da região limitada por um triângulo retângulo, qual elemento do cone o cateto de medida de comprimento c pode indicar? E a hipotenusa de medida de comprimento a?

O raio da base; a geratriz do cone.

Sobre o assunto

Assista ao vídeo da Matemateca que apresenta o efeito da revolução de diferentes sólidos ao redor de um eixo. Disponível em: https://tedit.net/sedw9h (acesso em: 24 jul. 2024).

A Matemateca é um projeto do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP) que conta com um acervo de objetos que contribuem para a divulgação da Matemática de maneira lúdica. Consulte a programação no *site* para obter informações sobre as próximas exposições e os próximos eventos organizados pela Matemateca.

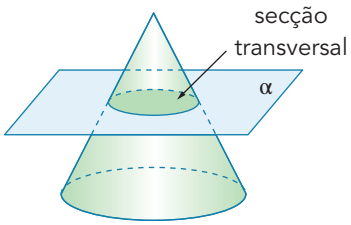
MATEMATECA. Disponível em: https://tedit.net/e99i93. Acesso em: 24 jul. 2024.

Secções do cone reto

Secção transversal

A secção transversal de um cone é a intersecção do cone com um plano paralelo à base. A secção transversal do cone é um círculo.

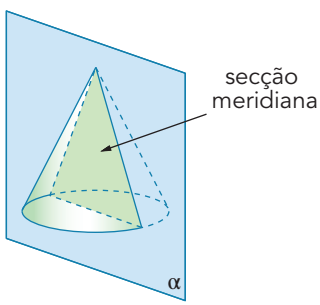
Banco de imagens/Arquivo da editora

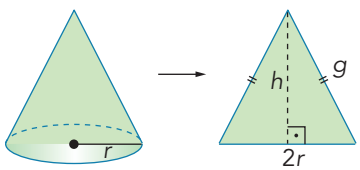


Secção meridiana

A secção meridiana é a intersecção de um cone com um plano que contém o eixo dele. A secção meridiana de um cone reto é uma região limitada por um triângulo isósceles.

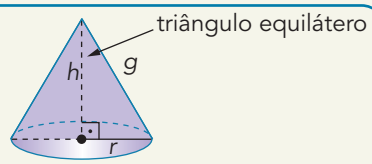
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora





Fique atento

Se a secção meridiana for uma região limitada por um triângulo equilátero, dizemos que o cone é equilátero. Nesse caso, $g = 2r$ e $h = r\sqrt{3}$.

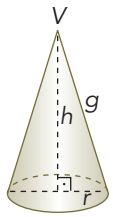


Cone equilátero.

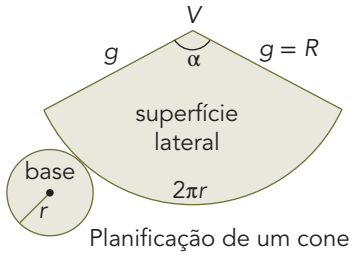
Banco de imagens/Arquivo da editora

Medida de área da superfície de um cone reto

A superfície total do cone reto é formada pela superfície lateral (um setor circular) mais a superfície da base (um círculo).



Cone reto.



Planificação de um cone reto.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Fique atento

A geratriz (g) do cone reto é o raio do setor circular da planificação da superfície do cone reto (assim, as medidas de comprimento deles são iguais: $g = R$).

Não se deve confundir o raio da base (com medida r) com o raio do setor (com medida R).

Assim:

- **Medida de área lateral**:

  A medida de área de um setor circular é proporcional à medida de área do círculo correspondente, de modo que $\frac{A_{setor}}{\pi R^2} = \frac{\alpha_{graus}}{360°} = \frac{\alpha_{rad}}{2\pi} = \frac{\ell}{2\pi R}$, em que ℓ é a medida de comprimento do arco. Assim, podemos calcular a medida de área do setor como:

  $$A_{setor} = \frac{\ell}{2\pi R} \cdot \pi R^2 = \frac{\ell R}{2}$$

  No caso do cone reto, temos $\ell = 2\pi r$ e $R = g$. Logo, a medida de área lateral é dada por:

  $$A_\ell = \frac{2\pi r g}{2} = \pi r g$$

- **Medida de área da base**: $A_b = \pi r^2$.
- **Medida de área total**: $A_T = A_\ell + A_b = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r) \Rightarrow A_T = \pi r(g + r)$.

Atividades resolvidas

3. Um cone reto tem 8 cm de medida de comprimento da altura e 6 cm de medida de comprimento do raio da base. Calcule a medida de comprimento da geratriz, a medida de área lateral, a medida de área total e a medida de abertura do ângulo do setor circular.

Resolução

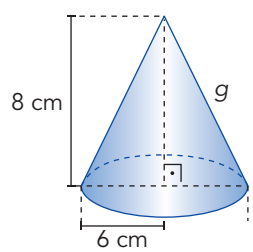
- Medida de comprimento da geratriz:

  $$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = \sqrt{100} = 10$$

  O comprimento da geratriz mede 10 cm.

- Medida de área lateral: $A_\ell = \pi r g = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi$.

  A área lateral mede 60π cm^2.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

- Medida de área total:

$$A_b = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$$
$$A_T = A_\ell + A_b = 60\pi + 36\pi = 96\pi$$

A área total mede 96π cm^2.

- Medida de abertura do ângulo do setor circular:

Nesse caso, $R = g = 10$ cm, $\ell = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$ e α é a medida de abertura do ângulo do setor circular.

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\ell}{2\pi R} \Rightarrow \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{12\pi}{2\pi \cdot 10} \Rightarrow \alpha = \frac{12\pi \cdot 360^\circ}{2\pi \cdot 10} \Rightarrow \alpha = 216^\circ$$

A medida de abertura do ângulo é 216°.

4. A geratriz de um cone reto tem medida de comprimento 5 cm e o ângulo central do setor circular tem medida de abertura 72°. Calcule a medida de área lateral do cone. (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.)

Resolução

De acordo com os dados do problema, temos $\alpha = 72^\circ$ (medida de abertura do ângulo central) e $g = 5$ cm (medida de comprimento do raio do setor circular). Então:

$$\frac{A_\ell}{\pi \cdot 5^2} = \frac{72^\circ}{360^\circ} \Rightarrow A_\ell = (\pi \cdot 5^2) \cdot \frac{72^\circ}{360^\circ} = \pi \cdot 25 \cdot \frac{1}{5} = 5\pi \simeq 5 \cdot 3{,}14 = 15{,}70$$

Assim, $A_\ell \simeq 15{,}7$ cm^2.

Fique atento

A superfície lateral, nesse exemplo, é um setor circular cuja área mede $\frac{1}{5}$ da área do círculo. Logo, $A_\ell = \frac{25\pi}{5} = 5\pi$.

Atividades

Não escreva no livro

11. a) $g^2 = 24^2 + 18^2 \Rightarrow g^2 = 900 \Rightarrow g = 30$; logo, $g = 30$ cm.

b) $A_\ell = \pi rg = \pi \cdot 18 \cdot 30 = 540\pi$; logo, $A_\ell = 540\pi$ cm^2.

11. A medida de comprimento da altura de um cone reto é 24 cm, e a medida de comprimento do raio da base é 18 cm. Calcule:

a) a medida de comprimento da geratriz;

b) a medida de área lateral;

c) a medida de área total.

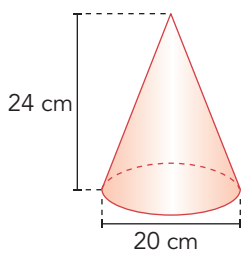
c) $A_T = \pi r(g + r) = \pi \cdot 18(30 + 18) = 18\pi \cdot 48 = 864\pi$; logo, $A_T = 864\pi$ cm^2.

12. Quantos centímetros quadrados de cartolina serão gastos para fazer um chapéu de aniversário cujas medidas de comprimento estão indicadas na imagem?

$g^2 = 24^2 + 10^2 = 576 + 100 = 676 \Rightarrow g = 26$

$A_\ell = \pi rg = \pi \cdot 10 \cdot 26 = 260\pi$

Logo, serão gastos 260π cm^2 de cartolina para fazer o chapéu.



Banco de imagens/Arquivo da editora

13. $\frac{360°}{60°} = \frac{\pi r^2}{A_\ell} \Rightarrow \frac{360°}{60°} = \frac{\pi 6^2}{A_\ell} \Rightarrow \frac{360°}{60°} = \frac{36\pi}{A_\ell} \Rightarrow A_\ell = 6\pi$; logo, $A_\ell = 6\pi$ cm².

13. Ao planificarmos a superfície lateral de um cone reto, obtemos um setor circular cujo comprimento do raio mede 6 cm e cuja abertura do ângulo central mede 60°. Calcule a medida de área lateral do cone.

14. O comprimento da geratriz de um cone equilátero mede 4 cm. Determine:

a) as medidas de comprimento da altura e de comprimento do raio da base do cone; $h = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ ou $h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$; logo, $h = 2\sqrt{3}$ cm e $r = 2$ cm.

b) a medida de área total. $A_T = \pi rg + \pi r^2 = 8\pi + 4\pi = 12\pi$; logo, $A_T = 12\pi$ cm².

15. A medida de comprimento da altura de um cone reto é 6 cm, e a do diâmetro da base é 10 cm. Usando uma calculadora, determine a medida de área total do cone. $g^2 = 6^2 + 5^2 \Rightarrow g^2 = 36 + 25 \Rightarrow g^2 = 61 \Rightarrow g = \sqrt{61}$; $A_T = \pi rg + \pi r^2 = 5\sqrt{61}\pi + 25\pi \simeq 201{,}2$; logo, $A_T \simeq 201{,}2$ cm².

16. Considere um cone reto cujo comprimento do raio da base mede 5 cm e a abertura do ângulo central mede 45°. Determine:

a) a medida de área da base;

b) a medida de área lateral;

c) a medida de área total.

a) $A_b = \pi r^2 = \pi 5^2 = 25\pi$; logo, $A_b = 25\pi$ cm².

b) $\frac{45°}{360°} = \frac{2\pi 5}{2\pi R} \Rightarrow 0{,}125 \cdot R = 5 \Rightarrow R = 40$

Como $R = g$, temos: $A_\ell = \pi rg = \pi \cdot 5 \cdot 40 = 200\pi$; logo, $A_\ell = 200\pi$ cm².

c) $A_T = \pi r(g + r) = 5\pi \cdot 45 = 225\pi$; logo, $A_T = 225\pi$ cm².

Texto para a próxima atividade.

A cisterna é um reservatório utilizado em muitas regiões do Brasil para armazenar água da chuva. Esses reservatórios costumam ter o formato cilíndrico com a tampa em formato cônico e são construídos de alvenaria. É necessário, portanto, impermeabilizar as paredes interna e externa e a superfície externa da tampa.



Adriano Kirihara/Pulsar Imagens

Cisterna utilizada para armazenar água da chuva na escola Estadual Saturnino Vieira de Melo, em Buíque, PB. Foto de 2023.

17. Considere uma cisterna em que o comprimento do diâmetro interno da base mede 4,8 m, o comprimento do diâmetro externo da base mede 5,0 m e o comprimento da altura mede 1,6 m. Já a tampa, com formato cônico, tem 5,0 m de medida de comprimento do diâmetro da base e 0,2 m de medida de comprimento da altura. Considerando que será aplicada uma demão de um impermeabilizante vendido em latas cuja massa mede 5 kg, com rendimento de 130 g/m², será necessário comprar quantas latas para impermeabilizar a parte interna e a parte externa da lateral e a parte externa da tampa dessa cisterna? (Use a calculadora para realizar os cálculos.) 3 latas.

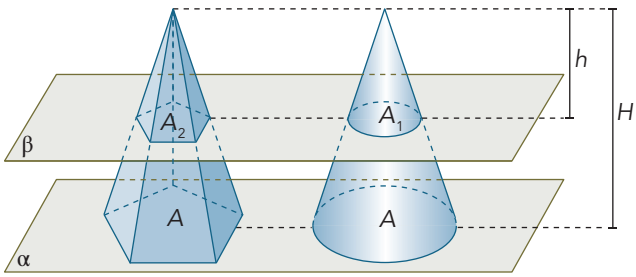
18. Elabore, no caderno, um problema envolvendo a medida de área total de um cone e troque de caderno com um colega, de modo que um responda à pergunta que o outro elaborou. Depois, confira a resposta do colega.

Exemplo de problema: Um confeiteiro produz doces de chocolate em formato de cone completamente envoltos em uma embalagem de papel. Se a medida de comprimento da geratriz da embalagem é 10 cm e a medida de comprimento do raio é 2,5 cm, quantos centímetros quadrados de papel, aproximadamente, são necessários para produzir cada embalagem?

Medida de volume de um cone

Mais uma vez, usaremos o princípio de Cavalieri. Consideramos um cone de altura com medida de comprimento H e base de medida de área A contida em um plano horizontal α e uma pirâmide de altura com medida H e base de medida de área A contida em α.

Cada plano β, paralelo a α, que secciona um dos sólidos também secciona o outro, e as secções determinadas por β em cada um deles determinam as medidas de área A_1 e A_2.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Temos:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{h^2}{H^2} \text{ e } \frac{A_2}{A} = \frac{h^2}{H^2} \Rightarrow \frac{A_2}{A} = \frac{A_1}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$$

Pelo princípio de Cavalieri, podemos afirmar que o cone e a pirâmide iniciais têm a mesma medida de volume. Portanto, a medida de volume (V) do cone também é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da medida de área da base (A_b) pela medida de comprimento da altura (h).

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Então, para um cone circular cujo comprimento do raio mede r e cujo comprimento da altura mede h, podemos dizer que:

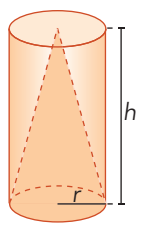
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$$

Observação: Lembrando a relação entre as medidas de volume do prisma e da pirâmide de mesma medida de comprimento da altura e de mesma medida de área da base e usando o princípio de Cavalieri, podemos concluir:

A medida de volume de um cone de mesma medida de área da base e mesma medida de comprimento da altura de um cilindro é igual a $\frac{1}{3}$ da medida de volume do cilindro.

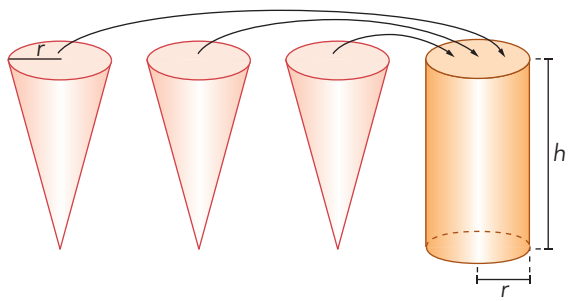
$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

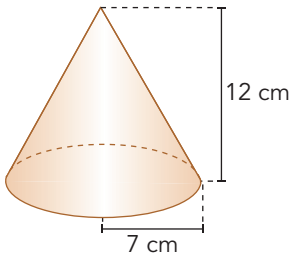
Podemos comprovar isso experimentalmente. Para encher de água uma vasilha com formato de cilindro usando como medida um recipiente em formato de cone, de mesma medida de área da base e de mesma medida de comprimento da altura do cilindro, será necessário usar o recipiente 3 vezes para encher o cilindro.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

5. Qual é a medida de volume de um cone cujo comprimento do raio mede 7 cm e cujo comprimento da altura mede 12 cm?



Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução

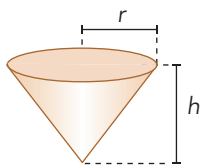
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 7^2 \cdot 12 = 196\pi$$

Portanto, a medida de volume do cone é 196π cm³.

6. Qual é a medida de capacidade, em mL, de uma taça de formato cônico cujo comprimento do diâmetro mede 9 cm e cujo comprimento da altura mede 6 cm? (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.)


Scrudje/Shutterstock

Taça de vidro.



Cone.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução

Como o comprimento do diâmetro mede 9 cm, o comprimento do raio mede 4,5 cm. Assim, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot (4{,}5)^2 \cdot 6 = 40{,}5\pi \simeq 127$$

$$V \simeq 127 \text{ cm}^3$$

Como 1 cm³ = 1 mL, a medida de capacidade da taça é, aproximadamente, 127 mL.

Atividades

19. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$; logo, $V = 12\,000\pi$ L.

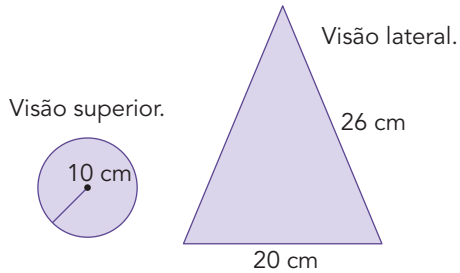
Não escreva no livro

19. Um tanque cônico tem 4 m de medida de profundidade e o topo circular tem medida de comprimento do diâmetro 6 m. Qual é a medida de volume máxima, em litros, que esse tanque pode conter de líquido?

20. Uma empresa fabrica boias de sinalização cônicas com medida de altura 0,5 m e medida de comprimento do diâmetro da base 0,3 m. Qual é a medida de volume dessa boia? $0{,}00375\pi$ m³

21. Carina avaliou o projeto da cobertura de um **silo**.

silo: reservatório para o armazenamento de materiais como cereais e cimento.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Com essas informações, Carina calculou a medida de volume da cobertura do silo. Qual foi a medida de volume obtida por ela? 2513 m³

22. Determine a medida de volume de um cone cujo comprimento da altura mede 6 cm e cujo comprimento da geratriz mede 7 cm. (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.) $g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 7^2 = r^2 + 6^2 \Rightarrow r = \sqrt{13}$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 13 \cdot 6 = 26\pi \simeq 81{,}64$

Logo, $V \simeq 81{,}64$ cm³.

23. $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (40)^2 \cdot 150 = 80\,000\pi \simeq 251\,200$; logo, $V \simeq 251\,200$ m³.

Texto para a próxima atividade.

O tornado é uma massa de ar rodopiante que se desloca a uma medida de velocidade entre 30 km/h e 60 km/h, mas que gira a uma medida de velocidade entre 65 km/h e 500 km/h. O formato de um tornado muitas vezes se parece com um cone.



Brian Davidson/Getty Images

Tornado em Dodge City, no Kansas, Estados Unidos. Foto de 2016.

23. Suponha que um meteorologista queira calcular a medida aproximada de "**massa de ar**", em metros cúbicos, que é deslocada em um tornado que pode ser aproximado a um cone reto com comprimento do diâmetro da base medindo 80 m e comprimento da altura medindo 150 m. Qual valor será encontrado? (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.)

massa de ar: grande volume de ar com característica "homogênea" em relação a temperatura e vapor de água.

24. Elabore, no caderno, mais uma pergunta envolvendo a medida de massa de ar deslocada em um tornado com o formato parecido com o de cone e troque de caderno com um colega, de modo que um responda à pergunta que o outro elaborou. Depois, confira a resposta do colega. O exemplo de pergunta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

25. Nas prateleiras de supermercados é comum encontrarmos o mesmo produto sendo ofertado em embalagens parecidas, de mesmo formato, mas com tamanhos diferentes e proporcionais ao conteúdo. Geralmente, quando compramos a maior embalagem, recebemos um desconto em relação à compra de embalagens menores na mesma proporção. Em determinado estabelecimento, são vendidas castanhas em embalagens cônicas de tamanhos diferentes e proporcionais ao conteúdo. Por exemplo, 200 g de castanhas custam R$ 16,00, enquanto 400 g do mesmo produto e da mesma marca custam R$ 30,00.

Não escreva no livro



Jose y yo Estudio/Shutterstock

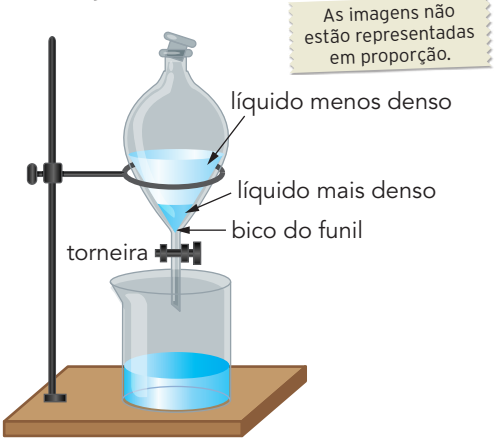
Embalagem de castanhas.

a) Sabendo que a embalagem de 200 g de castanhas tem medida de altura 12,7 cm e medida de comprimento do raio 3 cm, calcule a medida de altura aproximada, em centímetros, da embalagem de 400 g. (Use uma calculadora para efetuar os cálculos e considere que ambas as embalagens têm o formato de cones semelhantes.) 15,9 cm

b) Na sua opinião, o que pode levar uma marca a diminuir o tamanho da embalagem de um produto, porém não diminuir o preço na mesma proporção? Resposta pessoal.

26. O método de decantação pode ser usado para separar 2 substâncias líquidas com medidas de densidade diferentes, como mostra o esquema a seguir.

As imagens não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Se 2 líquidos têm a mesma medida de volume depois da decantação, qual é a medida de distância do bico do funil (vértice do cone) à substância menos densa antes do início da decantação? Considere que, antes da decantação, a parte ocupada pelos líquidos tem formato cônico, cujo comprimento do raio da base mede 5 cm e a medida de distância do bico do funil até a superfície do líquido é 20 cm.

Aproximadamente 15,9 cm.

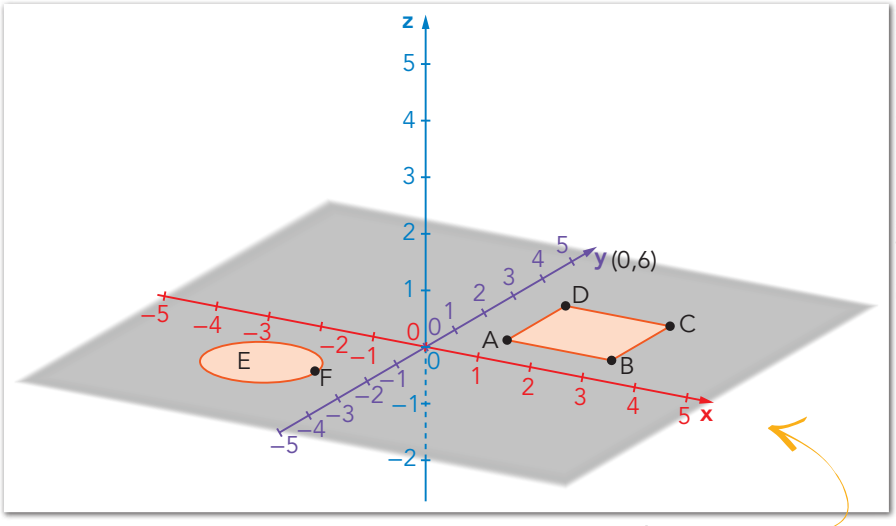
Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Medida de área e de volume de pirâmides e cones

Vamos agora utilizar um *software* para calcular as medidas de área e de volume de uma pirâmide de base quadrada e de um cone.

Para as atividades propostas a seguir, sugerimos selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que permita esse tipo de construção em 3-D. A seguir apresentamos alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* desse tipo.



Ericsson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção no *software* de Geometria dinâmica após o 1º passo.

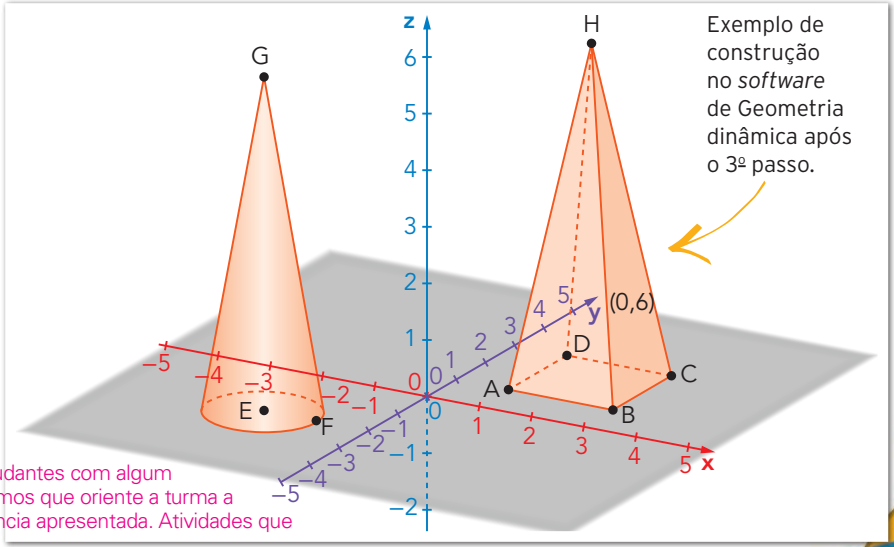
1º passo: Na janela de visualização em 3-D do programa escolhido, represente uma região quadrada *ABCD* sobre o plano. Depois, localize e selecione a ferramenta que constrói um círculo dados 2 pontos *E* e *F* de modo que o segmento de reta $\overline{EF}$ seja o raio da circunferência *d*.

2º passo: Localize e selecione a ferramenta que constrói uma pirâmide a partir da região quadrada *ABCD* e altere as configurações de modo que a medida de comprimento da altura da pirâmide seja igual a 6 unidades.

3º passo: Repita o procedimento anterior, mas, agora, selecione a opção de construção de um cone a partir da circunferência *d* e defina como 6 unidades a medida de comprimento da altura.

4º passo: Construa um segmento de reta cujas extremidades são o vértice do cone e o ponto *F*. A medida de comprimento desse segmento de reta é igual à medida de comprimento da geratriz do cone.

5º passo: Localize e selecione a ferramenta que informa as medidas da área da base do cone e das faces da pirâmide.



Exemplo de construção no *software* de Geometria dinâmica após o 3º passo.

Ericsson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

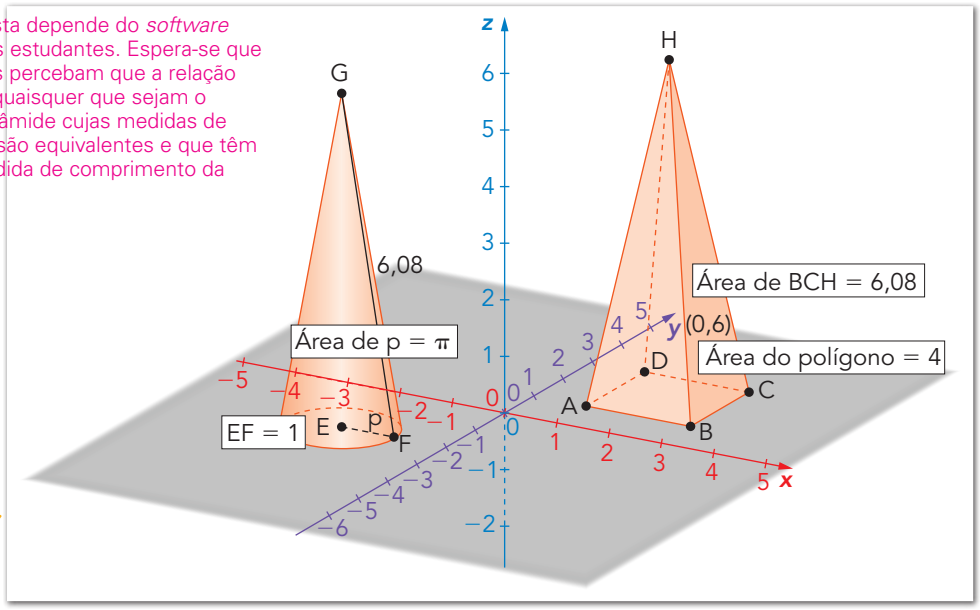
Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

6º passo: Depois, localize e selecione a ferramenta que informa a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{EF}$, que equivale à medida de comprimento do raio da circunferência.

1. A partir das medidas obtidas, calcule a medida de área lateral do cone.
O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
2. A partir das medidas de área obtidas para o cone e para a pirâmide de base quadrada, calcule a medida de área total desses sólidos e compare com os valores que você obteve no 5º passo.
O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

7º passo: Localize a ferramenta que informa a medida de volume de um sólido e aplique-a para a pirâmide e para o cone construídos.

3. a) A resposta depende do *software* utilizado pelos estudantes. Espera-se que os estudantes percebam que a relação é verdadeira quaisquer que sejam o prisma e a pirâmide cujas medidas de área da base são equivalentes e que têm a mesma medida de comprimento da altura.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção no *software* de Geometria dinâmica após o 7º passo.

3. Utilize as ferramentas do *software* selecionado e faça o que se pede em cada item.
   - **a)** Construa um prisma e uma pirâmide, ambos com as medidas de comprimento da altura iguais e com bases congruentes, e verifique se a relação $V_{\text{pirâmide}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$, nesse caso, é verdadeira.
   - **b)** Altere a medida de comprimento da altura dos sólidos geométricos construídos no item anterior de maneira que ambos tenham a mesma medida de comprimento da altura, e verifique se a relação $V_{\text{pirâmide}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$ se mantém verdadeira. A relação se mantém verdadeira.
   - **c)** Se um cone e um cilindro têm bases equivalentes e a mesma medida de comprimento da altura, qual relação pode ser estabelecida entre a medida de volume desses sólidos geométricos? Verifique se essa relação é verdadeira para alguns exemplos no *software* escolhido.
A medida de volume do cone será igual a um terço da medida de volume do cilindro. Exemplos pessoais.
4. Em uma madeireira são produzidas peças de quebra-cabeça maciças com formatos de cone e de pirâmide de base quadrada. Após a produção, as peças são pintadas com tintas de cores diversas. Se as peças em ambos os formatos têm a mesma medida de volume e a mesma medida de comprimento da altura, qual delas apresenta a maior economia em relação à tinta necessária para realizar a pintura? Utilize as ferramentas do *software* escolhido para resolver o problema. (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.) As peças com formato de cone, pois têm menor medida de área total se comparadas às peças com formato de pirâmide.
5. Elabore um problema envolvendo a medida de área superficial e a medida de volume de peças com formato de cone e com formato de pirâmide de base octogonal de um jogo de tabuleiro. Depois, troque o problema com o de um colega e resolva o problema elaborado por ele.
O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

CAPÍTULO 4

Esfera e projeções cartográficas

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação-problema 1

Decoração com frutas

Na natureza, existem várias frutas com formato que lembra uma esfera. Uma delas é a melancia, muito utilizada para fazer sucos ou decorar pratos. Imagine agora que você precisa cortar uma melancia para um desses propósitos.

As imagens não estão representadas em proporção.



gdefilip/Shutterstock

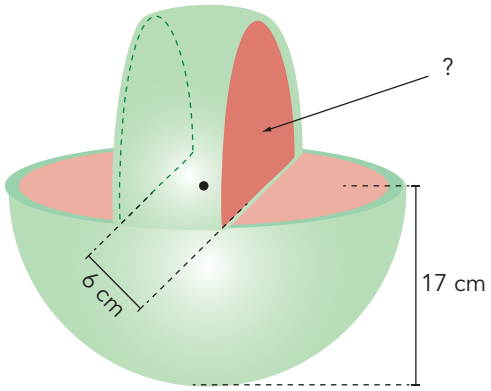
Melancias e laranjas são exemplos de frutas cujo formato lembra uma esfera.

a) Em que direção e por onde deve passar o corte para que as 2 partes obtidas tenham o mesmo tamanho? O corte deve passar pelo centro da melancia, para dividi-la em 2 partes de mesmo tamanho.

b) Existe uma maneira de cortar a melancia para ter rodelas cada vez menores? Se sim, explique. Sim, afastando o corte do centro da melancia.

c) Para esculpir uma cesta em uma melancia, um artista faz primeiro 2 cortes verticais e paralelos que distam 6 cm entre si. Esses cortes vão determinar a alça da cesta, que deve estar alinhada com o centro. O outro corte é horizontal, como se fosse passar pelo centro da melancia, mas sem fazê-lo, para que não se separe a alça da parte inferior.

Como você faria para calcular a medida de área do semicírculo indicado na ilustração da cesta? Quanto é essa medida de área?



Banco de imagens/Arquivo da editora

d) Pensando nas respostas dos itens anteriores, quais características você poderia dizer que há em secções feitas em uma esfera?

Exemplo de resposta: Qualquer secção feita em uma esfera define um círculo e, quanto mais distante do centro da esfera é feita essa secção, menor é o círculo determinado.

c) Resposta pessoal. $17^2 = 3^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 280$; podemos calcular a medida de área do semicírculo:

$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{280\pi}{2} = 140\pi$$

A medida de área é 140π cm^2.

Não escreva no livro

Situação-problema 2

Superfície da Terra



Claus Lunau/SPL/Fotoarena

Imagem que ilustra uma projeção cartográfica em que parte da superfície da Terra é projetada em uma região plana que compõe o mapa-múndi.

A Cartografia estuda a superfície da Terra e, por meio de operações científicas, técnicas e artísticas, orienta na elaboração de mapas, ou seja, torna possível a representação da superfície de um sólido em um plano, o que possibilita a análise dele. A imagem mostra um exemplo de como é obtido um tipo de projeção cartográfica.

Inicialmente, para que sejam feitas as projeções cartográficas, considera-se a superfície da Terra como uma superfície esférica. Em seguida, cada "pedaço" da superfície esférica é montado um ao lado do outro, compondo o mapa-múndi.

a) Você consegue imaginar algum dos sólidos geométricos que estudamos envolvendo um globo terrestre, de modo que a projeção da superfície do globo na superfície desse sólido geométrico resulte em uma imagem parecida com um mapa-múndi?

b) Na imagem anterior, uma região do globo terrestre está sendo destacada. Qual é o formato da região antes da projeção (na superfície esférica) e depois da projeção (planificada)?

c) Comparando a região que representa a parte destacada da superfície esférica àquela que representa a parte correspondente no mapa-múndi, elas têm as mesmas medidas de comprimento? Em que parte da região há mais distorção nos formatos? E onde há menor distorção?

a) Exemplos de resposta: Cilindros, cones ou poliedros.

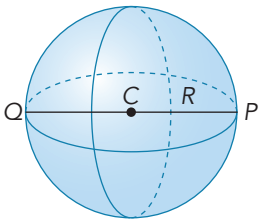
b) Na superfície esférica o formato é de cunha esférica e na planificada, é de uma região retangular.

c) As regiões não têm as mesmas medidas de comprimento. As maiores distorções ocorrem nas regiões próximas aos polos e as menores distorções, nas regiões próximas à linha do equador.

As esferas

Consideremos um ponto C e um número real positivo R qualquer.

A esfera de centro C e raio de medida de comprimento R é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma medida de distância menor ou igual a R do ponto C.



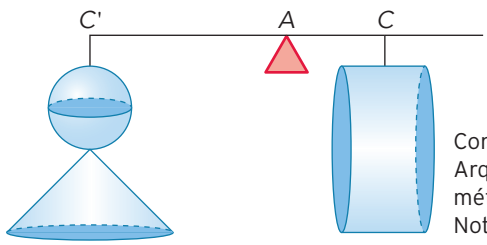
Banco de imagens/Arquivo da editora

C: centro da esfera.
$\overline{CP}$: raio da esfera.
$\overline{QP}$: diâmetro da esfera.

A "casquinha", ou a fronteira da esfera, chama-se **superfície esférica**.

Um pouco da história da medida de volume de uma esfera

A medida de volume de uma esfera foi encontrada de maneira precisa, pela primeira vez, por Arquimedes de Siracusa (c. 287 a.C.-c. 212 a.C.), um matemático grego do período helênico que, entre outras coisas, descobriu vários poliedros. Ele também aprimorou um método atribuído ao astrônomo, matemático e filósofo grego Eudoxo de Cnido (408 a.C.-355 a.C.), o método da exaustão. No tratado *Sobre a esfera e o cilindro*, em 2 volumes, Arquimedes apresenta métodos para encontrar as medidas de área e de volume de alguns sólidos redondos. Nessa obra, ele conclui que uma esfera cujo comprimento do raio mede R e um cone com medida de comprimento do raio $2R$ e medida de comprimento da altura $2R$ são equilibrados por um cilindro com medida de comprimento do raio $2R$ e medida de comprimento da altura $2R$ desde que a medida de comprimento do braço da balança referente aos primeiros sólidos seja o dobro da medida de comprimento do braço referente ao segundo.



Conclusão de Arquimedes pelo método do equilíbrio. Note que $AC' = 2AC$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Essa linha de raciocínio elaborada por Arquimedes ficou conhecida como método do equilíbrio e foi muito utilizada para determinar medidas de área e de volume de figuras geométricas espaciais. É possível demonstrar o método do equilíbrio por meio do método da exaustão.

Isso significa que 2 vezes a medida de massa da esfera com o cone equivalem a 1 vez a medida de massa do cilindro. Usando notação moderna e representando por E a medida de volume da esfera, C_o a medida de volume do cone e C_i a medida de volume do cilindro, temos:

$$2(E + C_o) = C_i$$

Arquimedes já sabia que a medida de volume do cilindro é o produto da medida de área da base pela medida de comprimento da altura, e que a medida de volume do cone é a terça parte do produto da medida de área da base pela medida de comprimento da altura.

Assim, a relação anterior pode ser desenvolvida da seguinte maneira:

$$E + C_o = \frac{1}{2}\pi(2R)^2 \cdot 2R \Rightarrow E + C_o = 4\pi R^3$$

Substituindo C_o por $\frac{1}{3}\pi(2R)^2 \cdot 2R$, temos:

$$E + \frac{1}{3}\pi(2R)^2 \cdot 2R = 4\pi R^3 \Rightarrow E = 4\pi R^3 - \frac{8\pi R^3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{12\pi R^3}{3} - \frac{8\pi R^3}{3} \Rightarrow E = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Arquimedes encontrou a fórmula correta, chamou o procedimento de "método mecânico" e teve a intuição de que algum dia seria possível comprovar esse resultado por meios puramente matemáticos. De fato, o método mecânico de Arquimedes é similar ao princípio de Cavalieri (1598-1647), que, por sua vez, traz a ideia do conceito inicial do cálculo integral.

Fonte dos dados: ÁVILA, Geraldo. Arquimedes, a esfera e o cilindro. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 10, 1986.

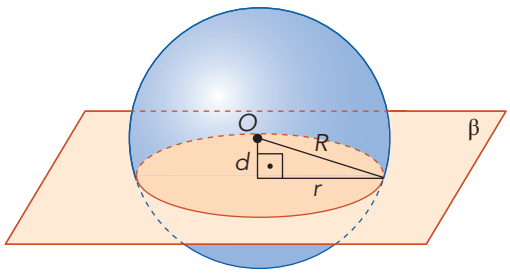


Reprodução/Coleção particular

Fólios do manuscrito *Sobre a esfera e o cilindro*, de Nasir al-Din al-Tusi, c. 1298. Dimensão dos fólios: 20,8 cm × 16 cm. No século XIII, o astrônomo persa Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274) publicou as versões revistas de diversos textos gregos.

Medida de volume de uma esfera

Considere a imagem em que aparece a secção determinada em uma esfera cujo raio tem medida de comprimento R por um plano β.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Fique atento

Se um plano secciona uma esfera, a secção é sempre um círculo.

A intersecção do plano β com a esfera é um círculo de medida de comprimento do raio r. Se d é a medida de comprimento da distância de O (centro da esfera) ao plano β, usando o teorema de Pitágoras, temos:

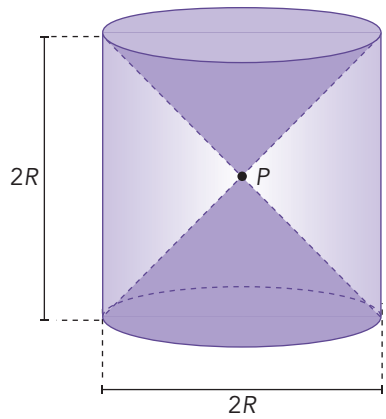
$$R^2 = d^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - d^2$$

Portanto, a medida de área da secção é dada por:

$$\pi(R^2 - d^2)$$

A medida de volume de uma esfera é determinada utilizando-se o princípio de Cavalieri. Para isso, vamos considerar inicialmente um sólido S que é obtido da seguinte maneira: de um cilindro equilátero, cuja medida de comprimento do raio é R e a medida de altura é $2R$, "retiramos" 2 cones, cujas medidas de comprimento do raio da base e de comprimento da altura do cone são ambas R e cujo vértice é P.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Fique atento

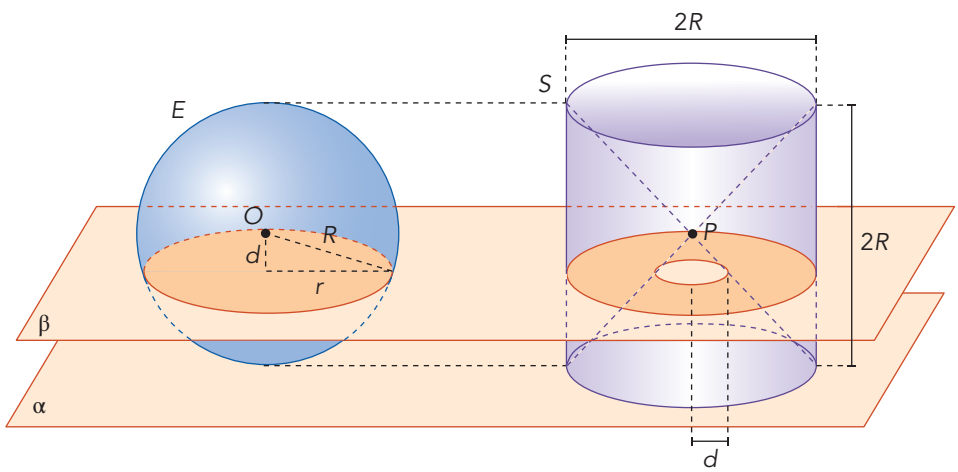
Esse sólido S é conhecido como **anticlepsidra**.

A medida de volume do sólido S é tal que:

$$V_S = \underbrace{\pi R^2 \cdot 2R}_{\substack{\text{medida de}\\ \text{volume do}\\ \text{cilindro}}} - \underbrace{2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R}_{\substack{\text{medida de}\\ \text{volume dos}\\ 2 \text{ cones}}} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Agora podemos considerar, apoiados em um plano α, esse sólido S e uma esfera E com medida de comprimento do raio R, conforme apresentado na imagem a seguir.

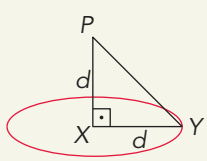
Banco de imagens/Arquivo da editora



Fique atento

A reta $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao plano α.

O raio do círculo menor tem medida de comprimento d, pois o $\triangle PXY$ representado é retângulo e isósceles para qualquer plano β.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Se um plano β, paralelo a α, seccionar a esfera E, a medida de área da secção será $\pi(R^2 - d^2)$, conforme estudamos. Além disso, β também secciona o sólido S e a secção será uma coroa circular de raios com medidas de comprimento R e d, e também com medida de área igual a $\pi(R^2 - d^2)$.

A igualdade das medidas de área das secções permite concluir, pelo princípio de Cavalieri, que a esfera E tem a mesma medida de volume que o sólido S, que, como sabemos, é $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Podemos então concluir que, se uma esfera tem raio de medida de comprimento R, a medida de volume dela é dada por:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Explorando o cálculo da medida de área da superfície da esfera

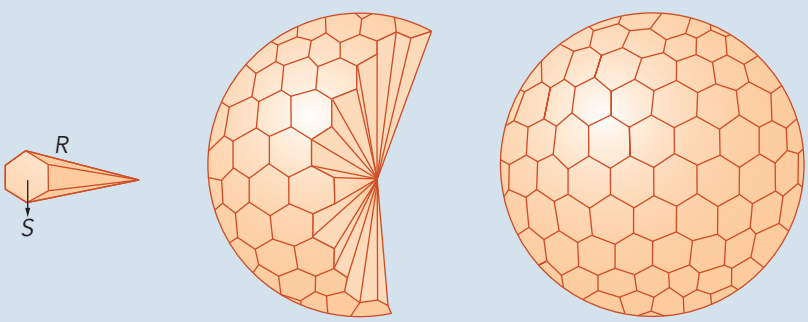
Você já estudou como calcular a medida de área da superfície de prismas, cilindros, pirâmides e cones. Agora vamos explorar o cálculo da medida de área da superfície de uma esfera.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Vamos imaginar uma esfera, que tem raio com medida de comprimento R, como a reunião de sólidos que parecem pirâmides. De fato, esses sólidos **não são pirâmides** perfeitas, pois a base das pirâmides é plana e esses sólidos têm bases com superfície arredondada, pois as bases pertencem à superfície da esfera.

Contudo, tomando essas bases como as menores possíveis, podemos tratar essas superfícies arredondadas como superfícies planas, permitindo considerar os sólidos como "pirâmides". Assim, podemos admitir que a medida de volume da esfera é equivalente à soma das medidas de volume de todas essas "pirâmides" de bases minúsculas.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Perceba que a medida de comprimento da altura da "pirâmide" é igual à medida de comprimento do raio da esfera. Continuando esse raciocínio, a superfície esférica fica dividida em uma quantidade tão grande quanto se queira de "regiões poligonais" (base das "pirâmides").

Digamos então que a superfície esférica tenha ficado dividida em n regiões poligonais (n suficientemente grande), cujas medidas de área são S_1, S_2, ..., S_n.

2. Sendo S_1, S_2, ..., S_n as medidas de área das bases das "pirâmides", a medida de área da superfície esférica A é $A = S_1 + S_2 + ... + S_n$.

Não escreva no livro

1. Qual é a fórmula que indica a medida de volume de uma dessas "pirâmides"? Utilize S como medida de área da base e R como medida de comprimento da altura de uma dessas "pirâmides".

2. Como podemos escrever a medida de área A da superfície esférica utilizando S_1, S_2, ..., S_n como as medidas de área das bases dessas "pirâmides"?

3. Escreva no caderno uma fórmula para indicar a medida de volume V da esfera de acordo com as suas respostas anteriores. $V = \frac{1}{3}S_1R + \frac{1}{3}S_2R + ... + \frac{1}{3}S_nR$

4. Analise a fórmula que você escreveu na atividade anterior e faça a fatoração dela usando o caso do fator comum em evidência. É possível substituir alguma parte dessa fórmula pela medida de área A da superfície esférica? Em caso positivo, indique a fórmula.

5. Analise a equação que você obteve na atividade anterior. Lembrando que a medida de volume de uma esfera de raio com medida de comprimento R é $\frac{4}{3}\pi R^3$, utilize a equação que você obteve na atividade **4** e reescreva no caderno a fórmula da medida de área da superfície esférica.

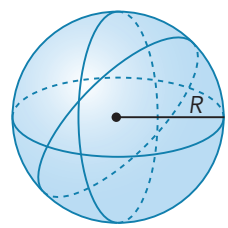
1. $V = \frac{Sh}{3} = \frac{SR}{3}$

5. $V = \frac{1}{3}AR \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}AR \Rightarrow A = 4\pi R^2$

Logo, a medida de área da superfície esférica de raio de medida de comprimento R é dada por $A = 4\pi R^2$.

Formalizando o cálculo da medida de área de uma superfície esférica

Na esfera, estão representados 3 círculos cujo centro coincide com o centro da esfera. Os matemáticos já provaram que a medida de área da superfície esférica é dada pelo quádruplo da medida de área de cada um desses círculos, ou seja:



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$A = 4\pi R^2$$

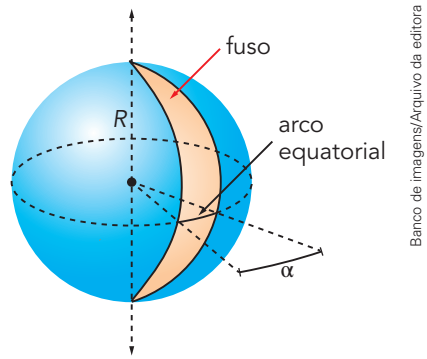
Por exemplo, se a medida de comprimento do raio de uma esfera é 9 cm, a medida de área da superfície esférica será dada por:

$$A = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 = 324\pi$$

Logo, a medida de área da superfície dessa esfera é 324π cm^2.

Atividades resolvidas

1. Um fuso esférico é uma parte da superfície esférica gerada pela rotação (de α graus) de uma semicircunferência de medida de comprimento do raio R, em torno de um eixo que contém o diâmetro da semicircunferência. A medida de área do fuso é proporcional à medida de abertura do ângulo α, de modo que, quando α for 360°, tem-se a medida de área da superfície esférica, ou seja, $4\pi R^2$. Encontre a fórmula que permite obter a medida de área da superfície arredondada do fuso em função da medida de comprimento do raio R e da medida de abertura do ângulo α.



Banco de imagens/Arquivo da editora

4. Sim. $V = \frac{1}{3}S_1R + \frac{1}{3}S_2R + ... + \frac{1}{3}S_nR = \frac{1}{3}R(S_1 + S_2 + ... + S_n)$

Podemos substituir os termos que estão entre parênteses por A. Temos:

$V = \frac{1}{3}R(S_1 + S_2 + ... + S_n) = \frac{1}{3}RA$

Resolução

Pelo enunciado, temos:

$$\frac{A_{fuso}}{4\pi R^2} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Então:

$$A_{fuso} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 4\pi R^2 = \frac{\alpha \pi R^2}{90^\circ}$$

2. Responda no caderno às questões relativas ao planeta Terra, considerando que a linha do equador tem medida de comprimento aproximada de 40 000 km e que $\frac{3}{4}$ da superfície terrestre estão cobertos de água.

a) Calcule as medidas aproximadas de volume e de área da superfície terrestre.

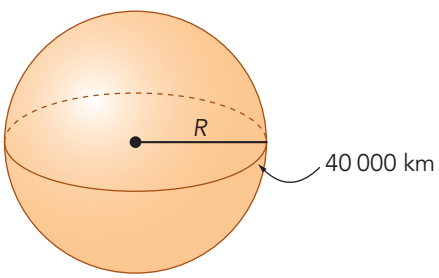
b) Calcule a medida aproximada de área coberta de água.

Resolução

a) Sabe-se que a linha do equador tem medida de comprimento igual a aproximadamente 40 000 km.

Considerando o planeta Terra como uma figura geométrica espacial de formato esférico, temos $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Sabemos que $C = 40\,000$ km e $C = 2\pi R$, então vamos determinar R considerando $\pi \simeq 3{,}14$:

$$40\,000 = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{40\,000}{2\pi} \simeq 6\,369$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \simeq \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 6\,369^3 \simeq 1{,}08 \cdot 10^{12}$$

A medida de área da superfície de uma esfera é dada por $A = 4\pi R^2$.

Considerando o planeta Terra, como $R \simeq 6\,369$ km, temos:

$$A \simeq 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,369^2 = 509\,485\,862{,}16$$

Portanto, a medida aproximada de volume da Terra é $1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3 e a medida aproximada de área da superfície da Terra é $5{,}09 \cdot 10^8$ km^2.

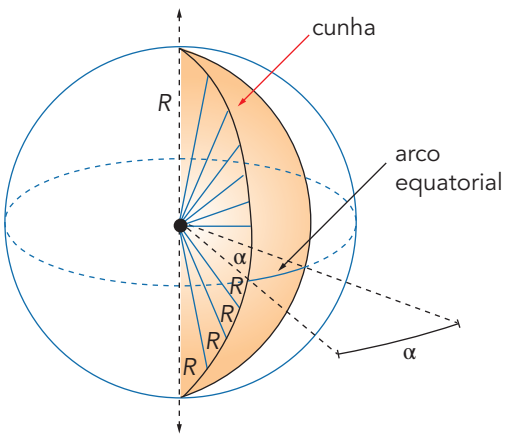
b) Como aproximadamente $\frac{3}{4}$ da superfície da Terra são cobertos de água, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{3}{4}A \simeq \frac{3}{4} \cdot 5{,}09 \cdot 10^8 \simeq 3{,}82 \cdot 10^8$$

A medida de área da superfície coberta de água é, aproximadamente, $3{,}82 \cdot 10^8$ km^2.

3. Uma cunha esférica é uma parte da esfera gerada pela rotação (de α graus) de um semicírculo de raio com medida de comprimento R com as extremidades em um eixo. A medida de volume da cunha é proporcional à medida de abertura do ângulo α, de modo que, quando α for 360°, tem-se a medida de volume da esfera, ou seja, $\frac{4}{3}\pi R^3$. Encontre a fórmula que permite obter a medida de volume da cunha em função da medida de comprimento do raio R e da medida de abertura do ângulo α.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Resolução

Pelo enunciado, temos:

$$\frac{V_{cunha}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Então:

$$V_{cunha} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\alpha \pi R^3}{270^\circ}$$

1. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 33 = 36\pi$; logo, $V = 36\pi$ cm³.

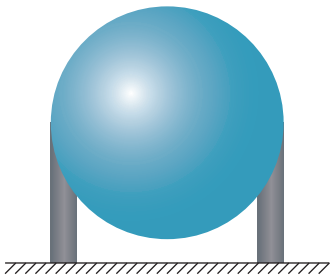
Atividades

Não escreva no livro

1. Calcule a medida de volume de uma esfera com raio de medida de comprimento igual a 3 cm.

2. Considere uma laranja composta de 12 gomos exatamente iguais. Se a laranja tem 8 cm de medida de comprimento de diâmetro, qual é a medida de volume de cada gomo?

3. Um reservatório com formato esférico tem 9 m de medida de comprimento do raio. Para encher totalmente esse reservatório, é necessária uma medida de intervalo de tempo de 20 horas. Nessas condições, o reservatório recebe água na razão de quantos m³/h? (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.) Aproximadamente 152,60 m³/h.



Ericson Guilherme Luciano/ Arquivo da editora

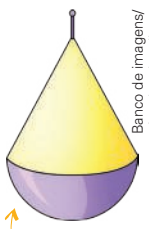
4. A medida de volume de uma esfera é $\frac{512\pi}{3}$ cm³. Calcule a medida de comprimento do raio e a medida de área da superfície esférica dela. $R = 4\sqrt[3]{2}$ cm; $A = 64\pi\sqrt[3]{4}$ cm².

5. Uma cunha esférica tem medida de abertura de ângulo igual a 60° e raio com medida de comprimento igual a 6 cm. Determine a medida de volume. $V = \frac{\alpha\pi R^3}{270°} = \frac{60° \cdot \pi \cdot 6^3}{270°} = 48\pi$; logo, $V = 48\pi$ cm³.

6. Um fuso com medida de abertura de ângulo igual a 30° tem 3 cm de medida de comprimento de raio. Qual é a medida de área da superfície arredondada desse fuso?

7. Junte-se a um colega e resolvam no caderno o que se pede: uma cunha esférica correspondente a um ângulo de medida de abertura igual a 72° tem medida de volume igual a 6,4 m³. Calcule a medida de área da superfície arredondada do fuso esférico determinado por essa cunha na esfera. (Considere $\pi \simeq 3$.) 9,6 m²

8. Uma boia orienta os navios na entrada de um porto. Essa boia é formada por um hemisfério de 2 m de medida de comprimento de diâmetro e por um cone que tem altura de 80 cm de medida de comprimento. Qual é a medida de volume da boia? (Considere $\pi \simeq 3$.) Aproximadamente, 2,8 m³.



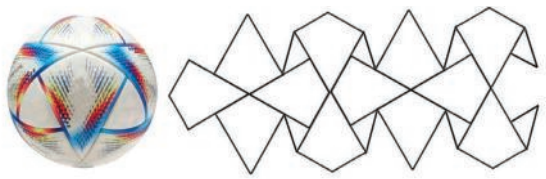
Banco de imagens/ Arquivo da editora

Boia.

9. **(UPF-RS)** Com inspiração na arquitetura, na cultura e nas cores da bandeira do Catar, a bola oficial da Copa do Mundo de 2022 foi denominada Al Rihla, que significa "a jornada" em árabe (Fonte: https://www.metropoles.com/esportes/futebol/adidas-e-fifa-revelam-a-al-rihla-bola-oficial-da-copa-do-mundo-2022).

A bola é revestida de pele de poliuretano com uma nova forma de painel de 20 peças, que melhora sua aerodinâmica. A figura a seguir apresenta a bola e seu o painel de peças.

As imagens não estão representadas em proporção.



Reprodução/UPF-RS, 2023.

A Al Rihla tem circunferência de cerca de 70 cm. Considere que, para a produção de uma peça da bola, a quantidade de pele de poliuretano foi aumentada em 10%, devido aos recortes que devem ser feitos. A quantidade desse material que será necessária para a produção de uma bola, em cm², é:

a) $\frac{4 \times 35^2}{\pi}$. **b)** $\frac{4{,}4 \times 35^2}{\pi}$. **c)** $\frac{4{,}4 \times 70^2}{\pi}$. **d)** 4×35^2. **e)** $\frac{4 \times 70^2}{\pi}$.

Alternativa **b**.

Fique atento

Chamamos de **hemisfério** cada uma das metades de uma esfera determinadas por um plano que intersecta a esfera no centro dela.

2. Medida de volume da esfera:
$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3}\pi$; logo, $V = \frac{256}{3}\pi$ cm³;
medida de volume do gomo:
$\frac{256}{3} \cdot \frac{1}{12} \cdot \pi = \frac{64}{9}\pi$; logo, $V = \frac{64}{9}\pi$ cm³.

6. $A = \frac{\alpha\pi R^2}{90°} = \frac{30 \cdot \pi \cdot 3^2}{90°} = 3\pi$; logo, $A = 3\pi$ cm².

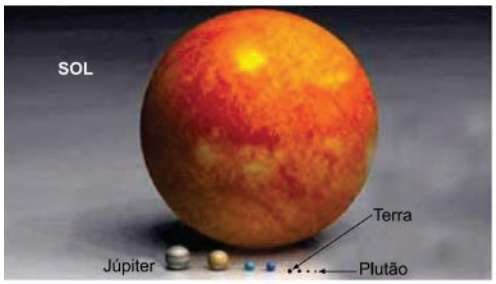
10. Seja r a medida de comprimento do raio da Terra e R a medida de comprimento do raio de Júpiter, temos: $R = 11r$.

$V_T = \frac{4\pi r^3}{3}$ e $V_J = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (11r)^3 = 1\,331 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$

Alternativa **e**.

Não escreva no livro

10. (Ficsae-SP) Em uma palestra, um cientista ilustrou comparativamente o tamanho dos planetas do sistema solar com auxílio da foto a seguir.



Reprodução/Ficsae-SP, 2019.

(www.colegioweb.com.br)

No entanto, o cientista disse que essa foto dificulta a percepção correta da diferença de tamanho entre os planetas. Para ilustrar o que dizia, ele pediu para a plateia considerar que todos os planetas são esféricos e que o tamanho do raio do planeta Júpiter é 11 vezes o tamanho do raio do planeta Terra. Em seguida, lançou a seguinte pergunta: se associarmos o planeta Terra a uma bola de futebol, o planeta Júpiter deverá ser associado, aproximadamente, a quantas dessas bolas?

A resposta correta para a pergunta do palestrante é:

a) 2 048. **c)** 33. **e)** 1331.

b) 121. **d)** 22.

Texto para a próxima atividade.

O globo da morte, geralmente usado em atração de circos, é um tipo de jaula no formato de uma esfera feita de aço, onde pilotos executam acrobacias com motocicletas no interior. Em geral, a medida de comprimento do diâmetro da esfera é 5 metros.

11. Determinado circo resolve quebrar o recorde do menor globo da morte e, para isso, decide reduzir a medida de comprimento do diâmetro da esfera. A medida de volume da nova esfera é 13,5 m³. Porém, por segurança, não vai ser possível utilizar essa nova esfera, pois a redução da medida de comprimento do diâmetro permitida é 10% e a porcentagem de redução da medida de comprimento do diâmetro da nova esfera, considerando $\pi \simeq 3$, é aproximadamente: Alternativa **a**.

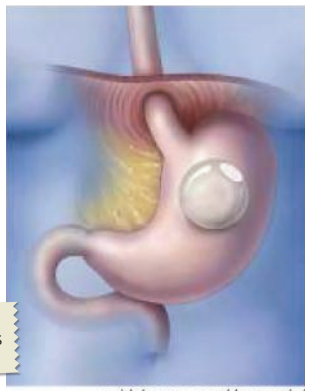
a) 40%. **c)** 60%. **e)** 80%.

b) 25%. **d)** 30%.

12. 25% de 2 L = 0,25 · 2 L = 0,5 L = 500 cm³, então, $500 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \Rightarrow R^3 \simeq 119{,}37 \Rightarrow R \simeq 4{,}92$.

Logo, a medida de comprimento do raio é menor do que 5,3 cm e maior do que 4,5 cm. Alternativa **c**.

12. (FMABC-SP) O balão intragástrico (BIG), utilizado no controle da obesidade, consiste em uma prótese de silicone no formato de uma esfera preenchida completamente com solução fisiológica, podendo variar sua capacidade entre 400 e 700 mL. Dependendo das necessidades do paciente, este balão pode ocupar de 20% a 70% da capacidade total do estômago.



Reprodução/FMABC-SP, 2017.

As imagens não estão representadas em proporção.

guidehomeo.com/dyspepsie/

Suponha que um paciente, cuja capacidade do estômago seja de 2 litros, precise reduzir essa capacidade em 25%.

Desprezando a espessura da parede do balão, pode-se afirmar sobre a medida do raio R desse balão, que:

a) $1{,}2 \leqslant R \leqslant 4{,}4$. **c)** $4{,}5 \leqslant R \leqslant 5{,}3$.

b) $R > 5$. **d)** $R = 5$.

Texto para a próxima atividade.

João-teimoso, também conhecido como joão-bobo, é um brinquedo que sempre volta para a posição vertical quando alguém tenta empurrá-lo para a posição horizontal. Isso ocorre porque o centro de gravidade dele está mais próximo à base. A estrutura tem uma massa maior na parte inferior, que é preenchida com areia ou cimento, por exemplo. O brinquedo, adaptado para animais domésticos, também faz a alegria desses bichinhos.

13. A parte inferior de um modelo do brinquedo para gatos é sólida e semiesférica e tem 5 cm de medida de comprimento de raio. Para fabricar 100 unidades de joão-teimoso para gatos, são necessárias 100 partes inferiores semiesféricas. De quantos cm³ de plástico a empresa necessitará para produzir essas partes inferiores? (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.)

Aproximadamente, 26 167 cm³.

15. $288\pi = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow R^3 = 216 \Rightarrow R = 6$, então, $A = \frac{4\pi \cdot 6^2}{24} + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 6^2}{2} = 6\pi + 36\pi = 42\pi$; logo, $A = 42\pi$ cm². Alternativa **d**.

14. **(UEG-GO)** Suponha que haja laranjas no formato de uma esfera com 6 cm de diâmetro e que a quantidade de suco que se obtém ao espremer cada laranja é $\frac{2}{3}$ de seu volume, sendo o volume dado em litros. Nessas condições, se quiser obter 1 litro de suco de laranja, deve-se espremer no mínimo:

Use $\pi \simeq 3{,}14$. Alternativa **b**.

a) 13 laranjas.
b) 14 laranjas.
c) 15 laranjas.
d) 16 laranjas.

15. **(IFMT)** Uma bola esférica é composta [de] 24 faixas iguais, e cada faixa tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.



Reprodução/IFMT, 2019.

Cunha esférica.

Sabendo-se que o volume da bola é 288π cm³, então a área total da [superfície da cunha esférica] é igual a:

a) 24π cm².
b) 30π cm².
c) 36π cm².
d) 42π cm².
e) 48π cm².

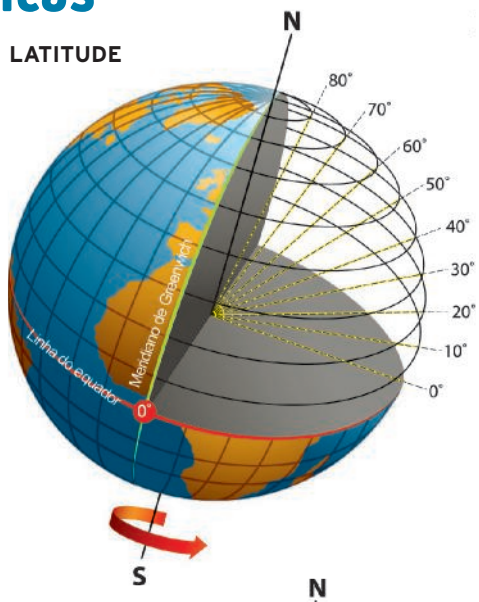
Sistema de coordenadas geográficas

Para que um ponto qualquer da superfície terrestre pudesse ser localizado, foram criadas linhas imaginárias no sentido norte-sul (meridianos) e outras, no sentido leste-oeste (paralelos). Combinando-se um meridiano e um paralelo, é possível determinar a localização exata de um ponto na superfície da Terra.

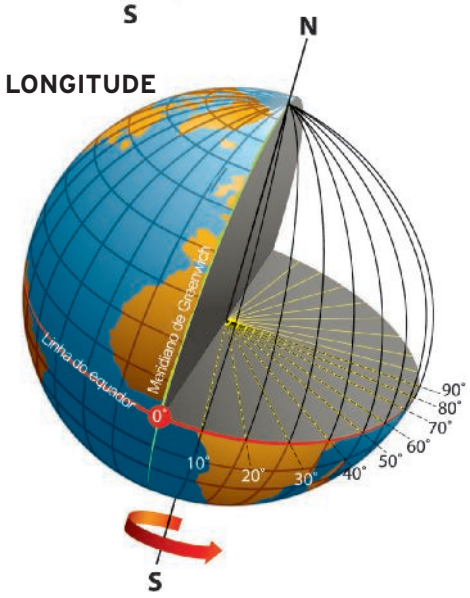
Latitude: é a medida de abertura do ângulo central cujo arco apresenta uma extremidade no ponto da superfície terrestre que se pretende localizar e a outra extremidade na linha do equador. Os valores da latitude variam de 0° (linha do equador) a 90° (polos) e devem indicar o hemisfério sul (S) ou norte (N).

Longitude: é a medida de abertura do ângulo central cujo arco apresenta uma extremidade no ponto que se pretende localizar da superfície terrestre e a outra no meridiano de Greenwich. Os valores da longitude variam de 0° (meridiano de Greenwich) a 180° e devem indicar se estão a oeste (hemisfério ocidental) ou a leste (hemisfério oriental) do meridiano de Greenwich.

As imagens não estão representadas em proporção.



NoPainNoGain/Shutterstock



NoPainNoGain/Shutterstock

Fique atento

A linha do equador tem esse nome porque qualquer ponto que esteja nessa linha está equidistante dos 2 polos. A palavra **equador** tem a mesma etimologia da palavra **equação** e significa "igualar".

Projeções cartográficas

Projeção cilíndrica

Essa projeção é uma representação da superfície esférica da Terra projetada na superfície lateral de um cilindro e posteriormente planificada. As coordenadas geográficas (paralelos e meridianos) são representadas por linhas retas que se encontram em ângulos retos.

Projeção cilíndrica: mapa-múndi



Banco de imagens/Arquivo da editora

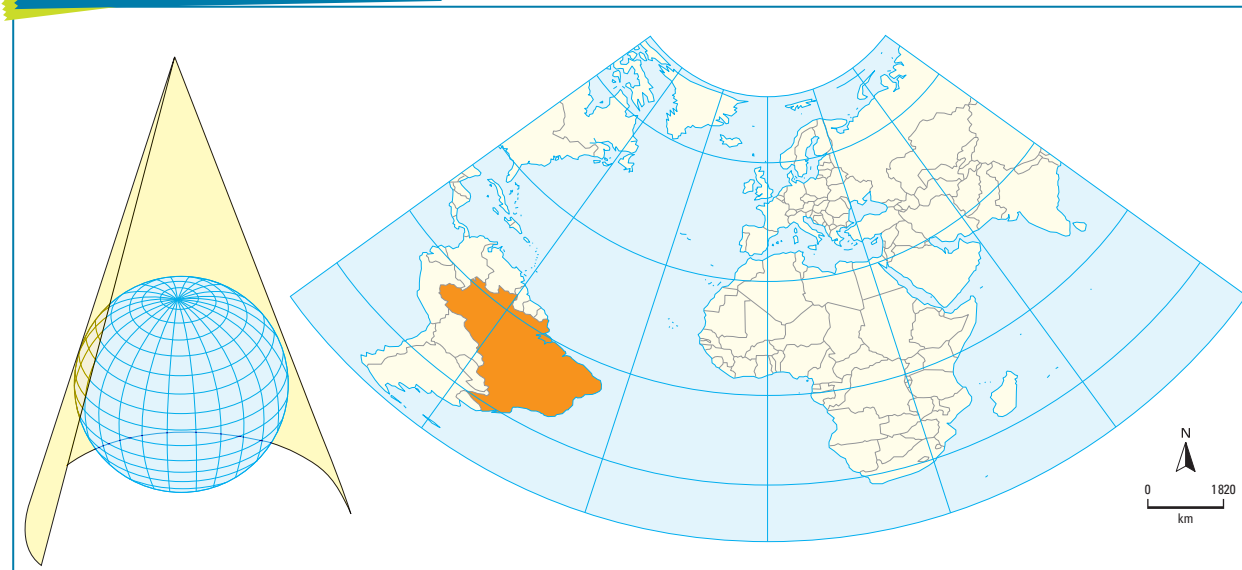
Fonte dos dados: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. p. 26.

Projeção cônica

As imagens não estão representadas em proporção.

Nessa projeção, a superfície terrestre é projetada na superfície lateral de um cone e, em seguida, planificada. Os meridianos são representados por retas que convergem para as regiões polares, e os paralelos formam arcos concêntricos.

Projeção cônica: mapa-múndi



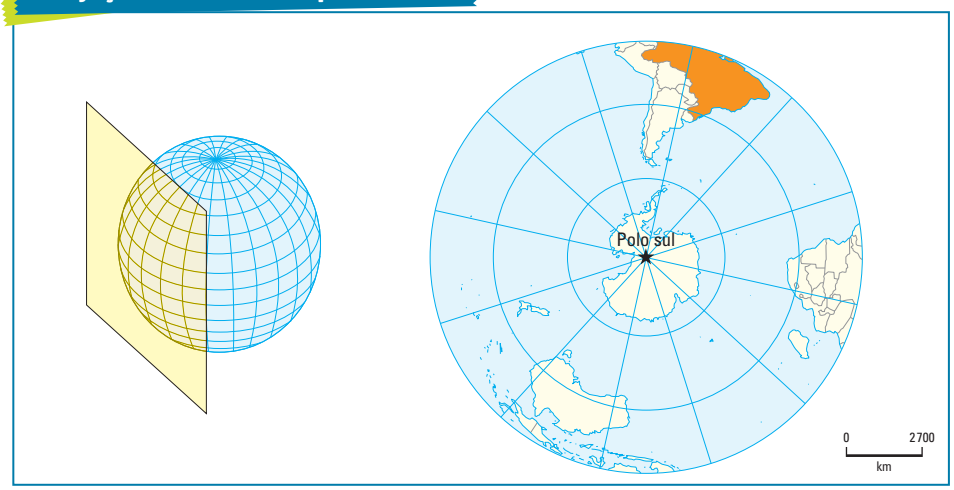
Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. p. 26.

Projeção azimutal

É a projeção sobre uma superfície plana tangente ao globo. Ela é mais utilizada para a representação de regiões menores do globo, como as polares e até mesmo estados, cidades e bairros. Essa representação pode ser classificada em 3 tipos: polar (na qual o plano de projeção é tangente a um dos polos), equatorial (na qual o plano de projeção é tangente a qualquer ponto da linha do equador) ou oblíqua (na qual o plano de projeção é tangente a qualquer outro ponto da superfície da Terra).

Projeção azimutal: mapa-múndi



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. p. 26.

Fique atento

Um plano é tangente à superfície esférica se tem apenas um ponto em comum com ela.

As imagens não estão representadas em proporção.

Projeção de Robinson

Foi elaborada em 1961 pelo geógrafo estadunidense Arthur H. Robinson (1915-2004). Nesse tipo de projeção, os paralelos são representados por linhas retas e os meridianos, por arcos. É a projeção mais usada atualmente para representar todo o globo terrestre, pois apresenta redução das deformações das regiões, das formas e dos ângulos.

Projeção de Robinson: mapa-múndi



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. p. 29.

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

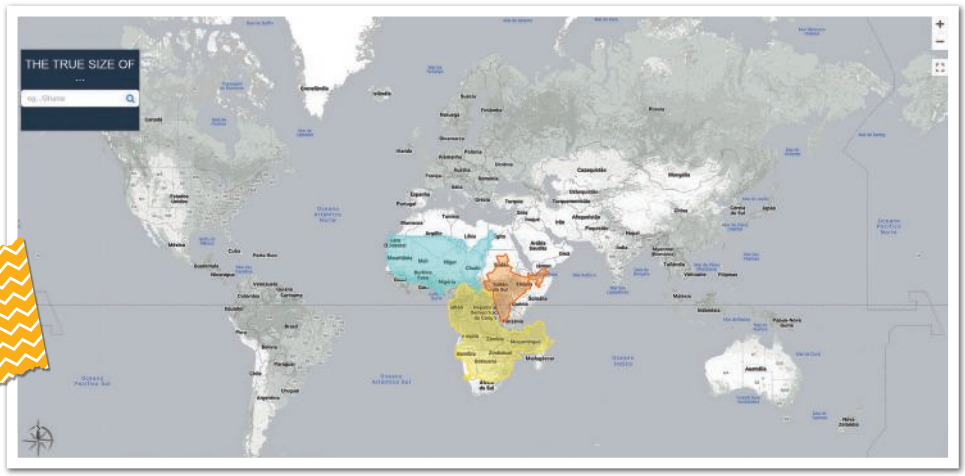
Investigando deformações em uma projeção cartográfica

As imagens não estão representadas em proporção.

A maioria dos mapas com que temos contato apresenta uma grande distorção. Isso ocorre, como relatado anteriormente, por ser impossível realizar a planificação de uma superfície esférica em um plano. A projeção de Mercator (um tipo de projeção cilíndrica) pode fazer com que países que apresentam no globo terrestre pequenas medidas de área pareçam ser maiores quando planificados. As deformações ocorrem não somente nas medidas da área desses países, mas também nas medidas de abertura dos ângulos.

Faremos uso do *site* The True Size ("O verdadeiro tamanho", em tradução livre) disponível em: https://tedit.net/v474jo (acesso em: 18 jul. 2024), em que podemos comparar a medida da área de diversos países representados na projeção de Mercator.

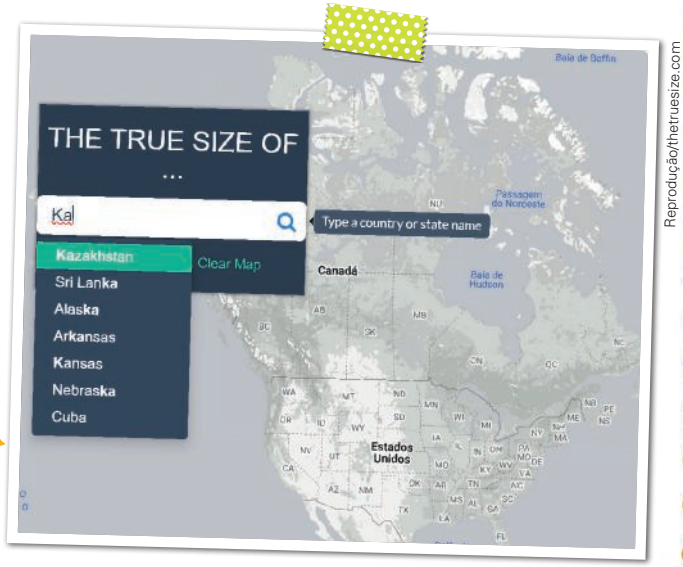
Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.



Reprodução/thetruesize.com

Tela inicial do *site* The True Size.

Para explorar essa ferramenta, é necessário acessar o endereço citado, em um navegador de sua escolha. No campo de busca, no canto superior esquerdo, digite o nome do território (ou parte dele) cuja medida de área real você quer comparar com a medida de área representada. Para isso, utilize a grafia do nome desse território na língua inglesa e clique nele assim que a ferramenta exibi-lo.

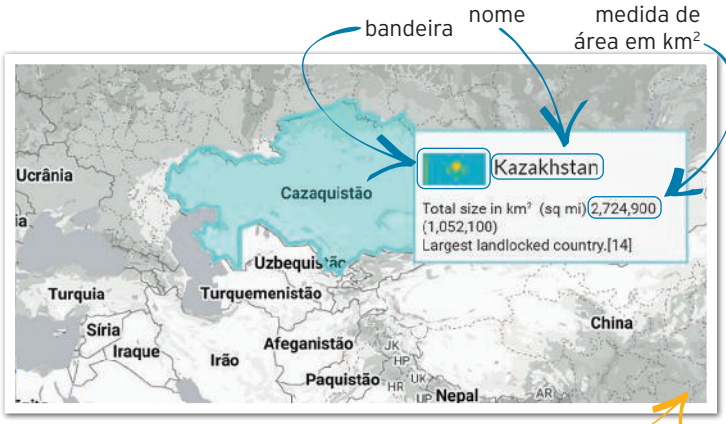


Reprodução/thetruesize.com

Tela do *site* The True Size mostrando o campo de busca.

Com uma região selecionada, é possível:

- clicar e arrastá-la por toda a superfície terrestre, notando em tempo real a deformação;
- girar livremente o território, clicando e girando a rosa dos ventos no canto inferior esquerdo (note que a cor dela será igual à do preenchimento do território que você selecionou);
- exibir algumas informações sobre o território, como a bandeira e a medida de área da superfície.



Reprodução/thetruesize.com

Tela do *site* The True Size com informações do território selecionado.

Vamos comparar a medida de área de alguns países. Para isso, precisaremos fazê-lo sobre um mesmo paralelo (nos passos a seguir, vamos utilizar a linha do equador). Sempre que for iniciar uma comparação, você pode limpar todos os territórios selecionados clicando em "Clear Map", próximo ao campo de busca.

Vamos comparar as medidas de área da Índia e do Cazaquistão.

1º passo: Localize os 2 territórios e, analisando apenas o mapa, identifique qual dos países parece maior. O Cazaquistão parece maior.

2º passo: Utilize as ferramentas disponíveis para selecionar os 2 países e arrastá-los para a linha do equador. Compare novamente os 2 territórios e verifique qual deles tem a maior medida de área.

1. 3 166 414 − 2 724 900 = 441 514. A Índia tem medida de área 441 514 km² maior do que a do Cazaquistão.

1. Utilize uma calculadora ou uma planilha eletrônica e calcule a diferença entre as medidas de área dos territórios selecionados, usando as informações fornecidas pela ferramenta.

Agora vamos comparar as medidas de área do Brasil e da Groenlândia.

3º passo: Localize os 2 territórios e, analisando apenas o mapa, identifique qual deles parece maior. Groenlândia.

4º passo: Utilize as ferramentas disponíveis para selecionar os 2 territórios e arrastá-los para a linha do equador. Compare-os novamente e verifique qual deles apresenta a maior medida de área. Brasil.

5º passo: Acrescente a Rússia nessa comparação. Compare os territórios novamente e verifique qual deles apresenta a maior medida de área. Rússia.

2. Qual dos 3 territórios apresentou a maior deformação da medida de área? E qual apresentou a maior deformação de abertura de ângulos nas fronteiras? A Groenlândia; a Rússia.

3. O que acontece com a representação dos países mais próximos dos polos, quando ocorre a planificação? Sofrem maiores deformações de medida de área e de medida de abertura de ângulo.

4. Repita os 3 últimos passos, comparando as medidas de área de Finlândia, Canadá, China e Argentina. Em seguida, coloque os países em ordem decrescente quanto à medida de área.
Canadá, China, Argentina e Finlândia.

Fique atento

Na língua inglesa, o nome dos países ou territórios que serão comparados na atividade são: Argentina (Argentina), Brazil (Brasil), Canada (Canadá), China (China), Finland (Finlândia), Greenland (Groenlândia), India (Índia), Kazakhstan (Cazaquistão) e Russia (Rússia).

16. Como Rio Branco está 3 fusos a oeste do fuso de Fernando de Noronha, lá são 3 horas a menos do que nessa localidade; logo, serão 5 horas em Rio Branco. Alternativa **c**.

Atividades

Não escreva no livro

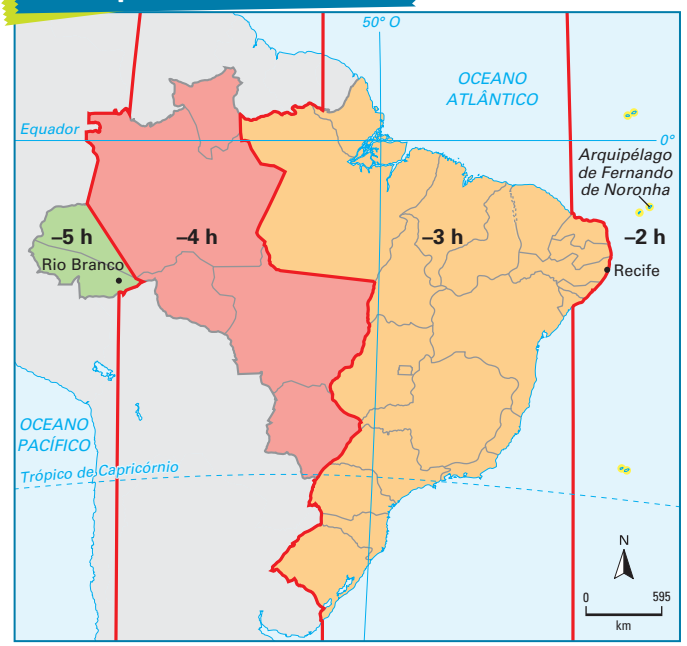
Texto para as atividades **16** a **19**.

Visando à padronização dos horários ao redor do mundo, o globo terrestre foi dividido em 24 fusos esféricos, cada um deles com ângulo com medida de abertura igual a 15°. Assim, a medida de "distância" em graus entre um meridiano e o que o sucede é 15° e corresponde a um fuso horário, ou seja, a 1 hora.

Partindo-se, então, do meridiano de Greenwich, no sentido leste, a cada fuso adianta-se 1 hora, e, no sentido oeste, atrasa-se 1 hora, até uma linha imaginária chamada de linha internacional de mudança de data.

O território brasileiro está dividido entre 4 fusos horários. Por exemplo, Fernando de Noronha, em Pernambuco, não está no mesmo fuso horário de Recife, capital desse estado. É importante ressaltar que, muitas vezes, os fusos horários têm os limites geográficos adaptados de acordo com a configuração política e geográfica de cada região, conforme podemos notar no mapa apresentado.

Brasil político: fuso horário



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. p. 97.

16. Suponha que em Fernando de Noronha sejam 8 horas. Então, em Rio Branco, no Acre, serão:

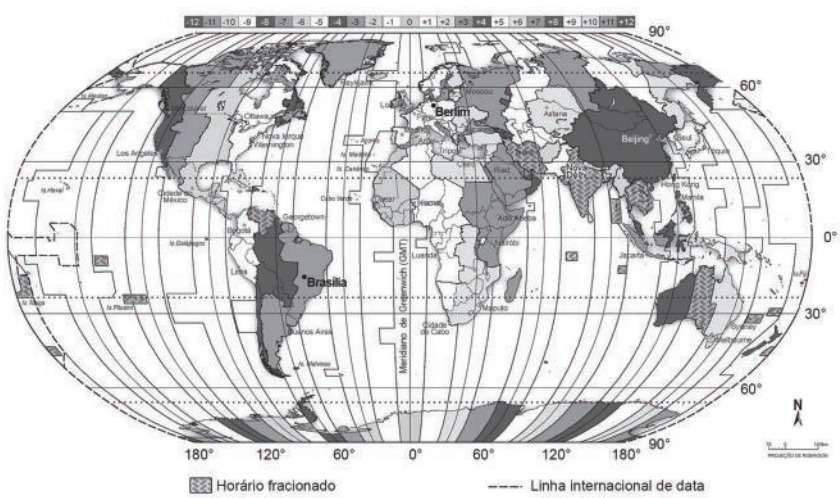
a) 7 horas. **b)** 6 horas. **c)** 5 horas. **d)** 4 horas. **e)** 9 horas.

17. João começa uma viagem às 12 horas do dia 21 de abril, saindo de Manaus, no Amazonas, que tem longitude aproximada de 60° O. O destino de João é Kigali, capital da Ruanda, uma cidade localizada a 30° L. A medida de intervalo de tempo do voo é 11 horas. Qual será o dia e o horário de chegada de João a Kigali? Ele chegará no dia 22 de abril, às 5 horas.

As imagens não estão representadas em proporção.

18. **(Enem)**

Fuso horário civil



Reprodução/Enem, 2019.

Atlas geográfico. Rio de Janeiro. IBGE, 1986. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 16 ago. 2014 (adaptado).

18. Como o Rio de Janeiro está 4 fusos a oeste de Berlim, onde na ocasião vigorava o horário de verão, a diferença entre os fusos é de 5 horas (4 + 1 = 5). Logo, em Berlim, os telespectadores em território alemão assistiram ao apito inicial às 21 horas. Alternativa **e**.

A partida final da Copa do Mundo de 2014 aconteceu no dia 13 de julho, às 16 horas, na cidade do Rio de Janeiro. Considerando o horário de verão em Berlim, de 1 hora, os telespectadores alemães assistiram ao apito inicial do juiz às:

a) 11 horas.
b) 12 horas.
c) 19 horas.
d) 20 horas.
e) 21 horas.

Fique atento

O horário de verão consiste na prática de adiantar os relógios em 1 hora, de maneira a aproveitar melhor a incidência de luminosidade durante determinados períodos do ano.

19. (Vunesp)

No encerramento da temporada regular 2015-2016 da liga americana de basquete, o ídolo do Los Angeles Lakers, Kobe Bryant, despediu-se das quadras numa partida diante do Utah Jazz. O jogo foi realizado na Califórnia, que fica no fuso horário 120° oeste, no dia 13.04.2016 às 19 h 30 [min] (horário local).

(http://sportv.globo.com. Adaptado.)

Ciente de que os EUA utilizavam o horário de verão, a última atuação do atleta foi transmitida ao vivo às: Alternativa **d**.

a) 22 h 30 [min] do dia 13/04/2016 para o estado do Acre.
b) 21 h 30 [min] do dia 13/04/2016 para a capital do Amazonas.
c) 00 h 30 [min] do dia 14/04/2016 para o Distrito Federal.
d) 23 h 30 [min] do dia 13/04/2016 para a cidade de São Paulo.
e) 01 h 30 [min] do dia 14/04/2016 para o arquipélago Fernando de Noronha.

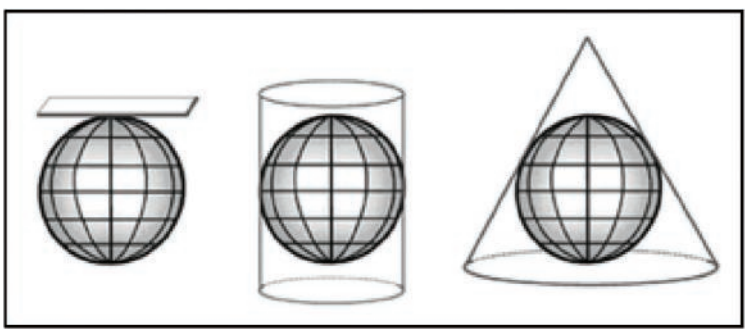
20. A parte central do símbolo da Organização das Nações Unidas (ONU) representa um dos tipos de projeção cartográfica.


abbaskhanpk/Shutterstock

Essa projeção é a: Projeção azimutal plana (centrada no polo Norte). Alternativa **c**.

a) cônica.
b) cilíndrica.
c) azimutal.
d) de Robinson.
e) esférica.

21. (UEG-GO) [Analise] a figura a seguir.


Reprodução/UEG, 2017.

Fonte: <www.geografiaparatodos.com.br/index.prp?pag=cap_3_geoprocessamento_e_mapas>. Acesso em: 17 ago. 2016.

Os tipos de projeções cartográficas representados na figura são, respectivamente:

a) cilíndrica, azimutal e cônica.
b) azimutal, cilíndrica e cônica.
c) cônica, azimutal e cilíndrica.
d) azimutal, cônica e cilíndrica.
e) cilíndrica, cônica e azimutal.

Podemos identificar que as projeções representadas são, respectivamente, da esquerda para a direita, azimutal (projeção no plano), cilíndrica (projeção na superfície lateral de um cilindro) e cônica (projeção na superfície lateral de um cone). Alternativa **b**.

22. I. Verdadeira. O meridiano de Greenwich corresponde à longitude 0°; **II.** Verdadeira. As regiões próximas ao equador (latitude 0°) têm medidas de temperatura mais elevadas; **III.** Verdadeira. O equador tem latitude 0° e os polos, latitude 90°; **IV.** Falsa. Basta considerar o ponto de intersecção do meridiano de Greenwich (longitude = 0°) com a linha do equador (latitude = 0°). Alternativa **a**.

Não escreva no livro

22. No sistema de coordenadas geográficas, no que diz respeito às latitudes, verifique se são falsas (F) ou verdadeiras (V) as seguintes proposições.

I. Uma cidade localizada sobre o meridiano de Greenwich tem longitude igual a 0°.

II. Quanto menores são as latitudes, maiores são as medidas de temperatura.

III. As áreas mais próximas da linha do equador têm latitude menor do que as mais próximas dos polos.

IV. Não existe na Terra um ponto de latitude e longitude nulas.

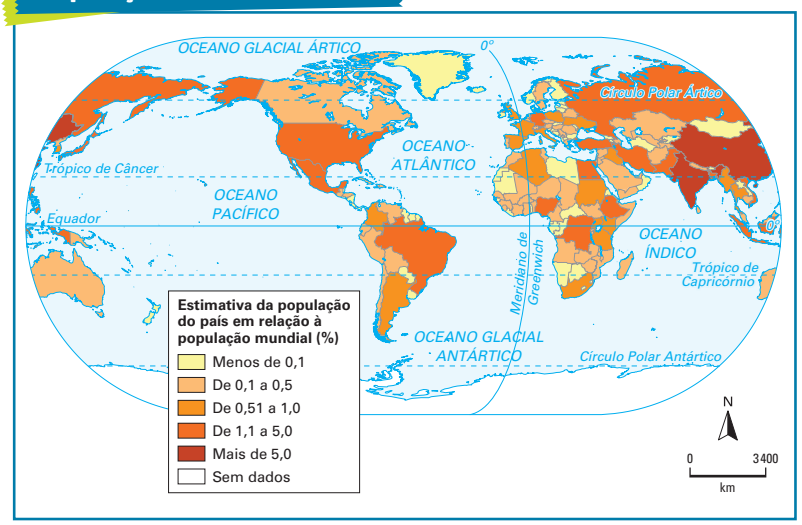
a) V, V, V e F. **b)** V, V, F e F. **c)** F, F, V e F. **d)** F, V, V e V. **e)** F, F, V e V.

Texto para a próxima atividade.

A 9ª edição do *Atlas geográfico escolar*, publicada pelo IBGE em 2024, contou com uma proposta inovadora para o mapa-múndi ao representar, em alguns casos, o Brasil no centro, em vez da representação usual, que coloca a Europa em destaque.

O mapa que traz a estimativa da população de cada país em 2017 é um exemplo dessa inovação e está representado a seguir.

População mundial – 2017



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. p. 69.

Leia o trecho a seguir, publicado no *Jornal da USP* em junho de 2024.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta na atividade **23** pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Brasil aparece como centro do mundo no novo mapa-múndi do IBGE

[...]

A professora [Rúbia Morato] explica que o planeta é esférico, sua superfície não possui centro, portanto, a escolha de qual país será representado no meio e ganhará destaque [é] política: "Do ponto de vista geopolítico, os mapas podem ser utilizados como instrumentos geoestratégicos de consolidação de uma visão de mundo que atenda aos interesses de um povo ou de uma nação. Nesse processo, pode inviabilizar a existência de um outro povo, reduzir o seu território e a sua importância", expõe Rúbia.

Nesse sentido, colocar o Brasil no centro do mundo nos atlas escolares demonstra uma preocupação em ensinar as crianças a pensar o mundo na perspectiva do próprio povo e não se render a visões eurocêntricas e cair na armadilha de achar que o Brasil é um país inferior ao norte global.

[...]

PEROSSI, J. Brasil aparece como centro do mundo no novo mapa-múndi do IBGE. *Jornal da USP*, São Paulo, 7 jun. 2024. Atualidades. Disponível em: https://tedit.net/cq4vsu. Acesso em: 25 jul. 2024.

23. Em duplas, conversem sobre o texto apresentado e respondam aos itens a seguir no caderno.

a) Como as distorções causadas pelas projeções cartográficas que vocês estudaram neste capítulo podem ser utilizadas para reforçar relações de poder?

b) Pesquisem o conceito de etnocartografia e elaborem um parágrafo a respeito da importância da valorização dos conhecimentos de populações historicamente sub-representadas.

b) A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

23. a) Exemplo de resposta: Apesar de a distorção da projeção ser inevitável devido ao formato esférico do planeta, a escolha de quais elementos distorcer pode ser motivada por um interesse político. Representar certos países de maneira que pareçam maiores do que realmente são e outros como menores, por exemplo, pode servir para reforçar relações de poder entre esses países, justificando a dominação de um sobre o outro.

Enem e vestibulares

1. **(Fuvest-SP)** Um deltaedro é um poliedro cujas faces são todas triângulos equiláteros. Se um deltaedro convexo possui 8 vértices, então o número de faces desse deltaedro é:

a) 4. **c)** 8. **e)** 12.

b) 6. **d)** 10.

Note e adote:

Em poliedros convexos, vale a relação de Euler $F - A + V = 2$, em que F é o número de faces, A é o número de arestas e V é o número de vértices do poliedro. Alternativa **e**.

2. **(UFMS)** Um recipiente em forma de paralelepípedo reto-retângulo tem suas dimensões internas dadas por 100 cm × 50 cm × 20 cm. Estando ele completamente vazio, tal recipiente passa a ser abastecido por uma torneira que lhe fornece água com uma vazão constante e igual a 5 litros por minuto.

Sendo assim, a partir do momento em que a torneira for aberta, o recipiente estará cheio em:

a) 45 minutos. **d)** 20 minutos.

b) 40 minutos. **e)** 15 minutos.

c) 30 minutos.

Alternativa **d**.

3. **(Enem)** A foto mostra a construção de uma cisterna destinada ao armazenamento de água. Uma cisterna como essa, na forma de cilindro circular reto com 3 m² de área da base, foi abastecida por um curso-d'água com vazão constante. O seu proprietário registrou a altura do nível da água no interior da cisterna durante o abastecimento em diferentes momentos de um mesmo dia, conforme o quadro.

Horário (h)	Nível da água (m)
6:00	0,5
8:00	1,1
12:00	2,3
15:00	3,2

As imagens não estão representadas em proporção.



Reprodução/Enem, 2023.

Disponível em: www.paraibamix.com. Acesso em: 3 dez. 2012.

Qual foi a vazão, em metro cúbico por hora, do curso-d'água que abasteceu a cisterna?

a) 0,3 **c)** 0,9 **e)** 2,7

b) 0,5 **d)** 1,8

Alternativa **c**.

4. **(Unicamp-SP)** Os cestos produzidos pelos habitantes da comunidade de Urucureá (Pará) têm diversos tamanhos e modelos. O modelo **1** tem a forma de um cubo; e o modelo **2**, a de um cilindro, como mostram as figuras a seguir. Um comprador adquire dois cestos: um primeiro cesto, de modelo **1** e volume de 1728 cm³, e um segundo, de modelo **2** e com 10 cm de diâmetro da base e 11 cm de altura.



Modelo **1**



Modelo **2**

Comvest/Vestibular Unicamp, 2023.

A partir dessas informações (considerando $\pi = 3$), é possível afirmar que o volume do primeiro cesto adquirido pelo comprador é aproximadamente: Alternativa **d**.

a) o volume do segundo cesto.

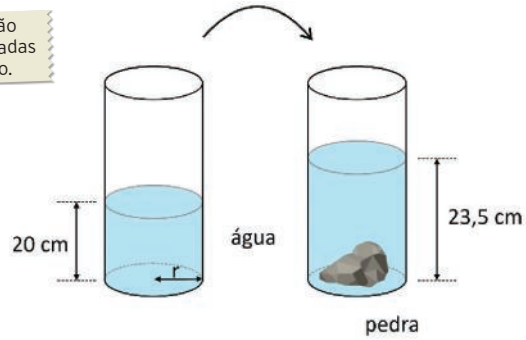
b) um terço do volume do segundo cesto.

c) o triplo do volume do segundo cesto.

d) o dobro do volume do segundo cesto.

5. **(Fuvest-SP)** Para medir o volume de uma pedra com formato irregular, Ana utilizou um recipiente cilíndrico de raio $r = 8$ cm e com água até a altura de 20 cm. Após colocar a pedra no recipiente, a altura da água subiu para 23,5 cm.

As imagens não estão representadas em proporção.



Reprodução/Fuvest-SP, 2023.

O volume da pedra é:

a) 128π cm^3.
b) 224π cm^3.
c) 240π cm^3.
d) 282π cm^3.
e) 320π cm^3.

Alternativa **b**.

6. **(FCMSCSP)** A figura indica as medidas internas do diâmetro da base e da altura de um pote, de forma aproximadamente cilíndrica, que está cheio de arroz.



Reprodução/FCMSCSP, 2022.

Admitindo-se que a densidade do arroz seja de 1,2 g/cm^3 e que a massa de um grão de arroz seja de 0,04 g, o número aproximado de grãos de arroz contidos nesse pote está entre:

[Considere $\pi \simeq 3$.]

a) 60 e 90 mil.
b) 200 e 300 mil.
c) 20 e 50 mil.
d) 120 e 170 mil.
e) 5 e 10 mil.

Alternativa **a**.

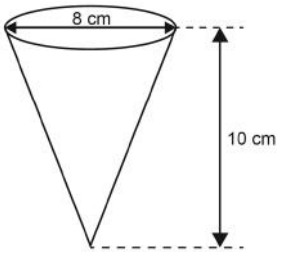
7. **(UFJF/Pism-MG)** A Grande Pirâmide de Gizé, que está localizada no Egito, é considerada uma das maiores e mais pesadas obras já construídas pela humanidade. Uma miniatura realista da pirâmide de Gizé pode ser encontrada em certo antiquário. Esta miniatura é uma pirâmide regular, que possui a aresta de sua base quadrada medindo 24 cm enquanto que sua altura mede 16 cm.

A área total da superfície da miniatura da pirâmide mede:

a) 768 cm^2.
b) 960 cm^2.
c) 1344 cm^2.
d) 1536 cm^2.
e) 2112 cm^2.

Alternativa **d**.

8. **(Enem)** Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.



Reprodução/Enem, 2022.

Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm.

Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a:

a) 1,52.
b) 3,24.
c) 3,60.
d) 6,48.
e) 7,20.

Alternativa **c**.

9. **(Enem)** Uma cozinheira produz docinhos especiais por encomenda. Usando uma receita-base de massa, ela prepara uma porção, com a qual produz 50 docinhos maciços de formato esférico, com 2 cm de diâmetro. Um cliente encomenda 150 desses docinhos, mas pede que cada um tenha formato esférico com 4 cm de diâmetro. A cozinheira pretende preparar o número exato de porções da receita-base de massa necessário para produzir os docinhos dessa encomenda.

Quantas porções da receita-base de massa ela deve preparar para atender esse cliente?

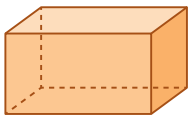
a) 2 **b)** 3 **c)** 6 **d)** 12 **e)** 24

Alternativa **e**.

Conteúdos e aprendizagens

Geometria espacial

No canteiro de obras





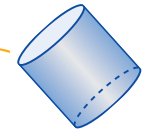
bogubogu/Shutterstock

Tijolos de barro.



Christopher PB/Shutterstock

Funil para abastecimento de argamassa.

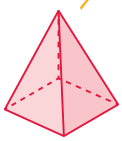




Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Podcast

Transcrição de áudio





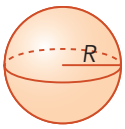
Ronnie Chua/Shutterstock

Estrutura de metal.



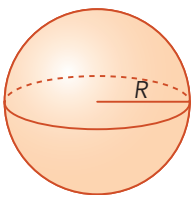
D and D Photo Sudbury/Shutterstock

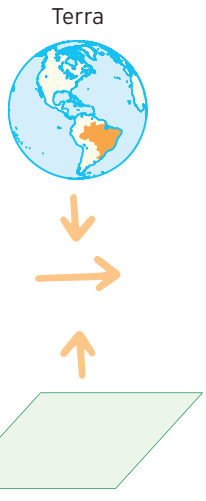
Elemento com gancho para suspender grandes estruturas.

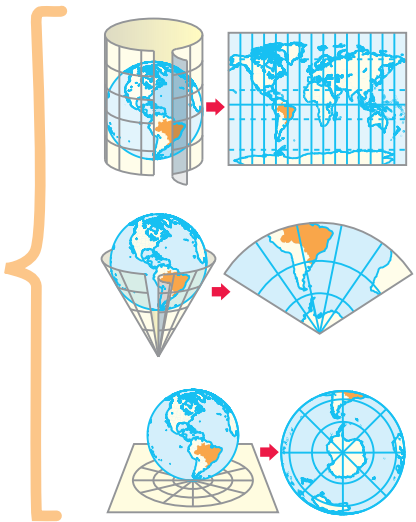


As imagens não estão representadas em proporção.

Nos mapas







Banco de imagens/Arquivo da editora

- Reconheço os sólidos geométricos estudados e os elementos que os compõem?
- Consigo aplicar os conceitos estudados sobre área e volume de sólidos geométricos em situações cotidianas?
- Compreendo que as projeções cartográficas apresentam deformações de ângulos e áreas? Respostas pessoais.

UNIDADE 3

#Trigonometria



Quando vamos à praia em diferentes horários, podemos perceber a variação do nível do mar, que ocorre devido à maré. Esse é um **fenômeno periódico** de elevação e diminuição do nível do mar causado pelas forças de atração exercidas pela Lua e pelo Sol sobre a Terra.

O surfe, por exemplo, é uma prática esportiva que depende do nível do mar e de outros fatores. Quando a maré está baixa (também chamada de maré seca), a camada de água é menor e as ondulações têm mais contato com o fundo do mar, possibilitando ondas com melhores formações. Quando a maré está alta (também chamada de maré cheia), a camada de água é maior e os surfistas afirmam que a onda está "gorda" e não está tão boa para surfar.

Em 2020, a surfista brasileira Maya Gabeira bateu o próprio recorde mundial ao surfar uma onda de 22,4 metros, a maior onda já surfada por uma mulher até aquele momento.
Foto de 2021, na Praia do Norte, em Portugal.



Octavio Passos/Getty Images

- O que você entende por fenômeno periódico?
- Quais fatores influenciam o movimento das marés? Se necessário, faça uma pesquisa para responder a essa pergunta.

• Exemplo de resposta: É um fenômeno que se repete sempre após o mesmo intervalo de tempo.
• Exemplo de resposta: Rotação da Terra em torno do próprio eixo, translação da Terra em torno do Sol e revolução da Lua em torno da Terra.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

CAPÍTULO 1

Semelhança de polígonos

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação-problema

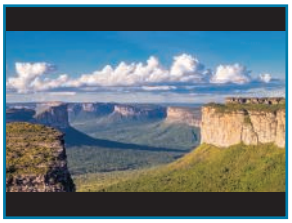
Proporções de tela

a) Exemplo de resposta: As medidas de largura e de altura, por exemplo, são proporcionais, ou seja, se a medida de largura dobrar, então a medida de altura também deve dobrar para que as imagens continuem proporcionais.

b) Para ajustar a imagem na tela, é preciso haver cortes nas extremidades da imagem ou então haverá distorção, deixando-a esticada ou encolhida. A proporção na imagem não é mantida.

As imagens não estão representadas em proporção.

tela 4 : 3



John Rincon/Shutterstock

tela 16 : 9



John Rincon/Shutterstock

tela 21 : 9



John Rincon/Shutterstock

Já aconteceu de você assistir a algum filme, seriado ou programa televisivo em que apareciam faixas pretas nas laterais ou nas partes superior e inferior da imagem de um televisor?

Isso acontece devido aos diferentes tipos de formato de vídeo. Televisores mais antigos utilizavam a proporção de tela 4 : 3, que indica que para cada 4 partes iguais na medida de largura, o dispositivo tem 3 partes equivalentes na medida de altura.

1	2	3	4
2			
3			

Banco de imagens/Arquivo da editora

4 : 3

Com o avanço da tecnologia, a indústria passou a fabricar televisores com telas mais largas, utilizando, por exemplo, a proporção 16 : 9, que indica que para cada 16 partes iguais na medida de largura, o dispositivo tem 9 partes equivalentes na medida de altura.

Quando o formato do vídeo não é compatível com o formato do televisor, a imagem será adaptada com as faixas pretas, como indicado nas imagens.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															

Banco de imagens/Arquivo da editora

16 : 9

Perceba que não há distorção na imagem da tela e que todas têm tamanho diferente, porém mesmo formato. Logo, podemos dizer que as imagens da tela são semelhantes.

a) Quando falamos que 2 imagens são proporcionais, o que você entende?

b) O que acontece se uma imagem feita na proporção 4 : 3 é transmitida em uma tela 16 : 9 sem a adição das faixas pretas? A proporção na imagem é mantida?

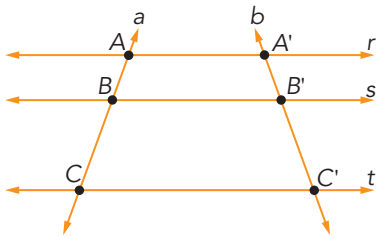
Explorando o teorema de Tales

Esse conteúdo é uma retomada do que foi estudado nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Vamos relembrar o teorema de Tales com o intuito de verificar a proporcionalidade de segmentos de reta obtidos a partir de um feixe de retas paralelas intersectado por retas transversais.

Feixe de retas paralelas

Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas distintas de um plano, paralelas entre si.

As retas r, s e t representadas a seguir constituem um feixe de retas paralelas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Transversal ao feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que intersecta todas as retas do feixe.

As retas a e b são transversais ao feixe de retas.

A e A' são **pontos correspondentes**. Também são correspondentes os pontos B e B', assim como C e C'.

$\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são **segmentos de reta correspondentes**. Também são correspondentes os segmentos de reta $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, assim como $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$.

a) $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$ e $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{1}{2}$ **b)** $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2,5}$ e $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{1}{2,5}$.
c) Resposta esperada: As razões eram iguais.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

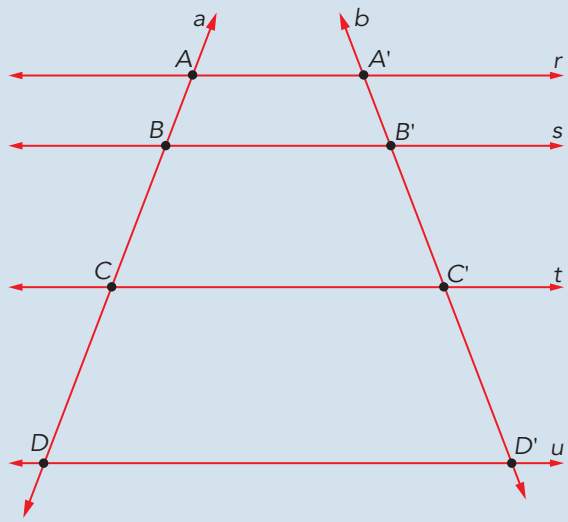
1. Considere o feixe de retas paralelas r, s, t e u, intersectado pelas retas transversais a e b. Com o auxílio de uma régua, meça os segmentos de reta e responda, no caderno, aos itens. Se necessário, utilize uma calculadora.

a) Qual é o valor de $\frac{AB}{BC}$? E de $\frac{A'B'}{B'C'}$?

b) Qual é o valor de $\frac{AB}{CD}$? E de $\frac{A'B'}{C'D'}$?

c) O que você pôde perceber nos itens **a** e **b**?

d) Quais outras razões de segmentos de reta têm a mesma característica que você percebeu no item **c**?
Exemplos de resposta: $\frac{AC}{BD}$ e $\frac{A'C'}{B'D'}$ ou $\frac{BD}{AB}$ e $\frac{B'D'}{A'B'}$.



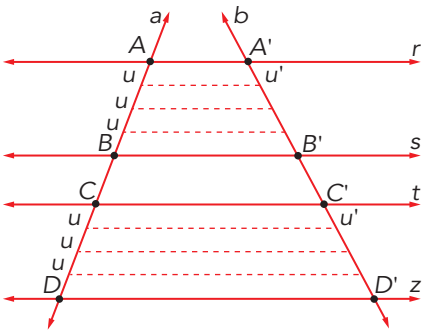
Banco de imagens/Arquivo da editora

Formalizando o teorema de Tales

Se 2 retas transversais intersectam um feixe de retas paralelas, então a razão entre 2 segmentos de reta quaisquer de uma reta transversal é igual à razão entre os segmentos de reta correspondentes da outra reta.

Vamos comprovar esse teorema para o caso em que os segmentos de reta são **comensuráveis**, isto é, o feixe de paralelas divide as transversais em segmentos de reta cujas medidas podem ser expressas por uma quantidade inteira de certa unidade de medida de comprimento.

Considere um feixe de paralelas e 2 retas transversais, como o representado.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos supor que exista um segmento de reta com medida de comprimento u tal que $AB = m \cdot u$ e $CD = n \cdot u$ (com $m, n \in \mathbb{N}$), ou seja, que AB e CD são números racionais.

Estabelecendo a razão $\frac{AB}{CD}$, obtemos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n} \quad (\text{I})$$

Pelos pontos que dividem $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ em m e n partes congruentes ao segmento de reta de medida de comprimento u, representamos retas paralelas ao feixe. Usando alguns resultados envolvendo propriedades do paralelogramo e casos de congruência de triângulos, pode-se provar que os segmentos de reta $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ ficam divididos em m e n partes iguais a u', respectivamente.

Temos:

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{m \cdot u'}{n \cdot u'} = \frac{m}{n} \quad (\text{II})$$

Das relações (I) e (II), concluímos que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Fique atento

O teorema de Tales também é válido para os casos em que os segmentos de reta envolvidos são incomensuráveis.

Podemos também enunciar o teorema de Tales assim:

Um feixe de paralelas determina, em 2 retas transversais quaisquer, segmentos de reta proporcionais.

Em decorrência das propriedades das proporções, valem também as igualdades:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \text{ ou } \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

Podcast Transcrição de áudio

Sobre o assunto

Tales (624 a.C.-558 a.C.) foi um filósofo, matemático e astrônomo natural da cidade de Mileto.

Para saber mais sobre Tales de Mileto, acesse uma pequena biografia sobre ele no *site* UOL, disponível em: https://tedit.net/nn9n5y. Acesso em: 29 jul. 2024.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. O acesso proposto pode ser realizado em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

Figuras semelhantes

No nosso cotidiano, existem diversos exemplos de semelhanças. A ampliação, a redução ou a reprodução de fotografias; imagens na tela do *smartphone*, que podem ser aumentadas ou diminuídas com o movimento dos dedos; a representação gráfica de continentes, países ou cidades por meio de mapas; a representação gráfica de casas e prédios por meio de plantas ou maquetes, etc. são alguns exemplos.

Quando ampliamos, reduzimos ou reproduzimos uma fotografia, as medidas de abertura dos ângulos correspondentes não mudam, e as medidas de comprimento dos lados mantêm a proporcionalidade com as medidas de comprimento dos lados correspondentes da fotografia ampliada, reduzida ou reproduzida. Então, dizemos que a fotografia original e a fotografia obtida são semelhantes, como no exemplo a seguir.

As imagens não estão representadas em proporção.

4 cm

3 cm



Foto **A**

6 cm

4,5 cm

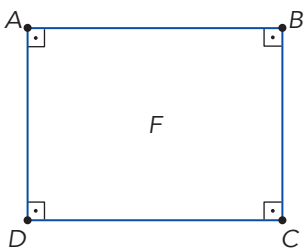


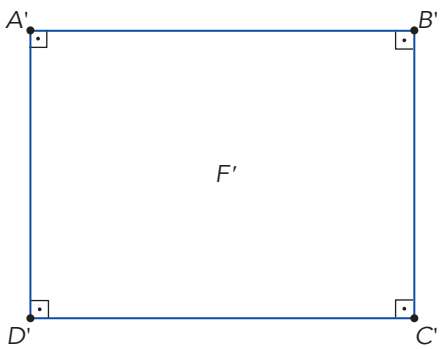
Foto **B**

Fotos: Naeblys/Shutterstock

Em relação às medidas de comprimento dos lados das fotografias, podemos escrever a proporção $\frac{4}{6} = \frac{3}{4{,}5}$, pois $4 \cdot 4{,}5 = 6 \cdot 3$.

Agora, analise as figuras representadas a seguir.





Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

A constante k é chamada de **constante de proporcionalidade** ou de **razão de semelhança** entre as figuras.

Essas são **figuras semelhantes**. A figura F é semelhante à figura F', pois:

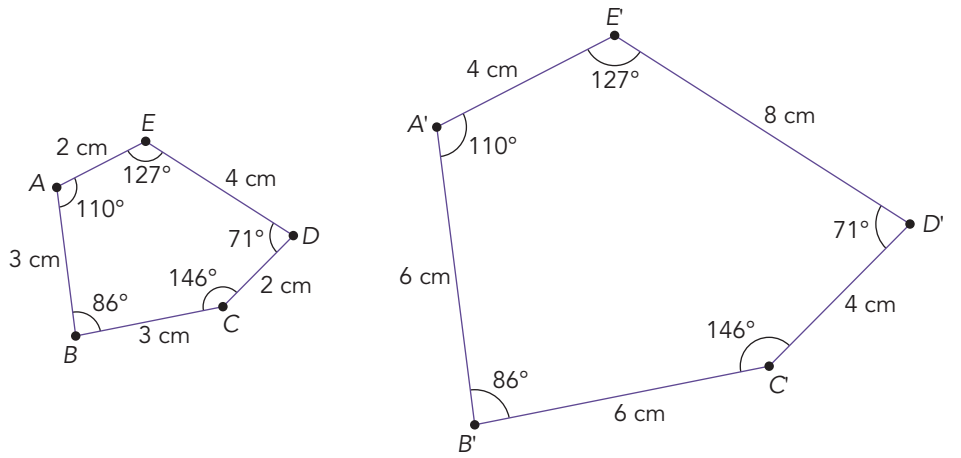
- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = k$;
- os ângulos de F são congruentes aos ângulos de F'.

No exemplo das fotografias, a fração $\frac{4}{6}$, que equivale a $\frac{2}{3}$, é a razão de semelhança entre a foto **A** e a foto **B**.

Polígonos semelhantes

As imagens não estão representadas em proporção.

Considere os pentágonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ representados a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Perceba que os lados correspondentes são proporcionais.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{CD}{C'D'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \frac{EA}{E'A'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{DE}{D'E'} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Além disso, note que os ângulos internos correspondentes têm a mesma medida de abertura, ou seja, podemos dizer que os ângulos são congruentes. Logo, podemos escrever que:

$$\hat{A} \cong \hat{A'}, \hat{B} \cong \hat{B'}, \hat{C} \cong \hat{C'}, \hat{D} \cong \hat{D'} \text{ e } \hat{E} \cong \hat{E'}$$

Como os lados correspondentes dos pentágonos são proporcionais e os ângulos internos correspondentes são congruentes, dizemos que os pentágonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são semelhantes.

$$ABCDE \sim A'B'C'D'E' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A'} \\ \hat{B} \cong \hat{B'} \\ \hat{C} \cong \hat{C'} \\ \hat{D} \cong \hat{D'} \\ \hat{E} \cong \hat{E'} \end{cases} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = k$$

k: razão de semelhança

Portanto, podemos definir:

Dois polígonos são **semelhantes** se, e somente se, os ângulos correspondentes (homólogos) são congruentes e os lados correspondentes (homólogos) têm medidas de comprimento proporcionais.

Perceba que a razão de semelhança dos polígonos corresponde à razão das medidas de comprimento de 2 lados homólogos quaisquer dos polígonos.

Fique atento

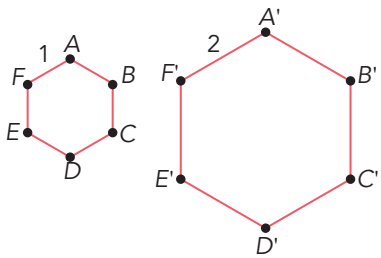
O símbolo ~ significa "semelhante", o símbolo ⇔ significa "se, e somente se" e o símbolo ≅ significa "congruente".

Atividades

Não escreva no livro

1. Analise estes 2 hexágonos regulares e responda aos itens no caderno.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora



a) Os lados correspondentes são proporcionais? Justifique sua resposta.

b) Os ângulos correspondentes são congruentes? Justifique sua resposta.

c) Esses hexágonos regulares são semelhantes?

a) Sim, pois a constante de proporcionalidade ou razão de semelhança é 2.

b) Sim. Como os hexágonos são regulares, os ângulos são congruentes: todos os ângulos internos de ambos os hexágonos medem 120°. Logo, os ângulos correspondentes são congruentes.

Sim. Os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

Reflita

Polígonos regulares com a mesma quantidade de lados são sempre semelhantes. Por quê?

Porque em polígonos regulares os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

Explorando o conceito de semelhança de triângulos

Todas as situações citadas neste tópico envolvem a mesma figura geométrica plana: o triângulo.

Vamos retomar alguns conhecimentos sobre essa figura e aprofundar nosso estudo.

As imagens não estão representadas em proporção.

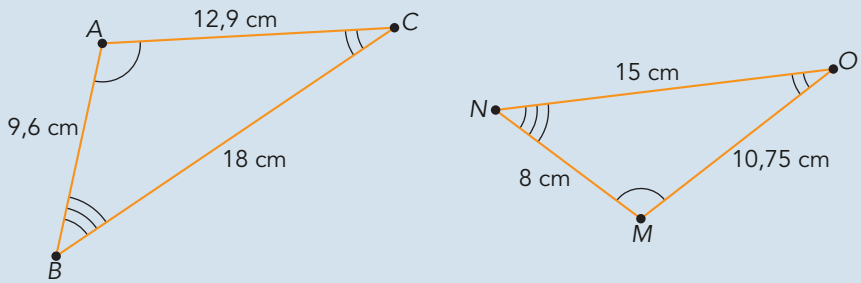
Professor, nesta atividade, os estudantes têm a oportunidade de explorar e retomar os estudos de semelhança de triângulos que fizeram nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Analise as respostas dadas por eles e, se necessário, faça retomadas sobre o assunto. Mais adiante, a formalização desse estudo será retomada.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

- Analise o $\triangle ABC$ e o $\triangle MNO$ representados a seguir, nos quais estão indicados os pares de ângulos congruentes desses triângulos.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora



Fique atento

Lembre-se de que 2 ângulos são congruentes quando têm a mesma medida de abertura.

a) Qual é a razão entre as medidas de comprimento dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$? $\frac{9,6}{8} = 1,2$

b) Qual é a razão entre as medidas de comprimento dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{MO}$? $\frac{8,4}{7} = 1,2$

c) E qual é a razão entre as medidas de comprimento dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{NO}$? $\frac{18}{15} = 1,2$

d) As razões que você calculou são todas iguais? O que você pode concluir sobre os triângulos *ABC* e *MNO*? Sim. Resposta esperada: Os triângulos são semelhantes.

Formalizando o conceito de semelhança de triângulos

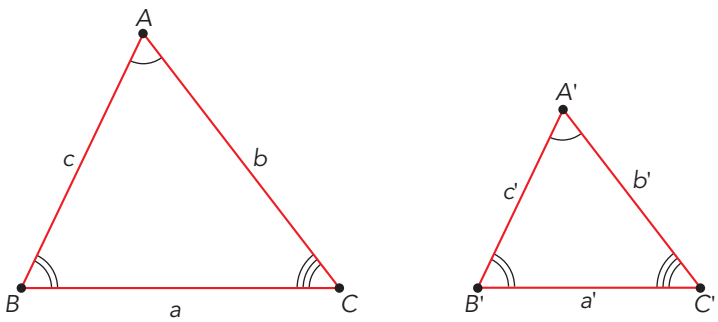
Os triângulos *ABC* e *MNO* apresentados no *Explore para descobrir* são semelhantes. Acompanhe a definição de semelhança de triângulos, análoga à definição de semelhança de polígonos.

Dois triângulos são **semelhantes** se, e somente se, os ângulos correspondentes (homólogos) são congruentes e os lados correspondentes (homólogos) têm medidas de comprimento proporcionais.

Analise os triângulos *ABC* e *A'B'C'* representados a seguir.

No triângulo *ABC*, *a* é a medida de comprimento do lado $\overline{BC}$, *b* é a medida de comprimento do lado $\overline{AC}$ e *c* é a medida de comprimento do lado $\overline{AB}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Esses triângulos são semelhantes, pois satisfazem todas as condições da definição.

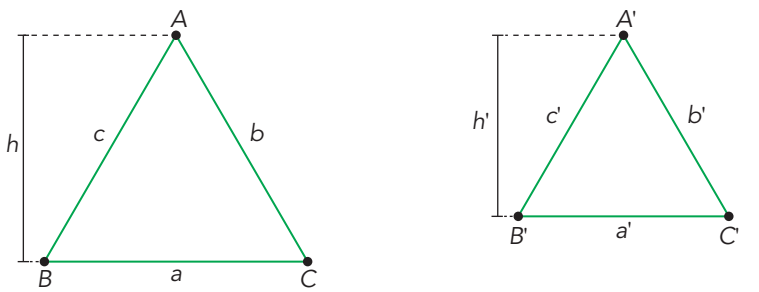
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} \cong \widehat{A'} \\ \widehat{B} \cong \widehat{B'} \\ \widehat{C} \cong \widehat{C'} \end{cases} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

k: razão de semelhança

Todo triângulo é um polígono, assim, a razão de semelhança dos triângulos também corresponde à razão das medidas de comprimento de 2 lados homólogos quaisquer dos triângulos.

Se 2 triângulos são semelhantes com razão de semelhança *k*, então quaisquer outros elementos lineares homólogos desses triângulos também têm medidas de comprimento proporcionais com razão *k*.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h}{h'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = k$$

Professor, ressalte aos estudantes que os cálculos $a + b + c$ e $a' + b' + c'$ correspondem à medida de perímetro de cada triângulo.

Não escreva no livro

Reflita

Qual é a razão de semelhança dos triângulos *ABC* e *MNO* do *Explore para descobrir*? $k = 1{,}2$

Fique atento

Quando a razão de semelhança de 2 triângulos é $k = 1$, dizemos que, além de semelhantes, eles também são **congruentes**. Nesse caso, além dos 3 ângulos correspondentes (homólogos) serem congruentes, os 3 lados correspondentes (homólogos) também são congruentes.

Professor, se necessário, retome com os estudantes a congruência de triângulos, que foi estudada nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Para saber se 2 triângulos são semelhantes, não precisamos verificar sempre os 3 pares de ângulos homólogos e os 3 pares de lados homólogos. Podemos verificar apenas alguns dos elementos, escolhidos convenientemente, conforme os **casos de semelhança de triângulos**.

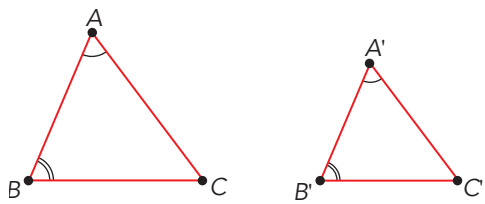
Fique atento

Você já estudou os casos de semelhança de triângulos nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Se preciso, relembre-os e pesquise a demonstração de cada um deles.

Professor, as demonstrações dos casos de semelhança encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

1º caso: AA (ângulo, ângulo)

Se 2 triângulos têm 2 ângulos homólogos respectivamente congruentes, então eles são semelhantes.

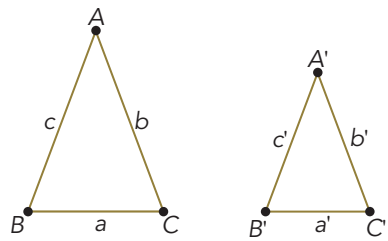


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A} \cong \widehat{A'} \\ \widehat{B} \cong \widehat{B'}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

2º caso: LLL (lado, lado, lado)

Se 2 triângulos têm os 3 lados homólogos com medidas de comprimento proporcionais, então eles são semelhantes.

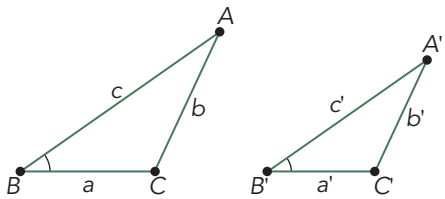


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

3º caso: LAL (lado, ângulo, lado)

Se 2 triângulos têm 2 lados homólogos com medidas de comprimento proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses pares de lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes.



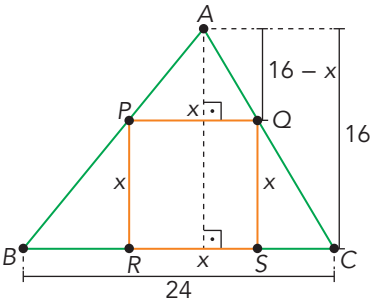
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{B} \cong \widehat{B'} \\ \dfrac{c}{c'} = \dfrac{a}{a'}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

3. Em um triângulo isósceles, os ângulos internos da base são congruentes; assim: $\hat{B} \cong \hat{C}$ e $\hat{E} \cong \hat{F}$. Mas, como $\hat{B} \cong \hat{E}$, temos também que $\hat{C} \cong \hat{F}$. Logo, pelo caso AA de semelhança de triângulos, os triângulos *ABC* e *DEF* são semelhantes.

Atividades resolvidas

1. Analise a representação de um quadrado *PQSR* inscrito em um triângulo *ABC*. Sendo $BC = 24$ cm e a medida de comprimento da altura relativa a essa base igual a 16 cm, calcule a medida de comprimento do lado desse quadrado.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução

No quadrado *PQSR*, o lado $\overline{PQ}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$ do $\triangle ABC$. Se representarmos uma reta *r* coincidente ao lado $\overline{PQ}$, uma reta *s* coincidente ao lado $\overline{BC}$ e uma reta *t* coincidente ao lado $\overline{AB}$, teremos 2 retas paralelas intersectadas por uma transversal e, portanto, $C\hat{B}A \cong Q\hat{P}A$. Com isso, pelo caso AA, temos que o $\triangle APQ$ é semelhante ao $\triangle ABC$, pois $B\hat{A}C \cong P\hat{A}Q$ e $C\hat{B}A \cong Q\hat{P}A$. Assim:

$$\frac{x}{24} = \frac{16 - x}{16} \Rightarrow x = \frac{48}{5} \Rightarrow x = 9{,}6$$

Logo, a medida de comprimento do lado do quadrado é 9,6 cm.

Atividades

Não escreva no livro

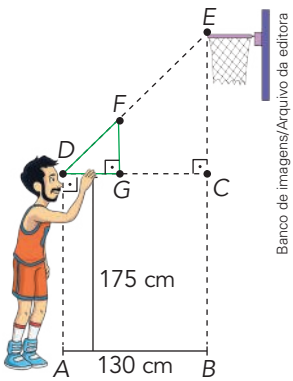
2. Junte-se a 3 colegas e pesquisem o método que Tales de Mileto supostamente utilizou, de acordo com o historiador e filósofo grego Plutarco (c. século I), para calcular a medida de altura de uma pirâmide utilizando a sombra que ela projeta.

O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

3. Considere os triângulos isósceles *ABC* e *DEF*, de bases $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, tal que $\hat{B} \cong \hat{E}$. Com um colega, verifiquem que esses triângulos são semelhantes.

4. A semelhança de triângulos pode ser usada para determinar medidas de comprimento inacessíveis, como a da altura em que se encontra uma cesta de basquete oficial em relação ao piso da quadra.

Analise o esboço da situação e, considerando o uso de um modelo de triângulo retângulo isósceles *DGF*, feito de papel, com o lado $\overline{DG}$ paralelo ao chão, determine a medida de altura dessa cesta. 305 cm ou 3,05 m.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Lembre-se de que um triângulo, para ser isósceles, deve ter 2 lados de mesma medida de comprimento.

5. Junte-se a 3 colegas para realizar esta atividade.

Professor, para realizar esta atividade, os estudantes precisam sair da sala de aula. Organize o melhor momento e espaço da escola para essa experimentação.

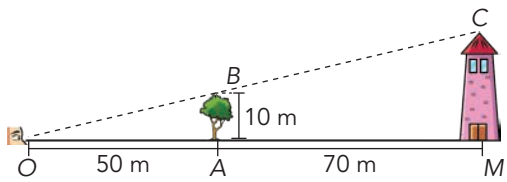
a) Determinem as medidas de alguns segmentos de reta (altura de casas, de edifícios, de postes, de árvores, etc.). Organizem em um quadro o nome do objeto ou construção, as medidas obtidas experimentalmente e a medida calculada. Resposta pessoal.

b) Agora, escolham um dos objetos e elaborem um problema para que outro grupo calcule a medida de altura do objeto usando a semelhança de triângulos. Fiquem atentos a todos os dados que vocês precisam informar no enunciado e, se julgarem necessário, façam no caderno um esboço da situação. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

8. Os triângulos *AHD* e *CDH* são congruentes pelo caso LAL e os triângulos *HIJ* e *CFG* são congruentes pelo caso LLL.

6. A medida de altura de uma árvore é 10 m, a medida de distância entre ela e o observador é 50 m e a medida de distância entre a árvore e uma torre é 70 m. Considerando que o olho do observador, o topo da árvore e o topo da torre estão alinhados, qual é a medida de altura da torre? 24 m

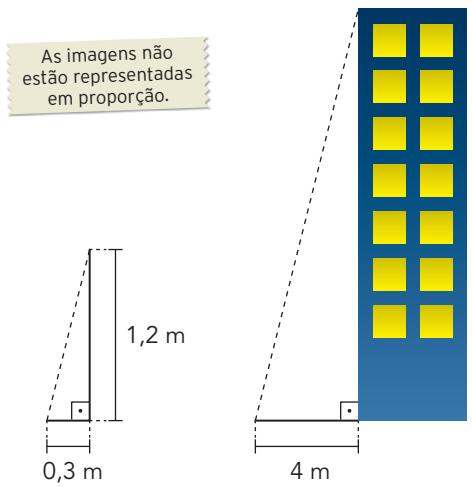
Banco de imagens/Arquivo da editora



7. Uma maneira de calcular medidas de comprimento inacessíveis é usando a sombra de objetos, pois, como os raios solares incidem paralelamente entre si, eles geram sombras com medidas de comprimento proporcionais às dos objetos.

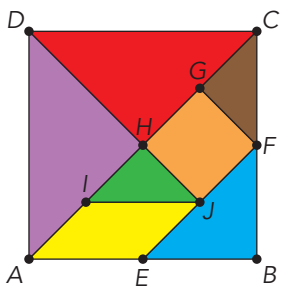
Por exemplo, analise na imagem uma vareta fincada no chão e as sombras geradas pelos raios solares na vareta e no prédio e calcule, no caderno, a medida de altura do prédio. 16 m

Banco de imagens/Arquivo da editora



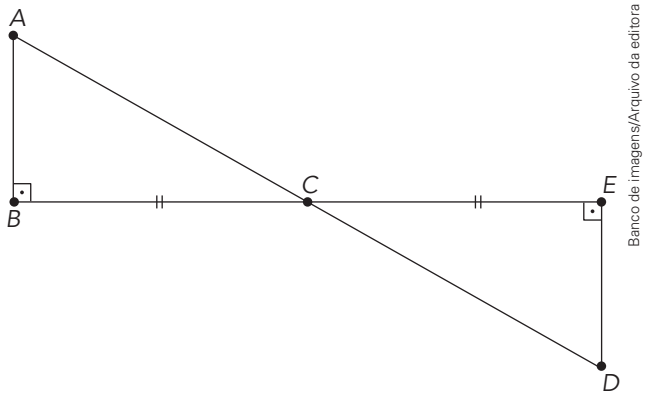
8. O tangram é um quebra-cabeça chinês composto de 7 peças com formatos geométricos: 5 triângulos retângulos isósceles, 1 quadrado *FGHJ* e 1 paralelogramo *AIJE*.

Banco de imagens/Arquivo da editora



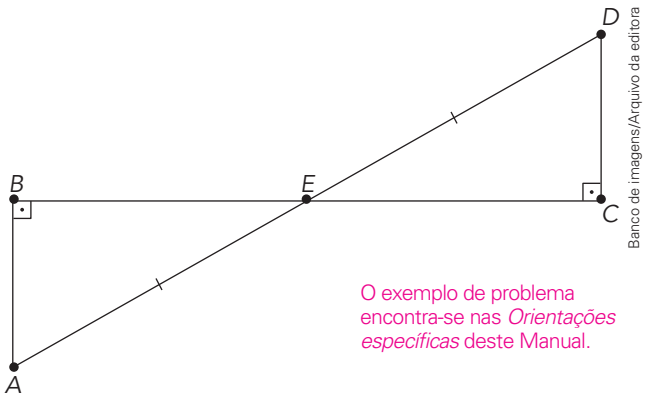
Sabendo que os pontos *E*, *F*, *G*, *I* e *J* são, respectivamente, pontos médios dos lados $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CH}$; $\overline{HA}$ e $\overline{EF}$ e o ponto *H* é ponto médio da diagonal do quadrado *ABCD*, identifique 2 pares de triângulos congruentes e justifique sua resposta no caderno.

9. A casa de Marina (ponto *C*) está localizada na metade do caminho entre a academia (ponto *B*) e o trabalho (ponto *E*) e, também, entre o parque (ponto *A*) e o mercado (ponto *D*). Os pontos *A*, *C* e *D* estão alinhados, assim como os pontos *B*, *C* e *E*; o ângulo $\hat{B}$ e o ângulo $\hat{E}$ são retos. Sabendo que $CD = 10$ km, $AC = 2x - 2$ e $BC = x$, qual é a medida de distância, em km, entre a casa da Marina e o trabalho? 6 km



Banco de imagens/Arquivo da editora

10. No caderno, elabore um problema que possa ser resolvido usando os casos de congruência do triângulo que você estudou. Em seguida, peça a um colega que o resolva enquanto você soluciona o problema que ele criou. Você pode utilizar a figura representada a seguir como referência.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, oriente os colegas videntes a compartilhar a descrição das imagens que criaram. Tal exercício promove a inclusão e explicita a importância da descrição de imagens em diversas mídias para o acesso de todos.

Conexões

Artesanato e semelhança de polígonos

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Artesanato é a produção de artesãos, isto é, o trabalho manual, geralmente realizado com matéria-prima natural, para produzir objetos. O artesanato é fruto dos costumes e cultura de um povo, de maneira que ele retrata a realidade das pessoas que vivem em determinado local por meio da identificação do material utilizado na produção, das estampas e dos formatos criados, e da finalidade do objeto em si.

No Brasil, é possível encontrar uma grande variedade de itens artesanais, sempre confeccionados de acordo com os costumes da população local. Em muitos desses artesanatos, é possível identificar a presença da Geometria nos formatos dos objetos e nos padrões das estampas. A seguir, mostraremos alguns tipos de artesanato confeccionados nas diferentes regiões do Brasil.

Na região Norte

A tradição da costura com o capim dourado começou com os indígenas da etnia Xerente, que transmitiram esse conhecimento ao povoado quilombola Mumbuca. Atualmente, o quilombo Mumbuca, que está localizado na cidade de Mateiros, no Tocantins, é uma comunidade afro-indígena cuja principal fonte de renda é a produção e venda de artesanato confeccionado com capim dourado.

O capim dourado é trançado e usado na produção de cestas, vasos, joias e outros objetos. Formatos triangulares são utilizados em peças vazadas para dar sustentação à estrutura.

As imagens não estão representadas em proporção.



Luciano Queiroz/Shutterstock

Artesanato feito com capim dourado, matéria-prima típica do Cerrado.

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Diversidade Cultural* e *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*. Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Arte, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.



Luis Moura/Arquivo da editora

Na região Nordeste

O bordado de filé, que foi registrado como Patrimônio Cultural e Imaterial de Alagoas, é feito sobre uma rede de fios que lembra uma rede de pesca. A tradição desse artesanato, que tem origem europeia, se estabeleceu no Brasil em comunidades costeiras alagoanas.

Uma característica comum desse artesanato é o uso de cores vibrantes e tropicais. Nos bordados, é possível perceber padrões que lembram figuras geométricas planas, como os losangos formando as pétalas de uma flor.

A renda filé é usada na produção de objetos como redes, roupas e bolsas.



Rita Barreto/Fotoarena

O nome desse bordado vem de *filet*, que significa "rede" em francês.

Na região Centro-Oeste

Na cidade de Serranópolis, no Sul de Goiás, o capim do brejo é utilizado na fabricação de objetos utilitários, balaios e cestos, além de ser usado na cobertura das casas. A região tem abundância dessa matéria-prima, uma vez que essa planta é utilizada para não deixar criar erosão no terreno.



Reprodução/ASAA - Associação de Serranópolis Amigo do Artesão

Artesanato feito com capim do brejo.

As imagens não estão representadas em proporção.



Luis Moura/Arquivo da editora

Na região Sudeste

Utilizando o tear, moradores de Berilo, em Minas Gerais, confeccionam redes de dormir, colchas, bolsas, caminhos de mesa, almofadas, entre outros produtos.

Esses artesãos são os responsáveis por cardar, fiar, tingir e tecer os fios de algodão. Nessa região, é muito comum o uso de uma técnica que sobrepõe os fios para criar desenhos em alto-relevo.



Luciana Whitaker/Pulsar Imagens

Tecelã usando um tear para tecer fios de algodão.

Na região Sul



Zig Koch/Pulsar Imagens

Os ovos pêssanka são um artesanato ucraniano trazido pelos imigrantes no século XIX. No Brasil, diferentemente das peças ucranianas, os artesãos utilizam inspirações como a gralha-azul e o pinheiro araucária.

Moradores de Porto União, cidade localizada em Santa Catarina, utilizam cascas de ovos de codorna, galinha, pato, ganso, emu e ema. A pintura é feita com uma técnica que utiliza tintas e cera de abelha, formando desenhos com significados especiais que só são revelados a partir da queima da chama de uma vela.

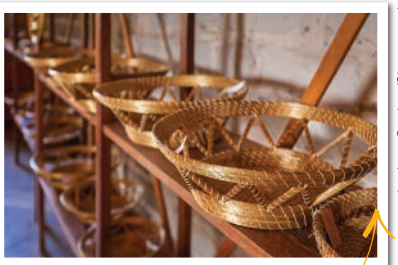
A palavra pêssanka se originou a partir do verbo *pyssaty*, que significa "escrever" em ucraniano.

Fonte dos dados: REDE ARTESOL. Associação Capim Dourado do Povoado de Mumbuca. Disponível em: https://tedit.net/kfs233. REDE ARTESOL. Instituto do Bordado de Filé (Inbordal). Disponível em: https://tedit.net/p7xv18. ASSOCIAÇÃO AMIGOS DO ARMAZÉM DE CULTURA DE SERRANÓPOLIS (Azem). Disponível em: https://tedit.net/vdb8nv. REDE ARTESOL. Associação de Produtores e Artesãs de Roça Grande. Disponível em: https://tedit.net/dyu4zl. REDE ARTESOL. Núcleo de Artesãos de Pêssanka de Porto União. Disponível em: https://tedit.net/z82l0e. Acesso em: 29 jul. 2024.

Conecte com o texto

1. Exemplo de resposta: Porque o triângulo é o único polígono rígido, ou seja, ele não se deforma. Então, ao fazer um cesto com uma camada vazada, essa camada deve ser feita com vários formatos triangulares para garantir a sustentação do cesto.

1. Analise na foto mais um exemplo de artesanato feito com capim dourado. Por que, ao confeccionar um cesto com partes vazadas, como mostrado na foto, os artesãos utilizam formatos triangulares?



Luciano Queiroz/Shutterstock

Cestos feitos com capim dourado.

2. De acordo com a foto do cesto de capim dourado, podemos dizer que as formas triangulares no cesto são semelhantes? Explique. Espera-se que os estudantes percebam que os triângulos podem ser semelhantes pelo caso AA, pois têm pelo menos 2 ângulos congruentes.

3. Pesquise se em sua comunidade há a produção de artesanato relacionado à cultura local e busque saber mais sobre a cadeia de produção desse material. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2

Relações trigonométricas

Não escreva no livro

Situação-problema

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Treliças

a) Essa medida corresponde a $\frac{1}{20}$ ou 0,05 da medida real, pois 6 m = 600 cm e $\frac{30}{600} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

b) Como as medidas de comprimento devem ser proporcionais, a medida de altura no croqui deve ser 3,75 cm, pois $0{,}05 \cdot 75 = 3{,}75$.

Treliças são estruturas utilizadas na construção civil para dar sustentação à obra. Apesar de ser um artifício utilizado há muito tempo, a treliça continua ganhando destaque e relevância, sendo muito usada na construção de lajes, pontes, monumentos, etc. A treliça do tipo tesoura, ilustrada a seguir, é uma treliça formada por uma rede de **triângulos** que, devido à rigidez da estrutura, é usada para suporte de coberturas, como o telhado de casas, pois ela consegue absorver o peso da laje sem sobrecarregar a estrutura do imóvel.

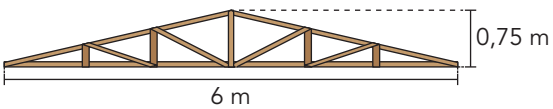


ipeagsy/Shutterstock

A treliça tesoura aparente é muito utilizada na decoração de ambientes.

As medidas de comprimento das vigas de uma tesoura precisam ser calculadas de acordo com cada projeto e com o tipo de telha que será utilizado no telhado. Considere que, em determinado projeto, um arquiteto calculou que a tesoura de um telhado deveria ter 6 m de medida de largura e 0,75 m de medida de altura.

As imagens não estão representadas em proporção.



WYM Design/ Arquivo da editora

Infográfico clicável

Para fazer o **croqui** dessa estrutura, é necessário utilizar conceitos de **semelhança de triângulos** e representar medidas de comprimento proporcionais às reais.

croqui: esboço de desenho, pintura, planta baixa ou projeto arquitetônico.

a) Considere um croqui em que a medida de largura dessa tesoura foi representada com 30 cm. Qual é a relação entre essa medida no desenho e a medida real no telhado? Justifique sua resposta.

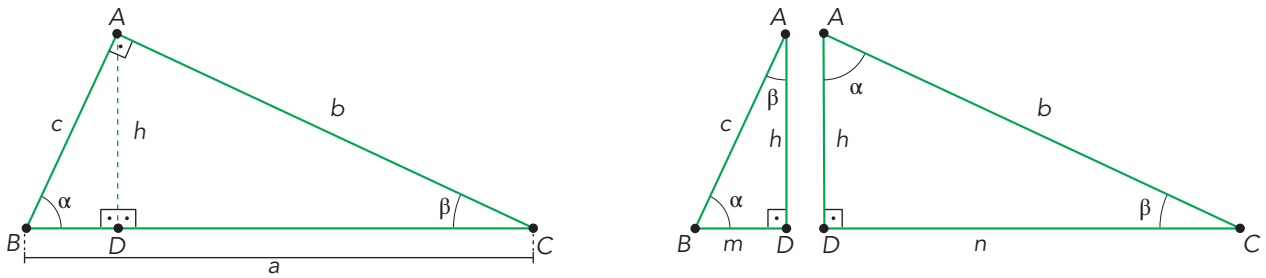
b) Qual deve ser a medida de altura da tesoura nesse croqui? Justifique sua resposta.

Formalizando as relações métricas no triângulo retângulo

Todo triângulo com um ângulo interno reto, ou seja, com medida de abertura igual a 90°, é chamado de **triângulo retângulo**. Nesses triângulos, o lado oposto ao ângulo reto é a **hipotenusa** e os outros 2 lados são chamados de **catetos**.

Utilizando a semelhança de triângulos, podemos obter as relações métricas no triângulo retângulo: fórmulas que relacionam as medidas de comprimento dos lados e das alturas do triângulo retângulo.

A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo *ABC* o divide em 2 triângulos retângulos semelhantes a ele e semelhantes entre si. Acompanhe.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Como os 3 triângulos têm todos os ângulos internos congruentes, eles são semelhantes pelo caso AA. Assim:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$$

Fique atento

Lembre-se de algumas nomenclaturas dos triângulos retângulos, considerando o triângulo *ABC* anterior.

Ao representar a altura $\overline{AD}$, perpendicular à hipotenusa $\overline{BC}$, ficam definidos os seguintes elementos:

- $\overline{AD}$ é a altura relativa à hipotenusa (e tem medida de comprimento h);
- $\overline{BD}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa (e tem medida de comprimento m);
- $\overline{CD}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa (e tem medida de comprimento n).

Da semelhança dos triângulos *ABC* e *DBA*, estabelecemos uma relação métrica:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{BA} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = am$$

Da semelhança dos triângulos *ABC* e *DAC*, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{AC} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow ah = bc \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = an$$

Fique atento

As fórmulas $c^2 = am$ e $b^2 = an$ relacionam as medidas de comprimento dos mesmos elementos nos triângulos *DBA* e *DAC*. Podemos generalizá-las assim: em um triângulo retângulo, o quadrado da medida de comprimento de um cateto é igual ao produto das medidas de comprimento da hipotenusa e da projeção ortogonal desse cateto.

Da semelhança dos triângulos *DBA* e *DAC*, segue que:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow \boxed{h^2 = mn}$$

Adicionando membro a membro as relações $c^2 = am$ e $b^2 = an$, obtemos:

$$b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = \underbrace{a(m + n)}_{a} \Rightarrow \boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

A relação métrica $a^2 = b^2 + c^2$ é conhecida como **teorema de Pitágoras**: em um triângulo retângulo, o quadrado da medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos catetos.

Além disso, temos que, se um triângulo tem as medidas de comprimento dos lados tal que $a^2 = b^2 + c^2$, então ele é retângulo.



Esin Deniz/Shutterstock

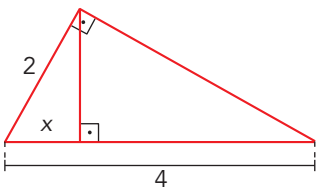
Monumento em homenagem a Pitágoras, na ilha de Samos (Grécia). Foto de 2023.

Vídeo

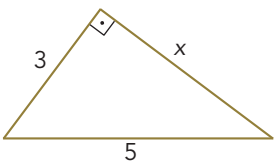
Atividades resolvidas

1. Calcule o valor de x em cada caso.

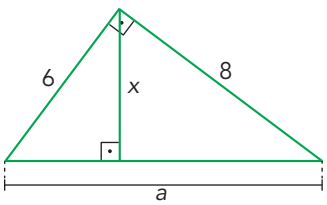
a)



b)



c)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução

a) Usando a relação métrica $c^2 = am$, obtemos:

$$2^2 = 4x \Rightarrow 4 = 4x \Rightarrow x = 1$$

b) Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$3^2 + x^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

(Consideramos apenas o valor positivo, pois a medida de comprimento x não pode ser negativa.)

c) Pelo teorema de Pitágoras, calculamos inicialmente a medida de comprimento a:

$$a^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10 \text{ } (a \text{ também não pode ser negativo})$$

Agora, pela relação métrica $ah = bc$, obtemos: $10x = 6 \cdot 8 \Rightarrow x = 4{,}8$.

2. Uma rodovia cruza uma hidrovia perpendicularmente por meio de uma ponte. Ambas podem ser consideradas retilíneas. No mesmo instante em que um carro cruza a ponte, a uma medida de velocidade constante de 100 km/h, uma barcaça passa sob a ponte a 60 km/h e prossegue a viagem com essa medida de velocidade. Após 15 minutos, qual será a medida de distância aproximada entre o automóvel e a barcaça, supondo que ambos estejam no mesmo plano horizontal?

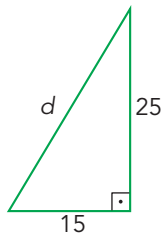
Resolução

A medida de velocidade constante do carro é 100 km/h; logo, em 15 minutos, ele terá percorrido 25 km. Por sua vez, a barcaça está a 60 km/h; logo, ela terá percorrido 15 km nesses 15 minutos.

Então, temos a seguir um esboço da situação, em que d pode ser calculado pelo teorema de Pitágoras:

$d^2 = 15^2 + 25^2 = 225 + 625 = 850 \Rightarrow d = 5\sqrt{34}$ (d não pode ser negativo)

Portanto, usando uma calculadora, determinamos que a medida de distância entre o automóvel e a barcaça será, aproximadamente, 29,15 km.



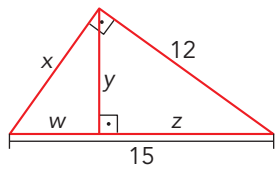
Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

Não escreva no livro

1. No caderno, determine o valor de x, y, w e z neste triângulo retângulo. As medidas estão indicadas em centímetros.

Banco de imagens/Arquivo da editora



$15^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 225 - 144 \Rightarrow x^2 = 81$; logo, $x = 9$ cm.

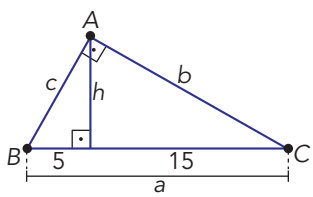
$x^2 = 15w \Rightarrow 9^2 = 15w \Rightarrow w = \frac{81}{15} = \frac{27}{5}$

$12^2 = 15z \Rightarrow z = \frac{144}{15} = \frac{48}{5}$

$15y = 9 \cdot 12 \Rightarrow y = \frac{9 \cdot 12^{4}}{15_{5}} = \frac{36}{5}$

2. Calcule as medidas de comprimento b, c e h indicadas em centímetros no triângulo retângulo representado a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora



$a = 5 + 15 = 20$; $b^2 = 15a \Rightarrow b^2 = 15 \cdot 20 \Rightarrow b^2 = 300$; logo, $b = \sqrt{300}$ cm $= 10\sqrt{3}$ cm.

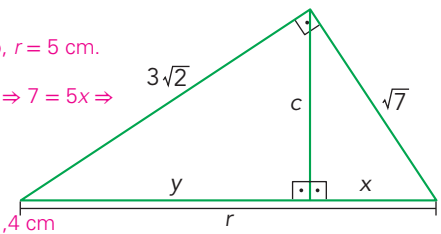
$c^2 = 5a \Rightarrow c^2 = 5 \cdot 20 \Rightarrow c^2 = 100$; logo, $c = 10$ cm.

$ah = bc \Rightarrow 20h = 10\sqrt{3} \cdot 10 \Rightarrow h = \frac{100\sqrt{3}}{20}$; logo, $h = 5\sqrt{3}$ cm

Portanto, $b = 10\sqrt{3}$ cm, $c = 10$ cm e $h = 5\sqrt{3}$ cm.

3. Calcule as medidas de comprimento c, r, x e y indicadas em centímetros no triângulo retângulo ilustrado a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora



$r^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 7 + 18 = 25$; logo, $r = 5$ cm.

$5c = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{14}}{5}$; $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 5x \Rightarrow 7 = 5x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{7}{5} = 1{,}4$

$y + 1{,}4 = 5 \Rightarrow y = 5 - 1{,}4 = 3{,}6$

Portanto, $c = \frac{3\sqrt{14}}{5}$ cm, $r = 5$ cm, $x = 1{,}4$ cm e $y = 3{,}6$ cm.

A corrida é uma das modalidades do atletismo que envolve estratégia, técnica e bom condicionamento físico.



Drazen Zigic/Shutterstock

4. Em um triângulo retângulo, a razão entre as medidas de comprimento das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa é $\frac{9}{16}$. Sabendo que a hipotenusa tem medida de comprimento 10 cm, calcule as medidas de comprimento dos catetos. 6 cm e 8 cm.

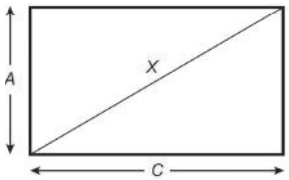
5. Durante um treinamento, 2 atletas partem de uma mesma cidade em direção reta: um em sentido leste e o outro em sentido norte. Determine a medida de distância entre eles depois de 2 horas, sabendo que correm com medida de velocidade constante igual a 20 km/h e 25 km/h, respectivamente.
$10\sqrt{41}$ km ou, aproximadamente, 64 km.

7. Da estrutura octaédrica, com ângulos de ligação de medida de abertura de 90°, podemos estabelecer triângulos retângulos isósceles cujos catetos têm medida de comprimento de 150 pm.
$x^2 = 150^2 + 150^2 \Rightarrow x^2 = 45\,000 \Rightarrow x = 150\sqrt{2} \simeq 211{,}5$ (x não pode ser negativo)
Logo, $x \simeq 211{,}5$ pm.

Não escreva no livro

6. **(Enem)** A unidade de medida utilizada para anunciar o tamanho das telas de televisores no Brasil é a polegada, que corresponde a 2,54 cm. [...] dizer que a tela de uma TV tem x polegadas significa que a diagonal do retângulo que representa sua tela mede x polegadas, conforme ilustração.

Reprodução/Enem, 2019.



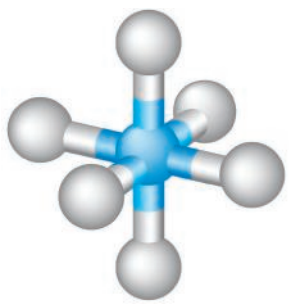
O administrador de um museu recebeu uma TV convencional de 20 polegadas, que tem como razão do comprimento (C) pela altura (A) a proporção 4 : 3, e precisa calcular o comprimento (C) dessa TV a fim de colocá-la em uma estante para exposição.

A tela dessa TV tem medida do comprimento C, em centímetro, igual a: Alternativa **d**.

a) 12,00. **c)** 30,48. **e)** 50,80.
b) 16,00. **d)** 40,64.

7. O hexafluoreto de enxofre é um gás sintético formado por 6 átomos de flúor e 1 átomo de enxofre e é um ótimo isolante elétrico. Também é um gás 5 vezes mais denso do que o ar e, por isso, ao ser inalado, gera o efeito de tornar a voz mais grave (efeito contrário ao do gás hélio, que deixa a voz mais fina). A geometria molecular dessa substância é octaédrica, com o átomo de enxofre localizado no centro da estrutura e ângulos de ligação com medida de abertura de 90°.

R2 Editorial/Arquivo da editora



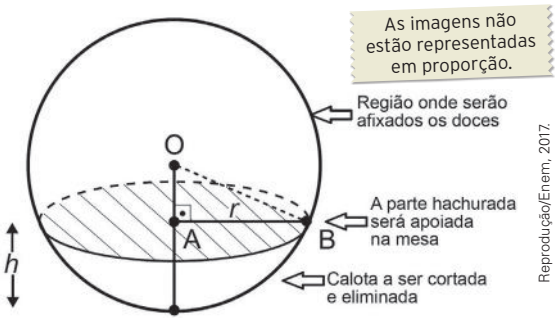
Estrutura idealizada do hexafluoreto de enxofre. Os elementos na imagem não estão representados em proporção. Imagem em cores fantasia.

Supondo que a medida de distância entre o átomo de enxofre e qualquer átomo de flúor seja 150 pm, qual é a medida de distância entre quaisquer 2 átomos de flúor que não sejam opostos ao átomo de enxofre? Use $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$.

Fique atento

O picômetro (pm) é uma unidade de medida de comprimento que equivale à bilionésima parte do milímetro ($1\text{ pm} = 10^{-9}\text{ mm} = 10^{-12}\text{ m}$), muito usada para medir dimensões atômicas.

8. **(Enem)** Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Reprodução/Enem, 2017.

Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a: Alternativa **c**.

a) $5 - \frac{\sqrt{91}}{2}$. **c)** 1. **d)** 4.
b) $10 - \sqrt{91}$. **e)** 5.

9. **(UFGD-MS)** O esquadrejamento ou ato de colocar no esquadro, na construção civil, é a verificação das medidas dos alicerces, paredes ou de qualquer parte em que seja necessário obter um ângulo reto, com o objetivo de garantir a perpendicularidade e o paralelismo da obra, evitando uma edificação defeituosa. Muitos construtores realizam esse procedimento com o uso de marcações e medidas utilizando as relações do triângulo retângulo, na parte da obra em que se deseja verificar o esquadro. Considerando isso e que as sequências das

Professor, na atividade **11**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, oriente os colegas videntes a compartilharem a descrição das imagens que criaram. Tal exercício promove a inclusão e explicita a importância da descrição de imagens em diversas mídias para o acesso de todos. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

medições dadas nas alternativas são todas referentes a lados de um triângulo, [indique no caderno] a alternativa com as medidas que indicam o esquadrejamento correto na construção de um alicerce.

a) 20 cm, 30 cm e 40 cm.

b) 20 cm, 40 cm e 50 cm.

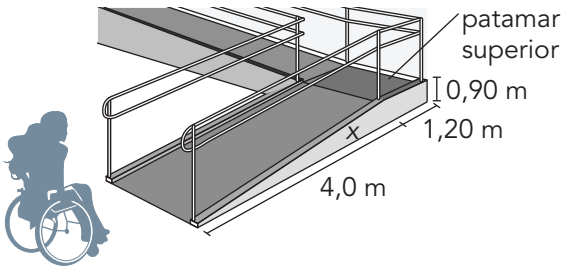
c) 35 cm, 45 cm e 70 cm.

d) 60 cm, 80 cm e 120 cm.

e) 90 cm, 120 cm e 150 cm. Alternativa **e**.

As imagens não estão representadas em proporção.

10. Em relação ao chão, uma rampa de acesso tem medida de comprimento 4,0 m e medida de altura 0,90 m.



Ericson Guilherme Luciano/ Arquivo da editora

Qual é a medida de comprimento dessa rampa, do chão até o início do patamar superior? Se necessário, use uma calculadora. 4,1 m

11. Escolha uma situação real que possa ser representada por um triângulo retângulo e, no caderno, elabore um problema que possa ser resolvido usando uma ou mais relações métricas estudadas. Em seguida, peça a um colega que o resolva enquanto você soluciona o problema que ele criou.

O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

12. Um artista especializado em grafite recebeu uma encomenda para pintar um mural na parede externa de um estabelecimento. Essa parede tem formato retangular, cujo comprimento da base mede 6 m e cuja altura mede 10 m. Para começar, ele precisa pintar uma região triangular limitada por um triângulo retângulo que divide a parede ao meio.

a) Considerando que, para delimitar a hipotenusa do triângulo (que coincide com uma diagonal do retângulo) antes de iniciar a pintura, ele utilizará uma fita adesiva, quantos metros dessa fita serão necessários? Aproximadamente 11,7 m.

b) Se cada rolo de fita custa R$ 5,00 e tem um rendimento de 10 m, qual será o custo mínimo em fita adesiva para essa etapa do projeto? R$ 10,00

c) Cite outros elementos que um artista deve considerar para determinar um valor justo a ser cobrado por um projeto como esse. Resposta pessoal.



Travel-Fr/Shutterstock

O local conhecido como Beco do Batman, na cidade de São Paulo (SP), é considerado uma galeria a céu aberto, por conter grafites expostos em diversos muros ao longo da travessa. Foto de 2024.

Sobre o assunto

Rampas de acesso são recursos necessários para que pessoas usuárias de cadeiras de rodas possam usufruir de todos os espaços.

Além da possibilidade de acesso físico a qualquer ambiente, a inclusão de pessoas com deficiência, que formam um grupo diverso de pessoas, não apenas com limitações de mobilidade, também envolve um tratamento respeitoso e livre de preconceitos por parte de todos.

O preconceito contra pessoas com deficiência também é chamado de capacitismo. Acesse a cartilha elaborada pelo Ministério da Saúde em conjunto com outras instituições para saber mais sobre o combate ao capacitismo.

BRASIL. Ministério da Saúde. Combata o capacitismo. Disponível em: https://tedit.net/p27x7w. Acesso em: 30 jul. 2024.

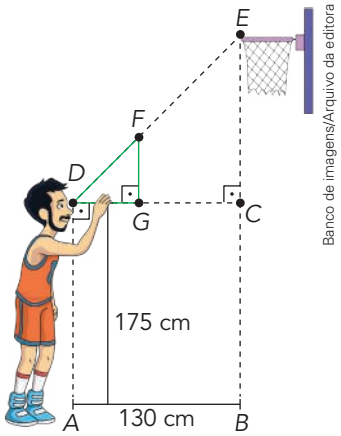
As imagens não estão representadas em proporção.

Explorando as razões trigonométricas no triângulo retângulo

Já estudamos como a proporcionalidade das medidas de comprimento dos lados homólogos de triângulos semelhantes possibilita a obtenção de medidas de comprimento inacessíveis.

No exemplo dado com a cesta de basquete, na atividade **4** da seção *Atividades* do capítulo **1** desta Unidade, usamos um modelo de triângulo retângulo isósceles feito de papel.

A seguir, estudaremos que é possível usar qualquer triângulo retângulo para determinar a medida de altura da cesta sem precisar construir um modelo de papel. Para isso, basta saber a medida de abertura de um dos ângulos agudos do triângulo retângulo e, então, usar as **razões trigonométricas** adequadas.

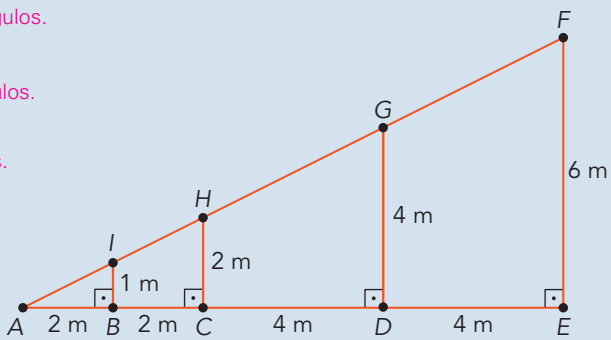


Banco de imagens/Arquivo da editora

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Considere os 4 triângulos retângulos representados a seguir.



WYM Design/Arquivo da editora

2. b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ em todos os triângulos.

c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ em todos os triângulos.

d) $\frac{1}{2}$ em todos os triângulos.

Fique atento

Quando necessário, indique as respostas usando raízes quadradas.

1. Esses triângulos são semelhantes? Justifique sua resposta.
Sim, pois têm um ângulo comum e um ângulo reto; então, pelo caso AA, são semelhantes.

2. Considere as medidas de comprimento dos lados desses triângulos retângulos e faça no caderno o que se pede.

a) Calcule a medida de comprimento da hipotenusa de cada triângulo. $\sqrt{5}$ m, $2\sqrt{5}$ m, $4\sqrt{5}$ m e $6\sqrt{5}$ m.

b) Calcule a razão $\frac{\text{medida de comprimento da altura}}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}}$ em cada triângulo.

c) Calcule a razão $\frac{\text{medida de comprimento da base}}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}}$ em cada triângulo.

d) Calcule a razão $\frac{\text{medida de comprimento da altura}}{\text{medida de comprimento da base}}$ em cada triângulo.

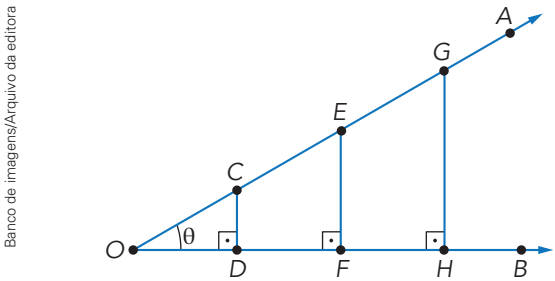
3. O que você percebeu nas razões que calculou?
Exemplo de resposta: Cada razão é igual para todos os 4 triângulos dados.

As razões que você calculou na atividade **2** do *Explore para descobrir* são razões trigonométricas, que definiremos a seguir.

Formalizando algumas razões trigonométricas no triângulo retângulo

Definição de seno, cosseno e tangente usando semelhança de triângulos

Considere um ângulo agudo $A\hat{O}B$ com $m(A\hat{O}B) = \theta$ (ou seja, $0° < \theta < 90°$). A partir dos pontos C, E, G, ... pertencentes à semirreta $\overrightarrow{OA}$, representamos os segmentos de reta $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, ..., perpendiculares à semirreta $\overrightarrow{OB}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Para representar a medida de abertura de um ângulo, é comum o uso de letras minúsculas do alfabeto grego, como θ, α, β, etc.

Pelo caso AA de semelhança de triângulos, temos que os triângulos OCD, OEF, OGH, ... formados são semelhantes. Então, podemos escrever:

$$\frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \ldots \text{ (constante)}$$

Essas razões dependem apenas do ângulo (ou seja, não dependem do triângulo retângulo considerado). Elas são chamadas de **seno do ângulo** $A\hat{O}B$, ou **seno de** θ.

Assim, considerando apenas o triângulo OCD, escrevemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{CD}{OC} = \frac{\text{medida de comprimento do cateto oposto a } A\hat{O}B}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}}, \text{ para } 0° < \theta < 90°.$$

Fique atento

O lado $\overline{CD}$ do triângulo OCD é o cateto oposto ao ângulo interno $A\hat{O}B$, que tem medida de abertura θ. Para simplificar a linguagem, dizemos que $\overline{CD}$ é o **cateto oposto a** θ.

De modo análogo, da semelhança dos demais triângulos, obtemos as razões:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \ldots \text{ (constante)}$$

$$\frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = \ldots \text{ (constante)}$$

Essas razões também dependem apenas do ângulo e são chamadas, respectivamente, de **cosseno de** θ e **tangente de** θ.

Professor, usaremos neste livro a notação tan x. Porém, em questões de vestibulares ou em outras situações, os estudantes podem se deparar com a notação tg x.

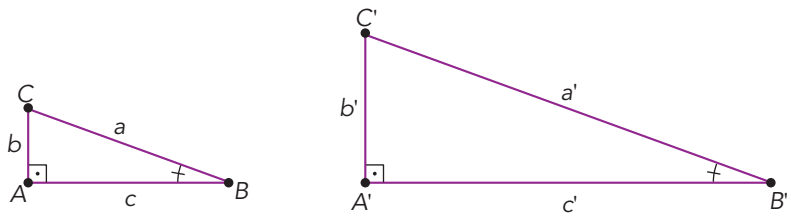
$$\cos\theta = \frac{OD}{OC} = \frac{\text{medida de comprimento do cateto adjacente a } A\hat{O}B}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}}, \text{ para } 0° < \theta < 90°.$$

$$\tan\theta = \frac{CD}{OD} = \frac{\text{medida de comprimento do cateto oposto a } A\hat{O}B}{\text{medida de comprimento do cateto adjacente a } A\hat{O}B}, \text{ para } 0° < \theta < 90°.$$

As razões $\operatorname{sen}\theta = \frac{CD}{OC}$, $\cos\theta = \frac{OD}{OC}$ e $\tan\theta = \frac{CD}{OD}$ são chamadas **razões trigonométricas** em relação ao ângulo agudo considerado.

Como citamos, as razões trigonométricas dependem apenas do ângulo agudo, e não do triângulo retângulo considerado. Vamos provar isso a seguir.

Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$, retângulos em A e A', que têm um par de ângulos agudos congruentes (por exemplo, $\hat{B} \cong \hat{B'}$). Nesse caso, os triângulos são semelhantes pelo caso AA, pois $\hat{B} \cong \hat{B'}$ e $\hat{A} \cong \hat{A'}$ (são ângulos retos).



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Da semelhança desses triângulos, temos:

$$\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \qquad \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \qquad \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

Além disso, das razões trigonométricas no $\triangle ABC$, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \qquad \cos\hat{B} = \frac{c}{a} \qquad \tan\hat{B} = \frac{b}{c}$$

E das razões trigonométricas no $\triangle A'B'C'$, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{B'} = \frac{b'}{a'} \qquad \cos\hat{B'} = \frac{c'}{a'} \qquad \tan\hat{B'} = \frac{b'}{c'}$$

Portanto, $\operatorname{sen}\hat{B} = \operatorname{sen}\hat{B'}$, $\cos\hat{B} = \cos\hat{B'}$ e $\tan\hat{B} = \tan\hat{B'}$. Como $\hat{B} \cong \hat{B'}$, concluímos que o seno, o cosseno e a tangente dizem respeito apenas ao ângulo agudo, e não ao triângulo considerado.

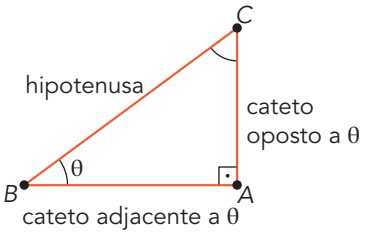
Reflita

Não escreva no livro

Considere um triângulo retângulo no qual um dos ângulos agudos tem medida de abertura θ.

Junto com um colega, justifiquem no caderno cada afirmação a seguir.

- $\operatorname{sen}\theta$ é um número entre 0 e 1.
- $\cos\theta$ é um número entre 0 e 1.
- $\tan\theta$ é um número maior do que 0.



WYM Design/Arquivo da editora

Exemplo de resposta: Todas as razões trigonométricas para ângulos agudos são maiores do que 0, pois são calculadas da razão de valores positivos (medidas de comprimento dos lados do triângulo). Seno e cosseno são menores do que 1 porque a hipotenusa é sempre maior do que o cateto. Já no caso da tangente, podemos ter qualquer valor positivo, pois os catetos podem ter medidas de comprimento iguais ou diferentes.

Relações entre seno, cosseno e tangente

As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um mesmo ângulo se relacionam de várias maneiras, como estudaremos a seguir.

- **Relação fundamental do triângulo retângulo**:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ para } 0° < \alpha < 90°.$$

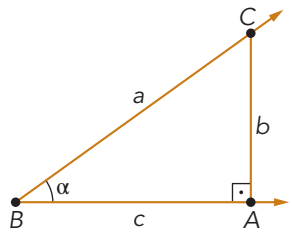
Acompanhe a demonstração.

Considere um ângulo de vértice B e medida de abertura α e um triângulo ABC, retângulo em A.

Vamos verificar o que acontece com a relação $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ usando as definições dessas razões trigonométricas e lembrando que, do teorema de Pitágoras, temos $a^2 = b^2 + c^2$.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Portanto, $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, para $0° < \alpha < 90°$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- **Relação entre tangente, seno e cosseno de um ângulo**:

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}, \text{ para } 0° < \alpha < 90°.$$

Acompanhe a demonstração dessa relação, considerando novamente o triângulo ABC anterior, retângulo em A, com um dos ângulos agudos com medida de abertura α.

Usando as definições dessas razões trigonométricas, obtemos:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \tan \alpha$$

Portanto, $\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$, para $0° < \alpha < 90°$.

Fique atento

Também podemos fazer:

$$\tan \alpha = \frac{b}{c} \left(\text{dividimos ambos os termos da razão } \frac{b}{c} \text{ por } a, \text{ com } a \neq 0\right)$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

Fique atento

Usamos a notação $\operatorname{sen}^2 \alpha$ para indicar $(\operatorname{sen} \alpha)^2$.

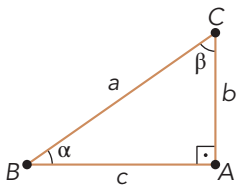
- **Seno, cosseno e tangente em ângulos complementares**: Se 2 ângulos agudos são complementares (a soma da medida de abertura dos ângulos é 90°), então o seno de um ângulo é igual ao cosseno do ângulo complementar e a tangente de um ângulo é igual ao inverso da tangente do ângulo complementar.

$$\text{sen } \alpha = \cos \beta,\ \cos \alpha = \text{sen } \beta \text{ e } \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \text{ para } 0° < \alpha < 90°,$$
$$0° < \beta < 90° \text{ e } \alpha + \beta = 90°.$$

Acompanhe a demonstração para um triângulo *ABC*, retângulo em *A* e com ângulos agudos complementares, com medidas de abertura α e β.

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente nesse triângulo, temos:

- $\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} = \cos \beta$; portanto, $\text{sen } \alpha = \cos \beta$;
- $\cos \alpha = \frac{c}{a} = \text{sen } \beta$; portanto, $\cos \alpha = \text{sen } \beta$;
- $\tan \alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\tan \beta}$; portanto, $\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

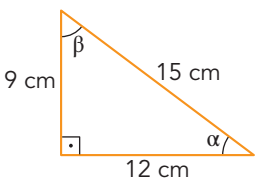
Observações

- Das 2 primeiras relações, surgiu o nome **cosseno**, como "seno do complemento".
- Com essas relações, sempre que conhecermos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo, passaremos a conhecer imediatamente as razões trigonométricas do ângulo complementar. Por exemplo, sabendo que $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$, passamos a saber que $\cos 60° = \frac{1}{2}$, pois 30° e 60° são medidas de abertura de ângulos complementares.

Atividades

Não escreva no livro

13. Examine o triângulo retângulo representado a seguir e calcule o valor de cada razão trigonométrica.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) $\text{sen } \alpha$ $\frac{3}{5}$

b) $\cos \alpha$ $\frac{4}{5}$

c) $\tan \alpha$ $\frac{3}{4}$

d) $\text{sen } \beta$ $\frac{4}{5}$

e) $\cos \beta$ $\frac{3}{5}$

f) $\tan \beta$ $\frac{4}{3}$

14. Os resultados que você obteve na atividade anterior são coerentes com as afirmações do *Reflita* do tópico "Formalizando algumas razões trigonométricas no triângulo retângulo"?

15. Se $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, com $0° < \alpha < 90°$, então qual é o valor de $\text{sen } \alpha$? $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Fique atento

Quando $0° < \alpha < 90°$, o valor de $\text{sen } \alpha$, $\cos \alpha$ e $\tan \alpha$ é positivo.

14. Sim, pois todos os valores de seno e cosseno são números entre 0 e 1, e o valor encontrado para a tangente é um número maior do que 0.

Professor, na atividade **19**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

16. Em um triângulo *EFG*, que é retângulo em *E*, temos $\operatorname{sen}\hat{F} = \frac{5}{6}$, $\cos\hat{F} = \frac{\sqrt{11}}{6}$ e $\tan\hat{F} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$. Junte-se a um colega para resolver os itens a seguir. Se necessário, representem no caderno o triângulo *EFG*.

a) Calculem $\operatorname{sen}\hat{G}$, $\cos\hat{G}$ e $\tan\hat{G}$.

b) Se a hipotenusa do $\triangle EFG$ tem medida de comprimento 30 cm, então qual é a medida de comprimento de cada cateto?

c) Calculem o valor de cada expressão.

- $\left(\operatorname{sen}\hat{F}\right)^2 + \left(\cos\hat{F}\right)^2$ 1
- $\frac{\operatorname{sen}\hat{F}}{\cos\hat{F}}$ $\frac{5\sqrt{11}}{11}$
- $\operatorname{sen}^2\hat{G} + \cos^2\hat{G}$ 1
- $\frac{\operatorname{sen}\hat{G}}{\cos\hat{G}}$ $\frac{\sqrt{11}}{5}$

a) $\operatorname{sen}\hat{G} = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\cos\hat{G} = \frac{5}{6}$ e $\tan\hat{G} = \frac{\sqrt{11}}{5}$.

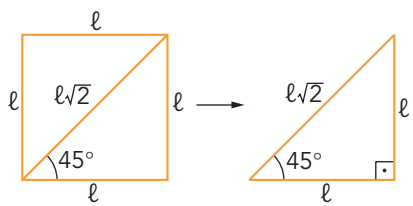
b) $EG = 25$ cm e $EF = 5\sqrt{11}$ cm.

17. Sabendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, com $0° < \alpha < 90°$, qual é o valor de $\cos\alpha$? $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

18. Qual é o valor de $\tan\alpha$ se $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ e $0° < \alpha < 90°$? $\tan\alpha = \sqrt{15}$

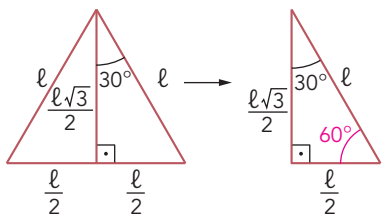
19. Nesta atividade, você e um colega devem construir uma tabela de valores muito importantes.

a) Inicialmente, calculem, no caderno, sen 45°, cos 45° e tan 45° utilizando o triângulo retângulo obtido do quadrado representado a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

b) Calculem sen 30°, cos 30° e tan 30° utilizando o triângulo retângulo obtido do triângulo equilátero representado a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

c) Agora, calculem sen 60°, cos 60° e tan 60° utilizando o mesmo triângulo retângulo do item **b**. Lembrem-se de que 30° e 60° são medidas de abertura de ângulos complementares.

d) Copiem esta tabela no caderno e a completem com os valores que vocês calcularam.

Medida de abertura	30°	45°	60°
sen			
cos			
tan			

e) Copiem novamente a tabela do item **d** no caderno e, utilizando uma calculadora ou uma planilha eletrônica, calculem o valor aproximado de cada razão e o registrem no quadro na forma decimal. Se necessário, façam aproximações para 3 casas decimais.

Fique atento

- Em um triângulo retângulo com ângulos de medidas de abertura 90°, 45° e 45°, os catetos são congruentes.
- Em um triângulo retângulo com ângulos de medidas de abertura 90°, 60° e 30°, a medida de comprimento do cateto menor (oposto ao ângulo de medida de abertura de 30°) é a metade da medida de comprimento da hipotenusa.

20. Novamente com um colega, usem transferidor e régua para representar um triângulo retângulo que tenha um ângulo interno com medida de abertura 40°. Meçam o comprimento dos lados do triângulo que vocês construíram e, em seguida, calculem sen 40°, cos 40° e tan 40°, com aproximação de 3 casas decimais.

$\operatorname{sen} 40° \simeq 0{,}643$, $\cos 40° \simeq 0{,}766$ e $\tan 40° \simeq 0{,}839$.

19. As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual. Professor, no item **c** da atividade **19**, se necessário, mostre aos estudantes o ângulo de medida de abertura 60° no triângulo retângulo do item **b**.

Professor, auxilie os estudantes a verificar se a calculadora científica está aceitando valores em graus e, se necessário, ajuste-a para essa unidade de medida. Em uma calculadora de *smartphone*, se no visor estiver aparecendo a palavra **DEG**, significa que o valor está em graus, mas se estiver aparecendo a palavra **RAD**, significa que o valor está em radianos e, para alterar o valor para graus, basta clicar no botão DEG.

Cálculo do valor das razões trigonométricas de ângulos agudos

Na atividade **19**, você e um colega calcularam os valores do seno, do cosseno e da tangente de ângulos com medidas de abertura 30°, 45° e 60°.

Já a calculadora científica, geralmente, já está programada para indicar o valor em graus, e para alterar é preciso digitar o que se deseja calcular, clicar em **SHIFT** e depois em **DRG**; no visor aparecerá a letra **r** sobrescrita ao que foi digitado, por exemplo, sin 30^r significa que será calculado o seno de 30° em radianos.

Razões trigonométricas

Medida de abertura	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

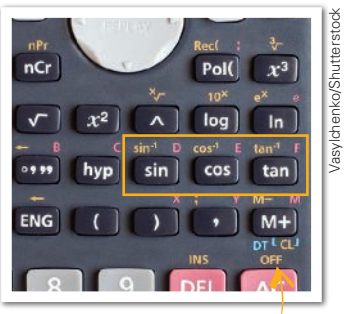
Fique atento

Ângulos com essas medidas de abertura são comumente chamados de **ângulos notáveis**, ou seja, ângulos que merecem atenção especial.

Perceba, nessa tabela, que a sequência de valores da coluna do seno aparece invertida na coluna do cosseno. Isso ocorre porque 30° e 60° são medidas de abertura de ângulos complementares, e 45° é complementar de si mesmo. Analise também como os valores da coluna da tangente equivalem à razão dos valores do seno e do cosseno, pois $\tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, para $0° < \alpha < 90°$.

Para determinar o seno, o cosseno ou a tangente de ângulos agudos, podemos utilizar uma calculadora científica (física, no *smartphone*, no computador ou *on-line*) ou consultar uma tabela de razões trigonométricas com medidas de abertura de ângulos de 1 em 1 grau, de 1° a 89°.

Acompanhe a seguir alguns exemplos de cálculos.



Vasyl Dvenko/Shutterstock

Detalhe de uma calculadora científica.



XanderSt/Shutterstock

Detalhe de uma calculadora científica de *smartphone*.

a) sen 50°

Com uma calculadora:



b) cos 20°

Com uma calculadora:



c) tan 35°

Com uma calculadora:



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Professor, também podemos calcular os valores das razões trigonométricas utilizando uma planilha eletrônica. Para isso, geralmente é preciso converter as medidas de abertura dos ângulos de graus para radianos. Por exemplo, para calcular cos 20°, usamos a combinação de fórmulas **=COS(RADIANOS(20))**, que vai converter 20° para radianos e calcular o valor do cosseno, apresentando o resultado 0,9396962078..., como na calculadora científica.

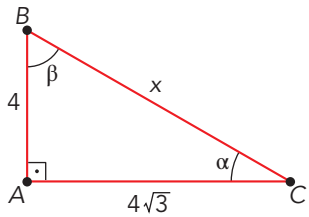
Fique atento

Em algumas calculadoras, o botão para calcular o seno é indicado por **sin**, que vem da palavra *sine*, que significa seno, em inglês.

No capítulo **3** desta Unidade, os estudantes conhecerão a unidade de medida radiano e a conversão entre graus e radianos.

Atividades resolvidas

3. Resolva o triângulo retângulo a seguir. Considere que todas as medidas de comprimento estão indicadas em centímetros.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Fique atento

Resolver um triângulo retângulo é determinar as medidas não conhecidas de todos os 6 elementos (as medidas de comprimento dos 3 lados e as medidas de abertura dos 3 ângulos).

Resolução

Analisando o triângulo, tem-se $AB = 4$ cm, $AC = 4\sqrt{3}$ cm e $m(\hat{A}) = 90°$ e precisamos calcular $BC = x$, $m(\hat{C}) = \alpha$ e $m(\hat{B}) = \beta$.

- $x^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2 = 16 + 48 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$ (x não pode ser negativo)
- $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{8} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0{,}5 \Rightarrow \Rightarrow \alpha = 30°$
- $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180° \Rightarrow \Rightarrow 90° + \beta + 30° = 180° \Rightarrow \beta = 60°$

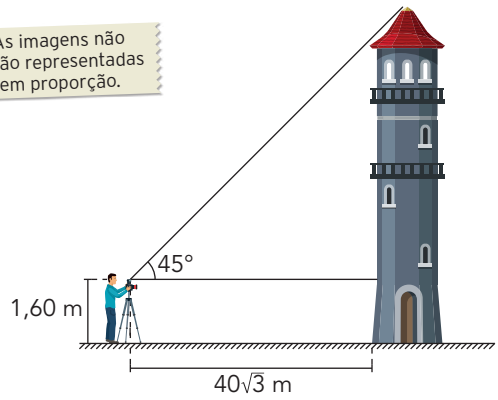
Logo, $BC = 8$ cm, $m(\hat{C}) = 60°$ e $m(\hat{B}) = 30°$.

Atividade resolvida passo a passo

4. Uma pessoa com uma máquina fotográfica está a uma distância com medida $40\sqrt{3}$ m de uma torre e vê o topo da torre sob um ângulo de 45°, como indica a imagem a seguir.

Se a máquina fotográfica está a 1,6 m de medida de distância do solo, qual é a medida de altura da torre, em metros? (Dado: $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.)

As imagens não estão representadas em proporção.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Resolução

Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

São dadas a medida de distância da máquina fotográfica à torre, a medida de altura em que a máquina fotográfica se encontra e a inclinação do ângulo de visão com o plano horizontal.

b) O que se pede?

A medida de altura da torre, em metros.

Planejando a solução

De acordo com os dados do enunciado, podemos calcular a medida de altura h da torre adicionando as medidas de comprimento x do cateto oposto a 45° e 1,60 m da medida de altura da máquina fotográfica.

Para obter o valor de x, usaremos a definição de tangente.

Executando o que foi planejado

Calculamos a medida de comprimento x do cateto oposto a 45°.

$$\tan 45° = 1 \Rightarrow \frac{x}{40\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow x = 40\sqrt{3} \simeq 69{,}2$$

Agora, calculamos a medida de altura h da torre:

$$h = x + 1{,}6 \simeq 69{,}2 + 1{,}6 \simeq 70{,}8$$

Logo, a medida de altura da torre é, aproximadamente, 70,8 metros.

Emitindo a resposta

A medida de altura da torre é, aproximadamente, 70,8 metros.

Professor, na atividade **21**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A consulta à tabela de razões trigonométricas pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essa podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Atividades

Não escreva no livro

21. Analise as afirmações do *Reflita* do tópico "Definição de seno, cosseno e tangente usando semelhança de triângulos" e verifique se elas condizem com os valores indicados na tabela de razões trigonométricas de ângulos agudos. Resposta esperada: Sim.

22. Agora, analise os valores aproximados que você e um colega calcularam no item **e** da atividade **19** do tópico "Relações entre seno, cosseno e tangente" e verifique se eles condizem com os valores indicados na tabela de razões trigonométricas. Resposta esperada: Sim.

23. Retome a representação do triângulo retângulo que você e um colega fizeram na atividade **20** do tópico "Relações entre seno, cosseno e tangente" e os valores experimentais que obtiveram para sen 40°, cos 40° e tan 40°. Consultem a tabela de razões trigonométricas e verifiquem se os valores estão próximos. Respostas pessoais.

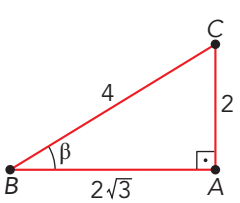
Fique atento

Nas atividades a seguir, sempre que necessário, use uma calculadora científica ou consulte a tabela de razões trigonométricas no final deste Volume.

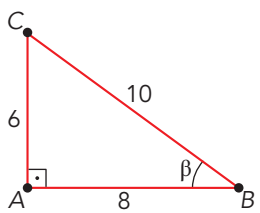
24. Para cada triângulo retângulo a seguir, determine o seno, o cosseno e a tangente de β usando a definição dessas razões trigonométricas. Depois, consulte a tabela de razões trigonométricas e determine o valor aproximado de β, em graus. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a)



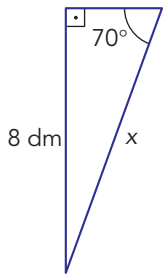
b)



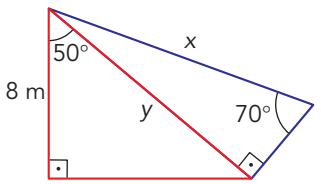
25. Determine o valor de *x* e de *y* em cada figura representada a seguir.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) $x \simeq 8{,}51$ dm

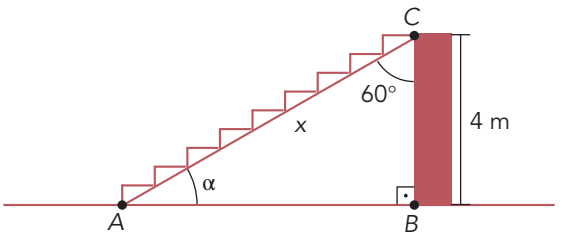


b) $x = 13{,}23$ m e $y \simeq 12{,}44$ m.



26. Analise o esboço de uma escada e responda às perguntas no caderno.

Banco de imagens/Arquivo da editora



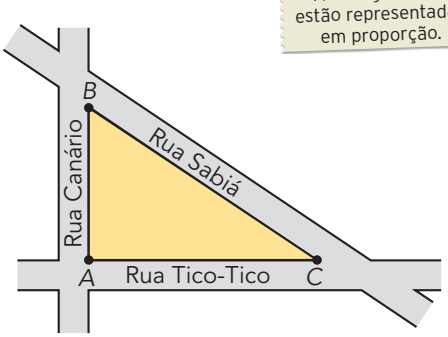
a) Considerando o triângulo *ABC* e *x* a medida de comprimento do lado correspondente à escada, qual é o valor de *x*? 8 m

b) Qual é a medida de abertura do ângulo formado pelo lado correspondente à escada e o chão? 30°

27. As ruas Canário e Tico-Tico são perpendiculares. A medida de distância entre os pontos *A* e *B* é 50 m. As ruas Canário e Sabiá cruzam-se em *B* formando um ângulo de medida de abertura 60°.

As imagens não estão representadas em proporção.

Banco de imagens/Arquivo da editora



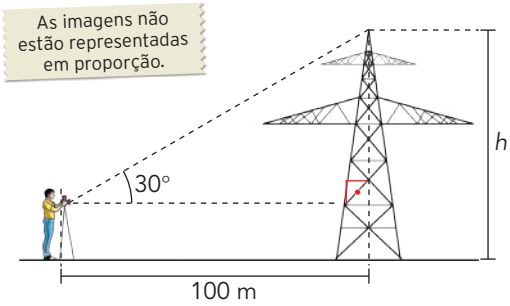
Qual é a medida de perímetro do triângulo *ABC* determinado pelos cruzamentos dessas 3 ruas? $(150 + 50\sqrt{3})$ m ou, aproximadamente, 236,6 m.

Professor, na atividade **23**, os cálculos das razões trigonométricas vão depender da precisão da representação do ângulo de medida de abertura 40° e da medição do comprimento dos lados do triângulo retângulo. Porém, esperamos que os estudantes obtenham valores próximos aos indicados na tabela de razões trigonométricas: sen 40° ≃ 0,643; cos 40° ≃ 0,766 e tan 40° ≃ 0,839. Caso os valores não sejam próximos, oriente-os a verificar a representação que fizeram e os possíveis erros cometidos.

Professor, se necessário, relembre os estudantes de consultar a tabela de razões trigonométricas no final deste Volume para resolver as atividades **30** e **31**.

28. $\tan 30° = \frac{x}{100} \Rightarrow \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 100\frac{\sqrt{3}}{3}$; $h = x + 1{,}70 = 100\frac{\sqrt{3}}{3} + 1{,}70 \simeq 59{,}4$; logo, $h \simeq 59{,}4$ m.

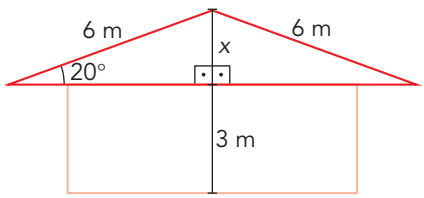
28. Para determinar a medida de altura de uma torre, um topógrafo coloca o teodolito a 100 m da base e obtém um ângulo de medida de abertura 30°, conforme mostra a imagem. O teodolito é um instrumento que mede a abertura de ângulos horizontais ou verticais, muito utilizado em topografia.



Dam d'Souza/Arquivo da editora

Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,70 m do solo, qual é a medida aproximada de altura da torre?

29. Analise o croqui que um arquiteto desenhou para a construção de uma casa usando a estrutura de tesoura para sustentar o telhado. Depois, faça, no caderno, o que se pede.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Determine a que medida de altura se encontra o ponto mais alto da tesoura projetada em relação ao solo. Considere sen 20° = 0,34.

b) Se o arquiteto tivesse projetado uma medida de abertura do ângulo maior do que 20°, mantendo a medida de comprimento 6 m, então a medida de altura do ponto mais alto da tesoura seria maior ou menor do que a calculada no item **a**? Escolha uma nova medida de abertura e faça os cálculos. Resposta pessoal.

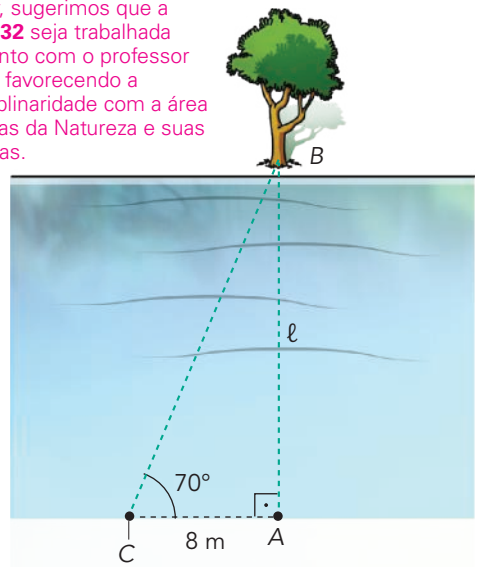
30. Uma linha com medida de comprimento 120 m é esticada do topo de um prédio até o solo. Calcule, no caderno, a medida de altura do prédio sabendo que o ângulo entre a linha e o solo tem medida de abertura 25°.

Aproximadamente 50,4 m.

29. a) sen 20° $= \frac{x}{6} \Rightarrow 0{,}34 \simeq \frac{x}{6} \Rightarrow x \simeq 2{,}04$; $h \simeq 3 + 2{,}04 = 5{,}04$; logo, $h \simeq 5{,}04$ m.

31. Considere que, em determinado rio, a medida de distância entre os pontos C e A seja 8 metros e que a medida obtida para a abertura do ângulo $B\hat{C}A$ tenha sido 70°, como na imagem a seguir. Nessas condições, qual é a medida de largura desse rio? Aproximadamente 22 m.

Professor, sugerimos que a atividade **32** seja trabalhada em conjunto com o professor de Física, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

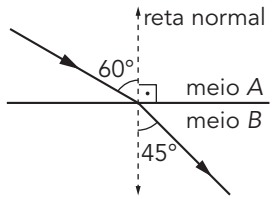


Dam d'Souza/Arquivo da editora

Texto para a próxima atividade.

Quando um raio de luz passa de um meio A para um meio B e sofre uma variação na velocidade de propagação, dizemos que ocorreu uma refração. De acordo com a lei de Snell-Descartes, podemos relacionar o índice de refração de cada meio (n_A e n_B) e o seno do ângulo entre o raio e a reta normal (ângulo $\hat{i}$ de incidência e ângulo $\hat{r}$ de refração) usando a fórmula $n_A \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_B \cdot \text{sen}\,\hat{r}$.

32. Considere um raio luminoso monocromático que passa de um meio A para um meio B de acordo com a imagem a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O meio A é o ar, em que $n_A = 1$. Com um colega, determine o índice de refração absoluto n_B do meio B. $n_B = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $n_B \simeq 1{,}225$.

33. Escolha um dos 3 triângulos da atividade **25** e elabore um problema que possa ser representado por ele. Em seguida, troque com um colega para que você resolva o problema que ele elaborou. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Conexões

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Professor, esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Diversidade Cultural* e *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*.

Ângulo reto em construções quilombolas

Quilombo é uma palavra de origem africana que vem do idioma quimbunco, que significa sociedade formada por jovens que pertenciam a grupos étnicos desenraizados das comunidades em que viviam. Ou seja, essa palavra faz referência às pessoas que foram trazidas da África ao Brasil, contra a própria vontade para realizar trabalho escravo.

A origem dos territórios reconhecidos hoje como quilombos no Brasil é diversa, com alguns deles tendo sido formados, por exemplo, com a compra de terras após o fim do sistema escravocrata.

Atualmente, de acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2022 havia 1327 802 quilombolas no Brasil, distribuídos por 1696 municípios. Segundo o diretor do Patrimônio Afro-Brasileiro da Fundação Cultural Palmares, a agricultura ainda hoje é a maior fonte de renda dos quilombolas, seguida do extrativismo, que consiste em extrair recursos da natureza como minerais, vegetais ou animais conservando a natureza e o território da comunidade quilombola.
O artesanato também contribui para complementar a renda dessas famílias.

Assim como a fonte de renda é gerada de modo sustentável, sem prejudicar o território em que vivem, a construção das casas nos quilombos também é.



1

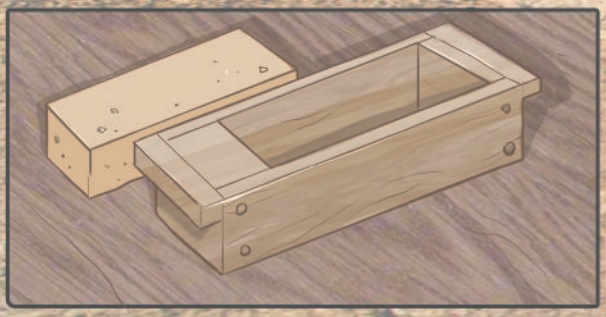
Na Comunidade Quilombola Lagoa da Pedra, em Arraias (TO), a maioria das casas são construídas de adobe – um tipo de tijolo – sem reboco e cobertas com telhas.

Na preparação do barro (argila), é importante que a terra esteja fina e sem grandes detritos para ser misturada com água, utilizando uma enxada ou pisoteando com os pés, fazendo assim o barro para a confecção do tijolo.



2

Depois do barro pronto, ele é colocado em fôrmas de madeira em que as medidas de comprimento, largura e altura podem variar. É preciso assentar bem o barro na fôrma para que o tijolo não fique oco.

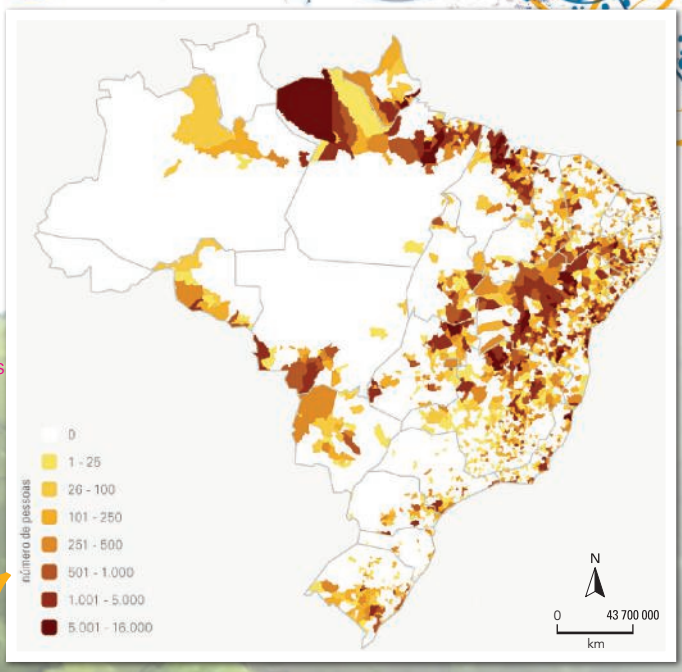


3. Eles utilizam uma linha sobre o terreno em que a casa será construída e ajustam os adobes em relação a essa linha. Existe um esquadro de alumínio muito utilizado por pedreiros, no formato da letra L, justamente para ser posicionado sobre os tijolos e verificar se eles formam um ângulo de medida de abertura 90° entre si.

Ilustrações: Hector Gómez/Arquivo da editora

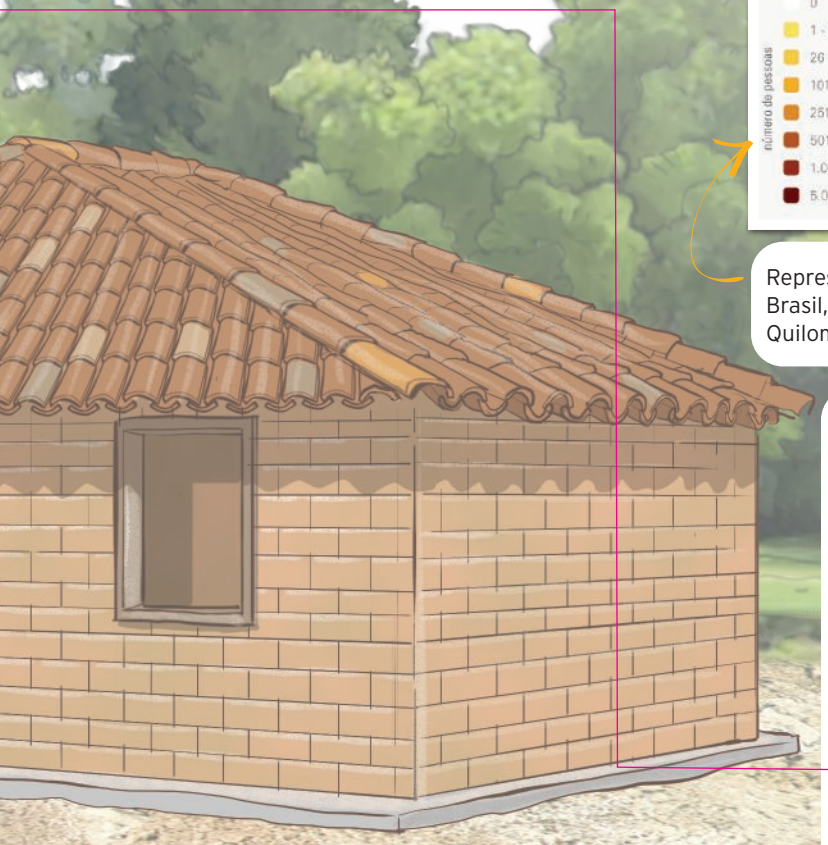
Fonte dos dados: ANTONIO, Thaís. Agricultura ainda é a maior fonte de renda dos quilombolas. *EBC*, 19 nov. 2013. Disponível em: https://tedit.net/u9zcm7; GOMES, Irene. Brasil tem 1,3 milhão de quilombolas em 1.696 municípios. *Agência IBGE Notícias*, 27 jul. 2023. Disponível em: https://tedit.net/fu1j7t; CASTRO, Flávia Caraiba; VIZOLLI, Idemar. Um olhar sobre a matemática presente nas construções das casas na Comunidade Quilombola Lagoa da Pedra, Arraias, TO. *REVEMAT*, Florianópolis, v. 8, n. 2, p. 144-161, 2013. Disponível em: https://tedit.net/2eoh63. Acesso em: 1º ago. 2024.

Professor, na atividade **2**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.



Reprodução/IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

Representação do número de pessoas quilombolas no Brasil, em 2022, de acordo com o *Censo Demográfico 2022*: Quilombolas – Primeiros Resultados do Universo.



Conecte com o texto

1. Por que é importante reconhecer os saberes matemáticos de diferentes povos e culturas? Resposta pessoal.

Pesquise e debata

2. Pesquise o que significa verificar se o canto da parede está em esquadro.

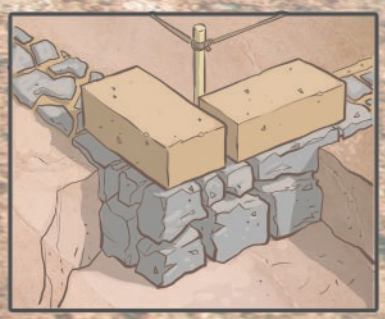
2. Significa que o canto da parede deve ser formado por um ângulo reto.

3. De acordo com o texto, como os membros da Comunidade Quilombola Lagoa da Pedra verificam se a parede está em esquadro? Pesquise se existe outro instrumento para fazer essa verificação.

3

Após desenformar, o tijolo deve secar naturalmente.





4

Para a construção da casa, são feitos a marcação no terreno e o alicerce com pedras e terra vermelha. Com o alicerce pronto, as paredes são erguidas iniciando pelos cantos, pois facilita o esquadro da casa ao colocar 2 tijolos formando um ângulo com medida de abertura de 90° entre si. Para verificar o esquadro, uma linha de *nylon* é estendida sobre o alicerce, pois assim é possível ajustar os adobes.

Formalizando a definição de seno e cosseno de ângulos obtusos

Como estudamos anteriormente, as razões trigonométricas definidas para ângulos agudos, associados a triângulos retângulos, constituem uma ferramenta bastante útil na resolução de problemas.

Para ampliar o estudo para ângulos obtusos, não podemos recorrer a triângulos retângulos. Então, neste momento, vamos aprender a lidar na prática com o cálculo do seno e do cosseno de ângulos obtusos. A parte teórica, que fundamenta o que formalizaremos agora, será feita mais adiante, ainda nesta Unidade.

Inicialmente, considere as definições a seguir.

- $\operatorname{sen} 90° = 1$ e $\cos 90° = 0$.
- O seno de um ângulo obtuso, de medida de abertura α, é igual ao seno do suplemento desse ângulo:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (180° - \alpha)$$

- O cosseno de um ângulo obtuso, de medida de abertura α, é igual ao oposto do cosseno do suplemento desse ângulo:

$$\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)$$

Acompanhe os exemplos.

a) $\operatorname{sen} 120°$

O suplemento de 120° é 60°, portanto, temos:

$$\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} (180° - 120°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $\operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou, consultando a tabela de razões trigonométricas, $\operatorname{sen} 120° \simeq 0{,}866$.

b) $\cos 120°$

$$\cos 120° = -\cos (180° - 120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

Logo, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ ou $\cos 120° = -0{,}5$.

Fique atento

Lembre-se de que 2 ângulos são suplementares quando a soma das medidas de abertura é 180°.

Atividades

Não escreva no livro

34. Calcule e registre no caderno o valor de cada razão trigonométrica.

a) $\operatorname{sen} 135°$ **b)** $\cos 135°$ **c)** $\operatorname{sen} 150°$ **d)** $\cos 150°$

35. Determine o valor de cada expressão.

a) $\operatorname{sen} 20° - \operatorname{sen} 160° + \cos 44° + \cos 136°$

b) $\operatorname{sen} 10° \cdot \cos 50° + \cos 130° \cdot \operatorname{sen} 170°$

34. a) O suplemento de 135° é 45°, portanto:

$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}707$

b) $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq$

$\simeq -0{,}707$

c) O suplemento de 150° é 30°, portanto:

$\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} = 0{,}5$

d) $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq$

$\simeq -0{,}866$.

35. a) $\operatorname{sen} 20° - \operatorname{sen} 160° + \cos 44° + \cos 136° =$

$= \operatorname{sen} (180° - 20°) - \operatorname{sen} 160° - \cos (180° - 44°) + \cos 136° =$

$= \operatorname{sen} 160° - \operatorname{sen} 160° - \cos 136° + \cos 136° = 0$

b) $\operatorname{sen} 10° \cdot \cos 50° + \cos 130° \cdot \operatorname{sen} 170° =$

$= \operatorname{sen} 10° \cdot \cos 50° - \cos (180° - 130°) \cdot \operatorname{sen} (180° - 170°) =$

$= \operatorname{sen} 10° \cdot \cos 50° - \cos 50° \cdot \operatorname{sen} 10° = 0$

Lei dos senos

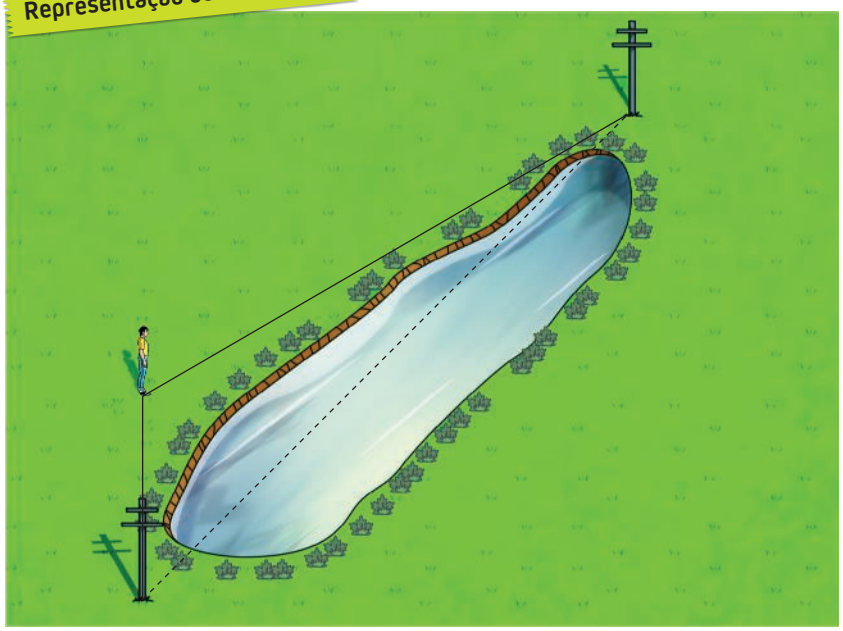
Acompanhe a seguinte situação-problema: Uma empresa de fornecimento de energia, ao instalar a rede elétrica em uma fazenda, precisou colocar 2 postes em lados opostos de um lago para permitir a passagem da fiação. Com isso, surgiu um pequeno problema: para fazer o projeto da rede, seria necessário saber a medida de distância entre os postes, e a presença do lago impedia a medição direta.

Uma das engenheiras posicionou-se em um local onde era possível visualizar os 2 postes e medir a distância entre eles. Com um teodolito, ela mediu a abertura do ângulo entre a linha de visão dela e os postes, obtendo 120°. Um auxiliar mediu a distância entre a engenheira e o poste mais afastado e obteve 100 m; outro auxiliar mediu o ângulo entre a linha do poste mais próximo da engenheira e a linha entre os postes, obtendo 45°. Com essas informações, a engenheira ficou satisfeita, pois ela já conseguiria calcular a medida de distância *d* entre os postes.

A seguir, vamos descobrir como fazer esse cálculo.

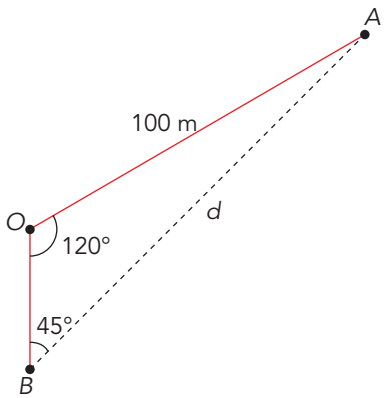
As imagens não estão representadas em proporção.

Representação da realidade



Dam d'Souza/Arquivo da editora

Modelo matemático



Banco de imagens/Arquivo da editora

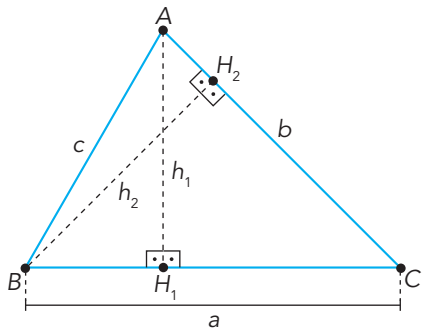
Os pontos *A* e *B* representam as posições dos postes, que distam *d*, e o ponto *O* representa a posição da engenheira.

O triângulo *AOB* é obtusângulo e a resolução desse problema consiste em determinar a medida de comprimento do lado $\overline{AB}$. Para isso, vamos estudar um teorema, conhecido como **lei dos senos**: Em qualquer triângulo *ABC*, as medidas de comprimento *a*, *b* e *c* dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Acompanhe a demonstração desse teorema para um triângulo acutângulo ABC.

Representando as alturas $\overline{AH_1}$ e $\overline{BH_2}$ do triângulo ABC, obtemos os triângulos retângulos ACH_1 e BCH_2.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- No $\triangle ACH_1$, retângulo em H_1, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$$

No $\triangle ABH_1$, retângulo em H_1, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$$

Comparando as igualdades, temos:

$$b \cdot \operatorname{sen}\hat{C} = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad (\text{I})$$

- No $\triangle BCH_2$, retângulo em H_2, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$$

No $\triangle ABH_2$, retângulo em H_2, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h_2}{c} \Rightarrow h_2 = c \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$$

Comparando as igualdades, temos:

$$a \cdot \operatorname{sen}\hat{C} = c \cdot \operatorname{sen}\hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad (\text{II})$$

De (I) e (II), concluímos que:

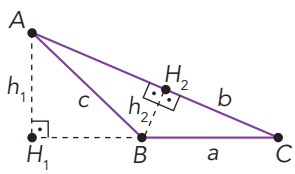
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

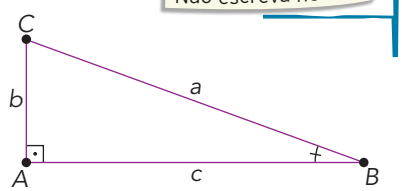
Reflita

Não escreva no livro

Verifique que esse teorema também vale para um triângulo obtusângulo e para um triângulo retângulo.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.



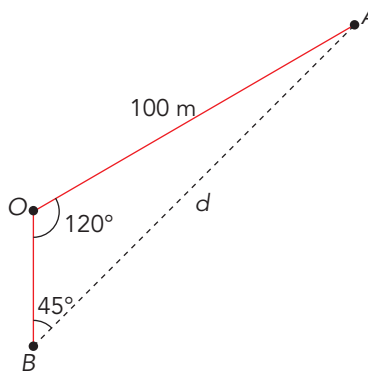


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Utilizando a lei dos senos, podemos resolver a situação apresentada no começo deste tópico:

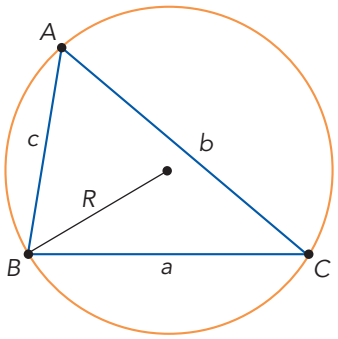
$$\frac{100}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{d}{\operatorname{sen} 120°} \Rightarrow \frac{100}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{d}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\,d = 100\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{6}}{2} = 50\sqrt{6} \simeq 122{,}47$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Logo, a medida de distância d entre os postes é, aproximadamente, 122,47 metros.



Banco de imagens/Arquivo da editora

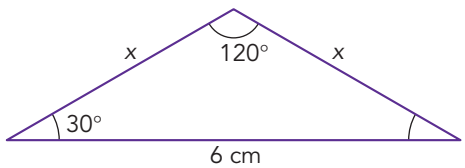
Observação: Pode-se provar que a razão $\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}}$, em que a é a medida de comprimento do lado oposto ao ângulo $\widehat{A}$, é constante e igual a $2R$, em que R é a medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita ao triângulo considerado. A mesma relação vale para os outros 2 lados do triângulo.

Atividades resolvidas

5. Em um triângulo isósceles, a base tem medida de comprimento 6 cm e o ângulo oposto à base tem medida de abertura 120°. Calcule a medida de comprimento dos lados congruentes desse triângulo.

Resolução

Sendo x a medida de comprimento dos lados congruentes do triângulo descrito, podemos fazer um esboço da situação:



WYM Design/ Arquivo da editora

Sabemos que:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen} (180° - 120°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866$$

Então, pela lei dos senos, temos:

$$\frac{6}{\operatorname{sen} 120°} = \frac{x}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x\sqrt{3} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \simeq 3{,}46$$

Ou, utilizando o valor aproximado de sen 120°, temos:

$$\frac{6}{\operatorname{sen} 120°} = \frac{x}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow \frac{6}{0{,}866} = \frac{x}{0{,}5} \Rightarrow x \simeq 3{,}46$$

Logo, cada lado congruente do triângulo isósceles tem medida de comprimento $2\sqrt{3}$ cm ou, aproximadamente, 3,46 cm.

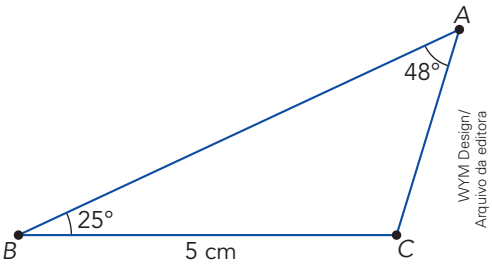
Reflita

Não escreva no livro

Em um triângulo isósceles, a altura relativa à base é também mediana do triângulo e bissetriz do ângulo interno oposto à base. Use esse fato e resolva essa atividade de outra maneira.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

6. Em um triângulo ABC, temos $BC = 5$ cm, $m(\hat{A}) = 48°$ e $m(\hat{B}) = 25°$. Calcule a medida de comprimento aproximada do lado $\overline{AB}$.



WYM Design/ Arquivo da editora

Resolução

Podemos fazer um esboço do triângulo ABC descrito:

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{BC}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{AC}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{AB}{\text{sen } \hat{C}}$$

Queremos saber qual é a medida de comprimento AB; então, podemos usar a igualdade $\frac{BC}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{AB}{\text{sen } \hat{C}}$ e, para isso, precisamos saber o valor de sen $\hat{C}$.

$$48° + 25° + m(\hat{C}) = 180° \Rightarrow m(\hat{C}) = 180° - 73° = 107°$$

$$\text{sen } 107° = \text{sen } (180° - 107°) = \text{sen } 73° \simeq 0{,}956$$

Então:

$$\frac{BC}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{AB}{\text{sen } \hat{C}} \Rightarrow \frac{5}{\text{sen } 48°} = \frac{AB}{\text{sen } 107°} \Rightarrow \frac{5}{0{,}743} \simeq \frac{AB}{0{,}956} \Rightarrow AB \simeq 6{,}43$$

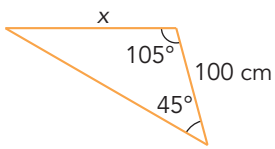
Portanto, a medida de comprimento do lado $\overline{AB}$ é, aproximadamente, 6,43 cm.

Atividades

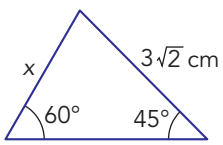
Não escreva no livro

36. Analise cada triângulo e calcule o valor de x. Considere que as medidas de comprimento estão indicadas em centímetros.

a) $x = 100\sqrt{2}$ cm ou $x \simeq 141{,}42$ cm.

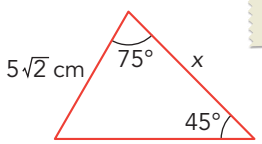


b) $x = 2\sqrt{3}$ cm ou $x \simeq 3{,}46$ cm.

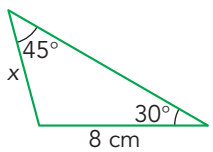


c) $x = 5\sqrt{3}$ cm ou $x \simeq 8{,}66$ cm.

As imagens não estão representadas em proporção.



d) $x = 4\sqrt{2}$ cm ou $x \simeq 5{,}66$ cm.



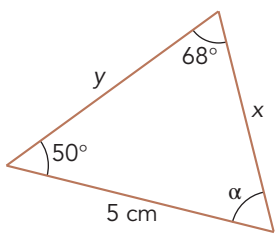
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Para resolver as atividades propostas nesta seção, utilize a tabela trigonométrica disponível no final deste Volume.

37. Em um triângulo ABC, conhecemos $m(\hat{A}) = 45°$, $m(\hat{B}) = 30°$ e $a + b = \sqrt{2} + 1$. Calcule o valor de a. Considere que as medidas de comprimento estão indicadas em centímetros. $a = \sqrt{2}$ cm ou $a \simeq 1{,}41$ cm.

38. No caderno, calcule o valor de x, y e α indicados no triângulo representado a seguir.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

$68° + 50° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 62°$

Pela lei dos senos, obtemos:

$$\frac{5}{\text{sen } 68°} = \frac{x}{\text{sen } 50°} = \frac{y}{\text{sen } 62°}$$

Assim, $\frac{5}{\text{sen } 68°} = \frac{x}{\text{sen } 50°} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot \text{sen } 50°}{\text{sen } 68°} \simeq 4{,}13$.

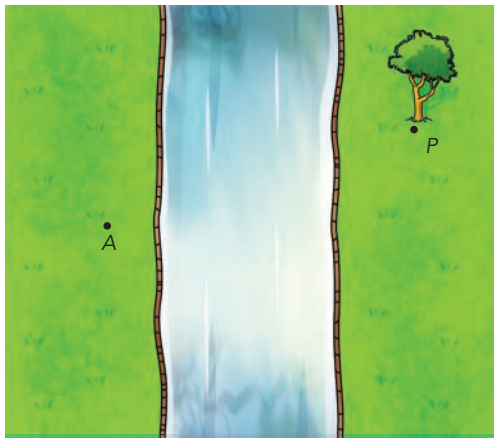
Assim, $\frac{5}{\text{sen } 68°} = \frac{y}{\text{sen } 62°} \Rightarrow y = \frac{5 \cdot \text{sen } 62°}{\text{sen } 68°} \simeq 4{,}76$.

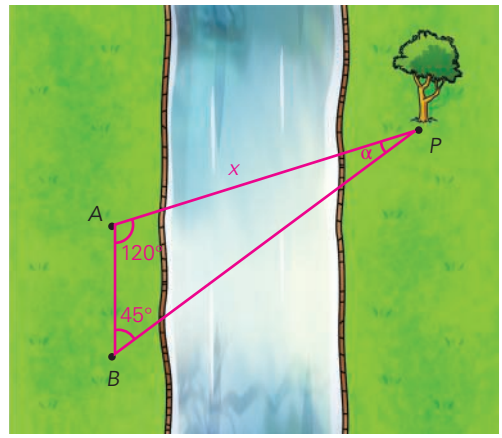
Logo, $\alpha = 62°$, $x \simeq 4{,}13$ cm e $y \simeq 4{,}76$ cm.

39. $120° + 45° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 15°$

$\frac{2}{\text{sen } 15°} = \frac{x}{\text{sen } 45°} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot \text{sen } 45°}{\text{sen } 15°} \simeq \frac{2 \cdot 0{,}707}{0{,}259} \simeq 5{,}459$. Logo, $x \simeq 5{,}459$ km = 5459 m.

39. Suponha que um observador esteja no ponto *A* e queira saber a medida de distância entre os pontos *A* e *P*, sendo *P* o local onde se localiza uma árvore do outro lado de um rio, conforme representado na imagem a seguir.



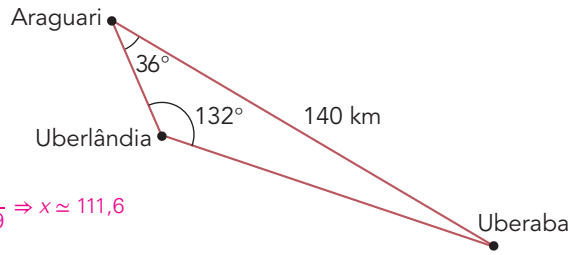


Ilustrações: Dam d'Souza/Arquivo da editora

O observador se movimenta do ponto *A* para um ponto *B*, distante 2 km de *A*, de onde também pode ver o ponto *P*.

Sabendo que $m(B\hat{A}P) = 120°$ e $m(A\hat{B}P) = 45°$, qual é a medida de distância entre *A* e *P*?

40. Uberaba, Uberlândia e Araguari são cidades do Triângulo Mineiro e a localização delas pode ser representada pelo triângulo a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$\frac{140}{\text{sen } 132°} = \frac{x}{\text{sen } 36°} \Rightarrow \frac{140}{0{,}74} \simeq \frac{x}{0{,}59} \Rightarrow x \simeq 111{,}6$

Logo, $x \simeq 111{,}6$ km.

Considerando os dados indicados na imagem, determine a medida de distância aproximada entre Uberaba e Uberlândia.

41. Elabore um problema que possa ser representado pelo triângulo da atividade **38** e cuja resposta seja uma das medidas que você calculou. Em seguida, troque com um colega para que ele resolva o problema criado por você e você resolva o dele.

Texto para a próxima atividade.

Distintas maneiras de se comunicar fazem parte da história da humanidade desde a Pré-História, como a utilização da fala, da dança, da música, do desenho, da imitação, da linguagem teatral, entre outras. O teatro que conhecemos atualmente no Ocidente teve origem na Grécia, por volta do século VI a.C. Na época, os palcos eram ao ar livre, feitos de pedras e com uma grande arquibancada para a plateia acompanhar o espetáculo.

Atualmente, teatros modernos costumam ficar em ambientes fechados e contam com tecnologias de som e de iluminação que permitem boa visualização do palco, independentemente da posição do espectador na plateia.

As imagens não estão representadas em proporção.



Ceri Breeze/Shutterstock

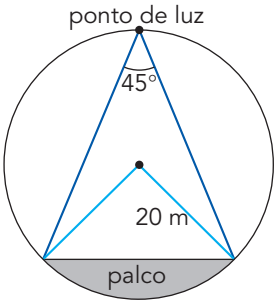
Teatro Odeão de Herodes Ático, em Atenas (Grécia), construído em torno do século II d.C. Foto de 2022.

41. Exemplo de problema: Em uma cidade, os pontos *A*, *B* e *C*, pertencentes a diferentes bairros, formam um triângulo de maneira que $AC = 5$ km. Sabendo que $m(\hat{B}) = 68°$ e que $m(\hat{C}) = 62°$, qual é a medida de distância entre *A* e *B*?

Professor, para resolver a atividade **42**, os estudantes devem se lembrar de que a medida de abertura de um ângulo central da circunferência é o dobro da medida de abertura do ângulo inscrito correspondente.

Não escreva no livro

42. Considere, por exemplo, um teatro no qual está instalado um ponto de luz cujo feixe de iluminação abrange um ângulo de medida de abertura 45° e que a posição desse ponto de luz e a frente do palco podem ser perfeitamente circunscritos, de modo que o raio da circunferência tem medida de comprimento 20 metros, como na imagem.



WYM Design/Arquivo da editora

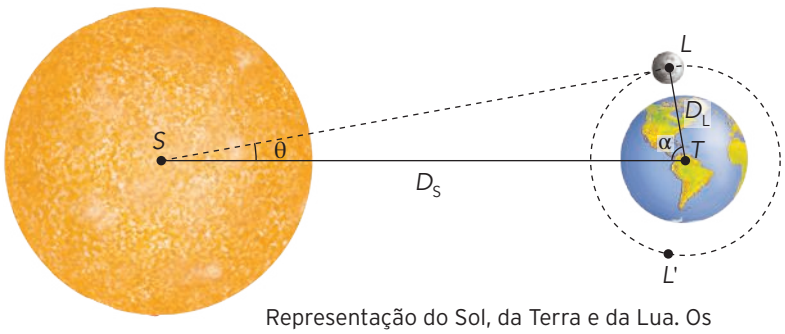
a) Nessa situação, qual é a medida de comprimento da frente desse palco? Aproximadamente 28,28 m.

b) Se a medida de abertura do ângulo do feixe de iluminação fosse 51°, você poderia calcular a medida de comprimento da frente desse palco da mesma maneira que calculou no item anterior? Qual seria a medida de comprimento nesse caso? Exemplos de resposta: Sim, se o item **a** foi resolvido com a lei dos senos. Ou não, se o item **a** foi resolvido com o teorema de Pitágoras. Aproximadamente 31,1 m.

Texto para a próxima atividade.

Desde a Antiguidade, as pessoas têm curiosidade de saber o quão distantes da Terra estão o Sol e a Lua. Nos eclipses solares, o disco lunar encobre o Sol, o que nos leva à conclusão de que o Sol está muito mais distante da Terra do que a Lua. Porém, quantas vezes mais distante? Para tentar responder a essa pergunta, Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) desenvolveu um método correto, mas chegou a resultados errados devido à imprecisão dos instrumentos de medida disponíveis na época. Ele analisou a Lua nos momentos em que ela está metade iluminada e metade escura, ou seja, nas posições de quarto minguante e quarto crescente. Analise a representação desse método a seguir.

As imagens não estão representadas em proporção.



Paulo Manzi/Arquivo da editora

Representação do Sol, da Terra e da Lua. Os elementos na imagem não estão representados em proporção. Imagem em cores fantasia.

Supondo, pela imagem, que a Lua gire em torno da Terra no sentido horário, a posição L indica o quarto minguante e, nesse momento, o ângulo $T\hat{L}S$ é reto. Na posição L', simétrica de L em relação à reta $\overleftrightarrow{ST}$, a Lua está em quarto crescente e o ângulo $T\hat{L}'S$ também é reto.

Então, Aristarco estimou as medidas de abertura de α e de θ e, calculando sen θ, chegou à relação $D_S \simeq 19D_L$.

Fontes dos dados: ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. *Várias faces da Matemática*: tópicos para licenciatura e leitura geral. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010; OLIVEIRA, T. B. de; LIMA, V. T.; BERTUOLA, A. C. Aristarco revisitado. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 38, n. 2, 2016. Disponível em: https://tedit.net/vxrpnc. Acesso em: 1º ago. 2024.

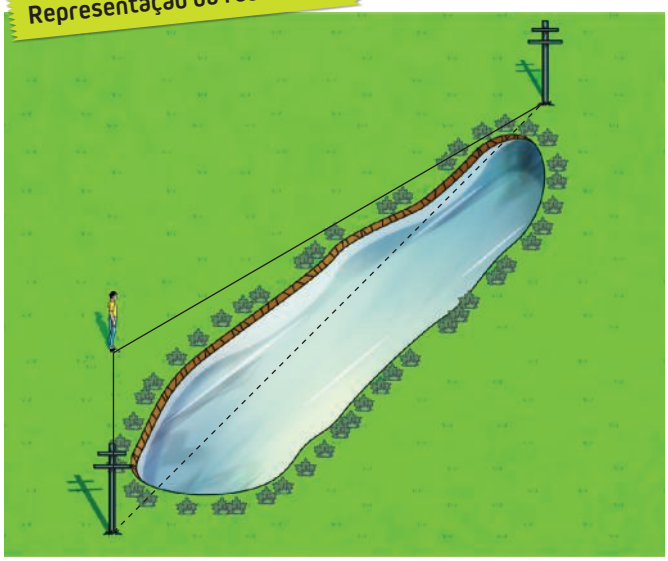
43. Utilizando instrumentos modernos, é possível aplicar o método de Aristarco para obter resultados precisos para a relação entre a medida de distância entre a Terra e o Sol e a medida de distância entre a Terra e a Lua. Pesquise essa relação e escreva no caderno o resultado encontrado.
A medida de distância entre o Sol e a Terra é 390 vezes maior do que a medida de distância entre a Lua e a Terra.

Lei dos cossenos

Voltemos ao problema da empresa de fornecimento de energia em medir a distância entre os postes, citado no tópico "Lei dos senos". Se a engenheira tivesse encontrado alguma dificuldade para obter a medida de abertura de 45° para o ângulo ou não quisesse obtê-la, poderia ter medido a distância entre o local onde ela estava e o poste mais próximo. Assim, além da medida de abertura do ângulo (120°) que a engenheira já havia medido e da medida de distância entre o poste mais afastado e ela (100 m), a engenheira teria obtido a medida de distância d entre o poste mais próximo e ela (que, nesse caso, é 36,6 m).

De posse dessas informações, também é possível calcular a medida de distância d entre os postes. Analise as representações.

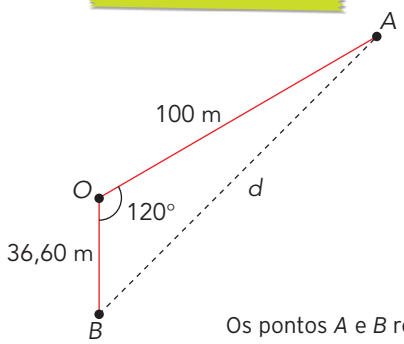
Representação da realidade



Dam d'Souza/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Modelo matemático



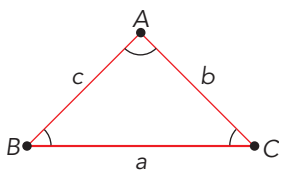
Banco de imagens/Arquivo da editora

Os pontos A e B representam as posições dos postes, que distam d, e o ponto O representa a posição da engenheira.

Analisando o modelo matemático, percebemos que o problema consiste em determinar a medida de comprimento d de um lado de um triângulo quando conhecemos a medida de abertura do ângulo oposto a esse lado e as medidas de comprimento dos outros 2 lados do triângulo.

Para resolver o problema com esses dados, precisamos estudar mais um teorema, conhecido como **lei dos cossenos**: Em qualquer triângulo ABC, o quadrado da medida de comprimento de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos outros 2 lados menos o dobro do produto das medidas de comprimento desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

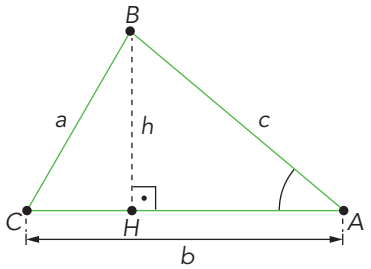


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Vamos provar apenas a 1ª relação, considerando o ângulo agudo $\hat{A}$; a demonstração das outras relações é análoga e você pode fazê-las no caderno.

Acompanhe a demonstração desse teorema para um triângulo acutângulo ABC.

Representando a altura $\overline{BH}$, obtemos os triângulos retângulos ABH e CBH.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- No $\triangle ABH$, temos:

$$\cos \hat{A} = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos \hat{A}$$

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$c^2 = h^2 + (AH)^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - \left(c \cdot \cos \hat{A}\right)^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - c^2 \cdot \cos^2 \hat{A} \quad (\text{I})$$

- No $\triangle CBH$, temos:

$$a^2 = h^2 + (CH)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + (b - AH)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(b - c \cdot \cos \hat{A}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = a^2 - b^2 + 2bc \cdot \cos \hat{A} - c^2 \cdot \cos^2 \hat{A} \quad (\text{II})$$

De (I) e (II), concluímos que:

$$a^2 - b^2 + 2bc \cdot \cos \hat{A} - \cancel{c^2 \cdot \cos^2 \hat{A}} = c^2 - \cancel{c^2 \cdot \cos^2 \hat{A}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$

Reflita

Não escreva no livro

Depois de acompanhar a demonstração do teorema para um triângulo acutângulo, verifique no caderno que ele também vale para um triângulo retângulo e para um triângulo obtusângulo.

O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

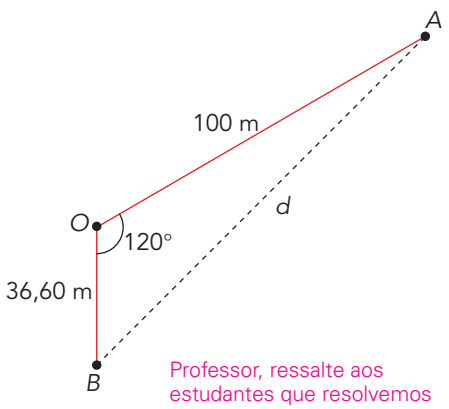
Agora, utilizando a lei dos cossenos, podemos resolver a situação apresentada no começo deste tópico.

Pela lei dos cossenos, temos:

$$d^2 = 100^2 + (36{,}6)^2 - 2 \cdot 100 \cdot 36{,}6 \cdot \cos 120° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 \simeq 15\,000 \Rightarrow d = \sqrt{15\,000} = 50\sqrt{6} \simeq 122{,}47$$

Logo, a medida de distância d entre os postes é, aproximadamente, 122,47 metros, e essa medida é a mesma encontrada no tópico "Lei dos senos".



Banco de imagens/Arquivo da editora

Professor, ressalte aos estudantes que resolvemos o mesmo problema de 2 maneiras diferentes, usando a lei dos senos e usando a lei dos cossenos, e obtivemos a mesma resposta. No geral, podemos escolher qual relação utilizar de acordo com os dados que temos da situação e com a medida que precisamos calcular.

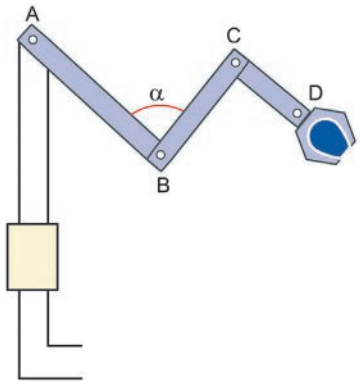
Fique atento

Podemos considerar o teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$) como um caso particular da lei dos cossenos, pois $\cos 90° = 0$.

Atividades resolvidas

Atividade resolvida passo a passo

7. (Unesp-SP) A figura indica o projeto de um braço mecânico em que $\overline{AB}$ assume função próxima de um bíceps humano, $\overline{BC}$ de um antebraço e $\overline{CD}$ de um punho. Sabe-se que a medida de $\overline{AB}$ supera a de $\overline{CD}$ em 11 cm e que a medida de $\overline{BC}$ é 8 cm.



Reprodução/Unesp, 2023.

Se, para $\alpha = 60°$, a distância entre os pontos A e C do mecanismo é igual a $8\sqrt{3}$ cm, a extensão máxima horizontal do braço mecânico, em cm, é igual a:

a) 31.
b) 28.
c) 30.
d) 27.
e) 29.

Resolução

Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

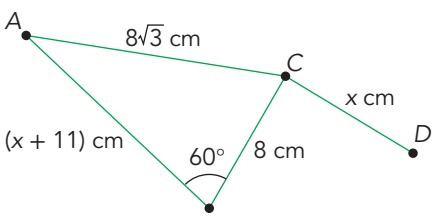
O projeto de um braço mecânico em que $\overline{AB}$ assume função próxima de um bíceps humano, $\overline{BC}$ de um antebraço e $\overline{CD}$ de um punho. A medida de $\overline{AB}$ supera a de $\overline{CD}$ em 11 cm e a medida de $\overline{BC}$ é 8 cm. Para $\alpha = 60°$, temos que a distância entre os pontos A e C do mecanismo é igual a $8\sqrt{3}$ cm.

b) O que se pede?

A extensão máxima horizontal do braço mecânico, em centímetros.

Planejando a solução

Considerando as informações do enunciado, temos o seguinte modelo matemático da situação, representado por um triângulo acutângulo.



Banco de imagens/
Arquivo da editora

A medida de comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$ pode ser calculada pela lei dos cossenos, pois conhecemos a medida de comprimento de 2 lados e a medida de abertura do ângulo entre eles.

44. a) $x^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 60° = 10 - \cancel{6}^{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_{1}} = 10 - 3 = 7$; logo, $x = \sqrt{7}$ cm.

b) $x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60° \Rightarrow x^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 49$; logo, $x = 7$ cm.

Executando o que foi planejado

Pela lei dos cossenos no $\triangle ABC$, temos:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 60° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(8\sqrt{3}\right)^2 = (AB)^2 + 8^2 - 2 \cdot AB \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 192 = (AB)^2 + 64 - 8 \cdot AB \Rightarrow (AB)^2 - 8 \cdot AB - 128 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot (-128)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 512}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{8 \pm 24}{2} = 16 \ (AB \text{ não pode ser negativo})$$

Temos $AB = 16$ cm. Logo, $CD = 16 - 11 = 5$, então $CD = 5$ cm.

Calculamos: $16 + 8 + 5 = 29$. Portanto, a extensão máxima do braço é 29 cm.

Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **e**.

Ampliando a atividade

Qual seria, aproximadamente, a medida máxima de extensão horizontal do braço mecânico, em cm, se $\alpha = 30°$ e se a medida de distância entre os pontos A e C fosse $4\sqrt{3}$ cm? Utilize $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ e $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$. Aproximadamente 22,12 cm.

Professor, no item **c** da atividade **44**, os estudantes devem perceber que todas as relações métricas ou trigonométricas estudadas nesta Unidade relacionam 3 ou mais medidas (de comprimento dos lados ou de abertura dos ângulos internos) e que são dadas poucas informações sobre o triângulo para que seja possível calcular o valor de x.

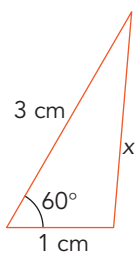
Não escreva no livro

Atividades

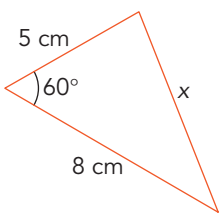
44. Calcule a medida de comprimento x em cada triângulo. As medidas de comprimento estão indicadas em centímetros. **44. c)** Não é possível calcular o valor de x apenas com as medidas dadas.

As imagens não estão representadas em proporção.

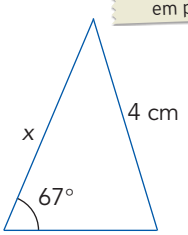
a)



b)



c)



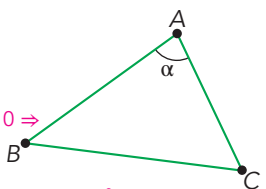
Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora

45. Em um triângulo ABC, conhecemos as medidas $m(\hat{A}) = 30°$, $b = 2\sqrt{3}$ cm e $c = 3$ cm. Calcule a medida de comprimento a do outro lado do triângulo.

46. Considere o triângulo ABC tal que $m(\hat{A}) = 45°$, $BC = 4$ cm e $AC = 4\sqrt{2}$ cm. Determine a medida de comprimento AB.

47. No triângulo representado a seguir, $AC = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AB = 3$ cm e $m(\hat{A}) = \alpha$. Determine o valor de $\cos \alpha$.

46. $4^2 = (AB)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot AB \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos 45° \Rightarrow$
$\Rightarrow 16 = (AB)^2 + 32 - AB \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 16 = (AB)^2 + 32 - 8 \cdot AB \Rightarrow (AB)^2 - 8 \cdot AB + 16 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = 4$; logo, $AB = 4$ cm.



47. $16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow 18 \cdot \cos \alpha = 18 - 16 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$; logo, $\cos \alpha = \frac{1}{9}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

45. $a^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \cos 30° \Rightarrow a^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 - 2 \cdot \cancel{2}\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \Rightarrow a^2 = 12 + 9 - 18 \Rightarrow a^2 = 3$; logo $a = \sqrt{3}$ cm.

48. $a^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow a^2 = 136 - 120\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a^2 = 136 + 60 \Rightarrow a^2 = 196 \Rightarrow a = 14$ (a não pode ser negativo); logo, $a = 14$ cm.

48. Em um triângulo, 2 lados têm medidas de comprimento iguais a 10 cm e a 6 cm e formam entre si um ângulo de medida de abertura 120°. Calcule a medida de comprimento do outro lado desse triângulo.

49. Em um triângulo ABC, sabemos que $m(\hat{A}) = 45°$, $AC = 8\sqrt{2}$ cm e $AB = 10$ cm. Calcule BC.

50. Em um paralelogramo, 2 lados têm medidas de comprimento 14 cm e 10 cm e formam um ângulo de medida de abertura 60°. Com um colega, calcule as medidas de comprimento das diagonais do paralelogramo. $2\sqrt{39}$ cm e $2\sqrt{109}$ cm.

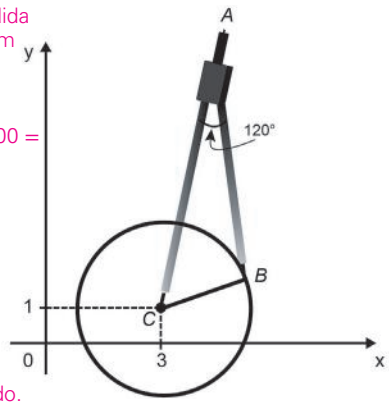
51. **(Enem)** Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.

Podemos considerar o triângulo isósceles ABC formado, tal que os lados congruentes têm medida de comprimento 10 cm e o ângulo entre eles tem medida de abertura 120°.
$(BC)^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow$
$\Rightarrow (BC)^2 = 100 + 100 - 200 \cdot (-\cos 60°) \Rightarrow$
$\Rightarrow (BC)^2 = 200 - 200 \cdot (-0{,}5) \Rightarrow (BC)^2 = 200 + 100 =$
$= 300 \Rightarrow BC = \sqrt{300} \simeq 17{,}32$ (BC não pode ser negativo)
$\alpha + \alpha + 120° = 180° \Rightarrow 2\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 30°$

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{BC}{\operatorname{sen} \hat{A}} \Rightarrow \frac{10}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{BC}{\operatorname{sen} 120°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10}{\frac{1}{2}} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AB = 10\sqrt{3} \simeq 17{,}32$$

Logo, $AB \simeq 17{,}32$ cm e o material **IV** será utilizado.
Alternativa **d**.



Reprodução/Enem, 2017.

Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores de raio (cm)
I	$0 < R \leqslant 5$
II	$5 < R \leqslant 10$
III	$10 < R \leqslant 15$
IV	$15 < R \leqslant 21$
V	$21 < R \leqslant 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será:

a) **I**. **b)** **II**. **c)** **III**. **d)** **IV**. **e)** **V**.

Texto para a próxima atividade.

O Triângulo das Bermudas é uma região situada no oceano Atlântico, entre as ilhas Bermudas, a ilha de Porto Rico e o estado da Flórida (Estados Unidos), que envolve muitos mitos. Nessa região triangular, ocorreram desaparecimentos, supostamente sem explicação, de aviões, barcos e navios. Um dos desaparecimentos mais famosos aconteceu em dezembro de 1945, quando 5 bombardeiros da marinha estadunidense sumiram sem deixar vestígios durante um exercício de treinamento.

49. $(BC)^2 = 100 + 128 - 2 \cdot 10 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \cos 45° = 228 - 160\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 68$

Como BC não pode ser negativo, temos $BC = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$; logo $BC = 2\sqrt{17}$ cm.

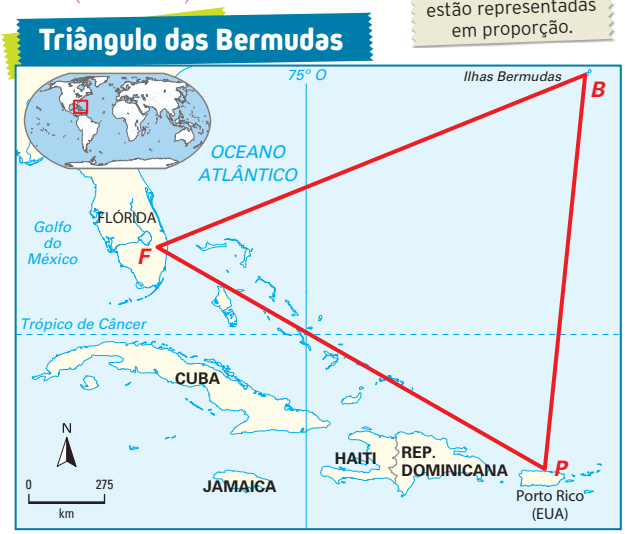
52. $(BP)^2 = 1\,700^2 + 1\,600^2 - 2 \cdot 1\,700 \cdot 1\,600 \cdot \cos 60° \Rightarrow (BP)^2 = 2\,890\,000 + 2\,560\,000 - 2 \cdot 2\,720\,000 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow (BP)^2 = 2\,730\,000 \Rightarrow BP = 100\sqrt{273}$ (BP não pode ser negativo)

$1\,700 + 1\,600 + 100\sqrt{273} = 100\left(33 + \sqrt{273}\right)$; logo, a medida de perímetro é $100\left(33 + \sqrt{273}\right)$ km. Alternativa **a**.

Muitas teorias foram elaboradas para explicar o mistério de aviões e navios desaparecidos, como a possibilidade de terem ocorrido acidentes por causas naturais (tempestades, furacões, tsunâmis, terremotos, etc.) ou por falhas humanas.

Fonte dos dados: O QUE é o Triângulo das Bermudas e onde está localizado. *National Geographic Brasil*, 2 dez. 2022. Disponível em: https://tedit.net/ytb148. Acesso em: 21 jul. 2024.

As imagens não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023, p. 45.

52. Suponha que a medida de distância entre o vértice B do triângulo (localizado nas ilhas Bermudas) e o vértice F (localizado na Flórida) seja, aproximadamente, 1700 km e que a medida de distância entre a Flórida e a ilha de Porto Rico (vértice P) seja, aproximadamente, 1600 km. Além disso, a medida de abertura do ângulo $B\hat{F}P$ pode ser considerada 60°.

De acordo com esses dados, qual é a medida de perímetro do triângulo BFP?

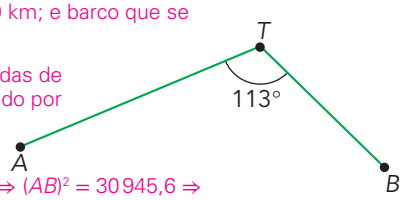
a) $100\left(33 + \sqrt{273}\right)$ km
b) $100\left(33 + \sqrt{417}\right)$ km
c) $100\left(33 + \sqrt{457}\right)$ km
d) $100\left(33 + \sqrt{723}\right)$ km
e) $100\left(33 + 3\sqrt{372}\right)$ km

53. Dois barcos partem de um ponto T, percorrendo rotas lineares em direção aos pontos A e B, com medidas de velocidade constantes e iguais a 60 km/h e 45 km/h, respectivamente. Os barcos chegam aos pontos A e B após 2 horas, e a medida de abertura do ângulo formado entre os percursos é, aproximadamente, 113°.

a) Barco que se deslocou até A: $2 \cdot 60$ km = 120 km; e barco que se deslocou até B: $2 \cdot 45$ km = 90 km.

Então, temos um triângulo com lados com medidas de comprimento 120 km e 90 km, e o ângulo formado por eles tem medida de abertura 113°. Temos:

$(AB)^2 = 120^2 + 90^2 - 2 \cdot 120 \cdot 90 \cdot \cos 113° \Rightarrow$
$\Rightarrow (AB)^2 = 14\,400 + 8\,100 - 21\,600 \cdot (-\cos 67°) \Rightarrow (AB)^2 = 30\,945{,}6 \Rightarrow$
$\Rightarrow AB \simeq 176$ (AB não pode ser negativo); logo, $AB \simeq 176$ km.



b) As medidas de deslocamento dos barcos são as mesmas nessa situação. Então, temos um triângulo com lados com medidas de comprimento 120 km e 90 km, e o ângulo formado por eles tem medida de abertura 76°. Temos:

$(AB)^2 = 120^2 + 90^2 - 2 \cdot 120 \cdot 90 \cdot \cos 76° \Rightarrow$
$\Rightarrow (AB)^2 = 17\,272{,}8 \Rightarrow AB \simeq 131$ (AB não pode ser negativo); logo, $AB \simeq 131$ km.

WYM Design/Arquivo da editora

a) Nessa situação, qual é a medida de distância entre os barcos nesses pontos?

b) Qual seria a medida de distância entre os barcos nesses pontos se a medida de abertura do ângulo formado entre os percursos fosse 76°?

54. O famoso relógio de 4 faces, localizado no Palácio de Westminster, em Londres (Inglaterra), junto do sino Big Ben, foi construído em 1859 e é um símbolo da realeza britânica.

Os ponteiros das horas e dos minutos desse relógio têm medidas de comprimento 2,7 m e 4,7 m, respectivamente. Quando esse relógio marca 14:00, qual é a medida de distância entre as pontas dos ponteiros?

Aproximadamente 4,09 m.



Pack-Shot/Shutterstock

O relógio de 4 faces e o sino Big Ben fazem parte da estrutura conhecida como Elizabeth Tower. Foto de 2023.

55. Elabore um problema envolvendo a lei dos cossenos para calcular a medida de distância entre as pontas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio analógico. Em seguida, compare sua criação com as dos colegas.

Exemplo de problema: Os ponteiros das horas e dos minutos de um relógio analógico de pulso têm medidas de comprimento 0,5 cm e 1 cm, respectivamente. Quando esse relógio marca 8:00, qual é a medida de distância entre as pontas dos ponteiros?

CAPÍTULO 3

Conceitos trigonométricos básicos na circunferência

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação-problema

Cofre mecânico

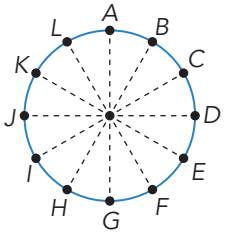
Em filmes e desenhos, é comum aparecerem cofres mecânicos que precisam de senha para serem abertos. Geralmente, esses cofres são estruturas robustas e seguras que servem para o armazenamento de dinheiro, joias, documentos ou outros bens preciosos. Para abri-lo, é necessário girar um disco, em sentido horário ou anti-horário, com marcações exatas na sequência determinada pela senha. Há também cofres digitais, cuja senha é digitada em um painel eletrônico.



Pressmaster/Shutterstock

Para abrir um cofre mecânico, é preciso girar o disco e posicionar, na marcação correta, cada número da senha na sequência certa.

Suponha que o botão de um desses cofres mecânicos gire sobre um disco dividido em 12 arcos com a mesma medida de comprimento e a mesma medida angular.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Partindo do ponto *A*, após girar 90° no sentido horário, qual será o ponto em que o disco vai parar?

b) Girando 180° no sentido anti-horário, partindo do ponto da resposta do item anterior, qual será o ponto em que o disco vai parar?

c) Partindo do ponto da resposta do item anterior, e girando mais 30° no sentido anti-horário e depois 150° no sentido horário, qual será o novo ponto?

d) Partindo do ponto da resposta do item anterior, quantos graus e em qual sentido o botão deverá girar para chegar ao ponto *F*?

a) 360° ÷ 12 = 30°; partindo do ponto *A*, é preciso percorrer 3 partes de 30° parando no ponto *D*.

b) 180° ÷ 30° = 6; partindo do ponto *D*, é preciso percorrer 6 partes de 30° parando no ponto *J*.

c) Partindo do ponto *J* e girando o disco mais 30° no sentido anti-horário, paramos no ponto *I*. Partindo do ponto *I*, para girar o disco 150° no sentido horário, precisamos percorrer 5 partes de 30°, parando no ponto *B* (150° ÷ 30° = 5).

Partindo do ponto *B*, temos 2 maneiras de se chegar ao ponto *F*: percorrendo 4 partes de 30° no sentido horário, ou seja, girando o botão 120° no sentido horário, ou percorrendo 8 partes de 30° no sentido anti-horário, ou seja, girando o botão 240° no sentido anti-horário.

Arcos e ângulos em uma circunferência

Podcast

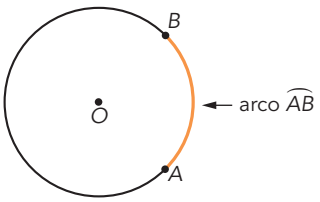
Transcrição de áudio

A partir de agora, faremos um estudo mais abrangente do seno e do cosseno. Para isso, precisaremos estabelecer novos "ambientes" para a Trigonometria: em princípio, vamos considerar arcos e ângulos em uma circunferência e, depois, estabelecer a definição de circunferência trigonométrica.

Acompanhe inicialmente alguns conceitos da Geometria plana.

- **Arco**: parte de uma circunferência que é delimitada por 2 pontos, incluindo-os.

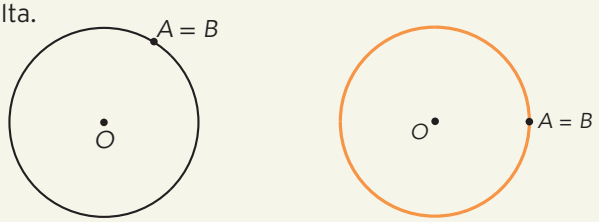
  Quando falamos em arco $\overset{\frown}{AB}$, estamos nos referindo ao arco que vai do ponto A ao ponto B da circunferência, no sentido anti-horário.



Banco de imagens/Arquivo da editora

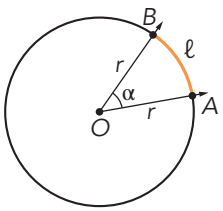
Fique atento

Se os 2 pontos na circunferência coincidirem, teremos um arco nulo ou um arco de 1 volta.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

A cada arco, podemos associar 2 medidas: a **medida de comprimento (medida linear)** e a **medida angular**. Para compreender essas medidas, considere um ponto A sobre uma circunferência de centro O e raio com medida de comprimento r. Deslocando o ponto A sobre a circunferência, ele percorre uma medida de comprimento ℓ na circunferência ao mesmo tempo que gira um ângulo de medida de abertura α em torno do centro O. Esse movimento do ponto A descreve um arco de circunferência de medida de comprimento ℓ e medida angular α.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

A medida de comprimento ℓ de um arco depende do raio da circunferência, mas a medida angular α, não.

Para a medida de comprimento ℓ de um arco, usamos unidades de medida como o metro, o centímetro e o quilômetro. Para a medida angular α, utilizamos em geral unidades de medida como o grau (que provavelmente você já conhece) e o radiano (que será apresentado mais adiante).

- **Arco** e **ângulo central**: a medida angular de qualquer arco de circunferência é igual à medida de abertura do ângulo central que o subtende.

  Por exemplo, considerando a circunferência de centro em O representada, temos:

  Arco $\overset{\frown}{AB}$

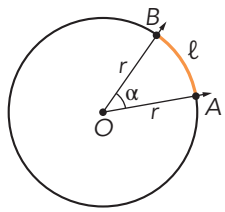
  Medida angular do arco $\overset{\frown}{AB}$: α.

  Medida de comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$: ℓ.

  Ângulo central $A\hat{O}B$

  Medida de abertura do ângulo $A\hat{O}B$: α.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



Reflita

Não escreva no livro

Considere 5 circunferências concêntricas (isto é, de mesmo centro), de raios com medidas diferentes, e um mesmo ângulo central subtendendo arcos em todas as circunferências. Os 5 arcos têm a mesma medida angular? E quanto à medida de comprimento: também é a mesma?

Sim, pois as medidas angulares são iguais à medida de abertura do ângulo central, que é o mesmo. Não, pois as medidas de comprimento dos arcos dependem da medida de comprimento do raio da circunferência.

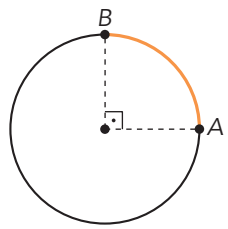
Unidades para medir ângulos e arcos

Recorde como a unidade de medida **grau** é obtida: o ângulo de medida de abertura 1° é o ângulo correspondente a $\frac{1}{360}$ da circunferência.

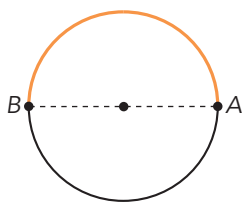
Assim, em uma circunferência, um ângulo central de 1° determina um arco de medida angular 1°.

Acompanhe alguns exemplos de medidas angulares de arcos, em graus.

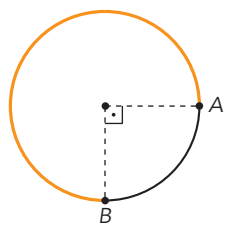
Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora



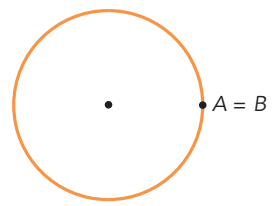
Arco $\overset{\frown}{AB}$ de medida angular 90° (um quarto de volta).



Arco $\overset{\frown}{AB}$ de medida angular 180° (meia-volta).



Arco $\overset{\frown}{AB}$ de medida angular 270° (três quartos de volta).

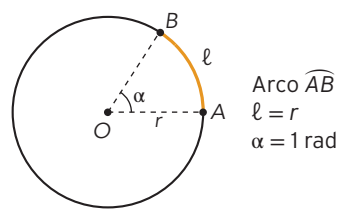


Arco $\overset{\frown}{AB}$ de medida angular 360° ou 0° (uma volta ou nulo).

Agora, conheça a unidade de medida **radiano**.

Em uma circunferência cujo raio tem medida de comprimento r, um arco de medida angular 1 rad (lemos: um radiano) é definido como um arco cuja medida de comprimento também é r.

Assim, o ângulo central de medida de abertura 1 rad subtende um arco de medida angular 1 rad.



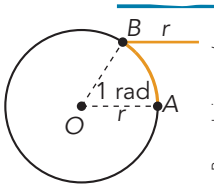
Banco de imagens/Arquivo da editora

Professor, comente com os estudantes que existem outras unidades de medida, além do grau (e dos submúltiplos dele) e do radiano, usadas para indicar a medida angular de arcos; por exemplo, o **grado**, que é a medida angular de um arco obtido da divisão da circunferência em 400 partes iguais. Porém, as unidades mais usadas são o grau e o radiano.

Reflita

"Retificando" ou "esticando" o arco $\overset{\frown}{AB}$, de medida angular 1 rad, obtemos um segmento de reta com medida de comprimento igual à do raio da circunferência.

Use um transferidor e verifique, no arco $\overset{\frown}{AB}$ da figura, a quantos graus corresponde 1 rad. Aproximadamente 57°.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

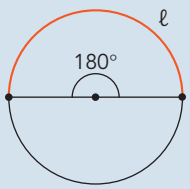
Proporcionalidade da medida de comprimento e da medida angular de arcos

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Considere uma circunferência cujo raio tem medida de comprimento 1 cm. A medida de comprimento dessa circunferência é $C = 2\pi \cdot 1 \text{ cm} = 2\pi \text{ cm}$.

Um arco de medida angular 180° corresponde à metade da circunferência, ou seja, a uma semicircunferência. Então, a medida de comprimento desse arco é $\ell = \frac{2\pi \text{ cm}}{2} = \pi \text{ cm}$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

1. Qual é a medida de comprimento ℓ de um arco de medida angular 90° nessa circunferência? $\ell = \frac{2\pi \text{ cm}}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ cm}$
2. E de um arco de medida angular 45°? $\ell = \frac{2\pi \text{ cm}}{8} = \frac{\pi}{4} \text{ cm}$
3. A medida de comprimento de cada arco dessa circunferência é diretamente proporcional à medida angular do arco? Justifique sua resposta.
4. Em uma circunferência cujo raio tem medida de comprimento 2 cm, essa relação de proporcionalidade se manteria? E em uma circunferência com raio de medida de comprimento r? Justifique as respostas. Sim. Sim. Dividindo a medida angular de um arco por 2 (por 4 ou por 8), a medida de comprimento do arco fica dividida por 2 (por 4 ou por 8, respectivamente).

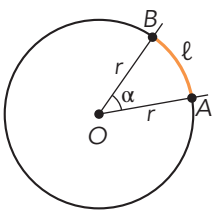
Fique atento

Lembre-se de que a medida de comprimento C de uma circunferência, com raio de medida de comprimento r, é dada por $C = 2\pi r$, em que π é um número irracional:

$\pi \simeq 3{,}14$

A medida de comprimento de um arco e a medida de abertura do ângulo central que o subtende são proporcionais; sendo assim, a medida de comprimento do arco e a medida angular do arco também são proporcionais.

Considere uma circunferência cujo raio tem medida de comprimento r. Se, por definição, um arco de medida angular 1 rad tem medida de comprimento r, então um arco de medida angular 2 rad tem medida de comprimento $2r$ e, generalizando, um arco de medida angular α rad tem medida de comprimento $\ell = \alpha \cdot r$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

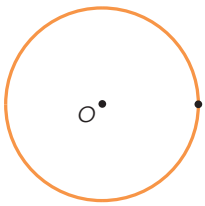
Na relação $\ell = \alpha \cdot r$, a medida angular α deve estar em radianos.

3. Sim. Exemplo de justificativa: Pois, dividindo a medida angular de um arco por 2 (por 4 ou por 8), a medida de comprimento do arco fica dividida por 2 (por 4 ou por 8, respectivamente).

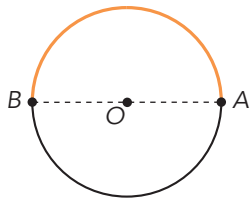
Relação entre as unidades de medida angular de arcos

Como $2\pi r$ é a medida de comprimento de uma circunferência cuja medida de comprimento do raio é r, podemos determinar, em radianos, a medida angular do arco correspondente a uma volta inteira na circunferência. Acompanhe a seguir.

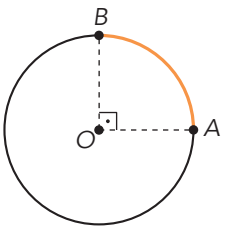
$$\ell = \alpha \cdot r \Rightarrow \alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$



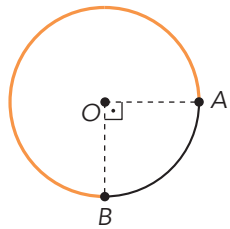
Arco $\overset{\frown}{AB}$ de medida angular 360° ou 2π rad.



Arco $\overset{\frown}{AB}$ de medida angular 180° $\left(\frac{360°}{2}\right)$ ou π rad $\left(\frac{2\pi}{2} \text{ rad}\right)$.



Arco $\overset{\frown}{AB}$ de medida angular 90° $\left(\frac{360°}{4}\right)$ ou $\frac{\pi}{2}$ rad $\left(\frac{2\pi}{4} \text{ rad}\right)$.



Arco $\overset{\frown}{AB}$ de medida angular 270° $\left(\frac{3}{4} \text{ de } 360°\right)$ ou arco de $\frac{3\pi}{2}$ rad $\left(\frac{3}{4} \text{ de } 2\pi \text{ rad}\right)$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, sabendo que 180° é equivalente a π rad, podemos fazer a conversão de unidades entre graus e radianos usando diferentes estratégias.

Fique atento

A conversão das unidades de medida angulares é útil em algumas situações, pois é mais simples responder à pergunta "Qual é a medida de comprimento de um arco de medida angular 2 rad?" do que à pergunta "Qual é a medida de comprimento de um arco de medida angular 115°?", ainda que a medida seja aproximadamente a mesma, dado que 2 rad $\simeq$ 115°.

Por exemplo, considere uma circunferência com raio de medida de comprimento 10 cm. Calculamos:

$$\ell = \alpha \cdot r = 2 \cdot 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

$$C = 2\pi \cdot r \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \text{ cm} = 62{,}8 \text{ cm}$$

$$\frac{C}{360°} = \frac{\ell}{115°} \Rightarrow \frac{62{,}8 \text{ cm}}{360°} = \frac{\ell}{115°} \Rightarrow \ell \simeq 20 \text{ cm}$$

Então, a medida de comprimento desse arco é 20 cm.

Acompanhe alguns exemplos de medidas angulares de arcos.

a) $\alpha = 90°$

90° é o mesmo que $\frac{1}{2}$ de 180°; então, é $\frac{1}{2}$ de π rad. Logo: $90° = \frac{\pi}{2}$ rad.

Ou podemos calcular de outra maneira: $90° = \frac{180°}{2} = \frac{\pi \text{ rad}}{2} = \frac{\pi}{2}$ rad.

b) $\alpha = 30°$

30° é o mesmo que $\frac{1}{6}$ de 180°; então, é $\frac{1}{6}$ de π rad. Logo: $30° = \frac{\pi}{6}$ rad.

Ou, usando a regra de 3:

Em graus		Em radianos
180	———	π
30	———	α

$$\frac{\cancel{180}^{6}}{\cancel{30}_{1}} = \frac{\pi}{\alpha} \Rightarrow 6\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Logo: $30° = \frac{\pi}{6}$ rad.

c) $\alpha = 60°$

$60°$ é o mesmo que $\frac{1}{3}$ de $180°$; então, é $\frac{1}{3}$ de π rad. Logo: $60° = \frac{\pi}{3}$ rad.

d) $\alpha = 120°$

$120°$ é o dobro de $60°$; então, é o dobro de $\frac{\pi}{3}$ rad. Logo: $120° = \frac{2\pi}{3}$ rad.

e) $\alpha = 330° = 11 \cdot 30° = 11 \cdot \frac{\pi}{6}$ rad $= \frac{11\pi}{6}$ rad

f) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ rad

$$\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \frac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$$

Logo: $\frac{3\pi}{4}$ rad $= 135°$.

g) $\alpha = 1$ rad

Em graus		Em radianos
180	———	π
α	———	1

$$\frac{180}{\alpha} = \frac{\pi}{1} \Rightarrow \pi\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = \frac{180}{\pi} \simeq \frac{180}{3{,}14} \simeq 57{,}3°$$

Logo: 1 rad $\simeq 57{,}3°$.

h) $\alpha = 1°$

$$\frac{180}{1} = \frac{\pi}{\alpha} \Rightarrow 180\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{180} \simeq \frac{3{,}14}{180} \simeq 0{,}017$$

Logo: $1° \simeq 0{,}017$ rad.

i) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ rad $= 7 \cdot \frac{\pi}{6}$ rad $= 7 \cdot 30° = 210°$

Fique atento

Como 2π rad $= 360°$, os valores que aparecem arredondados nos exemplos **g** e **h** são:

$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \simeq$

$\simeq 57° 17' 44{,}8''$

$1° = \frac{\pi}{180}$ rad $\simeq$

$\simeq 0{,}01745$ rad

Fique atento

Quando a medida angular está em radianos, podemos omitir a unidade de medida. Por exemplo: $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ rad ou, simplesmente, $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

Assim, quando a unidade da medida angular não for indicada, subentende-se que é o radiano. Acompanhe outros exemplos.

$$\frac{\pi}{6} = 30° \qquad \frac{\pi}{4} = 45°$$

Atividades resolvidas

1. Determine a medida angular, em radianos, de um arco de medida de comprimento 20 cm em uma circunferência com raio de medida de comprimento 8 cm.

Resolução

Pelo enunciado, sabemos que $\ell = 20$ cm e $r = 8$ cm. Então:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{20}{8} = 2{,}5 \qquad \text{ou} \qquad \frac{8 \text{ cm}}{1 \text{ rad}} = \frac{20 \text{ cm}}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{20}{8} \text{ rad} = 2{,}5 \text{ rad}$$

Portanto, a medida angular desse arco é 2,5 rad.

Atividades

Não escreva no livro

1. No caderno, realize a conversão de cada medida angular indicada de graus para radianos, ou vice-versa.

a) $45° \; \frac{\pi}{4}$ rad

b) $210° \; \frac{7\pi}{6}$ rad

c) $300° \; \frac{5\pi}{3}$ rad

d) $135° \; \frac{3\pi}{4}$ rad

e) $\frac{\pi}{6}$ rad $30°$

f) $\frac{5\pi}{6}$ rad $150°$

g) $\frac{5\pi}{4}$ rad $225°$

h) $\frac{4\pi}{3}$ rad $240°$

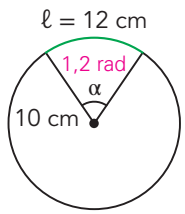
2. Calcule a medida de abertura, em radianos, do ângulo central correspondente a um arco de medida de comprimento 15 cm contido em uma circunferência com $r = 3$ cm.

$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{15}{3} = 5$; logo, $\alpha = 5$ rad.

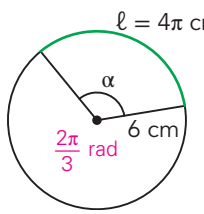
3. Qual é a medida de comprimento do arco correspondente a um ângulo central de medida de abertura 45°, contido em uma circunferência com $r = 2$ cm? $\frac{\pi}{2}$ cm ou aproximadamente 1,57 cm.

4. Determine a medida angular, em radianos, de cada arco de circunferência dado.

a)



b)



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

5. Um pêndulo tem medida de comprimento 15 cm e, quando em movimento, as posições extremas formam um ângulo de medida de abertura 60°. Qual é a medida de comprimento do arco que a extremidade do pêndulo descreve nesse movimento?

$\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad; logo $\ell = \alpha \cdot r = \frac{\pi}{3} \cdot 15 = 5\pi \simeq 15{,}7$

A medida de comprimento do arco é 5π cm ou aproximadamente 15,7 cm.

Texto para a próxima atividade.

Em 1792, durante a Revolução Francesa, houve na França uma reforma de pesos e medidas que culminou na adoção de uma nova unidade de medida de abertura de ângulos. O objetivo era que a unidade de medida de abertura de ângulos ficasse em conformidade com o sistema métrico decimal. Assim, essa nova unidade dividia o ângulo reto em 100 partes iguais, chamadas **grados (gr)**. Dessa maneira, 1 grado (1 gr) é, então, a unidade que divide o ângulo reto em 100 partes iguais, e 1 minuto é a unidade que divide o grado em 100 partes iguais, bem como 1 segundo é a unidade que divide o minuto em 100 partes iguais.

A ideia não foi muito bem-sucedida, mas atualmente ainda encontramos na maioria das calculadoras científicas as 3 unidades de medida: grau, radiano e grado.

Fonte dos dados: RAMANI, Madhvi. A incrível história de como a França criou o sistema métrico decimal. *BBC News Brasil*, 8 jan. 2022. Disponível em: https://tedit.net/eqgibm. Acesso em: 21 jul. 2024.

6. Junte-se a um colega para responder às perguntas no caderno, considerando o texto anterior.

a) A quantos grados equivale meia-volta de circunferência? E uma volta inteira? 200 gr; 400 gr.

b) A quantos grados equivale 1 rad? $\frac{200}{\pi}$ gr

c) A quantos graus equivale 1 gr? 0,9°

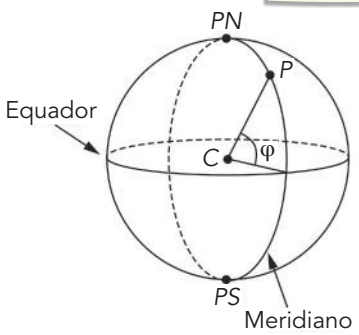
7. **(Enem)** As coordenadas usualmente utilizadas na localização de um ponto sobre a superfície terrestre são a latitude e a longitude.

Não escreva no livro

Para tal, considera-se que a Terra tem a forma de uma esfera.

Um meridiano é uma circunferência sobre a superfície da Terra que passa pelos polos Norte e Sul, representados na figura por *PN* e *PS*. O comprimento da semicircunferência que une os pontos *PN* e *PS* [é] igual a 20 016 km. A linha do Equador também é uma circunferência sobre a superfície da Terra, com raio igual ao da Terra, sendo que o plano que a contém é perpendicular ao que contém qualquer meridiano.

Seja *P* um ponto na superfície da Terra, *C* o centro da Terra e o segmento $\overline{PC}$ um raio, conforme mostra a figura. Seja φ o ângulo que o segmento $\overline{PC}$ faz com o plano que contém a linha do Equador. A medida em graus de φ é a medida da latitude de *P*.



Reprodução/Enem, 2019.

Suponha que a partir da linha do Equador um navio viaja subindo em direção ao Polo Norte, percorrendo um meridiano, até um ponto *P* com 30 graus de latitude. Quantos quilômetros são percorridos pelo navio?

a) 1668
b) 3 336
c) 5 004
d) 6 672
e) 10 008

O arco formado pelos pontos *PN* e *PS* é uma semicircunferência e tem medida de comprimento 20 016 km. Queremos saber a medida de comprimento do arco com medida angular 30°, ou seja, que corresponde a $\frac{1}{6}$ da semicircunferência.
Então: $\frac{1}{6} \cdot 20\,016 = 3\,336$. Alternativa **b**.

Circunferência orientada e circunferência trigonométrica

A partir de agora, ao estabelecer a circunferência trigonométrica, poderemos ampliar as noções de seno e cosseno de um ângulo para medidas de abertura maiores do que 360° e para medidas de abertura negativas.

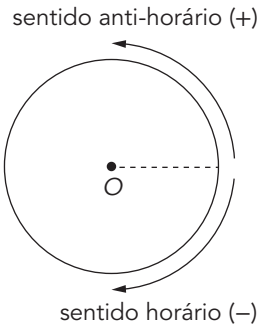
Circunferência orientada

A cada número real, podemos associar um percurso em uma circunferência. No caso de uma circunferência cuja medida de comprimento do raio é 1 ($r = 1$), a medida de comprimento desse percurso corresponde ao número real escolhido.

Circunferência orientada é toda circunferência na qual convencionamos como positivo um dos sentidos do percurso (horário ou anti-horário).

Nesta coleção, convencionamos como positivo o sentido anti-horário. Assim, se o número real for positivo, o percurso será feito no sentido anti-horário, e se o número real for negativo, o percurso será feito no sentido horário.

Conforme estudamos, a medida de comprimento ℓ de um arco de circunferência depende da medida de comprimento *r* do raio da circunferência, mas a medida angular α, não.



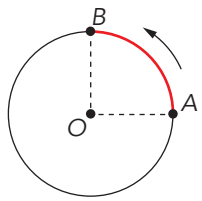
Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que $\ell = \alpha \cdot r$ (com α em radianos), para $r = 1$, temos $\ell = \alpha$.

Acompanhe alguns exemplos dessa associação de números reais a percursos em uma circunferência.

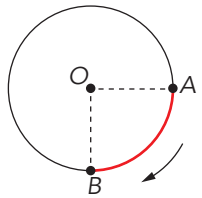
a) Número real $\frac{\pi}{2}$

A esse número associamos, em uma circunferência com $r = 1$, o percurso no sentido anti-horário, representado pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ de medida de comprimento $\frac{\pi}{2}$.



b) Número real $-\frac{\pi}{2}$

A esse número associamos, em uma circunferência com $r = 1$, o percurso no sentido horário, representado pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ de medida de comprimento $\frac{\pi}{2}$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

Não escreva no livro

8. Esboce no caderno o desenho para representar, em uma circunferência com $r = 2$ unidades de comprimento, cada arco de medida de comprimento dada.

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

a) π

b) 2π

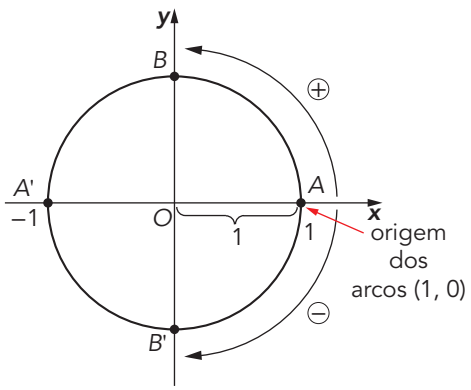
c) $-\frac{3\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{4}$

Circunferência trigonométrica

Circunferência trigonométrica é a circunferência orientada com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cujo raio tem medida de comprimento 1 unidade de medida e na qual o sentido positivo é o anti-horário.

Vamos associar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais à circunferência trigonométrica de centro O, fixando o ponto $A(1, 0)$ como origem dos arcos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

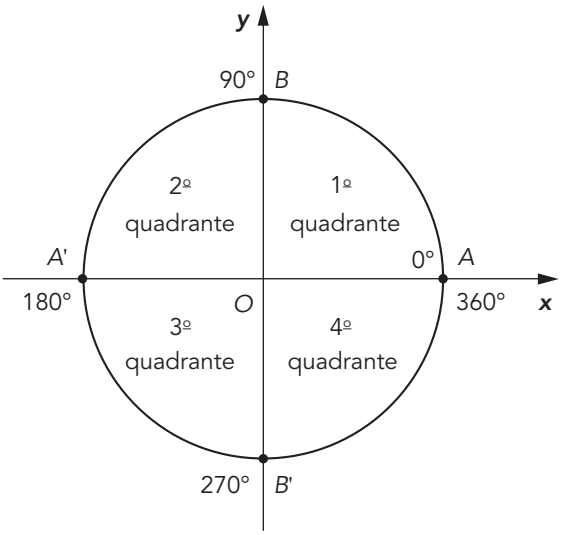
Não escreva no livro

Reflita

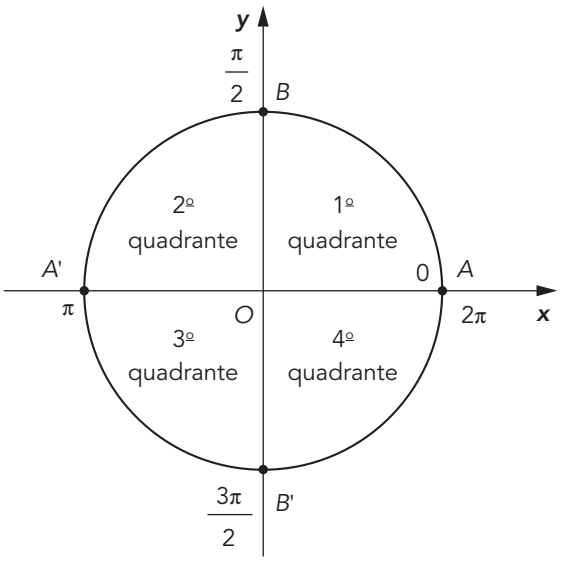
Os pontos B, A' e B' dessa circunferência trigonométrica correspondem a quais pares ordenados?

$B(0, 1)$; $A'(-1, 0)$ e $B'(0, -1)$.

Os eixos x e y dividem a circunferência trigonométrica em 4 partes congruentes, chamadas **quadrantes**, como apresentado a seguir.



Circunferência trigonométrica indicada em graus.



Circunferência trigonométrica indicada em radianos.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

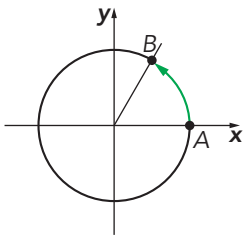
Observações

- Os pontos A, B, A' e B' são pontos dos eixos e, por isso, não são considerados pontos dos quadrantes.
- Para todo ponto (x, y) pertencente à circunferência trigonométrica, temos $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant y \leqslant 1$.
- Analisando os arcos com medida angular de 0° a 360° (ou de 0 a 2π rad), podemos afirmar que:
  - são do 1º quadrante os arcos com medidas angulares entre 0° e 90° $\left(\text{ou } 0 \text{ e } \frac{\pi}{2}\right)$, como os arcos de $30° = \frac{\pi}{6}$, $45° = \frac{\pi}{4}$ e $60° = \frac{\pi}{3}$;
  - são do 2º quadrante os arcos com medidas angulares entre 90° e 180° $\left(\text{ou } \frac{\pi}{2} \text{ e } \pi\right)$, como os arcos de $120° = \frac{2\pi}{3}$ e $150° = \frac{5\pi}{6}$;
  - são do 3º quadrante os arcos com medidas angulares entre 180° e 270° $\left(\text{ou } \pi \text{ e } \frac{3\pi}{2}\right)$, como os de $210° = \frac{7\pi}{6}$ e $240° = \frac{4\pi}{3}$;
  - são do 4º quadrante os arcos com medidas angulares entre 270° e 360° $\left(\text{ou } \frac{3\pi}{2} \text{ e } 2\pi\right)$, como os de $300° = \frac{5\pi}{3}$ e $320° = \frac{16\pi}{9}$.

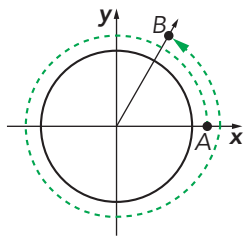
Arcos com medidas 0°, 90°, 180°, 270° e 360° (ou seus correspondentes, em radianos) não pertencem a nenhum quadrante, e sim aos eixos coordenados.

Arcos côngruos (ou arcos congruentes)

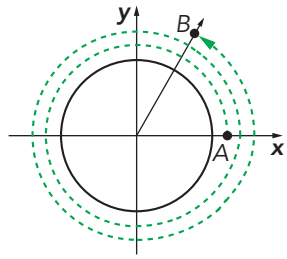
Toda vez que 2 arcos diferentes, iniciados em (1, 0), têm extremidade final no mesmo ponto da circunferência (por exemplo, no ponto (0, 1)), são chamados de **arcos côngruos** ou **arcos congruentes**. É conveniente notar que as medidas angulares de todos os arcos côngruos diferem entre si de um múltiplo de 360°, ou 2π rad, que é a medida angular de cada volta.



Ao número $\frac{\pi}{3}$ rad está associado o ponto *B*.



Ao número $\frac{\pi}{3} + 2\pi$ rad também está associado o ponto *B*.



Ao número $\frac{\pi}{3}$ rad $+ 2 \cdot 2\pi$ rad está associado o mesmo ponto *B*.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Imagine o ponto *B* como um móvel que se desloca sobre a circunferência no sentido anti-horário, a partir do ponto *A*.

- Na 1ª figura, o ponto deslocou-se 60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad de *A* até *B*.
- Na 2ª figura, o ponto deslocou-se 1 volta inteira (360° ou 2π rad) e mais 60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad, ou seja, deslocou-se 420° ou $\frac{7\pi}{3}$ rad.
- Na 3ª figura, o ponto deslocou-se 2 voltas inteiras ($2 \cdot 360°$ ou $2 \cdot 2\pi$ rad) e mais 60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad, ou seja, 780° ou $\frac{13\pi}{3}$ rad.

Fique atento

Perceba que na circunferência trigonométrica há vários números reais associados à mesma extremidade de arco.

Supondo que o ponto se deslocasse *k* voltas inteiras, o número associado à extremidade *B* do arco $\overset{\frown}{AB}$ seria escrito assim:

$$60° + k \cdot 360° \text{ ou } \frac{\pi}{3} \text{ rad} + k \cdot 2\pi \text{ rad, com } k \in \mathbb{Z}.$$

Professor, questione os estudantes sobre o que acontece quando *k* é negativo. Nesse caso, a circunferência é percorrida no sentido horário.

Sendo assim, podemos definir os arcos côngruos.

Dois arcos são **côngruos** (ou **congruentes**) quando as medidas angulares diferem de um múltiplo de 360° ou 2π rad.

Acompanhe os exemplos de arcos côngruos.

a) 30° e $30° + 360°$ $\left(\text{ou } \frac{\pi}{6} \text{ rad e } \frac{\pi}{6} \text{ rad} + 2\pi \text{ rad}\right)$.

b) 45° e $45° + 2 \cdot 360°$ $\left(\text{ou } \frac{\pi}{4} \text{ rad e } \frac{\pi}{4} \text{ rad} + 2 \cdot 2\pi \text{ rad}\right)$.

c) 60° e $60° - 3 \cdot 360°$ $\left(\text{ou } \frac{\pi}{3} \text{ rad e } \frac{\pi}{3} \text{ rad} - 3 \cdot 2\pi \text{ rad}\right)$.

Não escreva no livro

Reflita

No exemplo **a**, podemos afirmar que são côngruos os arcos de medidas angulares 30° e 390° ou $\frac{\pi}{6}$ rad e $\frac{13\pi}{6}$ rad.
No exemplo **b**, quais arcos são côngruos?

Os arcos de medidas angulares 45° e 765° ou $\frac{\pi}{4}$ rad e $\frac{17\pi}{4}$ rad.

No exemplo **c**, o sinal negativo significa que as 3 voltas completas foram dadas no sentido horário. Dizemos, nesse caso, que $60° - 3 \cdot 360° = -1020°$ ou $-\frac{17\pi}{3}$ rad são arcos negativos.

De modo geral:

- se um arco tem medida angular α, em graus, então a medida angular dos arcos côngruos a ele pode ser dada pela expressão $\alpha + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- se um arco tem medida angular α radianos, então a medida angular dos arcos côngruos a ele pode ser dada pela expressão $(\alpha + k \cdot 2\pi)$ rad ou $(\alpha + 2k\pi)$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$;
- como a cada ponto da circunferência podem estar associados infinitos arcos côngruos, dizemos que o arco da 1ª volta positiva (entre 0° e 360° ou entre 0 rad e 2π rad), associado a um ponto da circunferência, é a **1ª determinação positiva** de qualquer arco côngruo associado ao mesmo ponto.

Atividades resolvidas

2. No caderno, escreva a expressão geral dos arcos côngruos a cada arco de medida angular indicada.

a) 45°

b) $\frac{3\pi}{4}$ rad

Resolução

a) A medida angular do arco é dada em graus ($\alpha = 45°$), então a expressão geral é:

$$\alpha + k \cdot 360° = 45° + k \cdot 360°, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

b) A medida angular do arco é dada em radianos $\left(\alpha = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}\right)$, então a expressão geral é:

$$(\alpha + 2k\pi) \text{ rad} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad} + 2k\pi \text{ rad}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

3. Qual é o menor arco não negativo que é côngruo ao arco de medida angular 1320°, ou seja, qual é a 1ª determinação positiva do arco de medida angular 1320°?

Resolução

Devemos obter o menor valor não negativo de α tal que $\alpha + k \cdot 360° = 1320°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Então:

1320	360
240	3
α	k

$$1320° = 240° + 3 \cdot 360°$$

Logo, o menor arco não negativo, côngruo ao arco dado, tem medida angular 240°.

Fique atento

Nesta atividade, dizemos que 240° é a 1ª determinação positiva de 1320°, ou que 1320° foi reduzido à 1ª volta.

Reflita

Não escreva no livro

Qual é o significado de um **número não negativo**? Levando isso em conta, como deve ser a 1ª determinação positiva de um arco?

Número não negativo é o mesmo que número positivo ou zero. A primeira determinação positiva de um arco deve ter medida angular positiva ou zero.

Atividade resolvida passo a passo

4. (UEG) Dois pontos percorrem uma circunferência de raio unitário em sentidos contrários, partindo do mesmo ponto no mesmo instante. Um percorre [um arco de medida angular] $\frac{14\pi}{3}$ rad no sentido anti-horário e para, enquanto o outro percorre $\frac{43\pi}{6}$ rad no sentido horário e também para. Quando os dois pontos terminam o percurso, a [medida angular do arco determinado] entre eles é:

a) $\frac{\pi}{6}$ rad. **c)** $\frac{\pi}{4}$ rad. **e)** $\frac{2\pi}{3}$ rad.

b) $\frac{\pi}{3}$ rad. **d)** $\frac{\pi}{2}$ rad.

Resolução

Lendo e compreendendo

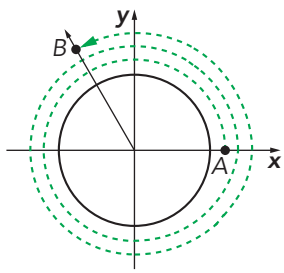
a) O que é dado no problema?
A medida angular dos arcos que 2 pontos percorrem em uma circunferência; um deles a percorre no sentido horário, e o outro, no sentido anti-horário.

b) O que se pede?
A medida angular do arco determinado entre os 2 pontos após eles terminarem o percurso.

Planejando a solução

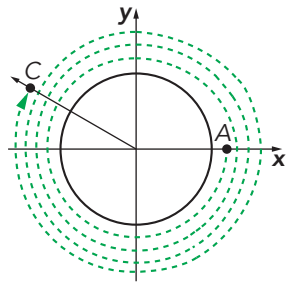
De acordo com os dados do enunciado, podemos representar o percurso dos 2 pontos na circunferência trigonométrica.

O ponto que percorre um arco de medida angular $\frac{14\pi}{3}$ rad no sentido anti-horário dá 2 voltas completas e para no $\frac{2\pi}{3}$ rad, associado ao ponto *B*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O ponto que percorre um arco de medida angular $\frac{43\pi}{6}$ rad no sentido horário dá 3 voltas completas e para no $-\frac{7\pi}{6}$ rad, associado ao ponto *C*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Executando o que foi planejado

No final do percurso do ponto que segue no sentido anti-horário, temos:

$$\frac{14\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3}$$

No final do percurso do ponto que segue no sentido horário, temos:

$-\frac{43\pi}{6} = -6\pi - \frac{7\pi}{6}$ (os valores são negativos por se referirem ao sentido horário).

A localização de $-\frac{7\pi}{6}$ rad no sentido horário, na circunferência trigonométrica, equivale a $\frac{5\pi}{6}$ rad no sentido anti-horário, pois $2\pi - \frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Para encontrar a medida angular do arco determinado entre os 2 pontos após terminarem o percurso, temos:

$$\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

Logo, a medida angular é $\frac{\pi}{6}$ rad.

Emitindo a resposta

Alternativa **a**.

Ampliando a atividade

Não escreva no livro

Qual seria a medida angular do arco determinado entre os 2 pontos se eles fizessem o mesmo percurso indicado anteriormente, mas ambos no sentido anti-horário?

Em um dos pontos, temos: $\frac{14\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3}$; no outro, temos: $\frac{43\pi}{6} = 6\pi + \frac{7\pi}{6}$.
Então, temos: $\frac{7\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$; logo, a medida angular é $\frac{\pi}{2}$ rad.

Atividades

9. Escreva no caderno a expressão geral dos arcos congruentes a cada arco de medida angular dada.

a) $60°$
$60° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

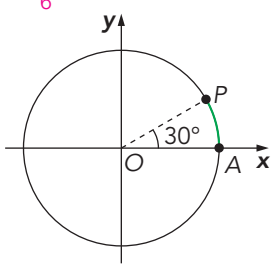
b) $120°$
$120° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\frac{5\pi}{4}$ rad
$\frac{5\pi}{4}$ rad $+ 2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

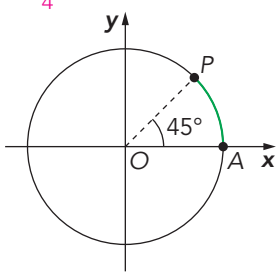
d) $\frac{11\pi}{6}$ rad
$\frac{11\pi}{6}$ rad $+ 2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

10. Escreva no caderno a expressão geral, em radianos, de cada arco $\overset{\frown}{AP}$ representado na circunferência trigonométrica.

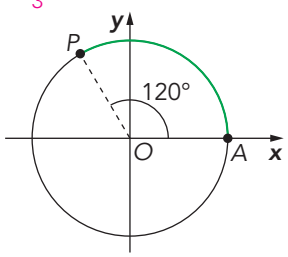
a) $\frac{\pi}{6}$ rad $+ 2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.



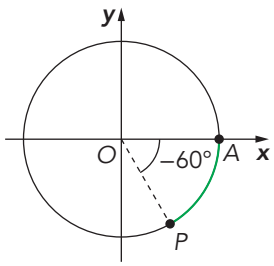
b) $\frac{\pi}{4}$ rad $+ 2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.



c) $\frac{2\pi}{3}$ rad $+ 2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.



d) $-\frac{\pi}{3}$ rad $+ 2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

11. Calcule no caderno a 1ª determinação positiva de cada arco.

a) $780°$ $60°$

b) $1140°$ $60°$

c) $-400°$ $320°$

d) $\frac{15\pi}{2}$ rad $\frac{3\pi}{2}$ rad

e) $\frac{10\pi}{3}$ rad $\frac{4\pi}{3}$ rad

f) $\frac{9\pi}{2}$ rad $\frac{\pi}{2}$ rad

12. Junte-se a um colega para resolver a atividade a seguir no caderno.

a) Converta $\frac{7\pi}{4}$ rad para graus. $315°$

b) Qual é a medida de comprimento de um arco correspondente a um ângulo central de medida de abertura $60°$, contido em uma circunferência com $r = 1{,}5$ cm? $\frac{\pi}{2}$ cm

c) Calcule a medida angular do menor arco não negativo côngruo de $2\,650°$. $130°$

d) Qual é a expressão geral dos arcos côngruos de $\frac{14\pi}{3}$ rad? $\frac{2\pi}{3}$ rad $+ 2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

13. Em 2019, durante um importante evento de esportes radicais, o estadunidense Mitchie Brusco (1997-) conquistou a façanha de se tornar o 1º atleta a fazer uma manobra de $1260°$ com o *skate*.



Sean M. Haffey/Getty Images/AFP

Mitchie Brusco, aos 22 anos, no dia 3 de agosto de 2019, marcou o nome dele na história da modalidade ao ser a 1ª pessoa a fazer a manobra de 1260 graus. Foto de 2023, na cidade de Ventura, na Califórnia (Estados Unidos).

Fonte dos dados: QUE façanha! Em competição de skate, americano consegue o primeiro 1260° da história. *GE*, 3 ago. 2019. Disponível em: https://tedit.net/7sw10d. Acesso em: 21 jul. 2024.

A manobra de $1260°$ consiste em dar quantas voltas no ar em torno de si mesmo?

Temos que $1\,260° = 3 \cdot 360° + 180°$.
Ou $\frac{1\,260°}{360°} = 3{,}5$. Portanto, corresponde a 3 voltas e meia.

Explorando a ideia de seno e cosseno de um número real

No capítulo anterior, definimos as razões trigonométricas sen α e cos α para ângulos agudos, ou seja, para $0 < \alpha < 90°$. Para esses valores de α, foi demonstrada uma importante relação:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Depois, os valores de sen α e cos α foram estendidos para $\alpha = 0°$ (ângulo nulo), $\alpha = 90°$ (ângulo reto) e $90° < \alpha < 180°$ (ângulos obtusos) a fim de possibilitar a resolução de problemas que envolvam triângulos quaisquer.

$$\operatorname{sen} 90° = 1 \qquad \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (180° - \alpha)$$

$$\cos 90° = 0 \qquad \cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)$$

No entanto, não justificamos essas relações quando as apresentamos. Agora, tendo ampliado o ambiente de trabalho para a circunferência trigonométrica, vamos definir os valores de sen t e cos t para todo número real t, ou seja, o **seno de um número real** e o **cosseno de um número real**, em vez de seno e cosseno de medidas de abertura de ângulos, e justificaremos os valores apresentados anteriormente. Faremos essa definição usando uma função f.

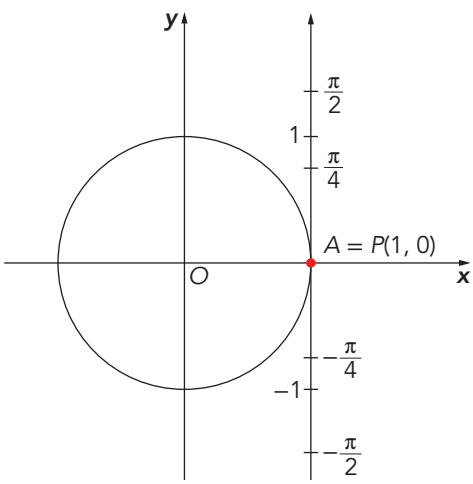
Fique atento

Lembre-se de como podemos definir uma função: dados 2 conjuntos não vazios A e B, uma função f de A em B é uma relação que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

O conjunto A é o domínio (D) da função f, o conjunto B é o contradomínio (CD), e o conjunto de todos os y obtidos pela função é o conjunto imagem Im(f).

Nesse caso, para cada número real t associamos um único ponto $P(t)$ da circunferência trigonométrica. Acompanhe como podemos determinar esse ponto.

- Quando $t = 0$, o ponto P coincide com $A(1, 0)$.



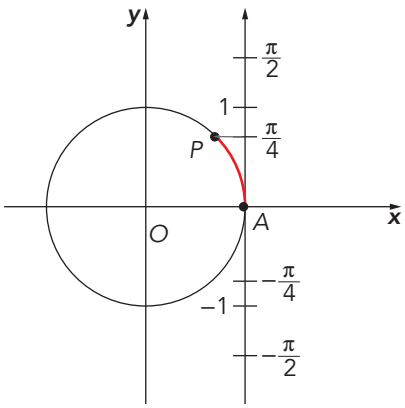
Banco de imagens/Arquivo da editora

O ponto P está associado ao número real 0.

- Quando $t > 0$, medimos na circunferência trigonométrica, a partir do ponto $A(1, 0)$, um arco de medida de comprimento t no sentido positivo (sentido anti-horário). A extremidade desse arco é o ponto $P(t)$.

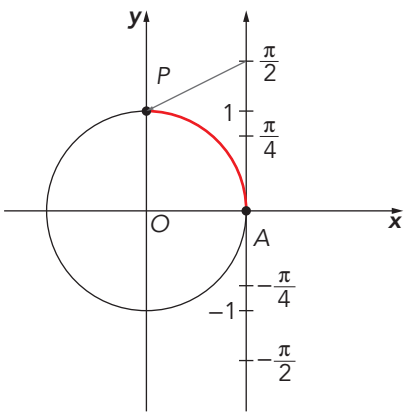
  Acompanhe os exemplos.

a)



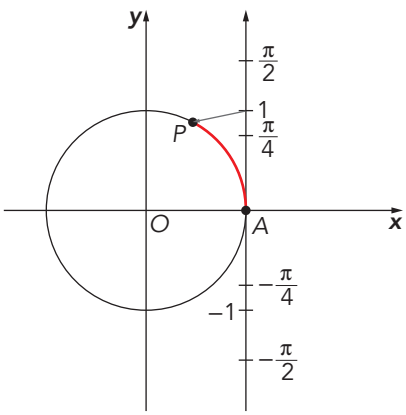
O ponto P está associado ao número real $\frac{\pi}{4}$.

b)



O ponto P está associado ao número real $\frac{\pi}{2}$.

c)

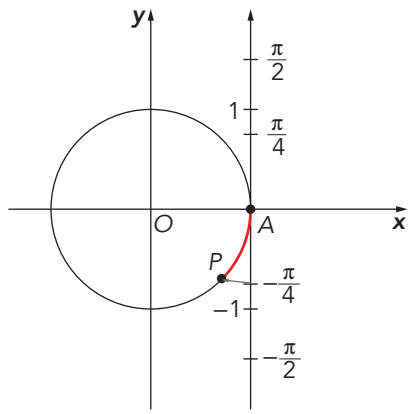


O ponto P está associado ao número real 1.

- Quando $t < 0$, medimos na circunferência trigonométrica, a partir do ponto $A(1, 0)$, um arco de medida de comprimento t no sentido negativo (sentido horário). A extremidade desse arco é o ponto $P(t)$.

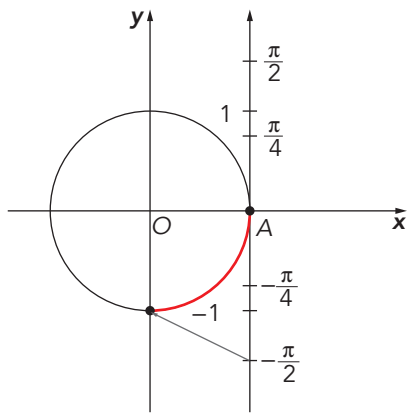
  Acompanhe os exemplos.

a)



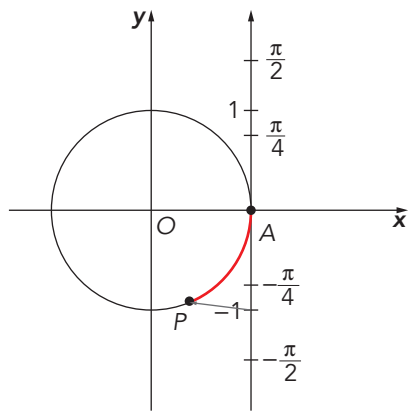
O ponto P está associado ao número real $-\frac{\pi}{4}$.

b)



O ponto P está associado ao número real $-\frac{\pi}{2}$.

c)



O ponto P está associado ao número real -1.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

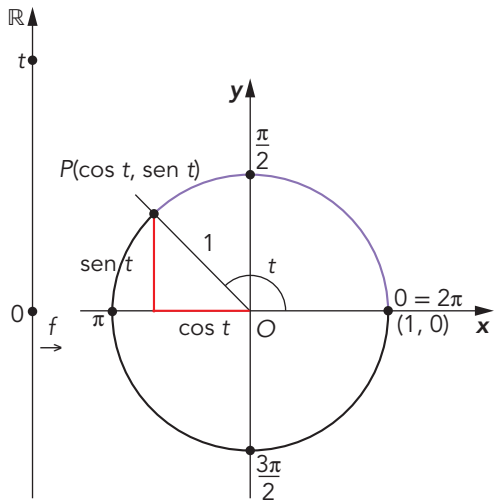
Formalizando a definição de seno e cosseno de um número real

Para cada número real t fica associado um ponto $P(t)$, chamado de imagem de t na circunferência trigonométrica, que representa a extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ na circunferência, cuja medida de comprimento é t.

Com essa função, definimos seno e cosseno de um número real t.

Dado $t \in \mathbb{R}$ (ou seja, t pertencente ao conjunto dos números reais), e sendo (x, y) as coordenadas do ponto $P(t)$, por definição, temos $\cos t = x$ e $\operatorname{sen} t = y$.

Banco de imagens/Arquivo da editora



sen t é a ordenada de P.
cos t é a abscissa de P.

Fique atento

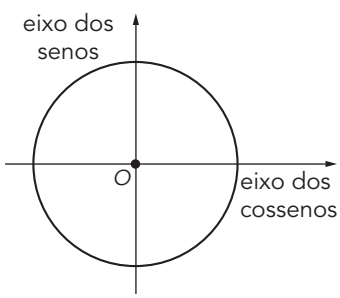
Apesar de estarmos estudando apenas o seno e o cosseno de um número real t, podemos salientar que a razão trigonométrica tangente que estudamos anteriormente no triângulo retângulo, $\operatorname{tan} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ (sendo α a medida de abertura de um ângulo agudo de um triângulo retângulo), também é válida para a tangente de um número real:

$$\operatorname{tan} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}, \text{ com } \cos t \neq 0.$$

Observações

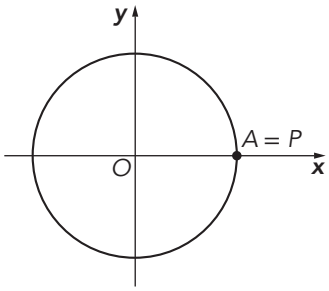
- Em uma circunferência trigonométrica, o eixo das abscissas também é chamado **eixo dos cossenos**, e o eixo das ordenadas também é chamado **eixo dos senos**.
- Quando $0 < t < \pi$, temos que $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} \alpha$ e $\cos t = \cos \alpha$, em que α é a medida de abertura do ângulo central que subtende o arco de medida de comprimento t. Assim, temos a conexão entre seno e cosseno de um número real e seno e cosseno de um ângulo.
- A relação fundamental entre seno e cosseno é válida para qualquer número real t:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

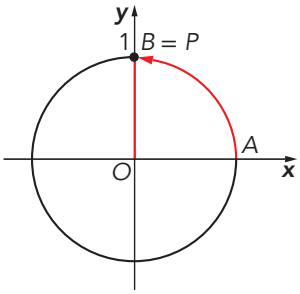
Nas figuras geométricas representadas a seguir, analise o que acontece com os valores de sen t (ordenada do ponto P) e cos t (abscissa do ponto P) quando P coincide com um dos pontos $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $A'(-1, 0)$ e $B'(0, -1)$ dos eixos da circunferência trigonométrica. Perceba que, como definimos anteriormente, sen $90° = 1$ e cos $90° = 0$.



$t = 0$ (0°)

$\text{sen } 0 = 0$

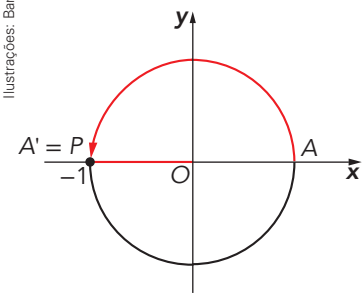
$\cos 0 = 1$



$t = \frac{\pi}{2}$ (90°)

$\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

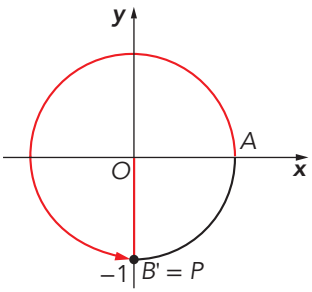
$\cos \frac{\pi}{2} = 0$



$t = \pi$ (180°)

$\text{sen } \pi = 0$

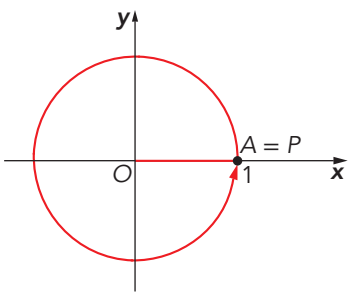
$\cos \pi = -1$



$t = \frac{3\pi}{2}$ (270°)

$\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$

$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$



$t = 2\pi$ (360°)

$\text{sen } 2\pi = 0$

$\cos 2\pi = 1$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Redução ao 1º quadrante

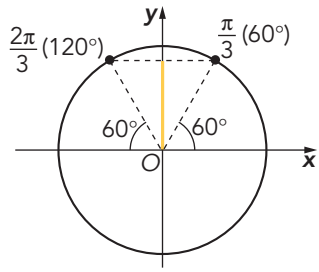
Para medidas de abertura de ângulos obtusos, você já estudou que podemos calcular o seno e o cosseno associando-os ao ângulo complementar. É o que ocorre também para o seno e o cosseno de números reais quando P está no 2º quadrante da circunferência trigonométrica.

A seguir, vamos mostrar por que essas relações são válidas e como podemos calcular o seno e o cosseno de números reais com P em qualquer quadrante. Para isso, usaremos a simetria dos pontos na circunferência trigonométrica.

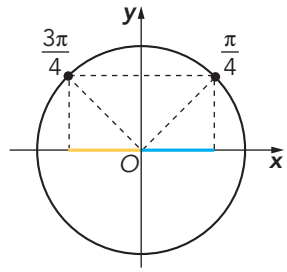
Para determinar o seno ou o cosseno de um número real em que P está no 2º quadrante, basta compará-lo ao número real correspondente do 1º quadrante, simétrico em relação ao eixo y.

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ (ponto } P \text{ no 2º quadrante)}$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$$

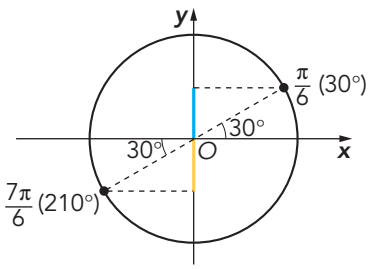


$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4}$$

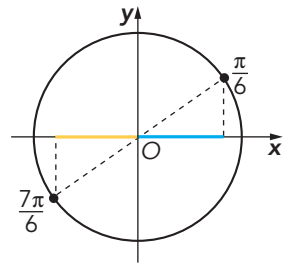
Para determinar o seno ou o cosseno de um número real em que P está no 3º quadrante, basta compará-lo ao número real correspondente do 1º quadrante, simétrico em relação à origem dos eixos.

$$\pi < x < \frac{3\pi}{2} \text{ (ponto } P \text{ no 3º quadrante)}$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

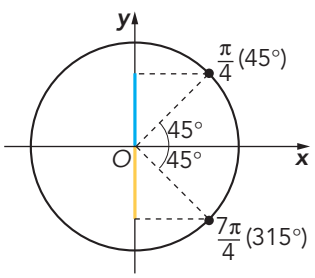


$$\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{6}$$

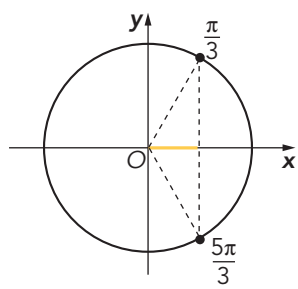
Para determinar o seno ou o cosseno de um número real em que P está no 4º quadrante, basta compará-lo ao número real correspondente do 1º quadrante, simétrico em relação ao eixo x.

$$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \text{ (ponto } P \text{ no 4º quadrante)}$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



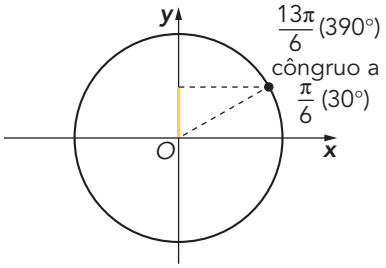
$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -\operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{7\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$



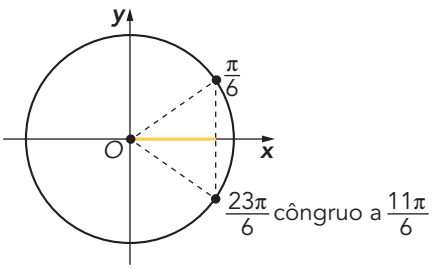
$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

Quando o número real é maior do que 2π, para calcular o seno e o cosseno basta considerar o arco côngruo a ele na 1ª volta e, depois, reduzi-lo ao 1º quadrante.

$$x > 2\pi$$



$$\operatorname{sen}\frac{13\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$



$$\cos\frac{23\pi}{6} = \cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{11\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

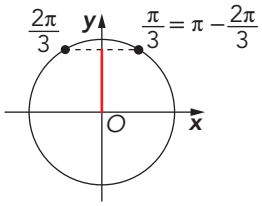
5. Faça um esboço de cada número real em uma circunferência trigonométrica e calcule o valor do seno ou cosseno indicado.

a) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ **b)** $\cos\frac{5\pi}{4}$

Resolução

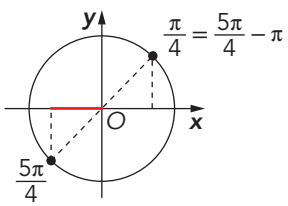
a) Temos $\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \pi$, então:

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866$$



b) Temos $\pi < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$, então:

$$\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq -0{,}707$$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

Não escreva no livro

14. Calcule o valor de cada seno ou cosseno e enuncie a resposta na forma decimal. Depois, confira as respostas com um colega.

a) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$ 0,5

b) $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{5}$ Aproximadamente −0,951.

c) $\operatorname{sen}\frac{37\pi}{6}$ 0,5

d) $\cos 6\pi$ 1

e) $\operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$ Aproximadamente −0,985.

15. Reúna-se com um colega e, juntos, calculem os possíveis valores reais de x em cada item.

a) $\operatorname{sen} x = -1$ $x = \frac{3\pi}{2}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = \frac{\pi}{4}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ $x = \frac{7\pi}{6}$ rad + $2k\pi$ rad ou $x = \frac{11\pi}{6}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

d) $\operatorname{sen} x = 0$ $x = k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

Além da sala de aula

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Eratóstenes e a medida de comprimento da circunferência da Terra



Eratóstenes ensinando em Alexandria, de Bernardo Strozzi, c. 1635. Óleo sobre tela, 78,9 cm × 99,4 cm.

Reprodução/Museu de Belas Artes de Montreal, Canadá.

O matemático, astrônomo, geógrafo, bibliotecário e poeta Eratóstenes (276 a.C.-194 a.C.) nasceu em Cirene, antiga colônia grega no norte da África, mas viveu e morreu em Alexandria, no Egito. Um dos feitos mais reconhecidos dele foi a concepção e execução de um experimento científico em que determinou a medida de comprimento da circunferência da Terra, considerado o 7º entre os 10 mais belos experimentos da Física, de acordo com a revista britânica internacional *Physics World*.

Conforme o artigo "Revivendo Eratóstenes" – escrito por Paulo Cesar R. Pereira e publicado em 2006 na *Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia* –, o valor encontrado para a medida de comprimento da circunferência da Terra no experimento do matemático teria sido de 250 000 estádios.

A conversão entre as unidades de medida de comprimento estádio e quilômetro é controversa. Segundo os historiadores, o mais provável é que 1 estádio seja equivalente a 0,185 quilômetro. Assim, aplicando essa conversão, a medida encontrada por Eratóstenes teria sido 46 250 quilômetros.

A medida de comprimento da circunferência da Terra atualmente aceita é 39 941 quilômetros, ou seja, o valor obtido experimentalmente há mais de 2 200 anos apresentava precisão razoável, com um erro de aproximadamente 14%.

Sobre o assunto

Robert P. Crease (1953-), filósofo e historiador da Ciência nascido nos Estados Unidos, perguntou aos leitores da revista internacional *Physics World*, na qual tem uma coluna, quais experimentos eles julgavam ser os mais belos.

Considerando os experimentos que foram citados mais vezes, ele compôs uma lista e, a partir dela, escreveu o livro *Os 10 mais belos experimentos científicos* (Trad. Maria Inês Duque Estrada. Rio de Janeiro: Zahar, 2006). O primeiro experimento mencionado por ele é do cálculo da medida de comprimento da circunferência da Terra. Você pode ler o trecho do livro que relata esse experimento, bem como conhecer outros experimentos científicos que despertarem seu interesse.

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*. Sugerimos que ela seja trabalhada em conjunto com o professor de Física, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Eratóstenes teve conhecimento de que, ao meio-dia do solstício de verão, um poço na cidade de Siena (atualmente Assuã, no Egito) não produzia sombra. Siena ficava a 5 000 estádios ao sul de Alexandria, e ambas as cidades estão aproximadamente no mesmo meridiano da Terra. Assim, ele entendeu que, ao meio-dia do solstício de verão, os raios de luz do Sol incidiriam verticalmente sobre a cidade de Siena, além de que, quanto mais curva fosse a superfície da Terra, maior seria o comprimento da sombra projetada por um objeto em Alexandria no mesmo instante.

Portanto, ao meio-dia do solstício de verão, usando as medidas de comprimento de um objeto (que pode ter sido uma torre ou uma coluna, por exemplo) e da sombra produzida por esse objeto, ele calculou a medida de abertura do ângulo formado entre a direção dos raios de luz do Sol e a vertical local, obtendo $\theta = 7{,}2°$.

Como o arco associado ao ângulo central com medida de abertura de 7,2° tem medida de comprimento 5 000 estádios, que é a medida de distância entre Alexandria e Siena, Eratóstenes concluiu que a medida de comprimento da circunferência da Terra seria 50 vezes a medida de distância entre Alexandria e Siena (pois $7{,}2° = 360° : 50$), ou seja, seria 250 000 estádios.

Usando mais uma vez a conversão de que 1 estádio equivale a 0,185 quilômetro, a medida de comprimento da circunferência da Terra no experimento teria sido, como já mencionado, 46 250 quilômetros.

O formato da Terra

Muitas especulações já foram feitas sobre o formato da Terra.

Aristóteles (384-322 a.C.) apresentou argumentos muito convincentes para a esfericidade da Terra. Observou que, durante os eclipses lunares, o contorno da sombra da Terra projetada na Lua é circular [...]. Além disso, notou diferença nos horários de observação de um mesmo eclipse para observadores situados em locais diferentes. Ele se deu conta, ainda, de que o aspecto do céu também muda, conforme a latitude do observador. Todas essas evidências culminavam no formato esférico. Ele chegou a conceber a Terra com forma esférica. Faltava determinar seu tamanho (raio). [...]

PICAZZIO, Enos (org.). *O céu que nos envolve*: introdução à Astronomia para educadores e iniciantes. São Paulo: Odysseus, 2011.

No século XVI, com a realização da 1ª circum-navegação registrada (também chamada de 1ª "volta ao mundo"), a humanidade teve uma prova direta do formato aproximadamente esférico da Terra e das medidas de comprimento do raio e da circunferência do planeta. Essa circum-navegação foi iniciada em 1519 pelo navegador português Fernão de Magalhães (1480-1521) e foi concluída em 1522 pelo navegador e explorador espanhol Sebastián Elcano (1476-1526).

Fontes dos dados: PEREIRA, Paulo Cesar R. Revivendo Eratóstenes. *Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia*, São Carlos, n. 3, 2006. Disponível em: https://tedit.net/4yyn9a. Acesso em: 5 ago. 2024; FERREIRA, Carlos Augusto; BISCH, Sérgio Mascarello. Qual é o tamanho do universo? Uma proposta de sequência de ensino investigativo sobre os métodos de Eratóstenes e Aristarco para medir os tamanhos da Terra e da Lua. *Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia*, São Carlos, n. 28, 2019. Disponível em: https://tedit.net/pllob4. Acesso em: 5 ago. 2024; PICAZZIO, Enos (org.). *O céu que nos envolve:* introdução à Astronomia para educadores e iniciantes. São Paulo: Odysseus, 2011.

Indo além: Combatendo a desinformação

Um dos assuntos que foram citados nesta seção é o fato de a Terra ter um formato aproximadamente esférico. Apesar de o termo preciso ser geoide, na verdade, as imperfeições da esfericidade da superfície terrestre são tão pequenas que o planeta pode ser considerado mais liso do que uma bola de bilhar, por exemplo. Embora muitas evidências apontem para esse fato, há movimentos de pessoas que defendem que o planeta Terra é plano. Que tal fazer um *podcast* ou um debate para acabar com notícias falsas como essas?

Etapas

1. Organização

A quantidade de grupos da turma dependerá de quantos temas diferentes vocês vão abordar. Por exemplo, se a turma for falar de 2 temas, então organizem-se em 2 grupos.

2. Pesquisa

Pesquisem nas redes sociais ou em aplicativos de troca de mensagens instantâneas quais notícias falsas estão entre os assuntos mais comentados e compartilhados; esses podem ser bons temas para o *podcast* ou o debate que vocês produzirão.

3. Desenvolvimento

Uma vez definido o tema, procurem, em *sites* de instituições de ensino, artigos confiáveis que apresentem fatos verificáveis a respeito do tema ou dos temas que vocês escolheram.

4. Produto final

Opção 1: *Podcast*

- Definam o formato do *podcast*: se será apenas em áudio, por exemplo, ou se haverá captação também de vídeo.
- Organizem a equipe com um apresentador, que deve trazer os pontos e argumentos falsos, e um ou mais entrevistados, que devem apresentar os argumentos de acordo com os artigos científicos confiáveis que vocês pesquisaram.
- Determinem o local e os equipamentos necessários para a gravação do *podcast*. Lembrem-se de testar os equipamentos, para que não haja surpresa na hora de gravar.
- Após a gravação, verifiquem se é necessária alguma edição ou um ajuste no áudio. Depois, divulguem o conteúdo que produziram para toda a comunidade escolar.

Opção 2: Debate com plateia

- Organizem o debate com um apresentador, que deve trazer notícias e argumentos falsos, e grupos de estudantes, que devem apresentar argumentos de acordo com os artigos científicos confiáveis que vocês pesquisaram.
- Consultem a direção da escola para marcar uma data na qual o debate possa ocorrer com a presença da comunidade escolar.
- Reservem um espaço para que a plateia possa interagir e fazer perguntas aos participantes do debate.

CAPÍTULO 4

Funções trigonométricas

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação-problema

Relógio de pêndulo

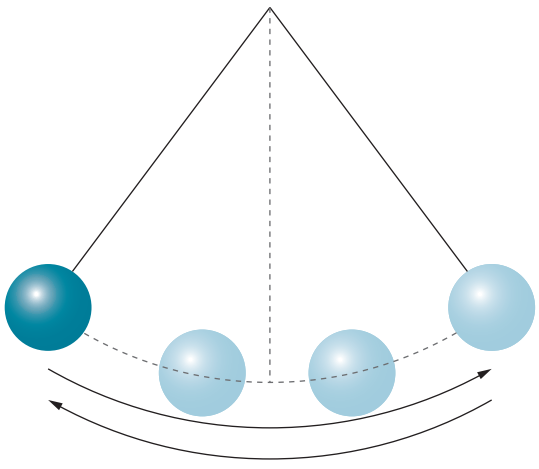
Os 2 ponteiros de um relógio de pêndulo mostram as horas e os minutos, como em um relógio moderno de ponteiros que usamos no pulso ou penduramos na parede de casa. Nesse tipo de relógio, o pêndulo serve para marcar os segundos.

A medida de intervalo de tempo necessário para que o pêndulo realize uma oscilação completa em um relógio é chamada de **período**. E o comportamento desse movimento pode ser estudado por funções que envolvem os conceitos seno e cosseno, as quais chamamos de **funções trigonométricas**.



Andrii Rudyk/Shutterstock

O relógio de pêndulo é um tipo de relógio mecânico que era comumente encontrado nas residências antes da invenção dos relógios eletrônicos, atômicos e de quartzo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Representação esquemática de um pêndulo simples. Por exemplo, a partir do instante em que o pêndulo está na amplitude máxima, como na imagem, a oscilação completa corresponde ao movimento que ele faz até voltar à mesma posição.

As imagens não estão representadas em proporção.

a) Sabendo que em 1 minuto o pêndulo de um relógio oscila 30 vezes, qual é o período desse movimento?

Temos que 1 minuto corresponde a 60 segundos, e, como o pêndulo oscila 30 vezes nesse intervalo de tempo, cada movimento ocorre a cada 2 segundos.

b) Quantas oscilações um pêndulo deve dar em 1 minuto para que o período do movimento seja de 1 segundo?

Se o período é 1 segundo, então em 1 minuto (60 segundos) o pêndulo deve fazer 60 oscilações.

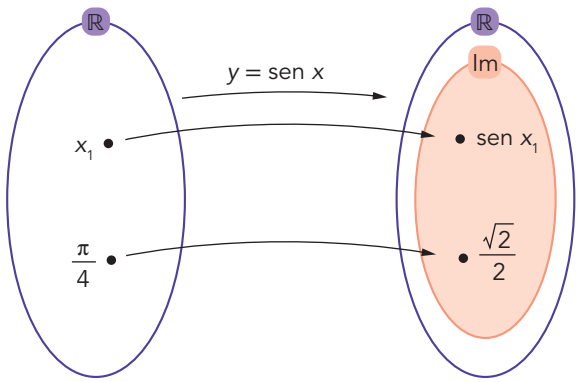
A função seno

Agora que sabemos como obter o valor de seno e de cosseno de números reais, podemos definir as **funções trigonométricas**, formalizando o que foi estudado até aqui, do ponto de vista de funções.

Assim, dado um número real x, podemos associar a ele o valor do seno de um ângulo com medida de abertura x radianos (ou de um arco com medida angular x radianos).

A **função trigonométrica seno** é a função real com variável real que associa, a cada número real x, o valor real **sen x**.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \operatorname{sen} x$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Para cada número real x existe sempre um único valor real para sen x.

Gráfico da função seno

Para construir o gráfico da função seno no plano cartesiano, escolhemos alguns valores de x da 1ª volta positiva ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi$) e consideramos os respectivos valores da função. Em alguns casos, usaremos valores aproximados para sen x.

Em seguida, indicamos esses pontos em um plano cartesiano e representamos a curva que descreve o gráfico da função.

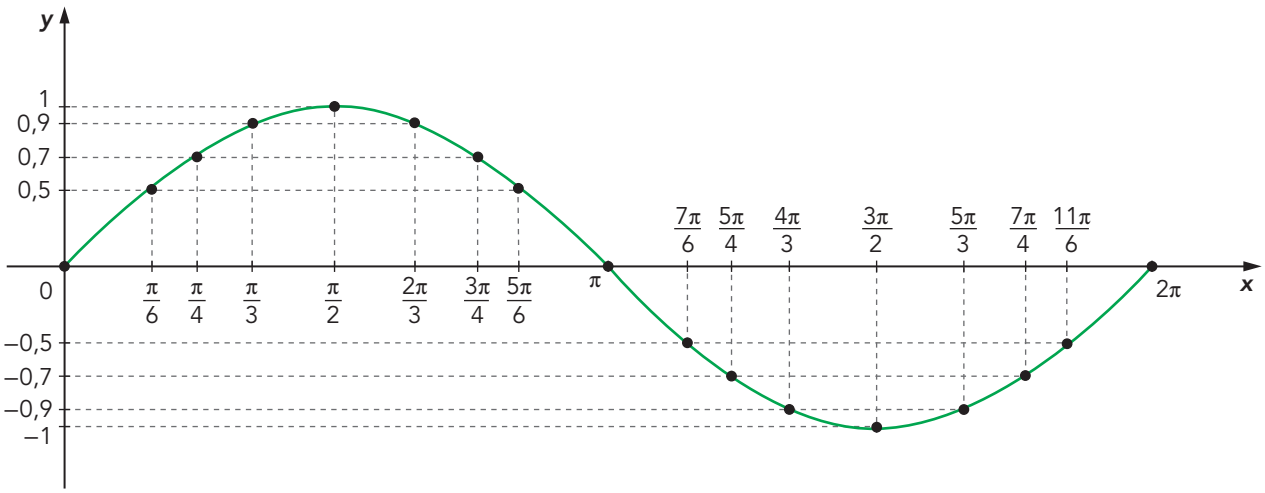
Fique atento

O gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), para $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $y = f(x)$. Podemos representar o gráfico de uma função no plano cartesiano.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sen x	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0

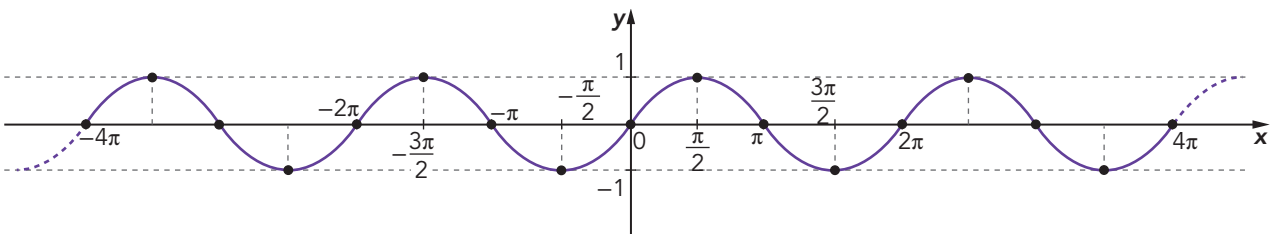
x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
sen x	$-0,5$	$-0,7$	$-0,9$	-1	$-0,9$	$-0,7$	$-0,5$	0

Analise o gráfico inicialmente para $x \in [0, 2\pi]$ e, depois, para $x \in \mathbb{R}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como a função seno é definida no conjunto dos números reais, ou seja, o domínio é $\mathbb{R}$, a curva pode ser estendida para valores de x menores do que 0 e para valores maiores do que 2π. Assim, o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen } x$, é a curva chamada **senoide**, que tem o seguinte aspecto:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

O gráfico da função seno com domínio real é simétrico em relação à origem do plano cartesiano.

Periodicidade da função seno

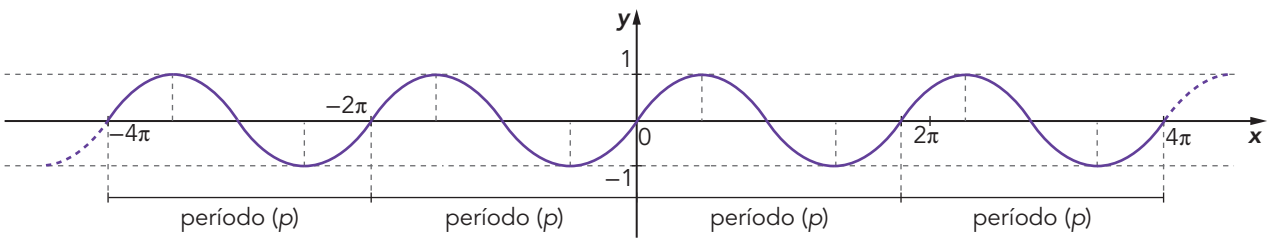
Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada **periódica** quando existe um número real $p \neq 0$ tal que $f(t + p) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Quando isso ocorre, temos $f(t + kp) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $p > 0$ tal que $f(t + p) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é chamado **período** da função f.

Para encontrar o período, podemos analisar no gráfico da função o deslocamento horizontal necessário para que os valores dela comecem a se repetir.

Analisando a função seno, os valores da função se repetem periodicamente nos intervalos ..., $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, ..., pois o ponto $P(t)$, associado ao número real t, descreve um fenômeno periódico quando percorre a circunferência trigonométrica. Daí dizermos que a função seno é periódica.

A repetição dos valores da função seno pode ser percebida no gráfico da função.

Banco de imagens/Arquivo da editora



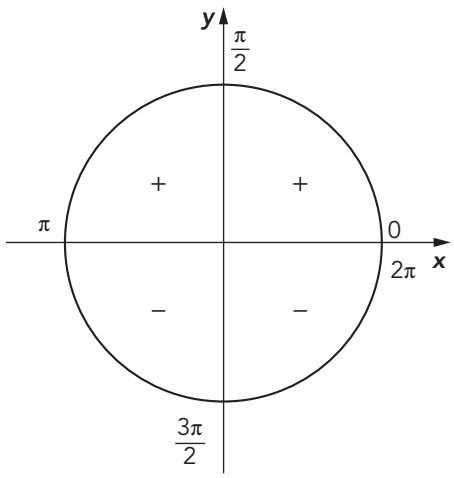
Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 4\pi) = \ldots$

O período da função seno é 2π e o indicamos assim: $p = 2\pi$.

Sinal dos valores da função seno

Analisando os sinais dos valores da função seno, percebemos que são **positivos** nos 1º e 2º quadrantes e **negativos** nos 3º e 4º quadrantes.

Banco de imagens/Arquivo da editora



$x = 0 + 2k\pi \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0;$
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1;$
$x = \pi + 2k\pi \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0;$
$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \operatorname{sen} x = -1.$

Não escreva no livro

Reflita

Quais são os valores de $\operatorname{sen} x$ para $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, e os respectivos arcos côngruos?

Algumas características da função seno

Apresentamos a seguir algumas características da função seno $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen } x$.

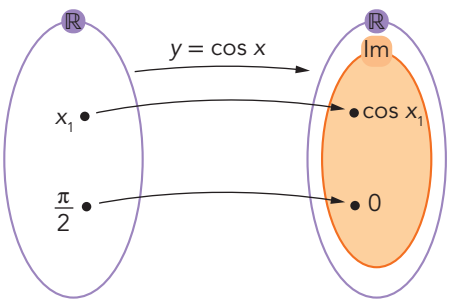
- A função seno tem domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e conjunto imagem $\text{Im}(f) = [-1, 1]$, ou seja, todos os números reais que estão entre -1 e 1, incluindo esses números.
- Essa função assume valor máximo 1 e valor mínimo -1, ou seja, o maior valor que ela assume é 1 e o menor é -1. Além disso, essa função tem **amplitude** (diferença entre os valores máximo e mínimo dividida por 2) igual a 1, pois $\frac{1-(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$.
- A função seno é periódica, de período $p = 2\pi$.
- Na função seno, temos $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$, para todo x real. Então, dizemos que ela é uma função ímpar.
- A função seno pode assumir valores nulos, positivos ou negativos.
  - $\text{sen } x = 0$, para $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  - $\text{sen } x > 0$, para x dos 1º e 2º quadrantes e para $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  - $\text{sen } x < 0$, para x dos 3º e 4º quadrantes e para $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

A função cosseno

Dado um número real x, podemos associar a ele o valor do cosseno de um ângulo com medida de abertura x radianos (ou de um arco com medida angular x radianos).

A **função trigonométrica cosseno** é a função real de variável real que associa, a cada número real x, o valor real **cos *x***.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \cos x$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Para cada número real x existe sempre um único valor real para cos x.

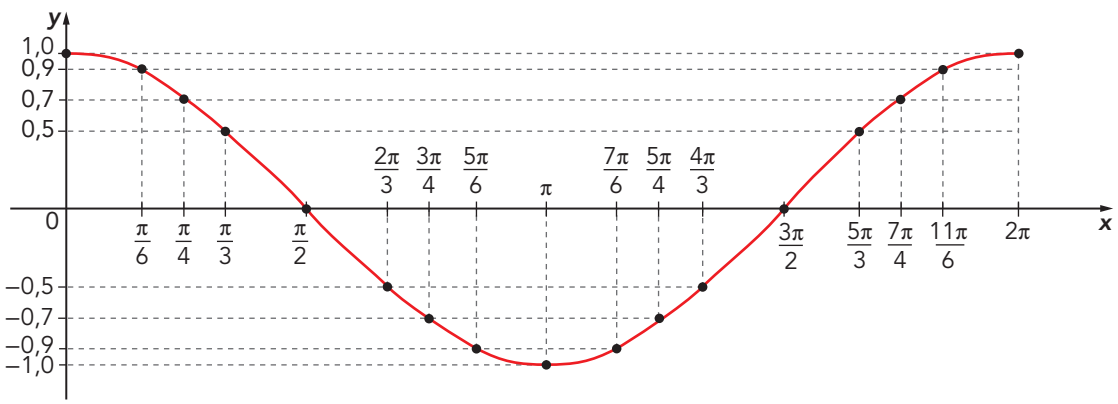
Gráfico da função cosseno

Assim como fizemos com a função seno, para construir o gráfico da função cosseno, escolhemos alguns valores de x da 1ª volta positiva ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi$) e consideramos os respectivos valores da função. Em alguns casos, usaremos valores aproximados para cos x.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
cos x	1	0,9	0,7	0,5	0	−0,5	−0,7	−0,9	−1

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cos x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	−0,9	−0,7	−0,5	0	0,5	0,7	0,9	1

Analise o gráfico inicialmente para $x \in [0, 2\pi]$ e, depois, para $x \in \mathbb{R}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sobre o assunto

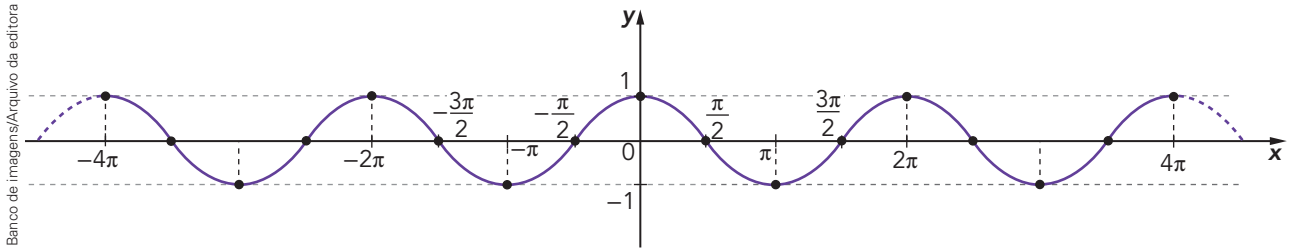
Você pode usar um simulador *on-line* para analisar a relação entre cada ponto $P(t)$ da circunferência trigonométrica, associado a um número real t, e o respectivo ponto na senoide que é gráfico da função seno ou cosseno de t.

Por exemplo, o *site* PhET Simulações Interativas (disponível em: https://tedit.net/sytv6n; acesso em: 21 jul. 2024), da Universidade de Colorado (Estados Unidos), disponibiliza um simulador no qual você pode escolher as funções seno ou cosseno e a unidade de medida, grau ou radiano. Modificando a posição do ponto na circunferência trigonométrica, o respectivo ponto na senoide é alterado, e vice-versa.

Nesse simulador, você também pode conhecer e explorar a função tangente, dada por $f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, com $\cos x \neq 0$.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Como a função cosseno é definida no conjunto dos números reais, ou seja, o domínio é $\mathbb{R}$, a curva pode ser estendida para valores de x menores do que 0 e para valores maiores do que 2π. Assim, o gráfico da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$, que também é uma senoide, é a curva que tem o seguinte aspecto:



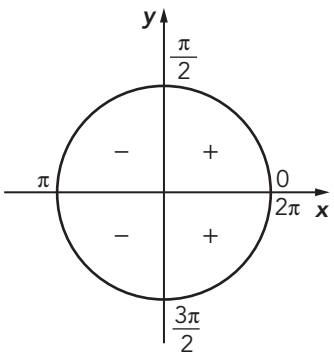
Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

O gráfico da função cosseno com domínio real é simétrico em relação ao eixo y.

Sinal dos valores da função cosseno

Analisando os sinais dos valores da função cosseno, percebemos que são **positivos** nos 1º e 4º quadrantes e **negativos** nos 2º e 3º quadrantes.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro

Reflita

Quais são os valores de cos x para $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, e os respectivos arcos côngruos?

$x = 0 + 2k\pi \Rightarrow \cos x = 1$;
$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \cos x = 0$;
$x = \pi + 2k\pi \Rightarrow \cos x = -1$;
$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \cos x = 0$.

Algumas características da função cosseno

A cossenoide **não** é uma nova curva, e sim uma senoide. Ela corresponde à curva da função seno deslocada (transladada) $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda. Compare o gráfico da função cosseno com o gráfico da função seno do tópico "Gráfico da função seno".

Isso faz com que muitos aspectos relevantes da função cosseno $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$, sejam os mesmos da função seno.

- O domínio da função cosseno também é $D(f) = \mathbb{R}$ e o conjunto imagem, igualmente, é $Im(f) = [-1, 1]$.

Professor, se necessário, retome com os estudantes a translação de figuras no plano, estudada no Ensino Fundamental.

- Essa função também assume valor máximo 1 e valor mínimo –1 e tem amplitude igual a 1.
- O período da função cosseno é o mesmo da função seno: a função cosseno é periódica, de período $p = 2\pi$.
- Na função cosseno, temos $\cos(-x) = \cos x$, para todo x real. Então, dizemos que a função cosseno é par, diferentemente da função seno, que é ímpar.
- A função cosseno pode assumir valores nulos, positivos ou negativos.
  - $\cos x = 0$, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  - $\cos x > 0$, para x dos 1º e 4º quadrantes e para $x = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  - $\cos x < 0$, para x dos 2º e 3º quadrantes e para $x = \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

1. a) $f(\pi) = \operatorname{sen} \pi = 0$

$g(\pi) = \cos\pi = -1$

$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$g\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Atividades

Não escreva no livro

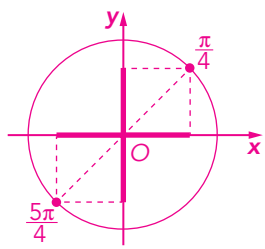
1. Considere as funções f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$.

a) Calcule $f(\pi)$, $g(\pi)$, $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ e $g\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Determine o valor de x, com $x \in [0, 2\pi]$, tal que $f(x) = g(x)$.

c) Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $f(x) = g(x)$? Justifique sua resposta.

b) No círculo trigonométrico, o ângulo procurado deve determinar a bissetriz dos ângulos formados pelos eixos x e y nos 1º e 3º quadrantes. Ou seja, devemos ter $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Para $x \in [0, 2\pi]$, temos $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

c) Não existe, porque nesse intervalo sen $x > 0$ e cos $x < 0$.

As senoides e os fenômenos periódicos

Além das funções trigonométricas seno e cosseno que você estudou, existem outras funções que envolvem o seno e o cosseno de um número real, cujos gráficos também são senoides. Acompanhe 2 exemplos.

a) $g(x) = 2 + \cos x$, com $x \in \mathbb{R}$.

b) $h(x) = \operatorname{sen} 2x$, com $x \in \mathbb{R}$.

Funções cujos gráficos são senoides podem ser utilizadas para modelar diversos fenômenos físicos que têm comportamento periódico, como o nível do mar, a pressão arterial e a corrente elétrica alternada.

No geral, utilizamos no máximo 4 coeficientes na lei dessas funções para que elas se ajustem, de maneira bastante razoável, a um fenômeno periódico real. Assim, obtemos uma função f dada por $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(cx + d)$ ou $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, com a, b, c e d reais, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

O período dessas funções é alterado dependendo do coeficiente c, de modo que $p = \frac{2\pi}{|c|}$.

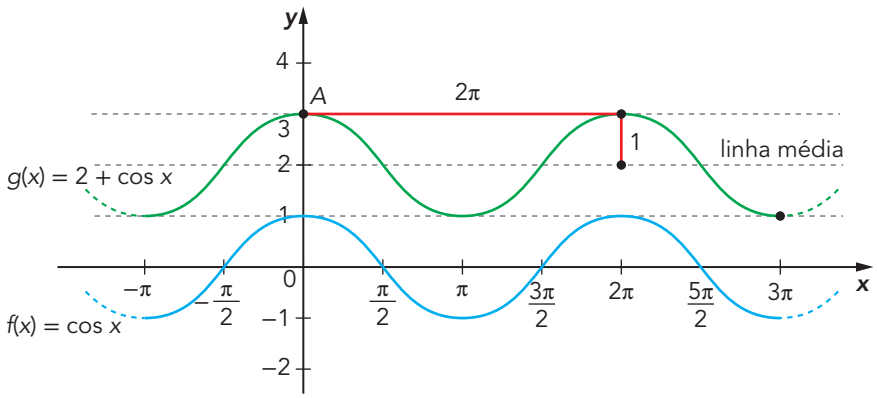
Fique atento

A notação $|c|$ indica o módulo (ou valor absoluto) do coeficiente c. Se c é positivo ou nulo, então $|c| = c$; por exemplo: $|5| = 5$. Se c é negativo, então $|c| = -c$; por exemplo: $|-2| = -(-2) = 2$.

Além disso, é comum optarmos por associar valores positivos aos coeficientes a e b, de modo que o conjunto imagem da função f seja $\text{Im}(f) = [a - b; a + b]$, o período seja $p = \frac{2\pi}{c}$ e a amplitude seja b.

Analise as senoides e as características dos exemplos dados anteriormente, e um novo exemplo de função periódica cujo gráfico também é uma senoide:

a) $g(x) = 2 + \cos x$, com $x \in \mathbb{R}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O conjunto imagem é $\text{Im}(g) = [2 - 1, 2 + 1] = [1, 3]$.

O período é $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ (o coeficiente $c = 1$ é positivo).

A amplitude é 1.

Fique atento

Linha média é a reta paralela ao eixo x que passa exatamente no ponto médio entre os pontos de máximo e de mínimo do gráfico.

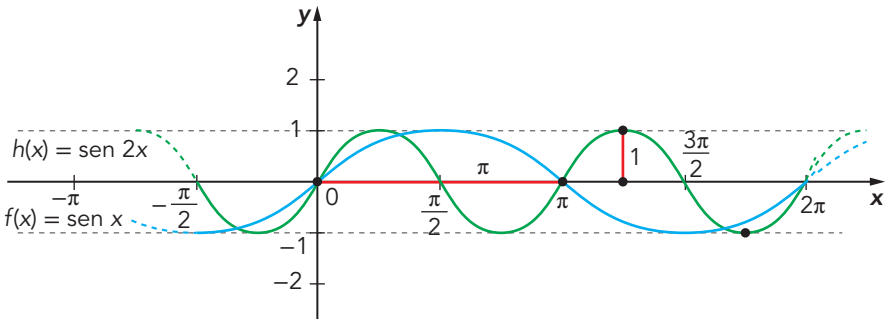
Reflita

Não escreva no livro

Compare o conjunto imagem, o período e a amplitude da função g com os da função cosseno.

Exemplo de resposta: O gráfico de g está deslocado para cima em relação ao gráfico da função cosseno, de modo que o conjunto imagem da função g é $\text{Im}(g) = [1, 3]$. O período e a amplitude da função g são iguais ao período e a amplitude da função cosseno.

b) $h(x) = \text{sen } 2x$, com $x \in \mathbb{R}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O conjunto imagem é $\text{Im}(h) = [0 - 1, 0 + 1] = [-1, 1]$.

O período é $p = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

A amplitude é 1.

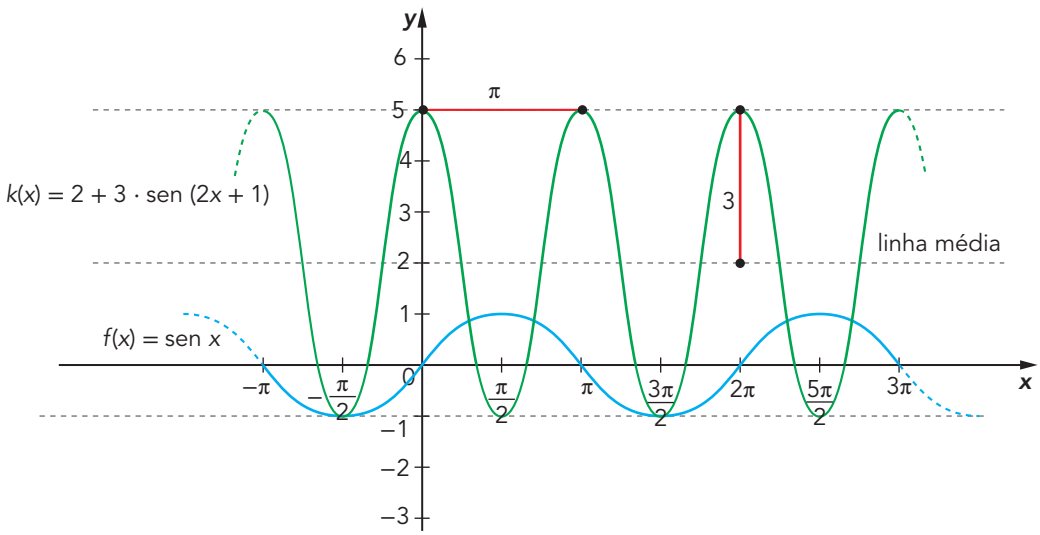
Reflita

Não escreva no livro

Compare o conjunto imagem, o período e a amplitude da função h com os da função seno.

Exemplo de resposta: O conjunto imagem e a amplitude da função h são iguais aos da função seno. O gráfico de h está achatado horizontalmente em relação ao gráfico da função seno, de modo que o período de h é $p = \pi$, metade do período da função seno.

c) $k(x) = 2 + 3 \cdot \text{sen } (2x + 1)$



Banco de imagens/Arquivo da editora

O conjunto imagem é $\text{Im}(k) = [2 - 3, 2 + 3] = [-1, 5]$.

O período é $p = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

A amplitude é 3.

Reflita

Compare o conjunto imagem, o período e a amplitude da função k com os da função seno.

Exemplo de resposta: O gráfico de k está alongado verticalmente, achatado horizontalmente e com o limite superior deslocado para cima em relação ao gráfico da função seno, de modo que o conjunto imagem da função k é $\text{Im}(k) = [-1, 5]$, o período é $p = \pi$ e a amplitude é 3.

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Construção de senoides

Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Vamos utilizar um *software* de Geometria dinâmica para construir uma senoide no plano cartesiano.

Para as atividades propostas a seguir, sugerimos selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que permita a construção das representações propostas.

Inicialmente, vamos construir o gráfico da função trigonométrica seno, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \text{sen } x$, e o gráfico da função trigonométrica cosseno, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \cos x$.

1º passo: Como vamos construir gráficos de funções trigonométricas, é interessante ajustar a escala do eixo x para radianos. Para isso, acesse as configurações do eixo x no programa escolhido e faça as alterações necessárias a fim de que os valores exibidos sejam múltiplos de $\frac{\pi}{2}$. Dependendo do *software*, essa ferramenta pode se chamar "Distância" ou "Passo".

2º passo: No campo de entrada de comando, insira a lei da função **f(x)=sen(x)**. Em seguida, no próximo campo de entrada, insira a lei da função **g(x)=cos(x)**. Você deverá ter uma imagem como a apresentada a seguir.

Professor, oriente os estudantes na escolha do *software on-line* ou aplicativo para a construção das representações de modo que o programa escolhido apresente todas as funcionalidades necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir.

Fique atento

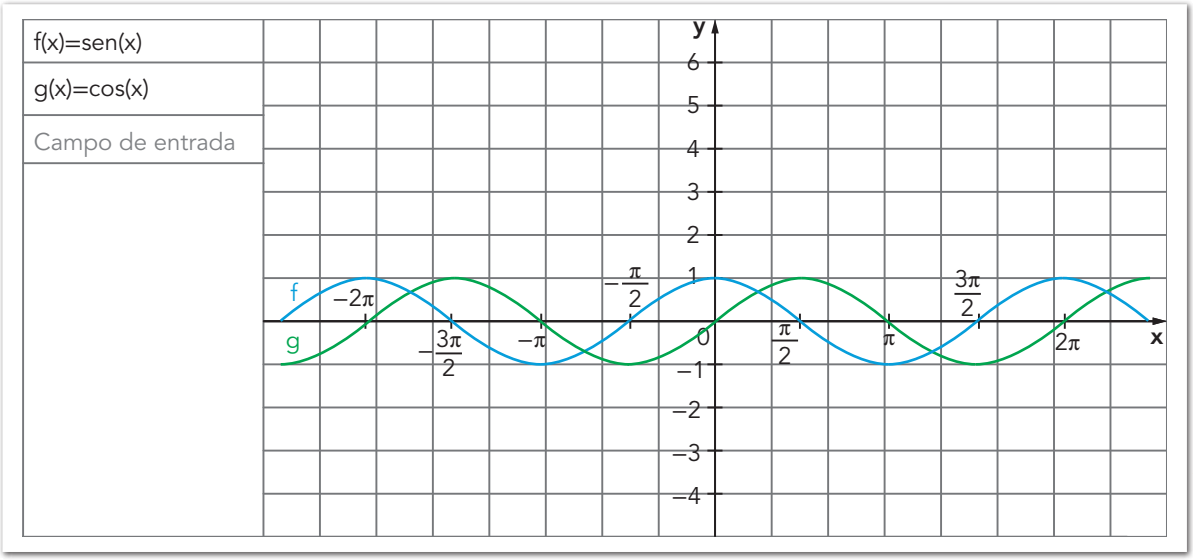
Lembre-se de adaptar as instruções de acordo com o *software* escolhido, já que as interfaces e os procedimentos podem variar.

Fique atento

Alguns programas também aceitam o comando **f(x)=sin(x)** para a lei da função seno (função *sine*, em inglês).

Auxilie-os também nas explorações iniciais do programa e na identificação das ferramentas e configurações disponíveis, além de em como acessá-las.

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora



Exemplo de construção, no *software* de Geometria dinâmica, após o 2º passo.

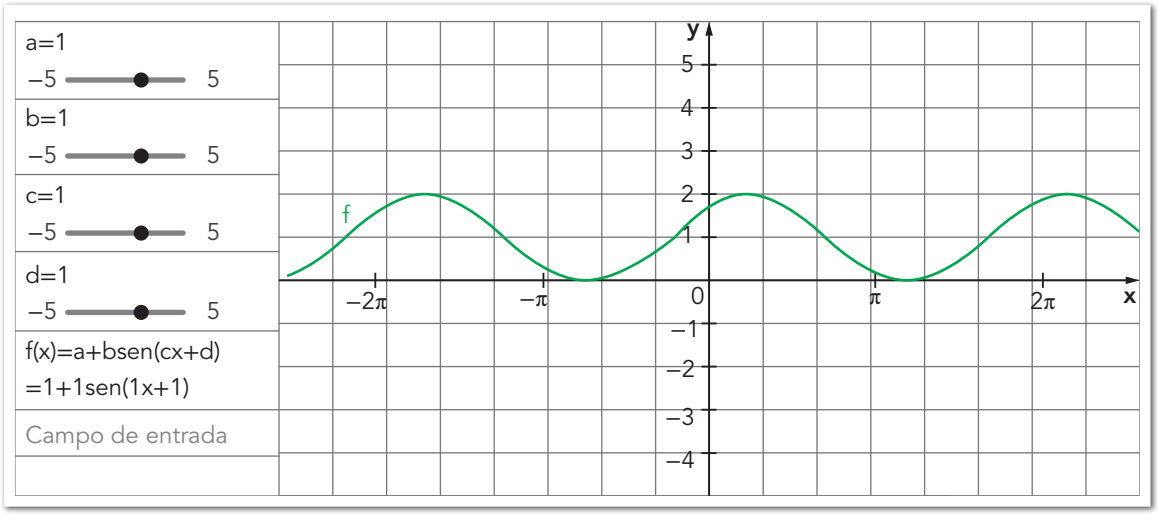
1. Analise os gráficos da função seno f e da função cosseno g que você construiu no *software* de Geometria dinâmica. Há quantos pontos de intersecção entre esses gráficos no intervalo $[0, 2\pi]$? 2 pontos.

Agora vamos utilizar o *software* para construir no plano cartesiano o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$, com a, b, c e d reais, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, que é uma senoide, e analisar a influência dos coeficientes no gráfico.

1º passo: Salve a construção que você fez e abra um novo projeto no programa. Verifique se a escala do eixo x está configurada em radianos e, se não estiver, altere-a como indicado no começo desta seção.

Em seguida, no campo de entrada de comando, insira a lei da função **f(x)=a+b*sen(c*x+d)**. Note que, geralmente, * indica a operação de multiplicação.

Junto do campo de entrada vão aparecer controles deslizantes para os coeficientes a, b, c e d. Altere, se necessário, todos os valores para 1, obtendo o gráfico de $f(x) = 1 + 1 \cdot \text{sen}\,(1x + 1)$, ou seja, de $f(x) = 1 + \text{sen}\,(x + 1)$.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção, no *software* de Geometria dinâmica, após o 1º passo.

2º passo: Mova os controles deslizantes para verificar os significados dos coeficientes a, b, c e d.

2. Faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Altere gradualmente o valor do coeficiente a, mantendo $b = 1$, $c = 1$ e $d = 1$, e responda: o que acontece com o gráfico da função?

b) Agora, mantenha $a = 1$, $c = 1$ e $d = 1$. Analise o que acontece com o gráfico ao alterar gradualmente o valor do coeficiente b.

c) Repita a análise dos itens anteriores modificando o coeficiente c, mantendo os demais iguais a 1.

d) Repita a análise dos itens anteriores modificando o coeficiente d, mantendo os demais iguais a 1.

Os exemplos de resposta encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Atividades resolvidas

1. Determine o valor máximo da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 + 3 \cdot \text{sen } x$.

Resolução

O valor máximo que sen x assume é 1. Então, a função f terá valor máximo quando sen $x = 1$:

$$f(x) = 2 + 3 \cdot 1 = 5$$

Logo, o valor máximo é $f(x) = 5$.

Atividade resolvida passo a passo

2. A posição x, em metros, de uma partícula no instante t, em segundos, é dada pela expressão a seguir.

$$x = 4 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Qual é o valor de x para $t = 0{,}5$ s?

a) 0

b) -1

c) 4

d) -4

Resolução

Lendo e compreendendo

O problema pede a posição de uma partícula, dada a medida de intervalo de tempo.

Planejando a solução

Na equação dada, devemos substituir a medida de intervalo de tempo $t = 0{,}5$ s e calcular o valor de x, que é o valor da posição.

Executando o que foi planejado

$$4 \cos\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 4 \cos\left(\pi \cdot \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 4 \cos(\pi) \Rightarrow x = 4 \cdot (-1) \Rightarrow x = -4$$

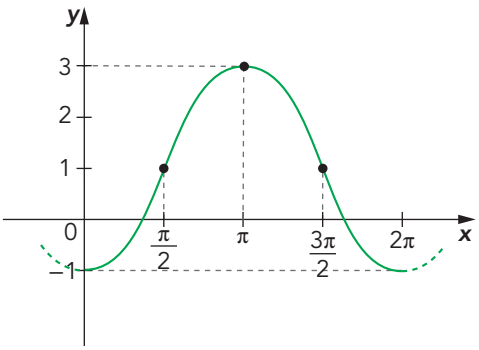
Logo, a posição é -4 metros.

Emitindo a resposta

Alternativa **d**.

3. O gráfico no plano cartesiano a seguir representa uma função periódica $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$. Determine os valores de a, b, c e d.

Banco de imagens/Arquivo da editora

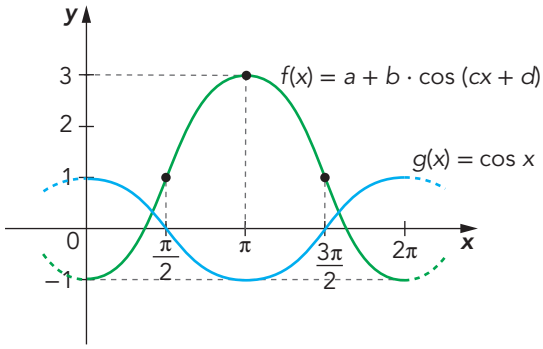


Resolução

2. a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } 2\pi = 0$

b) $g(\pi) = 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$

Representando o gráfico da função cosseno no mesmo plano cartesiano e analisando as senoides, podemos perceber algumas características das funções.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- A amplitude de f é o dobro da amplitude da função cosseno:

$$\frac{3 - (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Então, $b = 2$.

- O conjunto imagem de f é $\text{Im}(f) = [-1, 3]$; então, $a = 1$.
- O período de f é $p = 2\pi$, o mesmo da função cosseno. Portanto, $c = 1$.
- Analisando o gráfico, vemos que há uma distância de π unidades entre um ponto de mínimo da função f e o próximo da função g. Assim, temos $d = \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Como a função é periódica, de período 2π, qualquer deslocamento horizontal dado por $2k\pi$ resultará no mesmo gráfico. Sendo assim, considerando $k = 0$, obtemos $d = \pi$.

Portanto, a lei dessa função é:

$$f(x) = 1 + 2 \cdot \cos (x + \pi)$$

Fique atento

A lei da função também poderia ser $f(x) = 1 + 2 \cdot \cos (x + 3\pi)$, $f(x) = 1 + 2 \cdot \cos (x + 5\pi)$, $f(x) = 1 + 2 \cdot \cos (x - \pi)$, ..., atribuindo-se outros números inteiros para k.

2. c) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(4 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen } \frac{2\pi}{3} = \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Atividades

Não escreva no livro

2. Considerando as funções f e g definidas por $f(x) = \text{sen } 4x$ e $g(x) = 1 - \cos x$, determine o que se pede.

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $g(\pi)$ **c)** $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ **d)** D(g) D(g) = $\mathbb{R}$ **e)** Im(g) Im(g) = [0, 2]

3. Em um plano cartesiano, represente o gráfico de cada função dada a seguir (pelo menos um período completo) e dê o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude de cada uma delas.

a) Função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos 3x$. D(f) = $\mathbb{R}$, Im(f) = [−1, 1], $p = \frac{2\pi}{3}$, amplitude 1.

b) Função h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 2 \cdot \text{sen } x$. D($h$) = $\mathbb{R}$, Im(h) = [−2, 2], $p = 2\pi$, amplitude 2.

Os gráficos encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

4. Os exemplos de resposta encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
8. O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual. Exemplo de lei da função: $f(x) = 4 + 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

Não escreva no livro

4. Analise os gráficos que você representou na atividade anterior.

a) Compare o gráfico de $f(x) = \cos 3x$ com o gráfico da função cosseno.

b) Compare o gráfico de $f(x) = \cos 3x$ com o gráfico da função seno.

c) Compare o gráfico de $h(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x$ com o gráfico da função seno.

5. Determine o período de cada função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo trigonométrica dada a seguir.

a) $f(x) = \operatorname{sen} 7x$ $\frac{2\pi}{7}$

b) $f(x) = \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

c) $f(x) = 2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

d) $f(x) = 1 + \cos(\pi x - 3)$ $p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

6. Dada uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é uma senoide, determine o valor máximo e o valor mínimo dessa função para cada lei dada.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x - 10$ -9 e -11.

b) $f(x) = 6 - 10 \cdot \cos x$ 16 e -4.

c) $f(x) = 3 \cdot \cos^2 x + 1$ 4 e 1.

7. Como podemos obter o gráfico da função do item **a** da atividade anterior já tendo representado o gráfico da função seno?

8. Considere um fenômeno periódico que pode ser modelado pela função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(cx)$, com x em minutos. Em um experimento com esse fenômeno, realizado a cada 1 minuto desde $x = 0$, obtiveram-se os resultados aproximados indicados a seguir.

x	$f(x)$
0	4,0
1	6,8
2	8,0
3	6,8
4	4,0
5	1,2
6	0,0
7	1,2
8	4,0
9	6,8
10	8,0
11	6,8
12	4,0
⋮	⋮

Indique esses pontos em um plano cartesiano e identifique a lei de uma função que ofereça uma boa aproximação para esses dados.

9. Em uma roda-gigante, um ponto A, que representa uma das cadeiras, movimenta-se sobre uma circunferência de centro O, o centro da roda-gigante. A posição y da cadeira em relação ao solo, no instante t, é descrita pela lei da função $y = 70 - 15 \cdot \operatorname{sen} t$, com $t \geqslant 0$. Diante disso, qual é a medida de comprimento do diâmetro, em metros, dessa roda-gigante? 30 m

10. Em certa cidade litorânea, a lei de uma função é dada por $h(x) = 1{,}3 + 1{,}1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$. Essa lei corresponde às medições do nível do mar, em metros, em função da medida de intervalo de tempo x, em horas, decorrido desde a meia-noite, com $0 \leqslant x \leqslant 24$.

a) Nessa situação, quais são os valores máximo e mínimo do nível do mar? 2,4 m e 0,2 m.

b) Construa, no caderno, o gráfico dessa função. O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

c) Agora, construa o gráfico dessa função em um *software* de Geometria dinâmica e compare-o com o gráfico que você fez no item **b**.

A resposta depende do *software* escolhido.

Fique atento

- Gere o gráfico apenas com o intervalo desejado: [0, 24].
- Em alguns programas, será necessário usar o ponto como separador decimal e "pi" para representar o π, colocando um espaço antes do "x" para que ele fique fora da fração. A expressão ficará assim: **h(x)=1.3+1.1*cos(pi/3 x)**.

Texto para a próxima atividade.

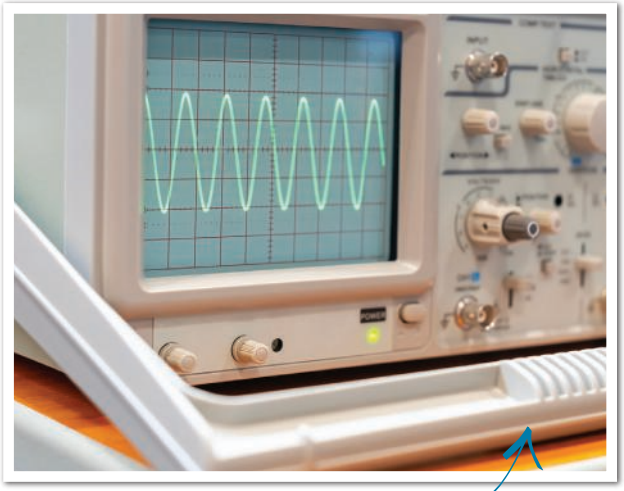
Na corrente elétrica alternada, o fluxo de elétrons que atravessa um condutor tem sentido variante (ou seja, não tem sentido único) em função do intervalo de tempo. Em um circuito de potência de corrente alternada, o tipo de onda mais utilizado é o senoidal, podendo ser apresentado de maneira diferente.

7. Deslocando o gráfico da função seno em 10 unidades para baixo.

12. A pressão arterial máxima dessa função ocorrerá quando $\cos \frac{5\pi}{2} t = -1$. Então:

$P(t) = 110 - 20 \cdot (-1) = 110 + 20 = 130$; logo, 130 mmHg.

ZenitX/Shutterstock

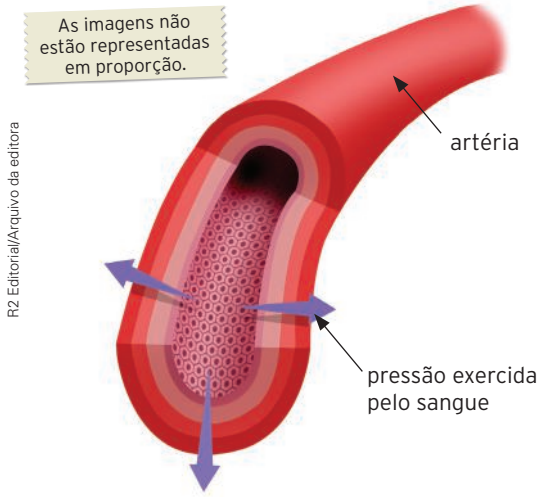


O osciloscópio é uma ferramenta usada para visualizar a onda que representa um sinal elétrico e analisar os parâmetros relacionados, como a corrente e a tensão elétrica. Na foto, onda senoidal (no visor do aparelho) em osciloscópio digital, obtida em uma corrente elétrica alternada.

11. Considere que uma possível modelagem de uma corrente alternada seja dada pela lei $f(x) = 40 \cdot \text{sen} \frac{\pi x - \pi}{2}$, em função da medida de intervalo de tempo x, em segundos. Qual é o período dessa função? $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$; logo, 4 s.

Texto para a próxima atividade.

O coração tem como função bombear o sangue para o corpo. Quando isso ocorre, ele gera determinada força em direção às paredes das artérias, chamada de pressão arterial. A pressão arterial considerada ideal é aquela que apresenta valores de 120 por 80 mmHg.



R2 Editorial/Arquivo da editora

Pressão exercida pelo sangue em direção às paredes da artéria. Os elementos na imagem não estão representados em proporção. Imagem em cores fantasia.

12. Suponha que a variação da pressão arterial de um paciente (em mmHg), em função da medida de intervalo de tempo (em segundos), é dada por $P(t) = 110 - 20 \cdot \cos \frac{5\pi}{2} t$. Qual seria a pressão sistólica desse paciente, ou seja, a pressão máxima atingida?

Fique atento

A unidade de medida mmHg significa milímetros de mercúrio e, embora não esteja relacionada no Sistema Internacional de Unidades (SI), é a unidade de medida usada convencionalmente para medir a pressão arterial.

13. O espirômetro é o aparelho que mede o volume de ar inspirado e expirado pelos pulmões de uma pessoa, determinando, assim, a capacidade pulmonar dela. Em um teste realizado em um paciente, foi gerada pelo espirômetro uma função que indica a medida de volume de ar V nos pulmões, em litros, de acordo com a medida de intervalo de tempo t, em segundos, que se passou desde o início do teste: $V(t) = 3 + 0{,}5 \cdot \text{sen} \frac{2\pi t}{5}$.



Svitlana Hulko/Shutterstock

Existem diversos tipos de espirômetro para medir a capacidade pulmonar de uma pessoa.

a) Qual é a medida máxima de volume de ar, em litros, que o pulmão desse paciente atingiu? 3,5 L

b) E qual é a medida mínima de volume? 2,5 L

c) De acordo com a lei dessa função, o processo completo de uma respiração (inspirar e expirar) dura quantos segundos? 5 s

16. $h(10) = 86 - 82 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 10}{15}\right) = 86 - 82 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = 86 - 82 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 86 + 41 = 127$

Logo, depois de 10 min de passeio, a cabine encontra-se a 127 m do solo.

Não escreva no livro

14. Considere que, em determinado dia, da 0 h às 24 h, a expressão que representa o nível A do mar em uma praia, em metros, em função do horário h, com $0 \leqslant h \leqslant 24$, seja dada pela lei $A(h) = 2 + 1{,}5 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot h\right)$.

Um grupo de amigos planeja jogar bola nessa praia durante o dia, iniciando a partida 1 hora antes do horário da maré mais baixa e encerrando o jogo 1 hora depois. Qual é o horário em que eles jogarão bola? Alternativa **a**.

a) Das 8 h às 10 h.

b) Das 9 h às 11 h.

c) Das 11 h às 13 h.

d) Das 12 h às 14 h.

e) Das 13 h às 15 h.

15. A maré é um fenômeno periódico de elevação e diminuição do nível do mar em decorrência das forças de atração exercidas pela Lua e pelo Sol. Esse fenômeno tem relação direta com as fases da Lua, mês a mês: nas luas cheia e nova, o nível do mar está mais alto do que o normal, enquanto nas luas minguante e crescente, está mais baixo.

Durante certo mês, em uma cidade litorânea, modelou-se a oscilação das marés de acordo com a lei $h(t) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{15} + \frac{\pi}{3}\right)$, em que h é a medida do nível do mar e t é o dia do mês em que ela ocorreu. Em quais dias desse mês ocorreram as luas minguante e crescente? Nos dias 5 e 20.

Fique atento

Lembre-se de que $\cos \pi = -1$. Sendo assim, considerando os arcos côngruos a π, temos $\cos(\pi + 2k\pi) = -1$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Texto para a próxima atividade.

Na roda-gigante High Roller, na cidade de Las Vegas (Estados Unidos), cada passeio dura sempre 30 minutos. Como o movimento da roda-gigante é periódico, ou seja, a cada 30 minutos se repete o movimento dos 30 minutos anteriores, ele pode ser descrito por uma função do tipo trigonométrica. Para o caso específico da High Roller, essa função é dada por $h(t) = 86 - 82 \cdot \cos\frac{\pi t}{15}$, em que h é a medida de altura da cabine em relação ao chão e t é a medida de intervalo de tempo, em minutos, desde que a cabine começou o movimento.



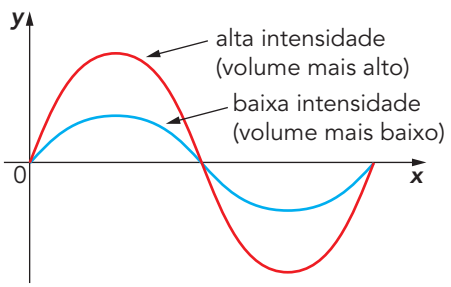
ByDroneVideos/Shutterstock

Até 2020, a roda-gigante High Roller, localizada na cidade de Las Vegas (Estados Unidos), era a maior do mundo, com 168 metros de medida de comprimento da altura e 28 cabines, cada uma com capacidade para 40 pessoas. Foto de 2023.

16. Considerando o texto anterior, responda no caderno: Depois de 10 minutos de passeio, qual é a medida de altura em que se encontra uma cabine que iniciou o movimento no ponto mais baixo da roda-gigante?

17. Onda sonora é um exemplo de onda mecânica que necessita de um meio para se propagar e que pode ser modelada por uma função do tipo trigonométrica. A sensação auditiva causada por uma onda sonora é chamada som.

a) Analise os gráficos a seguir. Eles representam um período completo de 2 ondas sonoras com intensidades diferentes (quanto maior a intensidade de uma onda sonora, mais alto é o volume do som).

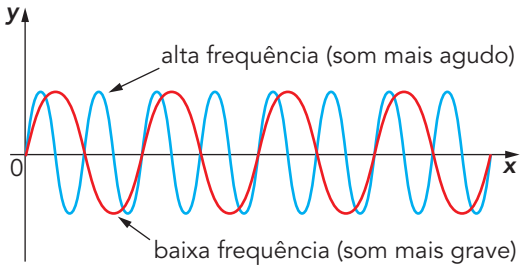


WYM Design/Arquivo da editora

Relacione a amplitude da função que modela cada onda sonora à intensidade da onda.

17. a) Uma função com amplitude maior corresponde a uma onda sonora com intensidade maior (volume mais alto do som).

b) Agora, analise os gráficos de 2 ondas sonoras com frequências diferentes (frequências mais altas correspondem a sons mais agudos e frequências mais baixas correspondem a sons mais graves).

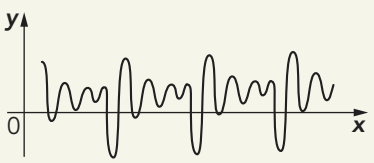


WYM Design/Arquivo da editora

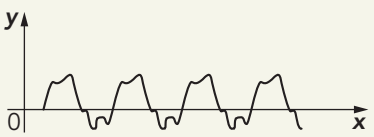
Relacione o período da função que modela cada onda sonora à frequência da onda.

Fique atento

Timbre é a qualidade do som que permite diferenciar, por exemplo, uma mesma nota sonora emitida por diferentes fontes sonoras. Quando representamos o timbre, obtemos diferentes formatos de ondas para cada fonte sonora. Acompanhe a seguir alguns exemplos da nota fá emitida por diferentes instrumentos. As ondas nesses formatos, apesar de não serem senoides, também são periódicas, pois se repetem após o mesmo intervalo de tempo.



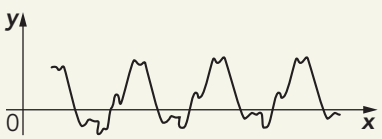
Trompete.



Violão.



Trompete sintetizado.



Violão sintetizado.

Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora

18. (Enem) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$, em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi: Alternativa **a**.

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$.

b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$.

c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$.

d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$.

e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$.

19. (Enem) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é: Alternativa **d**.

a) janeiro.

b) abril.

c) junho.

d) julho.

e) outubro.

17. b) Uma função com período menor corresponde a uma onda sonora com maior frequência (som mais agudo).

Professor, se julgar oportuno, comente com os estudantes que a frequência de uma onda sonora é o inverso do período da função.

20. **(UFPR)** A maior variação de maré do Brasil ocorre na baía de São Marcos, no estado do Maranhão. A diferença entre o nível mais alto e o nível mais baixo atingidos pela maré pode chegar a 8 metros em algumas épocas do ano.

Suponha que em determinado dia do ano o nível da maré da baía de São Marcos possa ser descrito pela expressão

$$n(t) = 3\text{sen}\left((t-5)\frac{\pi}{6}\right) + 4$$

com $t \in [0, 24]$, sendo t o tempo (medido em horas) e $n(t)$ o nível da maré no instante t (dado em metros). Com base nessas informações, considere as seguintes afirmativas:

1. O nível mais alto é atingido duas vezes durante o dia.

2. Às 11 h é atingido o nível mais baixo da maré.

3. Às 5 h é atingido o nível mais alto da maré.

4. A diferença entre o nível mais alto e o nível mais baixo é de 3 metros.

[Indique no caderno] a alternativa correta.

Alternativa **a**.

a) Somente a afirmativa **1** é verdadeira.

b) Somente as afirmativas **1** e **4** são verdadeiras.

c) Somente as afirmativas **2** e **3** são verdadeiras.

d) Somente as afirmativas **2**, **3** e **4** são verdadeiras.

e) As afirmativas **1**, **2**, **3** e **4** são verdadeiras.

21. **(Enem)** Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a \cdot \text{sen}\,[b(x + c)]$, em que os coeficientes a, b, c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses [coeficientes]. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda.

O(s) único(s) [coeficiente](s) que necessita(m) ser alterado(s) é(são):

a) a.

b) b.

c) c.

d) a e b.

e) b e c.

O período da função é alterado quando mudamos o coeficiente associado a x na lei da função, ou seja, o coeficiente b dessa lei. Alternativa **b**.

22. **(Uniq-RJ)** Verificou-se que o volume de ar, V, em litros, nos pulmões de certo indivíduo, em repouso, variava em função do tempo t, em segundos, de acordo com a função $V(t) = 2{,}8 + 0{,}29 \cdot \cos(1{,}6 \cdot t + \pi)$.

Nessas condições, conclui-se que, em cada ciclo respiratório, o volume de ar inspirado por esse indivíduo é de: Alternativa **b**.

a) 0,29 litro.

b) 0,58 litro.

c) 1,6 litro.

d) 2,8 litros.

e) 3,2 litros.

23. **(UPE)** Um veículo percorre, com velocidade constante, uma estrada retilínea. Em uma de suas rodas, com 50 cm de diâmetro, prende-se um chiclete. No instante $t = 0$ em que ocorre o primeiro contato do chiclete com a roda, a altura h do chiclete em relação ao nível da estrada é igual a 0. À medida que a roda gira, a altura h do chiclete em relação ao nível da estrada, em centímetros, varia periodicamente em função do tempo t decorrido após o primeiro contato do chiclete com a roda, em segundos. Sabendo-se que a roda dá uma volta completa a cada 0,5 segundo, qual das seguintes funções melhor descreve a altura h em função de t? Alternativa **a**.

a) $h(t) = 25 + 25 \cdot \text{sen}\left(4\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$

b) $h(t) = 25 + 25 \cdot \text{sen}(4\pi t)$

c) $h(t) = 25 + 25 \cdot \text{sen}(0{,}5\pi t)$

d) $h(t) = 25 - 25 \cdot \text{sen}\left(0{,}5\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$

e) $h(t) = 25 - 25 \cdot \text{sen}(\pi t)$

24. Pense nos diversos fenômenos periódicos que você estudou neste capítulo, ou pesquise outros, e elabore um problema que seja modelado por uma função do tipo trigonométrica. Depois, peça a um colega que resolva o problema que você elaborou enquanto você resolve o dele.

O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

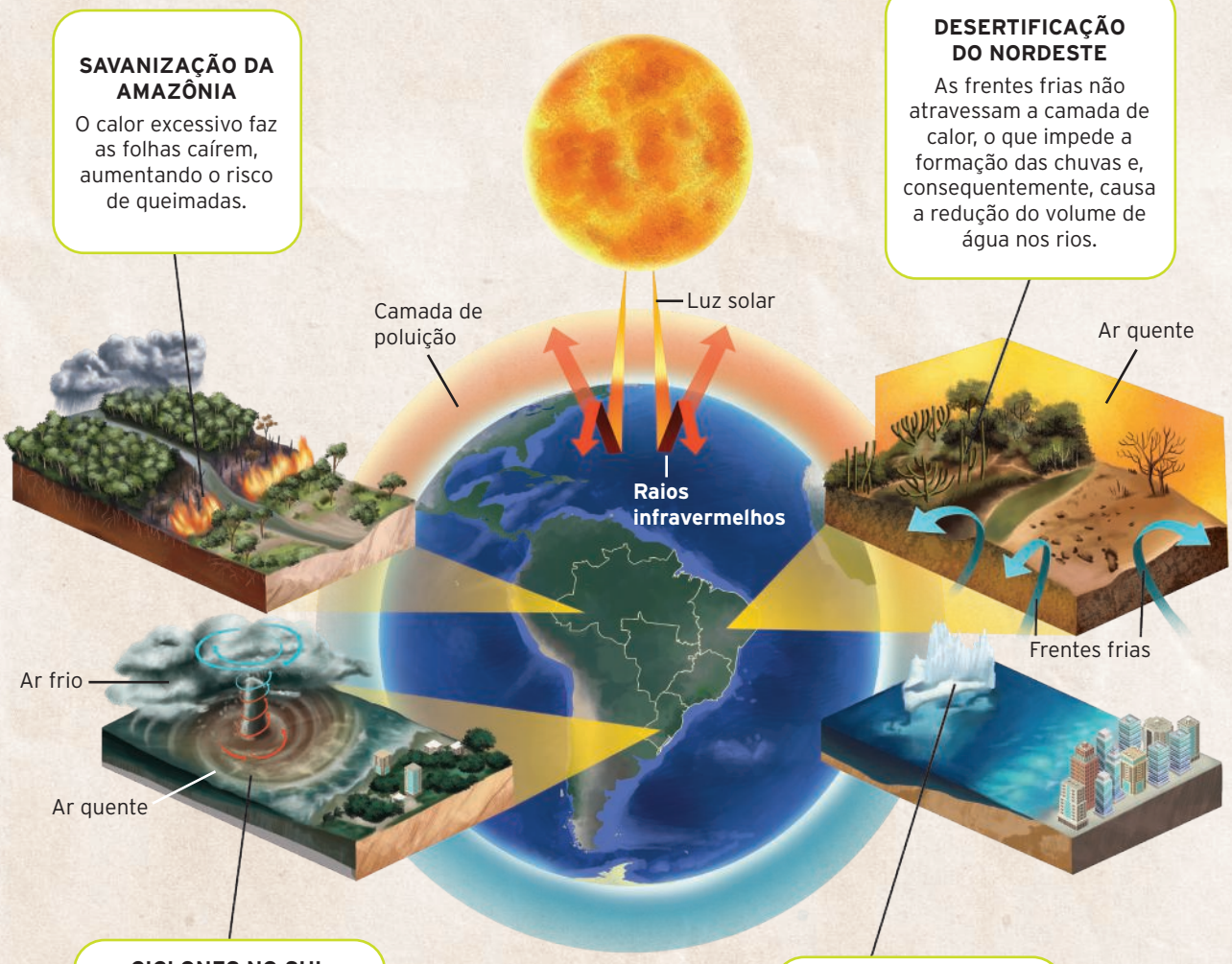
Além da sala de aula

As imagens não estão representadas em proporção.

O que as mudanças climáticas podem causar

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Ambiental*. Sugerimos que ela seja trabalhada em conjunto com os professores de Biologia e de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.



Bruna Ishihara/Arquivo da editora

SAVANIZAÇÃO DA AMAZÔNIA

O calor excessivo faz as folhas caírem, aumentando o risco de queimadas.

DESERTIFICAÇÃO DO NORDESTE

As frentes frias não atravessam a camada de calor, o que impede a formação das chuvas e, consequentemente, causa a redução do volume de água nos rios.

CICLONES NO SUL

Com a elevação da temperatura da água do mar, as massas de ar quente da superfície são empurradas para cima, chocam-se com as massas de ar frio e, assim, as partículas de ar são condensadas, formando ciclones.

AUMENTO DO NÍVEL DO MAR

O calor provoca o derretimento das geleiras e dos *icebergs*, provocando o aumento do nível dos oceanos.

Nível das marés

Professor, se julgar pertinente para a opção **2** do Produto final, proponha aos estudantes que, com o apoio da ferramenta de regressão sinusoidal do *software* de Geometria dinâmica e de um calendário lunar, elaborem a previsão da influência da Lua nas marés para meses futuros.

As atrações gravitacionais exercidas pela Lua e pelo Sol sobre a Terra causam a elevação e a diminuição do nível do mar. O maior e o menor nível das águas do mar são chamados, respectivamente, de maré alta e maré baixa. A cada dia, a força gravitacional da Lua, que orbita o planeta Terra, atrai as águas e provoca correntes marítimas que geram as marés.

Sobre o assunto

A seguir, sugerimos um vídeo produzido pelo *Nexo Jornal* sobre o fenômeno periódico das marés.

Como funciona a influência da Lua nas marés. Disponível em: https://tedit.net/a97mei. Acesso em: 24 mar. 2023.

Indo além: modelagem matemática

O fenômeno das marés que citamos pode ser modelado, aproximadamente, por **funções trigonométricas**. Vamos explorar como essa modelagem pode ser feita com o apoio de um *software* de Geometria dinâmica.

Etapas

1. Organização

- Reúna-se em grupo com 3 a 5 colegas.

2. Pesquisa

Escolham uma cidade da costa brasileira e pesquisem quais foram os horários e as medidas de altura das marés durante as 2 últimas semanas. Para isso, vocês podem consultar o *site* Tábua de Marés (disponível em: https://tedit.net/ho49q1; acesso em: 24 jun. 2024).

3. Desenvolvimento

- Montem uma tabela com os horários e as medidas de altura das marés consultadas no *site*, considerando ao menos 2 semanas de dados.
- Acessem um *software* de Geometria dinâmica que tenha uma ferramenta de regressão sinusoidal. Selecionem o pico e a baixa de cada dia considerado ao longo da primeira semana na tabela construída e insiram esses pontos no plano cartesiano do programa.

4. Produto final

Opção 1: Previsão de tábua de marés para os próximos dias

- Utilizem a ferramenta de regressão sinusoidal do *software* para construir o gráfico da função trigonométrica mais adequada aos pontos digitados.
- Produzam uma apresentação que compare a previsão das marés de acordo com a função trigonométrica determinada pelo aplicativo com as informações reais das marés que vocês registraram para a segunda semana considerada.
- Debatam com a turma se a função fez uma boa modelagem ou não para as medidas de altura das marés.

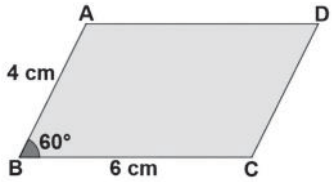
Opção 2: Estudo comparativo da fase da Lua com as medidas de altura das marés

- Utilizem os valores que vocês obtiveram no *site* Tábua de Marés por um período mais longo: 1 mês, pelo menos.
- Comparem a medida de altura das marés com a fase da Lua na cidade da consulta.
- Produzam uma apresentação que mostre a influência da fase da Lua nas medidas de altura das marés.

Enem e vestibulares

As imagens não estão representadas em proporção.

1. **(UPE)** No paralelogramo *ABCD* da figura, as medidas dos segmentos [de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$] são, respectivamente, 4 cm e 6 cm, e a medida do ângulo formado por esses segmentos é 60°.

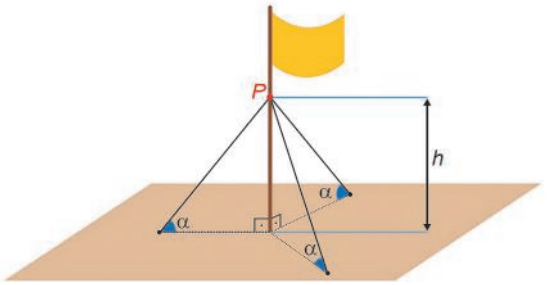


Reprodução/UPE, 2024.

Qual a medida, em cm, da diagonal *AC*? Use $\sqrt{7} = 2{,}65$. Alternativa **b**.

a) 5,1 **c)** 5,6 **e)** 6,8
b) 5,3 **d)** 6,2

2. **(Enem)** O mastro de uma bandeira foi instalado perpendicularmente ao solo em uma região plana. Devido aos fortes ventos, três cabos de aço, de mesmo comprimento, serão instalados para dar sustentação ao mastro. Cada cabo de aço ficará perfeitamente esticado, com uma extremidade num ponto *P* do mastro, a uma altura *h* do solo, e a outra extremidade, num ponto no chão, como mostra a figura.



Reprodução/Enem, 2023.

Os cabos de aço formam um ângulo α com o plano do chão.

Por medida de segurança, há apenas três opções de instalação:

- opção **I**: $h = 11$ m e $\alpha = 30°$.
- opção **II**: $h = 12$ m e $\alpha = 45°$.
- opção **III**: $h = 18$ m e $\alpha = 60°$.

A opção a ser escolhida é aquela em que a medida dos cabos seja a menor possível.

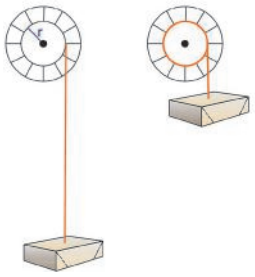
Qual será a medida, em metro, de cada um dos cabos a serem instalados? Alternativa **c**.

a) $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ **d)** $12\sqrt{3}$
b) $11\sqrt{2}$ **e)** 22
c) $12\sqrt{2}$

3. **(UEG-GO)** A medida de um ângulo α é 1 radiano. A medida de α em graus é tal que: Alternativa **d**.

a) $10° < \alpha < 20°$. **d)** $50° < \alpha < 60°$.
b) $30° < \alpha < 40°$. **e)** $40° < \alpha < 50°$.
c) $20° < \alpha < 30°$.

4. **(Ficsae-SP)** A imagem descreve o içamento de uma caixa por meio de uma corda fixada a ela e a uma roda circular de raio $r = 30$ cm.

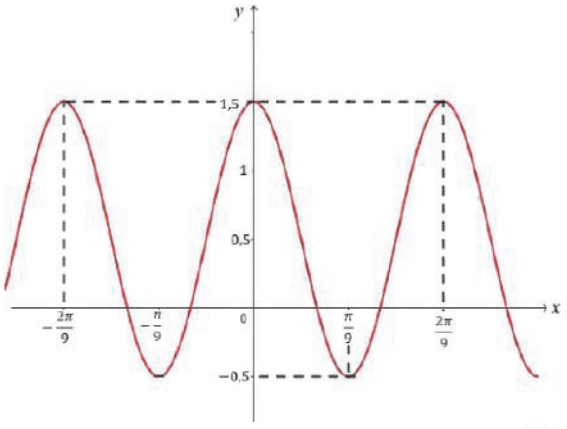


Reprodução/FICSAE, 2021.

Considerando desprezível a espessura da corda durante todo o içamento, que foi concluído após um giro de $\frac{12\pi}{5}$ radianos da roda, o deslocamento vertical da caixa foi de, aproximadamente, Alternativa **c**.

a) 7,85 m. **d)** 3,77 m.
b) 7,54 m. **e)** 2,51 m.
c) 2,26 m.

5. **(UPF-RS)** Na figura está representada parte do gráfico [de] uma função periódica.



Reprodução/UPF-RS, 2021.

O **período** positivo mínimo e a **amplitude** desta função, respectivamente, são: Alternativa **d**.

a) $\frac{2\pi}{9}$ e 1,5. **c)** $\frac{\pi}{9}$ e 1. **e)** $\frac{\pi}{9}$ e 1,5.

b) $\frac{2\pi}{9}$ e 2. **d)** $\frac{2\pi}{9}$ e 1.

6. **(Enem)** Na modelagem e no estudo de fenômenos periódicos, em geral, os modelos associados fazem uso de funções trigonométricas. Nesse sentido, considere um experimento, realizado em laboratório, em que uma planta foi colocada em uma estufa, onde a temperatura é controlável. O experimento consiste em observar alterações nas características dessa planta ao ser submetida a variações de temperatura. Durante 24 horas, a temperatura $T(x)$ da estufa variou de acordo com a função $T(x) = 20 - 10 \text{ sen } \left(\pi \cdot \frac{x}{4}\right)$, em que x é medido em hora, variando no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 24$.

Durante esse experimento, quantas vezes a temperatura na estufa atingiu o seu valor mínimo?

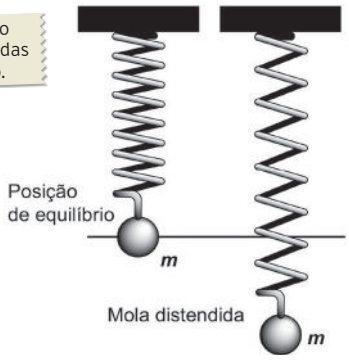
a) 1 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 7

Alternativa **b**.

7. **(Enem)** Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura [a seguir] representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A \cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm A \text{ sen } (\omega t)$, em que $A > 0$ é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

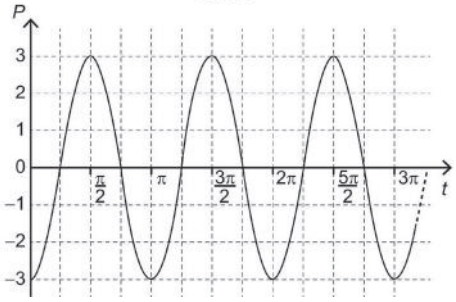
Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.

As imagens não estão representadas em proporção.



Reprodução/Enem digital, 2021.

Gráfico



Reprodução/Enem digital, 2021.

A expressão algébrica que representa as posições $P(t)$ da massa m, ao longo do tempo, no gráfico, é: Alternativa **a**.

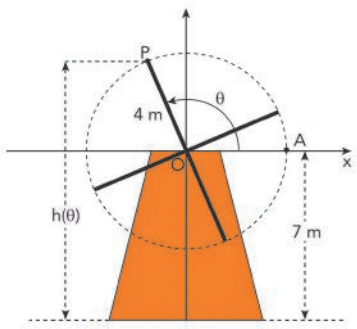
a) $-3 \cos(2t)$. **d)** $-6 \cos(2t)$.

b) $-3 \text{ sen } (2t)$. **e)** $6 \text{ sen } (2t)$.

c) $3 \cos(2t)$.

8. **(Uerj)** As imagens a seguir mostram a ilustração de um moinho de vento e seu esquema plano. Considere que a parte inferior do moinho é representada por um tronco de cone circular reto de bases paralelas e que suas quatro pás se movem no sentido anti-horário.





Reprodução/Uerj, 2024.

fonte: google.com

Admita as seguintes informações:

- o tronco possui altura de 7 m;
- cada pá mede 4 m de comprimento, sendo uma delas $\overline{OP}$;
- a trajetória do movimento de rotação da extremidade P é a circunferência de centro O e raio de 4 m;
- o ângulo $A\widehat{O}P = \theta$ é medido no sentido anti-horário a partir do eixo horizontal x;
- a altura $h(\theta)$ do ponto P é relativa ao plano horizontal que contém a base maior do tronco.

[No caderno, calcule] a altura h do ponto P quando θ é igual a 120°. $h = 2\sqrt{3} + 7$ m

Conteúdos e aprendizagens



Octavio Passos/Getty Images

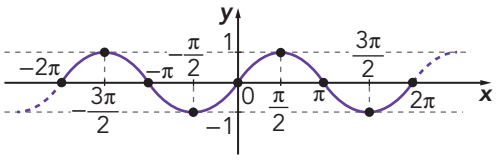
Maya Gabeira bateu o próprio recorde mundial ao surfar uma onda de 22,4 metros em uma competição em 2020. Foto de 2021.

No máximo 4 coeficientes são utilizados nas leis de funções que envolvem o seno e o cosseno de um número real para que elas se ajustem a um fenômeno periódico real.

Funções trigonométricas

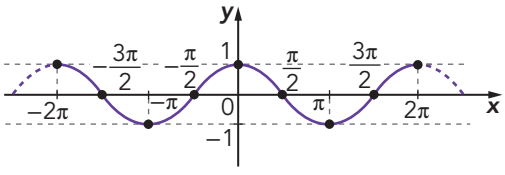
Função seno

$f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(cx + d)$



Função cosseno

$f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Os coeficientes

- Deslocamento
  - Vertical → a
  - Horizontal → d
- Alongamento ou achatamento
  - Vertical → b
  - Horizontal → c

- Sei calcular as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e compreendo as relações entre elas?
- Sei utilizar a lei dos senos e a lei dos cossenos em triângulos quaisquer para resolver problemas?
- Compreendo a influência dos coeficientes a, b, c e d em funções do tipo $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(cx + d)$ e $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$? Respostas pessoais.

UNIDADE 4

Matrizes, determinantes e sistemas lineares



Barras de chocolate.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento da abertura desta Unidade encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

O cacau (*Theobroma cacao*) é o fruto da árvore cacaueiro, nativa da América Central e da América do Sul. No Brasil, os estados do Pará e da Bahia concentram cerca de 90% da produção nacional, contribuindo para que o país ocupe a 7ª posição na produção mundial desse fruto. O cacau é a principal matéria-prima para a fabricação de chocolates, que podem ser consumidos em barras ou como ingrediente de receitas culinárias. Os principais tipos são o chocolate amargo, o chocolate ao leite e o chocolate branco.

PandaStudio/Shutterstock



- Pesquise a composição dos principais tipos de chocolate.
- O preço do chocolate varia conforme a marca e o tipo do produto. Imagine que você precise organizar chocolates por marca e tipo. Como faria? Resposta pessoal.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

• Exemplo de resposta: Chocolate amargo: açúcar e um teor mínimo de 50% de cacau; chocolate ao leite: cacau, leite e açúcar; chocolate branco: manteiga de cacau, leite, açúcar e lecitina.

Professor, neste momento é esperado que os estudantes citem a criação de uma tabela como maneira de organizar esses dados.

CAPÍTULO 1

Matrizes e determinantes

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação-problema

Organização das notas



arrowsmith2/Shutterstock

Estudante realizando uma prova na escola.

Em muitas escolas da Educação Básica, bem como em cursos do Ensino Superior, é comum a atribuição de notas para a avaliação da aprendizagem.

Geralmente, as notas seguem uma escala com números (por exemplo, de 0 a 10 ou de 0 a 100) ou com letras (como de A a D).

Considere uma escola em que as notas das provas obedecem à escala numérica de 0 a 10, sendo 0 a nota mais baixa e 10 a mais alta, e na qual, em determinado período, foram feitas 3 provas em cada disciplina.

Para analisar as notas que recebeu, Augusto vai organizá-las em linhas e colunas, formando uma tabela. Ele fez as provas *A*, *B* e *C* e obteve, respectivamente, 8, 9 e 10 em Língua Portuguesa, 9, 7 e 10 em Geografia e 8, 8 e 9 em Biologia.

a) Copie a tabela apresentada no caderno e complete-a organizando as notas de Augusto.

Notas de Augusto

Disciplina \ Prova	*A*	*B*	*C*
Língua Portuguesa	8	9	10
Geografia	9	7	10
Biologia	8	8	9

Dados elaborados para fins didáticos.

Em Matemática, tabelas que apresentam dados numéricos dispostos em **linhas** (filas horizontais) e **colunas** (filas verticais) podem ser organizadas em **matrizes**. Acompanhe como podemos representar a matriz correspondente aos dados numéricos da tabela que você completou.

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 9 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \text{ linhas} \\ \leftarrow \end{matrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{bmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 9 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \text{ linhas} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$ colunas

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$ colunas

Fique atento

Uma matriz pode ser representada com o uso de parênteses, colchetes ou barras verticais duplas. Nesta coleção, optamos por usar a notação com parênteses.

b) Em qual disciplina Augusto teve o melhor desempenho nessas 3 provas? Justifique sua resposta. Em Língua Portuguesa. Resposta pessoal.

c) As notas de Gustavo nas mesmas provas foram 7, 5 e 8 em Língua Portuguesa, 6, 6 e 6 em Geografia e 9, 7 e 8 em Biologia. Represente no caderno a tabela que apresenta essas notas e a matriz correspondente. As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Explorando as matrizes

Diversas empresas dispõem de muitas informações referentes a clientes, potenciais clientes, vendas, compras, *marketing*, interesses de grupos, etc. Para que essas informações tenham valor agregado e possam ser utilizadas de maneira eficiente, elas precisam ser organizadas de maneira lógica, além de serem facilmente recuperadas e relacionadas.



Aleksandar Malivuk/Shutterstock

Impressão de livros.

A organização delas é feita por meio de um banco de dados, que pode ser entendido como uma coleção de dados e tabelas relacionados entre si. E, como já notamos na situação abordada anteriormente, algumas tabelas podem ser associadas a **matrizes**.

Antes de formalizar o conceito de matrizes, vamos explorar mais uma situação.

Em uma editora, a venda de livros de aventura, romance e ficção do 1º trimestre de um ano foi organizada na tabela a seguir. Uma tabela como a apresentada, em que os números estão dispostos em 3 linhas e 3 colunas, pode ser associada a uma **matriz 3 × 3** (lemos: matriz três por três).

Vendas de livros no 1º trimestre do ano

Mês / Gênero	Janeiro	Fevereiro	Março
Aventura	20 000	32 000	45 000
Romance	15 000	18 000	25 000
Ficção	16 000	17 000	23 000

Dados elaborados para fins didáticos.

$$\begin{pmatrix} 20\,000 & 32\,000 & 45\,000 \\ 15\,000 & 18\,000 & 25\,000 \\ 16\,000 & 17\,000 & 23\,000 \end{pmatrix}$$

Se quisermos saber:

- quantos livros de aventura foram vendidos em fevereiro, basta analisar o número que está na **1ª linha** e na **2ª coluna** da matriz;
- quantos livros de romance foram vendidos em janeiro, basta considerar o número que está na **2ª linha** e na **1ª coluna** da matriz;
- quantos livros de ficção foram vendidos em março, basta identificar o número que está na **3ª linha** e na **3ª coluna** da matriz.

Não escreva no livro

Reflita

Como seria a matriz associada à tabela caso as linhas dela fossem as colunas e as colunas fossem as linhas?

$$\begin{pmatrix} 20\,000 & 15\,000 & 16\,000 \\ 32\,000 & 18\,000 & 17\,000 \\ 45\,000 & 25\,000 & 23\,000 \end{pmatrix}$$

Formalizando a definição de matriz

Sejam m e n números inteiros maiores do que ou iguais a 1.

Matriz $m \times n$ (lemos: matriz m por n) é uma tabela retangular formada por $m \cdot n$ números reais, dispostos em m linhas e n colunas.

Dizemos que a matriz é do **tipo** $m \times n$ ou de **ordem** $m \times n$. Acompanhe os exemplos a seguir.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×2 (lemos: dois por dois), pois tem 2 linhas e 2 colunas.

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -5 & 1 \\ 2 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz de ordem 2×3 (lemos: dois por três), pois tem 2 linhas e 3 colunas.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 1×3 (lemos: um por três), pois tem 1 linha e 3 colunas.

d) $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz 4×1 (lemos: quatro por um), pois tem 4 linhas e 1 coluna.

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz 2×2 (lemos: dois por dois), pois tem 2 linhas e 2 colunas.

Fique atento

Quando uma matriz $m \times n$ tem $m = 1$, a chamamos de **matriz linha**, e quando tem $n = 1$, a chamamos de **matriz coluna**.

Fique atento

A matriz que tem todos os elementos iguais a 0 denomina-se **matriz nula**. Vamos simbolizar a matriz nula do tipo $m \times n$ por $0_{m \times n}$, lemos: matriz nula de ordem m por n.

No exemplo **e** temos uma matriz 2×2 nula.

Representação genérica de uma matriz

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Os números que aparecem em uma matriz são chamados **elementos** ou **termos** da matriz.

Analise a matriz apresentada.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 \\ -5 & 4 & 10 & 0 \\ 6 & -2 & 7 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- O número 3, ou o elemento 3, está na **1ª linha** e na **1ª coluna**; indicamos $a_{11} = 3$ (lemos a_{11} como a um um).
- O elemento -5 está na **2ª linha** e na **1ª coluna**; indicamos $a_{21} = -5$ (lemos a_{21} como a dois um).
- O elemento 2 está na **1ª linha** e na **2ª coluna**; indicamos $a_{12} = 2$ (lemos a_{12} como a um dois).
- O elemento $\sqrt{2}$ está na **3ª linha** e na **4ª coluna**; indicamos $a_{34} = \sqrt{2}$ (lemos a_{34} como a três quatro).

1. Quais números correspondem aos termos a_{13}, a_{24} e a_{32}? $a_{13} = 5$, $a_{24} = 0$ e $a_{32} = -2$.

2. Como podemos indicar os elementos 10 e 6 dessa matriz? $a_{23} = 10$ e $a_{31} = 6$.

3. Como podemos representar genericamente todos os elementos em uma matriz 3×2? $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Para nomear uma matriz, geralmente usamos uma letra maiúscula, e, para representar um elemento qualquer da matriz, usamos uma letra minúscula com 2 índices: o 1º índice indica em qual linha o elemento se encontra e o 2º índice indica em qual coluna. Por exemplo, o elemento genérico de uma matriz A é indicado por a_{ij}, em que i representa a linha e j representa a coluna na qual o elemento se encontra.

Assim, uma matriz A do tipo $m \times n$ pode ser apresentada da seguinte maneira:

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ (lemos: matriz A dos elementos a_{ij}, do tipo $m \times n$), com $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ e $i, j \in \mathbb{N}$.

Ela pode ser representada, genericamente, do seguinte modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Acompanhe como representar a matriz $X = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que:

$$\begin{cases} a_{ij} = 1, \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Temos que a matriz deve ter 3 linhas e 3 colunas tal que:

- $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$;
- $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$.

Assim, temos a matriz quadrada de ordem 3: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Fique atento

Quando uma matriz tem $m = n$, ou seja, quando a quantidade de linhas é igual à quantidade de colunas, dizemos que a matriz é **quadrada** do tipo $n \times n$, ou simplesmente matriz quadrada de ordem n.

Diagonais de uma matriz

Em uma matriz quadrada de ordem n, os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ formam a **diagonal principal** da matriz (são os elementos a_{ij} com $i = j$).

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ diagonal principal

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -3 & 0 & 8 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ diagonal principal

A outra diagonal da matriz quadrada, que vai do último elemento da 1ª linha até o 1º elemento da última linha, é chamada **diagonal secundária**.

diagonal secundária $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -3 & 0 & 8 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ diagonal secundária

Atividades resolvidas

1. Escreva no caderno a matriz quadrada de ordem 3 tal que $a_{ij} = i^3 - 2j$.

Resolução

Uma matriz quadrada de ordem 3 tem 3 linhas e 3 colunas. Ela pode ser representada genericamente por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Considerando a lei de formação $a_{ij} = i^3 - 2j$, temos:

$a_{11} = 1^3 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$
$a_{12} = 1^3 - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3$
$a_{13} = 1^3 - 2 \cdot 3 = 1 - 6 = -5$
$a_{21} = 2^3 - 2 \cdot 1 = 8 - 2 = 6$
$a_{22} = 2^3 - 2 \cdot 2 = 8 - 4 = 4$
$a_{23} = 2^3 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 = 2$
$a_{31} = 3^3 - 2 \cdot 1 = 27 - 2 = 25$
$a_{32} = 3^3 - 2 \cdot 2 = 27 - 4 = 23$
$a_{33} = 3^3 - 2 \cdot 3 = 27 - 6 = 21$

Portanto, a matriz pedida é $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 25 & 23 & 21 \end{pmatrix}$.

Atividades

Não escreva no livro

1. Identifique os elementos a_{11}, a_{22} e a_{13} na matriz $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. $a_{11} = 2$; $a_{22} = -5$ e $a_{13} = 10$.

Texto para a próxima atividade.

Na agricultura, ao realizar o cultivo de 2 ou mais espécies em proximidade, dizemos que temos plantas companheiras, quando uma beneficia o crescimento da outra, e plantas antagônicas, quando a associação é desfavorável ao desenvolvimento delas.

2. Imagine uma matriz em que cada elemento indica se a planta relacionada na linha é companheira ou antagônica da planta relacionada na coluna: se são companheiras, o elemento é igual a 1, e, se são antagônicas, é igual a 0.

Considere que as hortaliças tomate, couve, cebola e alface, numeradas de 1 a 4, nessa ordem, correspondem às linhas e às colunas dessa matriz. Por exemplo, o elemento da linha 1 e da coluna 3 da matriz representa o cultivo conjunto entre tomate e cebola, que são companheiras. Então, temos a seguinte matriz:

3. a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 6 \\ 17 & 16 \\ 31 & 30 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Fonte dos dados: FERNANDES, José Pedro. Cultivar na horta: plantas companheiras vs antagónicas. *Revista Jardins*, [*s. l.*], 2022. Disponível em: https://tedit.net/5j3bvf. Acesso em: 17 jul. 2024.

2. b) Porque representam a combinação de cada planta com ela própria, o que sempre é um cultivo favorável.

a) Analisando todos os elementos dessa matriz, quais são as plantas companheiras entre si? Tomate e alface; tomate e cebola; couve e alface; cebola e alface.

b) Por que os elementos da diagonal principal dessa matriz são todos iguais a 1?

3. Escreva no caderno as matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = i^2 + j^2$;

b) $X = (a_{ij})_{4 \times 2}$ de modo que $a_{ij} = 2i^2 - j$.

4. Seja a matriz quadrada de ordem 2 igual a $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$. Calcule a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

$3 \cdot 10 - 2 \cdot 6 = 30 - 12 = 18$

Fique atento

A matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são iguais a zero é chamada **matriz identidade**, e o símbolo que a representa é I_n.

5. Escreva no caderno a matriz identidade de ordem 2 (I_2) e a matriz identidade de ordem 3 (I_3).

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Operações com matrizes

Igualdade de matrizes

Vamos considerar 2 matrizes, A e B, de mesmo tipo, $m \times n$, no caso 3×2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Em matrizes de mesmo tipo, os elementos que ocupam a mesma posição são denominados **elementos correspondentes**.

Então, nas matrizes A e B consideradas, são elementos correspondentes:

a_{11} e b_{11} $\qquad$ a_{12} e b_{12}

a_{21} e b_{21} $\qquad$ a_{22} e b_{22}

a_{31} e b_{31} $\qquad$ a_{32} e b_{32}

Assim:

As matrizes A e B são iguais se, e somente se, tiverem o mesmo tipo e os elementos correspondentes forem iguais.

Podemos escrever a definição anterior da seguinte maneira:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \text{ com } 1 \leqslant i \leqslant m \text{ e } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \div 2 & 2 - 1 \\ 5 \cdot 1 & 4 + 2 \end{pmatrix}$; nesse caso, as matrizes são quadradas de ordem 2 e os elementos correspondentes são iguais.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, então $A \neq B$, pois A e B não têm o mesmo tipo.

Atividades resolvidas

2. Determine x e y para que sejam iguais as matrizes $\begin{pmatrix} 3x + 2y & 2 \\ 2 & 3x - 3y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Resolução

As matrizes têm a mesma ordem (2).

Para que as matrizes sejam iguais, devemos ter ainda:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x - 3y = -3 \end{cases}$$

Isolando x na 2ª equação, temos:

$$3x - 3y = -3 \Rightarrow 3x = -3 + 3y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -1 + y$$

Substituindo na 1ª equação:

$$3(-1 + y) + 2y = 7 \Rightarrow -3 + 3y + 2y = 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2$$

Assim, $x = -1 + y \Rightarrow x = -1 + 2 \Rightarrow x = 1$.

Portanto, $x = 1$ e $y = 2$.

Adição e subtração de matrizes

Acompanhe o exemplo a seguir.

A gerente de vendas de uma loja tem à disposição dela as tabelas de vendas mensais por tipo de produto vendido, em reais, dos 3 vendedores da loja.

Vendas em janeiro

Vendedor	Geladeira	Fogão
Paulo	R$ 23.000,00	R$ 12.000,00
Mariana	R$ 27.000,00	R$ 10.000,00
Rodolfo	R$ 19.000,00	R$ 15.000,00

Dados elaborados para fins didáticos.

Vendas em fevereiro

Vendedor	Geladeira	Fogão
Paulo	R$ 21.000,00	R$ 10.000,00
Mariana	R$ 16.000,00	R$ 6.000,00
Rodolfo	R$ 20.000,00	R$ 9.000,00

Dados elaborados para fins didáticos.

A gerente precisava determinar as vendas do 1º bimestre por tipo de produto vendido, em reais, dos 3 vendedores da loja. Para isso, ela **adicionou** os valores correspondentes a cada vendedor e tipo de produto, que estão organizados na tabela a seguir, referente aos meses de janeiro e fevereiro.

Vendas no 1º bimestre

Vendedor	Geladeira	Fogão
Paulo	R$ 44.000,00	R$ 22.000,00
Mariana	R$ 43.000,00	R$ 16.000,00
Rodolfo	R$ 39.000,00	R$ 24.000,00

Dados elaborados para fins didáticos.

Analisando os dados da tabela de vendas do 1º bimestre, temos que Paulo vendeu mais geladeiras e Rodolfo vendeu mais fogões; portanto, foram eles os melhores vendedores desses produtos.

Não escreva no livro

Reflita

Qual foi o melhor vendedor de geladeiras do bimestre? E de fogões?

Depois, a gerente precisava avaliar a evolução das vendas de janeiro a fevereiro: Aumentaram? Diminuíram? Qual foi a diferença de faturamento entre janeiro e fevereiro?

Uma maneira de obter essas informações é calcular a **diferença** dos valores correspondentes a cada vendedor em fevereiro e janeiro, obtendo a tabela de evolução das vendas no bimestre.



hedgehog94/Shutterstock

Vendedora mostrando uma geladeira a clientes.

Evolução das vendas de janeiro para fevereiro

Vendedor	Geladeira	Fogão
Paulo	–R$ 2.000,00	–R$ 2.000,00
Mariana	–R$ 11.000,00	–R$ 4.000,00
Rodolfo	R$ 1.000,00	–R$ 6.000,00

Dados elaborados para fins didáticos.

Não escreva no livro

Reflita

Qual vendedor teve a maior queda de vendas de geladeiras de janeiro para fevereiro?

Analisando os dados da tabela, temos que, de janeiro para fevereiro, Mariana teve a maior queda de vendas de geladeiras.

O exemplo anterior representa as operações de adição e de subtração de matrizes, temas que abordaremos a seguir.

Adição de matrizes

Considere 2 matrizes A e B do tipo 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos determinar uma matriz C tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, ou seja, $A + B = C$:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}}^{A} + \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{B} = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+(-4) & (-2)+(-1) \\ 2+7 & 8+0 & (-6)+2 \\ 1+3 & 4+1 & 2+0 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 9 & 8 & -4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}}^{C}$$

A matriz C assim obtida denomina-se **soma da matriz *A* com a matriz *B***, ou **soma das matrizes *A* e *B***.

Assim:

Dadas 2 matrizes A e B do mesmo tipo $m \times n$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B, que representamos por $A + B$, a matriz C do tipo $m \times n$ na qual cada elemento é obtido adicionando-se os elementos correspondentes de A e de B.

Matriz oposta de uma matriz A

Denomina-se **matriz oposta** de uma matriz A (representa-se por $-A$) a matriz que, adicionada a A, resulta em uma matriz nula.

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, então a matriz oposta de A é $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, pois:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matriz nula}}$$

Observação: Os elementos correspondentes de A e $-A$ são números opostos. Obtemos $-A$ mudando os sinais de todos os elementos de A.

Fique atento

Dadas as matrizes A, B e C, de mesma ordem, temos:

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0 = 0 + A = A$, sendo 0 uma matriz nula de mesma ordem.
- $A + (-A) = (-A) + A = 0$

Reflita

Verifique essas relações escolhendo 3 matrizes de mesma ordem.

A resposta depende das matrizes escolhidas pelos estudantes.

Subtração de matrizes

Sendo A e B matrizes do tipo $m \times n$, denomina-se diferença entre A e B (representada por $A - B$) a soma da matriz A com a matriz oposta de B, isto é, $A - B = A + (-B)$.

Fique atento

Dadas as matrizes A e B, de mesma ordem, temos:

$$A - B = A + (-B)$$

Reflita

Verifique essa relação escolhendo matrizes de mesma ordem.

A resposta depende das matrizes escolhidas pelos estudantes.

Atividades

Não escreva no livro

6. Sabendo que $\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ 2b & 2a-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$, determine a, b, c e d.

6. Temos que: $2b = 6 \Rightarrow b = 3$; $a + b = 9 \Rightarrow$ $\Rightarrow a + 3 = 9 \Rightarrow a = 6$; $b + c = -1 \Rightarrow 3 + c = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow c = -4$; $2a - 3d = 18 \Rightarrow 12 - 3d = 18 \Rightarrow -3d = 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow d = -2$. Portanto, $a = 6$; $b = 3$; $c = -4$ e $d = -2$.

7. Determine m e n para que se tenha $\begin{pmatrix} m+n & m \\ 0 & n \end{pmatrix} = I_2$.

Temos que: $\begin{pmatrix} m+n & m \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Portanto, $m = 0$ e $n = 1$.

9. a) $\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\8\\7\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$

8. Determine a, b e c para que se tenha $\begin{pmatrix}a+b-1 & 0\\ a-3c & b\\ 2b & 0\end{pmatrix}=0_{3\times 2}$. $a=1;\ b=0;\ c=\frac{1}{3}$.

9. Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}$, calcule:

a) $A+B-C$ **b)** $A-B+C$ **c)** $A-B-C$

10. Dadas as seguintes matrizes quadradas de ordem 2, A com $a_{ij}=\begin{cases}i+2j, \text{ para } i\geqslant j\\ 0, \text{ para } i<j\end{cases}$ e B com $b_{ij}=\begin{cases}i^3, \text{ para } i\geqslant j\\ 0, \text{ para } i<j\end{cases}$, calcule $A+B$ e $B+A$. $A+B=B+A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 12 & 14\end{pmatrix}$

11. A e B são 2 matrizes quadradas de ordem 2 cujos elementos são dados por $a_{ij}=3i-2j$ e $b_{ij}=(a_{ij})^2$. Calcule:

a) $A-B$; $A-B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -12 & -2\end{pmatrix}$

b) $A+B$. $A+B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 20 & 6\end{pmatrix}$

12. Se $A=(a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $a_{ij}=2i+3j-5$, escreva no caderno a matriz oposta de A. $\begin{pmatrix}0 & -3\\ -2 & -5\end{pmatrix}$

13. Se $X=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 6 & -10 & 7\end{pmatrix}$ escreva no caderno a matriz X sabendo que 0 é uma matriz nula do tipo 2×3. $X=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 6 & -10 & 7\end{pmatrix}$

Multiplicação de número real por matriz

Vamos voltar ao exemplo da gerente de vendas.

Suponha que a comissão dos vendedores seja 5% sobre o total mensal de vendas por tipo de produto. Dessa maneira, a gerente pode desejar ter a informação sobre o custo das comissões pagas aos vendedores em janeiro por tipo de produto vendido. Para obter tal informação, ela pode multiplicar cada valor da tabela das vendas de janeiro por 0,05 (pois 0,05 = 5%, que é o percentual pago de comissão pelas vendas). Assim, teríamos:

Comissões pagas em janeiro

Vendedor	Geladeira	Fogão
Paulo	0,05 · R$ 23.000,00	0,05 · R$ 12.000,00
Mariana	0,05 · R$ 27.000,00	0,05 · R$ 10.000,00
Rodolfo	0,05 · R$ 19.000,00	0,05 · R$ 15.000,00

Dados elaborados para fins didáticos.

Efetuados os cálculos, a tabela com a informação das comissões pagas em janeiro seria:

Comissões pagas em janeiro

Vendedor	Geladeira	Fogão
Paulo	R$ 1.150,00	R$ 600,00
Mariana	R$ 1.350,00	R$ 500,00
Rodolfo	R$ 950,00	R$ 750,00

Dados elaborados para fins didáticos.

O exemplo anterior mostra a operação de multiplicação de uma matriz por um número real.

Acompanhe outro exemplo:

Sendo $A=\begin{pmatrix}5 & 8 & -1\\ -4 & 3 & 6\end{pmatrix}$, então temos:

$$2A = 2\begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 & 2\cdot 8 & 2(-1) \\ 2(-4) & 2\cdot 3 & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 & -2 \\ -8 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Podemos formalizar esse exemplo da seguinte maneira:

Se A é uma matriz $m \times n$, de elementos a_{ij}, e α é um número real, então αA é uma matriz $m \times n$ cujos elementos são αa_{ij}.

Fique atento

Sendo α e β números reais e A e B matrizes de mesma ordem, temos:

- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $1A = A$

Não escreva no livro

Reflita

Verifique essas relações escolhendo 2 números reais e 2 matrizes de mesma ordem.

A resposta depende dos números (α e β) e das matrizes (A e B) escolhidos pelos estudantes.

Matriz transposta

A mesma gerente citada anteriormente vai fazer uma apresentação para os superiores dela e, entre outras coisas, deseja mostrar as vendas bimestrais dos 3 vendedores. Ao preparar a apresentação, ela percebe que a interpretação da tabela ficaria melhor se os vendedores estivessem nas colunas e os produtos nas linhas da tabela, e resolve fazer essa alteração. Acompanhe a seguir.

Tabela original

Vendas no 1º bimestre

Vendedor	Geladeira	Fogão
Paulo	R$ 44.000,00	R$ 22.000,00
Mariana	R$ 43.000,00	R$ 16.000,00
Rodolfo	R$ 39.000,00	R$ 24.000,00

Dados elaborados para fins didáticos.

Nova tabela

Vendas no 1º bimestre

Vendedor	Paulo	Mariana	Rodolfo
Geladeira	R$ 44.000,00	R$ 43.000,00	R$ 39.000,00
Fogão	R$ 22.000,00	R$ 16.000,00	R$ 24.000,00

Dados elaborados para fins didáticos.

A nova tabela é um exemplo de transposição de matriz.

Então:

Seja A uma matriz $m \times n$. Denomina-se **matriz transposta** de A (indica-se por A^t) a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de A.

Fique atento

Ordenadamente significa "em ordem", da primeira à última. Por exemplo, a 1ª linha de A^t é a 1ª coluna de A.

Exemplos:

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 10 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

Observação: se $A = (a_{ij})$ é do tipo $m \times n$, então $A^t = (b_{ji})$ é do tipo $n \times m$ e $b_{ji} = a_{ij}$.

Fique atento

Sejam α um número real qualquer e A e B matrizes de mesma ordem. Assim, temos:

- $(A^t)^t = A$
- $(\alpha A)^t = \alpha \cdot A^t$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$

Reflita

Verifique as relações escolhendo 1 número real e 2 matrizes de mesma ordem.

A resposta depende das matrizes escolhidas pelos estudantes.

14. b) $B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ c) $C^t = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ d) $D^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Atividades

Não escreva no livro

14. Escreva no caderno a matriz transposta das seguintes matrizes:

a) $A = (5 \quad 2 \quad 6)$; $A^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

15. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, determine:

a) $5A$; a) $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$

b) A^t; b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) B^t; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

d) $A^t + B$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A + B^t$; f) $3 \cdot A^t$; $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

g) $(5A - B)^t$; $\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

h) $(3A)^t - 3A^t$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) $-(A^t + B^t)$. $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

16. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 cujos elementos são dados por $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ i + j, \text{ se } i = j \end{cases}$.

Calcule:

a) A; a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

b) $3A$; b) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

c) A^t; c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

d) $A + A^t$;

e) $A - A^t$;

f) $2A + 3A^t - I_3$.

17. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, determine:

a) $A^t + B$; $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(5A - B)^t$. $\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

18. Uma equipe de criadores de jogos para celular acabou de lançar 2 jogos, o "Avião Maluco" e o "Fura-Bolo", nas versões **A** e **B**. As tabelas a seguir mostram a quantidade de *downloads* de cada jogo por dia, em cada tipo de versão.

***Downloads* em 23 de outubro**

Jogo \ Versão	A	B
Avião Maluco	23	21
Fura-Bolo	28	36

Dados elaborados para fins didáticos.

***Downloads* em 24 de outubro**

Jogo \ Versão	A	B
Avião Maluco	67	89
Fura-Bolo	122	104

Dados elaborados para fins didáticos.

De acordo com os dados das tabelas, façam no caderno o que se pede.

a) Escrevam a matriz A, quadrada de ordem 2, com os dados da tabela do dia 23 de outubro. $A = \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$

b) Escrevam a matriz B, quadrada de ordem 2, com os dados da tabela do dia 24 de outubro. $B = \begin{pmatrix} 67 & 89 \\ 122 & 104 \end{pmatrix}$

15. e) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ 16. d) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 29 \end{pmatrix}$

e) Temos que: 10% → 0,10 = 0,1; $C = 0{,}1 \cdot (A + B)$.

c) Escrevam a matriz $A + B$ e interpretem o que são os valores dessa matriz, de acordo com o contexto do enunciado.

d) Escrevam a matriz $B - A$ e interpretem o que são os valores dessa matriz, de acordo com o contexto do enunciado.

e) Exatamente 10% do total de usuários que fizeram o *download* dos jogos nesses 2 dias os avaliaram como ótimos. Qual opção a seguir expressa a operação matricial que gera a matriz C, contendo a quantidade de usuários que nesses 2 dias avaliaram cada jogo, em cada versão, como ótimo?

- $C = 0{,}1 \cdot A + B$
- $C = 0{,}1 \cdot A^t + B$
- X $C = 0{,}1 \cdot (A + B)$
- $C = 0{,}1 \cdot (A^t + B)$

Não escreva no livro

c) $A + B = \begin{pmatrix} 90 & 110 \\ 150 & 140 \end{pmatrix}$; quantidade de *downloads* dos 2 jogos nos 2 dias.

d) $A - B = \begin{pmatrix} 44 & 68 \\ 94 & 68 \end{pmatrix}$; quantidade de *downloads* feita a mais no dia 24 de outubro em relação à quantidade do dia 23 de outubro.

Multiplicação de matrizes

Acompanhe o exemplo a seguir.

Durante a Copa do Mundo de Futebol Masculino realizada no Catar em 2022, o grupo **G** era formado por 4 países: Brasil, Suíça, Camarões e Sérvia. Acompanhe os resultados (quantidade de vitórias, empates e derrotas) de cada um, registrados em uma tabela e em uma matriz A do tipo 4×3.

Desempenho das equipes do grupo G na 1ª fase da Copa do Mundo de Futebol realizada em 2022

Resultado / País	Vitória	Empate	Derrota
Brasil	2	0	1
Suíça	2	0	1
Camarões	1	1	1
Sérvia	0	1	2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz correspondente aos dados da tabela de desempenho.

Fonte dos dados: COPA do Catar. *Terra*, [*s. l.*], 2022. Disponível em: https://tedit.net/d27xvt. Acesso em: 17 jul. 2024.

Pelo regulamento da Copa do Mundo, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem pontuação correspondente (3 pontos, 1 ponto ou 0 ponto). Perceba esse fato registrado em uma tabela e em uma matriz B do tipo 3×1.

Pontos obtidos por equipe

Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matriz correspondente aos dados da tabela de pontuação.

Fonte dos dados: FÉDÉRATION INTERNATIONALE DE FOOTBALL ASSOCIATION. *Fifa World Cup Qatar 2022*: Regulations. Zurich: Fifa, 2022. Disponível em: https://tedit.net/idi99j. Acesso em: 17 jul. 2024.

Terminada a 1ª fase e analisando as tabelas, foi verificado o total de pontos dos países participantes:

- Brasil: $2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6$;
- Suíça: $2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6$;
- Camarões: $1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4$;
- Sérvia: $0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$.

Essa pontuação também pode ser obtida por meio da multiplicação das matrizes A e B, correspondentes às tabelas analisadas.

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ do tipo $m \times n$ e uma matriz $B = (b_{ij})$ do tipo $n \times p$, o produto da matriz A pela matriz B é a matriz $C = (c_{ij})$ do tipo $m \times p$, tal que o elemento c_{ij} é calculado por meio da multiplicação ordenada dos elementos da linha i da matriz A pelos elementos da coluna j da matriz B e pela adição dos produtos obtidos. Para dizer que a matriz C é o produto de A por B, vamos indicá-la por AB.

Assim, temos uma matriz AB (produto de A por B).

$$AB = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cada elemento de AB é obtido por meio da multiplicação ordenada dos elementos da linha i da matriz A pelos elementos da coluna j da matriz B, e pela adição dos produtos obtidos.

Não escreva no livro

Reflita

Como é determinado cada elemento de AB?

Fique atento

Dadas as matrizes A, B, C, D e F, com somas e produtos definidos, temos:

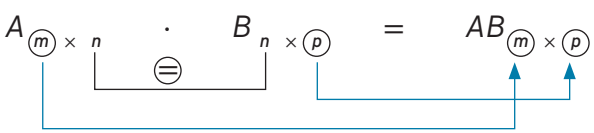
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $(D + E) \cdot C = D \cdot C + E \cdot C$
- $F \cdot (A + B) = F \cdot A + F \cdot B$

Reflita

Verifique essas relações escolhendo 3 matrizes, A, B e C, que tenham 2 linhas e 2 colunas e fazendo $D = A$, $E = B$ e $F = C$.

A resposta depende das matrizes escolhidas pelos estudantes.

Note que só definimos o produto AB de 2 matrizes quando a quantidade de colunas de A for igual à quantidade de linhas de B; além disso, podemos perceber que o produto AB tem a quantidade de linhas de A e a quantidade de colunas de B.



Fique atento

Dadas as matrizes A e B tal que $C = AB$, temos:

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Reflita

Verifique essa relação escolhendo 2 matrizes de modo que $C = AB$.

A resposta depende das matrizes escolhidas pelos estudantes.

Perceba que a matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, ou seja, quando existirem os produtos, temos:

$$A \cdot I = A \text{ e } I \cdot B = B$$

Acompanhe um exemplo a seguir.

Sendo $A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, temos:

$$A \cdot I = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4) \cdot 1 + 8 \cdot 0 & (-4) \cdot 0 + 8 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$I \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 0 \cdot (-6) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 7 + 1 \cdot (-6) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = B$$

Atividades resolvidas

3. Dadas as matrizes $A = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$, determine AB.

Resolução

$$AB = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})$$

4. Dados $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, determine AB.

Resolução

Como A é uma matriz 2×3 e B é uma matriz 3×2, AB será uma matriz 2×2.

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

c_{11}: usa-se a **1ª linha** de A e a **1ª coluna** de B, multiplicando-se ordenadamente os elementos: $1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 17$.

c_{12}: usa-se a **1ª linha** de A e a **2ª coluna** de B: $1 \cdot 0 + 3(-2) + 2 \cdot 6 = 6$.

c_{21}: usa-se a **2ª linha** de A e a **1ª coluna** de B: $0 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + (-1)1 = 19$.

c_{22}: usa-se a **2ª linha** de A e a **2ª coluna** de B: $0 \cdot 0 + 5(-2) + (-1)6 = -16$.

Concluindo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{A_{2\times 3}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}}_{B_{3\times 2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 19 & -16 \end{pmatrix}}_{AB_{2\times 2}}$$

Atividades

Não escreva no livro

19. Só definimos o produto AB de 2 matrizes quando a quantidade de colunas de A for igual à quantidade de linhas de B. Então, no caderno, associe **V** (verdadeira) ou **F** (falsa) a cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

a) Se A é uma matriz 3×1 e B é uma matriz 1×2, existe o produto AB.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $B = (1 \quad 5 \quad 2)$, existe o produto AB. Verdadeira, pois a quantidade de colunas de A é igual à quantidade de linhas de B.

c) Se A é uma matriz 4×3 e B é uma matriz 1×4, existe o produto AB. Falsa, pois a quantidade de colunas de A é diferente da quantidade de linhas de B.

d) Se A e B são matrizes quadradas de ordem 2, então o produto AB será, também, uma matriz quadrada de ordem 2.

20. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, determine:

a) AB; $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ **b)** BA. $\begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

21. Determine o produto AB, sendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 12 & -20 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

22. Analise os resultados obtidos nas atividades **20** e **21** e avalie como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada sentença a seguir (considere A e B matrizes quadradas de mesma ordem). Justifique sua resposta no caderno.

a) $AB = BA$; $AB = BA$. Falsa, pois na atividade **20** temos $AB \neq BA$.

b) Se $AB = 0$, então $A = 0$ e $B = 0$.
Falsa, pois na atividade **21** temos $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $AB = 0$.

Fique atento

Dadas as matrizes quadradas A e B de mesma ordem, é possível ocorrer $AB = BA$, mas em geral temos $AB \neq BA$. Quando $AB = BA$, dizemos que A e B comutam.

19. a) Verdadeira, pois a quantidade de colunas de A é igual à quantidade de linhas de B.
d) Verdadeira, pois a quantidade de linhas de A é igual à quantidade de linhas do produto AB, e a quantidade de colunas de B é igual à quantidade de colunas do produto AB.

23. a) $\begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$

23. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine:

a) A^2, em que $A^2 = AA$;

b) B^2, em que $B^2 = BB$;

c) $(A + B)(A - B)$;

d) $A^2 - B^2$. $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$

Fique atento

Só podemos calcular A^2 quando A for matriz quadrada.

24. Analisando os resultados obtidos na atividade anterior, respondam: Para essas matrizes, A e B, vale a igualdade $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$? Justifique sua resposta no caderno.

25. Se $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ e I_2 é a matriz identidade de ordem 2, determine:

a) $A \cdot I_2$; A **b)** $I_2 \cdot A$. A

26. Determine os produtos:

a) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 17 & 39 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 15 & 0 \\ 12 & 30 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 29 & 24 \\ 23 & 22 \\ 26 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 24 & 9 & 27 \\ 4 & 13 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 & 17 \\ -7 & -8 \\ 9 & 26 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 59 & 12 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

27. Para a fabricação de caminhões, uma indústria montadora precisa de eixos e rodas para 3 modelos deles, com a seguinte especificação:

Quantidade de eixos e rodas de cada modelo de caminhão

Componente \ Modelo	A	B	C
Eixos	2	3	4
Rodas	4	6	8

Dados elaborados para fins didáticos.

Para os 2 primeiros meses do ano, a produção da fábrica deverá obedecer à tabela a seguir.

Produção de caminhões nos meses de janeiro e fevereiro

Modelo \ Mês	Janeiro	Fevereiro
A	30	20
B	25	18
C	20	15

Dados elaborados para fins didáticos.

Usando a multiplicação de matrizes, respondam no caderno: Nessas condições, quantos eixos e quantas rodas são necessários em cada um dos meses para que a montadora atinja a produção planejada? 215 eixos em janeiro e 154 em fevereiro; 430 rodas em janeiro e 308 em fevereiro.

28. Uma loja de materiais escolares está planejando o estoque para o próximo semestre e deseja calcular os custos totais para diferentes combinações de *kits*. Cada *kit* contém uma combinação de cadernos, lápis e canetas. A loja tem 3 tipos de *kits*, e o custo unitário de cada item é dado em 2 matrizes.

Matriz A (quantidades de itens em cada *kit*):

a) $C = \begin{pmatrix} 27 \\ 17 \\ 22 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ → Quantidade de cadernos, lápis e canetas no *kit* 1.

→ Quantidade de cadernos, lápis e canetas no *kit* 2.

→ Quantidade de cadernos, lápis e canetas no *kit* 3.

Matriz B (custos unitários dos itens, em reais):

$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ → Custo de 1 caderno.
→ Custo de 1 lápis.
→ Custo de 1 caneta.

a) Determine a matriz dada por $C = A \times B$.

b) O que cada um dos elementos da matriz que você determinou no item anterior representa? O custo total, em reais, de cada *kit*.

c) Que critérios devem ser considerados pelos funcionários da loja ao escolher os itens que compõem cada *kit*, para aumentar a probabilidade de serem vendidos? O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

24. Analisando os resultados, temos que a igualdade não é válida, pois $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$.

Determinante de uma matriz

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n é um número real associado às matrizes quadradas. O determinante surgiu para indicar sistemas determinados (sistemas que têm solução única, como estudaremos no capítulo **2** desta Unidade), mas ao longo do tempo tornou-se uma ferramenta matemática com diversas aplicações.

Considerando n um número natural, o determinante de uma matriz quadrada de ordem n é um número real associado a ela. Toda matriz quadrada tem determinante.

Agora, vamos estudar os conceitos iniciais do determinante de matrizes 2×2 e de matrizes 3×3, ou seja, de matrizes quadradas de ordem 2 e de ordem 3, aprendendo a determiná-los com a utilização de regras práticas.

Determinante de ordem 2

Dada a matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, de ordem 2, indicamos o determinante dessa matriz por:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

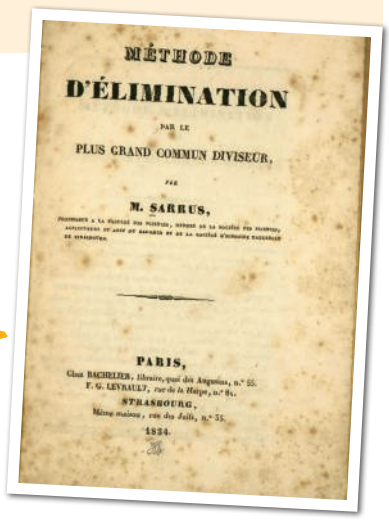
Determinante de ordem 3

Dada a matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, de ordem 3, indicamos o determinante dessa matriz por:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Podemos obter esses 6 produtos do determinante de ordem 3 de uma maneira prática, conhecida como **regra de Sarrus**. A regra de Sarrus tem esse nome em homenagem ao matemático francês Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861), autor de várias obras na área.

Acompanhe o passo a passo da aplicação da regra de Sarrus.


MÉTHODE
D'ÉLIMINATION
PAR LE
PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR,
PAR
M. SARRUS,
PARIS,
STRASBOURG,
1834.

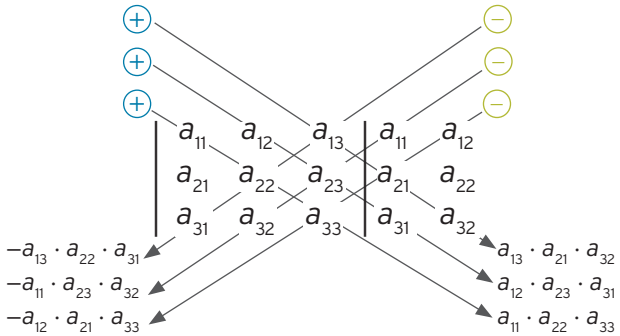
Méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur, de Pierre Frédéric Sarrus (1. ed. Paris: Bachelier, 1834).

Reprodução/Biblioteca Nacional e Universitária de Estrasburgo, França.

- Considere a matriz 3×3 apresentada.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

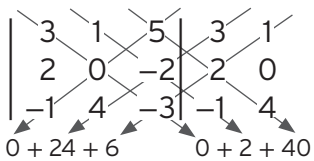
Para calcular o determinante, repetimos as 2 primeiras colunas à direita da matriz e efetuamos as 6 multiplicações, como apresentado.



- Os produtos obtidos na direção da diagonal principal permanecem com o mesmo sinal, e os produtos obtidos na direção da diagonal secundária mudam de sinal.
- O determinante é resultado da adição dos valores assim obtidos.

Acompanhe um exemplo de como aplicar a regra de Sarrus.

Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, aplicando a regra de Sarrus, temos:



Portanto, $\det A = 0 + 2 + 40 + 0 + 24 + 6 = 72$.

Reflita

Não escreva no livro

Verifique essa relação escolhendo 2 matrizes, A e B, de mesma ordem.

A resposta depende das matrizes escolhidas pelos estudantes.

Fique atento

Dadas as matrizes quadradas de mesma ordem A e B, temos:

$$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Atividades resolvidas

5. Dadas as matrizes quadradas $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine o valor de x para que tenhamos $\det A = \det B$.

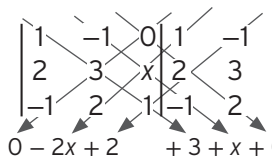
Resolução

A é uma matriz quadrada de ordem 2 tal que:

$$\det A = 2 \cdot 9 - 3x = 18 - 3x.$$

B é uma matriz quadrada de ordem 3 cujo determinante pode ser calculado pela aplicação da regra de Sarrus:

$$\det B = 3 + x + 0 + 0 - 2x + 2 = -x + 5$$



Então:

$\det A = \det B \Rightarrow 18 - 3x = -x + 5 \Rightarrow -3x + x =$

$= 5 - 18 \Rightarrow -2x = -13 \Rightarrow 2x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{2}$

Logo, $x = \frac{13}{2}$.

29. Calcule o valor de cada determinante.

a) $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ $18 - 8 = 10$

b) $\begin{vmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ $-6 - (-8) = -6 + 8 = 2$

c) $\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ $30 - 30 = 0$

d) $\begin{vmatrix} a & b \\ a+b & a+b \end{vmatrix}$ $a(a+b) - b(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$

30. Aplicando a regra de Sarrus, calcule o valor de cada determinante de ordem 3.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ $16 + 15 + 36 - 10 = 57$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ $6 - 6 - 8 + 9 = 1$

c) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $ab - a^2$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ -24

e) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 7 & 7 \\ 4 & 9 & 0 \end{vmatrix}$ $-224 - 189 = -413$

f) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 8 & 10 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ 280

31. Calcule o determinante das matrizes.

a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

b) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$

32. Calcule o determinante das matrizes.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 0

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ 0

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 0

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ 0

33. **(EEAR-SP)** Para que o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ seja 3, o valor de b deve ser igual a:

a) 2.
b) 0.
c) –1.
d) –2.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow -b + 2 - 2b + 1 = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3b + 3 = 3 \Rightarrow -3b = 0 \Rightarrow b = 0$
Alternativa **b**.

34. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, junte-se a um colega e determinem:

a) det A; 2
b) det A^t; 2
c) det B; 3
d) det $(A + B)$; –18
e) det A + det B; 5
f) det (AB); 6
g) det $A \cdot$ det B. 6

35. Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, determine det (AB). $AB = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -20 & 56 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(AB) = -280 + 240 = -40$

36. Resolva no caderno as equações.

a) $\begin{vmatrix} x-2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$ $S = \{6\}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & x & -3 \end{vmatrix} = 2$ $S = \{1, 2\}$

37. Considere que A e B são matrizes quadradas de mesmo tipo. Se det $A = 5$ e det $B = 2$, determine:

a) det (AB); $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 5 \cdot 2 = 10$
b) det (A^2); $\det(A^2) = \det A \cdot \det A = 5 \cdot 5 = 25$
c) det (B^3). $\det(B^3) = \det B \cdot \det B \cdot \det B = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Conexões

Matrizes e a primeira imagem de Marte

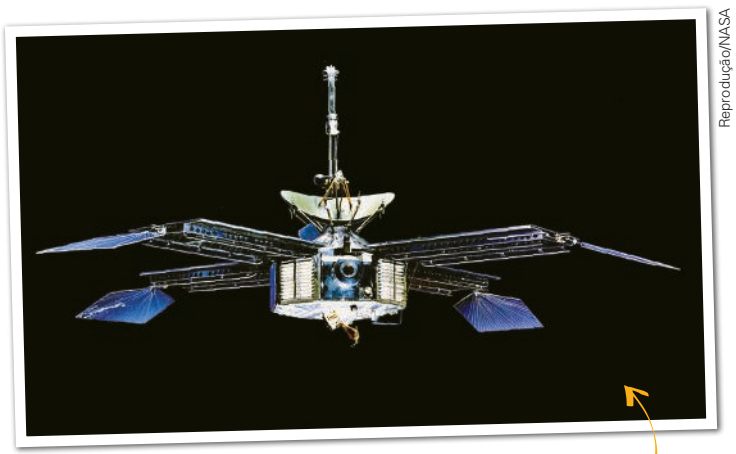
Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

Você sabia que a utilização de matrizes foi muito importante na obtenção e no processamento da primeira imagem de Marte transmitida à Terra pela nave espacial Mariner 4, em 1965?

A Mariner 4 foi a quarta de uma série de missões que tentavam reunir dados de explorações planetárias, e a primeira a obter sucesso.

A câmera da nave capturava imagens em formato analógico. Para transmitir esses dados pela vastidão do espaço, foi necessário convertê-los ao formato digital. Foram utilizadas matrizes para realizar essa conversão, representando a intensidade de cada ponto da imagem como valores numéricos.



Reprodução/NASA

Nave Mariner 4, que partiu da Terra em novembro de 1964.

Uma imagem digital é um conjunto de *pixels*, sendo que cada *pixel* está associado a uma cor. A intensidade da cor em uma escala de cores pode ser representada por um número. Em uma escala de tons de cinza, por exemplo, podemos associar o número 0 à cor preta e o 255 à cor branca, sendo esses os 2 extremos, e os números entre eles representando diferentes tons de cinza. Quanto maior o valor, mais clara é a cor do *pixel*.

Para transmitir cada imagem digitalizada de volta à Terra, a taxa era de aproximadamente 8,3 *bits* por segundo, ou seja, demoraria horas para os cientistas receberem a primeira foto. No entanto, os dados numéricos em forma de matriz chegavam até eles com rapidez.

Ansiosos para saber se a primeira captura tinha dado certo, a equipe da Mariner 4 utilizou uma técnica criativa para validar os dados recebidos: eles converteram os valores numéricos da matriz em uma representação visual colorida. Cada valor na matriz foi associado a uma cor específica em uma escala monocromática, de maneira parecida com a que os computadores usam para representar imagens digitais.

Assim, colando os papéis com os números da matriz na parede e utilizando a correspondência de cores criada para pintá-los, os cientistas obtiveram uma representação feita com giz de cera da primeira foto de outro planeta tirada do espaço. Essa representação está exposta até hoje no Laboratório de Propulsão a Jato da Nasa, na Califórnia (Estados Unidos).

JPL-Caltech/NASA



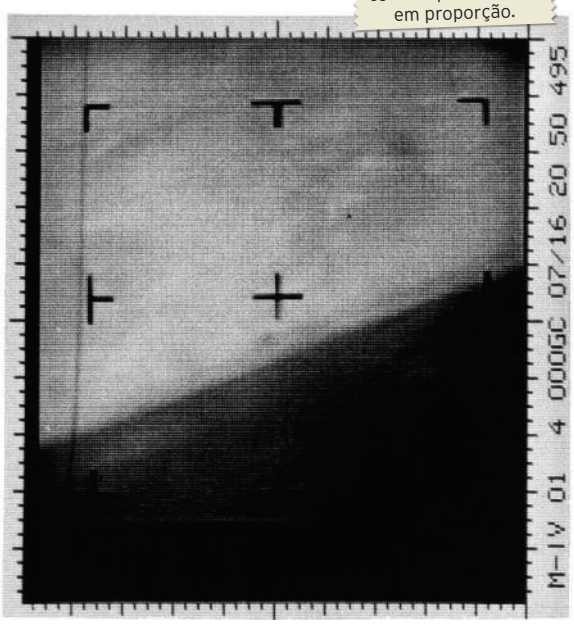
Imagem colorida à mão da superfície de Marte de acordo com os dados numéricos capturados pela Mariner 4 em 15 de julho de 1965.

No total, a nave capturou 22 fotos de Marte, revelando a presença de crateras na superfície do planeta.

Analise a primeira dessas fotos, que é a versão oficial da foto que os cientistas recriaram com giz de cera antes do processamento completo.

A história da primeira imagem de outro planeta tirada do espaço é um exemplo de como as matrizes não servem apenas como ferramenta matemática abstrata; elas também possibilitam a visualização e a análise de dados em contextos complexos, demonstrando seu valor em diversas áreas do conhecimento humano.

As imagens não estão representadas em proporção.



JPL-Caltech/NASA

Primeira foto da superfície de Marte tirada do espaço pela Mariner 4 em 15 de julho de 1965.

Fonte dos dados: STRICKLAND, Ashley. A improvável história da primeira foto de Marte já vista na TV. *CNN Brasil*, 16 jul. 2023. Disponível em: https://tedit.net/khq1q7; Mariner 4. NASA, [out. 2022]. Disponível em: https://tedit.net/v4yq6t. Acesso em: 5 ago. 2024.

Não escreva no livro

Na Economia, as matrizes são usadas para criar modelos de insumo-produto, que mostram as interdependências entre setores econômicos e auxiliam na análise de políticas e no planejamento estratégico. Na computação gráfica, são essenciais para realizar transformações geométricas em imagens e objetos digitais, permitindo a criação de animações complexas e realistas em filmes, jogos e simulações.



SofikoS/Shutterstock

Na área da saúde, as matrizes contribuem para a obtenção de imagens de tomografia computadorizada, que são importantes para o diagnóstico de diversas doenças.

Assim, as matrizes desempenham um papel importante em conectar conceitos matemáticos a aplicações práticas, influenciando e moldando o mundo moderno.

Conecte com o texto

1. As imagens binárias são compostas de apenas 2 cores: preta, que é representada pelo número 0, e branca, representada pelo número 1. Analise a matriz A de ordem 5×5 a seguir, que gera uma imagem binária.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Represente no caderno a imagem representada pela matriz A.

Professor, se houver essa possibilidade, pode ser interessante propor a realização das atividades **1** e **2** com o apoio de planilhas eletrônicas. Nelas, os estudantes podem pintar algumas células de preto para formar as imagens desejadas, como se cada célula fosse um *pixel*.

2. No caderno, crie uma matriz binária utilizando apenas os valores 0 e 1 para representar uma imagem em preto e branco. Depois, troque-a com um colega. Utilizem um lápis ou uma caneta na cor preta para obter a imagem representada pela matriz feita pelo outro estudante.

Resposta pessoal.

Professor, na atividade **2**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade.

Pesquise e debata

3. Estudamos que as matrizes são importantes ferramentas para conectar conceitos matemáticos a aplicações práticas de diversas áreas do conhecimento. Pesquise a respeito de aplicações de matrizes em outras áreas do conhecimento e, em seguida, compartilhe suas descobertas com a turma.

Exemplo de resposta: Na Engenharia, as matrizes são usadas em análises estruturais para determinar a resposta de edificações e pontes a diferentes cargas, garantindo que os projetos atendam aos requisitos de segurança e durabilidade. E os sistemas de recomendação, como os usados por serviços de *streaming*, utilizam matrizes para prever as preferências dos usuários de acordo com interações passadas, gerando recomendações personalizadas.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

CAPÍTULO 2

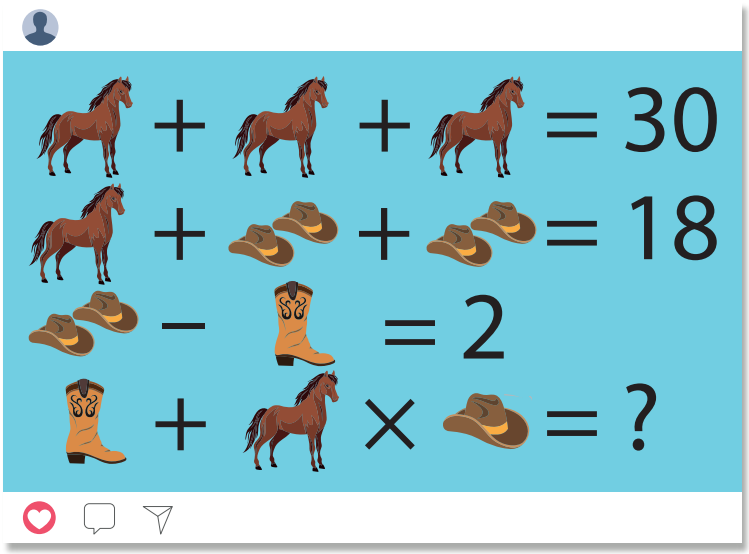
Sistemas lineares

Não escreva no livro

Situação-problema

Raciocínio lógico

O raciocínio lógico é muito importante para nos ajudar a desenvolver a criatividade e a capacidade de interpretar diversas situações, como a ilustrada a seguir.



Bruna Ishihara/Arquivo da editora

Desafio matemático: "Cavalo, bota e chapéu". Imagens como esta circulam com frequência nas redes sociais e podem ser usadas para exercitar o raciocínio lógico de maneira lúdica.

É comum que atividades de raciocínio lógico possam ser representadas e resolvidas com o uso de **sistemas lineares**. Cada sistema é um conjunto de equações lineares com mais de 1 incógnita. Essas equações podem ser analisadas e comparadas para se determinar os resultados procurados.

Acompanhe a seguir o exemplo de um sistema de equações lineares que tem 2 equações com 2 incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 25 \end{cases}$$

a) A imagem do desafio "Cavalo, bota e chapéu" pode ser representada em linguagem algébrica, com o uso de um sistema de equações lineares. Represente esse sistema no caderno e, depois, compare-o com as representações feitas pelos colegas.

b) Utilizando as 3 primeiras linhas da imagem, é possível determinar o valor de cada elemento (cavalo, chapéu e bota) separadamente? Se sim, calcule esses valores.

c) Calcule o valor da última linha. $z + x \cdot y = 2 + 10 \cdot 2 = 22$

a) Exemplo de resposta: Indicando por x o valor de cada cavalo, por y o valor de cada chapéu e por z o valor de cada bota, temos:

$$\begin{cases} 3x = 30 \\ x + 4y = 18 \\ 2y - z = 2 \\ z + x \cdot y = ? \end{cases}$$

b) Temos:
$3x = 30 \Rightarrow x = 10$
$x + 4y = 18 \Rightarrow 10 + 4y = 18 \Rightarrow 4y = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 2$
$2y - z = 2 \Rightarrow 2 \cdot 2 - z = 2 \Rightarrow z = 2$
Portanto, é possível determinar o valor de cada elemento com base nas 3 primeiras linhas. O valor do cavalo é 10, o do chapéu é 2 e o da bota é 2.

Formalizando o conceito de sistemas lineares

Equações lineares

Neste momento, vamos estudar sistemas formados por **equações lineares**.

Equação linear é toda equação que pode ser escrita na forma geral $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, na qual: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as **incógnitas**; $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais chamados de **coeficientes** das incógnitas; e b é o **termo independente**.

As incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ geralmente aparecem como x, y, z, etc. nos sistemas de equações. Acompanhe a seguir alguns exemplos de equações lineares.

a) $x + y = 16$ é uma equação linear com incógnitas x e y.

b) $2x + 3y - 2z = 10$ é uma equação linear com incógnitas x, y e z.

c) $x - 5y + z - 4t = 0$ é uma equação linear com incógnitas x, y, z e t. Nela, o termo independente é $b = 0$.

d) $4x - 3y = x + y + 1$ é uma equação linear com incógnitas x e y.

Pela definição, as equações a seguir **não** são lineares.

a) $xy = 10$

b) $x^2 + y = 6$

c) $x^2 - xy - yz + z^2 = 1$

Reflita: As equações não são lineares porque não podem ser escritas na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$.
Temos:

$xy = 10 \Rightarrow$ termo xy com mais de 1 incógnita.

$x^2 + y = 6 \Rightarrow$ incógnita x com expoente diferente de 1.

$x^2 - xy - yz + z^2 = 1 \Rightarrow$ incógnitas x e z com expoente diferente de 1 e termos $-xy$ e $-yz$ com mais de 1 incógnita.

Não escreva no livro

Reflita

Por que essas equações não são lineares?

Solução de uma equação linear

Acompanhe a seguir mais exemplos de equações lineares e algumas soluções de cada uma delas.

a) $3x + 2y = 18$

Dizemos que:

- o par ordenado (4, 3) é uma solução da equação, pois $3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$;
- o par ordenado (6, 0) é uma solução da equação, pois $3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18$;
- o par ordenado (5, 1) não é solução da equação, pois $3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \neq 18$.

Fique atento

O par ordenado $\left(\alpha, \frac{18 - 3\alpha}{2}\right)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, é a **solução geral** da equação do exemplo **a**, pois, para cada valor de α, obtemos uma solução da equação. Por exemplo, para $\alpha = 2$, a solução é (2, 6), e, para $\alpha = 0$, a solução é (0, 9).

b) $3x + y - 2z = 8$

Dizemos que:

- o terno ordenado (2, 4, 1) é uma solução da equação, pois $3 \cdot 2 + 4 - 2 \cdot 1 = 8$;
- o terno ordenado (0, 6, –1) é uma solução da equação, pois $3 \cdot 0 + 6 - 2 \cdot (-1) = 8$;
- o terno ordenado (5, –2, 3) não é solução da equação, pois $3 \cdot 5 + (-2) - 2 \cdot 3 = 7 \neq 8$.

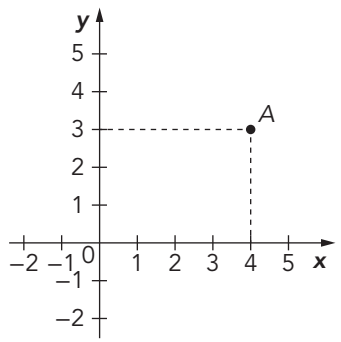
Fique atento

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, o terno ordenado $\left(\alpha, \beta, \frac{-8 + 3\alpha + \beta}{2}\right)$ é a **solução geral** da equação do exemplo **b**, pois, para cada valor de α e de β, obtemos uma solução da equação. Por exemplo, para $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, a solução é (1, 1, –2).

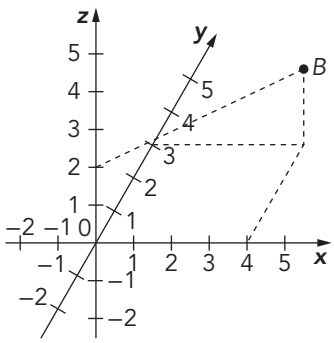
Graficamente:

- o plano cartesiano é formado pelos eixos x e y e a cada ponto do plano associa-se um par ordenado (x, y), e vice-versa;
- o espaço cartesiano é formado pelos eixos x, y e z e a cada ponto do espaço associa-se um terno ordenado (x, y, z), e vice-versa.

Analise as representações gráficas a seguir:



Nesse plano cartesiano, temos a representação do ponto $A(4, 3)$.



Nesse espaço cartesiano, temos a representação do ponto $B(4, 3, 2)$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Generalizando, dada a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, dizemos que a ênupla ordenada de números reais $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ é **solução da equação linear** se:

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + \ldots + a_n\beta_n = b$$

Analogamente, se $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + \ldots + a_n\beta_n = b$, então $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ é solução da equação linear.

Fique atento

Ênupla ordenada é uma sequência ordenada de n valores. Quando a sequência tem 2 ou 3 valores, as ênuplas ordenadas recebem, respectivamente, os nomes de par ordenado e terno ordenado.

1. d) Não linear, pois a incógnita x tem expoente diferente de 1.
e) Não linear, pois o termo xy tem mais de 1 incógnita.
g) Não linear, pois o termo xy tem mais de 1 incógnita.
h) Não linear, pois a incógnita x no termo $2x^3$ tem expoente diferente de 1 e a incógnita y tem expoente diferente de 1.

Atividades

3. $3 \cdot 3 - 2 \cdot k = 5 \Rightarrow 9 - 2k = 5 \Rightarrow -2k = -4 \Rightarrow k = 2$

Não escreva no livro

1. Indique no caderno se cada uma das equações a seguir é linear ou não.

a) $5x - 2y = 6$ Linear.
b) $x + 4y - z = 0$ Linear.
c) $x + y - z - t = 0$ Linear.
d) $x^2 + y = 10$
e) $3xy = 10$
f) $x + y = z - 2$ Linear.
g) $2x - y + xy = 8$
h) $2x^3 + y^2 + 5z = 15$

2. Em cada item, verifique se o par ou terno ordenado citado é solução da equação linear dada.

a) Par ordenado (6, 2) e equação linear $4x - 3y = 18$. Sim, pois $4 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 24 - 6 = 18$.
b) Par ordenado (3, –5) e equação linear $2x + 3y = 21$. Não, pois $2 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) = 6 - 15 = -9 \neq 21$.
c) Terno ordenado (1, 3, 2) e equação linear $2x + y + 5z = 15$. Sim, pois $2 \cdot 1 + 3 + 5 \cdot 2 = 2 + 3 + 10 = 15$.
d) Terno ordenado (0, 0, 0) e equação linear $2x + 7y - 3z = 0$. Sim, pois $2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$.

3. Calcule o valor de k para que o par ordenado $(3, k)$ seja uma solução da equação linear $3x - 2y = 5$.

4. O terno ordenado $(k, 2, k + 1)$ é uma das soluções da equação linear $4x + 5y - 3z = 10$. Determine o valor de k. $4k + 5 \cdot 2 - 3 \cdot (k + 1) = 10 \Rightarrow 4k + 10 - 3k - 3 = 10 \Rightarrow k = 3$

Sistemas lineares

Vídeo

Sistema de equações lineares simultâneas $m \times n$ (lemos: m por n), ou apenas **sistema linear** $m \times n$, é o conjunto de m equações lineares com n incógnitas, que pode ser representado assim:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Acompanhe alguns exemplos a seguir.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$ é um sistema linear 2×2 (2 equações e 2 incógnitas) nas incógnitas x e y.

b) $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = -1 \\ x - y + z = 8 \end{cases}$ é um sistema linear 3×3 (3 equações e 3 incógnitas) nas incógnitas x, y e z.

c) $\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ 3x - y + z = 6 \end{cases}$ é um sistema linear 2×3 (2 equações e 3 incógnitas) nas incógnitas x, y e z.

Solução de um sistema linear

Dizemos que a ênupla ordenada $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ é **solução de um sistema linear** quando ela é solução de cada uma das equações do sistema, ou seja, quando satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema.

Fique atento

Neste capítulo, consideraremos sempre que as soluções de um sistema linear $m \times n$ são ênuplas ordenadas de números reais.

Acompanhe alguns exemplos a seguir.

a) O par ordenado (5, 1) é solução do sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$,

pois $\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13 \\ 3 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 10 \end{cases}$.

b) O par ordenado (2, 3) não é solução do sistema linear

$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13 \\ 3 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \neq 10 \end{cases}$.

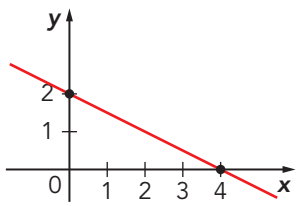
c) O terno ordenado (1, 3, −2) é solução do sistema linear

$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 1 \\ 4 \cdot 1 - 3 - (-2) = 3 \\ 1 + 3 - (-2) = 6 \end{cases}$.

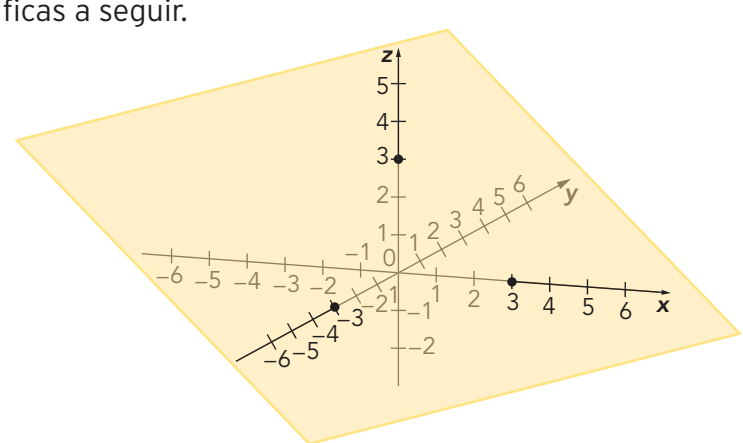
Graficamente:

- Em uma equação linear de 2 incógnitas $ax + by = c$, as soluções são os pares ordenados (x, y) que satisfaçam a equação. A representação gráfica de uma equação linear de 2 incógnitas em um plano cartesiano é uma reta.
- Em uma equação linear de 3 incógnitas $ax + by + cz = d$, as soluções são os ternos ordenados (x, y, z) que satisfaçam a equação. A representação gráfica de uma equação linear de 3 incógnitas em um espaço cartesiano é um plano.

Acompanhe as representações gráficas a seguir.



Nesse plano cartesiano, temos a reta que é a representação da equação linear $0{,}5x + y = 2$.



Nesse espaço cartesiano, temos o plano que é a representação da equação linear $x - y + z = 3$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

Não escreva no livro

5. Verifique se cada ênupla ordenada é solução do sistema linear dado.

a) (3, –1) e sistema linear $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$.

$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) = 11 \\ 3 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) = 3 \end{cases}$

Portanto, (3, –1) é solução do sistema linear dado.

b) (0, 0, 0) e sistema linear $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \\ 4x - 7y - 3z = 0 \end{cases}$.

$\begin{cases} 0 + 0 + 0 = 0 \\ 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 \\ 4 \cdot 0 - 7 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 \end{cases}$

Portanto, (0, 0, 0) é solução do sistema linear dado.

c) (0, –1) e sistema linear $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$.

$\begin{cases} 0 + 1 = 1 \neq 0 \\ 0 - 1 = -1 \\ 3 \cdot 0 + (-1) = -1 \neq 2 \end{cases}$

Portanto, (0, –1) não é solução do sistema linear dado.

Os métodos da substituição e da adição para resolver sistemas lineares

Existem diversos métodos algébricos que permitem a resolução de sistemas lineares. Nos Anos Finais do Ensino Fundamental, você deve ter estudado o método da substituição e o método da adição para resolver sistemas lineares de 2 equações lineares com 2 incógnitas.

Agora, vamos recordá-los e ampliá-los para resolver sistemas lineares com mais equações lineares e incógnitas.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Reúna-se com um colega. Juntos, reflitam sobre os valores de x que satisfazem cada equação linear indicada a seguir.

a) $2x = 8$ $x = 4$

b) $2x = 0$ $x = 0$

c) $0x = 0$ x pode ser qualquer número real.

d) $0x = 5$ Não existe número real que, multiplicado por 0, resulte no número 5.

Método da substituição

a) Considere este sistema linear 2 × 2:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \text{ (1ª equação)} \\ 5x + y = 7 \text{ (2ª equação)} \end{cases}$$

Vamos determinar o **conjunto solução** S desse sistema linear, ou seja, o conjunto formado por todos os pares ordenados de números reais que são solução do sistema. Nesse exemplo, usaremos o método da substituição, que consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações e, então, substituir a expressão encontrada na outra equação, obtendo uma nova equação linear sem essa incógnita.

Fique atento

Quando resolvemos um sistema linear pelo método da substituição e uma das equações tem alguma incógnita com coeficiente 1, isolar essa incógnita é a escolha mais conveniente.

Professor, no *Reflita*, espera-se que os estudantes indiquem as incógnitas com coeficiente 1 (ou –1). Depois da reflexão, sugira a eles que façam o isolamento de uma das incógnitas que citaram como resposta e comparem com o isolamento de outra incógnita que não foi escolhida. Por exemplo, isolando y na 3ª equação, como na resolução apresentada, obtemos $y = 4 - 3x + z$; se tivéssemos escolhido isolar x nessa equação, obteríamos $x = \frac{4 - y + z}{3}$.

Inicialmente, isolamos uma incógnita de uma das equações. Por exemplo, isolando y na 2ª equação do sistema, obtemos:

$$5x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - 5x$$

Em seguida, substituímos y por $7 - 5x$ na 1ª equação do sistema:

$$2x - 3(7 - 5x) = -4 \Rightarrow 2x - 21 + 15x = -4 \Rightarrow 17x = 17 \Rightarrow x = 1$$

Agora, para determinar o valor de y, substituímos x por 1 em uma das equações do sistema. Escolhendo a 1ª equação, por exemplo, obtemos:

$$2 \cdot 1 - 3y = -4 \Rightarrow -3y = -6 \Rightarrow y = 2$$

A solução desse sistema linear é o par ordenado (1, 2), e essa solução é única. Logo, o conjunto solução é $S = \{(1, 2)\}$.

b) Considere agora este sistema linear 3 × 3:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 4 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema, podemos inicialmente escolher uma das incógnitas a ser eliminada para que tenhamos um novo sistema linear com apenas 2 equações e 2 incógnitas. Por exemplo, para eliminar a incógnita y usando o método da substituição, podemos isolá-la na 3ª equação:

$$3x + y - z = 4 \Rightarrow y = 4 - 3x + z$$

Não escreva no livro

Reflita

Analise os coeficientes das incógnitas desse sistema linear. Quais incógnitas são mais convenientes de se isolar nesse caso?

A incógnita z na 1ª equação, as incógnitas x ou y na 2ª equação ou as incógnitas y ou z na 3ª equação.

Então, substituímos y por $4 - 3x + z$ nas outras 2 equações do sistema dado.

- Em $2x - 3y + z = -1$ (1ª equação):

$$2x - 3(4 - 3x + z) + z = -1 \Rightarrow 2x - 12 + 9x - 3z + z = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11x - 2z = 11$$

- Em $x - y + 2z = 0$ (2ª equação):

$$x - (4 - 3x + z) + 2z = 0 \Rightarrow x - 4 + 3x - z + 2z = 0 \Rightarrow 4x + z = 4$$

Com as 2 equações encontradas, formamos um novo sistema linear 2 × 2:

$$\begin{cases} 11x - 2z = 11 \\ 4x + z = 4 \end{cases}$$

Agora, resolvendo esse sistema pelo método da substituição, chegamos a $x = 1$ e $z = 0$.

Então, substituímos x por 1 e z por 0 em uma das equações do sistema inicial 3 × 3. Escolhendo, por exemplo, a equação $y = 4 - 3x + z$, obtemos:

$$y = 4 - 3 \cdot 1 + 0 \Rightarrow y = 1$$

A solução do sistema linear inicial é o terno ordenado (1, 1, 0).

Logo, $S = \{(1, 1, 0)\}$.

Reflita

Faça no caderno a resolução desse sistema linear 2 × 2 pelo método da substituição e verifique que $x = 1$ e $z = 0$.

O exemplo de resolução encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Método da adição

a) Considere este sistema linear 2 × 2:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 16 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

> **Fique atento**
> Podemos multiplicar ambos os membros de uma equação de um sistema linear por qualquer número real diferente de 0.

Nesse exemplo, vamos usar o método da adição para determinar o conjunto solução S do sistema.

Inicialmente, analisamos os coeficientes da incógnita x, optando por multiplicar ambos os membros da 1ª equação por 3 e ambos os membros da 2ª equação por −2. Fazemos isso para que, em seguida, ao adicionar membro a membro as 2 equações, obtenhamos uma nova equação linear sem a incógnita x.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 16 & \cdot 3 \\ 3x + 2y = 0 & \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 12y = 48 \\ -6x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$-16y = 48 \Rightarrow y = -3$$

Agora, substituímos y por −3 em uma das equações do sistema. Escolhendo, por exemplo, a 2ª equação do sistema inicial, obtemos:

$$3x + 2(-3) = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

A solução desse sistema linear é o par ordenado (2, −3). Logo, $S = \{(2, -3)\}$.

Não escreva no livro

> **Reflita**
> De que outras maneiras poderíamos resolver esse sistema linear 2 × 2 usando o método da adição?

b) Considere agora este sistema linear 3 × 3:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x + y + z = 6 \\ 3x - y + 2z = 11 \end{cases}$$

Reflita: Exemplo de resposta: Dividindo ambos os membros da equação $2x - 4y = 16$ por 2 e adicionando membro a membro as 2 equações obtidas.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 16 & \div 2 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 8 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

Agora, substituímos x por 2 em uma das equações do sistema. Escolhendo, por exemplo, a 2ª equação do sistema inicial, obtemos:
$3 \cdot 2 + 2y = 0 \Rightarrow 2y = -6 \Rightarrow y = -3$
Logo, $S = \{(2, -3)\}$.

Inicialmente, escolhemos uma das incógnitas a ser eliminada para, depois, formar um novo sistema linear com apenas 2 equações com 2 incógnitas. Por exemplo, vamos eliminar a incógnita z usando o método da adição.

Adicionando as 2 primeiras equações, obtemos 1 equação sem a incógnita z:

$$\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 4 \\ x + y + z = 6 \\ \hline 3x + 4y = 10 \end{array}$$

Multiplicamos a 2ª equação do sistema inicial por −2 de modo que, ao adicionar a equação obtida e a 3ª equação do sistema, obteremos uma nova equação sem a incógnita z.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x + y + z = 6 \\ 3x - y + 2z = 11 \end{cases} \cdot (2) \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ -2x - 2y - 2z = -12 \\ 3x - y + 2z = 11 \end{cases}$$

Agora, adicionamos a 2ª e a 3ª equações desse novo sistema:

$$\begin{array}{rrrr} -2x - & 2y - & 2z = & -12 \\ 3x - & y + & 2z = & 11 \\ \hline x - & 3y & = & -1 \end{array}$$

Com as 2 equações encontradas, formamos um novo sistema linear 2×2:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema pelo método da adição, chegamos a $x = 2$ e $y = 1$.

Então, substituímos x por 2 e y por 1 em uma das equações do sistema. Escolhendo, por exemplo, a equação $x + y + z = 6$ do sistema inicial, obtemos:

$$2 + 1 + z = 6 \Rightarrow z = 3$$

A solução do sistema linear inicial é o terno ordenado (2, 1, 3). Logo, $S = \{(2, 1, 3)\}$.

Reflita

Faça no caderno a resolução desse sistema linear 2×2 pelo método da adição e verifique que $x = 2$ e $y = 1$.

Atividades resolvidas

1. **(IFRS)** Um jogador, ao final de um jogo, marcou 32 arremessos e acumulou 83 pontos. Considerando que cada arremesso certo vale 4 pontos e cada errado perde meio ponto, quantos arremessos certos fez este jogador?

a) 25 **b)** 22 **c)** 15 **d)** 12 **e)** 10

Resolução

Sejam C e E a quantidade de arremessos certos e de arremessos errados, respectivamente. Pelo enunciado, podemos montar o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} C + E = 32 \\ 4C - \frac{1}{2}E = 83 \end{cases}$$

Multiplicando a 2ª equação por 2 e depois adicionando membro a membro as 2 equações, temos:

$$\begin{cases} C + E = 32 \\ 4C - \frac{1}{2}E = 83 \quad \cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} C + E = 32 \\ 8C - E = 166 \end{cases} \\ \hline 9C = 198 \Rightarrow C = 22 \end{array}$$

Portanto, o jogador fez 22 arremessos certos.

Alternativa **b**.

2. **(Fuvest-SP)** Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa.

Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?

a) 26 **b)** 38 **c)** 42 **d)** 62 **e)** 68

Reflita: Exemplo de resolução: Podemos multiplicar a 2ª equação por -3 e adicionar o resultado à 1ª equação:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ x - 3y = -1 \cdot (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ -3x + 9y = 3 \end{cases} \\ \hline 13y = 13 \Rightarrow y = 1 \end{array}$$

Resolução

Vamos indicar por L, P e R a quantidade de passagens vendidas para Lisboa, Paris e Roma, respectivamente. Com os dados do enunciado, é possível montar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} L + P + R = 78 \\ P = 2(L + R) \\ R = 2 + \frac{L}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L + P + R = 78 \\ P = 2L + 2R \\ R = 2 + \frac{L}{2} \end{cases}$$

Podemos substituir R por $2 + \frac{L}{2}$ na 2ª equação do sistema:

$$P = 2L + 2 \cdot \left(2 + \frac{L}{2}\right) \Rightarrow P = 2L + 4 + L \Rightarrow P = 3L + 4$$

Substituindo P por $3L + 4$ e R por $2 + \frac{L}{2}$ na 1ª equação do sistema, obtemos:

$$L + 3L + 4 + 2 + \frac{L}{2} = 78 \Rightarrow \frac{9}{2}L = 72 \Rightarrow L = 16$$

Substituindo L por 16 na 3ª equação do sistema, obtemos:

$$R = 2 + \frac{16}{2} = 2 + 8 = 10$$

Substituindo L por 16 e R por 10 na 2ª equação do sistema, obtemos:

$$P = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 10 = 32 + 20 = 52$$

Logo, o total de passagens vendidas para Paris e Roma é $52 + 10 = 62$.

Alternativa **d**.

Professor, na atividade **7**, oriente os estudantes a verificar se a solução de cada sistema linear faz sentido na situação do cotidiano criada no problema. Se necessário, eles devem fazer ajustes e reelaborar os problemas e a solução deles para que estejam condizentes com os sistemas lineares.

Atividades

Não escreva no livro

6. Resolva no caderno cada sistema linear dado. Use o método que preferir.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $S = \{(3, 2)\}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 4y = 14 \end{cases}$ $S = \{(-2, 4)\}$

c) $\begin{cases} 20x + 10y = 10 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $S = \{(-1, 3)\}$

d) $\begin{cases} -x - y + z = -5 \\ 2x - 3y - 2z = -5 \\ x - y - 3z = -3 \end{cases}$ $S = \{(3, 3, 1)\}$

7. Reúna-se com um colega. Juntos, pensem em situações do cotidiano e elaborem no caderno problemas que possam ser representados com cada um dos sistemas lineares da atividade anterior.

Texto para a próxima atividade.

Um dos pilares do pensamento computacional é o algoritmo, utilizado para estipular uma ordem, uma rotina ou uma sequência de passos a fim de resolver um problema. Também podemos compreender algoritmo como uma sequência lógica e finita de instruções que devem ser seguidas para resolver um problema ou executar uma tarefa.

8. Escreva no caderno um algoritmo de resolução de um sistema linear 2×2 que tenha uma única solução, considerando o uso dos métodos de adição e de substituição. Organize atentamente a sequência e a ordem dos passos para cada método.

O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

7. Exemplo de resposta: Para o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$, temos: A idade de Cecília, com a de Mariana adicionada, é 5 anos. Sabendo que Cecília tem 1 ano a mais do que Mariana, determine a idade de Cecília.

9. **(Etec-SP)** A Mata Atlântica é uma série de ecossistemas de florestas tropicais da América do Sul que abriga uma diversidade de espécies **endêmicas**. Estudos estimam que haja um total de 8 732 espécies entre plantas e vertebrados endêmicos nesse bioma, e que a diferença entre a quantidade daquelas plantas e a quantidade destes vertebrados, nessa ordem, seja de 7 268 espécies.

Nessas condições, a quantidade de plantas endêmicas nesse bioma é: Alternativa **d**.

a) 732.
b) 1 464.
c) 5 813.
d) 8 000.
e) 16 000.

endêmicas: espécies, organismos ou populações nativas ou restritas a determinada região geográfica.

10. **(Unicamp-SP)** Certo país adquiriu 5 000 000 de doses das vacinas Alfa, Beta e Gama, pagando um preço de $ 40.000.000,00 pelo total. Cada dose das vacinas Alfa, Beta e Gama custou $ 5,00, $ 10,00 e $ 20,00, respectivamente. Sabendo que o número de doses adquiridas da vacina Beta é o triplo do número de doses adquiridas da vacina Gama, o número de doses adquiridas da vacina Alfa foi de:

a) 1 500 000.
b) 2 000 000.
c) 2 500 000.
d) 3 000 000.

Alternativa **d**.



Heritage Image Partnership Ltd/Alamy/Fotoarena

Retrato de Antoine-Laurent de Lavoisier, de Geneviève Brossard de Beaulieu (1755-1835), óleo sobre tela, 72,9 cm × 57 cm.

Texto para a próxima atividade.

O processo de balanceamento de equações químicas é fundamentado pela lei de conservação das massas, enunciada pelo químico russo Mikhail Vasilyevich Lomonosov (1711-1765) e registrada e divulgada pelo químico francês Antoine-Laurent de Lavoisier (1743-1794).

Em uma equação química balanceada, a quantidade de cada átomo antes da reação (no reagente) deve ser igual à quantidade de cada átomo ao final da reação (no produto).

11. Na combustão do propano C_3H_8, a equação química não balanceada é:

$$C_3H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

Perceba que, do lado do reagente, existem 3 átomos de carbono C e, do lado do produto, há apenas 1 átomo de carbono. Então, para balancear a equação, devemos encontrar valores para a, b, c e d tais que:

$$a \cdot C_3H_8 + b \cdot O_2 \rightarrow c \cdot CO_2 + d \cdot H_2O$$

Uma maneira de determinar esses valores é montar e resolver um sistema linear de equações como o apresentado:

$$\begin{cases} 3a = c \\ 8a = 2d \\ 2b = 2c + d \end{cases}$$

Esse sistema linear tem 4 incógnitas, mas apenas 3 equações. Uma das maneiras de se encontrar uma possível solução para esse sistema é atribuir o valor 1 para uma das incógnitas, facilitando os cálculos, permitindo a obtenção dos menores coeficientes inteiros possíveis para balancear a equação e, então, resolver o sistema linear obtido.

a) Definindo $a = 1$, resolva o sistema linear e monte a equação química devidamente balanceada. $a = 1$, $b = 5$, $c = 3$ e $d = 4$; $C_3H_8 + 5 \cdot O_2 \rightarrow 3 \cdot CO_2 + 4 \cdot H_2O$.

b) Em sistemas lineares como esse, para cada número natural não nulo que definimos para a, obtemos uma possível solução do sistema linear; então, esse sistema tem infinitas soluções. Isso ocorre quando o sistema linear é homogêneo. Multiplique os valores de a, b, c e d calculados no item **a** por um mesmo número natural, obtendo outra solução para o sistema linear. Verifique que essa outra solução manterá a equação $a \cdot C_3H_8 + b \cdot O_2 \rightarrow c \cdot CO_2 + d \cdot H_2O$ balanceada.

Exemplo de resposta: Multiplicando por 2, $a = 2$, $b = 10$, $c = 6$ e $d = 8$; $2 \cdot C_3H_8 + 10 \cdot O_2 \rightarrow 6 \cdot CO_2 + 8 \cdot H_2O$.

Professor, o conceito de sistemas lineares homogêneos será apresentado no tópico *Classificação e resolução de sistemas lineares escalonados*.

Classificação e representação gráfica de sistemas lineares

Dado um sistema linear $m \times n$, de acordo com a quantidade de soluções, ele pode ser classificado como **possível e determinado** (tem 1 única solução), **possível e indeterminado** (tem infinitas soluções) ou **impossível** (não tem solução).

Acompanhe a seguir a resolução algébrica (pelo método da adição) e a representação gráfica de alguns sistemas lineares 2×2.

a) Sistema linear $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$

Resolução algébrica

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \cdot 5 \Rightarrow \begin{cases} 15x - 5y = 50 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

$$17x = 51 \Rightarrow x = 3$$

Substituindo $x = 3$ na 2ª equação do sistema, temos:

$$2 \cdot 3 + 5y = 1 \Rightarrow 6 + 5y = 1 \Rightarrow 5y = -5 \Rightarrow y = -1$$

Logo, $S = \{(3, -1)\}$.

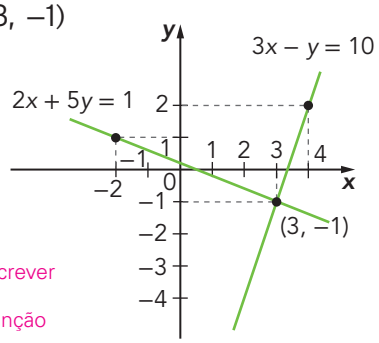
Esse par ordenado é a única solução desse sistema. Portanto, ele é um **sistema possível e determinado** (tem 1 única solução).

Representação gráfica

Para representar graficamente esse sistema, devemos representar as equações lineares em um mesmo plano cartesiano. Cada equação linear do sistema pode ser escrita na forma $ax + by = c$, cuja representação no plano é uma reta.

Assim, para cada equação, determinamos 2 possíveis soluções e representamos a reta no plano cartesiano. Por exemplo, (4, 2) e (3, –1) são soluções da equação $3x - y = 10$, e (–2, 1) e (3, –1) são soluções da equação $2x + 5y = 1$.

Como o sistema é possível e determinado, as retas que representam as equações são concorrentes (têm 1 único ponto comum). Neste caso, conforme calculamos algebricamente, a solução do sistema é (3, –1), que corresponde ao ponto de intersecção das retas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Professor, também podemos escrever uma equação linear na forma $y = ax + b$, que é a lei de uma função afim, cujo gráfico é uma reta.

Fique atento

Neste momento, apresentamos exemplos de sistemas lineares 2×2 porque você já estudou esse tipo de sistema nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Entretanto, qualquer sistema linear $m \times n$ pode ser classificado em possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

Além disso, a escolha por sistemas lineares 2×2 permite a representação gráfica do sistema em um plano cartesiano.

Fique atento

Os pontos correspondentes aos pares ordenados de números reais que são solução de uma equação linear com 2 incógnitas determinam uma reta no plano cartesiano. Se existir, o par ordenado correspondente ao ponto de intersecção das 2 retas que representam as equações lineares do sistema linear 2×2 é a solução do sistema.

b) Sistema linear $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$

Resolução algébrica

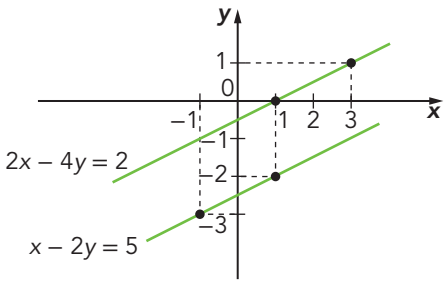
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \quad \cdot(-2) \\ 2x - 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y = -10 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$$

$$0x + 0y = -8$$

Em $0x + 0y = -8$ não existem valores reais para x e y; sendo assim, não existe par ordenado de números reais que seja solução desse sistema. Dizemos que esse sistema tem como conjunto solução $S = \varnothing$, e que ele é um **sistema impossível** (não tem solução).

Representação gráfica

Para cada equação determinamos 2 possíveis soluções e representamos a reta no plano cartesiano. Por exemplo, os pares ordenados (1, –2) e (–1, –3) são soluções da equação $x - 2y = 5$, e os pares ordenados (1, 0) e (3, 1) são soluções da equação $2x - 4y = 2$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como o sistema é impossível, as retas que representam as equações são paralelas e distintas (não têm pontos comuns).

c) Sistema linear $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases}$

Resolução algébrica

$$\begin{cases} 2x - 6y = 8 \quad \cdot 3 \\ 3x - 9y = 12 \quad \cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 18y = 24 \\ -6x + 18y = -24 \end{cases}$$

$$0x + 0y = 0$$

Em $0x + 0y = 0$, as incógnitas x e y podem assumir qualquer valor real. Fazendo $y = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, e substituindo-o em uma das equações do sistema, obtemos:

$$2x - 6y = 8 \Rightarrow 2x - 6\alpha = 8 \Rightarrow 2x = 8 + 6\alpha \Rightarrow x = 4 + 3\alpha$$

Assim, o par ordenado $(4 + 3\alpha, \alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, é a solução geral do sistema.

Então, o conjunto solução desse sistema é $S = \{(4 + 3\alpha, \alpha)\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, e dizemos que ele é um **sistema possível e indeterminado** (tem infinitas soluções).

Não escreva no livro

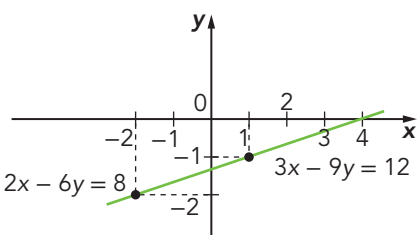
Reflita

Analise as equações desse sistema linear. O que podemos concluir sobre elas?

As equações do sistema linear são equivalentes.

Representação gráfica

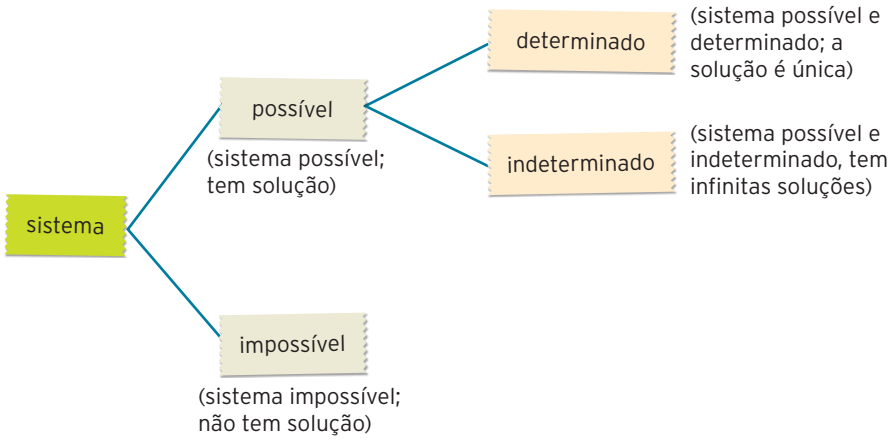
Para cada equação, determinamos 2 possíveis soluções e representamos a reta no plano cartesiano. Por exemplo, os pares ordenados (1, –1) e (–2, –2) são soluções tanto da equação $2x - 6y = 8$ quanto de $3x - 9y = 12$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como o sistema é possível e indeterminado, as retas que representam as equações são coincidentes (têm todos os pontos comuns). Neste caso, como calculamos algebricamente e podemos perceber na representação gráfica, qualquer par ordenado correspondente a um ponto dessas retas é uma solução do sistema.

O esquema a seguir resume as 3 possibilidades de classificação de qualquer sistema linear $m \times n$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

A condição necessária, embora não suficiente, para termos um sistema linear possível e determinado é a quantidade de equações do sistema ser maior do que ou igual à quantidade de incógnitas ($m \geqslant n$).

Observação: No caso de um sistema linear 3×3, cada equação é representada por um plano do espaço. Considere quais são as posições que 2 planos podem ter no espaço:

- 2 planos paralelos (não têm pontos comuns).
- 2 planos secantes ou concorrentes (têm uma reta comum).
- 2 planos coincidentes (têm todos os pontos comuns).

Atividades

Não escreva no livro

12. Resolva no caderno os sistemas lineares a seguir pelo método algébrico de sua preferência, classificando cada sistema.

a) $\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ $S = \varnothing$; sistema linear impossível.

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$ $S = \{(-2, 3)\}$; sistema linear possível e determinado.

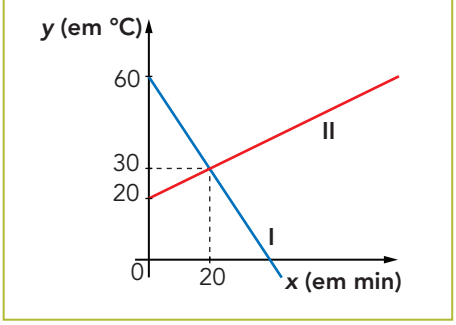
c) $\begin{cases} 5x - 10y = 15 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$ $S = \left\{\left(\alpha, \frac{\alpha - 3}{2}\right)\right\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$; sistema linear possível e indeterminado.

13. Elabore um sistema linear que seja possível e determinado. Peça a um colega que resolva o sistema que você elaborou (enquanto você resolve o dele) e, depois, confira essa resolução.

Resposta pessoal.

14. No plano cartesiano está representada a variação das medidas de temperatura, em graus Celsius, de 2 substâncias: **I** e **II**. A substância **I** está sendo resfriada e a substância **II** está sendo aquecida. Para ambas, a variação da medida de temperatura y em função da medida de intervalo de tempo, representada por uma equação da forma $y = ax + b$, começou a ser registrada no mesmo instante, com o intervalo de tempo de análise medido em minutos.

Variação das medidas de temperatura de 2 substâncias



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Qual será a medida de temperatura da substância **II** quando a substância **I** estiver a 0 °C?

40 °C

Tecnologias digitais

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Sistemas lineares 2 × 2

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

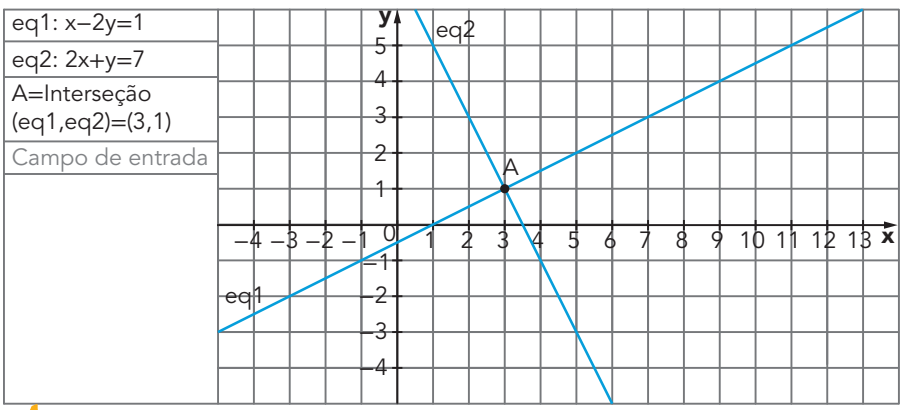
Para representar sistemas lineares 2 × 2, podemos recorrer a *softwares* de Geometria dinâmica. Apresentaremos a seguir alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* desse tipo.

Vamos representar graficamente e resolver o sistema linear 2 × 2 $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$.

1º passo: No campo de entrada, insira o comando **x−2y=1** e, depois, **2x+y=7**. Note que essas 2 equações, eq1 e eq2, são representadas por retas no plano cartesiano.

2º passo: Para determinar, se houver, o ponto de intersecção dessas retas, geralmente há duas opções: no campo de entrada, insira o comando **Interseção(eq1,eq2)**, ou localize e escolha no menu a opção de intersecção de 2 objetos, selecionando as 2 retas.

Em ambos os casos, o *software* determinará, se houver, a intersecção *A*. Se a intersecção for um ponto (sistema possível e determinado), então as coordenadas desse ponto serão apresentadas no campo de entrada; se não for um ponto (sistema possível e indeterminado ou sistema impossível), surgirá um ponto de interrogação.



Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de construção no *software* de Geometria dinâmica após o 2º passo.

Professor, destaque aos estudantes que, no caso de um sistema possível e indeterminado, ao tentar determinar a intersecção, o *software* poderá apresentar um ponto de interrogação. Isso ocorre porque o *software* pode não reconhecer que a intersecção é a própria reta.

Nesse caso, o sistema é possível e determinado, e o ponto *A* tem coordenadas (3, 1), que é a solução do sistema.

1. Resolva, no caderno, os sistemas lineares a seguir no *software* escolhido. Depois, analise a representação gráfica de cada um e responda: Qual é a posição das retas que representam o sistema? Se houver, quais são as coordenadas do ponto de intersecção dessas retas? E qual é a classificação do sistema? Os gráficos dependem do *software* utilizado pelos estudantes.

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -x + 3y = 6 \end{cases}$

Concorrentes; o ponto de intersecção tem coordenadas (1,5; 2,5); possível e determinado.

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$

As retas são paralelas distintas; o sistema linear é impossível.

c) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 6x + 9y = 30 \end{cases}$

As retas são coincidentes; o sistema linear é possível e indeterminado.

Escalonamento de sistemas lineares

Entre todos os métodos que nos permitem resolver e classificar sistemas lineares $m \times n$, o processo de **escalonamento** se destaca. Vamos explorar esse processo.

Professor, é importante não dar nenhuma dica inicial aos estudantes; deixe-os perceber a melhor maneira de resolver esse sistema linear. Após a resolução, pergunte a eles qual foi a estratégia usada e incentive-os a perceber o que tornou o sistema fácil de ser resolvido.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Junte-se a um colega para analisar o sistema linear 4×4 apresentado a seguir.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 8 \\ 2y + z + t = 2 \\ 2z + t = 5 \\ 2t = 6 \end{cases}$$

1. Qual é a quantidade de incógnitas em cada equação linear desse sistema? 4, 3, 2 e 1 incógnitas, nessa ordem.

2. É possível determinar o valor de alguma incógnita usando apenas a última equação linear? Se sim, qual é o valor? Sim, $t = 3$.

3. Qual é o conjunto solução desse sistema?

3. Resolvendo a 4ª equação, temos: $2t = 6 \Rightarrow t = 3$.
Substituindo t por 3 na 3ª equação, temos: $2z + t = 5 \Rightarrow 2z + 3 = 5 \Rightarrow 2z = 2 \Rightarrow z = 1$.
Substituindo t por 3 e z por 1 na 2ª equação, temos: $2y + z + t = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2y + 1 + 3 = 2 \Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow y = -1$.
Substituindo t por 3, z por 1 e y por -1 na 1ª equação, temos:
$x + (-1) + 1 + 3 = 8 \Rightarrow x - 1 + 4 = 8 \Rightarrow x = 5$. Logo, $S = \{(5, -1, 1, 3)\}$.

O sistema linear do *Explore para descobrir* está **escalonado**. Analisando as equações de um sistema linear escalonado, percebemos que a 1ª incógnita com coeficiente não nulo de cada linha está sempre à esquerda da 1ª incógnita com coeficiente não nulo da linha seguinte.

Acompanhe outros exemplos de sistemas lineares escalonados.

a) $\begin{cases} x - 2y + 5z = 7 \\ 3y + 2z = 1 \\ 4z = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 11 \\ 4x_2 + 5x_3 = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + z + t = 9 \\ 4z + 5t = 10 \end{cases}$

Fique atento

Quando o sistema linear não estiver escalonado, é possível escalonálo. Isso é o que estudaremos a seguir.

Classificação e resolução de sistemas lineares escalonados

Depois de escalonar o sistema, podemos analisar as equações para classificar o sistema. Primeiro precisamos verificar se a última equação não é satisfeita por nenhum valor real; se isso ocorrer, então o sistema é impossível.

Se todas as equações do sistema puderem ser satisfeitas no conjunto dos números reais, então podemos prosseguir a análise e avaliar a quantidade de equações e de incógnitas do sistema.

Caso o sistema linear escalonado tenha **a mesma quantidade de equações e de incógnitas**, então ele será um sistema possível e determinado.

Fique atento

Note que os sistemas dos itens **b** e **c** estão escalonados, uma vez que temos $0x_3 = 0$ no exemplo **b** e $0z + 0t = 0$ e $0t = 0$ no exemplo **c**. Contudo, essas equações podem ser omitidas, pois não contribuem para a resolução do sistema.

Por outro lado, caso o sistema linear escalonado tenha **a quantidade de equações menor do que a quantidade de incógnitas**, então ele será um sistema possível e indeterminado (SPI).

Se o sistema linear é possível, basta resolvê-lo de baixo para cima. Acompanhe os exemplos a seguir e verifique se você resolveu o sistema linear do *Explore para descobrir* de maneira parecida com a do exemplo **a**.

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -6 \\ 4y - 2z = 0 \\ 5z = 10 \end{cases}$

Temos um sistema linear 3×3 já escalonado (quantidade de equações = quantidade de incógnitas).

Da 3ª equação do sistema, chegamos a $z = 2$.

Fazendo $z = 2$ e o substituindo na 2ª equação do sistema, obtemos:

$$4y - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 4y = 4 \Rightarrow y = 1$$

Fazendo $y = 1$ e $z = 2$ e substituindo-os na 1ª equação do sistema, obtemos:

$$3x - 2 \cdot 1 + 2 = -6 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$$

Logo, esse sistema é possível e determinado, e o conjunto solução é $S = \{(-2, 1, 2)\}$.

b) $\begin{cases} 9x - 2y + 3z - w = 1 \\ y - 2z + 4w = 6 \\ 5z + 2w = 3 \\ 0w = 9 \end{cases}$

O sistema linear é 4×4 e já está escalonado.

A 4ª equação do sistema permite dizer que esse sistema é impossível; logo, o conjunto solução é $S = \varnothing$.

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y - 6z = 0 \end{cases}$

Temos um sistema linear 2×3 já escalonado (quantidade de equações < quantidade de incógnitas).

Como esse sistema linear está escalonado, tem mais incógnitas do que equações e pelo menos 1 coeficiente não nulo em cada equação, então ele é possível e indeterminado.

Por convenção, podemos considerar a incógnita que tem coeficiente igual a 0 em uma das equações do sistema linear como **incógnita livre**.

Nesse exemplo, vamos considerar z como a incógnita livre. Assim, fazendo $z = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, descobrimos a solução geral.

Da 2ª equação do sistema, obtemos:

$$3y - 6\alpha = 0 \Rightarrow y = 2\alpha$$

Fazendo $z = \alpha$ e $y = 2\alpha$ e substituindo-os na 1ª equação do sistema, obtemos:

$$x + 2\alpha + \alpha = 0 \Rightarrow x = -3\alpha$$

Fique atento

Um sistema linear em que todos os termos independentes são nulos, como o sistema do exemplo **c**, é chamado de **sistema linear homogêneo**.

Portanto, esse sistema é possível e indeterminado, e o conjunto solução é:

$$S = \{(-3\alpha, 2\alpha, \alpha)\}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

d) $\begin{cases} 2x - y + z - t = 2 \\ 2z + 3t = 1 \end{cases}$

Neste caso, o sistema linear é possível e indeterminado (está escalonado e tem 2 equações e 4 incógnitas). Vamos considerar como incógnitas livres y e t.

Para determinar a solução geral, fazemos $y = \alpha$ e $t = \beta$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, e os substituímos nas equações:

$$2z + 3\beta = 1 \Rightarrow 2z = 1 - 3\beta \Rightarrow z = \frac{1 - 3\beta}{2}$$

$$2x - \alpha + \frac{1 - 3\beta}{2} - \beta = 2 \Rightarrow 4x = 2\alpha - 1 + 3\beta + 2\beta + 4 \Rightarrow 4x = 2\alpha + 5\beta + 3 \Rightarrow x = \frac{2\alpha + 5\beta + 3}{4}$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{\left(\frac{2\alpha + 5\beta + 3}{4}, \alpha, \frac{1 - 3\beta}{2}, \beta\right)\right\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas lineares são **equivalentes** quando têm o mesmo conjunto solução.

Por exemplo, os sistemas lineares $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x + 2y = 26 \\ 2x - 5y = -8 \end{cases}$ são equivalentes, pois apresentam como conjunto solução $S = \{(6, 4)\}$.

Atividades resolvidas

3. Calcule os valores de a e b para que os sistemas lineares $\begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} ax + y = 12 \\ 2x - by = 20 \end{cases}$ sejam equivalentes.

Resolução

Primeiro resolvemos o sistema linear $\begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$, por exemplo, adicionando as 2 equações.

$$2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

Substituindo x por 7 na 1ª equação desse sistema, obtemos:

$$7 - y = 9 \Rightarrow y = 7 - 9 \Rightarrow y = -2$$

Para que os 2 sistemas sejam equivalentes, $S = \{(7, -2)\}$ também deve ser o conjunto solução do outro sistema linear dado. Assim:

$$ax + y = 12 \Rightarrow a \cdot 7 + (-2) = 12 \Rightarrow 7a = 14 \Rightarrow a = 2$$

$$2x - by = 20 \Rightarrow 2 \cdot 7 - b \cdot (-2) = 20 \Rightarrow 14 + 2b = 20 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

Assim, como ambos os sistemas lineares têm o mesmo conjunto solução – o que não aconteceria caso o 2º sistema fosse indeterminado – para $a = 2$ e $b = 3$, os sistemas são equivalentes.

15. Classifique e resolva no caderno os sistemas lineares escalonados.

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 2y - z = 1 \\ 2z = -6 \end{cases}$ Sistema linear possível e determinado, e $S = \{(4, -1, -3)\}$.

b) $\begin{cases} 5x - 2y + z = 3 \\ 4y - z = 5 \\ 0z = 8 \end{cases}$ Sistema linear impossível, e $S = \varnothing$.

c) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$ Sistema linear possível e indeterminado, e $S = \left\{\left(\frac{k+2}{3}, k, k\right)\right\}$, com $k \in \mathbb{R}$.

d) $\begin{cases} x - y + z - w = 0 \\ y + z + w = 5 \\ -z - 2w = 1 \\ -w = 2 \end{cases}$ Sistema linear possível e determinado, e $S = \{(-1, 4, 3, -2)\}$.

e) $\begin{cases} a + 2b - c + d = 2 \\ c - d = 0 \end{cases}$ Sistema linear possível e indeterminado, e $S = \{(2 - 2\alpha, \alpha, \beta, \beta)\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

f) $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ 2y = 1 \end{cases}$ Sistema linear possível e determinado, e $S = \left\{\left(\frac{17}{6}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

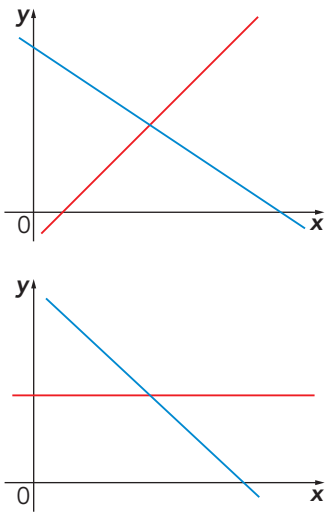
16. Verifique se os sistemas lineares dados nos itens a seguir são equivalentes.

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ y = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x = 4 \end{cases}$ Sim.

b) $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ y + 2z = 5 \\ z = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y - z = 7 \\ x + y = 8 \\ x = 5 \end{cases}$ Não.

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ Não.

17. Reúna-se com um colega e, juntos, analisem os 2 planos cartesianos a seguir cujos eixos estão com a mesma graduação, cada um contendo a representação gráfica de um sistema linear 2 × 2. É possível afirmar que esses sistemas lineares são equivalentes? Argumentem, defendendo a resposta de vocês.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Sim, pois os 2 sistemas lineares têm como conjunto solução $S = \{(4, 3)\}$.

Processo para escalonamento de um sistema linear

Quando o sistema linear não está escalonado, podemos obter um sistema linear equivalente a ele, que esteja escalonado, efetuando algumas operações entre as equações do sistema. Acompanhe alguns procedimentos que podem ser realizados.

- Podemos trocar a posição das equações.

  Por exemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y = 1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

- Podemos multiplicar ambos os membros de uma equação pelo mesmo número real diferente de 0.

  Por exemplo: $3x - y + z = 5 \Rightarrow 6x - 2y + 2z = 10$ (os 2 membros da equação foram multiplicados por 2).

- Podemos multiplicar ambos os membros de uma equação por um mesmo número real diferente de 0 e depois adicionar a equação resultante, membro a membro, à outra equação do sistema.

  Por exemplo:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 7 \cdot (-3) \\ 3x - 5y + 9z = 25 \end{cases} \xrightarrow{+} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 4z = 7 \\ y - 3z = 4 \end{cases}$$

- Se, no processo de escalonamento, obtivermos uma equação com todos os coeficientes iguais a 0 e o termo independente diferente de 0, essa equação será suficiente para afirmar que o sistema linear é impossível, isto é, o conjunto solução é $S = \varnothing$.

  Por exemplo: $0x + 0y + 0z = 7 \Rightarrow S = \varnothing$.

Fique atento

Quando multiplicamos ambos os membros de uma equação do sistema linear por um mesmo número e adicionamos a equação obtida membro a membro à outra equação, estamos fazendo um procedimento similar ao da resolução pelo método da adição.

Aplicativos e programas de computador que resolvem sistemas lineares o fazem pelo método do escalonamento.

Acompanhe a seguir alguns exemplos nos quais os sistemas lineares são escalonados e depois classificados e resolvidos.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 7y + z = 21 \\ -3x - 5y + 2z = -8 \end{cases}$ $\cdot(-2)$ (+) e $\cdot 3$ (+)

Para anular os coeficientes de x na 2ª e 3ª equações do sistema dado, podemos:

- multiplicar a 1ª equação do sistema por -2 e adicioná-la à 2ª;
- multiplicar a 1ª equação do sistema por 3 e adicioná-la à 3ª.

Depois, podemos trocar as posições das 2 últimas equações obtidas para que o coeficiente de y seja 1 na nova 2ª equação, e multiplicá-la por -3 para anular o coeficiente de y na nova 3ª equação.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 3y - z = 7 \\ y + 5z = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ y + 5z = 13 \\ 3y - z = 7 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-3)\ (+)} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ y + 5z = 13 \\ -16z = -32 \end{cases}$$

O sistema linear obtido está escalonado e é equivalente ao sistema linear dado.

Podemos agora resolvê-lo.

- $-16z = -32 \Rightarrow z = 2$
- $y + 5 \cdot 2 = 13 \Rightarrow y = 13 - 10 = 3$
- $x + 2 \cdot 3 + 2 = 7 \Rightarrow x = 7 - 6 - 2 = -1$

O sistema linear é possível e determinado, com $S = \{(-1, 3, 2)\}$.

Fique atento

É conveniente, mas não obrigatório, que o 1º coeficiente da equação que vai ser multiplicada seja 1 ou -1.

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 & \cdot(-3) \\ 3x - y + z = 1 & \\ 2x + 4y - 2z = 6 & \cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -7y + 4z = -8 \\ 0x + 0y - 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -7y + 4z = -8 \\ 0z = 0 \end{cases}$

O sistema linear é possível e indeterminado (pois, após o escalonamento, obtivemos um sistema linear 2×3). Nesse caso, z é a incógnita livre e pode assumir qualquer número real. Fazendo $z = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos:

- $-7y + 4\alpha = -8 \Rightarrow -7y = -8 - 4\alpha \Rightarrow y = \dfrac{8 + 4\alpha}{7}$
- $x + 2 \cdot \dfrac{8 + 4\alpha}{7} - \alpha = 3 \Rightarrow 7x + 16 + 8\alpha - 7\alpha = 21 \Rightarrow 7x = 5 - \alpha \Rightarrow x = \dfrac{5 - \alpha}{7}$

Assim, o conjunto solução desse sistema é $S = \left\{\left(\dfrac{5 - \alpha}{7}, \dfrac{8 + 4\alpha}{7}, \alpha\right)\right\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Fique atento

No sistema linear escalonado do exemplo **b**, x e y também poderiam ser incógnitas livres se fizéssemos outras operações entre as equações. Se considerássemos $x = \beta$ (com $\beta \in \mathbb{R}$) na 3ª equação do sistema escalonado, a solução geral seria dada em função de x, e, se $y = \gamma$ (com $\gamma \in \mathbb{R}$) na 3ª equação do sistema escalonado, a solução geral seria dada em função de y.

c) $\begin{cases} 2x - 4y + 10z = 6 & :2 \\ 3x - 6y + 15z = 11 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 5z = 3 & \cdot(-3) \\ 3x - 6y + 15z = 11 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 5z = 3 \\ 0x - 0y + 0z = 2 \end{cases}$

O sistema linear é impossível; portanto, $S = \varnothing$.

Fique atento

Dividir ambos os membros de uma igualdade por 2 equivale a multiplicá-los por $\frac{1}{2}$.

d) $\begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ x + 3y = 2 \\ -x + 4y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 2 & \cdot(-3) \\ 3x - 2y = -5 & \\ -x + 4y = 5 & \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 2 \\ -11y = -11 \\ 7y = 7 \end{cases}$

Esse sistema linear tem a quantidade de equações maior do que a quantidade de incógnitas (3×2).

As 2 primeiras equações obtidas formam um sistema linear escalonado. Podemos resolver a 2ª equação:

$$-11y = -11 \Rightarrow y = 1$$

Esse valor $y = 1$ também satisfaz a 3ª equação $7y = 7$ do sistema escalonado. Então, substituímos y por 1 na 1ª equação desse sistema:

$$x + 3 \cdot 1 = 2 \Rightarrow x = 2 - 3 = -1$$

Logo, o sistema linear dado é possível e determinado, e tem $S = \{(-1, 1)\}$.

e) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 4x - 6y = 10 \\ 6x - 9y = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \cdot(-4) \\ \cdot(-6) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2y = -6 \\ 3y = -24 \end{cases}$

O sistema formado pelas 2 primeiras equações obtidas está escalonado. Resolvemos a 2ª equação do sistema escalonado:

$$2y = -6 \Rightarrow y = -3$$

$y = -3$ não satisfaz a 3ª equação do sistema escalonado:

$$3 \cdot (-3) = -9 \neq -24$$

Logo, o sistema linear é impossível e $S = \varnothing$.

Fique atento

Ao resolver a 3ª equação do sistema linear escalonado obtido no item **e**, chegamos a $3y = -24 \Rightarrow y = -8$.

Não podemos ter, simultaneamente, $y = -3$ e $y = -8$. Então, de fato, o sistema linear é impossível.

Atividades

Não escreva no livro

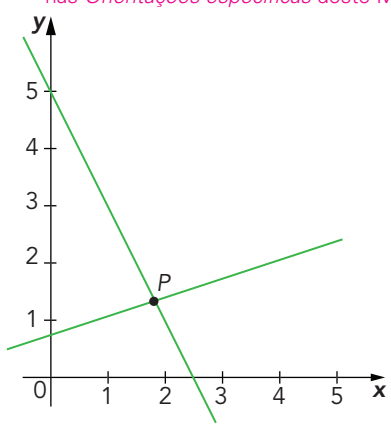
18. No caderno, escalone, classifique e resolva os sistemas lineares dados.

a) $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x - 3y + z = 8 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ Sistema linear possível e determinado, e $S = \{(1, -1, 2)\}$.

b) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x - 14z = 0 \end{cases}$ Sistema linear possível e indeterminado, e $S = \{(14k, -9k, k)\}$, com $k \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y - z = 10 \\ 2x - y - 7z = 0 \end{cases}$ Sistema impossível e $S = \varnothing$.

19. Analise a representação gráfica de um sistema linear. Os sistemas lineares escalonados encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.



Banco de imagens/Arquivo da editora

No caderno, escalone os sistemas lineares dados e verifique qual deles corresponde a essa representação gráfica. Alternativa **c**.

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x - y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x - 4y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x + y = 5 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

20. A coordenadora de um centro de exposições sabe que, em 1 dia, foram vendidos 120 ingressos, que geraram uma receita de R$ 4.000,00. Há 2 exposições em cartaz, **A** e **B**, que custam, respectivamente, R$ 30,00 e R$ 40,00, sem possibilidade de desconto. Utilizando essas informações, a coordenadora deseja descobrir quantos ingressos cada uma das exposições vendeu, separadamente.

a) No caderno, monte um sistema linear que represente o problema. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Em um plano cartesiano, represente a situação graficamente e identifique a resposta do problema. O gráfico encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Professor, para a atividade **20**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade.

21. a) $\begin{cases} A = T + 500 \\ T = 2L \\ A + T + L = 2000 \end{cases}$

b) R$ 1.100,00 com alimentos, R$ 600,00 com transporte e R$ 300,00 com lazer.

Fique atento

Para resolver os sistemas lineares relacionados aos problemas a seguir, analise as incógnitas, os coeficientes e quais valores você precisa calcular; só então escolha um dos métodos que você estudou.

21. Uma família está planejando o orçamento mensal e deseja equilibrar as despesas com alimentos, transporte e lazer. Para esse fim, os familiares dispõem de um orçamento total de R$ 2.000,00 por mês. Eles têm conhecimento de que:

- gastarão R$ 500,00 a mais com alimentos em relação à despesa que têm com transporte;
- a despesa com transporte será o dobro das despesas com lazer;
- a soma das despesas com alimentos, transporte e lazer deverá ser igual ao orçamento total de R$ 2.000,00.

a) Escreva no caderno o sistema de equações lineares que representa essa situação.

b) Resolva o sistema de equações do item **a** para descobrir os valores que devem ser gastos por essa família com alimentos, transporte e lazer.

c) Converse com um colega sobre a importância de elaborar um orçamento mensal familiar. Resposta pessoal.

22. Em uma padaria, Marcos comprou 2 sonhos, 3 embalagens de 100 g de queijo muçarela e 4 embalagens de 100 g de presunto, pagando R$ 43,40 por essa compra no cartão de débito. Na mesma padaria, Letícia comprou 3 sonhos, 2 embalagens de queijo muçarela (iguais às de Marcos) e 1 embalagem de presunto (também igual às de Marcos), pagando um total de R$ 36,60 com 2 notas de R$ 20,00. Quanto custa 1 sonho, 1 embalagem de 100 g de queijo muçarela e 1 embalagem de 100 g de presunto nessa padaria? R$ 16,00

Professor, para a atividade **23**, verifique se os estudantes percebem que a informação a respeito do preço do pacote de pipoca não será utilizada.

23. b) O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

23. Na estreia de um filme, uma sessão de cinema vendeu todos os 120 ingressos: a maioria deles foi vendida como meia-entrada e os demais foram inteiras. **a)** 96 ingressos.

a) Sabendo que a receita total em relação à venda de ingressos dessa sessão foi R$ 2.160,00, que cada meia-entrada custa R$ 15,00 e que o pacote de pipoca também custa R$ 15,00, quantos ingressos foram vendidos como meia-entrada?

b) Altere os valores citados no item **a** para a receita total da sessão e o custo de cada meia-entrada, e elabore e resolva um novo problema no caderno.

24. Fisicamente, quando 2 objetos colidem, a medida de velocidade de colisão é a soma das medidas de velocidade de cada objeto se a trajetória deles tiver sentidos opostos, e é a diferença das medidas caso a trajetória de ambos tenha o mesmo sentido. É por isso que colisões frontais são tão perigosas. Por exemplo, se 2 carros a 60 km/h colidem de frente, o efeito causado é o mesmo de uma batida a 120 km/h em um objeto que esteja parado, como um poste ou um muro.

Em um teste de velocidade de colisão frontal, com cada veículo sempre mantendo a mesma medida de velocidade, foram produzidos os seguintes resultados em relação aos modelos veiculares *A*, *B* e *C*.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

- Medida de velocidade de colisão entre os veículos *A* e *B*: 150 km/h.
- Medida de velocidade de colisão entre os veículos *A* e *C*: 160 km/h.
- Medida de velocidade de colisão entre os veículos *B* e *C*: 170 km/h.

a) Qual foi a medida de velocidade do veículo *A* nesses testes? 70 km/h

b) Pesquise sobre os limites de velocidade na cidade em que você mora e sobre como eles são definidos para evitar ou minimizar danos graves em acidentes. Resposta pessoal

Professor, para o item **b** da atividade **24**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Esta atividade favorece o desenvolvimento do TCT *Educação para o Trânsito*.

25. Paulo vai a uma loja do *shopping* e lá ele depara com as seguintes promoções: na compra de uma TV mais um painel, ele pagará R$ 1.630,00; na compra de um painel mais um sofá, ele pagará R$ 1.400,00; e, na compra de uma TV mais um sofá, ele pagará R$ 2.470,00.

a) Paulo pretende comprar apenas a TV. Porém, como não vai comprá-la em nenhuma das promoções com o sofá ou o painel, precisará pagar 10% a mais do que pagaria nela nessas promoções. Então, quanto ele vai pagar pela TV? R$ 1.485,00

b) Escolha outro produto dessas promoções para comprar individualmente e estabeleça a porcentagem que será acrescida ao preço dele em relação ao valor em promoção. Registre no caderno o enunciado de um problema com essas novas informações e peça a um colega que o resolva, enquanto você resolve o que ele elaborou.

26. Pesquise os preços de 2 a 3 produtos, como eletrodomésticos, peças de vestuário ou alimentos, e utilize esses dados para elaborar um problema que possa ser resolvido por meio de um sistema linear de 2 ou 3 equações com 2 ou 3 incógnitas. Peça a um colega que resolva o problema que você elaborou (enquanto você resolve o dele) e, depois, confira essa resolução.

27. Junte-se a um colega para analisar a reação química não balanceada a seguir.

$$\underset{\text{cálcio}}{Ca} + \underset{\text{ácido fólico}}{H_3PO_4} \rightarrow \underset{\text{fosfato de cálcio}}{Ca_3P_2O_8} + \underset{\text{gás hidrogênio}}{H_2}$$

Essa equação pode ser balanceada fazendo-se $x \cdot Ca + y \cdot H_3PO_4 \rightarrow z \cdot Ca_3P_2O_8 + w \cdot H_2$, o que fica representado pelo sistema linear

$$\begin{cases} x = 3z \\ 3y = 2w \\ y = 2z \\ 4y = 8z \end{cases}.$$

Resolvam esse sistema linear.

$S = \{(3\alpha, 2\alpha, \alpha, 3\alpha)\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

28. Para formar certa quantia, podemos fazer uso de um ou mais tipos de cédula, como na suposição a seguir: Um comerciante tem no caixa R$ 400,00, apenas em cédulas de R$ 2,00, R$ 5,00 e R$ 10,00, totalizando 56 cédulas.



Reprodução/Casa da Moeda do Brasil/Ministério da Fazenda

a) Se a quantidade de cédulas de R$ 10,00 é o triplo das de R$ 2,00, quantas cédulas de R$ 5,00 há no caixa? 16 cédulas.

b) No caderno, elabore outra pergunta para essa situação.

c) Elabore outra relação entre as quantidades de cédulas de cada tipo no caixa do comerciante e registre no caderno um novo enunciado para esse problema. Depois, dê o caderno para um colega resolver o problema que você elaborou enquanto você resolve o dele.

29. Como em qualquer sistema linear homogêneo todos os termos independentes são nulos, ao escaloná-lo, a última linha sempre será da forma $a_n \cdot x_n = 0$, em que $a_n \neq 0$ ou $a_n = 0$.

a) O que isso significa em termos de classificação de um sistema homogêneo quanto à quantidade de soluções?

b) Descreva, no caderno, como é a solução de um sistema linear homogêneo quando $a_n \neq 0$.

c) Essa solução também é solução de um sistema linear homogêneo quando $a_n = 0$? Justifique sua resposta.

d) Ao escalonar um sistema linear homogêneo 2×2, obteve-se a última linha na forma $a_n \cdot x_n = 0$, com $a_n \neq 0$. Como é a representação gráfica desse sistema?

e) Escalone o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

e classifique-o.

O exemplo de problema do item **b** da atividade **25**, bem como o da atividade **26**, o do item **b** e o do item **c** da atividade **28**, encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

29. As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Sistemas lineares, matrizes e determinantes

Agora, retomaremos o conceito do determinante de matrizes 2×2 e de matrizes 3×3, e estudaremos a aplicação dos determinantes para classificar alguns sistemas lineares sem a necessidade de resolvê-los.

Vamos analisar a solução do seguinte sistema linear 2×2:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases}$$

Isolando x na 1ª equação do sistema, e supondo $a_1 \neq 0$, obtemos: $x = \dfrac{c_1 - b_1 \cdot y}{a_1}$.

Fazendo $x = \dfrac{c_1 - b_1 \cdot y}{a_1}$ na 2ª equação, obtemos:

$$a_2 \cdot \left(\frac{c_1 - b_1 \cdot y}{a_1}\right) + b_2 \cdot y = c_2 \Rightarrow a_2 \cdot c_1 - b_1 \cdot a_2 \cdot y + a_1 \cdot b_2 \cdot y = a_1 \cdot c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2)y = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$$

Para que exista um único valor de y que satisfaça essa igualdade, é necessário que $a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$ não seja nulo. Existindo um único valor de y, existirá um único valor de x, e o sistema linear terá solução (será possível e determinado).

O valor de $a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$ pode ser obtido de modo mais fácil ao se efetuar operações que envolvam os elementos da **matriz dos coeficientes do sistema linear**, ou seja, da matriz formada pelos coeficientes das incógnitas do sistema.

Por exemplo, para o sistema linear $\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases}$ dado, a matriz dos coeficientes é $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$. Se fizermos o produto dos elementos a_1 e b_2 da diagonal principal menos o produto dos elementos b_1 e a_2 da diagonal secundária, obteremos $a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$.

O valor de $a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$ é definido, como estudamos anteriormente, como o **determinante da matriz de ordem 2**. Quando conhecemos o determinante, sabemos de antemão se o sistema linear 2×2 é possível e determinado ou não, sem necessidade de resolvê-lo.

Acompanhe o exemplo a seguir.

$$\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, e o determinante dessa matriz é:

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 = -24 - 6 = -30$$

Portanto, o sistema é possível e determinado, pois $\det A \neq 0$.

Agora, de maneira análoga, vamos analisar a solução do seguinte sistema linear 3×3:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes desse sistema linear é $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, que é uma matriz quadrada de ordem 3.

Fazendo as operações adequadas no sistema, obtemos a seguinte equação na incógnita z:

$$(a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3)z =$$
$$= (a_1 \cdot b_2 \cdot d_3 + b_1 \cdot d_2 \cdot a_3 + d_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - d_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot d_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot d_3)$$

Em um sistema linear 3×3, para que exista uma única solução, é necessário que $a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3$ (que corresponde ao **determinante da matriz de ordem 3**) seja diferente de 0. Portanto, quando sabemos o valor desse determinante, sabemos se o sistema linear 3×3 é possível e determinado ou não sem a necessidade de resolvê-lo.

Discussão de um sistema linear não escalonado

Quando não conhecemos todos os coeficientes ou termos independentes de um sistema linear, podemos fazer uma análise dos valores desses termos para os quais o sistema é possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível. Quando agimos assim, dizemos que é feita uma discussão do sistema linear em função dos valores não conhecidos.

A discussão de um sistema linear não escalonado, cuja quantidade de equações é igual à quantidade de incógnitas, pode ser feita pelo determinante da matriz dos coeficientes do sistema, com auxílio do escalonamento.

Consideremos o sistema linear $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ não escalonado.

Seja $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear.

- Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado.
- Se $D = 0$, o sistema é impossível, ou é possível e indeterminado.

Para o caso de $D = 0$, podemos escalonar o sistema linear e, analisando a última linha obtida, classificar o sistema em impossível ou em possível e indeterminado.

Atividades resolvidas

4. Discuta o sistema linear $\begin{cases} x + ky = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ em função de k.

Resolução

Vamos discutir o sistema em função de k, pois não conhecemos o valor desse coeficiente.

Calculamos o determinante da matriz dos coeficientes:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - k$$

- Se $D \neq 0$, ou seja, $2 - k \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$, o sistema é possível e determinado.
- Se $D = 0$, ou seja, $2 - k = 0 \Rightarrow k = 2$, o sistema pode ser impossível, ou possível e indeterminado.

Substituímos k por 2 no sistema e o escalonamos.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \quad \cdot(-1) \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{+} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0y = 2 \end{cases}$$

Da equação $0y = 2$, concluímos que o sistema é impossível nesse caso.

Portanto:

- para $k \neq 2$, o sistema linear é possível e determinado;
- para $k = 2$, o sistema linear é impossível.

5. Discuta o sistema linear $\begin{cases} x - 2y + kz = 1 \\ x - y - z = 2 \\ -x + 2y - 2z = w \end{cases}$ em função de k e de w.

Resolução

Vamos discutir o sistema em função do coeficiente k e do termo independente w, cujos valores não conhecemos.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & k \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 2k - k + 2 - 4 = k - 2$$

- Se $D \neq 0$, ou seja, $k - 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$, o sistema é possível e determinado.
- Se $D = 0$, ou seja, $k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$, o sistema pode ser impossível, ou possível e indeterminado.

Substituindo k por 2 no sistema e escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ x - y - z = 2 \quad \cdot(-1) \\ -x + 2y - 2z = w \end{cases} \xrightarrow{+} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ y - 3z = 1 \\ -x + 2y - 2z = w \end{cases} \xrightarrow{+} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ y - 3z = 1 \\ 0z = w + 1 \end{cases}$$

Se $w + 1 = 0$, ou seja, se $w = -1$, o sistema é possível e indeterminado. Se $w + 1 \neq 0$, ou seja, se $w \neq -1$, o sistema é impossível.

Portanto:

- para $k \neq 2$, temos um sistema linear possível e determinado;
- para $k = 2$ e $w = -1$, temos um sistema linear possível e indeterminado;
- para $k = 2$ e $w \neq -1$, temos um sistema linear impossível.

Atividades

Não escreva no livro

30. Discuta cada sistema linear em função dos coeficientes e dos termos independentes desconhecidos.

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ mx - 8y = 6 \end{cases}$ Para $m \neq -16$, o sistema linear é possível e determinado; e, para $m = -16$, o sistema é impossível.

b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + 4z = k \end{cases}$ Para $k = 9$, o sistema linear é possível e indeterminado; e, para $k \neq -9$, o sistema é impossível.

Enem e vestibulares

1. **(Enem)** Uma construtora, pretendendo investir na construção de imóveis em uma metrópole com cinco grandes regiões, fez uma pesquisa sobre a quantidade de famílias que mudaram de uma região para outra, de modo a determinar qual região foi o destino do maior fluxo de famílias, sem levar em consideração o número de famílias que deixaram a região. Os valores da pesquisa estão dispostos em uma matriz $A = [a_{ij}]$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, em que o elemento a_{ij} corresponde ao total de famílias (em dezena) que se mudaram da região i para a região j durante um certo período, e o elemento a_{ii} é considerado nulo, uma vez que somente são consideradas mudanças entre regiões distintas. A seguir, está apresentada a matriz com os dados da pesquisa.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual região foi selecionada para o investimento da construtora? Alternativa **e**.

a) 1 **c)** 3 **e)** 5
b) 2 **d)** 4

2. **(EEAR-SP)** Sejam as matrizes $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ x+1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2y-3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Se $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, então $x + y$ é

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8

Alternativa **b**.

3. **(Enem)** Uma faculdade oferece dois cursos diferentes na área de Humanas. Para um aluno ingressar nesses cursos, o vestibular contém questões objetivas e uma redação, e a nota final do candidato é a soma dessas notas, utilizando o seguinte critério de pesos:

- questões objetivas: peso 1 para o curso **I** e peso 1 para o curso **II**;
- redação: peso 2 para o curso **I** e peso 3 para o curso **II**.

Um candidato que concorre aos dois cursos obteve nota X nas questões objetivas e nota Y na redação. Para analisar sua nota para o curso **I** e para o curso **II**, o candidato representa sua nota com um produto de matrizes $A \cdot B$ em que a matriz A representa os pesos, e a matriz B contém as notas obtidas pelo candidato. A matriz resultante $A \cdot B$ é uma matriz coluna, em que, na primeira linha, tem sua nota final para o curso **I** e, na segunda linha, tem sua nota final para o curso **II**.

Nessas condições, qual representação algébrica gera o resultado final desse candidato nos dois cursos?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$

Alternativa **b**.

4. **(Unisc-RS)** Calcule o determinante de A, sendo $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

a) $\frac{50}{90}$ **c)** $\frac{48}{70}$ **e)** $\frac{46}{50}$
b) $\frac{49}{80}$ **d)** $\frac{47}{60}$

Alternativa **d**.

5. **(Uece)** Matrizes numéricas são utilizadas em muitos procedimentos adotados na Administração de Empresas. Temos em alguns casos a soma e o produto de matrizes. Quando a matriz é quadrada, pode-se calcular seu determinante. Considere as matrizes $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $y \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $V = X \cdot Y$ e $W = Y \cdot X$.

Calculando os determinantes de V e W, obtém-se que det (V) + det (W) é igual a:

a) 2. **b)** 0. **c)** 6. **d)** 4.

Alternativa **a**.

6. (Unicamp-SP) Luísa estava conversando com seu irmão ao telefone quando passou perto de uma feira de adoção de animais. Ela comentou que, na feira, havia cachorros, gatos e pintinhos.

O irmão, curioso, perguntou-lhe quantos gatos havia. Luísa, que adora charadas matemáticas, limitou-se a dizer que a quantidade de gatos somada à quantidade de pintinhos era 4 a mais do que a quantidade de cachorros, e que a quantidade de gatos somada à quantidade de cachorros era 6 a mais do que a quantidade de pintinhos.

O irmão de Luísa, que adora as aulas de matemática, rapidamente chegou à resposta correta. Havia quantos gatos para adoção?

a) 4. **b)** 5. **c)** 6. **d)** 7.

Alternativa **b**.

7. (UFJF/Pism-MG) Ao final de um dia de trabalho, os garçons João, Antônio e Paulo dividiram entre si, R$ 300,00 em gorjetas. Antônio trabalhou por um período maior de tempo, e por isso, ele recebeu $\frac{2}{3}$ da soma das gorjetas obtidas por Paulo e João. Paulo recebeu R$ 40,00 a menos que João.

O valor que João recebeu no final do dia foi:

a) R$ 60,00.
b) R$ 70,00.
c) R$ 100,00.
d) R$ 110,00.
e) R$ 130,00.

Alternativa **d**.

8. (Enem) O metrô de um município oferece dois tipos de tíquetes com colorações diferentes, azul e vermelha, sendo vendidos em cartelas, cada qual com nove tíquetes da mesma cor e mesmo valor unitário. Duas cartelas de tíquetes azuis e uma cartela de tíquetes vermelhos são vendidas por R$ 32,40. Sabe-se que o preço de um tíquete azul menos o preço de um tíquete vermelho é igual ao preço de um tíquete vermelho mais cinco centavos.

Qual o preço, em real, de uma cartela de tíquetes vermelhos?

a) 4,68
b) 6,30
c) 9,30
d) 10,50
e) 10,65

Alternativa **b**.

9. (Enem) Uma pessoa pretende viajar por uma companhia aérea que despacha gratuitamente uma mala com até 10 kg.

Em duas viagens que realizou, essa pessoa utilizou a mesma mala e conseguiu 10 kg com as seguintes combinações de itens:

Viagem	Camisetas	Calças	Sapatos
I	12	4	3
II	18	3	2

Para ter certeza de que sua bagagem terá massa de 10 kg, ela decide levar essa mala com duas calças, um sapato e o máximo de camisetas, admitindo que itens do mesmo tipo têm a mesma massa.

Qual a quantidade máxima de camisetas que essa pessoa poderá levar?

a) 22
b) 24
c) 26
d) 33
e) 39

Alternativa **b**.

10. (Enem) A meta de uma concessionária de automóveis é vender, pelo menos, 104 carros por mês. Sabe-se que, em média, em dias em que não são oferecidos descontos, são vendidos 3 carros por dia; em dias em que há o desconto mínimo, são vendidos 4 carros por dia; e, em dias em que há o desconto máximo, são vendidos 5 carros por dia.

No mês atual, até o fim do expediente do sexto dia em que a concessionária abriu, não foram oferecidos descontos, tendo sido vendidos 18 carros, conforme indicava a média. Ela ainda abrirá por mais 20 dias neste mês.

A menor quantidade de dias em que será necessário oferecer o desconto máximo, de modo que ainda seja possível a concessionária alcançar sua meta de vendas para o mês, é:

a) 6.
b) 10.
c) 11.
d) 13.
e) 18.

Alternativa **a**.

11. (UFJF-MG) A soma das idades das irmãs Ana, Bianca e Carla é 90 anos. A diferença entre as idades de Ana, a irmã mais velha, e de Bianca, a irmã do meio, é a mesma que a diferença entre as idades de Bianca e de Carla. Ana tem o dobro da idade de Carla.

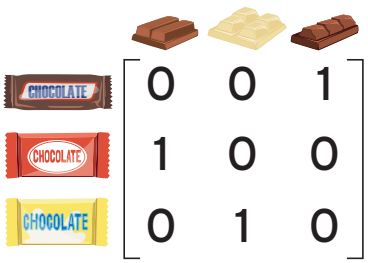
Quais são as idades das três irmãs?

Ana: 40 anos; Carla: 20 anos; Bianca: 30 anos.

Conteúdos e aprendizagens

Matrizes

Ilustrações: Bruna Ishihara/ Arquivo da editora



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Organização de dados numéricos em linhas e colunas

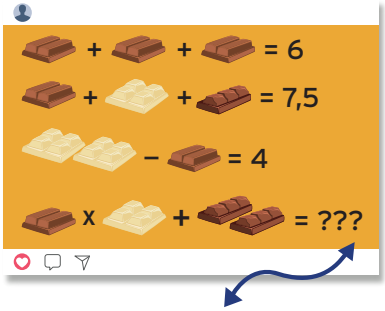
Operações

- Adição e subtração (elemento a elemento)
- Multiplicação (linha por coluna)

Determinante

Podemos usar o determinante da matriz para a classificação de sistemas lineares.

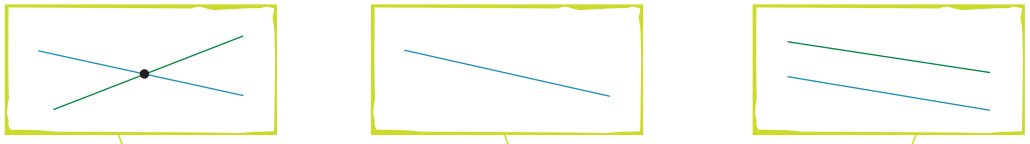
Sistemas lineares



$$\begin{cases} 3x = 6 \\ x + y + z = 7{,}5 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$$

Classificamos em

- Possível e determinado — $D \neq 0$
- ou Possível e indeterminado — $D = 0$
- ou Impossível — $D = 0$



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

- Compreendo a relação existente entre matrizes, sistemas lineares e determinantes?
- Sei classificar sistemas lineares em possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível?
- Consigo resolver problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, utilizando sistemas lineares? Respostas pessoais.

Tabela de razões trigonométricas

Medida de abertura	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,01745	0,99985	0,01746
2°	0,03490	0,99939	0,03492
3°	0,05234	0,99863	0,05241
4°	0,06976	0,99756	0,06993
5°	0,08716	0,99619	0,08749
6°	0,10453	0,99452	0,10510
7°	0,12187	0,99255	0,12278
8°	0,13917	0,99027	0,14054
9°	0,15643	0,98769	0,15838
10°	0,17365	0,98481	0,17633
11°	0,19087	0,98163	0,19438
12°	0,20791	0,97815	0,21256
13°	0,22495	0,97437	0,23087
14°	0,24192	0,97030	0,24933
15°	0,25882	0,96593	0,26795
16°	0,27564	0,96126	0,28675
17°	0,29237	0,95630	0,30573
18°	0,30902	0,95106	0,32492
19°	0,32557	0,94552	0,34433
20°	0,34202	0,93969	0,36397
21°	0,35837	0,93358	0,38386
22°	0,37461	0,92718	0,40403
23°	0,39073	0,92050	0,42447
24°	0,40674	0,91355	0,44523
25°	0,42262	0,90631	0,46631
26°	0,43837	0,89879	0,48773
27°	0,45399	0,89101	0,51953
28°	0,46947	0,88295	0,53171
29°	0,48481	0,87462	0,55431
30°	0,50000	0,86603	0,57735
31°	0,51504	0,85717	0,60086
32°	0,52992	0,84805	0,62487
33°	0,54464	0,83867	0,64941
34°	0,55919	0,82904	0,67451
35°	0,57358	0,81915	0,70021
36°	0,58779	0,80902	0,72654
37°	0,60182	0,79864	0,75355
38°	0,61566	0,78801	0,78129
39°	0,62932	0,77715	0,80978
40°	0,64279	0,76604	0,83910
41°	0,65606	0,75471	0,86929
42°	0,66913	0,74314	0,90040
43°	0,68200	0,73135	0,93252
44°	0,69466	0,71934	0,96569
45°	0,70711	0,70711	1,00000

Medida de abertura	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,71934	0,69466	1,03553
47°	0,73135	0,68200	1,07237
48°	0,74314	0,66913	1,11061
49°	0,75471	0,65606	1,15037
50°	0,76604	0,64279	1,19175
51°	0,77715	0,62932	1,23499
52°	0,78801	0,61566	1,27994
53°	0,79864	0,60182	1,32704
54°	0,80903	0,58779	1,37638
55°	0,81915	0,57358	1,42815
56°	0,82904	0,55919	1,48256
57°	0,83867	0,54464	1,53986
58°	0,84805	0,52992	1,60033
59°	0,85717	0,51504	1,66428
60°	0,86603	0,50000	1,73205
61°	0,87462	0,48481	1,80405
62°	0,88295	0,46947	1,88073
63°	0,89101	0,45399	1,96261
64°	0,89879	0,43837	2,05030
65°	0,90631	0,42262	2,14451
66°	0,91355	0,40674	2,24604
67°	0,92050	0,39073	2,35585
68°	0,92718	0,37461	2,47509
69°	0,93358	0,35837	2,60509
70°	0,93969	0,34202	2,74748
71°	0,94552	0,32557	2,90421
72°	0,95106	0,30902	3,07768
73°	0,95630	0,29237	3,27085
74°	0,96126	0,27564	3,48741
75°	0,96593	0,25882	3,73205
76°	0,97030	0,24192	4,01078
77°	0,97437	0,22495	4,33148
78°	0,97815	0,20791	4,70463
79°	0,98163	0,19087	5,14455
80°	0,98481	0,17365	5,67128
81°	0,98769	0,15643	6,31375
82°	0,99027	0,13917	7,11537
83°	0,99255	0,12187	8,14435
84°	0,99452	0,10453	9,51436
85°	0,99619	0,08716	11,43010
86°	0,99756	0,06976	14,30070
87°	0,99863	0,05234	19,08110
88°	0,99939	0,03490	28,63630
89°	0,99985	0,01745	57,29000

Essa tabela contém valores aproximados. Os arredondamentos utilizados são de 5 casas decimais.

Respostas

Unidade 1

Abertura

- Rio Amazonas; aproximadamente, 6 900 km.
- Aproximadamente 8 510 295 km².

Capítulo 1

Situações-problema

1. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.
c) $20\text{ m} \cdot 40\text{ m} = 800\text{ m}^2$

2. a) Resposta pessoal.
b) 129 unidades de área.

Atividades

1. 8 cm²; 8 cm².
2. 147 m²
3. Não é possível responder a essa pergunta, pois faltam dados.
4. $96\sqrt{3}$ cm²
5. 2 320 m²
6. a) 1200 m
b) Resposta pessoal.
7. Sim; $x = \frac{250\,000}{b}$.
8. Alternativa **a**.
9. Alternativa **d**.
10. Resposta pessoal.
11. 770 000 joules.
12. a) 20π cm
b) 100π cm²
13. a) 18π cm²
b) 9π cm²
c) 12π cm²
14. $\left(\frac{25\pi + 48}{2}\right)$ m²
15. 8π cm²
16. $16(4 - \pi)$ cm²
17. a) 2 826 km²
b) Resposta pessoal.
18. R$ 147.580,00
19. Alternativa **b**.
20. Alternativa **d**.
21. Há risco de sobreaquecimento.
22. Aproximadamente, 31,5 unidades.
23. 2 898 cm²
24. 64,08 cm²
25. Aproximadamente 7,5 unidades de medida de área.
26. a) 2 km²
b) Resposta pessoal.
27. 204 unidades.
28. a) Resposta pessoal.
b) 21 cm²
29. Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 17)

1. 4 regiões quadradas iguais a Q.
2. $A = \frac{1}{4}$
3. $Q = \frac{1}{n^2}$

Reflita (p. 19)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 20)

Sim, pois o resultado não depende da base escolhida.

Explore para descobrir (p. 22)

3. A estrutura triangular.

Reflita (p. 23)

A medida do semiperímetro de um polígono é a metade da soma das medidas de comprimento dos lados de um polígono.

Reflita (p. 26)

Sendo a a medida de comprimento do apótema e ℓ a medida de comprimento do lado do decágono, a medida de área é dada por $\frac{10 \times \ell \times a}{2} = 5\ell a$.

Conexões (p. 31)

1. 30 m²
2. Respostas pessoais.

Tecnologias digitais (p. 40)

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

Conexões (p. 44)

1. Resposta pessoal.
2. Cubismo.
3. Resposta pessoal.

Capítulo 2

Situação-problema

Respostas pessoais.

Atividades

1.

Piso	Formato da face superior	Medida de abertura do ângulo de rotação
Piso intertravado 2	Quadrado	90°
Piso intertravado 3	Triângulo equilátero	120°
Piso intertravado 4	Dodecágono não regular	120°

2. Ladrilhos com formato de triângulo equilátero e ladrilhos com formato de quadrado, ou ladrilhos com formato de triângulo equilátero com ladrilhos com formato de hexágono regular.
3. Alternativa **b**.

4. Alternativa **b**.

5. Alternativa **a**.

Reflita (p. 49)

a) O comando repete os elementos de **L1**. Replica a linha de quadradinhos para cima.

b) O vetor *v*.

c) 2 quadradinhos.

Explore para descobrir (p. 51)

1. a) (3, 3, 3, 3, 3, 3) e (60°, 60°, 60°, 60°, 60°, 60°).

b) (4, 4, 4, 4) e (90°, 90°, 90°, 90°).

c) (4, 6, 12) e (90°, 120°, 150°).

d) (4, 8, 8) e (90°, 135°, 135°).

e) (3, 6, 3, 6) e (60°, 120°, 60°, 120°).

f) (3, 3, 3, 3, 6) e (60°, 60°, 60°, 60°, 120°).

2. 360°

Tecnologias digitais (p. 49)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

Enem e vestibulares (p. 57)

1. Alternativa **d**.

2. Alternativa **d**.

3. Alternativa **e**.

4. Alternativa **c**.

5. Alternativa **e**.

6. Alternativa **d**.

7. Alternativa **c**.

8. Alternativa **e**.

9. a) $R = 6$ cm; $r = 4$ cm.

b) $4\sqrt{5}$ cm

Unidade 2

Abertura

Respostas pessoais.

Capítulo 1

Situação-problema

a) 6 peças de centro.

b) 12 peças de meio.

c) 8 peças de quina.

d) 54 adesivos.

Atividades

1. a) Concorrentes.

b) Reversas.

c) Paralelas.

d) Concorrentes.

e) Reversas.

f) Concorrentes.

2. a) Planos secantes.

b) Plano (*ABJI*) e plano (*ADGI*).

c) Plano (*BCHJ*).

d) Reta $\overleftrightarrow{CH}$.

e) Não. O plano *CDGH* é paralelo, mas não corresponde a uma face do sólido.

3. a) Plano (*ABCD*), plano (*EFGH*), plano (*ADHE*), plano (*BCGF*).

b) Plano (*ADHE*) e plano (*CDHG*).

c) Sim. Justificativa pessoal.

d) Os 2 planos são perpendiculares ao plano (*EFGH*).

4. a) 3 cm

b) 5 cm

c) $\sqrt{13}$ cm

d) $2\sqrt{5}$ cm

e) 4 cm

f) $\sqrt{13}$ cm

g) 4 cm

h) 2 cm

i) 4 cm

j) 2 cm

k) 3 cm

l) 2 cm

m) $\sqrt{29}$ cm

5. a) Convexo.

b) Não convexo.

c) Convexo.

6. a) 5 faces, 8 arestas e 5 vértices.

b) 4 faces triangulares e 1 face quadrangular.

c) 3 arestas.

d) 4 arestas.

7. 12 faces.

8. 11 faces.

9. 7 vértices.

10. 32 faces.

11. 120 vértices.

12. Alternativa **d**.

13. 18 m

Reflita (p. 63)

X pertence a *r*; *X* não pertence a *s*; *M* pertence a α; *M* pertence a β; *G* pertence a α; *G* não pertence a β.

Reflita (p. 65)

$\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são retas coplanares porque estão contidas no mesmo plano (*ADGF*). Como essas retas não têm ponto comum, elas são paralelas.

Reflita (p. 65)

Não existe um plano que contém as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{FH}$; portanto, elas são reversas.

Reflita (p. 68)

- Na 1ª figura, as retas *a* e *b* são reversas, pois não há um plano que passa pelas 2 retas. As retas *a* e *b* são ortogonais porque existe uma reta paralela a *a* que é perpendicular a *b* (*c*, por exemplo).
- Na 2ª figura, as retas *a* e *b* são reversas, pois não há um plano que passe pelas 2 retas. As retas *c* e *a* são paralelas, mas as retas *c* e *b* são oblíquas. Logo, as retas *a* e *b* não são ortogonais.

Reflita (p. 71)

Quando *P* pertence à reta *r*.

Reflita (p. 72)

A medida de distância é 0.

Reflita (p. 72)

A medida de distância é 0.

Reflita (p. 73)

Quando os planos são coincidentes ou concorrentes.

Reflita (p. 73)

Não é possível. Justificativa pessoal.

Reflita (p. 76)

4 faces.

Reflita (p. 77)

Tetraedro: 4 − 6 + 4 = 2; dodecaedro: 20 − 30 + 12 = 2; prisma de base pentagonal: 10 − 15 + 7 = 2; pirâmide de base quadrada: 5 − 8 + 5 = 2; hexaedro: 8 − 12 + 6 = 2.

Reflita (p. 79)

Tetraedro: 4 − 6 + 4 = 2; octaedro: 6 − 12 + 8 = 2; icosaedro: 12 − 30 + 20 = 2; cubo: 8 − 12 + 6 = 2; dodecaedro: 20 − 30 + 12 = 2.

Capítulo 2

Situação-problema

a) O círculo.

b) Resposta pessoal.

c) Respostas pessoais.

d) Sim, basta que o plano seja paralelo às bases.

Atividades

1. $10\sqrt{2}$ cm

2. 30 cm

3. $4\sqrt{3}$ cm

4. 216 cm^2

5. Alterando a medida de comprimento da aresta para 4,5 cm, obtemos 121,5 cm^2 para a medida de área.

6. 2264 cm^2

7. 32,6 m^2

8. 810 m^2

9. Aproximadamente 414,4 cm^2.

10. 125 cm^3

11. 10 dm

12. 140 cm^3

13. 1080 L

14. 1000 dados.

15. 150 cm^3

16. 1728 cm^3

17. 226 800 L

18. 30 cm^3

19. 1500 cm^3

20. Alternativa **d**.

21. 864 L

22. Não é possível responder a essa pergunta, pois faltam dados.

23. Alternativa **b**.

24. Alternativa **b**.

25. 324,375 cm^3

26. Alternativa **b**.

27. Resposta pessoal.

28. Alternativa **e**.

29. Aproximadamente 477 cm^2.

30. $h = 2$ cm; $A_T = 70\pi$ cm^2.

31. 32π cm^2

32. Resposta pessoal.

33. Na lata mais alta.

34. **a)** Lata **2**.

b) Lata **1**.

35. $V = 6000$ litros

36. Aproximadamente 0,377 mL.

37. 4480π cm^3

38. Aproximadamente 0,98 m^3.

39. Aproximadamente 1413 cm^3.

40. Aproximadamente 999 m^3.

41. **a)** Embalagem representada pela figura **I**.

b) Resposta pessoal.

42. **a)** 4π L

b) 0,002 m

c) 10 h

43. Alternativa **b**.

44. Alternativa **b**.

45. Resposta pessoal.

46. Alternativa **c**.

Reflita (p. 82)

As características comuns que se destacam nos poliedros são a dupla de faces paralelas, congruentes e opostas unidas por faces retangulares.

Reflita (p. 83)

Sim, pois 2 faces opostas quaisquer estão situadas em planos paralelos e são ligadas por arestas paralelas entre si.

Reflita (p. 84)

7 faces; 5 arestas laterais.

Explore para descobrir (p. 85)

1. Não seria possível entrar com o cano no elevador. A maior medida de comprimento possível é 2,9 m.

2. A medida de comprimento da diagonal é igual a $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

3. $a\sqrt{3}$

Ampliando o problema (p. 91)

a) R$ 10.640,00; aproximadamente 66,7 L/s.

b) Resposta pessoal.

Reflita (p. 92)

Sim. O volume do paralelepípedo retângulo pode ser usado para obter a medida de volume de um prisma qualquer.

Reflita (p. 100)

Quando o cilindro é reto.

Ampliando a atividade (p. 106)

a) 1,6 m

b) Resposta pessoal.

Conexões (p. 97)

1. $x = \left(216000 - 12600\sqrt{3}\right)$ cm^3

2. Resposta pessoal.

Tecnologias digitais (p. 107)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. **a)** 63 cm^3; 75,4 cm^3.

b) 102 cm^2; aproximadamente 100,5 cm^2.

4. **a)** A peça com formato cilíndrico, ou seja, a peça com a maior medida de volume.

b) A peça com formato de prisma, ou seja, a peça com a maior medida de área superficial.

5. Resposta pessoal.

Capítulo 3

Situação-problema

a) Triângulos ou regiões limitadas por triângulos.

b) Sim.

c) Resposta pessoal.

Atividades

1. 800 cm^2
2. $288\sqrt{3}$ cm^2
3. Alternativa **e**.
4. Resposta pessoal.
5. 675 cm^3
6. $\frac{250\sqrt{2}}{3}$ cm^3
7. 48 m^3
8. Alternativa **a**.
9. Aproximadamente 41 m.
10. Alternativa **e**.
11. **a)** 30 cm
    b) 540π cm^2
    c) 864π cm^2
12. 260π cm^2
13. 6π cm^2
14. **a)** $h = 2\sqrt{3}$ cm e $r = 2$ cm.
    b) 12π cm^2
15. 201,2 cm^2
16. **a)** 25π cm^2
    b) 200π cm^2
    c) 225π cm^2
17. 3 latas.
18. Resposta pessoal.
19. $12\,000\pi$ L
20. $0{,}00375\pi$ m^3
21. 2 513 m^3
22. Aproximadamente 81,64 cm^3.
23. Aproximadamente 251200 m^3.
24. Resposta pessoal.
25. **a)** 15,9 cm
    b) Resposta pessoal.
26. Aproximadamente 15,9 cm.

Reflita (p. 115)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 116)

Porque todas as faces são triangulares e congruentes.

Reflita (p. 125)

O raio da base; a geratriz do cone.

Tecnologias digitais (p. 133)

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. **a)** Resposta pessoal.
   b) A relação se mantém verdadeira.
   c) A medida de volume do cone será igual a um terço da medida de volume do cilindro. Exemplos pessoais.
4. As peças com formato de cone, pois têm menor medida de área total se comparadas às peças com formato de pirâmide.
5. Resposta pessoal.

Capítulo 4

Situações-problema

1. **a)** O corte deve passar pelo centro da melancia para dividi-la em 2 partes de mesmo tamanho.
   b) Sim, afastando o corte do centro da melancia.
   c) Resposta pessoal. 140π cm^2.
   d) Resposta pessoal.
2. **a)** Resposta pessoal.
   b) Na superfície esférica, o formato é de cunha esférica e, na planificada, é de uma região retangular.
   c) As regiões não têm as mesmas medidas de comprimento. As maiores distorções ocorrem nas regiões próximas aos polos e as menores distorções, nas regiões próximas à linha do equador.

Atividades

1. 36π cm^3
2. $\frac{64\pi}{9}$ cm^3
3. Aproximadamente 152,60 m^3/h.
4. $R = 4\sqrt[3]{2}$ cm; $A = 64\pi\sqrt[3]{4}$ cm^2.
5. 48π cm^3
6. 3π cm^2
7. 9,6 m^2
8. Aproximadamente 2,8 m^3.
9. Alternativa **b**.
10. Alternativa **e**.
11. Alternativa **a**.
12. Alternativa **c**.
13. Aproximadamente 26167 cm^3.
14. Alternativa **b**.
15. Alternativa **d**.
16. Alternativa **c**.
17. Ele chegará no dia 22 de abril, às 5 horas.
18. Alternativa **e**.
19. Alternativa **d**.
20. Alternativa **c**.
21. Alternativa **b**.
22. Alternativa **a**.
23. **a)** Resposta pessoal.
    b) Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 140)

1. $V = \frac{Sh}{3} = \frac{SR}{3}$
2. $A = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$
3. $V = \frac{1}{3}S_1R + \frac{1}{3}S_2R + \ldots + \frac{1}{3}S_nR$
4. Sim. $V = \frac{1}{3}R(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3}RA$.
5. $A = 4\pi R^2$

Tecnologias digitais (p. 148)

1. A Índia tem medida de área 441514 km^2 maior do que a do Cazaquistão.
2. A Groenlândia; a Rússia.
3. Sofrem maiores deformações de medida de área e de medida de abertura de ângulo.
4. Canadá, China, Argentina e Finlândia.

Enem e vestibulares (p. 153)

1. Alternativa **e**.
2. Alternativa **d**.
3. Alternativa **c**.
4. Alternativa **d**.
5. Alternativa **b**.
6. Alternativa **a**.
7. Alternativa **d**.
8. Alternativa **c**.
9. Alternativa **e**.

Unidade 3

Abertura

- Respostas pessoais.

Capítulo 1

Situação-problema

a) Resposta pessoal.

b) Para ajustar a imagem na tela, é preciso haver cortes nas extremidades da imagem ou então haverá distorção, deixando-a esticada ou encolhida. A proporção na imagem não é mantida.

Atividades

1. a) Sim, pois a constante de proporcionalidade ou razão de semelhança é 2.

b) Sim. Como os hexágonos são regulares, os ângulos são congruentes: todos os ângulos internos de ambos os hexágonos medem 120°. Logo, os ângulos correspondentes são congruentes.

c) Sim.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

4. 305 cm ou 3,05 m.

5. a) Respostas pessoais.

b) Resposta pessoal.

6. 24 m

7. 16 m

8. Os triângulos *AHD* e *CDH* são congruentes pelo caso LAL e os triângulos *HIJ* e *CFG* são congruentes pelo caso LLL.

9. 6 km

10. Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 159)

1. a) $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$ e $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2,5}$ e $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{1}{2,5}$

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

Reflita (p. 163)

Porque em polígonos regulares os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

Explore para descobrir (p. 163)

- **a)** 1,2

b) 1,2

c) 1,2

d) Respostas pessoais.

Reflita (p. 164)

$k = 1,2$

Conexões (p. 168)

Respostas pessoais.

Capítulo 2

Situação-problema

a) Essa medida corresponde a $\frac{1}{20}$ ou 0,05 da medida real, pois 6 m = = 600 cm e $\frac{30}{600} = \frac{1}{20} = 0,05$.

b) Como as medidas de comprimento devem ser proporcionais, a medida de altura no croqui deve ser 3,75 cm, pois $0,05 \cdot 75 = 3,75$.

Atividades

1. $x = 9$ cm, $y = \frac{36}{5}$ cm, $w = \frac{27}{5}$ cm e $z = \frac{48}{5}$ cm.

2. $b = 10\sqrt{3}$ cm, $c = 10$ cm e $h = 5\sqrt{3}$ cm.

3. $c = \frac{3\sqrt{14}}{5}$ cm, $r = 5$ cm, $x = 1,4$ cm e $y = 3,6$ cm.

4. 6 cm e 8 cm.

5. $10\sqrt{41}$ km ou, aproximadamente, 64 km.

6. Alternativa **d**.

7. Aproximadamente 211,5 pm.

8. Alternativa **c**.

9. Alternativa **e**.

10. 4,1 m

11. Resposta pessoal.

12. a) Aproximadamente 11,7 m.

b) R$ 10,00

c) Resposta pessoal.

13. a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{3}{5}$

f) $\frac{4}{3}$

14. Sim.

15. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

16. a) $\operatorname{sen} \hat{G} = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\cos \hat{G} = \frac{5}{6}$ e $\tan \hat{G} = \frac{\sqrt{11}}{5}$.

b) $EG = 25$ cm e $EF = 5\sqrt{11}$ cm.

c)
- 1
- $\frac{5\sqrt{11}}{11}$
- 1
- $\frac{\sqrt{11}}{5}$

17. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

18. $\tan \alpha = \sqrt{15}$

19. a) $\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 45° = 1$.

b) $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$; $\tan 60° = \sqrt{3}$.

d)

Medida de abertura	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

e)

Medida de abertura	30°	45°	60°
sen	0,5	0,707	0,866
cos	0,866	0,707	0,5
tan	0,577	1	1,732

20. sen 40° ≃ 0,643, cos 40° ≃ 0,766 e tan 40° ≃ 0,839.

21. Sim.

22. Resposta pessoal.

23. Respostas pessoais.

24. a) $\beta = 30°$

b) $\beta \simeq 37°$

25. a) $x \simeq 8{,}51$ dm

b) $x = 13{,}23$ m e $y \simeq 12{,}44$ m.

26. a) 8 m

b) 30°

27. $(150 + 50\sqrt{3})$ m ou, aproximadamente, 236,6 m.

28. $\left(\frac{100\sqrt{3}}{3} + 1{,}70\right)$ m ou, aproximadamente, 59,4 m.

29. a) Aproximadamente 5,04 m.

b) Resposta pessoal.

30. Aproximadamente 50,4 m.

31. Aproximadamente 22 m.

32. $n_B = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $n_B \simeq 1{,}225$.

33. Resposta pessoal.

34. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou, aproximadamente, 0,707.

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou, aproximadamente, −0,707.

c) $\frac{1}{2}$ ou 0,5.

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou, aproximadamente, −0,866.

35. a) 0

b) 0

36. a) $x = 100\sqrt{2}$ cm ou $x \simeq 141{,}42$ cm.

b) $x = 2\sqrt{3}$ cm ou $x \simeq 3{,}46$ cm.

c) $x = 5\sqrt{3}$ cm ou $x \simeq 8{,}66$ cm.

d) $x = 4\sqrt{2}$ cm ou $x \simeq 5{,}66$ cm.

37. $a = \sqrt{2}$ cm ou $a \simeq 1{,}41$ cm.

38. $\alpha = 62°$, $x \simeq 4{,}13$ cm e $y \simeq 4{,}76$ cm.

39. Aproximadamente 5,459 km.

40. Aproximadamente 111,6 km.

41. Resposta pessoal.

42. a) Aproximadamente 28,28 m.

b) Resposta pessoal.

43. A medida de distância entre o Sol e a Terra é 390 vezes maior do que a medida de distância entre a Lua e a Terra.

44. a) $x = \sqrt{7}$ cm

b) $x = 7$ cm

c) Não é possível calcular o valor de x apenas com as medidas dadas.

45. a) $a = \sqrt{3}$ cm

46. $AB = 4$ cm

47. $\cos \alpha = \frac{1}{9}$

48. 14 cm

49. $BC = 2\sqrt{17}$ cm

50. $2\sqrt{39}$ cm e $2\sqrt{109}$ cm.

51. Alternativa **d**.

52. Alternativa **a**.

53. a) Aproximadamente 176 km.

b) Aproximadamente 131 km.

54. Aproximadamente 4,09 m.

55. Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 176)

1. Sim, pois têm um ângulo comum e um ângulo reto; então, pelo caso AA, são semelhantes.

2. a) $\sqrt{5}$ m, $2\sqrt{5}$ m, $4\sqrt{5}$ m e $6\sqrt{5}$ m.

b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ em todos os triângulos.

c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ em todos os triângulos.

d) $\frac{1}{2}$ em todos os triângulos.

3. Resposta pessoal.

Reflita (p. 178)

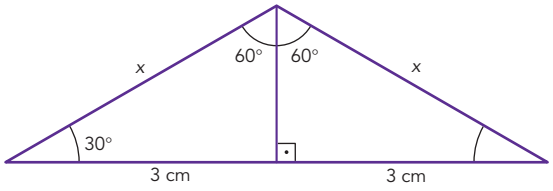
Respostas pessoais.

Reflita (p. 190)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 191)

Como a altura relativa à base de um triângulo isósceles é também mediana do triângulo e bissetriz do ângulo interno oposto à base, temos que a altura determina 2 triângulos retângulos congruentes.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Então, podemos calcular a medida de comprimento dos lados congruentes utilizando razões trigonométricas. Por exemplo:

$$\cos 30° = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Logo, a medida de comprimento dos lados congruentes é $2\sqrt{3}$ cm ou, aproximadamente, 3,46 cm.

Reflita (p. 196)

Resposta pessoal.

Ampliando o problema (p. 198)

Aproximadamente 22,12 cm.

Conexões (p. 186)

1. Resposta pessoal.

2. Significa que o canto da parede deve ser formado por um ângulo reto.

3. Eles utilizam uma linha sobre o terreno em que a casa será construída e ajustam os adobes em relação a essa linha. Existe um esquadro de alumínio muito utilizado por pedreiros, no formato da letra L, justamente para ser posicionado sobre os tijolos e verificar se eles formam um ângulo de medida de abertura 90° entre si.

Capítulo 3

Situação-problema

a) Ponto *D*.

b) Ponto *J*.

c) Ponto *B*.

d) 120° no sentido horário ou 240° no sentido anti-horário.

Atividades

1. a) $\frac{\pi}{4}$ rad

b) $\frac{7\pi}{6}$ rad

c) $\frac{5\pi}{3}$ rad

d) $\frac{3\pi}{4}$ rad

e) 30°

f) 150°

g) 225°

h) 240°

2. 5 rad

3. $\frac{\pi}{2}$ cm ou, aproximadamente, 1,57 cm.

4. a) 1,2 rad

b) $\frac{2\pi}{3}$

5. 5π cm ou, aproximadamente, 15,7 cm.

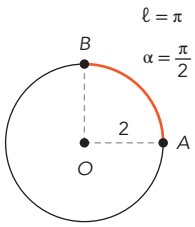
6. a) 200 gr; 400 gr.

b) $\frac{200}{\pi}$ gr

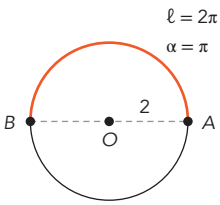
c) 0,9°

7. Alternativa **b**.

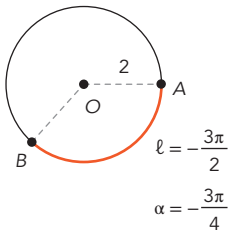
8. a)



b)

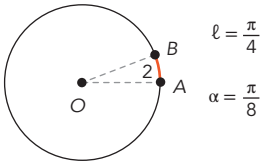


c)



Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora

d)



WYM Design/Arquivo da editora

9. a) $60° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) $120° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\frac{5\pi}{4}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

d) $\frac{11\pi}{6}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

10. a) $\frac{\pi}{6}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\frac{\pi}{4}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\frac{2\pi}{3}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

d) $-\frac{\pi}{3}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

11. a) 60°

b) 60°

c) 320°

d) $\frac{3\pi}{2}$ rad

e) $\frac{4\pi}{3}$ rad

f) $\frac{\pi}{2}$ rad

12. a) 315°

b) $\frac{\pi}{2}$ cm

c) 130°

d) $\frac{2\pi}{3}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

13. 3 voltas e meia.

14. a) 0,5

b) Aproximadamente −0,951.

c) 0,5

d) 1

e) Aproximadamente −0,985.

15. a) $x = \frac{3\pi}{2}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) $x = \frac{\pi}{4}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

c) $x = \frac{7\pi}{6}$ rad + $2k\pi$ rad ou $x = \frac{11\pi}{6}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

d) $x = k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

Reflita (p. 203)

Sim, pois as medidas angulares são iguais à medida de abertura do ângulo central, que é o mesmo. Não, pois as medidas de comprimento dos arcos dependem da medida de comprimento do raio da circunferência.

Reflita (p. 204)

Aproximadamente 57°.

Explore para descobrir (p. 204)

1. $\frac{\pi}{2}$ cm

2. $\frac{\pi}{4}$ cm

3. Sim. Resposta pessoal.

4. Sim. Sim. Resposta pessoal.

Reflita (p. 209)

$B(0, 1)$; $A'(-1, 0)$ e $B'(0, -1)$.

Reflita (p. 211)

Os arcos de medidas angulares 45° e 765° ou $\frac{\pi}{4}$ rad e $\frac{17\pi}{4}$ rad.

Reflita (p. 212)

Número não negativo é o mesmo que número positivo ou zero. A primeira determinação positiva de um arco deve ter medida angular positiva ou zero.

Ampliando o problema (p. 213)

$\frac{\pi}{2}$ rad

Capítulo 4

Situação-problema

a) 2 s

b) 60

Atividades

1. a) $f(\pi) = 0$

$g(\pi) = -1$

$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$g\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$.

c) Não. Justificativa pessoal.

2. a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

b) $g(\pi) = 2$

c) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $D(g) = \mathbb{R}$

e) $Im(g) = [0, 2]$

3. a) $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = [-1, 1]$, $p = \frac{2\pi}{3}$, amplitude 1.

b) $D(h) = \mathbb{R}$, $Im(h) = [-2, 2]$, $p = 2\pi$, amplitude 2.

4. Respostas pessoais.

5. a) $\frac{2\pi}{7}$

b) π

c) π

d) 2

6. a) −9 e −11.

b) 16 e −4.

c) 4 e 1.

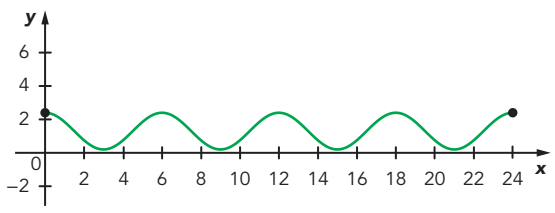
7. Deslocando o gráfico da função seno em 10 unidades para baixo.

8. Resposta pessoal.

9. 30 m

10. a) 2,4 m e 0,2 m.

b)



WYM Design/Arquivo da editora

c) Resposta pessoal.

11. 4 s

12. 130 mmHg

13. a) 3,5 L

b) 2,5 L

c) 5 s

14. Alternativa **a**.

15. Nos dias 5 e 20.

16. 127 m

17. a) Uma função com amplitude maior corresponde a uma onda sonora com intensidade maior (volume mais alto do som).

b) Uma função com período menor corresponde a uma onda sonora com maior frequência (som mais agudo).

18. Alternativa **a**.

19. Alternativa **d**.

20. Alternativa **a**.

21. Alternativa **b**.

22. Alternativa **b**.

23. Alternativa **a**.

24. Resposta pessoal.

Reflita (p. 227)

$x = 0 + 2k\pi \Rightarrow \text{sen } x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \text{sen } x = 1$; $x = \pi + 2k\pi \Rightarrow \text{sen } x = 0$; $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \text{sen } x = -1$.

Reflita (p. 230)

$x = 0 + 2k\pi \Rightarrow \cos x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \cos x = 0$; $x = \pi + 2k\pi \Rightarrow \cos x = -1$; $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \cos x = 0$.

Reflita (p. 232)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 233)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 233)

Resposta pessoal.

Tecnologias digitais (p. 235)

1. 2 pontos.

2. Respostas pessoais.

Enem e vestibulares (p. 245)

1. Alternativa **b**.

2. Alternativa **c.**

3. Alternativa **d**.

4. Alternativa **c**.

5. Alternativa **d.**

6. Alternativa **b.**

7. Alternativa **a.**

8. $h = 2\sqrt{3} + 7$ m

Unidade 4

Abertura

- Respostas pessoais.

Capítulo 1

Situação-problema

a)

Notas de Augusto

Disciplina \ Prova	A	B	C
Língua Portuguesa	8	9	10
Geografia	9	7	10
Biologia	8	8	9

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Em Língua Portuguesa. Resposta pessoal.

c)

Notas de Gustavo

Disciplina \ Prova	A	B	C
Língua Portuguesa	7	5	8
Geografia	6	6	6
Biologia	9	7	8

Dados elaborados para fins didáticos.

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Atividades

1. $a_{11} = 2$; $a_{22} = -5$ e $a_{13} = 10$.

2. a) Tomate e alface; tomate e cebola; couve e alface; cebola e alface.

b) Porque representam a combinação de cada planta com ela própria, o que sempre é um cultivo favorável.

3. a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 6 \\ 17 & 16 \\ 31 & 30 \end{pmatrix}$

4. 18

5. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $a = 6$; $b = 3$; $c = -4$; $d = -2$.

7. $m = 0$; $n = 1$.

8. $a = 1$; $b = 0$; $c = \frac{1}{3}$.

9. a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

10. $A + B = B + A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$

11. a) $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -12 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 20 & 6 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

13. $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -10 & 7 \end{pmatrix}$

14. a) $A^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

c) $C^t = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $D^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

15. a) $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

16. a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 29 \end{pmatrix}$

17. a) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

18. a) $A = \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 67 & 89 \\ 122 & 104 \end{pmatrix}$

c) $A + B = \begin{pmatrix} 90 & 110 \\ 150 & 140 \end{pmatrix}$; quantidade de *downloads* dos 2 jogos nos 2 dias.

d) $A - B = \begin{pmatrix} 44 & 68 \\ 94 & 68 \end{pmatrix}$; quantidade de *downloads* feita a mais no dia 24 de outubro em relação à quantidade do dia 23 de outubro.

e) $C = 0{,}1 \cdot (A + B)$

19. a) Verdadeira, pois a quantidade de colunas de A é igual à quantidade de linhas de B.

b) Verdadeira, pois a quantidade de colunas de A é igual à quantidade de linhas de B.

c) Falsa, pois a quantidade de colunas de A é diferente da quantidade de linhas de B.

d) Verdadeira, pois a quantidade de linhas de A é igual à quantidade de linhas do produto AB, e a quantidade de colunas de B é igual à quantidade de colunas do produto AB.

20. a) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

22. a) $AB = BA$. Falsa, pois na atividade **20** temos $AB \neq BA$.

b) Falsa, pois na atividade **21** temos $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $AB = 0$.

23. a) $\begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$

24. Analisando os resultados, temos que a igualdade não é válida, pois $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$.

25. a) A

b) A

26. a) $\begin{pmatrix} 17 & 39 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 15 & 0 \\ 12 & 30 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 29 & 24 \\ 23 & 22 \\ 26 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 24 & 9 & 27 \\ 4 & 13 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -3 & 17 \\ -7 & -8 \\ 9 & 26 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 59 & 12 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

27. 215 eixos em janeiro e 154 em fevereiro; 430 rodas em janeiro e 308 em fevereiro.

28. a) $C = \begin{pmatrix} 27 \\ 17 \\ 22 \end{pmatrix}$

b) O custo total, em reais, de cada *kit*.

c) Resposta pessoal.

29. a) 10

b) 2

c) 0

d) $a^2 - b^2$

30. a) 57

b) 1

c) $ab - a^2$

d) −24

e) −413

f) 280

31. a) 1

b) 1

32. a) 0

b) 0

c) 0

d) 0

33. Alternativa **b**.

34. a) 2

b) 2

c) 3

d) −18

e) 5

f) 6

g) 6

35. −40

36. a) $S = \{6\}$

b) $S = \{1, 2\}$

37. a) 10

b) 25

c) 8

Reflita (p. 251)

$$\begin{pmatrix} 20\,000 & 15\,000 & 16\,000 \\ 32\,000 & 18\,000 & 17\,000 \\ 45\,000 & 25\,000 & 23\,000 \end{pmatrix}$$

Explore para descobrir (p. 252)

1. $a_{13} = 5$, $a_{24} = 0$ e $a_{32} = -2$.

2. $a_{23} = 10$ e $a_{31} = 6$.

3. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Reflita (p. 256)

Analisando os dados da tabela de vendas do 1º bimestre, temos que Paulo vendeu mais geladeiras e Rodolfo vendeu mais fogões; portanto, foram eles os melhores vendedores desses produtos.

Reflita (p. 257)

Mariana.

Reflita (p. 258)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 259)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 260)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 261)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 262)

Cada elemento de AB é obtido por meio da multiplicação ordenada dos elementos da linha i da matriz A pelos elementos da coluna j da matriz B, e pela adição dos produtos obtidos.

Reflita (p. 263)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 263)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 267)

Resposta pessoal.

Conexões (p. 271)

1.



Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

Capítulo 2

Situação-problema

a) Resposta pessoal.

b) É possível determinar o valor de cada elemento com base nas 3 primeiras linhas. O valor do cavalo é 10, o do chapéu é 2 e o da bota é 2.

c) $z + x \cdot y = 2 + 10 \cdot 2 = 22$

Atividades

1. a) Linear.
b) Linear.
c) Linear.
d) Não linear.
e) Não linear.
f) Linear.
g) Não linear.
h) Não linear.

2. a) Sim.
b) Não.
c) Sim.
d) Sim.

3. $k = 2$

4. $k = 3$

5. a) Sim.
b) Sim.
c) Não.

6. a) $S = \{(3, 2)\}$
b) $S = \{(-2, 4)\}$
c) $S = \{(-1, 3)\}$
d) $S = \{(3, 3, 1)\}$

7. Resposta pessoal.

8. Resposta pessoal.

9. Alternativa **d**.

10. Alternativa **d**.

11. a) $a = 1$, $b = 5$, $c = 3$ e $d = 4$; $C_3H_8 + 5 \cdot O_2 \rightarrow 3 \cdot CO_2 + 4 \cdot H_2O$.
b) Resposta pessoal.

12. a) $S = \varnothing$; sistema linear impossível.
b) $S = \{(-2, 3)\}$; sistema linear possível e determinado.
c) $S = \left\{\left(\alpha, \frac{\alpha - 3}{2}\right)\right\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$; sistema linear possível e indeterminado.

13. Resposta pessoal.

14. 40 °C

15. a) Sistema linear possível e determinado, e $S = \{(4, -1, -3)\}$.
b) Sistema linear impossível, e $S = \varnothing$.
c) Sistema linear possível e indeterminado, e $S = \left\{\left(\frac{k + 2}{3}, k, k\right)\right\}$, com $k \in \mathbb{R}$.
d) Sistema linear possível e determinado, e $S = \{(-1, 4, 3, -2)\}$.
e) Sistema linear possível e indeterminado, e $S = \{(2 - 2\alpha, \alpha, \beta, \beta)\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.
f) Sistema linear possível e determinado, e $S = \left\{\left(\frac{17}{6}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

16. a) Sim.
b) Não.
c) Não.

17. Sim, pois os 2 sistemas lineares têm como conjunto solução $S = \{(4, 3)\}$.

18. a) Sistema linear possível e determinado, e $S = \{(1, -1, 2)\}$.
b) Sistema linear possível e indeterminado, e $S = \{(14k, -9k, k)\}$, com $k \in \mathbb{R}$.
c) Sistema impossível e $S = \varnothing$.

19. Alternativa **c**.

20. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.

21. a) $\begin{cases} A = T + 500 \\ T = 2L \\ A + T + L = 2\,000 \end{cases}$

b) R$ 1.100,00 com alimentos, R$ 600,00 com transporte e R$ 300,00 com lazer.
c) Resposta pessoal.

22. R$ 16,00

23. a) 96 ingressos.
b) Resposta pessoal.

24. a) 70 km/h
b) Resposta pessoal.

25. a) R$ 1.485,00
b) Resposta pessoal.

26. Resposta pessoal.

27. $S = \{(3\alpha, 2\alpha, \alpha, 3\alpha)\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

28. a) 16 cédulas.
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.

29. a) Significa que um sistema linear homogêneo será possível e determinado, quando $a_n \neq 0$, ou possível e indeterminado, quando $a_n = 0$.
b) Resposta pessoal.
c) Sim. Resposta pessoal.
d) São retas concorrentes que se intersectam no ponto (0, 0), a origem do plano cartesiano.
e) $S = \{(-\alpha, \alpha, 0)\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Esse sistema linear é possível e indeterminado.

30. a) Para $m \neq -16$, o sistema linear é possível e determinado; para $m = -16$, o sistema é impossível.
b) Para $k = 9$, o sistema linear é possível e indeterminado; para $k \neq -9$, o sistema é impossível.

Reflita (p. 273)

As equações não são lineares porque não podem ser escritas na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$.

Explore para descobrir (p. 277)

a) $x = 4$
b) $x = 0$
c) x pode ser qualquer número real.
d) Não existe número real que, multiplicado por 0, resulte no número 5.

Reflita (p. 278)

A incógnita z na 1ª equação, as incógnitas x ou y na 2ª equação ou as incógnitas y ou z na 3ª equação.

Reflita (p. 278)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 279)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 280)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 284)

As equações do sistema linear são equivalentes.

Explore para descobrir (p. 287)

1. 4, 3, 2 e 1 incógnitas, nessa ordem.
2. Sim, $t = 3$.
3. $S = \{(5, -1, 1, 3)\}$

Tecnologias digitais (p. 286)

1. **a)** As retas são concorrentes; o ponto de intersecção existe e tem coordenadas (1,5; 2,5); o sistema linear é possível e determinado.
   b) As retas são paralelas distintas; o sistema linear é impossível.
   c) As retas são coincidentes; o sistema linear é possível e indeterminado.

Enem e vestibulares (p. 299)

1. Alternativa **e**.
2. Alternativa **b**.
3. Alternativa **b**.
4. Alternativa **d**.
5. Alternativa **a**.
6. Alternativa **b**.
7. Alternativa **d**.
8. Alternativa **b**.
9. Alternativa **b**.
10. Alternativa **a**.
11. Ana: 40 anos; Carla: 20 anos; Bianca: 30 anos.

Lista de siglas

EEAR-SP: Escola de Especialistas de Aeronáutica
Enem: Exame Nacional do Ensino Médio
ESA: Escola de Sargentos das Armas
Etec-SP: Escola Técnica Estadual (São Paulo)
FCMSCSP: Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo
FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
Ficsae-SP: Faculdade Israelita de Ciências da Saúde Albert Einstein (São Paulo)
FMABC-SP: Faculdade de Medicina do ABC (São Paulo)
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)
IFG-GO: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
IFMT: Instituto Federal de Mato Grosso
IFRS: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul
Uece: Universidade Estadual do Ceará
UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás
Uerj: Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFGD-MS: Universidade Federal da Grande Dourados (Mato Grosso do Sul)
UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora (Minas Gerais)
UFJF/Pism-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora/Programa de Ingresso Seletivo Misto (Minas Gerais)
UFMS: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFPR: Universidade Federal do Paraná
UFU-MG: Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)
Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (São Paulo)
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
Unifimes-GO: Centro Universitário de Mineiros (Goiás)
Unig-RJ: Universidade Iguaçu (Rio de Janeiro)
Unisc-RS: Universidade de Santa Cruz do Sul (Rio Grande do Sul)
UPE: Universidade de Pernambuco
UPM-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie (São Paulo)
Vunesp: Fundação para o Vestibular da Unesp (São Paulo)

Referências bibliográficas comentadas

Para a concepção desta coleção, diversos livros, artigos científicos, documentos oficiais do governo, revistas científicas, dissertações e *sites* foram consultados de modo a trazer materiais atualizados e que visam dar suporte às aprendizagens previstas para o Ensino Médio. Conheça as principais referências bibliográficas deste Volume.

AMARAL, A. J. S. *Geometria esférica e cartografia*: uma proposta de estudo e atividades para o Ensino Médio. 2014. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Fluminense (UFF), Niterói, 2014.

Essa dissertação apresenta, em linguagem simples, um capítulo destinado à Cartografia, relacionando-a, sempre que possível, com a Matemática. Além da história da Cartografia, há tópicos importantes que embasaram este Volume, tais como: Projeção cônica, Projeção cilíndrica, Projeção de Mercator, Projeção de Peters, escalas, paralelos e meridianos e fuso horário.

ÁVILA, Geraldo. A Matemática e a Cartografia. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo: SBM, v. 65, 2007.

O artigo "A Matemática e a Cartografia", escrito pelo professor Geraldo Ávila e publicado nessa edição da revista, inicia descrevendo o mapa-múndi de Ptolomeu apresentado em um dos livros dele, *Geografia*. Na sequência, apresenta o geógrafo e cartógrafo Gerhard Kremmer (cujo nome latinizado, algo comum no século XVI, era Gerardus Mercator), que desenvolveu um mapa muito útil para os navegadores, a projeção de Mercator. Esse artigo foi utilizado como fonte de consulta na elaboração do tópico de Cartografia do capítulo 4 da Unidade 2 deste Volume.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

O autor apresenta e explica aspectos da História da Matemática, considerando a ordem cronológica e o local dos acontecimentos, desde a origem do conceito de número até os desenvolvimentos matemáticos do século XX. No decorrer dos capítulos, são apresentadas definições matemáticas importantes e as pessoas que trabalharam nelas. Esse livro foi utilizado como referência para dados históricos apresentados neste Volume.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://tedit.net/pot336. Acesso em: 23 ago. 2024.

Esse documento, conhecido como BNCC, determina as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem adquirir no decorrer de todos os anos da Educação Básica. Essas aprendizagens estão organizadas em competências e habilidades para estudantes de todo o país. De maneira geral, todos os Volumes desta coleção foram concebidos de acordo com as orientações da BNCC.

BRASIL. Ministério da Educação. *Computação*: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://tedit.net/93oura. Acesso em: 23 ago. 2024.

Em 2022, a BNCC foi complementada com diretrizes específicas para incluir o ensino de Computação no currículo escolar brasileiro. Esse documento, que visa promover nos estudantes o desenvolvimento de habilidades associadas ao pensamento computacional e à cultura digital, foi utilizado para a elaboração de algumas das seções e atividades presentes neste Volume.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica*. Brasília, DF: MEC, 2013. Disponível em: https://tedit.net/enrd4x. Acesso em: 23 ago. 2024.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica (DCNs) são um conjunto de definições de princípios, fundamentos e procedimentos da Educação Básica elaborado com o objetivo de orientar e assistir escolas e redes no desenvolvimento do projeto pedagógico. Essas diretrizes também fornecem subsídios para a elaboração de materiais didáticos e, por isso, foram consultadas e consideradas na elaboração desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: https://tedit.net/qhta9z. Acesso em: 23 ago. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: https://tedit.net/50cftq. Acesso em: 23 ago. 2024.

De acordo com a BNCC, os Temas Contemporâneos Transversais devem ser incorporados aos currículos e às propostas pedagógicas escolares, de preferência, de maneira transversal e integradora. Após a homologação da BNCC, visando esclarecer a inserção desses temas, esses 2 documentos foram elaborados pelo Ministério da Educação, passando a servir de referencial para a concepção desta coleção.

CASTRUCCI, B. *Geometria*: curso moderno. 2. ed. São Paulo: Livraria Nobel, 1968. v. 2.

Essa obra traz alguns tópicos relacionados à Geometria espacial, como medida de volume e medida de área da

superfície de sólidos geométricos, e alguns teoremas e as respectivas demonstrações. O livro serviu de fonte de consulta na elaboração dos conteúdos da Unidade 2 deste Volume.

CASTRUCCI, B. *Lições de Geometria plana*. 2. ed. São Paulo: Livraria Nobel, 1963.

Nesse livro, são apresentados diversos teoremas da Geometria plana e as respectivas demonstrações de modo detalhado, possibilitando que o leitor compreenda cada passo da demonstração. Esta obra serviu de fonte de consulta na elaboração dos conteúdos da Unidade 1 deste Volume.

COSTA, A. C. G. da. *Protagonismo juvenil*: adolescência, educação e participação democrática. Salvador: Fundação Odebrecht, 2000.

O autor apresenta a história do conceito de protagonismo juvenil, além de depoimentos de estudantes e de outros pesquisadores da área. No livro, ele propõe que o processo educativo seja organizado com o jovem como núcleo central – perspectiva que faz parte do projeto didático de todos os Volumes desta coleção.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 1).

O autor traz uma análise da relação entre Matemática e Etnomatemática, ressaltando a importância da Etnomatemática no ensino ocidental, além de apresentar resultados de pesquisas do mundo todo na área. Esse livro foi utilizado como referencial teórico para a concepção desta coleção.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 5. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011.

Esse livro oferece uma visão abrangente da evolução dos conceitos matemáticos no decorrer dos séculos. Destacando o desenvolvimento histórico de funções e sequências, o livro traça um panorama sobre como conceitos fundamentais se consolidaram na Matemática moderna. Além disso, o autor explora as contribuições matemáticas de diversas culturas ao longo da História. As informações apresentadas nesse livro encontram-se de maneira transversal em toda a coleção didática.

FAZENDA, I. C. A. (org.). *Didática e interdisciplinaridade*. 13. ed. Campinas: Papirus, 2008.

Esse livro explora a interdisciplinaridade não apenas como a integração de disciplinas, mas na perspectiva de buscar novos conhecimentos. É precisamente esse viés que permite utilizar a interdisciplinaridade como base na linha de formação de professores. O livro apresenta uma análise desde a década de 1970, explicitando o histórico dos estudos de interdisciplinaridade e o desenvolvimento das teorias desse campo de pesquisa até os dias atuais. A organizadora, renomada por suas contribuições no campo da educação, discute como a interdisciplinaridade pode enriquecer a prática pedagógica, facilitando a construção de conhecimentos mais significativos e contextualizados; além disso, faz um paralelo de como isso pode se refletir na formação e na prática pedagógica.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A*: funções, limites, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006.

As autoras apresentam e definem a função seno e a função cosseno, que são abordadas na Unidade 3 deste Volume. Há explicações claras e concisas a respeito de domínio, contradomínio, conjunto imagem, período e gráficos dessas funções.

KARLSON, P. A *magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.

Nesse livro, são apresentados diversos problemas, curiosidades e aspectos históricos. Assim como o livro *História da Matemática*, de Carl Boyer, é uma ótima referência histórica.

LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).

Esse livro aborda, entre outros tópicos, as funções trigonométricas, com rigor nas definições e precisão nos enunciados e nas resoluções de problemas. Há, também, a preocupação em realizar a contextualização dos problemas, de maneira a ressaltar a interdisciplinaridade da Trigonometria. Os problemas propostos serviram de inspiração na elaboração dos problemas deste Volume.

LIMA, E. L. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

Nesse livro, o autor compartilha uma série de ensaios que abordam temas fundamentais da Matemática de maneira simples, clara e agradável. Ele trata de questões básicas, como a natureza dos números e o conceito de igualdade. Esse livro é uma leitura enriquecedora tanto para professores quanto para estudantes e contém diversas reflexões filosóficas e históricas, que permearam a escrita desta coleção.

LIMA, J. C. T. *Sistemas de equações lineares na Base Nacional Comum Curricular*: uma proposta de ensino. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2020.

Essa dissertação apresenta uma breve introdução à Álgebra linear, relacionando-a às habilidades e competências de Matemática propostas na BNCC. O autor apresenta uma proposta didática para o trabalho em sala de aula com foco no desenvolvimento da habilidade EM13MAT301 e utiliza o GeoGebra na representação gráfica de sistemas lineares 2×2 e 3×3, assunto trabalhado na Unidade 4 deste Volume.

MACHADO, P. A. F. *Fundamentos de Geometria Espacial*. Belo Horizonte: Caed/UFMG, 2012.

O autor faz um breve retrospecto dos elementos primitivos e principais axiomas da Geometria espacial. Na sequência, mostra algumas propriedades do espaço, ângulos, paralelismo e perpendicularismo entre planos. A definição de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas também é apresentada nesta obra, assim como o cálculo da medida de volume desses sólidos.

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).

O livro trata desde a Geometria plana até a espacial e de conteúdos como o teorema de Euler, a classificação dos poliedros regulares e o cálculo da medida do volume de sólidos geométricos. A obra possibilita o aprofundamento desses conteúdos e permite ao leitor conhecer a argumentação lógico-dedutiva.

PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

A obra traz diversas estratégias e ferramentas fundamentais para a resolução de problemas, apresentando as 4 fases de resolução: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. O autor inicia o livro afirmando que: "Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema". Esse livro serviu de inspiração para a elaboração de situações, problemas e propostas de soluções que compõem este Volume.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: SBM, v. 8, 1986.

O artigo intitulado "De onde vêm os nomes das funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, etc.)? E por que o círculo trigonométrico tem raio 1", escrito por Elon Lages Lima, discute as conjecturas das nomenclaturas e o porquê da convenção unitária para o raio da circunferência trigonométrica.

ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

A autora apresenta, em ordem cronológica, fatos da história da Matemática de um olhar crítico, analisando mitos e lendas perpetuados por muito tempo. O livro começa abordando conceitos matemáticos desenvolvidos na Mesopotâmia, passando por Egito, Grécia, França e Alemanha.

SAFIER, F. *Pré-cálculo*. Tradução técnica Adonai Schlup Sant'Anna. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011. (Coleção Schaum).

O autor apresenta, de maneira concisa e acessível, as definições relacionadas a funções trigonométricas e gráficos. Esses conceitos e representações referenciaram a elaboração da Unidade 3 deste Volume. O livro traz, ainda, exercícios resolvidos e propostos, propiciando ao leitor um melhor entendimento e maior motivação no estudo.

SILVA, A. M. *Simetrias planas e alguns problemas de ladrilhamento*. 2013. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, 2013.

Essa dissertação apresenta as isometrias no plano (translação, rotação, reflexão e composições de isometrias), conteúdo este previsto na BNCC para os Anos Finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio. As definições e exemplos vistos na dissertação são intuitivos, o que facilita o entendimento. Além disso, o penúltimo capítulo da dissertação traz as condições necessárias para o ladrilhamento, utilizando um mesmo polígono regular e usando a composição de mais de um polígono regular, conteúdos que também foram consultados para nortear a elaboração da Unidade 1 deste Volume.

STEWART, J. *Cálculo*. Tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. II.

O livro apresenta com clareza as funções trigonométricas e os respectivos gráficos. Com rigor matemático, exemplos e atividades resolvidas, o autor fornece o aprofundamento necessário para embasar algumas habilidades essenciais para o desenvolvimento dos estudantes do Ensino Médio e, por isso, foi referencial para a elaboração da Unidade 3 deste Volume.

WING, J. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://tedit.net/g4ji9a. Acesso em: 24 ago. 2020.

Esse artigo apresenta a tradução do trabalho nomeado *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. A tradução para o português é de Cleverson Sebastião dos Anjos, professor da área de Informática do Instituto Federal do Paraná. O texto discorre sobre o percurso de ideias relacionadas aos estudos do pensamento computacional, tema atual e que é abordado em seções deste Volume, bem como em atividades no decorrer dos capítulos.

Transcrição de áudios

Podcast 1 – Medidas de área, de volume e variação de grandezas

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre medidas de área e de volume e sobre variação de grandezas.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Com o início da civilização, o ser humano precisou demarcar terras para a criação de animais, o plantio e o comércio. Para isso, precisou medir comprimentos e, consequentemente, descobriu um modo de medir superfícies e volumes. [vírgula sonora]

Podemos acreditar que, na Antiguidade, essa não devia ser uma tarefa fácil, pois, em determinadas épocas, não havia um sistema de numeração como conhecemos hoje e as técnicas para medir eram bastante rudimentares. [vírgula sonora] Porém, o ser humano desenvolveu-se e, atualmente, sabemos como medir desde o tamanho de um vírus até a área de estrelas e planetas. Incrível, não é mesmo?

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

No mundo das partículas subatômicas, medimos distâncias na escala de femtômetros (dez elevado a menos quinze metros), como o tamanho de um próton. Aumentando um pouco, chegamos aos nanômetros (dez elevado a menos nove metros), que são usados para medir moléculas e estruturas celulares.

Quando olhamos para o cosmos, as distâncias se tornam astronômicas. A unidade astronômica (UA), que é a distância média da Terra ao Sol, é cerca de um vírgula cinco vezes dez elevado a onze metros. Para medir distâncias entre estrelas, utilizamos anos-luz, em que um ano-luz é aproximadamente nove vírgula quarenta e seis vezes dez elevado a quinze metros.

Essas ordens de grandeza mostram a incrível capacidade humana de medir e compreender o Universo em escalas que variam de dez elevado a menos quinze metros a dez elevado a quinze metros, cobrindo trinta ordens de magnitude.

Com o avanço da tecnologia, os instrumentos utilizados para obter medidas de área se modernizaram. Com a ajuda de satélites, e com um simples aplicativo de celular, podemos obter áreas de sítios e fazendas ou mesmo do terreno de sua própria residência. Basta, na tela do celular, demarcar a área a ser medida, e o aplicativo faz o resto: devolve as medidas do perímetro e da área. [vírgula sonora]

E um exemplo da tecnologia aplicada a volumes? [vírgula sonora]

Por meio de funções matemáticas, um aparelho de ultrassonografia consegue calcular a quantidade de urina na bexiga de uma pessoa ou medir o volume de líquido na bolsa fetal. Dessa maneira, podemos ver que a Ciência e a Matemática trabalham a nosso favor. Os matemáticos descobrem ideias novas a cada dia.

As ideias de área e de volume são elementos frequentes na história. No comércio, por exemplo, temos embalagens cúbicas e cilíndricas de todos os tamanhos que são concebidas para melhor acomodação no seu armazenamento e transporte, a fim de chegarem com segurança às mãos do consumidor.

E agora? Vamos falar um pouco sobre proporções?

Você sabe o que são grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais? [vírgula sonora] Pois bem, vamos partir para um exemplo interessante.

Vem comigo?! [vírgula sonora]

Imagine uma caixa-d'água sendo esvaziada por meio de uma torneira. A grandeza "altura da água na caixa" é diretamente proporcional ou inversamente proporcional à grandeza "intervalo de tempo"? [vírgula sonora]

E a capacidade da caixa menos o volume da água em relação ao tempo, aumenta ou diminui? [vírgula sonora]

Bom, podemos pensar que, conforme o tempo passa, a medida altura da água na caixa diminuiu. E a medida do volume sem água da caixa? Está aumentando enquanto o tempo passa, certo? Nesse caso, as grandezas são diretamente proporcionais.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

Parece tranquilo pensarmos em exemplos do cotidiano em que utilizamos a proporção. [vírgula sonora]

Um carro que tem a medida da velocidade constante de vinte metros por segundo, em dois segundos terá percorrido uma medida de quarenta metros; em três segundos, sessenta metros, e assim por diante. E quanto o carro terá percorrido no intervalo de uma hora? [vírgula sonora] Então, fazendo as contas e sabendo que uma hora equivale a três mil e seiscentos segundos, o total percorrido será setenta e dois mil metros, ou setenta e dois quilômetros.

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Podcast 2 – Tales de Mileto

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre Tales de Mileto e sua contribuição para diversas áreas do conhecimento, não apenas matemático, como também filosófico e astronômico.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Tales de Mileto foi um filósofo, matemático e astrônomo que viveu na Grécia antiga, entre os séculos VII e VI antes de Cristo. Ele foi um dos precursores do que chamamos, hoje, de pensamento científico, por sua tentativa de desvincular os fenômenos da natureza da mitologia daquela época.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

Na Matemática, Tales estudou Geometria; em particular, os triângulos. Embora nenhum documento escrito por ele tenha sobrevivido ao tempo, tradicionalmente lhe são atribuídos alguns teoremas, como: o diâmetro divide o círculo em duas partes iguais; os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

Além da Matemática, Tales também fez contribuições significativas na Astronomia. Algumas pessoas atribuem a Tales a primeira explicação sobre os eclipses solares, por ele afirmar que a Lua era iluminada pelo Sol, além de conseguir prever um eclipse solar em 585 antes de Cristo. [Música com batuques]

Tales de Mileto também tem um teorema com seu nome, o teorema de Tales, que trata da proporção de segmentos em feixes de retas. Esse teorema surgiu quando Tales foi desafiado a determinar a medida de altura da pirâmide de Quéops, no Egito. Para tanto, ele utilizou uma vara para medir o comprimento da sombra da pirâmide ao mesmo tempo que mediu o comprimento da sombra de uma pessoa de altura conhecida. Utilizando o fato de os triângulos serem semelhantes e terem uma relação de proporcionalidade, Tales conseguiu estimar uma medida de altura de 158,8 metros para a pirâmide, sem utilizar nenhum instrumento de medição direta de comprimento. Incrível, não é mesmo?

Atualmente, sabemos que a pirâmide de Quéops possui 138,8 metros de altura, mas, originalmente, antes de sofrer os processos de corrosão com o tempo, ela foi construída com uma medida de aproximadamente 147 metros de altura, entre os anos de 2580 e 2560 antes de Cristo.

Ou seja, sem contar com nada da tecnologia que temos à nossa disposição atualmente, o cálculo de Tales de Mileto beirou a precisão. Isso nos lembra que a curiosidade e a determinação são ferramentas poderosas na busca pelo conhecimento.

Ele não apenas fez descobertas significativas, mas também estabeleceu um método de pensamento que ainda usamos atualmente. A tentativa de explicar os fenômenos naturais sem recorrer à mitologia foi um passo crucial para o desenvolvimento da Ciência. Tales mostrou que o mundo pode ser compreendido através da observação e da razão, e não apenas através de histórias e mitos. Isso abriu caminho para futuros cientistas e filósofos, que continuaram a explorar e buscar entender o mundo ao nosso redor de maneira mais sistemática e lógica.

Outro ponto interessante sobre Tales é sua influência duradoura. Seus teoremas e métodos ainda são ensinados nas escolas hoje, milhares de anos depois de sua morte. Isso mostra a importância de seu trabalho e como ele continua relevante. Estudar Tales de Mileto não é apenas aprender sobre o passado, mas também entender os fundamentos da Matemática e da Ciência que usamos hoje. É uma oportunidade de ver como o conhecimento evoluiu e como as ideias de um pensador antigo ainda podem nos ensinar muito.

Sua capacidade de observar, questionar e encontrar soluções inovadoras continua a inspirar cientistas e matemáticos até hoje. É por esses e outros motivos que seu nome é sempre lembrado, não apenas em estudos matemáticos, mas como um importante personagem da história da humanidade.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

E você, já conhecia a história de Tales de Mileto?

É claro que aqui comentamos apenas superficialmente alguns aspectos da vida dessa figura tão importante para a Matemática. Se você tiver interesse, há muito material disponível na internet para se aprofundar não apenas em sua história, mas principalmente em seus ensinamentos. Aproveite!

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Podcast 3 – Circunferência e transformações geométricas

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre circunferência e transformações geométricas.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

A circunferência, desde a Antiguidade, sempre foi uma forma geométrica que provoca curiosidade e estudo, seja por elementos como diâmetro e raio e pela razão entre eles, seja pelo cálculo da medida da área do círculo.

Mas como o homem teve contato com circunferências e círculos?

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

Bom, essa forma geométrica plana serve aos seres humanos há bastante tempo! Há muitos artefatos ou peças para a indústria que se utilizam do formato da circunferência e facilitam a nossa vida. [vírgula sonora] A roda usada em transportes: [vírgula sonora] o que faríamos sem ela? As engrenagens do maquinário de indústrias [vírgula sonora], os formatos adotados nos sistemas de ventilação [vírgula sonora], nas pizzas e assim por diante! [vírgula sonora] Bom, até existem pizzas de formato retangular, mas eu prefiro a redonda, hehehe... [vírgula sonora]

E, falando nisso, fico pensando como o pizzaiolo do meu bairro consegue dividir a *pizza* em pedaços quase do mesmo tamanho. Se pensarmos na forma geométrica plana, seria o equivalente a ele determinar cortes com medida de 45 graus. Não é legal? [vírgula sonora]

A circunferência é uma forma geométrica plana comum, mas como medimos o seu tamanho? Uma roda de caminhão é diferente de uma roda de automóvel de passeio, certo? A circunferência tem um centro, e o segmento de reta que tem extremidade nesse ponto e em um ponto qualquer da circunferência é chamado de raio. [vírgula sonora] E o segmento que passa pelo centro e tem extremidades na circunferência é chamado de diâmetro. [vírgula sonora] Então, podemos relacionar o tamanho de uma circunferência ao seu diâmetro ou ao seu raio.

Outros elementos, como ângulo central e ângulo inscrito, ajudam a solucionar problemas tanto da própria Matemática como do nosso cotidiano. [vírgula sonora]

Vou te contar uma aplicação bacana da Matemática:

- Pegue um compasso e represente uma circunferência.
- Trace um diâmetro.
- Depois, escolha um ponto da circunferência representada, mas deve ser diferente das extremidades do diâmetro.
- Represente um triângulo com as extremidades do diâmetro e o ponto que você escolheu.

Pronto! Você acabou de construir um triângulo retângulo [vírgula sonora], independente do ponto da circunferência que você tenha escolhido! Acho isso muito legal! [vírgula sonora]

Agora vamos conversar um pouquinho sobre transformações geométricas.

Você já deve ter visto o nosso satélite natural no céu, né? Sabe também que a Lua, assim como a Terra, se movimenta, certo?

Ao observar a Lua por algumas horas, perceberá que ela se move no céu. Esse pode ser considerado um exemplo de translação geométrica. [vírgula sonora]

Agora outro exemplo bem legal.

O Cruzeiro do Sul é uma constelação que pode ser vista facilmente no céu do Brasil e de todo o hemisfério Sul do planeta.

Por causa do movimento de rotação da Terra, o Cruzeiro do Sul parece girar no céu como o ponteiro de um relógio. O eixo maior da cruz sempre aponta para o sul geográfico do planeta, e, ao longo de uma noite, percebemos seu movimento de rotação ao redor desse ponto.

Olhe para o céu às 20 horas, encontre o Cruzeiro e depois olhe novamente às 23 horas. Vai ver que a figura da constelação parece ter sofrido uma rotação. Bastante interessante, né? [vírgula sonora]

Só para terminar, já ouviu falar no artista plástico Maurits Cornelis Escher? [vírgula sonora] Pois bem, ele tem uma obra vasta com muitos exemplos de reflexões, translações e rotações. Vale a pena dar uma conferida na internet.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

Bem, é isso! Foi ótimo conversar com você sobre circunferência e transformações geométricas!

Continue estudando e pegue os seus instrumentos de desenho geométrico, suas tintas e lápis de cor. Quem sabe você não tem umas ideias legais para uma obra de arte?

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Manual do Professor

Matemática e suas Tecnologias

Matemática

Apresentação

Olá, professor!

Temos enorme prazer em compartilhar com você esta coleção de Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio! Esperamos que a coleção seja uma ferramenta potente e transformadora no trabalho que você vai realizar com os estudantes. Este Manual pode auxiliá-lo no planejamento e no desenvolvimento da sua prática pedagógica.

É importante relembrar que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) veio para apontar novos caminhos para a educação brasileira, propondo que todos os estudantes tenham acesso às mesmas aprendizagens e que elas sejam desenvolvidas integrando experiências pessoais e experiências sociais aos conhecimentos adquiridos tanto no espaço escolar quanto fora dele. Portanto, é importante que todo o seu trabalho esteja alicerçado na construção colaborativa de significados para variados contextos da vida cotidiana.

É fundamental destacar, também, as recentes transformações nessa etapa da Educação Básica. O Novo Ensino Médio estabelece um modelo de ensino e aprendizagem mais participativo e colaborativo. Assim, você poderá seguir por um caminho de mediador de experiências pautadas nos princípios da interdisciplinaridade e da integração, no qual cada estudante é protagonista das próprias aprendizagens.

A integração das áreas do conhecimento, dos componentes curriculares (as disciplinas) e dos campos de saber permite aos jovens do Ensino Médio ampliar a visão de mundo e, assim, elaborar argumentos mais consistentes para se posicionarem socialmente, com pensamento crítico e criatividade. É preciso praticar e promover a escuta ativa das ideias, opiniões e vivências dos estudantes, tão imersos em uma sociedade tecnológica e dinâmica – eles curtem e compartilham muito, mas precisam aprender a sustentar as próprias opiniões.

Além disso, este é um convite para que você colabore mais com os professores de outras áreas do conhecimento e eles, com você. Todo o corpo docente precisa trocar experiências e compartilhar saberes nesse novo modelo. É tempo de escutar, compartilhar, inspirar e criar juntos.

Como trilhar esses novos caminhos? Para encontrar mais segurança nesse percurso, convidamos você a seguir conosco neste Manual, para que, juntos, possamos construir essa etapa de ensino tão importante para a vida dos jovens, o Ensino Médio!

Abraços,

Os autores.

Sumário

Orientações gerais 324

1. O Novo Ensino Médio 324
1.1. Contexto legislativo 324
1.2. Principais mudanças 325

2. A BNCC e a educação integral 326
2.1. BNCC de Ensino Médio 327
2.1.1. Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias 328
2.1.2. A BNCC nesta coleção 328
2.2. Interdisciplinaridade e Temas Contemporâneos Transversais 329
2.3. Culturas juvenis e estudantes protagonistas das aprendizagens e dos próprios projetos de vida 330
2.4. Reflexões sobre o docente como mediador 331
2.5. Educação digital 332
2.6. Educação inclusiva 333
2.7. Argumentação (oral e escrita) e leitura inferencial 333
2.8. Pluralismo de ideias e produção de análises (críticas, criativas e propositivas) 334
2.9. Pensamento computacional 335
2.10. Resolução e elaboração de problemas 335
2.11. Investigação científica e raciocínios lógico-matemáticos 336
2.12. Etnomatemática 337
2.13. Uso pedagógico de tecnologias digitais 338

3. Avaliações 338
3.1. A avaliação em Matemática 339
3.1.1. Por que avaliar? 339
3.1.2. O que avaliar? 339
3.1.3. Como avaliar? 339
3.2. Os tipos de avaliação 339
3.2.1. Avaliação diagnóstica 339
3.2.2. Avaliação formativa 340
3.2.3. Avaliação comparativa 340
3.2.4. Avaliação ipsativa 340
3.2.5. Avaliação somativa 341
3.3. Trabalhando o Enem em sala de aula: estratégias para melhorar o desempenho dos estudantes 341

4. A coleção da área de Matemática e suas Tecnologias 341
4.1. Abordagem teórico-metodológica e pressupostos da coleção 341
4.2. Estrutura da coleção 342
4.2.1. Objetos educacionais digitais da coleção 343
4.3. Sugestão de cronograma 343

5. Referências complementares para aprofundamento 345
5.1. *Sites* 345
5.2. *Podcasts* e vídeos 345
5.3. Revistas e periódicos de Educação matemática 345
5.4. Publicações sobre História da Matemática 345
5.5. Publicações sobre Educação matemática 346
5.6. Publicações sobre metodologia do ensino de Matemática 346
5.7. Publicações sobre educação 346

Orientações específicas 347

Organização e conteúdos do Volume 347
Unidade 1: Regiões planas e área 347
Unidade 2: Geometria espacial 352
Unidade 3: Trigonometria 357
Unidade 4: Matrizes, determinantes e sistemas lineares 365
Resoluções 368

Referências bibliográficas comentadas 398

Orientações gerais

1. O Novo Ensino Médio

Vivemos uma era de muitas transformações, um período em que as informações circulam muito rapidamente. Além disso, os estudantes que atualmente frequentam as escolas nasceram em um mundo conectado; logo, não dependem somente da escola e dos professores para obter novos conhecimentos; eles dispõem de recursos que lhes colocam as informações ao alcance das mãos com apenas alguns cliques. Há nas escolas uma geração de estudantes que aprendem, produzem, publicam e divulgam ideias próprias em várias plataformas e redes sociais. Todos esses novos padrões de comportamento exigem uma nova postura não somente dos professores, mas também das instituições escolares e dos materiais didáticos. A escola precisa estar preparada para esse novo estudante, que é ativo, ágil e protagonista.

A organização do ensino na Educação Básica fundamenta-se, atualmente, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que estabelece para todas as etapas – Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio – um conjunto consistente e articulado de aprendizagens essenciais. Assim, a BNCC permite superar a fragmentação das políticas educacionais, servindo de parâmetro para que tenhamos uma educação de qualidade em todas as escolas do país e em todas as etapas da Educação Básica, para todos os estudantes.

Outro ponto fundamental é a proposta do Novo Ensino Médio, instituído com a finalidade de acompanhar esses novos tempos. É essencial que a escola ajude os estudantes a selecionar, ponderar e agir com responsabilidade na sociedade em que vivemos, auxiliando-os na escolha dos próprios caminhos – tanto para aqueles que desejam seguir as trilhas acadêmicas, como o ingresso no Ensino Superior, quanto para aqueles que pretendem partir direto para o campo profissional, por meio de cursos técnicos e com a inserção no mercado de trabalho.

O Novo Ensino Médio foi oficializado com a promulgação da Lei nº 13.415, em 16 de fevereiro de 2017. Essa lei alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e estabeleceu uma série de mudanças na estrutura do Ensino Médio brasileiro. Em julho de 2024, foi sancionada a Política Nacional de Ensino Médio, estabelecendo outras novas modificações, como é o caso da mudança na carga horária, que passou para 3 000 horas, sendo 2 400 horas para o ensino dos componentes curriculares e 600 horas para os itinerários formativos.

O protagonismo juvenil é incentivado nos estudantes, principalmente pela escolha de alguns percursos formativos mais específicos – os itinerários formativos –, que visam orientá-los na construção do projeto de vida deles.



Home-stock/Adobe Stock

A intenção do Novo Ensino Médio é manter os jovens mais conectados ao futuro profissional e acadêmico que os espera, permitindo maior autonomia na construção do projeto de vida e de habilidades socioemocionais fundamentais no mundo contemporâneo.

1.1. Contexto legislativo

A determinação de uma formação básica comum alicerçada em conteúdos mínimos, conforme institui a BNCC, já havia sido vislumbrada na Constituição Federal de 1988 (artigo 210) e na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei nº 9.394/1996, artigo 9º, inciso IV). A LDB (Lei nº 9.394/1996, artigo 9º, inciso I) também previa a elaboração do Plano Nacional de Educação (PNE), estabelecendo com clareza e objetividade metas a serem atingidas – o PNE ainda está em tramitação no Congresso para o período de 2024 a 2034.

Os *sites* indicados a seguir podem ser consultados para mais informações (acesso em: 25 ago. 2024).

Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/1996).
Disponível em: https://tedit.net/g057tn.

Plano Nacional de Educação.
Disponível em: https://tedit.net/dkfgp7.

Constituição da República Federativa do Brasil de 1988.
Disponível em: https://tedit.net/qchy5g.

Esse ordenamento legal estabelece as regras a partir das quais o ensino deve ser organizado no Brasil, tanto em termos de princípios a serem seguidos quanto no que se refere às questões práticas do funcionamento das escolas e, ainda, às determinações curriculares.

No que se refere especificamente ao Ensino Médio, a Lei nº 13.415/2017, que cria o Novo Ensino Médio, alterou a LDB e outras leis e trouxe importantes mudanças. No artigo 35, a LDB estabelece que a etapa do Ensino Médio deve ter como objetivos:

I. a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II. a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III. o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV. a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. *Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional*. Constituição da República Federativa do Brasil de 1988. Brasília, DF: Presidência da República, 1996. Disponível em: https://tedit.net/ie2n21. Acesso em: 28 ago. 2024.

Analise no diagrama a seguir como se deu a evolução das propostas para o Ensino Médio.



Governo Federal/Ministério da Educação

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM), estava previsto que a implementação completa ocorresse até 2022. O governo lançou, em 2023, o projeto de Lei nº 5.230, que visava reformar o Novo Ensino Médio. O texto foi sancionado em agosto de 2024 pela Lei nº 14.945/2024.

1.2. Principais mudanças

A reforma do Novo Ensino Médio prevê que todas as escolas do país – públicas ou privadas – adotem mudanças, que vão desde a carga horária até a oferta dos componentes curriculares (as disciplinas) para a etapa final da Educação Básica. A aplicação de todas as mudanças deve ocorrer a partir de 2025, no caso de estudantes ingressantes no Ensino Médio, enquanto os que já estiverem com a etapa em curso terão um período de transição.

A essência do projeto do governo federal, que era ampliar a parcela de conteúdos da formação básica curricular, foi mantida nessa versão da Lei nº 14.945/2024. Assim os componentes curriculares tradicionais (como Língua Portuguesa, Língua Inglesa, Arte, Educação Física, Matemática, Biologia, Física, Química, Filosofia, Geografia, História e Sociologia) ficam contemplados com destaque, conforme delineado pela BNCC. E todos os componentes curriculares passam a ser obrigatórios em todos os anos do Ensino Médio; Língua Espanhola será opcional.

Pelo texto aprovado, a carga horária da formação geral básica nos 3 anos de Ensino Médio volta a ser de 2 400 horas, e outras 600 horas obrigatórias devem ser preenchidas com disciplinas dos itinerários formativos. A carga horária total será, então, de 3 000 horas, sendo 1 000 horas para cada ano, divididas em 200 dias letivos de 5 horas cada um.

Os itinerários formativos são um conjunto de disciplinas, projetos, oficinas, núcleos de estudo, entre outras situações de trabalho, que os estudantes podem escolher no Ensino Médio a fim de aprofundar os estudos de uma área do conhecimento (Matemática e suas Tecnologias, Linguagens e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias ou Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e da Formação Técnica e Profissional (FTP) ou mesmo nos conhecimentos de 2 ou mais áreas e da FTP. Cada escola deve ofertar pelo menos 2 itinerários formativos, com exceção das escolas que oferecem Ensino Técnico. As redes de ensino têm autonomia para definir quais itinerários formativos vão ofertar, considerando um processo que envolva a participação de toda a comunidade escolar.

Jose Calsina/Adobe Stock



No Novo Ensino Médio, o protagonismo juvenil é incentivado nos estudantes principalmente pelo estímulo e pela orientação para a construção de projeto de vida.

Outra opção de escolha para os estudantes é o Ensino Técnico, sendo previstas, nesse caso, 2100 horas para os componentes curriculares obrigatórios, com 300 horas podendo ser destinadas a conteúdos da BNCC relacionados à formação técnica, e até 1200 horas para o Ensino Técnico (itinerários formativos técnicos).

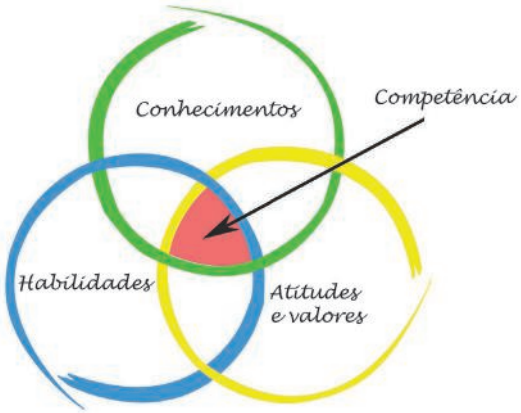
O texto da Lei estabelece que a carga horária da formação geral básica dos estudantes deve ser oferecida presencialmente. Porém, há uma proposta de ensino à distância e outra de ensino noturno, estipulada no texto, que obriga os estados a manterem, em todas as cidades, ao menos uma escola da rede pública com Ensino Médio no período noturno, se houver demanda comprovada para isso.

2. A BNCC e a educação integral

A BNCC estabelece o que cada estudante precisa aprender em cada etapa da Educação Básica, ano a ano ou a cada bloco de anos, estipulando, assim, um patamar de qualidade na educação em todo o país. A intenção é proporcionar um alinhamento de todo o sistema educacional em torno de um texto curricular de base capaz de gerar ações coordenadas para a formação e a capacitação dos professores, a troca de experiências bem-sucedidas entre docentes, escolas e redes, a produção de materiais didáticos e a elaboração de avaliações padronizadas que meçam os avanços educacionais.

Pretendendo promover uma educação de qualidade com equidade, a BNCC foi construída a partir de critérios em torno de competências e habilidades de que os estudantes necessitam para o pleno desenvolvimento na sociedade do século XXI.

A educação por competências preconiza a visão integrada do conhecimento, em que se combinam conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para o desenvolvimento integral do estudante no processo de ensino e de aprendizagem: o conhecimento ("saber") precisa estar vinculado às habilidades ("saber fazer"), às atitudes e aos valores ("saber ser").



Dmitry/Adobe Stock

A BNCC define competências como:

> [...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 2018a, p. 8).

Portanto, o desenvolvimento de uma competência possibilita ao estudante mobilizar múltiplos recursos pessoais (conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, emoções, entre outros) para obter respostas satisfatórias a diferentes problemas.

E qual é a diferença entre as competências e as habilidades apresentadas na BNCC? De maneira simples, consideramos que a Educação Básica deve assegurar o desenvolvimento de competências gerais, que transpassam as áreas do conhecimento e confluem para a formação cidadã. Para que isso aconteça, cada área do conhecimento contribui com competências específicas, relacionadas à aplicação de cada área na resolução de problemas da vida cotidiana e na compreensão e atuação no mundo. Essas competências específicas podem ser desenvolvidas por meio do trabalho com as habilidades (sempre iniciadas com um verbo que indica a ação do estudante na aprendizagem) que estão diretamente relacionadas aos objetos do conhecimento considerados essenciais na construção do aprendizado.

Desse modo, as competências específicas e as habilidades, de maneira integrada entre as áreas do conhecimento e com os Temas Contemporâneos Transversais, contribuem para o desenvolvimento das competências gerais, que visam à formação integral dos estudantes.

2.1. BNCC de Ensino Médio

A BNCC – Etapa Ensino Médio é parte integrante da BNCC e apresenta um conjunto de orientações que deve nortear os currículos das escolas públicas e das escolas privadas de Ensino Médio de todo o Brasil. O documento tem como pretensão promover a elevação da qualidade do ensino no país, por meio de uma referência comum obrigatória para todas as escolas de Educação Básica, respeitando a autonomia assegurada pela Constituição aos entes federados e às escolas.

O texto legal enfatiza os principais objetivos para o Ensino Médio.

> Garantir a **consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos** no Ensino Fundamental é essencial nessa etapa final da Educação Básica. Além de possibilitar o prosseguimento dos estudos a todos aqueles que assim o desejarem, o Ensino Médio deve atender às necessidades de formação geral indispensáveis ao exercício da cidadania e construir "aprendizagens sintonizadas com as **necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes** e, também, com os **desafios da sociedade contemporânea**", como definido na Introdução desta BNCC (p. 14; ênfases adicionadas) (Brasil, 2018a, p. 464-465).

Para que essa finalidade seja alcançada, a BNCC ressalta que é preciso que a escola acolha as juventudes. Faz parte desse acolhimento à diversidade:

> [...] favorecer a atribuição de sentido às aprendizagens, por sua vinculação aos desafios da realidade e pela explicitação dos contextos de produção e circulação dos conhecimentos. (Brasil, 2018a, p. 465).

E para que se possa construir conhecimentos relevantes de maneira sólida, é fundamental considerar a contextualização dos objetos do conhecimento, com respeito às realidades e à história de produção deles.

Além das 10 competências gerais da Educação Básica, a BNCC – Etapa Ensino Médio está organizada por áreas do conhecimento, com a finalidade de integrar 2 ou mais componentes curriculares (disciplinas), de modo a permitir aos estudantes melhor compreender e transformar uma realidade complexa.

> Cada área do conhecimento estabelece competências específicas de área, cujo desenvolvimento deve ser promovido ao longo dessa etapa, tanto no âmbito da BNCC como dos itinerários formativos das diferentes áreas. Essas competências explicitam como as competências gerais da Educação Básica se expressam nas áreas. Elas estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes do Ensino Médio (Brasil, 2018a, p. 33).

Assim, as áreas do conhecimento e os respectivos componentes curriculares destacados são:

- Linguagens e suas Tecnologias: Arte, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa;
- Matemática e suas Tecnologias: Matemática;
- Ciências da Natureza: Biologia, Física e Química;
- Ciências Humanas e Sociais Aplicadas: História, Geografia, Sociologia e Filosofia.

É interessante ressaltar que:

> [...] essa estrutura adota a **flexibilidade** como princípio de **organização curricular**, o que permite a construção de currículos e propostas pedagógicas que atendam mais adequadamente às especificidades locais e à multiplicidade de interesses dos estudantes, estimulando o exercício do **protagonismo juvenil** e fortalecendo o desenvolvimento de seus projetos de vida (Brasil, 2018a, p. 468).

Assim, a organização do trabalho em sala de aula, pela combinação da perspectiva da competência específica com o ponto de vista da habilidade, é fator primordial para que os estudantes consigam desenvolver os objetivos de aprendizagem esperados.

A partir dessa normativa válida para todo o Brasil, cada estado pode construir o próprio documento curricular. Em diálogo com as redes de ensino públicas e as redes de ensino privadas, os currículos estaduais visam contemplar aspectos das demandas e especificidades sociais, econômicas, regionais, culturais e históricas das próprias regiões.

Assim, é oportuno e recomendável considerar adaptações dos materiais didáticos ao planejamento pedagógico, considerando sua autonomia como professor, bem como o currículo estadual instituído, o Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola e as necessidades e vontades específicas dos estudantes.

Mais sobre o assunto

O material *Dimensões e Desenvolvimento das Competências Gerais da BNCC* foi elaborado pelo Movimento pela Base, grupo não governamental e apartidário de pessoas, organizações e entidades que se empenham na implementação da BNCC e do Novo Ensino Médio. Recomendamos a leitura desse material, que apresenta a descrição de cada uma das competências gerais, bem como das dimensões e das subdimensões delas. Disponível em: https://tedit.net/b6nai8. Acesso em: 24 ago. 2020.

2.1.1. Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias

A área de Matemática e suas Tecnologias na BNCC – Etapa Ensino Médio tem por objetivo contribuir para que os estudantes adquiram um entendimento de como a Matemática, como área do conhecimento e como componente curricular, se aplica nas situações cotidianas – tanto isoladamente quanto interligada a outras áreas do conhecimento e a outros componentes curriculares. Para isso, a proposta é que eles ampliem e consolidem os conhecimentos trabalhados nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

São apresentadas 5 competências específicas.

Ilustrações: GIGISTOCK/Shutterstock



A **competência específica 1** (**CEMAT01**) apresenta a Matemática como uma área do conhecimento que favorece a compreensão de elementos e acontecimentos em variados contextos. De modo simples, podemos dizer que utilizamos conhecimentos, estratégias, procedimentos e ferramentas matemáticas para auxiliar na interpretação de contextos que a vida cotidiana apresenta. É a aplicação dos conceitos de Matemática.



A **competência específica 2** (**CEMAT02**) trata primordialmente do envolvimento dos estudantes na proposição de soluções para problemas sociais. Essa competência se relaciona ao entendimento do estudante como membro da sociedade, seja atuando na comunidade escolar, seja em uma atuação mais abrangente. Ela também se relaciona com o projeto de vida nos âmbitos pessoal, social e profissional.



A **competência específica 3** (**CEMAT03**) está vinculada de modo primordial à resolução e à elaboração de problemas. Essa competência e as habilidades associadas a ela deixam claro que conhecimentos, conceitos e procedimentos matemáticos ganham significado ao serem aplicados em situações reais, na resolução de problemas que façam sentido para os estudantes. Também é por meio dessa competência que se relaciona a modelagem matemática, com a qual é possível fazer diferentes representações matemáticas de uma situação e utilizar procedimentos, abstração e generalização com o propósito de construir e resolver situações similares.



A **competência específica 4** (**CEMAT04**) explora os diferentes tipos de registro de representação matemática (registro algébrico, geométrico, estatístico, computacional, entre outros). Por meio dessa exploração, os estudantes adquirem a capacidade de transitar entre esses tipos de registro e, mais do que isso, escolhem qual ou quais deles são mais pertinentes para representar e resolver cada situação ou problema.



Por fim, a **competência específica 5** (**CEMAT05**) tem como objetivo principal que os estudantes investiguem matematicamente, bem como formulem hipóteses e busquem validá-las, utilizando raciocínios lógicos ou deduções obtidas por meio dessas investigações.

Cabe notar que:

> [...] para assegurar o desenvolvimento das competências específicas de área, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas no âmbito da BNCC a todos os estudantes do Ensino Médio. Elas são descritas de acordo com a mesma estrutura adotada no Ensino Fundamental (Brasil, 2018a, p. 33).

Para a etapa do Ensino Médio, a BNCC não indica o trabalho por seriação e não é apresentada a organização das habilidades referentes aos conteúdos em quadros dispostos para cada ano de estudo, como ocorre para o Ensino Fundamental (Anos Iniciais e Anos Finais). As habilidades de Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio estão agrupadas subordinadas às 5 competências específicas, de modo que possam ser trabalhadas em diferentes momentos ao longo dos 3 anos da etapa. Isso contribui para que competências específicas e habilidades possam ser investigadas e reinvestigadas em diferentes momentos, em uma retomada em espiral, sempre que o contexto favorecer essa estrutura.

Mais sobre o assunto

Qual é a diferença entre compreensão e conhecimento? Como é possível verificar se os estudantes estão alcançando os objetivos que permeiam o ensino? Questionamentos como esses e outros mais são abordados no livro *Planejamento para a compreensão*, de Grant Wiggins e Jay McTighe (Porto Alegre: Penso, 2019), de modo combinado com sugestões de estratégias para planejar ações com os estudantes, incentivando-os durante o processo de ensino e aprendizagem.

2.1.2. A BNCC nesta coleção

Esta coleção apresenta conteúdos e modelos didáticos atualizados com os conhecimentos científicos e com as normativas legais da área de educação. Portanto, a abordagem teórico-metodológica, amparada pelo modelo

de ensino proposto pela BNCC, considera a prática de ensino por competências (gerais e específicas das áreas do conhecimento), vinculadas às habilidades de cada área do conhecimento, às atitudes e aos valores, ou seja, levando em conta o desenvolvimento do "saber", do "saber fazer" e do "saber ser".

Para contribuir com a compreensão do modo como competências e habilidades se diferenciam e, ao mesmo tempo, encadeiam-se em diferentes graus de complexidade e de amplitude no decorrer do estudo, apresentamos um exemplo.

Uma das competências gerais da BNCC, que é favorecida com o trabalho proposto no capítulo **2** da Unidade **4** do Volume **1**, é a competência geral **CG02**.

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Essa competência geral permeia diferentes momentos da Unidade citada, nos quais os estudantes pensam nos problemas que lhes são apresentados e mobilizam conhecimentos matemáticos para investigar e desenvolver soluções criativas para solucioná-los. Em toda essa Unidade, as propostas pedagógicas envolvendo esses procedimentos da **CG02** desenvolvem o encadeamento em conjunto com a competência específica **CEMAT03** de Matemática e suas Tecnologias:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Nessa Unidade, os estudantes utilizam conceitos e definições para compreender as características das funções logarítmicas e representá-las graficamente, e aplicam conceitos e procedimentos para identificar a lei de funções logarítmicas que representam situações em diferentes contextos. Em especial, essa competência específica é vinculada, no capítulo **2**, à habilidade **EM13MAT305**:

> Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

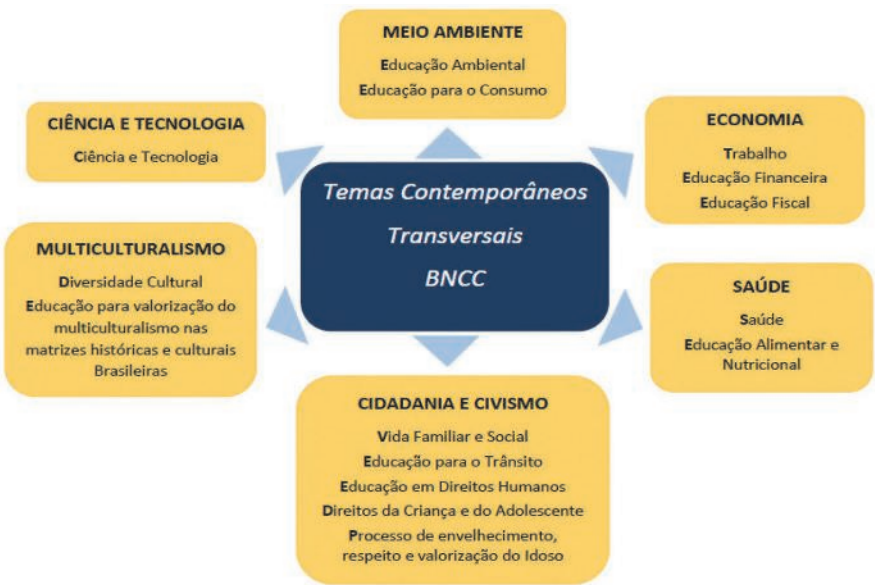
Isso ocorre pois, no referido capítulo, os estudantes exploram o comportamento das funções logarítmicas em problemas que envolvem contextos reais. Também nesse capítulo, para o estudo da poluição sonora, há a proposta de um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

2.2. Interdisciplinaridade e Temas Contemporâneos Transversais

Devemos considerar que os jovens do Ensino Médio estão sendo preparados para o enfrentamento dos desafios do século XXI e para a vida adulta em que poderão vir a exercer profissões, muitas das quais talvez ainda nem existam. Portanto, os desafios com os quais terão de lidar também estão em constante mudança e transformação.

Posteriormente à homologação da BNCC, outros documentos foram elaborados pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) para esclarecer a inserção de temas contemporâneos no ambiente escolar, passando a compor os chamados Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), organizados em 6 macrotemas.

Todos os temas são pautados na legislação brasileira vigente e contemplados em diferentes habilidades dos componentes curriculares, conforme prevê a BNCC, cabendo aos sistemas de ensino e às escolas tratá-los de modo contextualizado, de acordo com as especificidades. Na BNCC, os temas contemporâneos



Disponível em: https://tedit.net/naikz9. Acesso em: 1 set. 2024.

Governo Federal/Ministério da Educação

são indicados como temas "[...] que afetam a vida humana em escala local, regional e global" (Brasil, 2018a, p. 19). Por isso, devem ser abordados, preferencialmente, de maneira transversal e integradora, o que pode ser verificado em diversas propostas feitas nesta coleção.

Esses TCTs abrangem vários conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, e, portanto, favorecem o trabalho alicerçado na educação por competências. Se for considerada a articulação por áreas do conhecimento, a fim de que a interdisciplinaridade possa ser concretizada de modo contextualizado, os TCTs constituem uma oportunidade potente para esse trabalho.

Sendo assim, as competências específicas e as habilidades, de maneira integrada entre as áreas do conhecimento e com os TCTs, contribuem para o desenvolvimento das competências gerais, que visam à formação integral dos estudantes. Percebe-se que a interdisciplinaridade é apontada como uma maneira privilegiada de promover o desenvolvimento de competências visando à compreensão e à atuação no mundo. Na interdisciplinaridade escolar, as noções, finalidades, habilidades e técnicas visam favorecer, sobretudo, o processo de aprendizagem, respeitando os saberes dos estudantes e a integração entre eles (Fazenda, 2008, p. 21). É importante destacar que a realidade não é disciplinar; ela é complexa, relacional, múltipla e rica, bem como o são os saberes e desafios que os estudantes enfrentam e enfrentarão dentro e fora da escola.

2.3. Culturas juvenis e estudantes protagonistas das aprendizagens e dos próprios projetos de vida

Conforme já mencionado, a etapa do Ensino Médio tem por foco a proposição e a organização dos componentes curriculares e, também, de itinerários formativos. Para isso, os sistemas de ensino e as escolas devem construir os próprios currículos e propostas pedagógicas, considerando as características da região, as culturas locais, as necessidades de formação e as demandas e aspirações dos estudantes.

> Os itinerários formativos - estratégicos para a flexibilização da organização curricular do Ensino Médio, pois possibilitam opções de escolha aos estudantes - podem ser estruturados com foco em uma área do conhecimento, na formação técnica e profissional ou, também, na mobilização de competências e habilidades de diferentes áreas, compondo itinerários integrados [...] Assim, a oferta de diferentes itinerários formativos pelas escolas deve considerar a realidade local, os anseios da comunidade escolar e os recursos físicos, materiais e humanos das redes e instituições escolares de forma a propiciar aos estudantes possibilidades efetivas para construir e desenvolver seus projetos de vida e se integrar de forma consciente e autônoma na vida cidadã e no mundo do trabalho. (Brasil, 2018a, p. 477-478).

Qualquer que seja a opção feita, é preciso:

> [...] romper com a centralidade das disciplinas nos currículos e substituí-las por aspectos mais globalizadores e que abranjam a complexidade das relações existentes entre os ramos da ciência no mundo real. Para tanto, podem ser criadas situações de trabalho mais colaborativas, que se organizem com base nos interesses dos estudantes e favoreçam seu protagonismo. Algumas das possibilidades de articulação entre as áreas do conhecimento são: laboratórios, oficinas, clubes, observatórios, incubadoras, núcleos de estudos e núcleos de educação artística (Brasil, 2013, p. 183).

Considerando a necessidade de assumir o protagonismo de sua formação, o estudante é e deve ser o centro de todo o processo educacional, o autor da própria aprendizagem. Objetivando esse protagonismo, sugerimos a proposição constante de metodologias ativas – conforme explicitaremos mais detalhadamente a seguir –, de modo que cada estudante, tendo um papel ativo no processo, possa aprender mais e de maneira mais significativa.



DragonImages/Adobe Stock

Espera-se que o estudante possa construir autonomia em seu processo de aprendizagem, sendo também o protagonista de seu percurso formativo, de maneira que, aprendendo a aprender, possa continuar o processo mesmo depois de ter concluído a Educação Básica.

A BNCC traz um leque mais amplo de competências gerais, que devem ser foco em todas as etapas da Educação Básica e orientar o trabalho pedagógico em todos os componentes curriculares. É o caso, por exemplo, das competências gerais **CG03**, **CG04**, **CG05** e **CG06**, apresentadas a seguir.

> **3.** Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

> **4.** Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

Esse conjunto de competências, como as demais que constam na BNCC, aponta para uma percepção realista acerca das necessidades da juventude atual. Portanto, devem-se levar em conta as expectativas desses jovens e trabalhar com os temas curriculares a partir das realidades que eles vivenciam.

Nesse sentido, importa ressaltar que a juventude não é igual em toda parte; há uma variedade de culturas juvenis que coexistem nas escolas brasileiras. Assim, em sala de aula, é preciso levar em conta a pluralidade de perfis dos estudantes, o que implica considerar múltiplas dimensões: realidades socioeconômicas; personalidades; diferentes interesses; desníveis de aprendizagem e de desenvolvimento psicológico e cognitivo; entre outros.

Contribuir para a construção do projeto de vida desses jovens, como uma das atribuições da escola, implica articular os componentes curriculares, os conhecimentos específicos e as habilidades de cada área com atitudes de respeito ao outro e que combatam comportamentos capacitistas, posturas racistas, o *bullying*, etc.

2.4. Reflexões sobre o docente como mediador

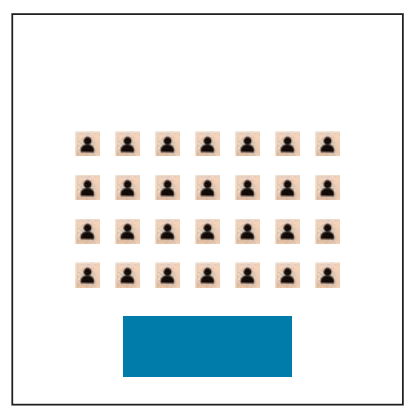
A adoção da prática educacional considerando as metodologias ativas nos leva a repensar a concepção de educação escolar, o papel do professor e a organização dos espaços pedagógicos. Nessa nova perspectiva, cabe a você, professor, a função de organizador, mediador, orientador e promotor da aprendizagem. Isso porque, assumindo que cada estudante deve ser protagonista da própria aprendizagem, ao professor cabe a responsabilidade de planejar, analisar, promover e acompanhar esses percursos. Os professores deixam de ser transmissores do conhecimento para se tornarem promotores e mediadores do conhecimento. Isso não significa que o papel do professor perde importância. Pelo contrário, é preciso que o corpo docente siga atento à pluralidade cultural e às mudanças constantes em nossa sociedade para ser capaz de se manter em diálogo com os estudantes.

De acordo com Demo (2001), existem algumas características e práticas que podem favorecer a formação e a atuação dos professores nessa nova perspectiva. É imprescindível que o professor se dedique à pesquisa, tenha atitude autoral, considere teoria e prática conjuntamente, mantenha-se atualizado constantemente, inclua diferentes recursos tecnológicos em sua prática, imponha abordagem interdisciplinar aos temas trabalhados e tenha como foco a aprendizagem dos estudantes.

Paralelamente, deve considerar que o aprendizado ocorre de maneira dialógica, ou seja, o professor deixa de ser o detentor do conhecimento para assumir o papel de investigador e aprendiz em conjunto com os estudantes. Passa, então, a olhar para o grupo com o intuito de identificar as particularidades, potencialidades e necessidades de cada estudante, sendo essa a razão de ser da atividade docente.

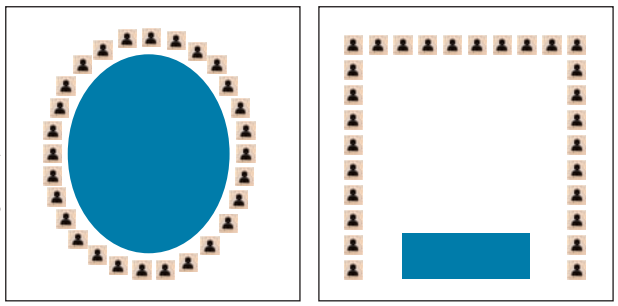
As metodologias ativas são um meio de alcançar esses objetivos. Elas são um conjunto de estratégias de ensino que têm o objetivo de conduzir o estudante à ação para que ele aprenda de maneira participativa e autônoma. Existem várias estratégias para trabalhar com metodologias ativas, e cabe ao professor perceber quais delas são as mais interessantes e adequadas e quais promovem maior engajamento e atuação de cada turma em cada momento, considerando os objetivos traçados. Existem diversas opções interessantes, como a aprendizagem baseada em problemas, a aprendizagem em equipe, a sala de aula invertida e a rotação por estações.

Além disso, para que esse deslocamento de perspectiva na sala de aula seja possível, é importante considerar a variedade de possibilidades estratégicas didáticas. É interessante, portanto, combinar a disposição dos estudantes na sala de aula com as propostas pedagógicas, dependendo do objetivo de cada proposta.



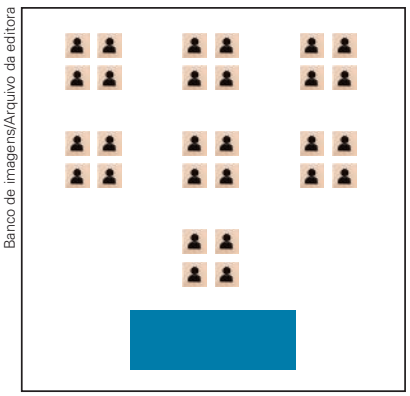
Banco de imagens/Arquivo da editora

A sala de aula que conhecemos como tradicional, com as carteiras enfileiradas, favorece o trabalho individual, especialmente para atividades relacionadas à reflexão. Mas esta é apenas uma – e não a única – possibilidade.



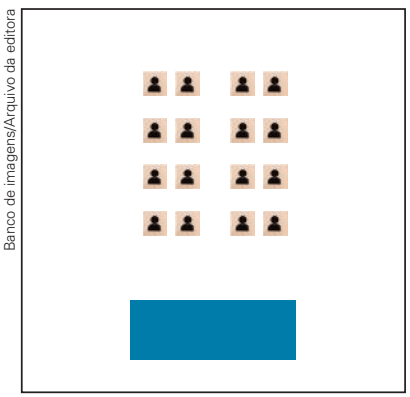
Banco de imagens/Arquivo da editora

Para uma atividade cujo objetivo seja o debate coletivo, a troca de experiências e saberes, bem como a contribuição de cada estudante para com o grupo, a organização das carteiras ao redor do professor ou em U pode ser uma boa opção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

No caso de uma atividade que demande a construção coletiva do significado de um conceito ou a sistematização de uma ideia, pode ser interessante que a turma esteja organizada em grupos de 4 ou 5 estudantes.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A organização em duplas tende a ser uma boa opção, por exemplo, para a resolução de problemas e a realização de atividades, pois a aprendizagem aos pares pode favorecer a troca de saberes.

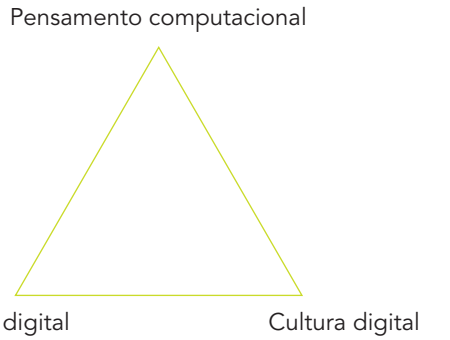
Vale destacar que, para as diferentes configurações, é preciso planejar com antecedência os grupos de trabalho, considerando as necessidades e, também, a diversidade de aspectos étnicos e culturais, bem como as diferentes maneiras de aprender e de se relacionar dos estudantes. A diversidade humana, que naturalmente existe dentro da sala de aula, passa a ser considerada valiosa, pois amplia e enriquece as práticas educacionais.

Mais sobre o assunto

Para conhecer mais sobre a concepção de metodologias ativas, diferentes tipos de metodologia e sugestões de abordagem em sala de aula, indicamos a leitura do livro *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática*, organizado por Lilian Bacich e José Moran (Porto Alegre: Penso, 2018).

2.5. Educação digital

A educação digital é, atualmente, uma necessidade nos mais variados espaços sociais. Diante dessa evidência, o Conselho Nacional de Educação estabeleceu, em 2019, as Normas sobre Computação na Educação Básica – Complemento à BNCC, também conhecida como a BNCC da Computação. Essa normativa foi proposta como um complemento da BNCC que trata do ensino da Computação, um guia que traz habilidades obrigatórias para todas as etapas da Educação Básica. Os conteúdos tratados nesse guia estão divididos em 3 eixos: Pensamento computacional, Mundo digital e Cultura digital.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O eixo de pensamento computacional aborda o raciocínio lógico, considerando a construção de soluções para diversos problemas, com habilidades como descrição de processos, organização e sistematização de informações. O eixo mundo digital trata de habilidades relacionadas ao universo virtual, como funcionamento técnico da internet, das redes e da computação em nuvem. Já o eixo de cultura digital refere-se às discussões políticas, éticas e sociais que envolvem o uso das tecnologias no mundo contemporâneo.

Em 2023, foi promulgada a Lei nº 14.533, que instituiu a Política Nacional de Educação Digital com a finalidade de "potencializar os padrões e incrementar os resultados das políticas públicas relacionadas ao acesso da população brasileira a recursos, ferramentas e práticas digitais, com prioridade para as populações mais vulneráveis". Entre os objetivos, está favorecer o "desenvolvimento de competências dos alunos da Educação Básica para atuação responsável na sociedade conectada e nos ambientes digitais, conforme as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular".

Mais sobre o assunto

O Instituto Ayrton Senna disponibiliza em seu *site* um rico material sobre o assunto: *Educação integral por meio do pensamento computacional – Letramento em programação: relatos de experiências e artigos científicos*, organizado por Amilton Rodrigo de Quadros Martins e Adelmo Antonio da Silva Eloy (1. ed. Curitiba: Appris, 2019). Organizado em seções e capítulos, apresenta artigos sobre tecnologias, programação e ensino de computação e de pensamento computacional na Educação Básica, além de relatos de experiências envolvendo esses e outros temas. Disponível em: https://tedit.net/5nf57z. Acesso em: 8 set. 2024.

2.6. Educação inclusiva

Para incluir estudantes com deficiência, o professor deve favorecer a interação e o respeito à diversidade em sala de aula. A seguir, apresentamos algumas orientações que podem contribuir em sua prática pedagógica.

- Conheça os estudantes, para que cada um seja assistido de modo adequado. Sugerimos uma conversa com eles e as respectivas famílias ou responsáveis, assim é possível compreender o contexto em que esses estudantes estão inseridos e entender as potencialidades e dificuldades desse cenário.
- Pergunte a cada estudante com deficiência qual é a melhor maneira de auxiliá-lo, ao perceber uma dificuldade.
- Caso a família ou responsável faça a entrega de algum documento ou relatório médico, é importante a análise das orientações sobre as adaptações necessárias para o estudante na escola.
- Sempre que possível, planeje as aulas e atividades considerando a acessibilidade, inclusive dos materiais didáticos, o que favorece a inclusão de todos. Por exemplo, ao passar um vídeo em aula, verifique se a resolução e o áudio estão adequados; em alguns casos, é necessário ativar a legenda dos vídeos e apresentá-lo em Libras.
- Valorize as potencialidades dos estudantes e incentive a todos a participar de maneira ativa em sala de aula.
- Seja objetivo ao falar e certifique-se de que cada estudante compreendeu a informação. Incentive-os a participar ativamente do próprio processo de ensino e aprendizagem e pergunte as dificuldades e quais recursos podem ajudá-los.
- Esteja atento a possíveis momentos de preconceito ou *bullying* em sala de aula e na escola, e não permita qualquer ação capacitista ou prática que diminua as potencialidades do estudante com deficiência.
- Estude e se aprofunde sobre os vieses inconscientes do capacitismo – uma opção para isso é buscar a orientação pedagógica da escola, na pessoa de um orientador ou psicólogo.
- Busque conhecer métodos de inclusão e educação especial, mantendo-se sempre atualizado sobre novas metodologias e tecnologias assistivas.

Cabe ressaltar que essas orientações estão articuladas com a Lei nº 13.146/2015, ou Estatuto da Pessoa com Deficiência. Essa legislação é essencial para garantir os direitos das pessoas com deficiência no Brasil. Essa Lei tem como foco ampliar o acesso à educação, ao trabalho, à saúde e à cultura, reforçando o respeito à dignidade e à autonomia das pessoas com deficiência, para que, assim, possamos construir uma sociedade mais justa e com equidade de oportunidades.

Mais sobre o assunto

Para aprimorar ainda mais a prática pedagógica, sugerimos a leitura de algumas dicas valiosas para o tratamento de pessoas com deficiência, seja no dia a dia em sala de aula, seja fora da escola.

ENAP. *Dicas de Atendimento ao Público com Deficiência. Programa de inclusão de pessoas com deficiência*. Disponível em: https://tedit.net/pfjwsz. Acesso em: 8 set. 2024.

Também sugerimos a leitura do artigo indicado a seguir, que visa diferenciar acesso, acessibilidade e inclusão, e apresentar as diferenças epistemológicas, pedagógicas e políticas dessas categorias, que são estruturantes da educação especial na perspectiva da educação inclusiva, projetando a escola como um ecossistema inclusivo.

FREITAS, Marcos Cezar de. Educação inclusiva: diferenças entre acesso, acessibilidade e inclusão. Universidade Federal de São Paulo (Unifesp), Guarulhos. *Scielo Brasil*, 3 jul. 2023. Disponível em: https://tedit.net/d14dnk. Acesso em: 8 set. 2024.

Sugerimos, ainda, a leitura do livro de Mariana Rosa e Karla Garcia Luiz sobre como educar crianças anticapacitistas.

ROSA, Mariana; LUIZ, Karla Garcia. *Como educar crianças anticapacitistas*. Florianópolis, 2023. Disponível em: https://tedit.net/d021mt. Acesso em: 9 set. 2024.

2.7. Argumentação (oral e escrita) e leitura inferencial

No Ensino Médio, intensifica-se o foco da aprendizagem para a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes, que diferem pelas variadas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros.

Diante dessas considerações, a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos

> conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. (Brasil, 2018a, p. 528-529).

Nesse sentido, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas, mobilizando o modo próprio de raciocinar, representar, argumentar e comunicar.

Já no caso das competências diretamente associadas ao ato de representar, a elaboração de registros para evocar um objeto matemático é uma ferramenta potente, pois, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação dos resultados de uma atividade ou de um raciocínio. Em continuidade, a competência de comunicar ganha importância no processo de apresentar e justificar resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. A argumentação e o desenvolvimento dessa competência pressupõem a formulação de conjecturas, bem como a etapa de testá-las e comprová-las, com a apresentação de justificativas, em conjunto com as competências mencionadas anteriormente.

Rawpixel.com/Shutterstock



As atividades de debate, escuta e validação conjuntas proporcionam aos estudantes o aprendizado de conceitos e o desenvolvimento de representações e procedimentos cada vez mais sofisticados e precisos.

No Ensino Médio, torna-se progressivamente mais importante o trabalho em torno do raciocínio dedutivo, ou seja, partir de ao menos uma premissa e chegar a uma conclusão. Nesse sentido, cabe destacar que o trabalho em torno da capacidade de diversificar as formas de raciocínio fica potencializado quando são propostas atividades pedagógicas em que os estudantes podem interagir entre si e, em especial, oralmente. Além disso, a possibilidade de expressar adequadamente um raciocínio por escrito não pode deixar de lado a habilidade correlata de comunicar oralmente esse mesmo raciocínio. Longe de ser algo automático, é preciso aprender e exercitar em sala de aula todas essas possibilidades.

2.8. Pluralismo de ideias e produção de análises (críticas, criativas e propositivas)

Os jovens vivenciam de muitas maneiras a participação na sociedade, inclusive no espaço escolar, em que fortalecem o estreitamento das relações pessoais com o grupo mais próximo, formando, com a participação nesse grupo, uma categoria socialmente produzida. Cada uma dessas categorias particulares adota uma maneira própria de expressar ou reinterpretar as culturas em que estão socialmente inseridas, caracterizando uma cultura juvenil.

Para que possam se desenvolver plenamente e atuar na sociedade, é importante que os estudantes desenvolvam o pensamento crítico e criativo, bem como atitudes propositivas e de respeito ao pluralismo de ideias.

A análise crítica é uma habilidade essencial no mundo contemporâneo. Trata-se de um processo de avaliação cuidadoso e objetivo de informações, ideias ou pontos de vista, o que envolve questionar, examinar e refletir sobre as informações apresentadas.

A atitude propositiva incentiva o indivíduo a buscar soluções e a adotar uma postura construtiva diante das questões. Uma pessoa propositiva concentra-se na elaboração de ideias que representam ganhos para o coletivo e na proposição de soluções e respostas para possíveis dúvidas e problemas. Além disso, é capaz de antecipar obstáculos ou desafios, prever necessidades e propor soluções.

Por sua vez, uma postura criativa diante dos acontecimentos contribui para a participação crítica e cidadã. Nesse sentido, é preciso inspirar os estudantes a pensar em projetos que vão além das fronteiras da sala de aula, envolvendo-os em projetos de pesquisa, atividades sociais e iniciativas comunitárias.

Ao promover, dentro da escola, atitudes e comportamentos de respeito e acolhimento, considerando o pluralismo de ideias e a diversidade inerente à humanidade, podemos contribuir para a cultura de paz, que pode ser entendida como um conjunto de valores, atitudes e comportamentos fundamentais para o respeito à vida, aos direitos humanos e à garantia de liberdades fundamentais do ser humano. É preciso auxiliar os estudantes a compreender que o pluralismo de ideias é algo positivo, e não motivo para violência. O diálogo nutre-se de humildade, confiança e respeito, contribuindo para a compreensão de que é possível viver as diferenças se reconhecermos o direito do outro a ter os próprios pontos de vista.

Mais sobre o assunto

A obra *Práticas educativas e Cultura de Paz: articulando saberes e fazeres*, organizada por Eliana Maria do Sacramento Soares e Lezilda Maria Teixeira (Caxias do Sul, RS: Educs, 2018), é um manual de orientação para professores, com práticas relacionadas à Cultura de Paz. O segundo capítulo destaca práticas na Educação Básica. Disponível em: https://tedit.net/rurj0q. Acesso em: 8 set. 2024.

2.9. Pensamento computacional

O pensamento computacional vem sendo considerado, por alguns autores, tão importante no mundo contemporâneo quanto o desenvolvimento de linguagens, como a língua materna e a Matemática. A origem dessa expressão tem relação com um artigo publicado pela cientista da computação e pesquisadora estadunidense Jeannette Wing (1956-) e com reflexões da psicologia cognitiva, que envolve processos de pensamento que se desenvolvem quando se usam fundamentos da computação.

O conceito de pensamento computacional não se limita aos estudos e aos profissionais da Ciência da Computação, à programação ou ao uso de computadores nem às habilidades de um dos eixos da BNCC da Computação, mas está relacionado às habilidades e aos raciocínios inerentes a eles, que são importantes para todos. Esse conceito envolve resolução de problemas, pensamento recursivo, abstração, algoritmos, fluxogramas, decomposição, análise de erros, planejamento e replanejamento, assim como a criatividade na busca por soluções de problemas.

> Pensamento computacional envolve resolução de problemas, desenvolvimento de sistemas e compreensão do comportamento humano baseando-se nos conceitos fundamentais à ciência da computação. Pensamento computacional inclui uma gama de ferramentas mentais que refletem a abrangência da ciência da computação (Wing, 2006, p. 33, tradução dos autores).

Assim, podemos refletir que o pensamento computacional é um processo de raciocínio que envolve abstração para identificar a principal característica da solução para uma situação, a fim de que essa solução possa se tornar válida para diversos problemas similares. Isso implica que a abstração é algo que não acontece de uma hora para outra, mas somente após decomposições sucessivas do problema em partes menores, menos complexas e mais fáceis de resolver.

Podemos definir 4 pilares para o pensamento computacional:

- **Decomposição**: fragmentar um problema complexo em partes menores e trabalhar uma de cada vez.
- **Abstração**: focar no centro do problema em vez de priorizar os detalhes, analisando-o de maneira mais crítica e sistemática.
- **Pensamento algorítmico**: criar um sequenciamento de passos que, juntos, configuram a resolução do problema.
- **Reconhecimento de padrões**: identificar regularidades que podem favorecer a generalização de uma resolução para problemas similares.

Tanto a BNCC quanto a BNCC da Computação preveem o desenvolvimento do pensamento computacional em todos os anos do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Esse conceito está, de fato, presente quando os estudantes precisam desenvolver uma representação do raciocínio lógico em atividades de todas as áreas do conhecimento. Nesta coleção, ele está presente, por exemplo, em seções, em atividades que envolvem a resolução de problemas, na compreensão do passo a passo de um processo, nos projetos propostos e na elaboração de fluxogramas.

2.10. Resolução e elaboração de problemas

Quando consideramos a importância da resolução de problemas, objetivamos que os estudantes possam identificar o problema e os dados fornecidos, traçar um plano de ação, obter uma possibilidade de resposta e, por fim, validar essa resposta. Apesar de ser muito coerente com a Educação matemática, a resolução de problemas é uma habilidade fundamental para a vida, não sendo restrita a uma área do conhecimento.

O matemático e professor húngaro George Pólya (1887-1985) foi um dos grandes estudiosos da resolução de problemas, e é em muitas das reflexões dele que nos pautamos para a elaboração desta coleção.

Segundo Pólya, no livro *A arte de resolver problemas*, há 4 etapas para a resolução de um problema: a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução desse plano e o retrospecto ou a verificação.

Para compreender um problema, é preciso identificar informações essenciais à resolução: os dados fornecidos, as respostas que precisamos obter e, sobretudo, quais condições ligam esses dados (ou parte deles) às respostas. Nesse momento, é importante promover a reflexão, indagando os estudantes e incentivando-os a criar hipóteses para as quais pode ser útil empregar recursos como desenhos, esquemas, diagramas, entre outros.

Após a compreensão, é preciso elaborar o plano de ação, ou seja, planejar os passos, identificar os recursos e possíveis caminhos para a resolução. De acordo com Pólya (1995, p. 5), "temos um plano quando conhecemos, pelo menos de modo geral, quais as contas, os cálculos

ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita". Nesse momento, é possível perceber que um problema pode ter várias estratégias de resolução, pois, no mundo real, os problemas não aparecem sempre de maneira "fechada" e organizada.

O trabalho em grupos e a elaboração de painéis de solução são estratégias pedagógicas que podem favorecer essa percepção. Para elaborar o plano, incentive os estudantes a se lembrarem de problemas similares que já realizaram, a elaborar desenhos, diagramas e tabelas e a refletir sobre a possibilidade de resolvê-lo por partes. É também no momento do estabelecimento de um plano que deve ocorrer a seleção dos dados fornecidos que serão utilizados (no caso de problemas com excesso de dados) ou de outros dados que não foram expressos no enunciado, mas são necessários para a resolução (problemas com falta de dados).

De acordo com Pólya (1995, p. 8), a execução do plano exige paciência e método porque, tendo sido o plano bem realizado, a prática é basicamente sua aplicação. Após a execução do plano, os estudantes provavelmente chegarão a uma resposta, mas é importante refletir e verificar se ela é coerente. Isso porque podem ter ocorrido erros durante a resolução – e essa percepção é enriquecedora para o processo de aprendizagem. A ação de retrospecto ou verificação pode trazer grandes benefícios quanto à construção e ao aperfeiçoamento das competências e habilidades dos estudantes em resolver problemas.

> Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo (Pólya, 1995, p. V).

Além da resolução de problemas, a BNCC apresenta diversas habilidades com foco na elaboração de problemas, bem como parte do próprio texto da **CG02**: "formular e resolver problemas e criar soluções (até mesmo tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas". O processo de elaboração de problemas é um passo à frente da proposta de resolvê-los, pois exige de cada estudante a plena compreensão não apenas da situação e da pergunta a que se quer responder, mas também de todos os dados que precisam ser fornecidos e dos conceitos que serão utilizados, bem como, é claro, criatividade.



Ground Picture/Shutterstock

Propor um trabalho para ser resolvido inicialmente em duplas ou grupos, seguido de propostas individuais, quando os estudantes se sentirem seguros para isso, também é uma estratégia de aprendizado.

Para atingir o propósito de resolver e elaborar problemas, conforme as diversas propostas didáticas apresentadas nos Volumes desta coleção, diferentes caminhos podem ser seguidos e etapas intermediárias podem ser trilhadas para ampliar o repertório dos estudantes.

Por exemplo, analisar problemas do livro, compreendendo os dados informados, as respostas que precisamos obter e a estrutura do enunciado, permite a elaboração de problemas com estruturas similares ou novas perguntas para o mesmo conjunto de dados. Ainda explorando um problema já formulado, os estudantes também podem refletir e explicar o que ocorreria se algum dado fosse alterado, acrescentado ou retirado. Além disso, a coleta externa de informações para a elaboração de um problema não apenas amplia o repertório dos estudantes e torna a situação significativa para eles como os aproxima de situações às quais eles poderiam ser, de fato, expostos; afinal, no cotidiano estamos constantemente recebendo informações, dados e valores, fazendo cálculos, respondendo a perguntas e tomando decisões.

2.11. Investigação científica e raciocínios lógico-matemáticos

A proposição de problemas e atividades que envolvam o desenvolvimento dos diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático (indução, dedução, abdução e raciocínio por analogia) para analisar e explicar processos de investigação sem dúvida colabora para um ambiente de ensino e de aprendizagem repleto de significados. Nesse sentido, de acordo com as propostas feitas em cada Volume do Livro do Estudante desta coleção, é importante

que os estudantes façam investigações de natureza matemática com cientificismo, pois, desse modo, formalizam os conteúdos enquanto desenvolvem o raciocínio e a lógica.

Se é certo que uma hipótese é um modo de proporcionar uma resposta temporária a uma pergunta, também é certo que o que realmente importa não é que a hipótese esteja correta, mas sim que ela inicie um processo por meio do qual o estudante analise e discuta, compare, avalie, conclua, verifique, valide e demonstre. O raciocínio vai além do ato intelectual em si, transcende-o, estabelece vínculos, formando um processo que exige demonstrações e provas das "verdades" que se estão conhecendo ou investigando. O processo de conhecimento proporcionado pela investigação de acordo com o aspecto científico privilegia novas maneiras de pensar e de o estudante se envolver com a Matemática em ambiente escolar.

Mais sobre o assunto

- No livro *Investigações matemáticas na sala de aula*, de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira (4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. Coleção Tendências em Educação matemática, 7), os autores apresentam desafios e benefícios das práticas de investigação em aulas de Matemática com base em informações coletadas em pesquisas que envolvem professores e estudantes. As análises que surgem das reflexões dessas vivências compõem um rico material para quem deseja implantar investigações matemáticas nas aulas.
- O livro *Iniciação à Filosofia: Ensino Médio*, de Marilena Chaui (3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. único), traz, nas páginas 94 a 97, explicações sobre os tipos de raciocínio por dedução, indução e abdução, mencionados anteriormente.

2.12. Etnomatemática

> Conhecimentos e comportamentos são compartilhados e compatibilizados, possibilitando a continuidade dessas sociedades. Esses conhecimentos e comportamentos são registrados, oral ou graficamente, e difundidos e passados de geração para geração. Nasce, assim, a história de grupos, de famílias, de tribos, de comunidades, de nações (D'Ambrosio, 2019, p. 23).

De acordo com essa citação, da obra *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*, do matemático e professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (1932-2021), um dos pioneiros no estudo da Etnomatemática e, também, precursor e idealizador desse tema, percebe-se que há produção de conhecimento em todas as culturas. Dessas produções, pode-se inferir que algumas são originadas da Matemática, sendo esta subordinada a um contexto social e cultural específico em determinado período histórico. A Matemática surgiu como um dos meios de auxílio para a concretização de necessidades básicas do ser humano, como a construção de moradias, a fabricação de utensílios e a manutenção e contagem dos rebanhos. Desse modo, ao longo da História, tanto a afirmação de identidade dos grupos sociais quanto a história desses mesmos grupos passam pela Matemática.



Stefan Lambauer/Shutterstock

As peças de cestaria do povo Yanomami revelam a presença de conceitos matemáticos, como contagem, simetria e Geometria. Exposição no Museu do Amanhã na cidade do Rio de Janeiro, RJ. Foto de 2022.

De acordo com D'Ambrosio (2019, p. 2), a Etnomatemática busca, dentro de um "ambiente natural, social, cultural e imaginário" (*etno*), "explicar, aprender, conhecer e lidar com" (*matema*) "modos, estilos, artes, técnicas" (*tica*). Nesse sentido, ela aborda as relações interculturais. E o que propõe? O incentivo para que a Matemática venha a ser explicada e entendida dentro de um contexto cultural próprio. De que modo? Explicando os procedimentos de formação, de organização e de transmissão de conhecimentos em sistemas culturais variados. Com qual finalidade? A de conduzir o estudo da Matemática a novas maneiras de relação intercultural.

O ensino e a aprendizagem da Matemática, na perspectiva da Etnomatemática, possibilitam estabelecer uma relação mais construtiva e consistente entre teoria e prática ao considerar experiências cotidianas como um rico material a ser analisado e a respeito do qual se pode refletir.

A Etnomatemática contribui para a decolonização do pensamento. Nas últimas décadas, muitos estudiosos têm destacado que a produção de conhecimento acontece não apenas na Europa e nos Estados Unidos. No entanto, por razões históricas, somos ainda levados a considerar que a ciência válida seria aquela produzida apenas no hemisfério norte.

A decolonialidade do saber nos ajuda a compreender que, mesmo com o fim do período colonial, nós, povos que fomos colonizados, seguimos muitas vezes atribuindo valor apenas ao conhecimento produzido pelos países que foram colonizadores. Portanto, para ampliarmos a

compreensão do mundo em que vivemos, é importante darmos atenção também a outras tradições e a outras produções de saberes, como as latino-americanas e as africanas.

2.13. Uso pedagógico de tecnologias digitais

Ao longo da História, percebemos o desenvolvimento de diferentes tecnologias associadas à inteligência humana. Em um primeiro momento, foi a interação oral que estabeleceu a transmissão das informações e do conhecimento, fazendo-os circular nos diversos grupos sociais. Com a invenção da escrita e, posteriormente, da imprensa, surgiu a possibilidade de divulgar informações em modos de distribuição contínuos e lineares. Já o advento recente da informática tornou possível estabelecer o uso do *hiperlink*, uma ligação que conduz a outras unidades de informação, remetendo a outros documentos.

É fato que a escola está inserida nesse contexto histórico-social, e, por isso, a utilização de tecnologias digitais nas práticas pedagógicas oferece uma enorme contribuição para o processo de ensino e aprendizagem. Ao introduzir e utilizar esses recursos no ambiente escolar, você se propõe a descobrir e experimentar, experimentação que oportuniza um processo de (re)elaboração e (re)adaptação constantes aos conceitos que estão sendo estudados. Exatamente por isso, o uso de tecnologias digitais pelos estudantes jamais deve encontrar ênfase maior no recurso digital em si, em detrimento do papel da aprendizagem.

Assim como a aplicação das metodologias ativas, o uso dos recursos digitais na escola rompe com a transmissão direta de conhecimento do professor – o detentor de todo o conhecimento – para o estudante, que deixa de ter um papel passivo no processo de ensino e aprendizagem. Assim, o uso pedagógico das tecnologias digitais representa um incentivo ao protagonismo dos estudantes.

Para as aulas de Matemática, em especial, diversos recursos e ferramentas tecnológicos podem ser úteis no processo de ensino e aprendizagem, como calculadoras, *softwares* de Geometria dinâmica, planilhas eletrônicas, compiladores de códigos, simuladores e laboratórios virtuais. Para utilizá-los, é importante sempre preparar-se previamente, mapeando os dispositivos que precisarão estar disponíveis e a internet, se for necessário utilizá-la no momento da aula, bem como conhecendo os *softwares* ou aplicativos que serão trabalhados, para que você, professor, possa auxiliar os estudantes sempre que for preciso.

É possível encontrar na internet diversos tutoriais de utilização de diferentes ferramentas tecnológicas para uso em sala de aula, bem como atividades já construídas e que podem proporcionar aos estudantes um momento inicial de conhecimento da plataforma escolhida ou um momento final para ampliação das propostas didáticas apresentadas nesta coleção.

3. Avaliações

A avaliação das aprendizagens é inerente ao processo de aprendizagem, e compreender sua conceituação e aplicação prática é fundamental para promover um ensino de qualidade e o desenvolvimento integral dos estudantes. Aqui buscamos explorar as visões de diferentes educadores de maneira a contribuir para a construção de uma prática avaliativa que vá além da simples aferição de conhecimentos.

Cipriano Luckesi (2002) afirma que a avaliação deve ser contínua e formativa, focada na melhoria do ensino e da aprendizagem. Ela deve servir como ferramenta para a transformação social e promover a reflexão crítica e o desenvolvimento dos estudantes.

Philippe Perrenoud (2001) destaca a importância da avaliação formativa, que busca identificar e superar as dificuldades de aprendizagem ao longo do processo educativo. Ele enfatiza que a avaliação deve ser contextualizada e adaptada às características individuais dos estudantes.

Domingos Fernandes (2009) argumenta que a avaliação deve ser formativa e proporcionar *feedback* constante, auxiliando professores e estudantes a identificarem pontos fortes e aspectos que necessitam de melhoria. De acordo com ele, a prática avaliativa deve ser parte integrante do cotidiano escolar, promovendo a autorregulação e o engajamento dos estudantes.

Jussara Hoffmann[1] (2003) propõe uma avaliação dialógica, em que a interação e a comunicação entre professores e estudantes são fundamentais. Para ela, a avaliação deve ser um ato pedagógico que contribua para a autonomia, a reflexão crítica e o crescimento pessoal dos estudantes.

Ao explorar as concepções de avaliação da aprendizagem desses autores, constrói-se uma visão abrangente e crítica sobre como ela pode ser utilizada de maneira eficaz e justa no contexto educativo, promovendo o desenvolvimento integral dos estudantes e a melhoria contínua do processo de ensino e aprendizagem.

[1] HOFFMANN, Jussara. *Avaliação mediadora*: uma prática em construção da pré-escola à universidade. Porto Alegre: Mediação, 2003.

3.1. A avaliação em Matemática

3.1.1. Por que avaliar?

As avaliações e os resultados delas são úteis para (re)definir a rota, ou seja, é preciso avaliar para planejar a continuidade do trabalho pedagógico. As habilidades matemáticas, especialmente a capacidade de resolver e elaborar problemas, desenvolvem-se ao longo do tempo, como resultado de variadas oportunidades e do confronto com situações do mundo real. Assim, é preciso monitorar esses processos de desenvolvimento das habilidades matemáticas para acompanhar a evolução e a consolidação ao longo do ano letivo.

Além disso, durante as aulas e as avaliações, debatem-se ideias e conceitos matemáticos, partilham-se descobertas, confirmam-se hipóteses e adquirem-se conhecimentos matemáticos pela escrita, pela fala e pela leitura. O próprio ato de comunicar clareia e organiza o pensamento e leva os estudantes a se envolverem na construção do conhecimento de Matemática.

3.1.2. O que avaliar?

Diferentes tipos de avaliação – como os que exemplificaremos a seguir – podem e devem ser aplicados ao longo dos anos letivos da Educação Básica, com distintos propósitos específicos, bem como variados procedimentos e instrumentos de avaliação.

Toda avaliação parte de um planejamento prévio, no qual são estabelecidos os critérios avaliativos que, geralmente, são definidos pelo educador a partir dos objetivos da avaliação e do conjunto de competências e habilidades que se pretendem avaliar.

Assim, é sempre necessário definir o conjunto de habilidades no planejamento da avaliação e, para cada critério/habilidade, compor as atividades e questões que podem auxiliar como ferramenta avaliativa. Nas avaliações em larga escala, como o Enem e o Saeb, são elaboradas matrizes de avaliação nas quais esses critérios são definidos como habilidades descritoras do objeto a ser avaliado.

De modo geral, nas avaliações de Matemática, a depender do tipo de avaliação, é importante mensurar o que os estudantes já sabem, como sabem e como pensam matematicamente, bem como se eles compreenderam os conceitos e os procedimentos e se desenvolveram atitudes positivas em relação à Matemática. A análise da capacidade de mobilizar conhecimentos matemáticos para o desenvolvimento de argumentos, bem como do processo e da criatividade nas soluções dadas pelos estudantes para as situações-problema propostas, também deve ser objeto de avaliação.

3.1.3. Como avaliar?

Definidos os critérios avaliativos, outros procedimentos principais, citados a seguir, são comuns aos diferentes tipos de avaliação.

- Planejamento dos critérios avaliativos (comuns e/ou individuais).
- Elaboração das atividades e questões avaliativas com base nos critérios definidos.
- Aplicação das avaliações.
- Análise e registro dos resultados das avaliações.
- *Feedback* e intervenções educacionais com base nos resultados das avaliações (como seções de revisão e retomada de conteúdos).
- Acompanhamento e monitoramento contínuo.
- Celebração de conquistas.

Na Matemática, especificamente, os diferentes tipos de avaliação devem apresentar situações-problema que envolvam a mobilização de um conjunto de ideias matemáticas, situações abertas que tenham mais de uma solução, propostas de elaboração de problemas envolvendo conteúdos e/ou contextos dados, entre outros tipos de atividades e questões.

O registro dos resultados das avaliações e o acompanhamento de cada estudante durante o ano letivo (ou durante os anos letivos, se possível) são úteis e importantes para melhor condução das aprendizagens individuais e coletivas, monitorando as evoluções e agindo de modo imediato e contínuo para garantir os objetivos educacionais propostos.

Observações sistemáticas feitas em sala de aula, diários de aprendizagem, conversas com os estudantes e coleta de trabalhos para compor portfólios, bem como a criação de registros e relatórios dos resultados das avaliações (em tabelas e/ou gráficos, por exemplo), permitem esse acompanhamento ao longo do tempo, tanto por parte dos professores quanto dos próprios estudantes ou familiares.

A seguir, apresentamos alguns tipos de avaliação e sugestões de instrumentos avaliativos. É importante salientar que, além de escolher estes ou outros tipos de avaliação a serem aplicados no Ensino Médio, você, professor, tem autonomia para selecionar os instrumentos avaliativos e os procedimentos de registro e acompanhamento mais adequados para cada tipo de avaliação, levando em conta o planejamento pedagógico e a realidade dos estudantes.

3.2. Os tipos de avaliação

3.2.1. Avaliação diagnóstica

Luckesi (2002, p. 43) descreve que "para não ser autoritária e conservadora, a avaliação tem a tarefa de ser diagnóstica, ou seja, deverá ser o instrumento dialético do avanço, terá de ser o instrumento da identificação de novos rumos".

Esse tipo de avaliação busca identificar conhecimentos prévios, habilidades, dificuldades e interesses dos estudantes. Permite ao professor planejar e adaptar as estratégias de ensino às necessidades de cada turma, e mesmo de cada estudante, promovendo um processo de ensino e aprendizagem mais personalizado.

Além disso, a avaliação diagnóstica ajuda a detectar possíveis lacunas no conhecimento dos estudantes, possibilitando intervenções pedagógicas precoces para corrigir essas deficiências antes que se tornem obstáculos maiores ao aprendizado.

Como sugestões de instrumentos para avaliação diagnóstica, podem ser úteis: testes diagnósticos, com perguntas objetivas, questões abertas e problemas sobre conhecimentos específicos e habilidades; conversas individuais para explorar percepções, dificuldades e interesses; coleta de trabalhos anteriores dos estudantes para compor um portfólio visando a uma análise mais detalhada do desenvolvimento individual deles ao longo do tempo.

3.2.2. Avaliação formativa

Matui[2] (1995) designa a avaliação em sua concepção formativa como "avaliação dialógica". De acordo com Jorba e Sanmartí:

> a avaliação formativa tem como finalidade fundamental a função ajustadora do processo de ensino-aprendizagem para possibilitar que os meios de formação respondam às características dos alunos. Pretende-se detectar os pontos fracos da aprendizagem, mais do que determinar quais os resultados obtidos com essa aprendizagem.
>
> JORBA, J.; SANMARTÍ, N. A função pedagógica da avaliação. *In*: BALLESTER, M. *et al. Avaliação como apoio à aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2003.

Esse tipo de avaliação visa monitorar o progresso dos estudantes ao longo do processo educativo, identificar dificuldades e reforçar a compreensão dos conteúdos antes que as dificuldades de aprendizagem se tornem maiores. Pode, também, promover a autorregulação dos estudantes, incentivando-os a refletir sobre o próprio aprendizado e a desenvolver habilidades de autoavaliação.

Além da observação sistemática das interações e do comportamento dos estudantes durante as atividades em sala de aula para identificar informações valiosas sobre as habilidades sociais, a motivação e a compreensão dos conteúdos, testes, questionários e *quizzes* (com questões de múltipla escolha, verdadeiro ou falso, perguntas abertas, entre outros) podem ser aplicados regularmente como instrumento para avaliação formativa, pois ajudam a verificar a compreensão dos estudantes sobre tópicos específicos em estudo. O preenchimento de *checklist* de desempenho, como uma lista de verificação, também permite monitorar o cumprimento de etapas específicas ou habilidades durante o desenvolvimento de atividades ou projetos.

3.2.3. Avaliação comparativa

A avaliação comparativa envolve a comparação do desempenho de um estudante com o de outros a partir de critérios preestabelecidos. Tem por objetivo situar o desempenho individual dentro de um contexto maior, identificando tanto os estudantes que se destacam por resultados mais assertivos que a média quanto aqueles que precisam de apoio adicional.

Segundo Fernandes (2009), esse método de avaliação ajuda a identificar padrões de desempenho e diferenças significativas entre grupos de estudantes, fornecendo dados importantes para a tomada de decisões pedagógicas e políticas educacionais. Esse tipo de avaliação é comum durante o Ensino Médio, especialmente em simulados ou em provas oficiais (vestibulares e avaliações como o Enem).

No geral, avaliações comparativas têm o formato de testes padronizados com questões (abertas ou fechadas) que avaliam os mesmos conteúdos e aprendizagens para todos os estudantes e, por isso, permitem uma comparação direta entre diferentes indivíduos ou grupos.

3.2.4. Avaliação ipsativa

A avaliação ipsativa, no contexto educacional, foca no progresso pessoal do estudante ao longo do tempo. Ela permite a cada um perceber as próprias melhorias, identificar áreas de crescimento e estabelecer metas pessoais. Essa abordagem contrasta com as demais avaliações citadas, pois é particularmente motivadora, uma vez que destaca as conquistas individuais e incentiva a autoeficácia e a autoestima, assim como detecta lacunas de aprendizado. Além disso, é especialmente valiosa no Ensino Médio, podendo, inclusive, ser associada às definições de projeto de vida dos estudantes.

Como sugestões de instrumentos avaliativos, podemos citar: autoavaliação, para que os estudantes reflitam sobre as próprias habilidades e os conhecimentos desenvolvidos; diário de aprendizagem, para que eles registrem as próprias experiências de aprendizagem, reflexões, dúvidas e progressos diários ou semanais; contrato de estudo ou plano de estudo, no qual se explicitam os conteúdos, competências ou habilidades que serão trabalhados durante um período para que estes sejam acompanhados.

[2] MATUI, Jiron. *Construtivismo*. São Paulo: Moderna, 1995.

3.2.5. Avaliação somativa

A avaliação somativa é uma abordagem que visa avaliar a aprendizagem dos estudantes ao final de um período, como um semestre ou ano letivo, para determinar se eles alcançaram os objetivos estabelecidos e qual é o nível de competência que demonstram em relação aos conteúdos curriculares previstos.

Esse tipo de avaliação é frequentemente utilizado para atribuir notas e fornecer informações sobre a eficácia do ensino. Por isso, tem função regulatória, subsidiando decisões de recuperação, conselhos de classe e eventuais reprovações, se necessário.

No geral, a avaliação somativa é mensurada com instrumentos como: prova escrita (método tradicional de avaliação, na qual os estudantes respondem a perguntas ou realizam tarefas em período determinado); trabalho escrito (podendo incluir ensaios, relatórios de laboratório, resenhas de livros, pesquisas, entre outros) – usado para aferir a compreensão do conteúdo de modo mais elaborado do que em uma prova escrita; apresentação oral – permite aos estudantes demonstrar os conhecimentos e as habilidades de comunicação ao dissertar sobre um tema específico para o professor ou para a turma.

3.3. Trabalhando o Enem em sala de aula: estratégias para melhorar o desempenho dos estudantes

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), criado em 1998 pelo MEC, avalia a qualidade do Ensino Médio e oferece acesso ao Ensino Superior em universidades públicas e em redes particulares.

Seguem algumas estratégias específicas para trabalhar o Enem em sala de aula, visando melhorar o desempenho dos estudantes nas questões de Matemática e colaborar com o trabalho docente.

- **Revisão dos conceitos fundamentais:** priorize a revisão de tópicos essenciais, como Álgebra, Geometria, Trigonometria e Educação financeira, que são frequentemente abordados nas provas, e aprofunde conceitos básicos e avançados para garantir uma compreensão sólida pelos estudantes.
- **Resolução de problemas contextualizados:** utilize problemas que envolvam situações cotidianas, como cálculos financeiros e análise de gráficos e de dados estatísticos, para demonstrar a aplicação prática da Matemática e ajudar os estudantes a compreenderem a relevância dos conceitos aprendidos.
- **Utilização de simulados e exercícios práticos:** aplique simulados regulares com questões no estilo Enem para familiarizar os estudantes com o formato da prova e melhorar as habilidades de gerenciamento do tempo; após cada simulado, revise as questões e debata com eles estratégias de resolução.
- **Uso de tecnologia educacional:** incorpore ferramentas tecnológicas, como aplicativos de resolução de problemas e plataformas *on-line* de aprendizado, para diversificar o método de ensino e engajar os estudantes.
- **Incorporação de ferramentas tecnológicas:** proponha o uso de aplicativos de resolução de problemas matemáticos e plataformas *on-line* de aprendizado.

4. A coleção da área de Matemática e suas Tecnologias

4.1. Abordagem teórico-metodológica e pressupostos da coleção

A elaboração desta coleção apoia-se em pesquisas em Educação matemática sem perder de vista as orientações oficiais do MEC, de modo especial, a BNCC. Assim, as abordagens teórico-metodológicas que inspiraram esta coleção buscam auxiliar você, professor, a garantir a aprendizagem efetiva dos estudantes e o melhor aproveitamento deles na aquisição de conhecimentos de modo significativo.

Exatamente por isso, nas *Orientações gerais* deste Manual, abordamos aspectos que se entrecruzam na ação pedagógica e na prática educativa que envolvem a resolução e a elaboração de problemas, a argumentação (oral e escrita), a leitura inferencial e as análises (críticas, criativas e propositivas), a investigação científica, as metodologias ativas, o pensamento computacional, o uso pedagógico de tecnologias digitais e a Etnomatemática.

Especialmente sobre o trabalho pedagógico com a resolução e elaboração de problemas, vale destacar que, nesta coleção, procuramos instrumentalizar o estudante para resolver problemas reais. De acordo com a BNCC (Brasil, 2018a, p. 265), espera-se que os estudantes:

> desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações [...].

E isso nos leva a refletir sobre a importância de os problemas explorados em sala de aula serem contextualizados para dar sentido ao aprendizado.

Também pautaram a seleção dessa estrutura: o pluralismo de ideias e o convívio social republicano, a Cultura de Paz, a saúde mental dos estudantes, os TCTs e os princípios de educação integral, de respeito e valorização da diversidade, de relevância, de contemporaneidade e de colaboração. Mas, sem dúvida, o que predominou na seleção desse grupo de enfoques orientadores foi aquilo que eles apresentam e agregam como debates e pontos importantes a fim de que os objetivos de ensino, de aprendizagem e de desenvolvimento discente "ganhem vida" e venham a ser uma realidade possível.

4.2. Estrutura da coleção

Os 3 Volumes do Livro do Estudante desta coleção estão divididos em Unidades, que, por sua vez, são subdivididas em 2 a 4 capítulos cada uma. Cada Unidade apresenta, na **abertura da Unidade**, uma situação referente a algum tema dos capítulos, contendo questões contextualizadas para reflexão que visam preparar os estudantes para os conteúdos que serão abordados nas aulas seguintes.

A **abertura de capítulo** também apresenta situações-problema mais especificamente relacionadas ao conteúdo trabalhado, apresentando questões contextualizadas.

Os capítulos são compostos de tópicos de conteúdo teórico e variadas seções para serem trabalhadas ao longo do estudo.

- ***Atividades***: Essa seção ocorre ao longo do capítulo, intercalada com os tópicos de conteúdo teórico, e têm relação com o respectivo tópico. A seção apresenta atividades e problemas envolvendo contextos cotidianos, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, para o estudante aplicar e aprofundar os conteúdos estudados. Nela também há atividades que visam à elaboração de perguntas e problemas.
- ***Atividades resolvidas***: Nessa seção, há a apresentação da resolução detalhada de atividades e problemas, visando exemplificar estratégias de resolução. Algumas das atividades resolvidas apresentam, também, a resolução passo a passo de um problema, organizada em subtítulos: *Lendo e compreendendo*; *Planejando a solução*; *Executando o que foi planejado*; *Emitindo a resposta*; *Ampliando a atividade* (este é opcional). Perceba que essa seção é organizada de acordo com a perspectiva de resolução de problemas de Pólya.
- ***Tecnologias digitais***: A seção apresenta atividades de investigação, exploração e simulação para serem realizadas utilizando calculadoras, computadores ou *smartphones*, por meio de *softwares* ou aplicativos. Essa prática pode seguir ou preceder um conteúdo específico a ser estudado.
- ***Conexões***: Nessa seção, são propostos textos para leitura e interpretação sobre temas relevantes e atuais que relacionam diferentes áreas do conhecimento e saberes conectados à Matemática com questões para debate e pesquisa para aprofundamento.
- ***Além da sala de aula***: A seção propõe o desenvolvimento passo a passo de projetos interdisciplinares que devem ser executados pelos estudantes e, após o término, apresentados para a comunidade escolar. A ideia de haver mais de um projeto final é que o estudante tenha autonomia para escolher a proposta que faz mais sentido no contexto em que ele está inserido.

Além das seções citadas, os capítulos contêm boxes com diferentes finalidades.

- ***Explore para descobrir***: É um boxe que apresenta teoria e propostas de atividades de exploração, experimentação, verificação e sistematização dos conteúdos apresentados, possibilitando ao estudante formular ideias e criar estratégias.
- ***Sobre o assunto***: A proposta é trazer informações e curiosidades relacionadas aos conteúdos estudados, bem como sugestões de textos, vídeos, simuladores, *sites*, visitas a museus, entre outros, para complementar e aprofundar os estudos ou realizar pesquisas.
- ***Fique atento***: É um boxe que retoma definições ou nomenclaturas, chama a atenção para algo que está sendo estudado no momento e apresenta dicas que podem auxiliar no estudo.
- ***Reflita***: Esse boxe traz questionamentos e reflexões sobre o conteúdo apresentado.

Ao fim de cada Unidade, após o último capítulo, há ainda 2 seções específicas.

- ***Enem e vestibulares***: Essa seção contém sugestões de questões retiradas de provas recentes do Enem e de vestibulares de todas as regiões do Brasil, ela também pode ser utilizada como avaliação de processo e/ou como avaliação de resultado.
- ***Conteúdos e aprendizagens***: Essa seção apresenta um resumo esquemático dos principais pontos dos conteúdos estudados na Unidade. São também sugeridas questões para que o estudante faça uma autorreflexão sobre o próprio aprendizado, como propõe a avaliação ipsativa.

4.2.1. Objetos educacionais digitais da coleção

Cada Volume desta coleção também contém objetos educacionais digitais cujo objetivo é apresentar, retomar, aprofundar e complementar temáticas e conteúdos em estudo.

Para esses objetos, foram cuidadosamente elaborados carrosséis de imagens, vídeos, *podcasts*, infográficos e mapas clicáveis que, juntos, compõem com o livro uma gama de recursos pedagógicos que visam ampliar as oportunidades para a construção do conhecimento por meio da exploração de diferentes linguagens e tipos de mídia, auxiliando a aprendizagem dos estudantes com diferentes conhecimentos prévios e perfis de aprendizagens.

Os objetos educacionais digitais estão indicados no sumário do Livro do Estudante e nas páginas sugeridas para o trabalho. Você encontrará os seguintes ícones indicando a sugestão de um objeto educacional digital:



4.3. Sugestão de cronograma

Na proposta de organização de cronograma em semanas apresentada a seguir, consideramos um calendário escolar anual com previsão de 40 semanas letivas, que podem ser organizadas em bimestres, trimestres ou semestres, de acordo com a quantidade de aulas semanais, com as propostas curriculares estaduais e com o projeto político pedagógico da escola.

Essa distribuição das semanas letivas foi pensada considerando os conteúdos, as atividades e as seções presentes em cada Unidade e capítulo. Ressaltamos, contudo, a importância de também considerar a realidade dos estudantes e da escola e de ajustar o tempo previsto para os blocos pedagógicos, sempre que necessário, bem como alterar a ordem de conteúdos e seções ou ampliar o tempo de estudo dos tópicos, caso seja possível desenvolver mais propostas de pesquisas e de apresentações, metodologias ativas ou ações envolvendo a comunidade escolar.

Também é importante ponderar replanejamentos ao longo do ano letivo, de acordo com os conhecimentos prévios dos estudantes, a necessidade de recuperação de aprendizagens e os resultados dos diferentes tipos de avaliação aplicados no decorrer do ano letivo.

<table>
<tr><th colspan="5">Volume 1</th></tr>
<tr><th>Unidade e capítulo</th><th colspan="4">Sugestão de cronograma</th></tr>
<tr><td>Unidade 1: Conjuntos e função afim
Capítulo 1: Conjuntos</td><td>Semanas 1 a 3</td><td rowspan="3">1º bimestre</td><td rowspan="3">1º trimestre</td><td rowspan="5">1º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: A ideia de função</td><td>Semanas 4 e 5</td></tr>
<tr><td>Capítulo 3: A função afim</td><td>Semanas 6 a 11</td></tr>
<tr><td>Capítulo 4: Funções definidas por mais de uma sentença</td><td>Semanas 12 e 13</td><td rowspan="3">2º bimestre</td></tr>
<tr><td>Unidade 2: Função quadrática
Capítulo 1: A função quadrática</td><td>Semanas 14 a 16</td><td rowspan="3">2º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Análises algébrica e gráfica da função quadrática</td><td>Semanas 17 a 21</td></tr>
<tr><td>Unidade 3: Função exponencial
Capítulo 1: Potenciação e radiciação</td><td>Semanas 22 a 24</td><td rowspan="3">3º bimestre</td><td rowspan="5">2º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: A função exponencial</td><td>Semanas 25 a 28</td></tr>
<tr><td>Unidade 4: Função logarítmica
Capítulo 1: Logaritmo</td><td>Semanas 29 e 30</td><td rowspan="4">3º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: A função logarítmica</td><td>Semanas 31 a 34</td><td rowspan="3">4º bimestre</td></tr>
<tr><td>Unidade 5: Sequências e progressões
Capítulo 1: Sequências</td><td>Semana 35</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Progressão aritmética</td><td>Semanas 36 e 37</td></tr>
<tr><td>Capítulo 3: Progressão geométrica</td><td>Semanas 38 a 40</td></tr>
</table>

Volume 2				
Unidade e capítulo	**Sugestão de cronograma**			
Unidade 1: Regiões planas e área Capítulo 1: Medida de área de regiões planas	Semanas 1 a 5	1º bimestre	1º trimestre	1º semestre
Capítulo 2: Ladrilhamento	Semanas 6 e 7			
Unidade 2: Geometria espacial Capítulo 1: Introdução à Geometria espacial	Semanas 8 a 10			
Capítulo 2: Prisma e cilindro	Semanas 11 a 15	2º bimestre		
Capítulo 3: Pirâmide e cone	Semanas 16 a 18		2º trimestre	
Capítulo 4: Esfera e projeções cartográficas	Semanas 19 a 21			
Unidade 3: Trigonometria Capítulo 1: Semelhança de polígonos	Semanas 22 e 23	3º bimestre		2º semestre
Capítulo 2: Relações trigonométricas	Semanas 24 a 27			
Capítulo 3: Conceitos trigonométricos básicos na circunferência	Semanas 28 a 30		3º trimestre	
Capítulo 4: Funções trigonométricas	Semanas 31 a 33	4º bimestre		
Unidade 4: Matrizes, determinantes e sistemas lineares Capítulo 1: Matrizes e determinantes	Semanas 34 a 36			
Capítulo 2: Sistemas lineares	Semanas 37 a 40			

Volume 3				
Unidade e capítulo	**Sugestão de cronograma**			
Unidade 1: Geometria no plano cartesiano Capítulo 1: Geometria analítica: ponto, reta e circunferência	Semanas 1 a 4	1º bimestre	1º trimestre	1º semestre
Capítulo 2: Transformações geométricas	Semanas 5 a 7			
Unidade 2: Educação financeira Capítulo 1: Fundamentos de Matemática financeira	Semanas 8 a 12			
Capítulo 2: Planejamento e gestão de orçamento pessoal	Semanas 13 a 16	2º bimestre	2º trimestre	
Unidade 3: Análise combinatória e probabilidade Capítulo 1: Análise combinatória: diferentes estratégias de contagem	Semanas 17 a 21			
Capítulo 2: Probabilidade	Semanas 22 a 26	3º bimestre		2º semestre
Unidade 4: Estatística Capítulo 1: Introdução à Estatística	Semanas 27 a 32		3º trimestre	
Capítulo 2: Medidas de tendência central e medidas de dispersão	Semanas 33 a 36	4º bimestre		
Unidade 5: Computação Capítulo 1: Um pouco da história	Semanas 37 e 38			
Capítulo 2: Algoritmos e fluxogramas Capítulo 3: Conceitos iniciais de programação	Semanas 39 e 40			

Para conduzir as aulas com esta coleção, a formação disciplinar do professor deve ser prioritariamente de Matemática.

Para as aulas conjuntas com professores de outras áreas do conhecimento ou outros componentes curriculares, conforme exemplos comentados nas *Orientações específicas* deste Manual, bem como nas orientações que constam nas páginas do Livro do Estudante, planeje antecipadamente o cronograma com os professores envolvidos, como serão ministradas as dinâmicas das aulas e, principalmente, o tempo e o período de duração das propostas.

5. Referências complementares para aprofundamento

Todos os *sites* foram acessados em 8 set. 2024.

5.1. *Sites*

- Canal Futura. Disponível em: https://tedit.net/u2s8rj.
  O Canal Futura, em conjunto com iniciativas privadas, disponibiliza um portal com vários artigos e vídeos (inclusive videoaulas).
- Instituto Ayrton Senna. Disponível em: https://tedit.net/99y0m2.
  O Instituto Ayrton Senna disponibiliza vários cursos gratuitos para a formação continuada do professor.
- Movimento pela Base. Disponível em: https://tedit.net/xxd3dh.
  O portal, mantido por um grupo de apoiadores da BNCC e da educação, disponibiliza uma série de artigos, vídeos e cursos sobre educação.
- Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: https://tedit.net/9ulmhg.
  Nesse *site*, você pode obter informações, provas e gabaritos da competição que é dirigida a estudantes de todo o país, a partir do 6º ano.
- Portal do professor. Disponível em: https://tedit.net/8cvkhm.
  Espaço para acessar sugestões de planos de aula, mídias de apoio, notícias sobre educação e iniciativas do MEC. Nele, você também pode compartilhar planos de aula, participar de debates ou fazer cursos.
- Portal IBGE Educa. Disponível em: https://tedit.net/xlct5g.
  Nesse portal oficial do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), há disponibilização de vários dados de pesquisas estatísticas sobre a população brasileira.
- Projecto Pólya. Disponível em: https://tedit.net/cwgjxf.
  Site do Centro de Matemática da Universidade do Porto (Portugal) especializado na resolução de problemas matemáticos.

5.2. *Podcasts* e vídeos

- Lógica, Matemática e linguagem cotidiana. Disponível em: https://tedit.net/iixbnb.
  Esse vídeo, apresentado pelo professor titular da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP), Nílson José Machado, mostra algumas explicações a respeito dos conceitos de lógica.
- Matemática Humanista. Disponível em: https://tedit.net/geu59c.
  Podcast mantido pelo educador e matemático brasileiro Carlos Eduardo Mathias Motta (1968-) até o ano de 2020, com debates principalmente sobre o ensino de Matemática, com temas como Etnomatemática, dimensões éticas das práticas matemáticas, avaliação, uso pedagógico da calculadora, entre outros.
- Minuto IBGE. Disponível em: https://tedit.net/f4k52s.
  Podcasts curtos, em torno de 1 minuto cada um, trazendo dados e curiosidades obtidos pelo IBGE. Novos áudios são lançados semanalmente e disponibilizados gratuitamente para todas as emissoras de rádio brasileiras.
- Nada Sei. Disponível em: https://tedit.net/7fuxmb.
  Podcasts mantidos pelo Instituto Ayrton Senna que tratam de aspectos distintos da educação no Brasil.
- O homem que viu o infinito
  O filme é baseado na história real do matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920), que fez importantes contribuições para a Teoria dos números e frações contínuas.
- Portal Domínio Público. Disponível em: https://tedit.net/vijv2q.
  Nesse *site* são disponibilizados vídeos que auxiliam o professor no trabalho em sala de aula.
- Quebrando a banca
  Filme baseado em fatos reais que conta a história de um estudante do Instituto de Tecnologia de Massachusetts que, junto de colegas, criou um método para ter vantagem em um famoso jogo de cartas.
- TV Escola. Disponível em: https://tedit.net/mo5scz.
  O portal do TV Escola disponibiliza vídeos com variadas aplicações de conteúdos em situações simples do dia a dia.

5.3. Revistas e periódicos de Educação matemática

- *Bolema*. Disponível em: https://tedit.net/xanusm.
  Boletim de Educação matemática (Bolema) publicado pelo Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp), *campus* de Rio Claro (SP).
- Publicações da Sbem. Disponível em: https://tedit.net/jx6muo.
  Publicações de periódicos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem) sobre Educação matemática.
- *Revista Brasileira de História da Matemática*. Disponível em: https://tedit.net/9n5t42.
  Site com as publicações da *Revista Brasileira de História da Matemática*, da Sociedade Brasileira de História da Matemática
- *Revista EMP*. Disponível em: https://tedit.net/5lat9i.
  A revista *Educação Matemática Pesquisa (EMP)*, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, faz quadrimestralmente divulgações científicas da área, em âmbito internacional.

5.4. Publicações sobre História da Matemática

- BERLINGHOFF, W. P. *A Matemática através dos tempos*: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.
  Nesse livro, o autor apresenta um panorama de pessoas e eventos importantes na história e na construção da Matemática atual.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher: Edusp, 1974.
  Uma grande referência em História da Matemática, esse livro apresenta a evolução da Matemática desde a origem do conceito dos números até as descobertas matemáticas do século XX.
- CARVALHO, D. L. de; MIGUEL, A.; MENDES, I. A.; BRITO, A. de J. *História da Matemática em atividades didáticas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

Nesse livro, o ensino da Matemática é abordado por meio de atividades nas quais a História da Matemática exerce papel central.

- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

  Um grande referencial da História da Matemática, esse livro apresenta narrativas históricas desde a Antiguidade, contextualizadas em panoramas culturais da época abordada.

5.5. Publicações sobre Educação matemática

- BORBA, M. de C. *Tendências internacionais em formação de professores de Matemática*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

  O livro apresenta a experiência de alguns trabalhos de Educação matemática desenvolvidos internacionalmente, relacionando-os com a realidade do ensino brasileiro.

- D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação*: reflexões sobre educação e Matemática. São Paulo/Campinas: Summus/Unicamp, 1986.

  Nesse livro, o autor apresenta um enfoque crítico do que se faz na Educação matemática em diferentes sistemas educacionais, refletindo sobre o relacionamento entre Matemática e bem-estar social.

- NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (org.). *A formação do professor que ensina Matemática*: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

  Nesse livro, os autores demonstram a preocupação com a formação do professor, apresentando perspectivas e resultados de pesquisa de formação docente no campo da Educação matemática.

- PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

  Apresentando práticas de investigação que podem ser levadas para as aulas de Matemática, como a criação de conjecturas, a reflexão e a formalização do conhecimento, esse livro traz resultados de pesquisas sobre as vantagens e as dificuldades de se trabalhar com tal perspectiva em Educação matemática.

- POWELL, A.; BAIRRAL, M. *A escrita e o pensamento matemático*: interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.

  O livro exemplifica e disserta sobre como diferentes tipos de tarefas escritas podem auxiliar os estudantes no aprendizado matemático e no ensino e desenvolvimento profissional, tanto em sala de aula como em aulas à distância.

- POZO, J. I. *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998.

  De acordo com o que o autor propõe nesse livro, ensinar a resolver problemas em cada área do conhecimento significa enfatizar o ensino dos procedimentos e o papel fundamental do professor no incentivo da criação de estratégias por parte dos estudantes.

5.6. Publicações sobre metodologia do ensino de Matemática

- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2006.

  Partindo da conceituação informal da modelagem matemática até chegar à aplicação em problemas complexos e sofisticados, o autor demonstra como a modelagem pode ser aplicada às mais diversas situações, com distintos graus de dificuldade e precisão.

- BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

  Livro concebido com o propósito de auxiliar os professores brasileiros a introduzir nas escolas a aprendizagem baseada em projetos.

- PAIS, L. C. *Ensinar e aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

  O autor propõe nesse livro uma reflexão sobre os aspectos metodológicos do ensino da Matemática, atento à subjetividade do processo cognitivo e à relação entre o saber matemático e os desafios inerentes às ações integradas ao ensino e à aprendizagem escolar.

5.7. Publicações sobre educação

- COLL, C. *et al*. *Psicologia da educação virtual*: aprender e ensinar com as tecnologias da informação e da comunicação. São Paulo: Penso, 2010.

  Esse livro apresenta uma reflexão a respeito do impacto das tecnologias da informação e comunicação nos processos de ensino e aprendizagem.

- FREIRE, P.; SHOR, I. *Medo e ousadia*: o cotidiano do professor. São Paulo: Paz e Terra, 2014.

  Nesse livro, os autores destacam a necessidade da visão colaborativa na construção do conhecimento.

- MORIN, E. *A cabeça bem-feita*: repensar a reforma, reformar o pensamento. Lisboa (Portugal): Bertrand, 2009.

  Nesse livro, o autor defende as razões pelas quais o ensino transdisciplinar é essencial para a formação de cidadãos capazes de lidar com o mundo atual.

- PERRENOUD, P. *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed, 1999.

  Esse livro apresenta perspectivas e limitações na prática em sala de aula para a construção de competências e a transposição didática.

- SARMENTO, M. *et al*. *O futuro alcançou a escola?* O aluno digital, a BNCC e o uso de metodologias ativas de aprendizagem. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

  Nesse livro, vários artigos abordam os novos rumos da educação no Brasil, em um sentido de aproximação com as dinâmicas de sala de aula.

- VALENTE, J. A. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador. *In*: *Tecnologia, currículo e projetos*. Disponível em: https://tedit.net/ruh47I.

  Nesse capítulo do livro, o autor apresenta uma coleção de artigos referentes às novas maneiras de ensinar e desenvolver o currículo ao integrar tecnologias digitais à prática pedagógica voltada à aprendizagem significativa dos estudantes.

- ZABALA, A. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

  O autor propõe, nesse livro, pautas e orientações sobre a ação educativa a partir de uma perspectiva de análise e reflexão.

Orientações específicas

Organização e conteúdos do Volume

Conforme descrevemos nas *Orientações gerais* deste Manual, na concepção desta coleção estão intrínsecas as habilidades e competências específicas da Matemática e suas Tecnologias descritas para o Ensino Médio na BNCC, bem como as competências gerais da Educação Básica e os Temas Contemporâneos Transversais. Isso é percebido em cada Unidade e capítulo de todos os Volumes da coleção, tanto no Livro do Estudante quanto nas orientações apresentadas neste Manual do Professor.

O Livro do Estudante deste Volume **2** tem 4 Unidades, cada uma delas organizada em 2 a 4 capítulos.

Na Unidade **1**, Regiões planas e área, são revistos e aprofundados os conceitos de medida de área de regiões planas como regiões delimitadas por retângulos, triângulos, trapézios, losangos e circunferências e a determinação das expressões para o cálculo dessas medidas. Ainda dentro desta Unidade, é também revisto o conceito de ladrilhamento no plano, com a explanação de ladrilhamento regular e semirregular.

Na Unidade **2**, Geometria espacial, os estudantes terão a oportunidade de rever alguns pontos de Geometria já estudados no Ensino Fundamental e aprofundar esses conhecimentos ao estudar os sólidos geométricos e como determinar as medidas de superfície, volume e capacidade, com destaque para o estudo das projeções cartográficas após o estudo da esfera.

Na Unidade **3**, Trigonometria, retomamos o teorema de Tales. Depois, exploram-se os conceitos de semelhança de polígonos e de triângulos. Em seguida, são trabalhadas as relações trigonométricas no triângulo retângulo, a lei dos senos e a lei dos cossenos. Finalmente, são estudados conceitos trigonométricos na circunferência, como arcos e ângulos.

Na Unidade **4**, Matrizes, determinantes e sistemas lineares, são estudadas a importância das matrizes e suas aplicações, sua relação com os determinantes e os sistemas lineares de equações, que podem ser discutidos algébrica ou graficamente, além de procedimentos de cálculo para a obtenção das raízes que são as soluções para o sistema.

Avaliação de aprendizagem

Tendo em vista que a avaliação deve ser formativa e contínua, conforme explicitamos nas *Orientações gerais* deste Manual, sugerimos que você organize previamente momentos avaliativos no início de cada bloco pedagógico (Unidade ou capítulo, por exemplo), no decorrer dos blocos e ao término do desenvolvimento deles. Esses momentos, combinados com as avaliações contínuas e com os registros de acompanhamento das avaliações, darão conta dos múltiplos aspectos do processo avaliativo.

Por exemplo, no início de cada capítulo, mensure os conhecimentos prévios dos estudantes para diagnosticar as aprendizagens já efetivadas e aquelas que ainda precisam ser retomadas ou recuperadas para possibilitar o melhor desenvolvimento das aprendizagens do capítulo. Após o estudo de determinado tópico ou capítulo, cada estudante, individual ou coletivamente, e mediado por você, pode mensurar a própria compreensão dos objetos do conhecimento e dos conteúdos mobilizados, bem como pode verificar como está desenvolvendo as habilidades relacionadas. Com esse tipo de avaliação qualitativa sistemática, também se torna possível que você faça ajustes nos percursos e metodologias de ensino ao longo do bloco pedagógico, levando em conta as aprendizagens já desenvolvidas pelos estudantes.

Ainda pensando nos processos de avaliação, visto que uma mesma questão de exames de larga escala pode mobilizar diversos conteúdos estudados, ela também pode constituir a avaliação formativa de uma rede de aprendizagens e habilidades. Assim, avalie a pertinência de sugerir as atividades da seção *Enem e vestibulares* ao término da Unidade ou no decorrer do estudo dela.

Unidade 1: Regiões planas e área

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01; CG02; CG03; CG05; CG07; CG09.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01; CEMAT03; CEMAT05.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT105; EM13MAT307; EM13MAT308; EM13MAT315; EM13MAT505.
- Habilidades de outras áreas do conhecimento. EM13LGG602; EM13LGG301; EM13CNT101.
- Temas Contemporâneos Transversais: *Ciência e Tecnologia*; *Direitos da Criança e do Adolescente*; *Diversidade Cultural*; *Educação Ambiental*; *Saúde*; *Trabalho*.

Objetivos pedagógicos

- Determinar expressões para o cálculo da medida de área de regiões planas, sejam elas poligonais ou circulares.
- Interpretar e compreender textos divulgados pela mídia que empregam unidades de medida de área.
- Investigar a área do círculo e de outras formas circulares, como o setor circular e a coroa circular.
- Utilizar tecnologias digitais para determinar a medida de área de regiões poligonais.
- Investigar com quais regiões poligonais ou composições de regiões poligonais é possível cobrir perfeitamente o plano, utilizando ou não tecnologias digitais.
- Utilizar noções de transformações geométricas para realizar construções geométricas.

Sugestões para o desenvolvimento das aulas

Neste tópico, apresentaremos mais sugestões de abordagens, específicas para a Unidade, pensando nas propostas pedagógicas que motivaram a elaboração dos conteúdos, das atividades e das seções do capítulo.

Abertura da Unidade

A imagem apresentada na abertura desta Unidade, assim como os textos e as perguntas propostas, tem o intuito não apenas de introduzir os conteúdos que serão estudados no capítulo, mas também de instigar os estudantes a fazer uma investigação crítica sobre a importância da preservação da Amazônia Legal. Tal abordagem permeia o Tema Contemporâneo Transversal *Educação Ambiental*. Se possível, incentive-os a compartilhar o que sabem desse assunto.

Para responder às questões propostas, peça aos estudantes que pesquisem a diferença entre a porção de área chamada Amazônia Legal e a porção de área que compõe a Floresta Amazônica. Depois, promova uma roda de conversa para discutir as descobertas. Aproveite essa oportunidade para destacar a importância da preservação da biodiversidade e do planejamento para o desenvolvimento sustentável dessa região, tão importante para o Brasil e para o mundo. Caso considere necessário, peça a colaboração de professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Antes da realização do segundo item, ressalte a importância de usar fontes confiáveis para realizar a pesquisa. Incentive-os a compartilhar com os colegas as informações obtidas e, se julgar oportuno, promova outra roda de conversa. Esse trabalho favorece a aplicação da metodologia ativa método do caso ou discussão e solução dos casos. Além disso, o trabalho de pesquisa e o compartilhamento de informações promovem o desenvolvimento da **CG07**.

Capítulo 1

As situações-problema **1** e **2** têm como objetivo retomar o conteúdo de medida de área proposto pela BNCC nos Anos Finais do Ensino Fundamental e introduzir o conteúdo que será tratado neste tópico.

Na situação-problema **1**, propomos uma investigação com foco na determinação da medida de área de uma região retangular por meio de uma situação cotidiana. Verifique se os estudantes obtiveram a relação esperada e a medida de área da região retangular. Se necessário, corrija os itens coletivamente.

A imagem apresentada na situação-problema **1** – meninas jogando basquete – remete a um tema extremamente importante: promover positivamente a imagem da mulher, considerando sua participação em diferentes esportes.

Na situação-problema **2**, trabalha-se a noção de área considerando a ideia de um pixel como unidade de medida de área, o que faz uma relação com a formação das imagens nas telas de televisão, computadores e outros dispositivos eletrônicos.

No tópico "Região limitada por um quadrado", no *Explore para descobrir* (p. 17), são propostos alguns questionamentos e raciocínios por meio de analogias que levam os estudantes a concluir que a medida de área de uma região quadrada, cuja medida de comprimento do lado é um número racional, é dada também pelo quadrado da medida de comprimento do lado. As atividades propostas favorecem o desenvolvimento da **CG02**, uma vez que promovem a investigação, a reflexão e a criação de soluções.

O *Reflita* (p. 19) do tópico "Região limitada por um paralelogramo" propõe aos estudantes que procurem outra estratégia para obter a mesma expressão para o cálculo da medida de área de uma região limitada por um paralelogramo. Perceba se eles conseguem; caso tenham dificuldade, sugira utilizarem a ideia de uma região retangular de medidas de lado iguais às do paralelogramo.

Para o desenvolvimento das atividades propostas no *Explore para descobrir* (p. 22) do tópico "Região limitada por um triângulo equilátero", providencie com antecedência palitos de sorvete de madeira e fita adesiva. Momentos como este, em que os estudantes podem experimentar, por meio de material concreto (neste caso, estrutura com palitos e fita adesiva), uma propriedade matemática (no caso, a rigidez triangular), aproximam a área de Matemática e suas Tecnologias da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, sobretudo no tocante ao pensamento empírico, cerne do pensamento científico. Sempre que possível, mesmo quando os experimentos com material concreto não sejam viáveis, incentive os estudantes a conjecturar as próprias hipóteses e a testar a veracidade ou não dessas conjecturas. Essas ações contribuem para a formação matemática deles e para a capacidade de argumentação e de comunicação, que propiciam o desenvolvimento da **CG01** e da **CG02**.

No tópico "Região limitada por um polígono regular", a estratégia para a obtenção da expressão para o cálculo da

medida da área de uma região limitada por um polígono regular é pela sua decomposição em triângulos isósceles. É importante que os estudantes compreendam também a ideia da medida de comprimento do apótema do polígono.

Nas atividades **2**, **4**, **5**, **6** e **7**, os estudantes terão de utilizar as expressões obtidas anteriormente para obter a medida de área de uma superfície em situações reais, como medida de área de um terreno, e o valor arrecadado com uma produção de soja. Essas atividades contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307**.

Para responder ao item **b** da atividade **6**, reforce a importância de utilizar fontes confiáveis. Eles podem consultar, por exemplo, o *site* do Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (Cepea) da Universidade de São Paulo (USP). Disponível em: https://tedit.net/yunfry. Acesso em: 18 set. 2024.

Na atividade **3**, espera-se que os estudantes percebam que não é possível responder à pergunta, pois faltam dados (a medida de abertura do ângulo formado pelos lados do paralelogramo). Verifique se eles chegam a essa conclusão e mostre-lhes que paralelogramos com as mesmas medidas de comprimento dos lados não necessariamente têm a mesma medida de área.

Na resolução da atividade **8**, aproveite o texto para promover uma discussão entre os estudantes a respeito dos direitos de acessibilidade e inclusão, além do combate ao preconceito contra pessoas que usam cadeira de rodas. Faça questionamentos como "A norma apresentada no texto é cumprida pela escola", "Essa norma costuma ser cumprida nos estabelecimentos que você frequenta?", "Qual é a importância de cumprir as normas de acessibilidade?". Verifique se eles têm conhecimento das normas de acessibilidade que edifícios, mobiliários, espaços e equipamentos urbanos são obrigados a seguir. Se julgar oportuno, antes de propor esta atividade, peça a eles que pesquisem mais o assunto.

Mais sobre o assunto

Para consultar o texto completo da norma brasileira NBR 9050, é só acessar a própria norma, disponível em: https://tedit.net/1lxurn. Acesso em: 18 set. 2024.

No tópico "Região determinada por um círculo", apresentamos, de maneira breve, um pouco da história do círculo e do número π com as tentativas para determinar a medida de área de um círculo e as aproximações usadas para esse número ao longo da História.

Mais sobre o assunto

Para saber mais da história do círculo e do número π, sugerimos a leitura do livro *História da Matemática*, de Carl B. Boyer (São Paulo: Edgard Blucher: Edusp, 1974).

O livro *A área e o perímetro de um círculo*, de Sônia Pinto de Carvalho, apresenta, nos capítulos 4 e 9, algumas maneiras de determinar a medida de área de um círculo e de estimar o número π. Disponível em: https://tedit.net/r5wj4o. Acesso em: 18 set. 2024.

Alguns cálculos de medidas de áreas circulares específicas são discutidos nos tópicos "Setor circular" e "Coroa circular".

Verifique se os estudantes percebem que a atividade **14** tem excesso de dados e, caso não percebam, chame a atenção deles para o fato de o valor do terreno não ser necessário para determinar a medida de área.

A atividade **17** envolve o conceito de radioatividade de elementos químicos, de modo que esta atividade propicia um momento oportuno para trabalhar em conjunto com os professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Pode-se, também, aproveitar o tema do acidente na usina nuclear de Chernobyl (1986) para apresentar aos estudantes o contexto histórico e científico atrelado ao acidente, bem como as consequências da radiação, que são visíveis até os dias atuais. O item **b** propõe uma pesquisa sobre outros acidentes nucleares, como o do Césio 137, que ocorreu em Goiânia em 1987, e o de Fukushima, no Japão, em 2011.

A atividade **18** apresenta uma técnica de irrigação muito utilizada na agricultura, a do pivô central. Os conhecimentos mobilizados nesta atividade, para obter a receita bruta de acordo com a produtividade de certa área, promovem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307**.

No tópico "Regiões poligonais semelhantes e razão entre as medidas de área", fazemos a ampliação do conceito de semelhança ao estabelecer que as medidas de áreas entre polígonos semelhantes também podem ser relacionadas à razão de semelhança entre eles.

A atividade **21** aborda um tema relacionado ao Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia* com propósito interdisciplinar e de aplicação de um conteúdo matemático sobre a utilização de fios com diferentes seções transversais (bitolas) para transmissão de energia elétrica. É importante que seja feita a escolha correta do fio, de acordo com a medida de área da seção transversal do fio em uma instalação elétrica.

Devido ao fenômeno chamado efeito Joule, quanto maior a resistividade de um fio (ou qualquer condutor de energia elétrica), mais calor é gerado. Assim, valores muito elevados de resistividade podem causar até mesmo o derretimento dos fios, resultando em acidentes graves, inclusive incêndios, se não houver um planejamento correto das instalações elétricas residenciais. Existem regras da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) para assegurar que sejam utilizados fios adequados nas instalações.

No tópico "Cálculo aproximado de medidas de área", exploramos a determinação de medidas de área de regiões poligonais e de regiões irregulares por aproximação, utilizando a decomposição em regiões poligonais menores, como os quadriculados indicados nos exemplos dados. Essas situações promovem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307**.

A atividade **27** apresenta outra estratégia para a determinação da medida de área de uma região limitada por um polígono, utilizando o teorema de Pick. Se possível, antes de propor a realização desta atividade, calcule com os estudantes a medida de área da figura apresentada como exemplo.

A atividade **29** propicia o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**, pois os estudantes vão representar, por meio de um fluxograma, o passo a passo da reorganização de uma região poligonal qualquer em uma região quadrada.

Conexões (p. 30)

Esta seção busca contextualizar o estudo de unidades de medida de área a partir do cultivo da mandioca, atividade muito importante para diversas regiões brasileiras. Dessa maneira, sob a perspectiva da Etnomatemática, as atividades propostas têm como objetivo valorizar a cultura local ao propor uma reflexão a respeito das diferentes unidades de medida de área que podem ser utilizadas como referência para a comunidade em que os estudantes estão inseridos. Ao mencionar a tarefa como unidade de medida de área alternativa ao metro quadrado, busca-se também valorizar os conhecimentos dos povos do campo, mais especificamente da cidade de Igarapé-Açu, no Pará.

Se julgar oportuno, de modo a valorizar ainda mais a cultura local, proponha que os estudantes elaborem um livro de receitas que tenham a mandioca ou um derivado dela como um dos ingredientes principais. Para isso, é interessante que eles perguntem a familiares, conhecidos e funcionários da escola sobre os diferentes tipos de preparo que eles conhecem com esses ingredientes.

Outra possibilidade é propor uma pesquisa a respeito das diferentes maneiras de se consumir a mandioca e derivados entre as regiões do Brasil, como o polvilho, utilizado para fazer pão de queijo em Minas Gerais, e o tucupi, consumido principalmente nos estados da região Norte do país, evidenciando, assim, a diversidade da cultura brasileira refletida na culinária típica de cada região. Aproveite a oportunidade também para destacar os diferentes nomes pelos quais a mandioca é conhecida em cada região do país.

O momento ainda deve ser aproveitado para discutir sobre a liberdade de uso da terra e de escolha das possibilidades de plantio e formas de consumir os alimentos, favorecendo, assim, o trabalho com a soberania alimentar.

Tecnologias digitais (p. 40)

Nesta seção, mostramos como podemos realizar o cálculo aproximado da medida de área de uma região poligonal utilizando tecnologia digital.

Para que os estudantes verifiquem na prática que, quanto menores as regiões em que a figura é dividida, em geral, mais próxima a soma das medidas de área dessas regiões estará da medida de área da figura, proponha a eles que determinem a medida de área aproximada da figura **2** e comparem com o resultado obtido para a figura **1**.

As atividades propostas na seção favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307**.

Conexões (p. 44)

Nesta seção, são apresentadas características da Geometria que são empregadas em diferentes representações artísticas, sobretudo, nas ilustrações a mão livre, exemplificadas na obra de Leonardo Da Vinci, bem como na releitura dessa obra, utilizando-se a representação do mangá (traço característico das histórias em quadrinhos japonesas).

As atividades propostas promovem o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG602** e **EM13LGG301** da área de Linguagens e suas Tecnologias, bem como da área de Matemática e suas Tecnologias, abordando a habilidade **EM13MAT105**, que envolve o uso de Geometria, transformações e proporções em diversas produções humanas.

Capítulo 2

Na abertura deste capítulo, apresentamos a obra *Peixes*, do artista holandês Maurits Cornelis Escher. Se julgar oportuno, aproveite esse momento para explorar outras obras desse artista, como *Lagartos* (1942) e *Ave peixe* (1938). Esse e outros momentos do capítulo são uma boa oportunidade para promover o trabalho com a **CG03**, por meio da apresentação e apreciação de produções artísticas. Além disso, essa é uma boa ocasião para trabalhar em conjunto com o professor de Arte, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

No tópico "A ideia de ladrilhamento", abordamos algumas características e propriedades do ladrilhamento do plano. Os estudantes serão convidados a investigar com quais regiões poligonais ou composições de regiões poligonais é possível cobrir perfeitamente o plano e verificar as condições para pavimentar o plano com regiões poligonais.

Proponha aos estudantes que analisem o padrão na imagem da colmeia e se ele poderá ser utilizado para pavimentar o plano. As explorações investigativas propostas nessas situações favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT505**.

Para resolver a questão proposta no *Reflita* (p. 51) do tópico "Ladrilhamentos regulares e ladrilhamentos semirregulares", sugerimos que utilize um *software* de Geometria dinâmica para mostrar que não é possível ladrilhar um plano usando apenas heptágonos regulares. Temos como resposta para esse questionamento:

A medida de abertura dos ângulos internos do heptágono regular é dada por $a_i = \frac{(7-2)\cdot 180^\circ}{7} = \frac{900^\circ}{7} \simeq$ $\simeq 128^\circ\ 34'$.

Justapondo 2 heptágonos, forma-se um ângulo cuja medida de abertura é aproximadamente 257° 09'; justapondo 3 deles, a medida de abertura é 385° 43'. Portanto, não é possível formar um ângulo cuja medida de abertura seja 360° usando exclusivamente heptágonos.

Para formar um ângulo com medida de abertura igual a 360°, são necessários ao menos 3 polígonos e, como estudado, ao justapor 3 polígonos regulares com 7 lados ou mais, já se obtém um ângulo com medida de abertura maior do que 360°; portanto, não é possível compor um ladrilhamento limitado por apenas um desses tipos de polígono.

No *Explore para descobrir* (p. 51) do tópico "Ladrilhamentos regulares e ladrilhamentos semirregulares", são propostos alguns questionamentos e raciocínios por meio de analogias, cujo objetivo é possibilitar que os estudantes analisem algumas das condições para pavimentar o plano com regiões poligonais. Com isso, serão desenvolvidas a **CG02** e a habilidade **EM13MAT505**.

Acompanhe as resoluções dos itens da atividade **1** do *Explore para descobrir* (p. 51) desse tópico.

a) Há 6 regiões em torno do vértice destacado, congruentes entre si e na forma de triângulo equilátero. Portanto, representamos a quantidade de lados das regiões e as medidas de abertura dos ângulos, respectivamente, por (3, 3, 3, 3, 3, 3) e (60°, 60°, 60°, 60°, 60°, 60°).

b) Há 4 regiões em torno do vértice destacado, congruentes entre si e na forma de quadrado. Portanto, representamos a quantidade de lados das regiões e as medidas de abertura dos ângulos, respectivamente, por (4, 4, 4, 4) e (90°, 90°, 90°, 90°).

c) Há 3 regiões em torno do vértice destacado, 1 na forma de quadrado, 1 na forma de hexágono regular e 1 na forma de dodecágono regular. Portanto, representamos a quantidade de lados das regiões e as medidas de abertura dos ângulos, respectivamente, por (4, 6, 12) e (90°, 120°, 150°).

d) Há 3 regiões em torno do vértice destacado, 1 na forma de quadrado e 2 na forma de octógono regular. Portanto, representamos a quantidade de lados das regiões e as medidas de abertura dos ângulos, respectivamente, por (4, 8, 8) e (90°, 135°, 135°).

e) Há 4 regiões em torno do vértice destacado, 2 na forma de triângulo equilátero e 2 na forma de hexágono regular, intercaladas entre si. Portanto, representamos a quantidade de lados das regiões e as medidas de abertura dos ângulos, respectivamente, por (3, 6, 3, 6) e (60°, 120°, 60°, 120°).

f) Há 5 regiões em torno do vértice destacado, 4 na forma de triângulo equilátero e 1 na forma de hexágono regular. Portanto, representamos a quantidade de lados das regiões e as medidas de abertura dos ângulos, respectivamente, por (3, 3, 3, 3, 6) e (60°, 60°, 60°, 60°, 120°).

Na atividade **5**, se os estudantes apresentarem dificuldade para identificar qual é a figura, resolva a atividade coletivamente.

Tecnologias digitais (p. 48)

Nesta seção, os estudantes serão convidados a utilizar um *software* de Geometria dinâmica para construir diferentes tipos de malha a partir de um polígono regular. Assim, para melhor aproveitamento, sugerimos o uso de dispositivo eletrônico, por exemplo, computador ou *smartphone*.

Verifique se os estudantes perceberam que, no caso da malha hexagonal, é preciso definir duas listas para cada vetor. Chame a atenção deles para o fato de a lista **L1** consistir em uma sequência de hexágonos horizontalmente dispostos que correspondem a translações do primeiro hexágono traçado, **pol1**, segundo o vetor u. Da mesma maneira, a lista **L2** consiste em uma sequência de translações do hexágono **pol2** também segundo o mesmo vetor u. Já as listas **L3** e **L4** são responsáveis por replicar esses hexágonos na vertical. Se necessário, solicite a eles que verifiquem isso após a inclusão de cada comando.

Depois do 4º passo, aproveite para fazer alguns questionamentos, por exemplo: "Quantos hexágonos serão criados quando $n = 1$? E quando $n = 2$, $n = 3$? Que relação você observou?".

Além da sala de aula (p. 55)

Nesta seção, conheceremos um pouco da história da estadunidense Marjorie Rice (1923-2017), uma mulher brilhante que, apenas com os conhecimentos de Matemática do Ensino Médio, resolveu o problema matemático publicado pelo escritor e matemático estadunidense Martin Gardner (1914-2010) na revista *Scientific American*. Rice, apesar do interesse pela Matemática, não estava habituada à linguagem acadêmica que os articulistas utilizavam, o que implicou um preconceito por parte da sociedade matemática da época.

O objetivo nesta seção é aproximar o conhecimento científico e matemático do estudante, mostrando contribuições significativas para essa área do conhecimento produzidas por pessoas que não estão dentro das universidades, favorecendo a visibilidade do pluralismo de ideias ao mostrar que essas conquistas científicas são feitos de toda uma comunidade. Também temos como objetivo a valorização da mulher como figura central na produção de conhecimento, de riquezas e de negócios. Além de Marjorie Rice, podem ser citadas cientistas ou empreendedoras influentes que contribuíram em diferentes áreas, por exemplo: a inglesa Ada Lovelace (1815-1852; matemática e escritora); a estadunidense Katherine Johnson (1918-2020; física e cientista espacial); a polonesa Marie Curie (1867-1934; física e química); a estadunidense Joy Mangano (1956- ; inventora e empresária).

Mais sobre o assunto

Se julgar interessante, sugira aos estudantes que leiam o texto a seguir, que apresenta a trajetória de algumas mulheres que contribuíram para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

BIOGRAFIAS. *Mulheres na Matemática*, Rio de Janeiro, c. 2023. Disponível em: https://tedit.net/y95x6n. Acesso em: 17 jul. 2024.

A proposta do *Indo além* visa promover um ambiente de valorização das mulheres da comunidade escolar e do entorno da escola. Os filmes selecionados narram a história de mulheres que lutaram contra o preconceito social, racial e de gênero para realizar suas atividades profissionais e vocacionais. Após as sessões, promova uma roda de conversa tratando dos temas supracitados; essas discussões e situações levantadas favorecem o combate ao preconceito contra a mulher.

O projeto pode ser desenvolvido com a colaboração do professor de História. Ele pode auxiliá-lo na contextualização da época em que as narrativas apresentadas nos filmes se desenrolaram e estabelecer um paralelo com a situação atual na luta pela equidade e pelo direito das mulheres, além de contribuir para a moderação das discussões que serão realizadas após a exibição dos filmes.

Aproveite para, ao longo do projeto, conversar com os estudantes sobre a distinção e a desigualdade de gênero e sociocultural, que podem reduzir o espaço da mulher tanto no que diz respeito à inserção dela no ensino acadêmico quanto no convívio em espaços tradicionalmente considerados masculinos. Em relação à equidade de gênero, citem algumas iniciativas que buscam estimular a produção científica feita por mulheres e promover a participação delas em áreas de Ciências da Computação e Matemática. Por exemplo: o Mulher e Ciência ou o *Code Girl*. Incentive-os também a conhecer as iniciativas do Sebrae que apoiam mães empreendedoras (disponível em: https://tedit.net/aosf99. Acesso em: 18 set. 2024).

As discussões promovidas por esta seção, assim como as atividades propostas, contribuem para o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia*, bem como da habilidade **EM13MAT505** e das competências **CG01**, **CG02**, **CG07**, **CG09**.

Mais sobre o assunto

Sugerimos as seguintes referências bibliográficas para complementar o tema discutido:

- O espectro da eugenia na universidade. Revista *Pesquisa Fapesp*, São Paulo, ed. 264, fev. 2018. Boas Práticas. Disponível em: https://tedit.net/k5mcwr. Acesso em: 18 set. 2024.
- NUCCI, Marina Fisher. *O sexo do cérebro*: uma análise sobre gênero e ciência. Disponível em: https://tedit.net/jdiykn. Acesso em: 18 set. 2024.
- IGNOTOFSKY, Rachel. *As cientistas*: 50 mulheres que mudaram o mundo. Brasil: Editora Blucher, 2017.

Mais atividades

1. Proponha aos estudantes que visitem o *site* do artista Escher e que, em grupos, escolham alguma das obras do artista. A galeria virtual de Escher está disponível em: https://tedit.net/gbzf5c, acesso em: 18 set. 2024. Nesta atividade, proponha a eles que identifiquem os padrões e os conceitos matemáticos presentes nas obras selecionadas. Essa exploração promove o desenvolvimento da **CG03**, e esse pode ser um trabalho em conjunto com o professor de Arte.

Resolução:

Resposta pessoal.

2. Também em conjunto com o professor de Arte, sugere-se uma pesquisa sobre outros artistas que trabalhem com mosaicos, que é um tipo de ladrilhamento. Um dos mais renomados é o espanhol Antoni Gaudí. Os estudantes podem pesquisar e apresentar para os demais colegas as obras dos artistas selecionados.

Resolução:

Resposta pessoal.

Unidade 2: Geometria espacial

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01; CG02; CG04; CG06; CG07; CG09; CG10.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01; CEMAT02; CEMAT03; CEMAT05.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT102; EM13MAT201; EM13MAT309; EM13MAT314; EM13MAT504; EM13MAT509.
- Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13CNT301.
- Temas Contemporâneos Transversais: *Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Ambiental*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Saúde*.

Objetivos pedagógicos

- Conhecer os princípios básicos da Geometria espacial: ponto, reta e plano e suas posições relativas e distâncias.
- Distinguir poliedros convexos de não convexos e saber aplicar a relação de Euler.

- Determinar expressões para o cálculo da medida de área da superfície de sólidos geométricos em situações reais.
- Utilizar diferentes métodos para a obtenção da medida de volume de um sólido geométrico.
- Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da medida de área da superfície e da medida de volume de um sólido geométrico.
- Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada por diferentes projeções cartográficas.

Abertura da Unidade

As imagens e os textos de abertura desta Unidade visam não apenas instigar os estudantes, mas também aproximar do cotidiano deles o conteúdo abordado na Unidade.

Além disso, com o tema apresentado na abertura, procura-se promover, de maneira positiva, os conhecimentos empíricos utilizados por alguns pedreiros. Explore com os estudantes os conhecimentos matemáticos utilizados por profissionais da construção civil, por exemplo, para determinar a quantidade de material que será utilizado para construir um alicerce, a medida de área de uma parede, entre outros. Tal exploração promove o estudo por uma perspectiva da Etnomatemática e favorece o desenvolvimento da **CG01**.

Durante a exploração das páginas de abertura, busque relacionar os conteúdos de Geometria espacial, que serão abordados na Unidade, com a construção de alicerces e baldrames e a importância deles para tornar uma construção sólida. Se julgar oportuno, assista com eles ao vídeo *Matemática na construção*, da série Matemática em toda parte (disponível em: https://tedit.net/52wsbr. Acesso em: 18 set. 2024).

Mais sobre o assunto

Para auxiliar na exploração da abertura do capítulo, sugerimos a leitura do seguinte artigo:

CAMBIRIBA, Sergio da Silva; FILHO, Dante A. M. *Explorando conteúdos matemáticos envolvidos na construção de uma casa*. Disponível em: https://tedit.net/23p4o1. Acesso em: 18 set. 2024.

Capítulo 1

Na situação-problema (p. 62) apresentada na abertura do capítulo, o objetivo é que os estudantes associem, de maneira informal, as peças do cubo mágico aos elementos do sólido geométrico cubo. No item **a**, por exemplo, é obtida a quantidade de peças de centro do cubo; no item **b**, a quantidade de peças de meio; no item **c**, a quantidade de peças de quina do cubo; e no item **d**, a quantidade de adesivos que existem em um cubo mágico.

No tópico "Posições relativas: ponto e reta; ponto e plano", abordamos as posições relativas de pontos, de retas e de planos. No *Reflita* (p. 63) desse tópico, caso os estudantes apresentem dificuldade para identificar a posição dos pontos em relação aos planos α e β, reproduza a ilustração na lousa e identifique-a com eles.

No tópico "Posições relativas de pontos no espaço", retome com os estudantes que os axiomas são afirmações admitidas como verdadeiras sem a necessidade de demonstração. Perceba também se eles compreendem bem os conceitos que estão sendo estudados, pois os temas seguintes vão aprofundar esses conceitos.

A maneira como esses conteúdos vem sendo abordados e as atividades abordadas a seguir favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático de abdução.

Nas atividades **1** a **3**, os estudantes deverão utilizar os conteúdos referentes a pontos, retas e planos e posições relativas.

Nos tópicos "Projeção ortogonal de 1 ponto sobre 1 plano" e "Distâncias", serão discutidos os temas distância ortogonal de um ponto sobre o plano, distância entre 2 pontos e distâncias entre retas paralelas.

Perceba que, para a resolução da atividade **4**, será necessário mobilizar alguns conteúdos de Geometria plana, como o teorema de Pitágoras e o conceito de ponto médio.

No tópico "Poliedro", apresentamos a definição desses sólidos geométricos e os elementos dos poliedros. Avalie se os estudantes percebem que a quantidade mínima de faces de um poliedro é 4, como questiona o *Reflita* (p. 76) desse tópico.

No tópico "Relação de Euler", reforce com os estudantes o conceito apresentado no *Fique atento* (p. 77). Já o tópico "Poliedro regular" apresenta a definição desses poliedros e suas propriedades.

As atividades **7** a **11** discutem a aplicação da relação de Euler para diferentes poliedros convexos.

A atividade **13** favorece o Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia* ao aplicar a relação de Euler em uma situação de desenvolvimento de uma bola de futebol que foi utilizada na Copa do Mundo de 2002.

Capítulo 2

Na situação-problema da abertura, solicitamos a observação de alguns tambores, cujo formato é parecido com o de um cilindro, e de um teclado, cujo formato lembra o de um prisma. Em seguida, propomos aos estudantes que identifiquem o formato das bases do cilindro, pensem em um modo de representar a planificação da sua superfície e criem uma estratégia para determinar a medida de área da superfície desse sólido. Assim, eles contribuirão para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT309** e da **CG02**. Aproveite para relacionar o cilindro com o prisma em relação ao par de bases paralelas.

Perceba que os exemplos apresentados favorecem o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal *Diversidade Cultural*. Também são apresentadas possibilidades de visitas *on-line* no *Sobre o assunto*.

No *Explore para descobrir* do tópico "Medida de área da superfície de um prisma", propomos, por meio de atividades, que os estudantes concluam que a medida de comprimento da diagonal de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões têm medidas de comprimento a, b e c, é igual a $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, e que a medida de comprimento da diagonal de um cubo, cuja aresta tem medida de comprimento a, é igual a $a\sqrt{3}$. Essas relações podem auxiliá-los na resolução das atividades propostas para este e para os próximos tópicos. A exploração desse boxe propicia o desenvolvimento da **CG02**.

Perceba que as atividades **6** a **9** deste tópico apresentam situações contextualizadas, reforçando a importância do estudo e compreensão do tema deste capítulo.

No tópico "Medida de volume de um prisma", reforce a compreensão da ideia de uma unidade de medida de volume como sendo a medida de volume de um cubo unitário, pois, a partir dessa compreensão, será estudada a medida de volume de um paralelepípedo retângulo.

No item **b** das *Atividades resolvidas – Ampliando a atividade* (p. 91), propõe-se uma discussão a respeito da importância do correto armazenamento de produtos consumíveis e das consequências do armazenamento incorreto, além de uma reflexão acerca do processo de produção, transporte e venda desses produtos. Sugerimos que seja disponibilizado um tempo para que os estudantes possam pesquisar um pouco mais esse assunto e, posteriormente, que seja organizada uma roda de conversa para discutirem esses temas. Comente com eles que o armazenamento incorreto de produtos perecíveis pode ocasionar, por exemplo, a degradação e a contaminação dos produtos, gerando desperdício e, até mesmo, provocando intoxicação alimentar. Aproveite para conscientizá-los do desperdício e do consumo consciente de alimentos. Essa discussão favorece o desenvolvimento da **CG07** e dos Temas Contemporâneos Transversais *Saúde* e *Educação para o Consumo*.

Nas atividades **13** e **17**, reforce as unidades de medida de volume e de capacidade.

No tópico "Princípio de Cavalieri", se julgar oportuno, reproduza as pilhas de folhas de papel ilustradas para mostrar que qualquer plano horizontal que secciona as 3 pilhas terá intersecções de mesma medida de área, e, mesmo inclinando um pouco o empilhamento, a medida de volume continuará a mesma. Essa abordagem favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT504**.

No *Reflita* (p. 92) desse tópico, espera-se que os estudantes percebam que poderiam usar o mesmo raciocínio, mas utilizando um paralelepípedo retângulo, agora que já sabem como calcular a medida de volume para obter a medida de volume de um prisma qualquer.

O tópico "Medida de volume de um prisma qualquer" demonstra o uso do princípio de Cavalieri para o cálculo dessa medida. Parte das atividades propostas contribui para desenvolver o raciocínio lógico-matemático de analogia.

Nas atividades **18** a **20**, os estudantes devem interpretar, compreender e resolver problemas que envolvem propriedades dos prismas, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT309**.

Na atividade **21**, eles devem determinar a medida de volume de um prisma em um contexto diferente, desde quanto material é utilizado para confeccionar uma peça até o rendimento de uma produção de humo. Essas descrições e o contexto apresentado promovem positivamente a imagem dos povos do campo.

A atividade **22** não tem resolução, pois faltam dados. Verifique se os estudantes perceberam isso e, caso contrário, comente com eles.

Mais sobre o assunto

Sugerimos a leitura da reportagem "Coração é impresso em 3D a partir de tecido humano". Disponível em: https://tedit.net/qvked2. Acesso em: 18 set. 2024.

Se julgar oportuno, antes da apresentação do tópico "Medida de volume de um cilindro", questione os estudantes se o princípio de Cavalieri poderia ser utilizado para obter a medida de volume de um cilindro e permita que compartilhem algumas estratégias.

No item **b** das *Atividades resolvidas – Ampliando a atividade* (p. 106) do tópico "Medida de volume de um cilindro", propõe-se aos estudantes que realizem uma pesquisa sobre consumo de água. Aproveite o momento para reforçar a importância de sempre utilizarem fontes confiáveis de pesquisa.

Além disso, sugerimos que seja disponibilizado um tempo para que os estudantes compartilhem com os colegas o resultado da pesquisa. Aproveite para conscientizá-los do desperdício de água e comente que a reutilização de água pode ser feita até mesmo em casa, por exemplo, ao reaproveitar a água descartada pela máquina de lavar roupa para lavar o quintal e outros cômodos da casa e, até mesmo, armazenar água da chuva para regar as plantas, entre outras possibilidades. Com isso, estará sendo favorecido o desenvolvimento dos Temas Contemporâneos Transversais *Educação para o Consumo* e *Educação Ambiental*.

A atividade **38** apresenta uma situação envolvendo a tradição local de uma comunidade quilombola no Tocantins de cozinhar em um fogão caipira, que é feito de barro e abastecido com carvão. Esse carvão pode ser produzido com o coco-babaçu pela própria comunidade. Desse modo, estão sendo favorecidas as competências gerais

CG01 e **CG06**, além do Tema Contemporâneo Transversal *Diversidade Cultural*.

A atividade **44** apresenta uma questão que envolve o consumo de água em estabelecimentos comerciais, favorecendo a habilidade **EM13MAT309** e o Tema Contemporâneo Transversal *Educação para o Consumo*. Já a atividade **46**, ao abordar um tema de um procedimento médico, a angioplastia coronária, favorece o Tema Contemporâneo Transversal *Saúde*.

Conexões (p. 97)

Nesta seção, são abordadas atividades com propósito interdisciplinar e de aplicação do conteúdo matemático sobre a utilização das Tecnologias 3-D. A Tecnologia 3-D é o processo de criar digitalmente objetos, personagens, cenários e fenômenos em 3 dimensões por meio de cenas estáticas ou animadas. Procure explorar os filmes da categoria animação, feitos de modelagens 3-D animadas de personagens. Outra aplicação revolucionária dessa tecnologia se dá no setor industrial, seja pelos programas de modelagem 3-D, que permitem a construção de um modelo digital de uma peça, que posteriormente será construída por um torno do tipo CNC (*Computer Numeric Control*), seja, até mesmo, pelas impressoras 3-D, que permitem realizar impressões perfeitas de objetos e que podem ser utilizadas em diferentes áreas, como na elaboração de próteses ortodônticas. Explore com os estudantes essas possibilidades e o quão presente a modelagem 3-D está em nosso cotidiano tecnológico. O trabalho nesta seção favorece o desenvolvimento da **CG01**.

A aplicação da tecnologia e do conhecimento científico e tecnológico para resolver problemas do mundo favorece o desenvolvimento das **CECNT01** e **CECNT03** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Desse modo, a aplicação do conhecimento científico no enfretamento de situações-problema favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT301**. Nesta seção, também são trabalhados os Temas Contemporâneos Transversais *Ciência e Tecnologia* e *Saúde*.

Tecnologias digitais (p. 107)

Oriente os estudantes na escolha do *software* ou aplicativo mais adequado às construções propostas, de modo que o programa escolhido apresente todas as funcionalidades necessárias para o desenvolvimento das atividades indicadas a seguir. Auxilie-os também nas explorações iniciais do programa e na identificação das ferramentas e das configurações disponíveis, além de como acessá-las.

Incentive os estudantes a explorar a barra de ferramentas da janela de visualização 3-D do *software* selecionado, para que se familiarizem com as ferramentas disponíveis.

Além da sala de aula (p. 112)

Nesta seção, abordamos o funcionamento de uma cisterna. A construção desse tipo de equipamento é uma estratégia que muitas comunidades localizadas em regiões com baixo índice pluviométrico adotam para armazenar água da chuva. Buscando um melhor aproveitamento desta atividade, sugerimos que seja realizado um trabalho em conjunto com professores das áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias – Física e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas – Geografia, favorecendo o trabalho interdisciplinar.

Apresentamos um modelo de cisterna com explicação de como foi construída. No decorrer da seção, os estudantes são convidados a mobilizar os conhecimentos adquiridos até o momento para determinar, por exemplo, a medida de capacidade de uma cisterna e o que é necessário para a construção.

Sugerimos que, inicialmente, seja proposto aos estudantes que pesquisem o conceito de índice pluviométrico e levantem dados sobre esses índices referentes à região em que moram. Após esse levantamento, discuta com eles os dados obtidos e se a região apresenta baixa ou alta pluviosidade. Essa abordagem favorece o desenvolvimento da **CG02**.

Promova uma conversa a respeito do gasto de água e quanto poderia ser economizado. Em particular, é possível dizer que o consumo diário de água por pessoa no Sertão do Brasil, cerca de 40 L/dia, é muito menor do que o recomendado pela ONU, de 110 L/dia. Essa atividade promove o favorecimento do Tema Contemporâneo Transversal *Educação para o Consumo*.

Nas propostas do *Indo além*, avalie, com os estudantes e em conjunto com a direção da escola, se é viável a construção de uma cisterna para melhor uso da água no ambiente escolar. Caso seja viável, permita que os estudantes participem da etapa de planejamento da construção da cisterna, auxiliando, por exemplo, na identificação do melhor local para construí-la e no levantamento dos custos e da quantidade do material necessário.

Caso os estudantes optem por atender a uma demanda específica da comunidade no entorno da escola, verifique a viabilidade desse projeto e o interesse na construção de uma cisterna. Em caso positivo, verifique, em conjunto com a direção da escola, se é possível promover um encontro na própria escola para que os estudantes possam auxiliá-los na modelagem do problema e no levantamento de custos e material de construção.

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT201** e **EM13MAT309**, bem como as **CG01**, **CG04**, **CG07**, **CG09** e **CG10**. Além disso, permeia o Tema Contemporâneo Transversal *Educação para o Consumo*.

Mais sobre o assunto

Nos documentos apresentados a seguir, é possível obter mais informações a respeito das etapas de construção de uma cisterna.

- CEARÁ. Secretaria dos Recursos Hídricos. Cisterna de placas: construção, uso e conservação. Secretaria dos Recursos Hídricos: Fortaleza, 2010. Disponível em: https://tedit.net/bv37mv. Acesso em: 18 set. 2024.
- ARAÚJO, João B. C. *et al*. Implantação de cisterna calçadão em área de quintal produtivo. Fortaleza: Embrapa Agroindústria Tropical, 2018. Disponível em: https://tedit.net/0vjvct. Acesso em: 18 set. 2024.

Capítulo 3

A situação-problema (p. 114) apresentada no início deste capítulo permite relacionar os conteúdos da área de Matemática e suas Tecnologias com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, promovendo o desenvolvimento da **CG01**. Sugerimos como complemento a essa atividade, além de abordar as pirâmides egípcias, uma breve contextualização sobre as pirâmides na América do Sul e na América Central, uma herança dos povos incas e astecas. Se considerar necessário, peça a colaboração de professores das áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

A segunda imagem apresenta construções com telhados em forma de cone. Verifique se os estudantes respondem corretamente às questões propostas sobre a diferenciação entre esses sólidos geométricos.

No tópico "As pirâmides", são apresentadas as características das pirâmides, a formalização do conceito e os tipos de pirâmides que existem: as retas e as oblíquas. Além disso, são discutidas as características das pirâmides regulares e seu caso especial, o tetraedro. Reforce que as pirâmides são nomeadas conforme o polígono que compõe a sua base.

No tópico "Medida de área da superfície de uma pirâmide", são definidos os elementos que compõem as faces e bases das pirâmides. Como faces e bases são sempre figuras poligonais, as expressões para os cálculos das medidas de áreas já foram discutidas anteriormente, de modo que a seção *Atividades* a seguir apresenta propostas para que esses cálculos sejam aplicados.

Nas atividades **1** a **3**, os estudantes devem interpretar, compreender e resolver problemas de diferentes contextos e que envolvem o cálculo da medida de área da superfície de pirâmides. Essas atividades favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT309**.

No tópico "Medida de volume de uma pirâmide", caso seja necessário no estudo do cálculo da medida de volume de uma pirâmide, retome com os estudantes o conceito de polígonos semelhantes.

O *Fique atento* (p. 118) desse tópico retoma o conceito de tronco de pirâmide. Explique que a medida de volume desse sólido pode ser obtida a partir das medidas de volume da pirâmide de que esse sólido faz parte e da pirâmide menor, obtida ao seccionar um plano paralelo à base da pirâmide.

Verifique com os estudantes que a medida de volume de pirâmides também obedece ao princípio de Cavalieri, se as suas condições forem satisfeitas, o que é explicitado no tópico "Cálculo da medida de volume de uma pirâmide qualquer".

Nas atividades **5** a **10**, os estudantes devem interpretar, compreender e resolver problemas de diferentes contextos e que envolvem o cálculo da medida de volume de pirâmides. Essas atividades favorecem o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT309** e **EM13MAT504**.

No tópico "Os cones", serão apresentados a formalização do conceito de cone, os tipos de cones que existem – reto e oblíquo – e suas planificações e seus elementos. No tópico "Secções do cone reto", são discutidas as características da secção transversal e meridiana de um cone reto. No *Sobre o assunto* (p. 126) desse tópico, é apresentado um vídeo da Matemateca que conta com um acervo de objetos que contribuem para a divulgação da Matemática de maneira lúdica.

No tópico "Medida de área da superfície de um cone reto", reproduza a planificação do cone na lousa para facilitar a demonstração da expressão para o cálculo da medida da área lateral do cone.

As atividades **11** a **18** propõem que os estudantes determinem a medida de área da superfície de um cone em diferentes contextos, promovendo, assim, o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT309**.

A atividade **17** aborda um tema social, a construção de cisternas, o que facilita um trabalho integrado com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Se julgar oportuno, peça a colaboração de professores dessa área.

Tecnologias digitais (p. 133)

Para iniciar as atividades propostas nesta seção, incentive os estudantes a explorar a barra de ferramentas da janela de visualização 3-D, para que se familiarizem com as ferramentas disponíveis.

Verifique se os estudantes fazem a leitura atenta das orientações, para que consigam obter o máximo aproveitamento das atividades.

Capítulo 4

Na situação-problema **1** (p. 135), é proposta uma investigação utilizando decoração com frutas que tenham formato esférico e cortes seccionais. Se possível, disponibilize material concreto, como massa de modelar, para que os estudantes possam fazer as secções solicitadas nos itens **a** e **b**.

Na situação-problema **2** (p. 136), introduzimos o termo "cartografia" e exploramos a planificação de parte da superfície do globo terrestre com o objetivo de trabalhar

o conceito de projeção cartográfica. No item **a**, pode-se sugerir aos estudantes que pensem na planificação dos sólidos estudados, para que possam imaginar em quais casos a imagem ficaria parecida com a do mapa-múndi.

No tópico "Um pouco da história da medida de volume de uma esfera", destacamos a importância do trabalho de Arquimedes para encontrar as medidas de área e de volume de alguns sólidos redondos. Se julgar oportuno, explore o conteúdo desta seção em conjunto com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, mostrando os aspectos da história das Ciências Naturais, como a evolução do pensamento científico e a contribuição de vários estudiosos para a construção do conhecimento e das informações a que temos acesso hoje. Esse trabalho favorece o desenvolvimento da **CG01**.

No *Explore para descobrir* (p. 140) do tópico "Explorando o cálculo da medida de área da superfície da esfera", são propostos alguns questionamentos que levam o estudante a determinar uma expressão para o cálculo da medida de área de uma superfície esférica utilizando os conteúdos estudados até o momento. As atividades propostas neste boxe proporcionam o desenvolvimento da **CG02**.

Com base nas demonstrações feitas no tópico anterior, no tópico "Formalizando o cálculo da medida de área de uma superfície esférica" é proposto o cálculo da medida de área de uma superfície esférica de raio com medida de comprimento igual a 9 cm.

Mais sobre o assunto

Uma possível demonstração da expressão utilizada para calcular a medida de área de uma superfície pode ser consultada na dissertação "Áreas e volumes: uma abordagem ao livro *A Matemática do Ensino Médio*", de José Claudemir de Menezes. Disponível em: https://tedit.net/9wn0po. Acesso em: 18 set. 2024.

Nas atividades **1** a **15**, são apresentadas situações de diversos contextos em que os estudantes terão que determinar a medida de área de uma superfície esférica ou de um fuso esférico e a medida de volume de uma esfera ou de uma cunha esférica para resolver o problema proposto.

No tópico "Sistema de coordenadas geográficas", se julgar oportuno, apresente aos estudantes a página do *site* do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística sobre Cartografia, que apresenta *links* para vários temas relacionados, como latitude e longitude. Disponível em: https://tedit.net/fxir1m (acesso em: 18 set. 2024.).

No tópico "Projeções cartográficas", são apresentados alguns sistemas de projeções cartográficas: a projeção cilíndrica, a projeção cônica, a projeção azimutal e a projeção de Robinson, que é a mais utilizada atualmente para representar o globo terrestre.

Na atividade **23**, analise como os estudantes colocam as respostas, se eles percebem as manifestações de colonialismo ainda presentes e como avaliam o movimento decolonialista. Proponha que apresentem outras situações de influência colonialista ainda existentes atualmente – como na moda, cinema, língua, música – e se conseguem dar exemplos de decolonialidade. Se julgar interessante, proponha um trabalho conjunto com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Esta proposta aborda os Temas Contemporâneos Transversais *Diversidade Cultural* e *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*.

Tecnologias digitais (p. 148)

Propomos, nesta seção, a investigação das deformações apresentadas nas medidas de área e nas medidas de ângulos na representação de países na projeção de Mercator. Para essa investigação, usaremos o *site* https://tedit.net/pvucmf, que permite comparar visualmente a medida de área de diversos países.

O *site* é uma ferramenta digital gratuita cuja operação se dá de maneira mais eficaz em computadores, mas também pode ser acessado por meio de *smartphones*, com um grau maior de dificuldade em razão da otimização da aplicação para esses aparelhos.

Os estudantes podem trabalhar em duplas ou trios para a exploração desse *site* e a realização das atividades propostas.

Mais atividades

1. Uma sugestão de atividade é aprofundar a proposta de utilização do *site* *The True Size Of...* para discutir mais a fundo a questão da utilização de projeções cartográficas em mapas visando reduzir o tamanho e possivelmente a importância real de certas localidades.

Resolução:

Resposta pessoal.

Unidade 3: Trigonometria

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01; CG02; CG03; CG04; CG05; CG06; CG07; CG09.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT03.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT306; EM13MAT308.
- Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13CNT204; EM13CNT206; EM13CNT301; EM13CNT309; EM13LGG104; EM13LGG602; EM13LGG701; EM13LGG703; EM13LGG704; EM13CHS304.

- Temas Contemporâneos Transversais: *Diversidade Cultural; Educação Ambiental*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras.*

Objetivos pedagógicos

- Estudar o teorema de Tales e suas aplicações.
- Reconhecer a semelhança e a congruência de figuras e polígonos, bem como as relações métricas em triângulos retângulos, e utilizar essas relações para resolver e elaborar problemas.
- Explorar e compreender as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente em triângulos retângulos e as relações entre elas e usá-las para resolver e elaborar problemas.
- Compreender a lei dos senos e a lei dos cossenos em triângulos quaisquer e usá-las para resolver e elaborar problemas.
- Explorar situações relacionadas a fenômenos reais periódicos.
- Compreender conceitos trigonométricos relacionados à circunferência.
- Conhecer a definição de seno e cosseno de números reais e as definições das funções trigonométricas seno e cosseno.
- Compreender a representação de fenômenos reais periódicos por funções que envolvem seno e cosseno.
- Construir os gráficos de funções trigonométricas no plano cartesiano, com o uso de tabela de pontos e com o apoio de tecnologia digital.
- Resolver e elaborar problemas relacionados a fenômenos reais periódicos, comparando com as características das funções trigonométricas seno e cosseno.

Abertura da Unidade

O fenômeno periódico da maré tem despertado a curiosidade de estudiosos desde a Antiguidade, em diferentes épocas e localizações. Podemos encontrar estudos desse movimento realizados por Johan Bernoulli (1667-1748), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Charles Darwin (1809-1882) e Arthur Thomas Doodson (1890-1968), entre outros.

Ao explorar esse assunto na abertura da Unidade, incentive a pesquisa e a socialização das respostas dadas pelos estudantes com o intuito de verificar se eles compreenderam os conceitos abordados no texto, como força e período. Caso vivam ou tenham vivido em cidades litorâneas, terão mais informações da própria cultura local para compartilhar, assim como das atividades e profissões cuja rotina é eventualmente afetada pelas marés.

Capítulo 1

Na situação-problema (p. 158) apresentada na abertura do capítulo, a proporcionalidade entre as medidas de comprimento dos lados das telas de televisores permite explorar o conceito de semelhança de retângulos. Nesse caso, a proporcionalidade das medidas de comprimento e de largura é suficiente para verificar o conceito de semelhança, uma vez que todos os ângulos internos de um retângulo qualquer são retos. No entanto, é importante ter em mente que, para verificar se 2 polígonos são semelhantes, deve-se considerar as medidas de abertura dos respectivos ângulos correspondentes.

No tópico "Formalizando o teorema de Tales", ressalte que esse teorema, atribuído ao matemático grego Tales de Mileto, afirma que, se representarmos retas paralelas que intersectam 2 retas transversais, os segmentos de reta correspondentes nas transversais são proporcionais. Essa propriedade permite a construção de figuras geométricas proporcionais e é amplamente utilizada para resolver problemas envolvendo proporções e semelhanças.

No tópico "Figuras semelhantes", o estudo de figuras semelhantes é essencial em várias áreas da Matemática e da Ciência, pois nos permite entender como objetos podem ser redimensionados sem perder suas propriedades fundamentais. Um exemplo clássico é o redimensionamento de mapas ou desenhos técnicos, em que as figuras são ampliadas ou reduzidas, mas ainda mantêm as proporções entre as medidas de comprimento e as medidas de abertura de ângulo.

No tópico "Polígonos semelhantes", ao ensinar esses conceitos em sala de aula, é importante enfatizar a interconexão entre o teorema de Tales, figuras semelhantes e polígonos semelhantes. Uma atividade interessante pode envolver o uso de material manipulativo, como réguas, transferidores e compasso, para que os estudantes possam explorar a proporcionalidade e a semelhança na prática. Outro aspecto relevante é a contextualização desses conceitos em problemas do cotidiano. O teorema de Tales pode ser aplicado em situações práticas, como a aferição de medidas de altura de objetos distantes. Figuras e polígonos semelhantes podem ser explorados no contexto de redimensionamento de desenhos, Engenharia e Arquitetura, oferecendo aos estudantes uma visão prática e contextualizada da Matemática. Assim, ao abordar esses temas de maneira integrada, o professor oferece aos estudantes uma compreensão mais profunda e significativa da Geometria, conectando o conhecimento teórico a situações do mundo real.

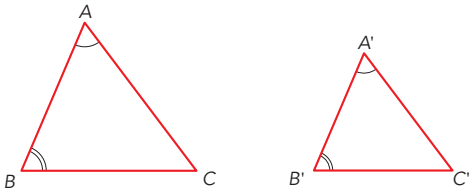
No tópico "Formalizando o conceito de semelhança de triângulos", retome os 3 casos apresentados no livro e combine com os estudantes como será feita a retomada

e a pesquisa da demonstração de cada um deles. Eles podem se organizar em 3 grupos, cada um ficando responsável por apresentar a demonstração de um dos casos para toda a turma.

Acompanhe a demonstração.

1º caso: AA (ângulo, ângulo)

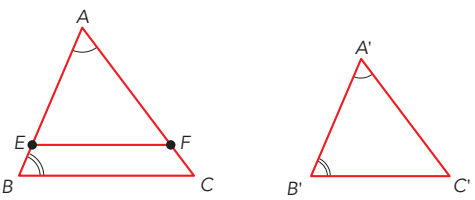
Ilustrações:WYM Design/ Arquivo da editora



Se $AB = A'B'$, então os triângulos são congruentes ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$) e, então, também são semelhantes ($\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$), pois 2 triângulos congruentes são semelhantes com razão de semelhança igual a 1.

Se $AB \neq A'B'$, então vamos analisar o caso $AB > A'B'$. Marcamos o ponto E em $\overline{AB}$ de modo que $AE = A'B'$; e traçamos $\overline{EF} \,//\, \overline{BC}$.

Ilustrações: WYM Design/ Arquivo da editora



Podemos afirmar que $A\hat{E}F \cong A\hat{B}C$ (ângulos correspondentes de retas paralelas intersectadas por uma transversal) e, como $\hat{B} \cong \hat{B'}$, temos $A\hat{E}F \cong \hat{B'}$.

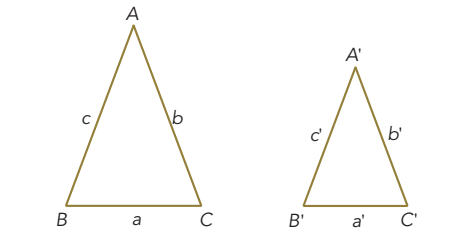
De $\hat{A} \cong \hat{A'}$, $\overline{AE} \cong \overline{A'B'}$ e $A\hat{E}F \cong \hat{B'}$, temos que $\triangle AEF \sim \triangle A'B'C'$.

Pela propriedade fundamental da semelhança de triângulos (se representarmos um segmento de reta paralelo a qualquer um dos lados de um triângulo e ficar determinado outro triângulo, então este triângulo será semelhante ao primeiro), temos $\triangle ABC \sim \triangle AEF$.

Portanto, como $\triangle ABC \sim \triangle AEF$ e $\triangle AEF \sim \triangle A'B'C'$, temos $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, como queríamos demonstrar.

2º caso: LLL (lado, lado, lado)

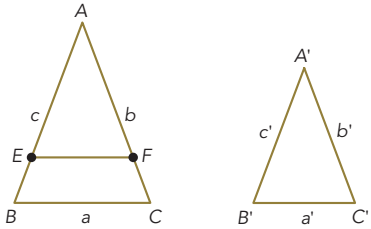
Ilustrações: WYM Design/ Arquivo da editora



Se $AB = A'B'$, então $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = 1$, e os triângulos são congruentes ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$) e, também, são semelhantes ($\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$), pois 2 triângulos congruentes são semelhantes com razão de semelhança igual a 1.

Se $AB = A'B'$, então vamos analisar o caso $AB > A'B'$. Marcamos o ponto E em $\overline{AB}$ de modo que $AE = A'B'$; e representamos $\overline{EF} \,//\, \overline{BC}$.

Ilustrações:WYM Design/ Arquivo da editora



Podemos afirmar que $A\hat{E}F \cong A\hat{B}C$ e que $A\hat{F}E \cong A\hat{C}B$ (ângulos correspondentes de retas paralelas cortadas por uma transversal) e, como $\hat{A} \cong \hat{A}$, temos $\triangle ABC \sim \triangle AEF$.

Agora precisamos mostrar que $\triangle AEF \cong \triangle A'B'C'$.

Sabemos que $\overline{AE} \cong \overline{A'B'}$ e, como $\triangle ABC \sim \triangle AEF$, temos:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{a} = \frac{AF}{b} = \frac{c'}{c}$$

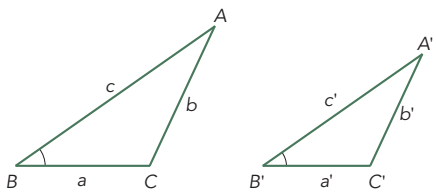
Como $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, temos: $EF = a'$ e, então, $\overline{EF} \cong \overline{B'C'}$; $AF = b'$ e, então, $\overline{AF} \cong \overline{A'C'}$.

Logo, temos $\triangle AEF \cong \triangle A'B'C'$.

Portanto, como $\triangle ABC \sim \triangle AEF$ e $\triangle AEF \cong \triangle A'B'C'$, temos $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, como queríamos demonstrar.

3º caso: LAL (lado, ângulo, lado)

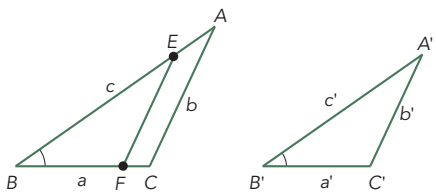
Ilustrações: WYM Design/ Arquivo da editora



Se $AB = A'B'$, então $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} = 1$, $\hat{B} \cong \hat{B'}$, e os triângulos são congruentes ($\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$) e, também, são semelhantes ($\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$), pois 2 triângulos congruentes são semelhantes com razão de semelhança igual a 1.

Se $AB = A'B'$, então vamos analisar o caso $AB > A'B'$. Marcamos o ponto E em $\overline{AB}$ de modo que $EB = A'B'$; e traçamos $\overline{EF} \,//\, \overline{AC}$.

Ilustrações:WYM Design/ Arquivo da editora



Podemos afirmar que $B\hat{E}F \cong B\hat{A}C$ e que $B\hat{F}E \cong B\hat{C}A$ (ângulos correspondentes de retas paralelas cortadas por uma transversal) e, como $\hat{B} \cong \hat{B}$, temos $\triangle ABC \sim \triangle EBF$.

Agora precisamos mostrar que $\triangle EBF \cong \triangle A'B'C'$.

Sabemos que $\overline{EB} \cong \overline{A'B'}$ e, como $\triangle ABC \sim \triangle EBF$, temos:

$$\frac{EB}{AB} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{c'}{c} = \frac{BF}{a}$$

Como $\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$, temos $EB = c'$ e, então, $\overline{EB} \cong \overline{A'B'}$.

Logo, $\triangle EBF \cong \triangle A'B'C'$.

Portanto, como $\triangle ABC \sim \triangle EBF$ e $\triangle EBF \cong \triangle A'B'C'$, temos $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, como queríamos demonstrar.

No *Explore para descobrir* do tópico "Explorando o conceito de semelhança de triângulos" (p. 163), os estudantes exploram as razões trigonométricas nos triângulos dados aplicando a semelhança de triângulos.

As atividades deste tópico desenvolvem a habilidade **EM13MAT308**, proporcionando aos estudantes situações da Matemática e do cotidiano que são resolvidas aplicando a semelhança e a congruência de triângulos.

Na atividade **2**, auxilie os estudantes na seleção de fontes confiáveis de informações para pesquisar o método que Plutarco atribui a Tales para calcular a medida de comprimento da altura de uma pirâmide, mobilizando a **CG01**.

Mais sobre o assunto

Acompanhe uma sugestão de fonte sobre o método utilizado por Plutarco.

Tarefas didáticas com uso de episódios de história da Matemática visando a produção de significado sobre o teorema de Tales. Disponível em: https://tedit.net/d6w6r7. Acesso em: 18 set. 2024.

Como a atividade **5** exige coleta de dados, organize previamente o momento em que os estudantes a realizarão. Para desenvolver o experimento do item **a**, eles devem medir a distância até o objeto e a distância do chão aos olhos, por exemplo, usando uma trena. No item **b**, eles devem elaborar um problema com os dados do experimento que fizeram.

Conexões (p. 168)

Esta seção aborda a presença de padrões que lembram polígonos em artesanatos de diferentes regiões do Brasil. Ao apresentar os diferentes tipos de artesanato, busca-se valorizar a diversidade cultural brasileira e, mais especificamente, os conhecimentos dos povos indígenas e quilombolas, ao citar a costura com o capim-dourado. Ao fazer isso, a seção promove o trabalho com a **CG01**.

As atividades **1** e **2** buscam conectar os conceitos de rigidez do triângulo e semelhança de polígonos com o tema de artesanatos tradicionais, possibilitando um ponto de vista relacionado à Etnomatemática. A atividade **3**, por sua vez, tem o objetivo de valorizar a cultura local dos estudantes, ao propor que eles busquem conhecer as produções artesanais feitas na comunidade em que estão inseridos, mobilizando a **CG03**.

Capítulo 2

Na situação-problema (p. 170) apresentada no início do capítulo, comente com os estudantes a rigidez dos triângulos, explicando que, devido a essa característica, estruturas triangulares são muito utilizadas na construção civil.

A atividade **9** aborda o tema Etnomatemática. O uso de marcações e medidas baseadas nas relações do triângulo retângulo para esquadrejamento, como o teorema de Pitágoras, exemplifica como práticas culturais refletem princípios matemáticos universais, demonstrando que a Matemática aplicada no contexto da construção civil é uma forma autêntica e significativa de conhecimento.

A atividade **10** trabalha o conteúdo do capítulo relacionado às rampas de acessibilidade. Aproveite o momento para conversar sobre os direitos da pessoa com deficiência e promover uma conversa sobre capacitismo, como uma forma de combater esse tipo de preconceito.

No tópico "Cálculo do valor das razões trigonométricas de ângulos agudos", a tabela de razões trigonométricas que os estudantes constroem na atividade **19** é retomada para, em seguida, mostrar o cálculo do seno, do cosseno e da tangente de quaisquer ângulos agudos utilizando uma calculadora científica.

As resoluções esperadas para cada item da atividade **2** do *Explore para descobrir* (p. 176) são apresentadas a seguir.

a) Usando o teorema de Pitágoras e sabendo que x (medida de comprimento da hipotenusa de cada triângulo) não pode ser negativo, temos:

$x^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$; $x^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow x^2 = 20 \Rightarrow x = 2\sqrt{5}$; $x^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 80 \Rightarrow x = 4\sqrt{5}$; $x^2 = 12^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 180 \Rightarrow x = 6\sqrt{5}$.

As medidas de comprimento da hipotenusa dos triângulos são: $\sqrt{5}$ m, $2\sqrt{5}$ m, $4\sqrt{5}$ m e $6\sqrt{5}$ m.

b) Cálculo da razão entre as medidas de comprimento da altura e da hipotenusa em cada triângulo:

$\triangle ABI$: $\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

$\triangle ACH$: $\frac{2}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

$\triangle ADG$: $\frac{4}{4\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

$\triangle AEF$: $\frac{6}{6\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{\cancel{6}}{\cancel{6}\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

A razão é $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

c) Cálculo da razão entre as medidas de comprimento da base e da hipotenusa em cada triângulo:

$\triangle ABI$: $\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$;

$\triangle ACH$: $\frac{4}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{^{2}\cancel{4}}{\cancel{2}\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$;

$\triangle ADG$: $\frac{8}{4\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{^{2}\cancel{8}}{\cancel{4}\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$;

$\triangle AEF$: $\frac{12}{6\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{^{2}\cancel{12}}{\cancel{6}\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

A razão é $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

d) Cálculo da razão entre a medida de comprimento da altura e a medida de comprimento da base em cada triângulo:

$\triangle ABI$: $\frac{1}{2}$; $\triangle ACH$: $\frac{2}{4} \overset{\div 2}{=} \frac{1}{2}$; $\triangle ADG$: $\frac{4}{8} \overset{\div 4}{=} \frac{1}{2}$;

$\triangle AEF$: $\frac{6}{12} \overset{\div 6}{=} \frac{1}{2}$.

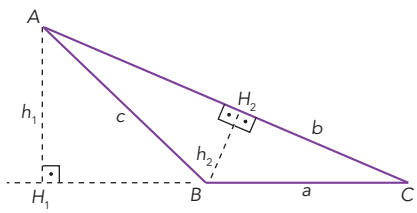
A razão é $\frac{1}{2}$.

No tópico "Lei dos senos", ao apresentar a lei dos senos, são feitas demonstrações para triângulos acutângulos. Cabe aos estudantes fazer as demonstrações para triângulos obtusângulos e triângulos retângulos, como proposto no *Reflita* (p. 190) desse tópico; as demonstrações para cada caso estão apresentadas a seguir.

Lei dos senos:

Consideremos um triângulo ABC, com o ângulo $\hat{B}$ obtuso.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



Considerando a altura relativa ao ângulo $\hat{A}$, no $\triangle AH_1C$, que é retângulo, temos:

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \operatorname{sen} \hat{C}$$

No $\triangle AH_1C$, que também é retângulo, temos:

$$\operatorname{sen} A\hat{B}H_1 = \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot \operatorname{sen} A\hat{B}H_1$$

E como o seno de um ângulo obtuso é igual ao seno do suplemento dele, temos:

$$h_1 = c \cdot \operatorname{sen} A\hat{B}H_1 \Rightarrow h_1 = c \cdot \operatorname{sen} \hat{B}$$

Então:

$$b \cdot \operatorname{sen} \hat{C} = c \cdot \operatorname{sen} \hat{B} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \textbf{ (I)}$$

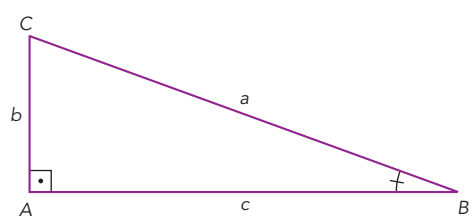
Analogamente, considerando a altura relativa ao ângulo $\hat{B}$, chegamos a

$$a \cdot \operatorname{sen} \hat{C} = c \cdot \operatorname{sen} \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \textbf{ (II)}$$

Então, de **(I)** e **(II)**, concluímos que $\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$, ou seja, demonstramos a lei dos senos para qualquer triângulo obtusângulo.

Agora, consideremos um triângulo ABC com o ângulo $\hat{A}$ reto.

WYM Design/Arquivo da editora



Temos:

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}$$

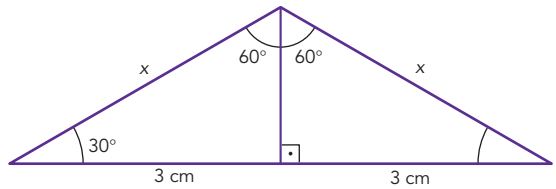
$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

$$\operatorname{sen} \hat{A} = 1 \Rightarrow a \cdot \operatorname{sen} \hat{A} = a \cdot 1 \Rightarrow a = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}}$$

Comparando as 3 razões, obtemos $\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$, ou seja, demonstramos a lei dos senos para qualquer triângulo retângulo.

Para a resolução do *Reflita* (p. 191), temos: Como a altura relativa à base de um triângulo isósceles é também mediana do triângulo e bissetriz do ângulo interno oposto à base, temos que a altura determina 2 triângulos retângulos congruentes.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



Então, podemos calcular a medida de comprimento dos lados congruentes utilizando razões trigonométricas. Por exemplo:

$$\cos 30° = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Logo, a medida de comprimento dos lados congruentes é $2\sqrt{3}$ cm ou, aproximadamente, 3,46 cm.

Na atividade **42**, os estudantes precisam se lembrar de que a medida de abertura de um ângulo central da circunferência é o dobro da medida de abertura do ângulo inscrito correspondente. Isso pode ser facilmente observado, por exemplo, construindo um ângulo central de 180° e medindo a abertura de qualquer ângulo inscrito correspondente, que será 90°. Além disso, eles devem perceber que o triângulo que representa a situação é isósceles, pois 2 lados correspondem aos raios da circunferência. Assim, os ângulos agudos do triângulo também são congruentes.

O item **b** dessa atividade promove uma interessante oportunidade de conversar sobre as 2 maneiras de resolver a situação do item **a**, dado que o triângulo é isósceles e retângulo. Verifique se os estudantes perceberam a possibilidade de utilizar 2 métodos e qual foi o motivo de terem escolhido o método que utilizaram. No item **b**, apresentamos uma alteração da medida de abertura do ângulo para 51°; então, nessa situação, eles não podem mais utilizar o teorema de Pitágoras na resolução. Verifique se eles percebem isso.

Além disso, antes de propor que façam os cálculos no item **b**, você pode perguntar se, ao alterarmos a medida de abertura de 45° para 51°, teremos uma medida de comprimento da frente do palco maior ou menor. Esperamos que os estudantes percebam que ela será maior, o que pode ser comprovado aplicando a lei dos senos.

A atividade **43** traz um recorte histórico do desenvolvimento da Trigonometria aplicada ao cálculo de medidas astronômicas. Estudando o movimento da órbita da Lua ao redor da Terra e utilizando alguns conceitos básicos de Geometria, o astrônomo e matemático grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) estimou a medida de distância entre o Sol e a Terra como sendo 19 vezes a medida de distância entre a Lua e a Terra. Por ter cometido erros nas estimativas das medidas de abertura dos ângulos, em parte pela dificuldade em determinar precisamente o início de cada fase da Lua, o valor calculado por Aristarco foi subestimado, e medidas precisas atuais indicam que a medida de distância entre o Sol e a Terra é, em média, 390 vezes a medida de distância entre a Lua e a Terra. Esse valor varia, pois a órbita da Terra ao redor do Sol e a da Lua ao redor da Terra são elípticas, e não circulares.

Solicite aos estudantes que pesquisem também os nomes que são dados aos pontos das órbitas que correspondem à maior e à menor distância que eles vão buscar. Apoastro é o nome do ponto da órbita de um corpo celeste no qual ele se encontra mais distante do astro em torno do qual gravita. Se o corpo for um planeta do Sistema Solar, que orbita em torno do Sol, então esse ponto recebe o nome específico de afélio; e, se for um satélite (como a Lua), que orbita em torno de um planeta, então esse ponto recebe o nome de apogeu. Periastro é o nome do ponto da órbita de um corpo celeste no qual ele se encontra mais próximo do astro em torno do qual gravita. Analogamente, se o corpo for um planeta, que orbita em torno do Sol, então esse ponto recebe o nome específico de periélio; e, se for um satélite (como a Lua), que orbita em torno de um planeta, então esse ponto recebe o nome de perigeu.

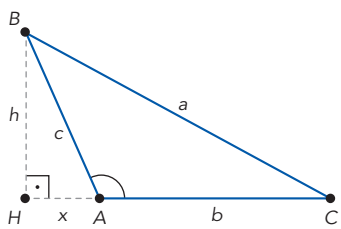
Mais sobre o assunto

O vídeo *Primeira lei de Kepler: lei das órbitas elípticas (Astronomia)* traz uma explicação simples sobre o formato elíptico das órbitas dos planetas e pode ser apresentado para os estudantes, caso julgue conveniente. Disponível em: https://tedit.net/3fl9qn. Acesso em: 18 set. 2024.

No tópico "Lei dos cossenos", cabe aos estudantes fazer as demonstrações da lei dos cossenos para triângulos obtusângulos e triângulos retângulos. Como proposto no *Reflita* (p. 196), as demonstrações para cada caso são:

Lei dos cossenos:

Consideremos um triângulo ABC, com o ângulo $\hat{A}$ obtuso.



WYM Design/Arquivo da editora

O $\triangle BHC$ é retângulo. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$a^2 = h^2 + (b + x)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + b^2 + 2bx + x^2 \textbf{ (I)}$$

O $\triangle BHA$ também é retângulo. Então, analogamente, obtemos:

$$c^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - x^2 \textbf{ (II)}$$

Substituindo h^2 por $c^2 - x^2$ em **(I)**, obtemos:

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + 2bx + x^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$$

Como $\cos B\hat{A}H = \frac{x}{c}$, temos $x = c \cdot \cos B\hat{A}H$ e o cosseno de um ângulo é igual ao oposto do cosseno do suplemento dele, obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot c \cdot \cos B\hat{A}H \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos B\hat{A}C$$

Ou seja, demonstramos a lei dos cossenos para qualquer triângulo obtusângulo.

Para um triângulo retângulo, o teorema de Pitágoras é um caso particular da lei dos cossenos, que ocorre quando o ângulo $\hat{A}$ é reto.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Ao resolverem o item **c** da atividade **44**, os estudantes se deparam com uma situação sem solução, pois faltam dados para que seja possível calcular o valor de x. Pergunte a eles quais informações precisariam ser dadas para que o cálculo fosse possível; no caso, a medida de abertura do ângulo oposto ao lado de medida de comprimento x ou a medida de comprimento do terceiro lado do triângulo.

Conexões (p. 186)

O contexto dessa seção aborda os Temas Contemporâneos Transversais *Diversidade Cultural e Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras* ao mostrar as comunidades quilombolas como parte do patrimônio cultural brasileiro, valorizando suas tradições. Aproveite o momento para mostrar a importância desse povo, promovendo o combate a toda forma de preconceito cultural e étnico-racial ao abordar o conceito de decolonialidade.

A descrição do processo de construção de casas de adobe na Comunidade Quilombola Lagoa da Pedra também ilustra a aplicação da Etnomatemática, com conceitos como medidas e ângulos sendo utilizados em práticas cotidianas. Além disso, os textos trabalham a **CGO1** ao promover a compreensão das diversas culturas brasileiras, ampliando o repertório cultural dos estudantes por meio do reconhecimento e da valorização da história e das práticas quilombolas. A **CGO6** é explorada ao se destacar como o sustento das comunidades, baseado na agricultura, extrativismo e artesanato, está diretamente ligado à preservação cultural e à sustentabilidade. Por fim, a **CGO9** é evidenciada nas práticas colaborativas das comunidades quilombolas, tanto na construção das casas quanto no trabalho comunitário, incentivando os estudantes a desenvolver empatia e a valorizar a cooperação ao se envolverem com realidades e modos de vida que respeitam a diversidade cultural e promovem o bem-estar coletivo.

Mais sobre o assunto

O artigo e a dissertação a seguir apresentam pesquisas relacionadas à Etnomatemática e ao pensamento decolonial. Caso julgue necessário, mostre alguns elementos importantes e de impacto cultural aos estudantes.

Maria Cecilia Fantinato; Adriano Vargas Freitas. A perspectiva decolonial da etnomatemática como movimento de resistência. *Revista de Educação Matemática*, vol. 18, n. 2, 2001. Disponível em: https://tedit.net/26xi6r. Acesso em: 19 set. 2024.

Walter Walentino da Cruz. A Etnomatemática e o pensamento decolonial. UFT, 2023. Disponível em: https://tedit.net/ofcwp9. Acesso em: 19 set. 2024.

Capítulo 3

Explore a situação-problema (p. 201) da abertura do capítulo comparando a divisão dos pontos do disco do cofre com as divisões de um relógio analógico de formato circular. Perceba se os estudantes compreendem a semelhança entre ambos: a divisão em 12 partes iguais. Assim, a abertura do ângulo formado pelos ponteiros que estão 5 números de distância mede 30°.

No tópico "Unidades para medir ângulos e arcos", comente com os estudantes que a divisão da circunferência em 360 partes congruentes possivelmente se deu pela influência do sistema sexagesimal (sistema de base 60) e pela associação do movimento de translação da Terra, que dura aproximadamente 360 dias. Com isso, a circunferência foi dividida em 360 partes iguais, ou seja, em 360 *gradus* ou, na linguagem atual, em 360 graus. O grau foi dividido em 60 partes iguais, que foram chamadas de *minutae prime* (primeira parte pequena), o que originou a palavra minuto $\left(1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}\right)$.

O minuto também foi dividido em 60 partes iguais, chamadas *minutae secundae* (próxima parte pequena), dando origem à palavra segundo $\left(1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'\right)$.

Por exemplo, um arco de medida angular dois graus, trinta e cinco minutos e quarenta segundos é representado por 2° 35' 40".

No *Explore para descobrir* (p. 204) desse tópico, os estudantes exploram a relação entre a medida de comprimento e a medida angular de arcos, percebendo a proporcionalidade direta entre elas. Depois, eles conhecem a relação entre essas medidas, com a medida angular dada em radianos.

No tópico "Circunferência orientada e circunferência trigonométrica", ao estudar a circunferência trigonométrica, é importante que os estudantes percebam a relevância da orientação dos sentidos positivo e negativo e a numeração dos quadrantes, relacionando-os com os valores das coordenadas x e y dos pontos pertencentes à circunferência trigonométrica. Explore com eles cada observação para, em seguida, extrapolar para além da primeira volta na circunferência trigonométrica e introduzir a ideia de arcos côngruos.

Nas atividades **9** a **11**, peça aos estudantes que expliquem o raciocínio que utilizaram para determinar as medidas de abertura e as expressões gerais dos arcos côngruos e verifique como eles utilizam linguagens matemáticas nas explicações.

No tópico "Explorando a ideia de seno e cosseno de um número real", formalize a definição de seno e de cosseno de um número real através da relação biunívoca entre a reta real e a circunferência trigonométrica. Verifique a necessidade de retomar conceitos de função estudados no 9º ano do Ensino Fundamental, conforme sugerido no *Fique atento* (p. 215) desse tópico, antes de iniciar o estudo das funções seno e cosseno.

Nas atividades **14** e **15**, proponha aos estudantes que façam esboços de circunferências trigonométricas para representar cada número real e determinar visualmente a relação entre cada número e o número real correspondente do 1º quadrante. Assim, mais do que apenas saber reduzir ao 1º quadrante, eles compreenderão o procedimento, tornando as aprendizagens mais significativas.

Além disso, na atividade **15**, verifique se eles percebem que não há como determinar todos os valores de x em cada item e que precisam indicá-los na forma geral dos arcos côngruos. Se necessário, proponha a retomada das explorações em alguns *softwares* específicos para essas construções.

Além da sala de aula (p. 221)

Esta seção traz um recorte histórico do desenvolvimento da Trigonometria apresentando o experimento realizado por Eratóstenes com o intuito de estimar a medida de comprimento da circunferência da Terra.

Destaque o método de investigação científica utilizado por Eratóstenes e como, ainda que usando instrumentos de medida atualmente considerados rudimentares, ele chegou a uma estimativa bastante próxima da medida tida como real atualmente. A abordagem dessa seção permite aos estudantes que percebam que as conquistas científicas são feitos de toda uma comunidade.

Mais sobre o assunto

- Pesquise informações a respeito do projeto *Eratosthenes Experiment* (também chamado de Projeto Eratóstenes Brasil), cujo objetivo é propor a estudantes a experiência de medir o comprimento do raio da Terra. A seguir, indicamos 2 referências para a pesquisa.

  Projeto Eratóstenes Brasil. Disponível em: https://tedit.net/vcnaqk. Acesso em: 19 set. 2024.

- Para mais debates sobre o formato da Terra sob uma perspectiva científica, um dos temas recomendados para o produto proposto no *Indo além*, recomendamos a leitura a seguir.

  Sobre a forma da Terra. Disponível em: https://tedit.net/uciriv. Acesso em: 19 set. 2024.

A atividade proposta convida os estudantes à produção de um *podcast* ou debate na escola. O tema a ser desenvolvido na atividade deve girar em torno das notícias falsas da atualidade. Apesar de alguns temas (como Terra plana e eficácia de vacinas) serem comuns em diferentes anos, oriente os estudantes a procurar temas que estejam em voga nos meses ou semanas nas quais o trabalho será realizado.

A pesquisa proposta no *Indo além* favorece o trabalho de combate às *fake news* e o pluralismo de ideias, como uma forma de impedir o reducionismo e o anticientificismo. O processo de pesquisa e investigação científica, utilizando a análise crítica para elaborar hipóteses de acordo com conhecimentos de diferentes áreas, favorece o desenvolvimento da **CG02**, além de promover boas práticas de pesquisa, essenciais para a formação escolar e, futuramente, acadêmica dos educandos.

A produção do *podcast* ou dos argumentos a serem utilizados no debate pelos estudantes, utilizando criticamente tecnologias digitais de informação e comunicação para acessar e disseminar informações para diferentes públicos e aplicando diferentes linguagens, favorece o desenvolvimento da **CG05**, bem como das habilidades **EM13LGG104** e **EM13LGG703**. A **CG07** também é mobilizada, principalmente nos momentos de argumentação.

Capítulo 4

Explore a situação-problema (p. 224) apresentada na abertura do capítulo retomando a ideia apresentada na abertura da Unidade e comparando o comportamento dos pêndulos, para que os estudantes ampliem o conceito de movimento periódico.

Após o estudo da função seno, apresentamos o estudo da função cosseno. Perceba que trazemos abordagens análogas, pois essas funções têm características similares. Ressalte que o gráfico de ambas é chamado de senoide; o gráfico da função cosseno corresponde ao gráfico da função seno, transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.

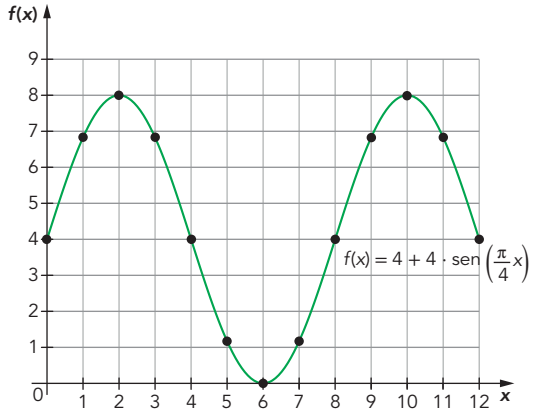
Caso os estudantes venham a acessar o simulador sugerido no *Sobre o assunto* (p. 229), disponibilize um tempo para que façam as explorações e conheçam a função tangente.

No tópico "As senoides e os fenômenos periódicos", os estudantes comparam as representações gráficas de senoides em atividades e no *Reflita* (p. 232), mobilizando o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT306**.

Na atividade **8**, é possível obter outras leis de funções que contêm aproximadamente esses pontos. Caso os estudantes apresentem outras respostas para a lei da função, peça que verifiquem se os valores experimentais de fato são valores da função (exatos ou aproximados) e, em caso afirmativo, convide-os a apresentar para a turma a resolução feita.

Representar os pontos em um *software* de Geometria dinâmica e construir o gráfico da lei da função encontrada também é uma boa maneira de verificar a modelagem feita.

WYM Design/Arquivo da editora



Alguns *softwares* também contam com ferramentas de regressão sinusoidal nas quais podem ser listados os pontos do experimento, e o programa mostra uma aproximação possível. Se julgar pertinente, sugira aos estudantes que explorem o funcionamento desse comando e o exemplo de lei de função que ele sugere para os pontos dados.

Na atividade **23**, propomos aos estudantes a elaboração de um problema que envolve fenômenos periódicos reais e seja modelado por uma função trigonométrica. Eles podem fazer pesquisas para criar um tema do interesse deles.

Tecnologias digitais (p. 234)

A seção propõe utilizar um *software* de Geometria dinâmica para construir uma senoide.

Siga o passo a passo sugerido nesta seção. Com os gráficos construídos, auxilie os estudantes a responder às atividades propostas.

Além da sala de aula (p. 243)

O trabalho com a seção possibilita o desenvolvimento de uma série de competências e habilidades. A valorização do método científico, abordada principalmente na construção das sugestões de produto final da atividade do *Indo além*, valoriza os conhecimentos historicamente construídos e a argumentação e mostra a aplicação das funções trigonométricas em contextos cotidianos periódicos, favorecendo um desenvolvimento conjunto da **CG01** e da **CEMAT03**, além da **EM13MAT306** e da **EM13CNT204**.

A leitura do infográfico em si, além de despertar os estudantes para um uso propositivo e qualitativo das tecnologias de informação, conforme versam a **CG04** e a **CG05**, também promove um trabalho com a área de Linguagens e suas Tecnologias, em particular no desenvolvimento da **EM13LGG701**.

O estudo desta seção favorece o trabalho com o tema "mudanças climáticas", e as discussões propostas podem gerar diferentes discussões em sala de aula, como medidas alternativas ao consumo de energia ou ações que visem à redução da emissão de poluição no ar. Se julgar pertinente, com o apoio dos professores de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e

Sociais Aplicadas, promovam uma investigação da chamada "pegada de carbono", em que se mede quanta poluição em média um indivíduo gera nas atividades diárias e como fazer para amenizar essa situação.

Mais sobre o assunto

Mais referências sobre mudanças climáticas, pegada de carbono e desertificação de regiões brasileiras podem ser encontradas a seguir. Acessos em: 19 set. 2024.

- GARZILLO, Josefa Maria Fellegger *et al*. Pegada de carbono da dieta no Brasil. *Revista de Saúde Pública*, v. 55, p. 90, 2021. Disponível em: https://tedit.net/9cm5fg.
- CARVALHO, B. M. *et al*. Doenças transmitidas por vetores no Brasil: mudanças climáticas e cenários futuros de aquecimento global. *Sustainability in* Debate - Brasília, DF, v. 11, 2020. Disponível em: https://tedit.net/raegps.
- MORAES, Jessica Barreto de *et al*. *Áreas suscetíveis a desertificação no Brasil e projeções para cenários de mudanças climáticas*. 2021. Disponível em: https://tedit.net/8limci.
- ARAUJO, Jonas Alves; DOS SANTOS, Marcelo da Silva. IA E AGRICULTURA. *Jornada Acadêmica*, v. 7, n. 1, 2023. Disponível em: https://tedit.net/d9nb1x.
- SOUZA, Kleber Xavier Sampaio *et al*. *Agricultura digital*: definições e tecnologias. 2020. Disponível em: https://tedit.net/g13gsp.

Mais atividades

1. Uma atividade experimental pode ser feita com os estudantes confeccionando um pêndulo simples para que observem a periodicidade do movimento e meçam o intervalo de tempo das oscilações.

Acompanhe as orientações detalhadas do experimento em *Medindo a gravidade com um pêndulo simples*, disponível em: https://tedit.net/d2tl3c (acesso em: 18 set. 2024).

Reforce a importância de realizar várias medições e utilizar a média dos dados obtidos para os cálculos. Caso os estudantes já tenham estudado os conceitos estatísticos de medida de dispersão, podem aprofundar o estudo calculando essas medidas com os dados coletados.

Resolução:

Resposta pessoal.

Unidade 4: Matrizes, determinantes e sistemas lineares

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01; CG02; CG10.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT03.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT301; EM13MAT315.
- Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13CNT206; EM13LGG701; EM13CHS106.
- Temas Contemporâneos Transversais: *Ciência e Tecnologia*; *Educação Financeira*, *Educação para o Trânsito*.

Objetivos pedagógicos

- Explorar situações e resolver problemas que envolvam matrizes e sistemas lineares.
- Classificar sistemas lineares em possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.
- Determinar as soluções de sistemas lineares utilizando diferentes métodos, como a substituição, a adição e o escalonamento, e representá-los graficamente.
- Interpretar e representar graficamente sistemas lineares 2×3 e 3×3, também com o auxílio de tecnologia digital.
- Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, utilizando sistemas lineares.
- Compreender o conceito de determinante e o cálculo do determinante de matrizes 2×3 e 3×3.
- Discutir sistemas lineares utilizando o determinante da matriz dos coeficientes e o escalonamento do sistema.

Abertura da Unidade

Na abertura desta Unidade, falamos sobre o cacau, principal ingrediente para a fabricação do chocolate, e sua importância para a economia brasileira.

Para responder às questões propostas nesta abertura, espera-se que os estudantes pesquisem os diversos tipos de chocolate e indiquem que uma tabela é a melhor maneira de organizar os dados solicitados.

Capítulo 1

A situação-problema (p. 250) apresenta aos estudantes o conceito de matrizes e mostra a aplicação delas na organização de notas escolares. No item **a**, verifique se os estudantes preenchem corretamente a tabela. No item **b**, avalie as estratégias empregadas por eles para saber em qual disciplina Augusto teve o melhor desempenho. Eles podem considerar, por exemplo, a soma das notas em cada matéria ou a média aritmética das notas. No item **c**, eles têm a oportunidade de representar a tabela de notas de outro estudante e a matriz correspondente. Verifique se fazem a associação correta das linhas e das colunas.

Considere a resposta do item **c** da situação-problema da abertura do capítulo.

Notas de Gustavo

Prova / Disciplina	A	B	C
Língua Portuguesa	7	5	8
Geografia	6	6	6
Biologia	9	7	8

Dados elaborados para fins didáticos.

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 6 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

A matriz obtida no *Reflita* (p. 251) do tópico "Explorando as matrizes" é chamada de matriz transposta da matriz dada. De modo geral, dada uma matriz A do tipo $m \times n$, a matriz transposta de A (indicada por A^t) é a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de A.

As atividades **1** a **5** permitem aos estudantes aplicar o conceito de matriz em alguns contextos, inclusive aplicando leis de formação de matrizes quadradas.

No tópico "Operações com matrizes", são discutidas as operações envolvendo matrizes: a igualdade, a adição e a subtração.

Nas atividades **6** a **9**, são propostos problemas para serem resolvidos utilizando os procedimentos das operações com as matrizes. Nas atividades **10** e **11**, é solicitado aos estudantes que componham as matrizes a partir de leis de formação e, em seguida, que resolvam as operações indicadas.

As atividades **14** a **17** propõem problemas cuja resolução depende da aplicação das regras para as operações com as matrizes e cálculo de matriz transposta. A atividade **18** apresenta uma situação-problema que deve ser resolvida com operações com as matrizes.

O tópico "Determinante de uma matriz" desenvolve a noção de determinante de uma matriz quadrada e explica o procedimento de Sarrus para o cálculo do determinante associado a uma matriz específica.

As atividades **29** a **33** propostas nesta seção propõem o cálculo do determinante de matrizes quadradas, e as atividades **34** a **37** propõem o uso do determinante em variados contextos de operações, como o uso do cálculo do determinante para a resolução de equações.

Conexões (p. 269)

Esta seção mostra como o conhecimento das matrizes foi fundamental para que os cientistas da Mariner 4 – missão enviada a Marte em 1965 – pudessem obter imagens do planeta. Esse texto favorece o Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia* ao explicitar como conhecimentos de Matemática ajudam no desenvolvimento da Ciência nas mais diversas áreas, como Economia e Medicina.

Se houver essa possibilidade, pode ser interessante propor a realização das atividades **1** e **2** com o apoio de planilhas eletrônicas. Nelas, os estudantes podem pintar algumas células de preto para formar as imagens desejadas, como se cada célula fosse um *pixel*.

Capítulo 2

A situação-problema (p. 272) apresentada na abertura do capítulo traz um desafio muito difundido nas redes sociais, em que se apresenta a ideia de sistema de equações nas quais, em vez de usar letras para as incógnitas, aparecem imagens simbólicas. Psicologicamente, essa abordagem torna a resolução do problema mais interessante e atrativa, aplicando o raciocínio lógico e conhecimentos matemáticos em um momento de diversão e interação virtual. Algumas brincadeiras como essa também trazem "pegadinhas"; assim, além de resolvermos o problema, temos que ficar atentos aos detalhes das imagens.

Perceba que é possível resolver o desafio sem montar um sistema de equações, mas, mesmo assim, vale a pena montar o sistema e resolvê-lo como indicado nos itens **a** e **b**.

No tópico "Solução de uma equação linear", são discutidas as soluções para algumas equações.

A infinidade de soluções de uma equação linear, por exemplo do tipo $ax + by = c$, se explica geometricamente pelo fato de ela ser a equação de uma reta do plano. Assim, cada ponto da reta corresponde a um par ordenado (x, y), que é a solução da equação.

Nas atividades **1** a **4** propostas, os estudantes devem aplicar os conceitos de equação linear e realizar a solução de uma equação linear.

No tópico "Método da substituição", para responder à questão proposta no primeiro *Reflita* (p. 278), espera-se que os estudantes indiquem as incógnitas com coeficiente 1 (ou –1). Depois da reflexão, sugira a eles que façam o isolamento de uma das incógnitas que citaram como resposta e comparem-na com o isolamento de outra incógnita que não foi escolhida. Por exemplo, isolando y na 3ª equação, como na resolução apresentada, obtemos $y = 4 - 3x + z$; se tivéssemos escolhido isolar x nessa equação, obteríamos $x = \frac{(4 - y + z)}{3}$.

Acompanhe, a seguir, um exemplo de resolução para o segundo *Reflita* (p. 278) desse tópico.

Temos $\begin{cases} 11x - 2z = 11 \\ 4x + z = 4 \end{cases}$.

Podemos isolar z na 2ª equação: $4x + z = 4 \Rightarrow z = -4x + 4$

Substituindo z por $-4x + 4$ na 1ª equação, obtemos: $11x - 2(-4x + 4) = 11 \Rightarrow 11x + 8x - 8 = 11 \Rightarrow 19x = 19 \Rightarrow x = 1$.

Substituindo x por 1 na 2ª equação, obtemos: $4 \cdot 1 + z = 4 \Rightarrow z = 0$.

Logo, $x = 1$ e $z = 0$.

Na atividade **8**, favorecemos o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**, agora relacionada a sistemas lineares, mobilizando o uso de algoritmos para instruir sequências de passos para resolver um problema ou executar uma tarefa.

A atividade **9** trata da Mata Atlântica, um bioma importante que, porém, está ameaçado. Se achar que é viável, proponha uma pesquisa, conversa e elaboração de um documento sobre o assunto dessa atividade, por discutir coletivamente a importância da preservação do meio ambiente e de quais ações humanas o ameaçam, mobilizando, assim, aspectos da habilidade **EM13CNT206**, bem como da **CG01**, da **CG02** e da **CG10**.

A apresentação e a discussão com os estudantes a respeito do fluxograma sobre as 3 possibilidades de classificação de sistemas lineares permite o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**.

As atividades **12** e **13** permitem aos estudantes a aplicação dos conceitos associados ao tópico "Classificação e representação gráfica de sistemas lineares" ao resolverem sistemas lineares utilizando as técnicas estudadas. Na atividade **13**, os estudantes elaboram problemas com diferentes propósitos. Analise os enunciados que foram escritos nessas atividades e se cada problema continha todos os dados necessários para a resolução, compreendendo como cada um deles aplica os conceitos explorados até o momento.

Para iniciar o estudo do processo de escalonamento de sistemas lineares, os estudantes analisam um sistema escalonado, no *Explore para descobrir* (p. 287) do tópico "Escalonamento de sistemas lineares", com o objetivo de perceber como é prático determinar as soluções com o sistema nesse formato.

Destacamos a atividade **17**, que deve ser realizada em duplas. Nessa atividade, os estudantes devem analisar gráficos para determinar se eles representam sistemas lineares equivalentes. Verifique se é válida a argumentação apresentada por eles.

A atividade **22** trabalha o sistema de equações lineares em um contexto de planejamento de orçamento familiar, favorecendo o Tema Contemporâneo Transversal *Educação Financeira*. No item **c**, se achar interessante, proponha uma roda de conversa sobre o tema.

Ao discutir a velocidade de colisão de carros e os limites de velocidade nas cidades, a atividade **24** favorece o Tema Contemporâneo Transversal *Educação para o Trânsito*.

A atividade **25**, ao discutir promoções de produtos combinados e seus preços, contribui para a reflexão sobre o que é mais interessante comprar, favorecendo o Tema Contemporâneo Transversal *Educação Financeira*.

A atividade **27** propõe a aplicação de sistemas lineares de equações no balanceamento de uma reação química. Esta atividade pode ser trabalhada em conjunto com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

No tópico "Sistemas lineares, matrizes e determinantes", apresentamos a relação de sistemas lineares, matrizes e determinantes, que é útil para discutir a classificação dos sistemas sem a necessidade de resolvê-los. Se necessário, retome o significado de matriz quadrada e mostre que, por exemplo, a uma matriz quadrada 2×2 (ou seja, de ordem 2), associamos um determinante também de ordem 2.

Ressalte a utilização da regra de Sarrus para determinar o valor de determinantes de ordem 3. A representação esquemática dessa regra auxilia a associação dos elementos do determinante e a identificação de quais produtos devem ser adicionados e quais devem ser subtraídos para determinar o valor do determinante.

A habilidade **EM13MAT301** é desenvolvida nas atividades de resolução de sistemas lineares em diferentes contextos, nas quais os estudantes utilizam técnicas algébricas de resolução.

Mais sobre o assunto

No artigo "Sobre o ensino de sistemas lineares", publicado na *Revista do Professor de Matemática* (RPM), número 32, as autoras Maria Cristina Costa Ferreira e Maria Laura Magalhães Gomes, professoras da Universidade Federal de Minas Gerais, debatem as representações gráficas de sistemas lineares de 3 equações com 3 incógnitas. Sugerimos a leitura do artigo para aprofundar o assunto. Disponível em: https://tedit.net/5ejyi6. Acesso em: 18 set. 2024.

Tecnologias digitais (p. 286)

Nesta seção, a habilidade **EM13MAT301** é mobilizada com o objetivo de aplicar a representação gráfica de sistemas lineares 2×2. Também são favorecidos aspectos da **EM13LGG701** e da **EM13CHS106**, ao se demandar o uso de um *software* de Geometria dinâmica para produzir e comunicar conhecimentos.

A visualização das representações gráficas de sistemas lineares tem o objetivo de dar significado às classificações dos sistemas.

No caso de um sistema linear possível e determinado, é possível que o *software* escolhido mostre as coordenadas exatas ou aproximadas (com 2 casas decimais) do ponto.

Mais atividades

1. Proponha uma pesquisa mais aprofundada da utilização de matrizes em outras áreas do conhecimento. Este tipo de pesquisa favorece o desenvolvimento da Educação digital, e também a **CG05** é mobilizada nas atividades de pesquisa na internet, nas quais os estudantes utilizam tecnologias digitais de informação e comunicação de maneira crítica, escolhendo fontes confiáveis de informação – como portais de divulgação científica vinculados a universidades, *sites* de notícias que apresentem a fonte dos dados ou a fonte de pesquisa, para que possa ser verificada, ou até mesmo livros da área –, acessam essas informações e produzem conhecimentos. O desenvolvimento da **CG02** também é favorecido nesta proposta de pesquisa por demandar que se recorra à abordagem própria das ciências para resolver problemas, com base no conhecimento de diferentes áreas.

Resolução:

Resposta pessoal.

Resoluções

Junto das atividades e questões presentes no Livro do Estudante, apresentamos no Manual do Professor as respostas e orientações das respostas esperadas. Nas próximas páginas, complementando as respostas já presentes página a página, apresentamos as resoluções das atividades.

Unidade 1

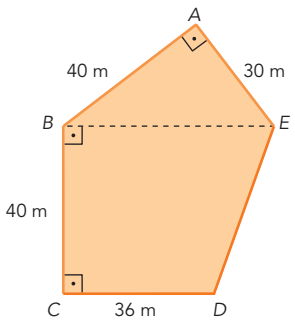
Capítulo 1

Atividades

1. $4 \cdot \frac{2^2}{2} = 8$; $4^2 = 16$; logo, a medida de área da região não colorida é: $16\ cm^2 - 8\ cm^2 = 8\ cm^2$.

2. $\frac{(20 + 14) \cdot 11}{2} - 8 \cdot 5 = 147$. A medida de área é $147\ m^2$.

5.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$BE = 50$ m, pois $(BE)^2 = 40^2 + 30^2 = 2\,500 \Rightarrow BE = 50$ (pois $BE > 0$)

$A_{ABE} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600$

$A_{BCDE} = \frac{(36 + 50) \cdot 40}{2} = 1720$

$600 + 1720 = 2\,320$. A medida de área é $2\,320\ m^2$.

6. **a)** $1200 \cdot 60 = 72\,000$, logo, $\frac{72\,000}{3\,000} = 24$.

$24\ ha = 240\,000\ m^2$ e, como $\frac{240\,000}{200} = 1200$, a medida de comprimento do outro lado é 1200 m.

7. Sim. Para determinar x, fazemos

$x = \left(\frac{1500 \cdot 60}{3\,600}\right) \cdot \frac{10\,000}{b} \Rightarrow x = \frac{250\,000}{b}$.

8. $x^2 \Rightarrow x = 3{,}13$

Logo: $3{,}13\ m \cdot 1{,}4\ m = 4{,}382\ m^2$.

Alternativa **a**.

9. $0{,}5\ m \cdot 0{,}5\ m = 0{,}25\ m^2$

$5\ m \cdot 7\ m = 35\ m^2$

Portanto, serão necessárias 140 peças, pois $\frac{35}{0{,}25} = 140$.

Alternativa **d**.

10. Exemplo de problema: Para cobrir uma das paredes da sala da atividade anterior, serão usadas folhas de papel de parede retangulares, com medida de comprimento igual a 100 cm e medida de altura igual a 285 cm. Considere que a parede escolhida tem medida de comprimento de 5 m e medida de altura de 3 m, e que, além do papel de parede, será colocado um rodapé, cuja altura mede 15 cm. Sabendo que não é necessário colocar o papel de parede atrás do rodapé, determine a quantidade de folhas de papel de parede necessária.

11. $\frac{\left[800 + (650 - 350)\right] \cdot 1400}{2} = 770\,000$

Portanto, o trabalho será de 770 000 joules.

13. **a)** $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 6^2 = 18\pi$. A medida de área é $18\pi\ cm^2$.

b) $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2 = 9\pi$. A medida de área é $9\pi\ cm^2$.

c) $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 = 12\pi$. A medida de área é $12\pi\ cm^2$.

14. $\frac{8 \cdot 6}{2} = 24$; logo, a medida de área da região A é $24\ m^2$.

Temos $d = 10$ m, pois $d = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. A medida de comprimento do raio do semicírculo é 5 m e a medida de área da região B, dada por $\frac{\pi \cdot 5^2}{2} = \frac{25\pi}{2}$, é $\frac{25\pi}{2}\ m^2$.

Como $24 + \frac{25\pi}{2} = \frac{25\pi + 48}{2}$, a medida de área do terreno é $\left(\frac{25\pi + 48}{2}\right) m^2$.

15. $\pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 1^2 = 8\pi$; logo, a medida de área é $8\pi\ cm^2$.

16. $32 \div 4 = 8$; $8 \div 2 = 4$; $8^2 - \pi \cdot 4^2 = 16(4 - \pi)$; logo, a medida de área é $16(4 - \pi)\ cm^2$.

18. $\pi \cdot 200^2 = 40\,000\pi \simeq 125\,600$; como $12{,}56 \cdot 15\,000 = 188\,400$, a produtividade esperada é 188 400 kg.

Dado que $\frac{188\,400}{60} = 3140$, essa medida de massa corresponde a 3140 sacas e gera uma receita dada por $3140 \cdot 47 = 147\,580$, ou seja, de R$ 147.580,00.

23. Cada pequena região quadrada tem medida de área $0{,}6084\ m^2 = 6\,084\ cm^2$ e $\frac{6\,084}{169} = 36$, ou seja, $36\ cm^2$.

Portanto, como $36 \cdot \frac{60 + 101}{2} = 2\,898$, a medida de área aproximada da mancha no tapete é $2\,898\ cm^2$.

24. $(1{,}2)^2 = 1{,}44$; logo, $1{,}44 \cdot \frac{29 + 60}{2} = 64{,}08$. A medida de área é $64{,}08\ cm^2$.

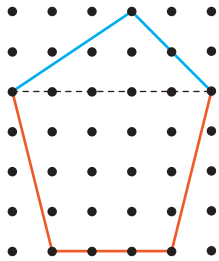
25. $\frac{3 + 12}{2} = 7{,}5$; logo, aproximadamente 7,5 unidades de medida de área.

26. **a)** Exemplo de resposta: Contamos 2 quadradinhos totalmente contidos na superfície da lagoa e 14 quadradinhos contidos em toda a região da lagoa. Podemos calcular: $\frac{2 + 14}{2} = 8$.

Então, $500 \cdot 500 = 250\,000$ e $8 \cdot 250\,000 = 2\,000\,000$.

Portanto, a medida de área aproximada da superfície da lagoa é $2\,000\,000\ m^2$, que é $2\ km^2$.

28. **b)**



WYM Design/Arquivo da editora

$\frac{(3+5)\cdot 4}{2} + \frac{5\cdot 2}{2} = 21$. A medida de área da região limitada pelo elástico é 21 cm².

Tecnologias digitais (p. 40)

2. Pequenas regiões quadradas inteiras no interior da figura (24). Menor número de pequenas regiões quadradas que conseguem cobri-la completamente (63). Assim: $\frac{24+63}{2} = 43{,}5$.

Cada unidade da malha está dividida em 25 pequenas regiões quadradas, uma estimativa para a medida de área pedida é $\frac{43{,}5}{25} = 1{,}74$; ou seja, 1,74 unidade.

Utilizando a ferramenta de cálculo de medida de área do *software*, a medida de área informada deve ser igual a 1,7.

Capítulo 2

Atividades

3. $\frac{3\sqrt{3}\cdot 42^2}{2} = 2\,646\sqrt{3} \simeq 4\,498{,}2$

Aproximadamente 4 498,2 cm². Alternativa **b**.

4. Como $300 \cdot (0{,}15)^2 = 6{,}75$, cada caixa de pisos pode cobrir 6,75 m². Medida de área total:

$$\underbrace{3\cdot(9+12)}_{\text{paredes}} - \underbrace{2\cdot 0{,}9\cdot 2{,}1}_{\text{portas}} - \underbrace{2{,}1\cdot 0{,}45}_{\text{janela}} = 58{,}275$$

Portanto, como $\frac{58{,}275}{6{,}75} \simeq 8{,}63$, serão necessárias 9 caixas. Alternativa **b**.

5. $S_i = (10-2)\cdot 180° = 1\,440°$. Alternativa **a**.

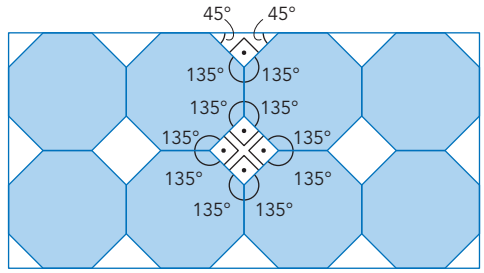
Enem e vestibulares (p. 57)

1. Para preencher os espaços no painel, a soma da medida de abertura do ângulo interno do octógono e dos ângulos adjacentes precisa ser igual a 360°.

Medida de abertura do ângulo interno do octógono regular:

$$a_i = \frac{(8-2)\cdot 180°}{8} \Rightarrow a_i = 135$$

Considerando a medida de abertura do ângulo interno do octógono e analisando a figura, temos que os espaços na borda lateral têm o formato de triângulos isósceles retângulos, com 2 ângulos internos com medida de abertura de 45° e 90°. Também temos que os espaços entre os octógonos têm o formato de um quadrilátero com lados com mesma medida de comprimento e com todos os ângulos internos com medida de abertura de 90°, sendo, portanto, quadrados.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Portanto, os azulejos necessários são os com formato de triângulo retângulo isósceles e de quadrado.

Alternativa **d**.

2. $10^{100} = \ell^2 \Rightarrow \ell = 10^{50}$

$d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow d = 10^{50}\sqrt{2}$

Alternativa **d**.

4. A medida de área da superfície dos 4 pedaços precisa ser igual à medida de área da superfície da *pizza*; temos:

$$4A_{\text{individual}} = A_{\text{grande}} \Rightarrow 4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi\cdot\left(\frac{20}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 100 \Rightarrow d = 10$$

Portanto, a medida de comprimento do diâmetro deve ser 10 cm. Alternativa **c**.

5. Triângulo equilátero: $A = \frac{(12\text{ cm})^2\sqrt{3}}{4} \simeq 61{,}2\text{ cm}^2$.

Quadrado: $A = (8\text{ cm})^2 = 64\text{ cm}^2$.

Retângulo: $A = (11\text{ cm})\cdot(8\text{ cm}) = 88\text{ cm}^2$.

Hexágono regular: $A = \frac{3\cdot(6\text{ cm})^2\sqrt{3}}{2} \simeq 91{,}8\text{ cm}^2$.

Círculo: $A = \pi\cdot\left(\frac{10\text{ cm}}{2}\right)^2 \simeq 75\text{ cm}^2$.

Logo, deve ser escolhido o círculo. Alternativa **e**.

6. Medida de comprimento do lado da piscina: $\ell^2 = 400 \Rightarrow \ell = 20$.

Medida de comprimento do lado mais externo da calçada: $L = 5 + 20 + 5 \Rightarrow L = 30$.

$A = 30^2 - 400 \Rightarrow A = 500$

Portanto, a área ocupada pela calçada mede 500 m². Alternativa **d**.

7. $A = 6\cdot\frac{10^2\sqrt{3}}{4} - \pi\cdot 5^2 \Rightarrow A = 25\cdot(6\sqrt{3} - \pi)$

A medida de área que não é ocupada pelo círculo é $25\cdot(6\sqrt{3} - \pi)$ m². Alternativa **c**.

8. Total de regiões quadradas: $4\cdot 4 = 16$.

Total de regiões quadradas completamente pavimentadas pelo ladrilhamento: 4.

Total de regiões quadradas com metade da medida de área pavimentada pelo ladrilhamento: 12.

4 + 6 = 10; ou seja, 10 unidades de área foram completamente pavimentadas. Temos: $\frac{10}{16} = 0{,}625$ ou 62,5%.

A porcentagem é 62,5%. Alternativa **e**.

9. **a)** $\begin{cases} \pi R^2 - \pi r^2 = 20\pi \\ R - r = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (R - r)(R + r) = 20 \quad \textbf{(I)} \\ R - r = 2 \quad \textbf{(II)} \end{cases}$

Substituindo **(II)** em **(I)**:

$2(R + r) = 20 \Rightarrow R + r = 10$ **(III)**

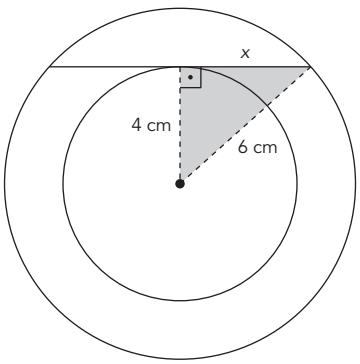
Fazendo **(II)** + **(III)**:

$2R = 12 \Rightarrow R = 6$

$6 - r = 2 \Rightarrow r = 4$

Portanto, temos $R = 6$ cm e $r = 4$ cm.

b) Considere que o maior segmento de reta é $2x$, como mostrado na figura representada a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim:

$6^2 = 4^2 + x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{5}$

Logo, $2x = 4\sqrt{5}$ cm.

Unidade 2

Capítulo 1

Atividades

4. **a)** $\overline{AB} \cong \overline{EF} \Rightarrow AB = 3$ cm. A medida de distância entre os pontos A e B é 3 cm.

b) A figura representada é um bloco retangular; portanto, $F\hat{E}H$ é um ângulo reto. Assim: $(HF)^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow HF = 5$. Portanto, a medida de distância é 5 cm.

c) De maneira análoga ao que foi feito no item **b**, temos: $(CE)^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow CE = \sqrt{13}$. Portanto, a medida de distância é $\sqrt{13}$ cm.

d) De maneira análoga ao que foi feito no item **b**, temos: $(DH)^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow DH = 2\sqrt{5}$. Portanto, a medida de distância é $2\sqrt{5}$ cm.

e) Sejam N o ponto médio de $\overleftrightarrow{CD}$ e M o ponto médio de $\overline{AB}$. Dessa maneira, $AMND$ é um retângulo, pois $AM = ND$, e $M\hat{A}D$ e $N\hat{D}A$ são ângulos retos. Logo, $MN = AD$ e $A\hat{M}N$ e $D\hat{N}M$ são ângulos retos. Portanto, o segmento de reta $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$ e tem uma extremidade em M e medida de comprimento 4 cm.

f) Sejam P o ponto médio de $\overleftrightarrow{HE}$, Q o ponto médio de $\overline{BC}$ e R o ponto médio de $\overleftrightarrow{GF}$, então o segmento de reta $\overline{PR}$ é perpendicular ao segmento de reta $\overline{QR}$. Consideramos o $\triangle PQR$, que é retângulo em R. Podemos calcular PQ usando o teorema de Pitágoras no $\triangle PQR$: $(PQ)^2 = 2^2 + 3^2 = \sqrt{13}$. Portanto, a medida de distância é $\sqrt{13}$ cm.

g) Como o segmento de reta $\overline{FG}$ é perpendicular ao plano (ABG), então a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{FG}$ é igual à medida de distância do ponto F ao plano (ABG). Logo, a medida de distância é 4 cm.

h) As retas $\overleftrightarrow{HE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são distintas e paralelas; dessa maneira, a medida de distância entre elas é equivalente à medida de comprimento do segmento de reta $\overline{DE}$, pois o ponto D pertence à reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o ponto E pertence à reta $\overleftrightarrow{HE}$. $\overline{DE}$ é perpendicular a $\overline{HE}$ e a $\overline{AD}$, logo, analisando a figura, temos que a medida de distância é 2 cm.

i) Analisando a figura de maneira análoga ao que foi feito no item **h**, temos que a medida de distância é 4 cm.

j) A reta $\overleftrightarrow{BD}$ está contida em um plano que é paralelo ao plano (EFH); logo, a medida de distância da reta $\overleftrightarrow{BD}$ ao plano (EFH) é igual à medida de distância de qualquer ponto de $\overleftrightarrow{BD}$ ao plano EFH. Temos que a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{DE}$ é 2 cm e que D pertence à reta $\overline{DE}$ e E pertence ao plano (EFH). Portanto, a medida de distância é 2 cm.

k) Os planos (ADE) e (BGF) são paralelos e distintos; portanto, a medida de distância entre eles é igual à medida de distância de qualquer ponto de um deles ao outro plano. Temos que a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$ é 3 cm e que A pertence a (ADF) e B pertence a (BGF). Portanto, a medida de distância é 3 cm.

l) Analisando a figura de maneira análoga ao que foi feito no item **h**, temos que a medida de distância é 2 cm.

m) De maneira análoga ao que foi feito no item **b**, podemos calcular a medida de comprimento de $\overline{BE}$ usando o teorema de Pitágoras no $\triangle BEG$, que é retângulo em G. Assim: $(BE)^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow BE = \sqrt{29}$. Portanto, a medida de distância é $\sqrt{29}$ cm.

11. Total de faces: $30 + 20 + 12 = 62$.

30 faces quadradas: $30 \cdot 4 = 120$; ou seja 120 arestas.

20 faces hexagonais: $20 \cdot 6 = 120$; ou seja 120 arestas.

12 faces decagonais: $12 \cdot 10 = 120$; ou seja 120 arestas.

Assim, temos: $A = \dfrac{120 + 120 + 120}{2} = 180$; $V - 180 + 62 =$ $= 2 \Rightarrow V = 120$. Logo, 120 vértices.

12. O hexafluoreto de enxofre apresenta geometria octaédrica, logo: $V - A + F = 2 \Rightarrow 6 - A + 8 = 2 \Rightarrow A = 12$. Alternativa **d**.

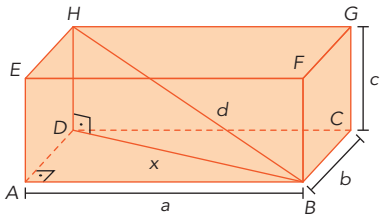
13. $12 \cdot 5 = 60$; ou seja 60 arestas. $20 \cdot 6 = 120$; ou seja 120 arestas. Então, $A = \dfrac{60 + 120}{2} = 90$; $90 \cdot 20$ cm $=$ $= 1800$ cm $= 18$ m. Logo, a medida de comprimento é 18 m.

Capítulo 2

Atividades

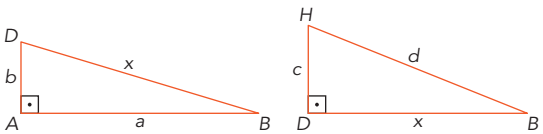
1. Considere o paralelepípedo retângulo representado a seguir, em que d é a medida de comprimento da diagonal do paralelepípedo.

WYM Design/Arquivo da editora



Podemos destacar 2 triângulos retângulos:

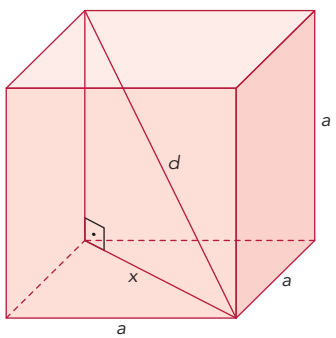
Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora



- Como o triângulo ABD é retângulo em A, temos: $x^2 = a^2 + b^2$ **(I)**.
- Como o triângulo DBH é retângulo em D, temos: $d^2 = x^2 + c^2$ **(II)**.
- Substituindo **(I)** em **(II)**, temos:
  $d^2 = x^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

2. Considere o cubo representado a seguir, em que d é a medida de comprimento da diagonal.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Temos: $d = \sqrt{a^2+a^2+a^2} = a\sqrt{3}$.

6. $A_{caixa} = 32 \cdot 17 + 2(32 \cdot 10 + 17 \cdot 10) = 1524$
$A_{tampa} = 32 \cdot 17 + 2(17 \cdot 2 + 32 \cdot 2) = 740$
$A_{caixa} + A_{tampa} = 1524 + 740 = 2264$
Portanto, são necessários 2264 cm².

7. Medida de área da superfície das 4 paredes, portas e pela janela: $2(3 \cdot 2{,}7 + 4 \cdot 2{,}7) = 37{,}8$. Excluindo-se a medida de área das regiões limitadas pelas portas e pela janela: $37{,}8 - (2 + 2 \cdot 1{,}6) = 37{,}8 - 5{,}2 = 32{,}6$. Portanto, serão necessários 32,6 m² de azulejo.

20. $A_b = \dfrac{\left(5\sqrt{3}\right)^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \simeq 191{,}25$. A medida de área da base é 191,25 cm². A medida de volume é dada por:

8 cm · 191,25 cm² = 0,00153 m³. Alternativa **d**.

21. Temos que: 80% de 0,6 = 0,48.
Logo: $V = 1{,}80 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}48 = 0{,}864$. Temos que: 0,864 m³ = 864 L.

23. Medida de volume de cada bloco retangular:
$V_1 = 20 \cdot 10 \cdot 5 = 1000$; logo, $V_1 = 1000$ cm³.
Medida de volume da mala: $V_2 = 70 \cdot 30 \cdot 50 = 105\,000$; logo, $V_2 = 105\,000$ cm³. Então: $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{105\,000}{1\,000} = 105$.
Alternativa **b**.

25. $A_b \simeq \dfrac{5^2 \cdot 1{,}73}{4} = 10{,}8125$; $V \simeq 10{,}8125 \cdot 30 = 324{,}375$. Portanto, a medida de volume desse prisma é 324,375 cm³.

26. Como a vazão é 250 L por minuto, podemos calcular a medida de volume de água após 2 h 30 min (150 min): $250 \cdot 150 = 37\,500$. Medida de volume total da piscina: $V = 10 \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 60$. Como 60 m³ = 60 000 L, temos: $\dfrac{37\,500}{60\,000} = 0{,}625$. Ou seja, 62,5%. Alternativa **b**.

27. Exemplos de perguntas: Quantos litros de água cabem nessa piscina? Depois de 3 horas, qual seria a porcentagem do volume de água em relação ao volume total da piscina?

34. **a)** A medida de volume de um cilindro é dada por $V = \pi r^2 \cdot h$.

Medida de volume da lata **1**: $V_1 \simeq 3 \cdot (4)^2 \cdot 10 = 480$; ou seja, 480 cm³ ou 480 mL.

Medida de volume da lata **2**: $V_2 \simeq 3 \cdot (3)^2 \cdot 12 = 324$; ou seja, 324 cm³ ou 324 mL.

Mário deve escolher a lata **2** para seguir a receita, pois a lata **1** contém 180 mL além do necessário, enquanto a lata **2** contém apenas 24 mL além do necessário.

b) Custo da lata **1**: R$ 5,00 por 480 mL, aproximadamente, R$ 0,010 por mL.

Custo da lata **2**: R$ 4,80 por 324 mL, aproximadamente, R$ 0,015 por mL.

Portanto, ele deve escolher a lata **1**, que tem o menor custo por quantidade de produto.

36. Temos que o comprimento do raio da base mede 0,1 cm, dado que 2 mm = 0,2 cm e que 0,2 cm ÷ 2 = 0,1 cm. Logo, temos: $V = \pi(0{,}1)^2 \cdot 12 \Rightarrow V = 0{,}12\pi \Rightarrow V \simeq 0{,}377$. Portanto, pode ser acondicionado, aproximadamente, 0,377 mL de tinta no reservatório da caneta, dado que 0,377 cm³ = 0,377 mL.

37. $V = (\pi \cdot 10^2 \cdot 70) - (\pi \cdot 6^2 \cdot 70) = 4\,480\pi$. Portanto, $4\,480\pi$ cm³.

39. $V = (\pi \cdot 10^2 \cdot 6) - (\pi \cdot 5^2 \cdot 6) = 450\pi \simeq 1413$. Aproximadamente, 1413 cm³.

40. $V = (8 \cdot 5 \cdot 30) - \dfrac{1}{2}\pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 1200 - 64\pi \simeq 999$. Aproximadamente, 999 m³.

41. **a)** A medida de volume da embalagem **I** é dada por: $V_I = \pi x^2 y$. A medida de volume da embalagem **II** é dada por: $V_{II} = \pi \cdot \dfrac{x^2}{4} \cdot 2y \Rightarrow V_{II} = \dfrac{\pi x^2 y}{2}$.

Logo, notamos que a medida de volume da embalagem representada pela figura **I** é o dobro da medida de volume da outra, enquanto o preço dela é menor do que o dobro do preço da embalagem representada pela figura **II**. Portanto, é mais vantajoso comprar a embalagem representada pela figura **I**.

b) Exemplo de resposta: A qualidade dos ingredientes, a quantidade que a pessoa consegue consumir até o prazo de validade e o sabor.

42. **a)** Temos:

$\frac{\pi}{15}$ L _____ 1 min
x _____ 60 min
$\Rightarrow x = 4\pi$ L

b) Temos:

4π L _____ 1 hora
y _____ 2 horas
$\Rightarrow y = 8\pi$ L

8π L $= 8\pi$ dm$^3 = 0{,}008\pi$ m^3

$0{,}008\pi = \pi \cdot (2^2) \cdot h \Rightarrow h = 0{,}002$

Logo, 0,002 m.

c) $V_T = \pi r^2 \cdot h = 40\pi \Rightarrow V_T = 40\pi$

4π L _____ 1 hora
40π L _____ y
$\Rightarrow y = 10$ horas

43. A medida de capacidade da seringa é dada pela medida de volume do corpo da seringa (V_1) menos a medida de volume do êmbolo (V_2), em mL. Assim: $V_1 = \pi \cdot (1{,}5)^2 \cdot 2 = 4{,}5\pi$; $V_2 = \pi \cdot (1{,}5)^2 \cdot 10 = 22{,}5\pi$; $V = V_2 - V_1 = 22{,}5\pi - 4{,}5\pi = 18\pi \simeq 56$; logo, 56 cm^3 = 56 mL. Alternativa **b**.

44. Quantidade de estudantes da escola: $2 \cdot 125 = 250$;
Consumo diário de água: $250 \cdot 50$ L = 12 500 L;
Consumo de água em 2 dias:
$2 \cdot 12\,500$ L = 25 000 L = 25 000 dm^3 = 25 m^3.
Assim: $V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow 25 = \pi r^2 \cdot 2{,}5\,\frac{10}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{10}{\pi}} \simeq 1{,}8$.

Alternativa **b**.

45. Exemplo de problema: A dona de um restaurante deseja construir um reservatório de água com formato de cilindro reto para evitar o fechamento da unidade em caso de desabastecimento de água na região. Considerando que o restaurante serve uma quantidade média de 40 refeições no horário de almoço e 30 refeições no horário da janta, e que o reservatório deve ter uma medida de comprimento de diâmetro de 1,2 m, calcule a medida aproximada de altura mínima que o reservatório deve ter para que o restaurante funcione por 7 dias em caso de desabastecimento. (Desconsidere a medida de espessura das paredes do reservatório e considere $\pi \simeq 3$.)

Ampliando a atividade (p. 91)

a) Medida de área da superfície da parte inferior do depósito: $5 \cdot (2a)^2 + (4a^2 - a^2) = 23a^2$. Medida de área da superfície da parte superior: $5 \cdot a^2 = 5a^2$. Medida de área total da superfície do depósito: $23a^2 + 5a^2 = 28a^2$. Como $a = 2$ m, a medida de área total da superfície é 112 m^2. Serão gastos R$ 10.640,00, dado que $112 \cdot 95{,}00 = 10\,640$.

De acordo com o enunciado, a torneira preenche $4a^3$ em 8 minutos, isto é: $4(2\text{ m})^3 = 32$ m^3 em 8 min. Como 1 m^3 é igual a 1000 L e 1 min é igual a 60 s, então a vazão será dada por: $\frac{32 \cdot 1000}{8 \cdot 60} = \frac{32\,000}{480} \simeq 66{,}7$. Portanto, a vazão é de, aproximadamente, 66,7 L/s.

Conexões (p. 97)

1. A medida de volume de metal que sobrou é dada pela diferença entre a medida de volume do cubo e a medida de volume da peça.

Medida de volume do cubo: $V_C = 60^3 = 216\,000$.

Para determinar a medida de volume da peça, precisamos estabelecer:

- a medida de volume V_1 de um prisma de base com formato de um hexágono regular, cujo lado tenha medida de comprimento de 20 cm e altura com medida de 25 cm;
- a medida de volume V_2 de um prisma de base com formato de um hexágono regular, cujo lado tenha medida de comprimento de 8 cm e altura com medida de 25 cm, que corresponde à cavidade interna da peça.

Assim, temos: $V_1 = \frac{6 \cdot 20^2\sqrt{3}}{4} \cdot 25 = 15\,000\sqrt{3}$ e

$V_2 = \frac{6 \cdot 8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 25 = 2\,400\sqrt{3}$.

$V_{\text{peça}} = V_1 - V_2 = 15\,000\sqrt{3} - 2\,400\sqrt{3} = 12\,600\sqrt{3}$

Logo, a medida de volume x de metal que sobrou é $\left(216\,000 - 12\,600\sqrt{3}\right)$ cm^3.

Tecnologias digitais (p. 107)

1. Exemplo de resposta: Considerando que a medida de comprimento do raio da circunferência representada no 1º passo é 1 u, temos: $A_\ell = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 5 \Rightarrow A_\ell = 10\pi$. Portanto, a medida de área lateral do cilindro é 10π unidades de medida ao quadrado ou 10π u^2.

2. Exemplo de resposta: Considerando que a medida de comprimento do raio da circunferência representada no 1º passo é 1 u e que a medida de área do $\triangle ABC$, também representado no 1º passo, é 3, temos: $A_\ell = 14{,}14 + 11{,}18 + 15 \Rightarrow A_\ell = 40{,}32$; $A_T = 40{,}32 + 2 \cdot 3 \Rightarrow A_T = 46{,}32$. A medida de área total do prisma é 46,32 u^2. $A_T = 10\pi + 2 \cdot \pi \Rightarrow A_T = 12\pi$. A medida de área total do cilindro é 12π u^2.

3. **a)** Medida de volume da peça com formato de prisma: $V = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$. Portanto, 63 cm^3.

Medida de volume da peça com formato de cilindro: $V = \pi \cdot 22 \cdot 6 \simeq 75{,}36$. Aproximadamente, 75,36 cm^3.

b) Medida de área da peça com formato de prisma: $A_\ell = 4 \cdot 21 \Rightarrow A_\ell = 84$; $A_T = 84 + 2 \cdot 9 \Rightarrow A_T = 102$; Portanto, 102 cm^2.

Medida de área da peça com formato de cilindro: $A_\ell = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6 \Rightarrow A_\ell = 24\pi$; $A_T \simeq 24\pi + 2 \cdot 12{,}57 \Rightarrow A_T = 24\pi + 25{,}14 \Rightarrow A_T \simeq 100{,}5$. Aproximadamente, 100,5 cm^2.

4. **a)** Considerando que ambas as peças são maciças, a peça com formato cilíndrico, ou seja, a peça com a maior medida de volume, necessitará de uma maior quantidade de metal para ser fabricada.

b) A peça com formato de prisma, ou seja, a peça com a maior medida de área superficial.

5. Exemplo de problema: Para a construção de um maquinário industrial, são necessárias peças de metal maciço com formato de prisma de base pentagonal e de cilindro. A peça com formato de prisma de base pentagonal deve ter uma medida de comprimento da altura igual a 4 cm e as arestas da base devem ter medida de comprimento igual a 1 cm. A peça com formato de cilindro deve ter a medida de comprimento de raio igual a 1 cm e medida de comprimento da altura igual a 4 cm.

a) Calcule a medida de volume de metal necessário para produzir 5 peças com formato de cilindro e a medida de volume para produzir 5 peças com formato de prisma de base pentagonal. Qual peça necessita de uma maior quantidade de metal para ser produzida?

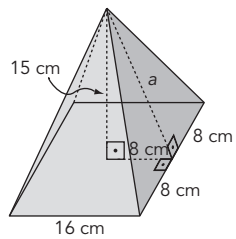
b) A superfície de cada peça precisa ser totalmente revestida com uma tinta anticorrosiva e antiaderente. Qual peça tem a maior medida de área e, portanto, necessitará de uma maior quantidade de tinta? (Considere $\pi \simeq 3$.)

Capítulo 3

Atividades

1. Considere a figura representada a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora



$a^2 = 15^2 + 8^2 \Rightarrow a^2 = 289 \Rightarrow a = 17$;

$A_T = A_b + 4A_\triangle = 16^2 + 4 \cdot \frac{16 \cdot 17}{2} = 800$. Logo, 800 cm².

2. $a_1^2 + 4^2 = 8^2 \Rightarrow a_1 = 4\sqrt{3}$; logo, temos: $a^2 = a_1^2 + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 12^2 \Rightarrow a = 8\sqrt{3}$.

$A_T = A_b + 6A_\triangle = \frac{3 \cdot 8^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + 6 \cdot \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 288\sqrt{3}$. Logo, $288\sqrt{3}$ cm².

3. $A_\ell = 4 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 5^2\sqrt{3} = 25\sqrt{3} \simeq 42{,}5$. Rendimento dessa tinta por metro quadrado:

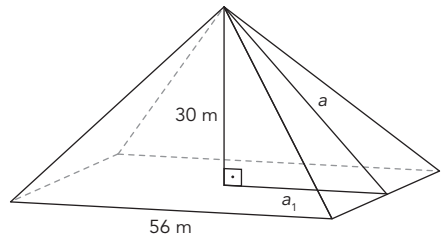
$$18\text{ L} \text{ ——— } 180\text{ m}^2$$
$$x \text{ ——— } 1\text{ m}^2$$
$$x = \frac{18\text{ L} \cdot 1\text{ m}^2}{180\text{ m}^2} = 0{,}1\text{ L}$$

Para cada metro quadrado, devemos utilizar 0,1 L de tinta, então, $85 \cdot 0{,}1 = 8{,}5$. Portanto, menos da metade de 1 galão. Alternativa **e**.

4. Exemplo de problema: Uma escultura de gesso é formada pela composição de 2 sólidos geométricos: uma pirâmide reta de base quadrada e um cubo. A pirâmide está posicionada sobre o cubo de maneira que a base dela é uma das faces do cubo, cuja aresta tem medida de comprimento de 2 m. A medida de comprimento da aresta lateral da pirâmide é igual à medida de comprimento da diagonal do cubo. Para finalizar a obra, a escultora planeja pintá-la usando uma tinta para gesso que tem rendimento de 18 L para 200 m² por demão. Qual é a quantidade aproximada de tinta necessária para pintar essa escultura considerando que serão necessárias 2 demãos e que a base da escultura não deve ser pintada. (Considere $\sqrt{11} \simeq 3{,}32$.)

9. Considere a figura a seguir.

WYM Design/Arquivo da editora



$a_1 = \frac{56}{2} = 28$; ou seja, $a_1 = 28$ m; $a^2 = 30^2 + 28^2 \Rightarrow a^2 = 1684 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{1684} \Rightarrow a \simeq 41$. Aproximadamente 41 m.

10. $A_1 = 32^2 = 1024$; $A_2 = 20^2 = 400$; então:

$$\frac{400}{1024} = \left(\frac{x}{x+40}\right)^2 \Rightarrow \frac{25}{64} = \frac{x^2}{x^2 + 80x + 1600} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 39x^2 - 2\,000x - 40\,000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{200}{13} \text{ ou } x = \frac{200}{3}$$

Como $x > 0$, consideramos apenas $x = \frac{200}{3}$; assim,

$x + 40 = \frac{320}{3}$. Então: $V_1 = \frac{1024 \cdot \frac{320}{3}}{3} \simeq 36\,409$ e

$V_2 = \frac{400 \cdot \frac{200}{3}}{3} \simeq 8\,889$.

Logo, 36 409 cm³ − 8 889 cm³ = 27 520 cm³ = 27,52 L.
Alternativa **e**.

17. $A_1 = 2\pi R \cdot H = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}6 \simeq 24{,}13$

$A_2 = 2\pi R \cdot H = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}6 \simeq 25{,}13$

$g^2 = r^2 + h^2 = 6{,}25 + 0{,}04 = 6{,}29 \Rightarrow g \simeq 2{,}51$

$A_3 = \pi rg = \pi \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}51 \simeq 19{,}71 \simeq 19{,}71$

$A_4 = \pi r^2 = \pi \cdot 2{,}4^2 = 18{,}09$

$A_5 = \pi r^2 = \pi \cdot 2{,}5^2 = 19{,}63$

$A_T = 24{,}13 + 25{,}13 + 19{,}71 + 18{,}09 + 19{,}63 = 106{,}69$

$106{,}69 \cdot 130 = 13\,869{,}7$

13 869,7 g ≃ 13,87 kg

Portanto, será necessário comprar 3 latas.

20. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (0{,}15)^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}00375\pi$. A medida de volume é $0{,}00375\pi$ m³.

21. $g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 26^2 = 10^2 + h^2 \Rightarrow h = 24$

$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \pi \cdot 24 \simeq 2\,513$

A medida de volume do silo é 2 513 m³.

24. Exemplo de problema: Um meteorologista identifica a formação de um tornado com medida de comprimento do diâmetro da base igual a 30 m e medida de comprimento da altura igual a 75 m. Para emitir um alerta, ele precisa informar, além das medidas de comprimento da altura e de comprimento do diâmetro, a medida de massa de ar que é deslocada. Considerando que o formato do tornado se parece com o formato de um cone reto, calcule essa medida. (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.)

25. **a)** $V = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 12{,}7}{3} \Rightarrow V = 38{,}1\pi$

A medida de volume da embalagem de 200 g é $38{,}1\pi$ cm³.

Se considerarmos os triângulos formados pela geratriz, pela altura e pelo raio de cada embalagem, temos que eles são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo. Sendo r_1 a medida de comprimento do raio do cone maior, e h, a medida de comprimento da altura do cone maior, temos:

$\frac{12{,}7}{3} = \frac{h}{r_1} \Rightarrow r_1 \simeq \frac{h}{4{,}2}$

A medida de volume da embalagem de 400 g:

$2V = \frac{\pi \cdot r_1^2 \cdot h}{3} \Rightarrow 2(38{,}1\pi) = \frac{\pi \cdot \left(\frac{h}{4{,}2}\right)^2 \cdot h}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 76{,}2\pi = \frac{\pi h^3}{52{,}92} \Rightarrow h^3 \simeq 4\,032{,}5 \Rightarrow h \simeq 15{,}9$

Logo, a medida de altura da embalagem de 400 g é aproximadamente 15,9 cm.

b) Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Um aumento no custo de matérias-primas pode levar à diminuição da embalagem para manter a lucratividade.

26. $2V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 20}{3} \Rightarrow 2V = \frac{500\pi}{3} \Rightarrow V = \frac{250\pi}{3}$

Sendo r_1 a medida de comprimento do raio do cone menor e h a medida de comprimento da altura do cone menor, temos: $\frac{20}{5} = \frac{h}{r_1} \Rightarrow r_1 = \frac{h}{4}$.

$V = \frac{\pi \cdot r_1^2 \cdot h}{3} \Rightarrow \frac{250\pi}{3} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{h^2}{4}\right) \cdot h}{3} \Rightarrow 250\pi = \frac{\pi h^3}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow h^3 = 4\,000 \Rightarrow h \simeq 15{,}9$. Aproximadamente 15,9 cm.

Tecnologias digitais (p. 133)

1. Exemplo de resposta: Considerando que a medida de comprimento do raio da circunferência representado no 1º passo é 1 u, temos:

$A_\ell = \pi rg \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 1 \cdot 6{,}08 \Rightarrow A_\ell = 6{,}08\pi$

Portanto, $6{,}08\pi$ u².

2. Exemplo de resposta: Considerando que a medida de comprimento do raio da circunferência representada no 1º passo é 1 u e que a medida de área da região quadrada, também representada no 1º passo, é 4 u, temos:

Medida de área total da pirâmide de base quadrada:

$A_\ell = 6{,}08 + 6{,}08 + 6{,}08 + 6{,}08 \Rightarrow A_\ell = 24{,}32$

$A_T = A_\ell + A_b \Rightarrow A_T = 24{,}32 + 4 \Rightarrow A_T = 28{,}32$

A medida de área total da pirâmide é 28,32 u².

Medida de área total do cone:

$A_T = A_\ell + A_b \Rightarrow A_T = 6{,}08\pi + \pi \Rightarrow A_T = 7{,}08\pi$

Portanto, $7{,}08\pi$ u².

5. Exemplo de problema: Uma artesã produz peças de madeira maciça com diversos formatos para um jogo de tabuleiro. As peças com formato de pirâmide com base octogonal têm medida de comprimento da altura 7 cm e medida de comprimento da aresta da base 1 cm. As peças com formato de cone têm medida de comprimento da altura 6 cm e medida de comprimento de raio 1 cm. Para que as peças possam ser comercializadas em lojas de brinquedos, a artesã precisa fornecer uma ficha técnica indicando as principais características das peças. Ela já tem a medida de massa e o tipo de material e precisa fornecer as medidas de área superficial total e de volume de cada objeto. Calcule essas medidas. (Considere $\pi \simeq 3{,}14$.)

Capítulo 4

Atividades

3. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 \simeq \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 729 = 3\,052{,}08$;

logo, $3\,052{,}08 \div 20 \simeq 152{,}60$. Aproximadamente, 152,60 m³/h.

4. $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{512\pi}{3} \Rightarrow R^3 = \frac{512\pi \cdot 3}{3 \cdot 4\pi} \Rightarrow R^3 = 128 \Rightarrow R = 4\sqrt[3]{2}$;

portanto $4\sqrt[3]{2}$ cm.

$A = 4\pi R^2 = 4\pi \left(4\sqrt[3]{2}\right)^2 = 64\pi\sqrt[3]{4}$; portanto, $64\pi\sqrt[3]{4}$ cm².

7. $6{,}4 = \frac{72° \cdot 3 \cdot r^3}{270°} \Rightarrow r^3 = 6{,}4 \cdot \frac{10}{8} \Rightarrow r = 2$;

então, $A = \frac{72° \cdot 3 \cdot 2^2}{90°} = 9{,}6$.

A medida de área da superfície do fuso é 9,6 m².

8. $V_H \simeq \frac{\frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 1^3}{2} = 2$

$V_C \simeq \frac{3 \cdot 1^2 \cdot 0{,}8}{3} = 0{,}8$

$V = V_H + V_C \simeq 2 + 0{,}8 = 2{,}8$

Logo, a medida de volume da boia é, aproximadamente, 2,8 m³.

9. $2\pi r = 70 \Rightarrow r = \frac{35}{\pi}$; logo, a medida de comprimento do raio é $\frac{35}{\pi}$ cm.

$A = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{35}{\pi}\right)^2 \Rightarrow A = 4 \cdot \frac{35^2}{\pi}$; logo, a medida de área da superfície da bola é $4 \cdot \frac{35^2}{\pi}$ cm².

Considerando um aumento de 10%:

$A = 1{,}1 \cdot 4 \cdot \frac{35^2}{\pi} = \frac{4{,}4 \cdot 35^2}{\pi}$.

Portanto, $\frac{4{,}4 \cdot 35^2}{\pi}$ cm².

Alternativa **b**.

11. Medida de comprimento do raio da nova esfera:

$13{,}5 \simeq \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot r^3 \Rightarrow r^3 \simeq 3{,}375 \Rightarrow r \simeq 1{,}5$

Cálculo da nova medida de diâmetro: 5 m − 3 m = 2 m.

Logo, a medida de comprimento do diâmetro da nova esfera é, aproximadamente, 3 m.

$\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$

Redução de, aproximadamente, 40%. Alternativa **a**.

13. Medida de volume da parte inferior do brinquedo:

$V_1 \simeq \frac{\frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5^3}{2} \simeq 261{,}67$

Para 100 brinquedos:

$100 \cdot 261{,}67 = 26\,167$

Aproximadamente, 26 167 cm^3 de plástico.

14. Medida de volume de cada laranja:

$V \simeq \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 3^3 = 113{,}04$

$113{,}04\ cm^3 = 0{,}11304\ L$

Medida de volume de suco de 1 laranja:

$\frac{2}{3} \cdot 0{,}11304\ L = 0{,}07536\ L$

Assim, temos:

$\frac{1 \text{ laranja}}{x \text{ laranjas}} = \frac{0{,}07536\ L}{1\ L} \Rightarrow x = \frac{1}{0{,}07536} \simeq 13{,}3$

Ou seja, no mínimo, 14 laranjas.

Alternativa **b**.

17. Temos que a diferença entre as longitudes da origem e do destino é 90° (pois 60° + 30° = 90°). Como cada 15° correspondem a 1 hora, temos que a diferença de fuso é 6 horas. Considerando que João viajou no sentido oeste-leste, temos que as 6 horas foram adicionadas ao fuso de origem. Desse modo, a viagem de João inicia-se às 12 horas de 21 de abril, horário de Manaus. Adicionadas as 11 horas de voo, ele chega em Kigali às 23 horas de 21 de abril, horário de Manaus. Considerando a diferença de fuso, temos que João chega ao destino às 5 horas do dia 22 de abril, horário de Kigali.

19. Como a Califórnia está localizada 120° a oeste de Greenwich (o que corresponde a 8 horas a menos) e na ocasião vigorava o horário de verão nos Estados Unidos, o horário era 7 horas a menos do que o fuso de Greenwich.

Portanto, 19 h 30 min de 13 de abril na Califórnia corresponde a:

- 2 h 30 min de 14 de abril, em Greenwich;
- 0 h 30 min de 14 de abril, em Fernando de Noronha (−2 horas de Greenwich);
- 23 h 30 min de 13 de abril, em São Paulo (SP) e no Distrito Federal (−3 horas de Greenwich);
- 22 h 30 min de 13 de abril, em Manaus (AM) (−4 horas de Greenwich);
- 21 h 30 min de 13 de abril, em Rio Branco (AC) (−5 horas de Greenwich).

Alternativa **d**.

Enem e vestibulares (p. 153)

1. $A = \frac{3F}{2}$; logo, $F - A + V = 2 \Rightarrow F - \frac{3F}{2} + 8 = 2 \Rightarrow F = 12$.

Portanto, a quantidade de faces é 12. Alternativa **e**.

2. Medida de volume do recipiente:

$V = 100 \cdot 50 \cdot 20 \Rightarrow V = 100\,000$;

logo, $100\,000\ cm^3 = 100\ L$.

Considerando a vazão, temos:

$\frac{100\ L}{5\ L/min} = 20$ min. Portanto, o recipiente estará cheio em 20 minutos. Alternativa **d**.

3. A cada hora, o nível de água aumenta 0,3 m.

Logo, a cada 1 h: $3\ m^2 \cdot 0{,}3\ m = 0{,}9\ m^3$.

Ou seja, a vazão é de 0,9 metro cúbico por hora.

Alternativa **c**.

4. Medida de volume do cesto do modelo 2:

$V = \pi \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^2 \cdot 11 = \pi \cdot 25 \cdot 11 = 825$. Como a medida de volume do primeiro cesto é 1728 cm^3, é aproximadamente o dobro da medida de volume do segundo cesto.

Alternativa **d**.

5. A medida de volume da pedra corresponde à medida de volume da água deslocada. Ou seja, à medida de volume do cilindro cuja altura tem medida de comprimento igual a 3,5 cm (pois 23,5 − 20 = 3,5) e cujo comprimento do raio da base mede 8 cm.

$V = \pi \cdot 64 \cdot 3{,}5 = 224\pi$; portanto, a medida de volume é $224\pi\ cm^3$.

Alternativa **b**.

6. $V_{pote} = \pi r^2 h \simeq 3 \cdot (6)^2 \cdot 24 = 2\,592$; portanto, a medida de volume do pote é aproximadamente 2 592 cm^3.

$V_{pote} = \frac{0{,}04}{1{,}2} \simeq 0{,}03$; portanto, a medida de volume ocupada por um grão de arroz é, aproximadamente, 0,03 cm^3.

$\frac{2\,592}{0{,}03} = 86\,400$; ou seja, a quantidade está entre 60 e 90 mil. Alternativa **a**.

7. Para determinar a medida de área da face lateral da pirâmide, precisamos, primeiro, determinar a medida de comprimento da altura x da face lateral:

$x^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow x^2 = \sqrt{400} \Rightarrow x = 20$

Assim, temos: $A_T = A_b + A_\ell \Rightarrow A_T = 24^2 + 4 \cdot \frac{24 \cdot 20}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_T = 1536$.

Portanto, 1536 cm^2. Alternativa **d**.

8. Medida de volume original:

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{8}{2}\right)^2 \cdot 10 = \frac{160}{3}\pi$

A nova medida de volume equivale a 81% da medida de volume original. Portanto, se r é a medida de comprimento do raio da base dos novos chocolates, temos:

$\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot 10 = \frac{81}{100} \cdot \frac{160}{3}\pi \Rightarrow r^2 = 12{,}96 \Rightarrow r = 3{,}6$

Alternativa **c**.

9. $V_1 = 50 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V_1 = 50 \cdot \frac{4}{3}\pi\,(1)^3 \Rightarrow V_1 = \frac{200\pi}{3}$

$V_2 = 150 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V_2 = 150 \cdot \frac{4}{3}\pi\,(2)^3 \Rightarrow V_2 = 1600\pi$

Logo, temos que as porções preparadas devem ser $\frac{1\,600\pi}{\frac{200\pi}{3}} = 24$. Alternativa **e**.

Unidade 3

Capítulo 1

Atividades

2. Exemplo de resposta: De acordo com o historiador e filósofo grego Plutarco, Tales utilizou semelhança de triângulos para calcular, com o auxílio de uma estaca, a medida de altura de uma pirâmide. Como os raios do Sol podem ser considerados paralelos, as medidas de comprimento das sombras da pirâmide e da estaca são proporcionais às medidas de altura delas. Assim, conhecendo a medida de altura da estaca, Tales a fincou na areia, perpendicularmente ao solo, mediu os comprimentos das sombras da pirâmide e da estaca em determinado horário do dia e estabeleceu a seguinte proporção:

$$\frac{\text{medida de altura da pirâmide}}{\text{medida de comprimento da sombra da pirâmide}} = \frac{\text{medida de altura da estaca}}{\text{medida de comprimento da sombra da estaca}}$$

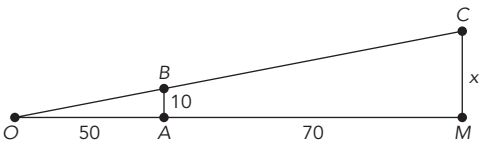
Usando essa proporção, ele obteve a medida de altura da pirâmide.

4. Como $AB = 130$ cm e $AB = DC$, temos $DC = 130$ cm. Como $AD = 175$ cm e $AD = BC$, temos $BC = 175$ cm. Temos também que os triângulos DCE e DGF são semelhantes, pois têm 2 ângulos homólogos congruentes (o ângulo $\hat{D}$ comum aos triângulos e os ângulos retos $\hat{C}$ e $\hat{G}$). Dessa semelhança, temos que $\frac{DE}{DF} = \frac{DC}{DG} = \frac{EC}{FG}$. Analisando a última igualdade $\frac{DC}{DG} = \frac{EC}{FG}$ e sabendo que $DG = FG$, concluímos que $DC = EC$. E já concluímos que $DC = 130$ cm; então, $EC = 130$ cm. Assim, a medida de altura da cesta de basquete é:

$BC + EC = 175\text{ cm} + 130\text{ cm} = 305\text{ cm} = 3{,}05\text{ m}$

5. **b)** Exemplo de problema: Paula está segurando um modelo de triângulo retângulo isósceles feito de papel, com um dos lados menores paralelo ao chão e o outro paralelo ao mastro de uma bandeira, de modo que o lado maior está alinhado ao topo do mastro. A medida de distância entre o chão e a base do triângulo é 1,80 m de altura, e o lado paralelo ao mastro está a 3 m dele. A partir dessas informações, como Paula pode determinar a medida de altura do mastro?

6.



WYM Design/Arquivo da editora

$\frac{10}{50} = \frac{x}{120} \Rightarrow 50x = 1200 \Rightarrow x = 24$; logo, a medida de altura da torre é 24 m.

7. Como os raios solares incidem paralelamente entre si e a vareta e o prédio são perpendiculares ao chão, temos que os 2 triângulos em destaque na imagem são semelhantes, pelo caso AA. Então, sendo x a medida de altura do prédio, temos a seguinte proporção:

$\frac{1{,}2}{0{,}3} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 16$; ou seja, 16 m.

8. Os triângulos AHD e CDH são congruentes pelo caso LAL, pois $AD = CD$, $\overline{DH}$ está contido na bissetriz do ângulo $\hat{D}$ e, também, é o lado comum aos 2 triângulos.

Os triângulos HIJ e CFG são congruentes pelo caso LLL, pois $AE = IJ$ por serem lados paralelos do paralelogramo e, como E é ponto médio de $\overline{AB}$ e F é ponto médio de $\overline{BC}$, então $IJ = CF$. Como H é ponto médio da diagonal, então $AH = CH$, sendo G e I pontos médios, então $HI = CG$. Por fim, $GF = HJ$ por serem lados do quadrado.

9. O vértice C é comum aos 2 triângulos e, portanto, o ângulo $\hat{C}$ é o mesmo em ambos os triângulos, por ser oposto pelo vértice (OPV).

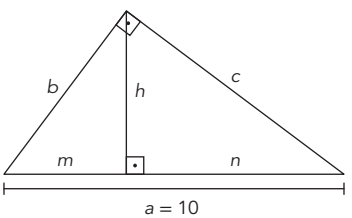
Além disso, $BC = CE$, pois o ponto C é o ponto médio de $\overline{BE}$ e $\hat{B} \cong \hat{E}$. Logo, os triângulos ABC e DCE são congruentes pelo caso ALA e temos que: $2x - 2 = 10 \Rightarrow x = 6$. Portanto, a medida de distância da casa de Marina até o trabalho é 6 km.

10. Exemplo de problema: O parque de uma cidade (ponto E) está localizado na metade do caminho entre o *shopping* (ponto A) e o mercado (ponto D) e, também, entre o museu (ponto B) e a farmácia (ponto C). Sabendo que $AB = 20$ km, $AE = 3x - 3$, $DE = 30$ km e $DC = 2y + 10$, responda: Qual é o valor, em km, de x e y?

Capítulo 2

Atividades

4.



WYM Design/Arquivo da editora

$\frac{m}{n} = \frac{9}{16} \Rightarrow m = \frac{9n}{16}$

$m + n = 10 \Rightarrow \frac{9n}{16} + \frac{16n}{16} = 10 \Rightarrow 25n = 160 \Rightarrow n = \frac{32}{5}$

$m = \frac{9}{16} \cdot \frac{32}{5} = \frac{18}{5}$

$b^2 = am \Rightarrow b^2 = 10 \cdot \frac{18}{5} \Rightarrow b^2 = 36$

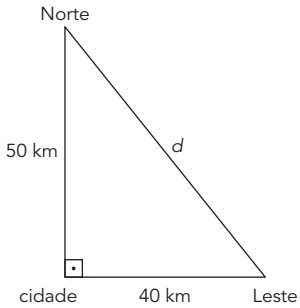
Como a medida de comprimento do lado não pode ser um valor negativo, temos $b = 6$ cm.

$c^2 = an \Rightarrow c^2 = 10 \cdot \frac{32}{5} \Rightarrow c^2 = 64$

Como a medida de comprimento do lado não pode ser um valor negativo, temos $c = 8$ cm.

Ou seja, 6 cm e 8 cm.

5.



WYM Design/Arquivo da editora

$d^2 = 50^2 + 40^2 \Rightarrow d^2 = 4100$

Como a medida de comprimento do lado não pode ser um valor negativo, $d = 10\sqrt{41}$ km (aproximadamente 64 km).

6. Como a razão é $\frac{C}{A} = \frac{4}{3}$, obtemos:

$\frac{C}{A} = \frac{4}{3} \Rightarrow A = \frac{3C}{4}$

Sabendo que $x = 20$, obtemos:

$x^2 = C^2 + A^2 \Rightarrow 20^2 = C^2 + \left(\frac{3C}{4}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 400 = C^2 + \frac{9C^2}{16} \Rightarrow C^2 = 256$

Temos $C = 16$ polegadas.

Portanto: $16 \cdot 2{,}54 = 40{,}64$, ou seja, 40,54 cm.

Alternativa **d**.

8. Para maximizar a área da região em que serão afixados os doces, devemos ter os menores valores possíveis de h e de r. Como r deve ser pelo menos 3 cm, precisaremos ter exatamente $r = 3$ cm.

Pela figura, OAB é um triângulo retângulo em A, cuja hipotenusa é o raio da esfera, ou seja, tem medida de comprimento 5 cm. Também temos que $AO + h = 5$, ou seja, $AO = 5 - h$.

Logo: $5^2 = 3^2 + (5 - h)^2 \Rightarrow 25 = 9 + (5 - h)^2 \Rightarrow 16 = (5 - h)^2 \Rightarrow 4 = 5 - h$ (pois $5 - h$ é uma medida de comprimento, então $5 - h > 0$) $\Rightarrow h = 1$. Logo, $h = 1$ cm.

Alternativa **c**.

9.

a) $40^2 = 20^2 + 30^2 \Rightarrow 1600 = 1300$ (falsa)

b) $50^2 = 20^2 + 40^2 \Rightarrow 2500 = 2000$ (falsa)

c) $70^2 = 35^2 + 45^2 \Rightarrow 4900 = 3250$ (falsa)

d) $120^2 = 60^2 + 80^2 \Rightarrow 14400 = 10000$ (falsa)

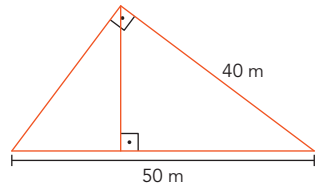
e) $150^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow 22500 = 22500$ (verdadeira)

Alternativa **e**.

10. Chamando de x a medida de comprimento da rampa em relação ao chão até o início do patamar superior, temos que: $x^2 = 4^2 + (0{,}9)^2 \Rightarrow x = 4{,}1$ (x não pode ser negativo). Ou seja, 4,1 m.

11. Exemplo de problema: O terreno de uma praça em uma cidade tem o formato de um triângulo retângulo cujo lado maior tem 40 m de medida de comprimento. O prefeito da cidade resolveu ampliar a praça ocupando o terreno ao lado, que também tem o formato de um triângulo retângulo. Após a ampliação da praça, ela continuou a ter o formato de um triângulo retângulo, mas com o lado maior com medida de comprimento 50 m. Qual era a medida de comprimento dos outros 2 lados da praça antes de ela ser ampliada?

Banco de imagens/Arquivo da editora



12.

a) $h^2 = 6^2 + 10^2 \Rightarrow h^2 = 136 \Rightarrow h \simeq 11{,}7$; logo, aproximadamente, 11,7 m.

b) Como são necessários, aproximadamente, 11,7 metros de fita e cada rolo rende 10 m, serão necessários 2 rolos, ou seja, o custo será de R$ 10,00 em fita adesiva.

13.

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{9}{15} = 0{,}6$

b) $\cos \alpha = \frac{12}{15} = 0{,}8$

c) $\tan \alpha = \frac{9}{12} = 0{,}75$

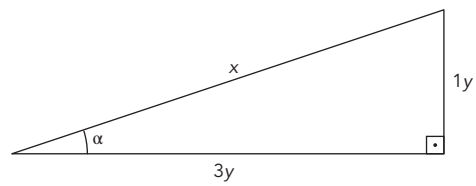
d) $\operatorname{sen} \beta = \frac{12}{15} = 0{,}8$

e) $\cos \beta = \frac{9}{15} = 0{,}6$

f) $\tan \beta = \frac{12}{9} \simeq 1{,}33$

15. Como $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, as medidas de comprimento do cateto oposto e do cateto adjacente a α são da forma $1y$ e $3y$, com $y \neq 0$, respectivamente.

WYM Design/Arquivo da editora



$x^2 = (1y)^2 + (3y)^2 \Rightarrow x^2 = y^2 + 9y^2 \Rightarrow x = y\sqrt{10}$ (pois $x > 0$)

Então: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1y}{x} = \frac{y}{y\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

16.

a) $\operatorname{sen} \hat{G} = \frac{EF}{FG} = \cos \hat{F} = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$\cos \hat{G} = \frac{EG}{FG} = \operatorname{sen} \hat{F} = \frac{5}{6}$

$\tan \hat{G} = \frac{EF}{EG} = \frac{1}{\frac{EG}{EF}} = \frac{1}{\tan \hat{F}} = \frac{1}{\frac{5\sqrt{11}}{11}} = \frac{11}{5\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{5}$

b) $\operatorname{sen} \hat{F} = \frac{EG}{30} = \frac{5}{6} \Rightarrow EG = 25$

$\cos \hat{F} = \frac{EF}{30} = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow EF = 5\sqrt{11}$

A medida de comprimento do cateto $\overline{EG}$ é 25 cm e a medida de comprimento do cateto $\overline{EF}$ é $5\sqrt{11}$ cm.

c) • $(\operatorname{sen} \hat{F})^2 + (\cos \hat{F})^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 = \frac{36}{36} = 1$

• $\frac{\operatorname{sen} \hat{F}}{\cos \hat{F}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$

• $\operatorname{sen}^2 \hat{G} + \cos^2 \hat{G} = (\operatorname{sen} \hat{G})^2 + (\cos \hat{G})^2 =$

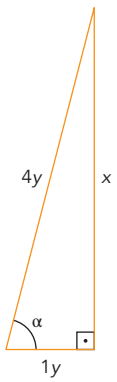
$= \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{36}{36} = 1$

• $\frac{\operatorname{sen} \hat{G}}{\cos \hat{G}} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \cdot \frac{6}{5} = \frac{\sqrt{11}}{5}$

17. $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$ (pois $0° < \alpha < 90°$). O valor do $\cos \alpha$ é $\frac{3}{5}$.

18. Como $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, as medidas de comprimento do cateto adjacente a α e da hipotenusa são da forma $1y$ e $4y$, com $y \neq 0$, respectivamente.



WYM Design/Arquivo da editora

$(4y)^2 = x^2 + (1y)^2 \Rightarrow 16y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 15y^2 \Rightarrow x = y\sqrt{15}$ (pois $x > 0$)

Então: $\tan \alpha = \frac{x}{1y} = \frac{y\sqrt{15}}{y} = \sqrt{15}$. O valor da $\tan \alpha$ é $\sqrt{15}$.

19. **a)** $\operatorname{sen} 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\tan 45° = \frac{\ell}{\ell} = 1$.

b) $\operatorname{sen} 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2}$;

$\cos 30° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\tan 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $\operatorname{sen} 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2}$;

$\tan 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \sqrt{3}$.

d)

Medida de abertura	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

e)

Medida de abertura	30°	45°	60°
sen	0,5	0,707	0,866
cos	0,866	0,707	0,5
tan	0,577	1	1,732

24. **a)** $\operatorname{sen} \beta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\cos \beta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\tan \beta = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\beta = 30°$.

b) $\operatorname{sen} \beta = \frac{6}{10} = 0{,}6$; $\cos \beta = \frac{8}{10} = 0{,}8$;

$\tan \beta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$; $\beta \simeq 37°$.

25. **a)** $\operatorname{sen} 70° = \frac{8}{x} \Rightarrow 0{,}940 = \frac{8}{x} \Rightarrow x \simeq 8{,}51$;

logo, $x \simeq 8{,}51$ dm.

b) $\cos 50° = \frac{8}{y} \Rightarrow 0{,}643 = \frac{8}{y} \Rightarrow y \simeq 12{,}44$;

$\operatorname{sen} 70° = \frac{y}{x} \Rightarrow 0{,}940 \simeq \frac{12{,}44}{x} \Rightarrow x \simeq 13{,}23$;

logo, $x \simeq 13{,}23$ m e $y \simeq 12{,}44$ m.

26. **a)** $\cos 60° = \frac{4}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 8$, ou seja, 8 m.

b) $\alpha + 60° + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$

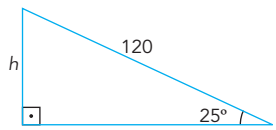
27. $\tan 60° = \frac{AC}{50} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AC}{50} \Rightarrow AC = 50\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{50}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{50}{BC} \Rightarrow BC = 100$

Portanto, a medida de perímetro é:

$50\text{ m} + 50\sqrt{3}\text{ m} + 100\text{ m} = \left(150 + 50\sqrt{3}\right)\text{ m}$ ou, aproximadamente, 236,6 m.

30.



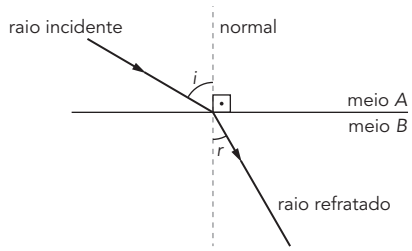
WYM Design/Arquivo da editora

$\operatorname{sen} 25° = \frac{h}{120} \Rightarrow 0{,}42 \simeq \frac{h}{120} \Rightarrow h = 50{,}4$; aproximadamente, 50,4 m.

31. $\tan 70° = \frac{\ell}{8} \Rightarrow 2{,}75 \simeq \frac{\ell}{8} \Rightarrow \ell = 22$

Aproximadamente, 22 metros.

32. De acordo com a figura a seguir:



WYM Design/Arquivo da editora

$\hat{i}$: ângulo de incidência

$\hat{r}$: ângulo de refração

n_A: índice de refração do meio A

n_B: índice de refração do meio B

Podemos relacionar todos esses elementos pela lei de Snell-Descartes:

$n_A \cdot \operatorname{sen} \hat{i} = n_B \cdot \operatorname{sen} \hat{r} \Rightarrow 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = n_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow n_B = \frac{\sqrt{6}}{2} \simeq 1{,}225$

33. Exemplo de problema: Para saber qual é a medida de altura de um poste, um observador se posicionou a 8 m da base do poste. Em seguida, com o teodolito, mirou no ponto mais alto do poste e verificou que a medida de abertura do ângulo formado entre a linha visual do topo do poste à linha visual paralela ao chão era 50°. Sabendo que a medida de abertura do ângulo entre o poste e a linha visual horizontal paralela ao chão é 90° e que o teodolito está a 1,80 m de medida de distância do chão, qual é a medida de altura do poste?

36. **a)** $180° - (105° + 45°) = 30°$

$\frac{100}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{x}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow \frac{100}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 100\sqrt{2} \simeq 141{,}42$

Logo, $x = 100\sqrt{2}$ cm ou $x \simeq 141{,}42$ cm.

b) $\frac{x}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{3\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 60°} \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 45°}{\operatorname{sen} 60°} = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \simeq 3{,}46$

Logo, $x = 2\sqrt{3}$ cm ou $x \simeq 3{,}46$ cm.

c) $180° - (75° + 45°) = 60°$

$\frac{5\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{x}{\operatorname{sen} 60°} \Rightarrow x = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5\sqrt{3} \simeq 8{,}66$

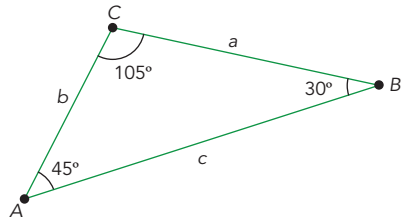
Logo, $x = 5\sqrt{3}$ cm ou $x \simeq 8{,}66$ cm.

d) $\frac{8}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{x}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow x = 8 \cdot \frac{\operatorname{sen} 30°}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 8 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \simeq 5{,}66$

Logo, $x = 4\sqrt{2}$ cm ou $x \simeq 5{,}66$ cm.

37.



WYM Design/Arquivo da editora

$$\begin{cases} \frac{a}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{b}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = b\sqrt{2} \quad \textbf{(I)} \\ a + b = \sqrt{2} + 1 \quad \textbf{(II)} \end{cases}$$

Substituindo **(I)** em **(II)**, obtemos:

$a + b = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow b\sqrt{2} + b = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow$

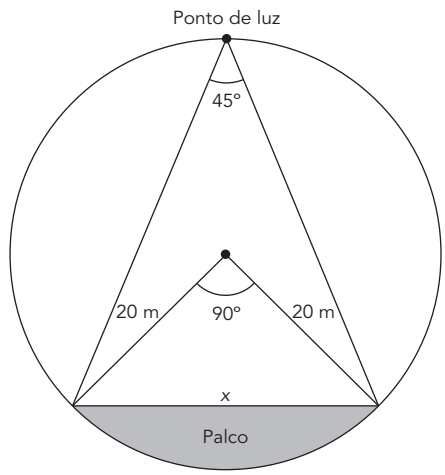
$\Rightarrow b(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow b = 1$

Substituindo $b = 1$ em **(I)**, obtemos:

$a = b\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} \simeq 1{,}41$

Logo, $a = \sqrt{2}$ cm ou $a \simeq 1{,}41$ cm.

42. **a)** O ângulo central indicado na imagem tem medida de abertura 90°; portanto, a frente do palco e os raios da circunferência formam um triângulo retângulo isósceles.



WYM Design/Arquivo da editora

$x^2 = 20^2 + 20^2 \Rightarrow x^2 = 800 \Rightarrow x \simeq 28{,}28$ (x não pode ser negativo)

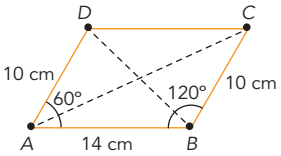
Aproximadamente 28,28 m.

b) Nessa situação, temos a mesma análise feita para o item **a**, agora com o ângulo central com medida de abertura 102°.

$$\frac{x}{\text{sen } 102°} = \frac{20}{\text{sen } 39°} \Rightarrow \frac{x}{\text{sen } (180° - 102°)} = \frac{20}{\text{sen } 39°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{0{,}978} \simeq \frac{20}{0{,}629} \Rightarrow x \simeq 31{,}1.$$ Aproximadamente 31,1 m.

50.



WYM Design/ Arquivo da editora

Cálculo de BD:

$(BD)^2 = 100 + 196 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \cos 60° = 296 - \cancel{280}^{140} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_{1}} =$

$= 156 \Rightarrow BD = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}$

Cálculo de AC:

$(AC)^2 = 100 + 196 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \cos 120° =$

$= 296 - \cancel{280}^{140} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}_{1}}\right) = 296 + 140 = 436 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 2\sqrt{109}$

Logo, $BD = 2\sqrt{39}$ cm e $AC = 2\sqrt{109}$ cm.

54. Para a medida de abertura do ângulo formado pelos ponteiros do relógio às 14:00, temos: $360° : 12 \cdot 2 = 60°$.

Nesse horário, os ponteiros formam um triângulo com 2 lados de medidas de comprimento 2,7 m e 4,7 m e o ângulo entre eles tem medida de abertura 60°.

$d^2 = (2{,}7)^2 + (4{,}7)^2 - 2 \cdot 2{,}7 \cdot 4{,}7 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 = 7{,}29 + 22{,}09 - 25{,}38 \cdot 0{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 = 16{,}69 \Rightarrow d \simeq 4{,}09$ (d não pode ser negativo); logo, $d \simeq 4{,}09$ m.

Ampliando a atividade (p. 198)

7. Pela lei dos cossenos no $\triangle ABC$, temos:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(4\sqrt{3}\right)^2 = (AB)^2 + 8^2 - 2 \cdot AB \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 48 = (AB)^2 + 64 - 8\sqrt{3} \cdot AB \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB)^2 - 8\sqrt{3} \cdot AB + 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB)^2 = \frac{8\sqrt{3} \pm \sqrt{192 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} =$

$= 4\sqrt{3} \pm 4\sqrt{2} \simeq 4 \cdot 1{,}73 \pm 4 \cdot 1{,}41$

Assim, vamos considerar 2 possibilidades para o resultado de AB:

- $4 \cdot 1{,}73 + 4 \cdot 1{,}41 = 12{,}56$

  Temos $AB = 12{,}56$ cm. Logo, $CD = 12{,}56 - 11 = 1{,}56$, ou seja, $CD = 1{,}56$ cm.

  Calculamos: $12{,}56 + 8 + 1{,}56 = 22{,}12$.

- $4 \cdot 1{,}73 - 4 \cdot 1{,}41 = 1{,}28$

  Temos $AB = 1{,}28$ cm. Logo, $CD = 1{,}28 - 11 < 0$, ou seja, essa opção não serve.

Portanto, considerando a primeira opção, a medida máxima de extensão do braço seria, aproximadamente, 22,12 cm.

Capítulo 3

Atividades

1. **a)** $180 \text{ —— } \pi$
$45 \text{ —— } x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\cancel{45}^{1}\pi}{\cancel{180}_{4}} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$; logo, $x = \frac{\pi}{4}$ rad.

b) $180 \text{ —— } \pi$
$210 \text{ —— } x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\cancel{210}^{7}\pi}{\cancel{180}_{6}} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$; logo, $x = \frac{7\pi}{6}$ rad.

c) $180 \text{ —— } \pi$
$300 \text{ —— } x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\cancel{300}^{5}\pi}{\cancel{180}_{3}} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3}$; logo, $x = \frac{5\pi}{3}$ rad.

d) $180 \text{ —— } \pi$
$135 \text{ —— } x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\cancel{135}^{3}\pi}{\cancel{180}_{4}} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$; logo, $x = \frac{3\pi}{4}$ rad.

e) $180 \text{ —— } \pi$
$x \text{ —— } \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \cancel{180}^{30} \cdot \frac{\pi}{\cancel{6}_{1}} \cdot \frac{1}{\pi} = 30$; logo, $x = 30°$.

f) $180 \text{ —— } \pi$
$x \text{ —— } \frac{5\pi}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \cancel{180}^{30} \cdot \frac{5\pi}{\cancel{6}_{1}} \cdot \frac{1}{\pi} = 150$; logo, $x = 150°$.

g) $180 \text{ —— } \pi$
$x \text{ —— } \frac{5\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \cancel{180}^{45} \cdot \frac{5\pi}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\pi} = 225$; logo, $x = 225°$.

h) $180 \text{ —— } \pi$
$x \text{ —— } \frac{4\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \cancel{180}^{60} \cdot \frac{4\pi}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\pi} = 240$; logo, $x = 240°$.

3. $180 \text{ —— } \pi$
$45 \text{ —— } x$ $\Rightarrow x = \frac{\cancel{45}^{1}\pi}{\cancel{180}_{4}} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \ell = \frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$

A medida de comprimento do arco é $\frac{\pi}{2}$ cm ou aproximadamente 1,57 cm.

4. **a)** $\ell = \alpha \cdot r \Rightarrow 12 = \alpha \cdot 10 \Rightarrow \alpha = \frac{6}{5} \Rightarrow \alpha = 1{,}2$;

logo, $\alpha = 1{,}2$ rad.

b) $\ell = \alpha \cdot r \Rightarrow 4\pi = \alpha \cdot 6 \Rightarrow \alpha = \frac{\cancel{4}^{2}\pi}{\cancel{6}_{3}} = \frac{2\pi}{3}$;

logo, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ rad.

6. **a)** $\frac{1}{4}$ volta —— 100 gr
$\frac{1}{2}$ volta —— x
$\Rightarrow x = 200$ gr

$\frac{1}{4}$ volta —— 100 gr
1 volta —— x
$\Rightarrow x = 400$ gr

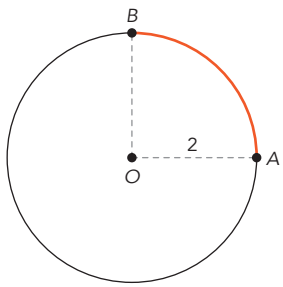
b) $\frac{\pi}{2}$ rad —— 100 gr
1 rad —— x
$\Rightarrow x = \frac{200}{\pi}$ gr

c) 90° —— 100 gr
x —— 1 gr
$\Rightarrow x = \frac{90°}{100} = 0{,}9°$

8. **a)** $\ell = \pi$

$\pi = \alpha \cdot 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

$\ell = \pi$
$\alpha = \frac{\pi}{2}$

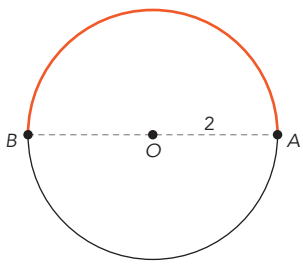


WYM Design/Arquivo da editora

b) $\ell = 2\pi$

$2\pi = \alpha \cdot 2 \Rightarrow \alpha = \pi$

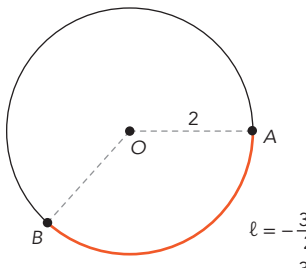
$\ell = 2\pi$
$\alpha = \pi$



WYM Design/Arquivo da editora

c) $\ell = -\frac{3\pi}{2}$

$-\frac{3\pi}{2} = \alpha \cdot 2 \Rightarrow \alpha = -\frac{3\pi}{4}$

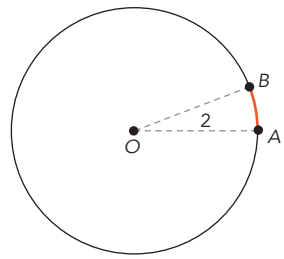


$\ell = -\frac{3\pi}{2}$
$\alpha = -\frac{3\pi}{4}$

WYM Design/Arquivo da editora

d) $\ell = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} = \alpha \cdot 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}$



$\ell = \frac{\pi}{4}$
$\alpha = \frac{\pi}{8}$

WYM Design/Arquivo da editora

11. **a)** $780 \,|\, \underline{360}$
$60 \quad 2$
$\alpha = 60°$

b) $1140 \,|\, \underline{360}$
$60 \quad 3$
$\alpha = 60°$

c) $400 \,|\, \underline{360}$
$40 \quad 1$

Como o ângulo dado é negativo, o resto obtido na divisão também diz respeito ao sentido horário, ou seja, um arco cuja medida angular é −40°. A localização de −40° rad no sentido horário, na circunferência trigonométrica, equivale a 320° rad no sentido anti-horário, pois 360° − 40° = 320°. Logo:

$\alpha = 320°$

d) $\frac{15\pi}{2} - 2\pi = \frac{11\pi}{2}$

$\frac{11\pi}{2} - 2\pi = \frac{11\pi - 4\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$

$\frac{7\pi}{2} - 2\pi = \frac{7\pi - 4\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

Logo, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ rad.

e) $\frac{10\pi}{3} - 2\pi = \frac{10\pi - 6\pi}{3} = \frac{4\pi}{2}$

Logo, $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ rad.

f) $\frac{9\pi}{2} - 2\pi = \frac{9\pi - 4\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} - 2\pi = \frac{5\pi - 4\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Logo, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad.

12. **a)** 180 —— π
α —— $\frac{7\pi}{4}$
$\Rightarrow \alpha = \frac{\overset{45}{\cancel{180}}}{} \cdot \frac{7\pi}{\underset{1}{\cancel{4}}} \cdot \frac{1}{\cancel{\pi}} = 315$; logo, $\alpha = 315°$.

b) 180 —— π
60 —— α
$\Rightarrow \alpha = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

$\ell = \alpha \cdot r = \ell = \frac{\pi}{3} \cdot 1{,}5 = \frac{\pi}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} = \frac{\pi}{2}$; logo, $\ell = \frac{\pi}{2}$ cm.

c) $2\,650 \,|\, \underline{360}$
$130 \quad 7$

$2\,650° = 7 \cdot 360° + 130° \Rightarrow \alpha = 130°$

d) $\frac{14\pi}{3} - 4\pi = \frac{14\pi - 12\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Logo, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.

14. **a)** $\frac{5\pi}{6}$ rad está associado a um ponto do 2º quadrante:

$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 0{,}5$

b) $\frac{7\pi}{5}$ rad está associado a um ponto do 3º quadrante:

$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{5} = -\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{5} - \pi\right) = -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} \simeq -0{,}951$

c) $\frac{37\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 6\pi$ e $\frac{\pi}{6}$ rad está associado a um ponto do 1º quadrante:

$\operatorname{sen}\frac{37\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 0{,}5$

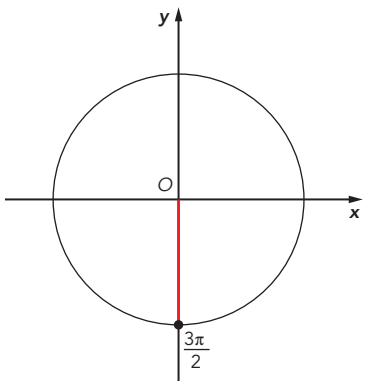
d) Sabemos que $6\pi = 0 + 6\pi$, então: $\cos 6\pi = \cos 0 = 1$.

e) $-\frac{4\pi}{9}$ é côngruo a $2\pi - \frac{4\pi}{9} = \frac{14\pi}{9}$ e $\frac{14\pi}{9}$ rad está associado a um ponto do 4º quadrante:

$\operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{9}\right) = \operatorname{sen}\frac{14\pi}{9} = -\operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{14\pi}{9}\right) =$

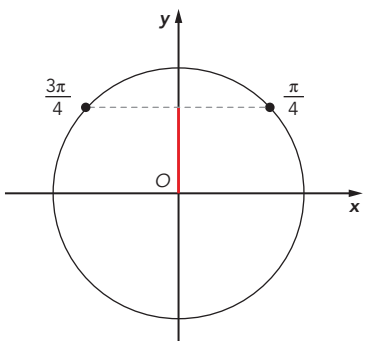
$= -\operatorname{sen}\frac{4\pi}{9} \simeq -0{,}985$

15. **a)** Sabemos que $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$, então podemos escrever $x = \frac{3\pi}{2}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.



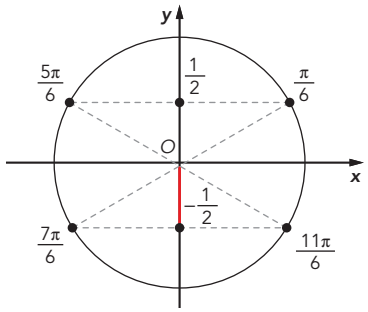
Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Sabemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então podemos escrever $x = \frac{\pi}{4}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$ rad + + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.



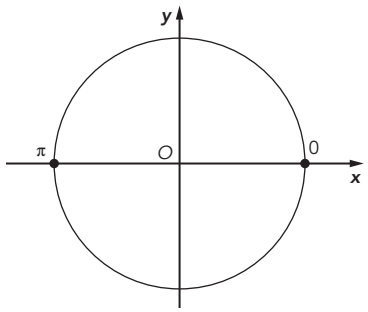
WYM Design/Arquivo da editora

c) Sabemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, então podemos escrever $x = \frac{7\pi}{6}$ rad + $2k\pi$ rad ou $x = \frac{11\pi}{6}$ rad + $2k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.



WYM Design/Arquivo da editora

d) Sabemos que $\operatorname{sen} 0 = 0$, então podemos escrever $x = 0$ rad + $k\pi$ rad = $k\pi$ rad, com $k \in \mathbb{Z}$.



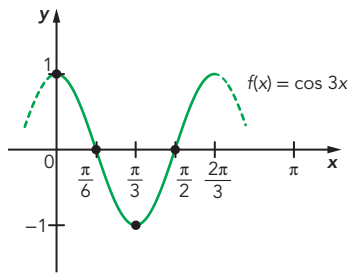
WYM Design/Arquivo da editora

Capítulo 4

Atividades

3. **a)** Fazemos: $3x = t \Rightarrow x = \frac{t}{3}$.

t	x	$\cos t$
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	0
π	$\frac{\pi}{3}$	−1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0
2π	$\frac{2\pi}{3}$	1



WYM Design/Arquivo da editora

$D(f) = \mathbb{R}$

$\operatorname{Im}(f) = [-1, 1]$

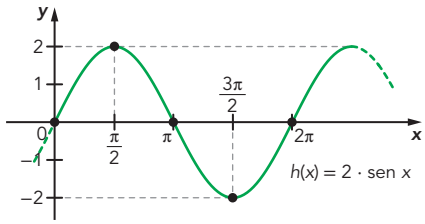
$p = \frac{2\pi}{3}$

Amplitude 1

b)

x	sen x	$2 \cdot$ sen x
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
2π	0	0

WYM Design/Arquivo da editora



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [-2, 2]$

$p = 2\pi$

Amplitude 2

4. **a)** Exemplo de resposta: O gráfico da função cosseno foi achatado na horizontal, passando a ter $\frac{1}{3}$ do valor do período dessa função.

b) Exemplo de resposta: O gráfico da função seno foi achatado na horizontal, passando a ter $\frac{1}{3}$ do valor do período dessa função, além de ter se deslocado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.

c) Exemplo de resposta: O gráfico da função seno foi alongado na vertical, duplicando a amplitude e os valores máximo e mínimo.

6. **a)** Quando y é máximo, temos sen $x = 1$.

$y_{máx} = 1 - 10 \Rightarrow y_{máx} = -9$

Quando y é mínimo, temos sen $x = -1$.

$y_{mín} = -1 - 10 \Rightarrow y_{mín} = -11$

b) Quando y é máximo, temos cos $x = -1$.

$y_{máx} = 6 - 10 \cdot (-1) \Rightarrow y_{máx} = 16$

Quando y é mínimo, temos cos $x = 1$.

$y_{mín} = 6 - 10 \cdot 1 \Rightarrow y_{mín} = -4$

c) Quando y é máximo, temos $\cos^2 x = 1$.

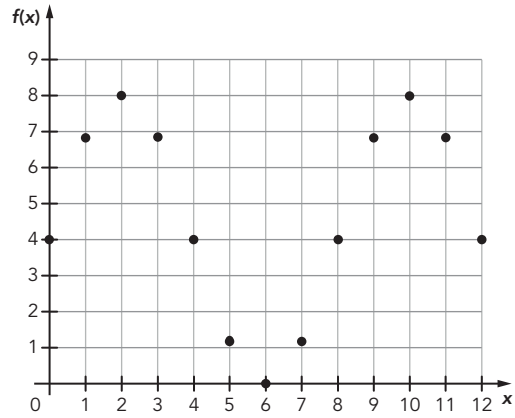
$y_{máx} = 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow y_{máx} = 4$

Quando y é mínimo, temos $\cos^2 x = 0$.

$y_{mín} = 3 \cdot 0 + 1 \Rightarrow y_{mín} = 1$

8. Exemplo de resposta: Podemos representar os dados experimentais em um plano cartesiano.

WYM Design/Arquivo da editora



Pela tabela, temos que $f(0) = 4$ e, pelo enunciado, temos $f(0) = a + b \cdot \text{sen}(c \cdot 0)$.

Sendo assim, $f(0) = a \Rightarrow a = 4$.

Os pontos representados no plano cartesiano sugerem que o comportamento do fenômeno se repete a partir de $x = 8$ da mesma maneira que para $0 \leqslant x \leqslant 8$; então, concluímos que o período é $p = 8$ e, comparando com o período $p = 2\pi$ da função seno, temos que o coeficiente c dessa função é $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Temos também que $f(6) = 0$. Assim:

$f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx) \Rightarrow f(x) = 4 + b \cdot \text{sen}\frac{\pi x}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 4 + b \cdot \text{sen}\frac{\pi \cdot 6}{4} = 0 \Rightarrow 4 + b \cdot \text{sen}\frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 + b \cdot (-1) = 0 \Rightarrow 4 - b = 0 \Rightarrow 4 - b = 0 \Rightarrow b = 4$

Portanto, $f(x) = 4 + 4 \cdot \text{sen}\frac{\pi x}{4}$.

9. As medidas de altura máxima e mínima que a cadeira atinge ocorrem quando sen $t = -1$ e sen $t = 1$, respectivamente:

$y = 70 - 15 \cdot \text{sen}\, t = 70 - 15 \cdot (-1) = 85$

$y = 70 - 15 \cdot \text{sen}\, t = 70 - 15 \cdot 1 = 55$

Assim, a medida de comprimento do diâmetro da roda-gigante, em metros:

$85 - 55 = 30$, ou seja, 30 m.

10. **a)** A função assume valor máximo para $\cos\frac{\pi x}{3} = 1$ e valor mínimo para $\cos\frac{\pi x}{3} = -1$. Então:

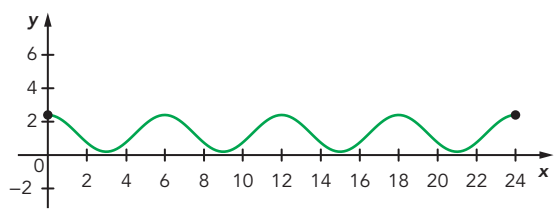
$h(x) = 1{,}3 + 1{,}1 \cdot 1 = 2{,}4$

$h(x) = 1{,}3 + 1{,}1 \cdot (-1) = 0{,}2$

Valor máximo e mínimo do nível do mar nessa cidade são 2,4 m e 0,2 m, respectivamente.

b)

WYM Design/Arquivo da editora



13. **a)** O volume máximo ocorre quando sen $\frac{2\pi t}{5} = 1$. Então:

$V(t) = 3 + 0{,}5 \cdot 1 = 3 + 0{,}5 = 3{,}5$

Ou seja, 3,5 L.

b) O volume mínimo ocorre quando $\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{5} = -1$.

Então:

$V(t) = 3 + 0{,}5 \cdot (-1) = 3 - 0{,}5 = 2{,}5$

A medida de volume mínima é 2,5 L.

c) O período da função dada é:

$$p = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 2\pi \cdot \frac{5}{2\pi} = 5$$

Ou seja, 5 s.

14. A maré atinge o ponto mais baixo quando $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot h\right) = -1$, e isso ocorre para $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ em que k é um número inteiro. Como os ângulos do tipo $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ estão localizados no eixo y da circunferência trigonométrica, são os únicos cujo seno é igual a -1. Desse modo, obtemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot h\right) = -1 \Rightarrow \frac{\pi}{6} \cdot h = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow h = 9 + 12k$$

Para $k = -1$, temos:

$h = 9 - 12 = -3$ (não convém, pois $0 \leqslant h \leqslant 24$)

Para $k = 0$, temos $h = 9$.

O período dessa função é $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$. Então, a maré baixa ocorre às 9:00 e, depois de 12 horas, às 21:00.

Logo, como a única maré baixa que ocorre durante o dia acontece às 9:00, eles jogarão bola das 8:00 às 10:00. Alternativa **a**.

15. As luas minguante e crescente correspondem aos dias em que o nível do mar foi mínimo, o que ocorre quando $\cos\left(\frac{2\pi t}{15} + \frac{\pi}{3}\right) = -1$. Como os ângulos do tipo $\pi + 2k\pi$, em que k é um número inteiro, estão localizados no eixo x da circunferência trigonométrica, são os únicos cujo cosseno é igual a -1. Assim, temos:

$$\cos\left(\frac{2\pi t}{15} + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{2\pi t}{15} + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi \Rightarrow t = 5 + 15k$$

Para $k = -1$, temos $t = -10$ (não convém, pois t representa um dia do mês; logo, $t \geqslant 1$)

Para $k = 0$, temos $t = 5$.

O período dessa função é $p = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{15}} = 15$. Então, o nível do mar estará mais baixo novamente no dia 20.

Então, nos dias 5 e 20 desse mês, ocorreram as luas minguante e crescente.

18. As pressões máxima e mínima ocorrem quando $\cos(kt) = 1$ e $\cos(kt) = -1$, respectivamente, e sabemos que para o caso estudado elas são 120 e 78, nessa ordem. Então:

$P(t) = 120 \Rightarrow A + B \cdot 1 = 120 \Rightarrow A + B = 120$

$P(t) = 78 \Rightarrow A + B \cdot (-1) = 78 \Rightarrow A - B = 78$

Logo: $2A = 198 \Rightarrow A = 99$.

Então: $99 + B = 120 \Rightarrow B = 21$.

De acordo com o enunciado, são 90 batimentos por minuto, ou seja, 90 batimentos por 60 segundos, o que corresponde a $\frac{2}{3}$ de segundo a cada batimento. O período da função dada por essa lei é $p = \frac{2\pi}{k}$; portanto:

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = 3\pi$$

Assim, a lei da função é $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$. Alternativa **a**.

19. De acordo com o enunciado, o mês de produção máxima corresponde ao mês com preços mais baixos. Isso ocorre quando $\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$ é mínimo, ou seja, $\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1$.

Para que o cosseno de $\frac{\pi x - \pi}{6}$ seja igual a -1, que é um valor localizado no eixo x da circunferência trigonométrica, esse ângulo tem que ser do tipo $\pi + 2k\pi$, em que k é um número inteiro. Então:

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\pi x - \pi}{6} = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = 7 + 12k$$

Como $1 \leqslant x \leqslant 12$, temos que $k = 0$ e, portanto, $x = 7$.

Ou seja, o mês 7, julho.

Alternativa **d**.

20. O nível mais alto acontece quando $\operatorname{sen}\left((t-5)\frac{\pi}{6}\right) = 1$, e temos que sen = 1 apenas para ângulos do tipo $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, em que k é um número inteiro.

Então, temos:

$$\operatorname{sen}\left((t-5)\frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow (t-5)\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = 8 + 12k$$

Como $t \in [0, 24]$, não podemos considerar valores negativos para k.

Para $k = 0$, temos $t = 8$. Logo, o primeiro nível mais alto do dia ocorre às 8:00.

O período dessa função é $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$. Então, o nível mais alto volta a ocorrer 12 horas depois das 8:00, ou seja, às 20:00, ocorrendo 2 vezes no dia. (A afirmação **1** é verdadeira e a afirmação **3** é falsa.)

Analogamente, o nível mais baixo acontece quando sen $\left((t-5)\frac{\pi}{6}\right) = -1$, e temos que $(t-5)\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 14 + 12k$

Para $k = -2$, temos $t < 0$, que não convém.

Para $k = -1$, temos $t = 2$. Logo, o primeiro período mais baixo ocorre às 2:00.

Como o período é 12, o segundo nível mais baixo do dia ocorre às 14:00. (A afirmação **2** é falsa.)

Por fim, calculamos o nível $n(t)$ para $\operatorname{sen}\left((t-5)\frac{\pi}{6}\right) = 1$ e $\operatorname{sen}\left((t-5)\frac{\pi}{6}\right) = -1$:

$$n(t) = 3\operatorname{sen}\left((t-5)\frac{\pi}{6}\right) + 4 = 3 \cdot 1 + 4 = 7$$

$$n(t) = 3\operatorname{sen}\left((t-5)\frac{\pi}{6}\right) + 4 = 3 \cdot (-1) + 4 = 1$$

Assim, a diferença entre os níveis mais alto e mais baixo é $7 - 1 = 6$. (A afirmação **4** é falsa.)

Portanto, apenas a afirmação **1** é verdadeira.

Alternativa **a**.

22. A medida de volume de ar inspirado corresponde à diferença entre as medidas de volume máxima e mínima nos pulmões, o que ocorre quando $\cos(1{,}6 \cdot t + \pi) = 1$ e $\cos(1{,}6 \cdot t + \pi) = -1$, respectivamente. Então:

$V(t) = 2{,}8 + 0{,}29 \cdot \cos(1{,}6 \cdot t + \pi) = 2{,}8 + 0{,}29 \cdot 1 = 3{,}09$

$V(t) = 2{,}8 + 0{,}29 \cdot \cos(1{,}6 \cdot t + \pi) = 2{,}8 + 0{,}29 \cdot (-1) = 2{,}51$

Portanto, $3{,}09 - 2{,}51 = 0{,}58$.

Alternativa **b**.

23. Sabendo que a função h é escrita como $h(t) = a + b \cdot \text{sen}(c \cdot t + d)$, e de acordo com o enunciado, temos:

$\frac{2\pi}{|c|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |c| = 4\pi$

Analisando as alternativas em que $c = 4\pi$, temos:

$h(t) = 25 + 25 \cdot \text{sen}\left(4\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$

$h(0) = 25 + 25 \cdot \text{sen}\left(4\pi \cdot 0 + \frac{3\pi}{2}\right) =$

$= 25 + 25 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 25 + 25 \cdot (-1) = 0$

$h(t) = 25 + 25 \cdot \text{sen}(4\pi t) = 25 + 25 \cdot \text{sen}(4\pi \cdot 0) = 25 + 0 = 25$

Alternativa **a**.

24. Exemplo de problema: Uma farmácia 24 horas fez a contagem da quantidade de clientes que frequentaram a loja. Considerando um dia completo, qual é a quantidade máxima e a quantidade mínima de clientes, sabendo que esses valores coincidem com os pontos máximo e mínimo da função trigonométrica $f(x) = 12 - 9 \cdot \text{sen}\left(x \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, em $0 \leqslant x \leqslant 24$?

Tecnologias digitais (p. 234)

2. Exemplos de resposta:

a) O coeficiente a é responsável pelo deslocamento (translação) do gráfico na vertical (ao se aumentar o valor de a, o gráfico é transladado para cima; ao se diminuir o valor de a, o gráfico é transladado para baixo). O coeficiente a também influencia o conjunto imagem da função.

b) O coeficiente b é responsável pelo alongamento ou achatamento do gráfico na vertical (ao se aumentar o valor de b positivo ou diminuir o valor de b negativo, o gráfico é alongado; ao se aproximar o valor de b para 0, o gráfico é achatado). O coeficiente b também influencia o conjunto imagem e a amplitude da função.

c) O coeficiente c é responsável pelo período da função, ou seja, pelo alongamento ou achatamento do gráfico na horizontal (ao se aumentar o valor de c positivo ou diminuir o valor de c negativo, o período da função diminui; ao se aproximar o valor de c para 0, o período aumenta).

d) O coeficiente d é responsável pelo deslocamento (translação) do gráfico na horizontal (ao se aumentar o valor de d, o gráfico é transladado para a esquerda; ao se diminuir o valor de d, o gráfico é transladado para a direita).

Enem e vestibulares (p. 245)

1. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC, teremos:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos A\hat{B}C \Rightarrow (AC)^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60° \Rightarrow AC = 2\sqrt{7} \simeq 5{,}3$.

Alternativa **b**.

2. A medida de comprimento x dos cabos será dada por:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\text{sen}\,\alpha}$

Analisando cada uma das opções, teremos:

Opção **I**: $x = \frac{11}{\text{sen}\,30°} = \frac{11}{\frac{1}{2}} = 22$

Opção **II**: $x = \frac{12}{\text{sen}\,45°} = \frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12\sqrt{2}$

Opção **III**: $x = \frac{18}{\text{sen}\,60°} = \frac{18}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12\sqrt{3}$

Portanto $12\sqrt{2}$ m. Alternativa **c**.

3.

Em graus		Em radianos
180	———	π
α	———	1

$\frac{180}{\alpha} = \frac{\pi}{1} \Rightarrow \alpha \cdot \pi = 180 \Rightarrow \alpha = \frac{180}{\pi} \Rightarrow \alpha \simeq 57{,}30°$

Logo: $50° < \alpha < 60°$. Alternativa **d**.

4. $\begin{cases} \alpha = \frac{12\pi}{5}\text{ rad} \\ r = 30\text{ cm} \end{cases}$

$\ell = \alpha \cdot r = \frac{12\pi}{5} \cdot 30 \simeq 12 \cdot 3{,}14 \cdot 6 = 226{,}08$

Logo, $\ell \simeq 226{,}08$ cm ou $\ell \simeq 2{,}26$ m. Alternativa **c**.

5. O período positivo mínimo é a diferença entre 2 cristas, $\frac{2\pi}{9} - 0 = \frac{2\pi}{9}$, e a amplitude da função é dada por $\frac{1{,}5 - (-0{,}5)}{2} = 1$. Alternativa **d**.

6. Para que a medida de temperatura atinja o seu valor mínimo, é necessário que $\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 1$. Essa igualdade ocorrerá toda vez que: $\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $(\text{com } k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2 + 8k$.

Como $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant x \leqslant 24$, temos: $k = 0 \Rightarrow x = 2$; $k = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 10$; $k = 2 \Rightarrow x = 18$; $k = 3 \Rightarrow x = 26$ (não convém).

Portanto, a medida de temperatura da estufa atingiu o valor mínimo nos horários de 2:00, 10:00 e 18:00, ou seja, 3 vezes durante o período apresentado. Alternativa **b**.

7. A função é do tipo $P(t) = \pm A \cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm A\,\text{sen}(\omega t)$, em que A é a amplitude e $\omega = \frac{2\pi}{T}$, sendo T o período.

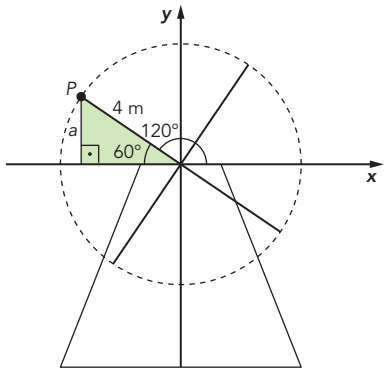
Vamos analisar o gráfico.

O período t é dado por $\pi - 0 = \pi$. Logo, temos $\omega = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

A amplitude da função é dada por $A = \frac{3 - (-3)}{2} = 3$.

Como $P(0) = -3$ e temos que $-3\cos(2 \cdot 0) = -3$, $-3\text{sen}(2 \cdot 0) = 0$ e $3\cos(2 \cdot 0) = 3$, a única expressão que se encaixa em todas as condições é $-3\cos(2t)$. Alternativa **a**.

8.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, temos: $\text{sen } 60° = \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$.

Portanto, a medida de comprimento da altura do ponto P quando $\theta = 120°$ é dada por: $h = 2\sqrt{3} + 7$. Ou seja, $2\sqrt{3} + 7$ m.

Unidade 4

Capítulo 1

Atividades

2. **a)** As plantas companheiras correspondem aos elementos da matriz que são iguais a 1.

$a_{13} = 1$, que corresponde à combinação de tomate e cebola.

$a_{14} = 1$, que corresponde à combinação de tomate e alface.

$a_{24} = 1$, que corresponde à combinação de couve e alface.

$a_{31} = 1$, que corresponde à combinação de cebola e tomate.

$a_{34} = 1$, que corresponde à combinação de cebola e alface.

$a_{41} = 1$, que corresponde à combinação de alface e tomate.

$a_{42} = 1$, que corresponde à combinação de alface e couve.

$a_{43} = 1$, que corresponde à combinação de alface e cebola.

3. **a)** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

$a_{11} = 1^2 + 1^2 = 2$

$a_{12} = 1^2 + 2^2 = 5$

$a_{13} = 1^2 + 3^2 = 10$

$a_{21} = 2^2 + 1^2 = 5$

$a_{22} = 2^2 + 2^2 = 8$

$a_{23} = 2^2 + 3^2 = 13$

A matriz pedida é $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}$.

b) $X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$

$a_{11} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$a_{21} = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

$a_{31} = 2 \cdot 9 - 1 = 17$

$a_{41} = 2 \cdot 16 - 1 = 31$

$a_{12} = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

$a_{22} = 2 \cdot 4 - 2 = 6$

$a_{32} = 2 \cdot 9 - 2 = 16$

$a_{42} = 2 \cdot 16 - 2 = 30$

A matriz pedida é $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 6 \\ 17 & 16 \\ 31 & 30 \end{pmatrix}$.

8. Temos que: $\begin{pmatrix} a + b - 1 & 0 \\ a - 3c & b \\ 2b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Logo:

$2b = 0 \Rightarrow b = 0$

$a + b - 1 = a + 0 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

$a - 3c = 0 \Rightarrow 1 - 3c = 0 \Rightarrow -3c = -1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

Portanto, $a = 1$; $b = 0$ e $c = \frac{1}{3}$.

10. Temos:

$a_{11} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$

$a_{21} = 2 + 2 \cdot 1 = 4$

$a_{12} = 0$

$a_{22} = 2 + 2 \cdot 2 = 6$

Portanto, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

$b_{11} = 1^3 = 1$

$b_{21} = 2^3 = 8$

$b_{12} = 0$

$b_{22} = 2^3 = 8$

Portanto, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$.

Logo:

$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$

$B + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$

11. Temos:

$a_{11} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$

$a_{21} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4$

$a_{12} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1$

$a_{22} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2$

Portanto, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$b_{11} = 1^2 = 1$

$b_{21} = 4^2 = 16$

$b_{12} = (-1)^2 = 1$

$b_{22} = 2^2 = 4$

Portanto, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$.

a) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -12 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 20 & 6 \end{pmatrix}$

12. Temos:

$a_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 5 = 0$

$a_{21} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 5 = 2$

$a_{12} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5 = 3$

$a_{22} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 5 = 5$

Logo:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

15. **a)** $5A = 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$

b) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

d) $A^t + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A + B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

f) $3A^t = 3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

g) $(5A - B)^t = \left(\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}^t =$

$= \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

h) $(3A)^t - 3A^t = \left(3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right)^t - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) $-(A^t + B^t) = -\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

16. **a)** Temos:

$a_{11} = 1 + 1 = 2$

$a_{12} = 0$

$a_{13} = 0$

$a_{21} = 0$

$a_{22} = 2 + 2 = 4$

$a_{23} = 0$

$a_{31} = 0$

$a_{32} = 0$

$a_{33} = 3 + 3 = 6$

Portanto, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

b) $3A = 3\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$

c) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

d) $A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

e) $A - A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $2A + 3A^t - I_3 = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} +$

$+ 3\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 29 \end{pmatrix}$

17. **a)** $A^t + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(5A - B)^t = \left(\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}^t =$

$= \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

18. **c)** $A + B = \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 28 & 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 67 & 89 \\ 122 & 104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 110 \\ 150 & 140 \end{pmatrix}$

Os valores da matriz representam a quantidade de *downloads* dos 2 jogos nos 2 dias.

d) $B - A = \begin{pmatrix} 67 & 89 \\ 122 & 104 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 28 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 68 \\ 94 & 68 \end{pmatrix}$

Os valores da matriz representam a quantidade de *downloads* feita a mais no dia 24 de outubro em relação à quantidade do dia 23 de outubro.

20. **a)** $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

b) $BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 12 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

23. **a)** $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$

b) $B^2 = BB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & 3+1 \\ 5+2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ e $A - B = \begin{pmatrix} 2-3 & 3-1 \\ 5-2 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$(A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \\ 7 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$

25. **a)** $A \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = A$

b) $I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = A$

26. **a)** $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 39 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 0 \\ 6 \cdot 2 & 6 \cdot 5 & 6 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 15 & 0 \\ 12 & 30 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 \\ 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \\ 4 \cdot 5 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 24 \\ 23 & 22 \\ 26 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 24 & 9 & 27 \\ 4 & 13 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) & 1 \cdot 5 + 6 \cdot 2 \\ (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 2 \\ 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 4 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 17 \\ -7 & -8 \\ 9 & 26 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 7 + (-4) \cdot (-6) & 5 \cdot 4 + (-4) \cdot 2 \\ 2 \cdot 7 + 1 \cdot (-6) & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & 12 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

27. Temos: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 25 & 18 \\ 20 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 215 & 154 \\ 430 & 308 \end{pmatrix}$

Portanto, são necessários 215 eixos em janeiro e 154 em fevereiro, 430 rodas em janeiro e 308 em fevereiro.

28. **a)** $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 17 \\ 22 \end{pmatrix}$

b) A matriz representa o custo total, em reais, de cada *kit*, ou seja:

Custo total do *kit* 1: R$ 27,00.

Custo total do *kit* 2: R$ 17,00.

Custo total do *kit* 3: R$ 22,00.

c) Exemplo de resposta: Os funcionários da loja podem realizar uma pesquisa de mercado, ou seja, analisar os dados de vendas passadas para determinar as combinações mais comuns compradas pelos clientes nessa época, de modo a determinar os *kits* que tenham probabilidade maior de serem adquiridos.

32. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 8 & 5 \end{matrix} = -24 + 16 + 30 + 24 - 30 - 16 = 0$

c) $\det C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix} = 0$

d) $\det D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{matrix} = 24 - 12 - 16 + 16 + 12 - 24 = 0$

34. **a)** $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$

b) $\det A^t = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$

c) $\det B = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$

d) $\det (A + B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = -8 - 10 = -18$

e) $\det A + \det B = 2 + 3 = 5$

f) $\det (AB) = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -20 & -2 \end{vmatrix} = -14 + 20 = 6$

g) $\det A \cdot \det B = 2 \cdot 3 = 6$

36. **a)** $5(x - 2) - 18 = 2 \Rightarrow 5x - 10 = 20 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & x & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & x \end{matrix} = -6 + 6x + 4 - 2x^2 = 2 \Rightarrow -2x^2 + 6x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$

$x = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x' = 2$ e $x'' = 1$

$S = \{1, 2\}$

Capítulo 2

Atividades

6. Exemplo de resolução:

a) Usando o método da adição, temos:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$2x \quad = 6 \Rightarrow x = 3$

Substituindo x por 3 na 1ª equação, temos:

$x + y = 5 \Rightarrow 3 + y = 5 \Rightarrow y = 2$

Logo, $S = \{(3, 2)\}$.

b) Multiplicando a 2ª equação por -2 e adicionando o resultado à 1ª equação, temos:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 4y = 14 \quad \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -2x - 8y = -28 \end{cases}$$

$-7y = -28 \Rightarrow y = 4$

Substituindo y por 4 na 2ª equação, temos:

$x + 4y = 14 \Rightarrow x + 4 \cdot 4 = 14 \Rightarrow x = -2$

Logo, $S = \{(-2, 4)\}$.

c) Multiplicando a 2ª equação por -10 e adicionando o resultado com a 1ª equação, temos:

$$\begin{cases} 20x + 10y = 10 \\ x + y = 2 \quad \cdot (-10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20x + 10y = 10 \\ -10x - 10y = -20 \end{cases}$$

$10x \quad = -10 \Rightarrow x = -1$

Substituindo x por -1 na 2ª equação, temos:

$x + y = 2 \Rightarrow -1 + y = 2 \Rightarrow y = 3$

Logo, $S = \{(-1, 3)\}$.

d) Usando o método da substituição na 3ª equação para isolar x, temos:

$$\begin{cases} -x - y + z = -5 \\ 2x - 3y - 2z = -5 \\ x - y - 3z = -3 \end{cases}$$

$x - y - 3z = -3 \Rightarrow x = y + 3z - 3$

Substituindo x por $y + 3z - 3$ na 1ª equação, temos:

$-x - y + z = -5 \Rightarrow -(y + 3z - 3) - y + z = -5 \Rightarrow -y - 3z + 3 - y + z = -5 \Rightarrow -2y - 2z = -8 \Rightarrow y + z = 4$

Substituindo x por $y + 3z - 3$ na 2ª equação, temos:

$2x - 3y - 2z = -5 \Rightarrow 2(y + 3z - 3) - 3y - 2z = -5 \Rightarrow 2y + 6z - 6 - 3y - 2z = -5 \Rightarrow -y + 4z = 1$

Com as 2 novas equações, formamos um novo sistema linear 2×2 e podemos resolvê-lo usando o método da adição:

$$\begin{cases} y + z = 4 \\ -y + 4z = 1 \end{cases}$$

$5z = 5 \Rightarrow z = 1$

Assim, temos:

$y + z = 4 \Rightarrow y + 1 = 4 \Rightarrow y = 3$

$x = y + 3z - 3 = 3 + 3 \cdot 1 - 3 = 3$

Logo, $S = \{(3, 3, 1)\}$.

8. Exemplo de resposta:

Analise o sistema linear 2×2 dado e os coeficientes das incógnitas para determinar o método mais adequado para resolver o sistema.

Caso escolha utilizar o método da substituição, os passos são:

1. Isole uma incógnita em uma das equações e, depois, substitua-a na outra equação.
2. Como ficará apenas 1 incógnita, efetue os cálculos necessários para determinar o valor dela.
3. Substitua o valor encontrado em qualquer uma das equações do sistema inicial para determinar o valor da 2ª incógnita.

Caso escolha utilizar o método da adição, os passos são:

1. Multiplique, se necessário, as equações, de modo que uma das incógnitas fique com coeficientes de sinais opostos entre uma equação e outra.
2. Adicione termo a termo às 2 equações para chegar a uma 3ª que tenha apenas 1 incógnita.
3. Efetue os cálculos necessários para determinar o valor dessa incógnita.
4. Substitua o valor encontrado em qualquer uma das equações do sistema inicial para determinar o valor da 2ª incógnita.

9. Chamando respectivamente de p e v a quantidade de espécies de plantas e de vertebrados endêmicos no bioma, temos o seguinte sistema linear:

$\begin{cases} p + v = 8\,732 \\ p - v = 7\,268 \end{cases} \Rightarrow 2p = 16\,000 \Rightarrow p = 8\,000$. Alternativa **d**.

10. Considerando a, b e c a quantidade de doses das vacinas Alfa, Beta e Gama, respectivamente, temos o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a + b + c = 5\,000\,000 \\ 5a + 10b + 20c = 40\,000\,000 \\ b = 3c \end{cases}$$

$a + 3c + c = 5\,000\,000 \Rightarrow a + 4c = 5\,000\,000$

$5a + 10 \cdot 3c + 20c = 40\,000\,000 \Rightarrow 5a + 50c = 40\,000\,000$

Logo, $\begin{cases} a + 4c = 5\,000\,000 \\ 5a + 50c = 40\,000\,000 \end{cases}$

$$\begin{cases} a + 4c = 5\,000\,000 \\ 5a + 50c = 40\,000\,000 \end{cases} \div (-5) \Rightarrow \begin{cases} a + 4c = 5\,000\,000 \\ -a - 10c = -8\,000\,000 \end{cases}$$

$-6c = -3\,000\,000 \Rightarrow c = 500\,000$

Então, $a + 4\,(500\,000) = 5\,000\,000 \Rightarrow a = 3\,000\,000$.

Alternativa **d**.

11. **a)** Substituindo a por 1 na 1ª equação, temos: $3 \cdot 1 = c \Rightarrow c = 3$.

Substituindo a por 1 na 2ª equação, temos: $8 \cdot 1 = 2d \Rightarrow d = 4$.

Substituindo c por 3 e d por 4 na 3ª equação, temos: $2b = 2 \cdot 3 + 4 \Rightarrow b = 5$.

Logo, a equação química balanceada é $C_3H_8 + 5 \cdot O_2 \rightarrow 3 \cdot CO_2 + 4 \cdot H_2O$.

b) Exemplo de resposta: Multiplicando por 2, temos $a = 2$, $b = 10$, $c = 6$ e $d = 8$ e, então, a equação química balanceada é $2 \cdot C_3H_8 + 10 \cdot O_2 \rightarrow 6 \cdot CO_2 + 8 \cdot H_2O$.

12. Exemplos de resolução:

a) $\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \quad \cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ -4x - 2y = -10 \end{cases}$

$0 = -6$

O sistema é impossível e $S = \varnothing$.

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \quad \cdot 3 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 6y = -36 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$

$14x = -28 \Rightarrow x = -2$

$5 \cdot (-2) + 6y = 8 \Rightarrow -10 + 6y = 8 \Rightarrow 6y = 18 \Rightarrow y = 3$

O sistema é possível e determinado e $S = \{(-2, 3)\}$.

c) $\begin{cases} 5x - 10y = 15 \quad \cdot 2 \\ 2x - 4y = 6 \quad \cdot(-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 20y = 30 \\ -10x + 20y = -30 \end{cases}$

$0 = 0$

Logo, o sistema é possível e indeterminado (tem infinitas soluções).

Fazendo $x = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos:

$2x - 4y = 6 \Rightarrow 2\alpha - 4y = 6 \Rightarrow -4y = -2\alpha + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{-2\alpha + 6}{-4} \Rightarrow y = \dfrac{\alpha - 3}{2}$

Logo, $S = \left\{\left(\alpha, \dfrac{\alpha - 3}{2}\right)\right\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

13. Exemplo de resposta:

$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ x = 7 - y \end{cases}$

Da 2ª equação temos que $x = 7 - y$.

$2(7 - y) + 5y = 8 \Rightarrow 14 - 2y + 5y = 8 \Rightarrow y = -2$

Substituindo y por -2 na 2ª equação do sistema inicial, temos:

$x - 2 = 7 \Rightarrow x = 9$

Logo, o sistema é possível e determinado, e $S = \{(9, -2)\}$.

14. Sabemos que (0, 60) e (20, 30) são possíveis soluções da equação linear que representa a variação das medidas de temperatura y da substância **I**, em função de x, em minutos. Sendo essa equação da forma $y = a_1x + b_1$, temos:

$\begin{cases} 60 = a_1 \cdot 0 + b_1 \\ 30 = a_1 \cdot 20 + b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 60 \\ 20a_1 + b_1 = 30 \end{cases}$

Substituindo b_1 por 60 na 2ª equação do sistema, obtemos:

$20a_1 + 60 = 30 \Rightarrow 20a_1 = -30 \Rightarrow a_1 = -1{,}5$

Portanto, a equação que representa a substância **I** é:

$y = -1{,}5x + 60 \Rightarrow 1{,}5x + y = 60$

Analogamente, sabemos que (0, 20) e (20, 30) são possíveis soluções da equação linear que representa a variação das medidas de temperatura y da substância **II**, em função de x. Sendo essa equação da forma $y = a_2x + b_2$, temos:

$\begin{cases} 20 = a_2 \cdot 0 + b_2 \\ 30 = a_2 \cdot 20 + b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 20 \\ 20a_2 + b_2 = 30 \end{cases}$

Substituindo b_2 por 20 na 2ª equação do sistema, obtemos:

$20a_2 + 20 = 30 \Rightarrow 20a_2 = 10 \Rightarrow a_2 = 0{,}5$

Então, a equação que representa a substância 2 é:

$y = 0{,}5x + 20 \Rightarrow -0{,}5x + y = 20$

A substância **I** estará a 0 °C quando $y = 0$. Logo:

$1{,}5x + 0 = 60 \Rightarrow x = 40$

Assim, para $x = 40$ na substância **II**, temos:

$-0{,}5 \cdot 40 + y = 20 \Rightarrow -20 + y = 20 \Rightarrow y = 40$

Portanto, nesse instante, a medida de temperatura da substância **II** será 40 °C.

15. **a)** Da 3ª equação, temos $z = -3$.

Substituindo z por -3 na 2ª equação, temos:

$2y - (-3) = 1 \Rightarrow 2y = 1 - 3 \Rightarrow y = -1$

Substituindo z por -3 e y por -1 na 1ª equação, temos:

$2x - (-1) + 3(-3) = 0 \Rightarrow 2x + 1 - 9 = 0 \Rightarrow 2x - 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4$

Portanto, o sistema linear é possível e determinado, e $S = \{(4, -1, -3)\}$.

b) Analisando a 3ª equação, podemos concluir que o sistema linear é impossível. Logo, $S = \varnothing$.

c) A quantidade de equações é menor do que a quantidade de incógnitas. Assim, podemos definir a incógnita livre como $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo z por k na 2ª equação, temos:

$y - k = 0 \Rightarrow y = k$

Substituindo z por k e y por k na 1ª equação, temos:

$3x - 2k + k = 2 \Rightarrow 3x = k + 2 \Rightarrow x = \dfrac{k+2}{3}$

O sistema linear é possível e indeterminado, e $S = \left\{\left(\dfrac{k+2}{3}, k, k\right)\right\}$, com $k \in \mathbb{R}$.

d) Da 4ª equação temos $w = -2$.

Substituindo w por -2 na 3ª equação, temos:

$-z - 2(-2) = 1 \Rightarrow z = 3$

Substituindo w por -2 e z por 3 na 2ª equação, temos:

$y + 3 - 2 = 5 \Rightarrow y = 4$

Substituindo w por -2, z por 3 e y por 4 na 1ª equação, temos:

$x - 4 + 3 + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

Portanto, o sistema linear é possível e determinado, e $S = \{(-1, 4, 3, -2)\}$.

e) A quantidade de equações é 2 unidades menor do que a quantidade de incógnitas, então podemos definir 2 incógnitas livres, por exemplo, $b = \alpha$ e $d = \beta$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

Substituindo d por β na 2ª equação, temos:

$c - \beta = 0 \Rightarrow c = \beta$

Substituindo d por β, c por β e b por α na 1ª equação, temos:

$a + 2\alpha - \beta + \beta = 2 \Rightarrow a = 2 - 2\alpha$

O sistema linear é possível e indeterminado, e $S = \{(2 - 2\alpha, \alpha, \beta, \beta)\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

f) Da 2ª equação temos $y = \frac{1}{2}$.

Substituindo y por $\frac{1}{2}$ na 1ª equação, temos:

$3x - 5 \cdot \frac{1}{2} = 6 \Rightarrow 3x = \frac{5}{2} + 6 \Rightarrow x = \frac{17}{6}$

Portanto, o sistema linear é possível e determinado, e $S = \left\{\left(\frac{17}{6}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

16. **a)** Considerando o 1º sistema:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

Da 2ª equação temos $y = 2$. Substituindo y por 2 na 1ª equação, temos:

$x + 2 = 6 \Rightarrow x = 4$

Logo, $S = \{(4, 2)\}$.

Substituindo x por 4 e y por 2 na 1ª equação do 2º sistema, temos:

$4 + 2 \cdot 2 = 8$

Da 2ª equação temos que x é igual a 4, logo $S = \{(4, 2)\}$.

Os sistemas são equivalentes.

b) Considerando o 1º sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ y + 2z = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

Da 3ª equação temos $z = 1$. Substituindo z por 1 na 2ª equação, temos:

$y + 2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow y = 3$

Substituindo z por 1 e y por 3 na 1ª equação, temos:

$x + 3 + 1 = 10 \Rightarrow x = 6$

Logo, $S = \{(6, 3, 1)\}$.

Substituindo x por 6, y por 3 e z por 1 na 1ª equação do 2º sistema, temos:

$6 + 3 - 1 \neq 7$

Logo, os sistemas lineares não são equivalentes.

c) Considerando o 1º sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0,\ y = 0 \text{ e } x = 0 \Rightarrow S = \{(0, 0, 0)\}$$

Da 3ª equação temos $z = 0$, da 2ª equação temos $y = 0$ e da 1ª equação temos $x = 0$; logo, $S = \{(0, 0, 0)\}$.

Substituindo x por 0, y por 0 e z por 0 na 1ª equação do 2º sistema, temos:

$0 + 0 - 0 = 0$

Substituindo x por 0, y por 0 e z por 0 na 2ª equação do 2º sistema, temos:

$0 + 0 \neq 1$

Logo, os sistemas lineares não são equivalentes.

18. **a)** $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x - 3y + z = 8 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ + \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -12y - 2z = 8 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ + \\ \cdot 6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 4z = 8 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

Da 2ª equação, temos: $4z = 8 \Rightarrow z = 2$.

Da 3ª equação, temos: $2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1$.

Da 1ª equação, temos: $x + 3(-1) + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Sistema linear possível e determinado, e $S = \{(1, -1, 2)\}$.

b) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x - 14z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \cdot(-2) : (-1) \\ + \\ + \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -y - 9z = 0 \\ -2y - 18z = 0 \end{cases}$

Note que a 2ª e a 3ª equações são equivalentes, por isso temos 2 equações e 3 incógnitas e, então, o sistema linear é possível e indeterminado. Fazendo $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$, temos:

$-y - 9k = 0 \Rightarrow y = -9k$

$x - 18k + 4k = 0 \Rightarrow x - 14k = 0 \Rightarrow x = 14k$

O conjunto solução é $S = \{(14k, -9k, k)\}$, com $k \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} x+y+z=4 & \cdot(-2) \\ 2x+y-z=10 & +\\ 2x-y-7z=0 & + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=4 \\ -y-3z=2 & \cdot(-3) \\ -3y-9z=-8 & + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=4 \\ -y-3z=2 \\ 0z=-14 \end{cases}$

O sistema linear é impossível; portanto, $S = \varnothing$.

19. Analisando a representação gráfica, temos $S = \{(2, 1)\}$, que deve ser o conjunto solução do sistema linear correspondente. Além disso, o sistema deve ser possível e determinado. Assim:

a) $2x + y = 5 \Rightarrow 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$2x + y = 2 \Rightarrow 2 \cdot 2 + 1 \neq 2$

O conjunto solução apresentado não corresponde ao sistema.

b) $2x + y = 5 \Rightarrow 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$-2x - y = -5 \Rightarrow -2 \cdot 2 - 1 = -5$

O conjunto solução corresponde ao sistema, mas, como as equações são equivalentes, esse é um sistema possível e indeterminado, o que não corresponde ao gráfico apresentado.

c) $2x + y = 5 \Rightarrow 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$x - 4y = -2 \Rightarrow 2 - 4 \cdot 1 = -2$

d) $2x + y = 5 \Rightarrow 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$-x + 2y = -4 \Rightarrow -2 + 2 \cdot 1 \neq -4$

O conjunto solução apresentado não corresponde ao sistema.

e) $-x + y = 5 \Rightarrow -2 + 1 \neq 5$

$2x + 3y = 2 \Rightarrow 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \neq 2$

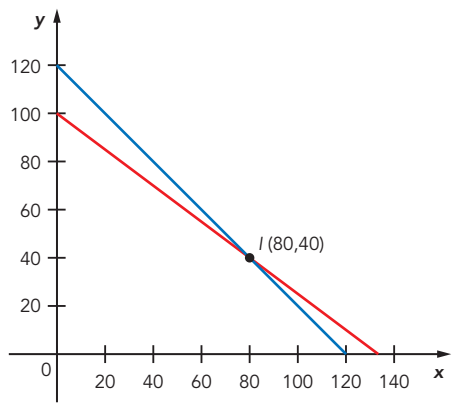
O conjunto solução apresentado não corresponde ao sistema.

Portanto, o único sistema que pode corresponder ao da representação gráfica é o da alternativa **c**.

20. **a)** Sejam x e y a quantidade de ingressos vendidos para as exposições **A** e **B**, respectivamente. Com base nos dados do enunciado, temos:

$\begin{cases} x + y = 120 \\ 30x + 40y = 4\,000 \end{cases}$

b) Cada equação é representada por uma reta no plano cartesiano, e a intersecção I das retas é a solução do sistema linear.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Analisando o gráfico, percebemos que a intersecção é $I(80, 40)$, ou seja, a exposição **A** vendeu 80 ingressos, e a exposição **B** vendeu 40 ingressos nesse dia.

21. **b)** Substituindo $T = 2L$ na 1ª e 3ª equações, temos o sistema:

$\begin{cases} A = 2L + 500 \\ T = 2L \\ A + 2L + L = 2\,000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2L + 500 \\ T = 2L \\ A + 3L = 2\,000 \end{cases}$

Substituindo $A = 2L + 500$ na 3ª equação, temos:

$2L + 500 + 3L = 2\,000 \Rightarrow 5L = 1500 \Rightarrow L = 300$

$T = 2L = 600$

$A = 2L + 500 = 600 + 500 = 1100$

Logo, R$ 1.100,00 com alimentos, R$ 600,00 com transporte e R$ 300,00 com lazer.

22. Sendo x, y e z a quantidade de sonhos, de embalagens de queijo muçarela e de embalagens de presunto, respectivamente, em ambas as situações temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 43{,}4 \\ 3x + 2y + z = 36{,}6 \end{cases}$$

Adicionando as equações, obtemos: $5x + 5y + 5z = 80 \Rightarrow x + y + z = 16$.

Portanto, 1 sonho, 1 embalagem de 100 g de queijo muçarela e 1 embalagem de 100 g de presunto custam R$ 16,00.

23. **a)** Exemplo de resolução: Indicando como i e m a quantidade de inteiras e meias-entradas, respectivamente, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} i + m = 120 \\ 30i + 15m = 2160 \end{cases} \div(-15) \Rightarrow \begin{cases} i + m = 120 \\ -2i - m = -144 \end{cases}$$

Adicionando as equações, obtemos:

$-i = -24 \Rightarrow i = 24$

Substituindo i por 24 na equação $i + m = 120$, obtemos:

$24 + m = 120 \Rightarrow m = 96$

Portanto, 96 ingressos foram vendidos como meia-entrada.

b) Exemplo de resposta: Foram disponibilizados ingressos para uma sessão de cinema, em que, cada meia-entrada tem um custo de R$ 20,00, e a entrada inteira custa R$ 40,00. Se a receita total da sessão foi R$ 3.300,00, a capacidade da sala é a mesma de uma sessão regular (120 lugares), e que os ingressos se esgotaram, determine quantos ingressos foram vendidos como inteira.

24. **a)** Exemplo de resolução:

Indicando como a, b e c as medidas de velocidade, em quilômetros por hora, dos veículos A, B e C, respectivamente, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} a + b = 150 \\ a + c = 160 \\ b + c = 170 \end{cases}$$

Adicionando as primeiras equações: $a + b + a + c = 150 + 160 \Rightarrow 2a + b + c = 310$.

Subtraindo a terceira equação da nova equação: $2a + b + c - b - c = 310 - 170 \Rightarrow a = 70$.

Portanto, a medida de velocidade do veículo A foi 70 km/h nos testes.

25. **a)** Indicando como t, p e s os preços, em reais, da TV, do painel e do sofá, respectivamente, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} t + p = 1630 \\ p + s = 1400 \\ t + s = 2470 \end{cases}$$

Isolando p na 2ª equação, $p + s = 1400$, temos $p = 1400 - s$.

Substituindo p na 1ª equação, obtemos um novo sistema linear 2×2:

$$\begin{cases} t + 1400 - s = 1630 \\ t + s = 2470 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - s = 230 \\ t + s = 2470 \end{cases}$$

Adicionando as equações, obtemos:

$2t = 2700 \Rightarrow t = 1350$

Calculando 110% de R$ 1.350,00, obtemos:

$1{,}1 \cdot 1350 = 1485$

Portanto, Paulo vai pagar R$ 1.485,00 pela TV.

b) Os preços dos demais produtos nas promoções podem ser calculados utilizando o valor já encontrado para a TV.

Substituindo t por 1350 na 3ª equação do sistema linear inicial, $t + s = 2470$, obtemos:

$1350 + s = 2470 \Rightarrow s = 1120$

E, substituindo s por 1120 na 2ª equação do sistema inicial, $p + s = 1400$, obtemos:

$p + 1120 = 1400 \Rightarrow p = 280$

Exemplo de problema: Joana pretende comprar apenas o sofá. Porém, como não vai querer nenhuma das promoções, precisará pagar 15% a mais do que pagaria no valor de promoção. Quanto vai custar o sofá para ela?

26. Exemplo de problema: Rafael gastou R$ 235,00 em uma loja de roupas comprando camisetas com custo de R$ 20,00 cada uma, e bermudas que custaram R$ 45,00 cada. Sabendo que ele comprou 8 peças, determine quantas camisetas ele comprou.

27.

$$\begin{cases} x = 3z \\ 3y = 2w \\ y = 2z \\ 4y = 8z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ 3y - 2w = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 4y - 8z = 0 \end{cases} \cdot(-2) \Rightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ 3(2z) - 2w = 0 \\ y - 2z = 0 \\ -8y + 16z = 0 \end{cases} \div(-8) \Rightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ 6z - 2w = 0 \\ y - 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

A 3ª e a 4ª equações são iguais, então o sistema tem 3 equações e 4 incógnitas. Portanto, é um sistema possível e indeterminado.

Se $z = \alpha$, temos $y = 2\alpha$, $w = 3\alpha$ e $x = 3\alpha$. Sendo assim, $S = \{(3\alpha, 2\alpha, \alpha, 3\alpha)\}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

28. **a)** Indicando por x, y e z as quantidades de cédulas de R$ 2,00, R$ 5,00 e R$ 10,00, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 10z = 400 \\ x + y + z = 56 \end{cases}$$

Do enunciado, temos que $z = 3x$, assim:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 10 \cdot 3x = 400 \\ x + y + 3x = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32x + 5y = 400 \\ 4x + y = 56 \end{cases} \cdot(-8) \Rightarrow \begin{cases} 32x + 5y = 400 \\ -3y = -48 \end{cases}$$

Da 2ª equação do sistema, temos:

$-3y = -48 \Rightarrow y = 16$

Portanto, há 16 cédulas de R$ 5,00 no caixa.

b) Exemplo de pergunta: Quantas cédulas de R$ 2,00 há no caixa?

c) Exemplo de problema: Um comerciante tem no caixa R$ 71,00 em cédulas de R$ 2,00, R$ 5,00 e R$ 10,00, totalizando 15 cédulas. Sabendo que a quantidade de cédulas de R$ 2,00 é o dobro da quantidade de cédulas de R$ 10,00, determine a quantidade de cédulas de R$ 10,00.

29. **a)** Significa que um sistema linear homogêneo será ou possível e determinado, quando $a_n \neq 0$, ou possível e indeterminado, quando $a_n = 0$.

b) Quando $a_n \neq 0$, precisamos ter $x_n = 0$ para que $a_n \cdot x_n = 0$. Além disso, é necessário que todas as incógnitas sejam iguais a 0 para satisfazer as demais equações do sistema. Portanto, a solução desse sistema é a ênupla ordenada $(0, 0, 0, \ldots, 0)$.

c) Sim. Exemplo de justificativa: Como todos os termos independentes do sistema são iguais a 0, a ênupla ordenada $(0, 0, \ldots, 0)$ sempre é solução de um sistema linear homogêneo.

d) São retas concorrentes que se intersectam no ponto $(0, 0)$, a origem do plano cartesiano.

e)

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

Da 3ª e da 2ª equações, temos $z = 0$, e, da 1ª equação, temos $x + y = 0$. Fazendo $y = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto solução desse sistema linear é $S = \{(-\alpha, \alpha, 0)\}$. Esse sistema linear é possível e indeterminado.

30. **a)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m & -8 \end{vmatrix} = -16 - m$

Se $m \neq -16$, o sistema linear é possível e determinado; e, se $m = -16$, o sistema pode ser impossível, ou possível e indeterminado.

Substituindo m por -16 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -16x - 8y = 6 \end{cases} \cdot 8 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 0y = 30 \end{cases}$$

Da 2ª equação do sistema escalonado, concluímos que o sistema é impossível.

Portanto, para $m \neq -16$, o sistema linear é possível e determinado, e, para $m = -16$, o sistema é impossível.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 6 + 3 - 4 - 9 - 4 = 0$

Como o determinante é nulo, o sistema é impossível ou é possível e indeterminado. Escalonamos o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + 4z = k \end{cases} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \cdot(-2) \\ \leftarrow + \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 3 \\ -y - 2z = k - 12 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(1) \\ \leftarrow + \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 3 \\ 0z = k - 9 \end{cases}$$

Da equação $0z = k - 9$, concluímos que, para $k = 9$, o sistema linear é possível e indeterminado; e, para $k \neq -9$, o sistema é impossível.

Enem e vestibulares (p. 299)

1. Adicionando os elementos de cada coluna, temos o total de famílias que chegaram a cada região, com $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Em $j = 1$, temos $0 + 0 + 2 + 1 + 1 = 4$.

Em $j = 2$, temos $4 + 0 + 2 + 0 + 2 = 8$.

Em $j = 3$, temos $2 + 6 + 0 + 2 + 0 = 10$.

Em $j = 4$, temos $2 + 2 + 3 + 0 + 4 = 11$.

Em $j = 5$, temos $5 + 3 + 0 + 4 + 0 = 12$.

Portanto, uma quantidade maior de famílias mudou para região $j = 5$. Logo, a construtora selecionou essa região para o investimento.

Alternativa **e**.

2. Temos:

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ x+1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2y-3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2y-3 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2y-3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Assim:

$x + 1 - 3 = 2 \Rightarrow x = 4$

$4 + 2y - 3 = 5 \Rightarrow y = 2$

Portanto, $x + y = 4 + 2 = 6$.

Alternativa **b**.

3. Para representar as notas finais do candidato nos 2 cursos utilizando o produto de matrizes, devemos primeiro definir as matrizes dos pesos e das notas do candidato.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot X + 2 \cdot Y \\ 1 \cdot X + 3 \cdot Y \end{pmatrix}$$

Alternativa **b**.

4. $\det A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot (-1) \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot 3 = \frac{47}{60}$

Alternativa **d**.

5. $V = X \cdot Y$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(V) = 2 \cdot 1 - 0 = 2$$

$W = X \cdot Y$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 & 1+0 \\ 0+0 & 0+1 & 0+0 \\ 1+0 & 0+0 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(W) = 0$$

$\det(V) + \det(W) = 2 + 0 = 2$

Alternativa **a**.

6. Vamos chamar de g a quantidade de gatos, c a quantidade de cachorros e p a quantidade de pintinhos.

Com base no problema, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} g + p = c + 4 \\ g + c = p + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = g + p - 4 \\ g - p + c = 6 \end{cases}$$

Agora, substituindo c na 2ª equação:

$g - p + (g + p - 4) = 6 \Rightarrow 2g - 4 = 6 \Rightarrow 2g = 10 \Rightarrow g = 5$

Logo, a quantidade de gatos para adoção é 5. Alternativa **b**.

7. Indicando por J, A e P João, Antônio e Paulo, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} J + A + P = 300 \\ A = \frac{2}{3}(J + P) \\ P = J - 40 \end{cases}$$

Da 3ª equação, temos $P = J - 40$.

Substituindo P na 2ª equação, temos:

$A = \frac{2}{3}(J + J - 40)$

Substituindo P e A na 1ª equação, temos:

$J + \frac{2}{3}(J + J - 40) + J - 40 = 300 \Rightarrow 3J + 4J - 80 + 3J - 120 = 900 \Rightarrow 10J = 1100 \Rightarrow J = 110{,}00$

Portanto, no final do dia, João recebeu R$ 110,00. Alternativa **d**.

8. Sendo a e v, respectivamente, o preço de um tíquete azul e de um vermelho, teremos:

$$\begin{cases} 2 \cdot 9a + 9v = 32{,}40 \\ a - v = v + 0{,}05 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + v = 3{,}60 \\ a = 2v + 0{,}05 \end{cases}$$

Substituindo a 2ª equação na 1ª, teremos:

$2 \cdot (2v + 0{,}05) + v = 3{,}60 \Rightarrow 4v + 0{,}10 + v = 3{,}60 \Rightarrow v = 0{,}70$

Portanto $9 \cdot$ R$ 0,70 = $ R$ 6,30. Alternativa **b**.

9. Indicando por x, y e z a medida de massa de cada camiseta, calça e sapato, respectivamente, e por n a quantidade máxima de camisetas que a pessoa pode levar com 2 calças e 1 sapato, temos:

$$\begin{cases} 12x + 4y + 3z = 10 \\ 18x + 3y + 2z = 10 \\ n \cdot x + 2y + z = 10 \end{cases} \cdot (-1) \Rightarrow \begin{cases} -6x + y + z = 0 \Rightarrow y + z = 6x \\ 18x + 3y + 2z = 10 \\ n \cdot x + 2y + z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + y + z = 0 \\ 18x + (2y + y) + (z + z) = 10 \Rightarrow \\ n \cdot x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6x + y + z = 0 \\ 18x + (y + z) + 2y + z = 10 \Rightarrow \\ n \cdot x + 2y + z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + y + z = 0 \\ 18x + 6x + 2y + z = 10 \Rightarrow \\ n \cdot x + 2y + z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + y + z = 0 \\ 24x + 2y + z = 10 \\ n \cdot x + 2y + z = 10 \end{cases} \cdot (-1) \Rightarrow \begin{cases} -6x + y + z = 0 \\ 24x + 2y + z = 10 \\ -24x + n \cdot x = 0 \end{cases}$$

(+)

Como sabemos que x não é nulo, pois representa a massa de cada camiseta, obtemos da 3ª equação que:

$-24x + n \cdot x = 0 \Rightarrow n \cdot x = 24x \Rightarrow n = 24$. Alternativa **b**.

10. A quantidade de carros ainda à venda no restante do mês é $104 - 18$, ou seja, 86 carros.

Definimos x, y e z como a quantidade de dias sem desconto, a quantidade de dias com desconto mínimo e a quantidade de dias com desconto máximo, respectivamente. Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 3x + 4y + 5z = 86 \end{cases}$$

Começamos a resolver o sistema isolando a variável y na 1ª equação:

$$\begin{cases} y = 20 - x - z \quad (\mathbf{I}) \\ 3x + 4y + 5z = 86 \quad (\mathbf{II}) \end{cases}$$

Substituindo a expressão (**I**) em (**II**), temos:

$$\begin{cases} y = 20 - x - z \\ 3x + 4 \cdot (20 - x - z) + 5z = 86 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - x - z \\ z = x + 6 \end{cases}$$

A quantidade mínima de dias com o desconto máximo ocorrerá quando o valor de x for mínimo, ou seja, quando $x = 0$.

$z = 0 + 6 \Rightarrow z = 6$

Note que os valores de x, y e z ficam entre 0 e 20 (dias). Alternativa **a**.

11. Indicando por a, b e c as idades de Ana, Bianca e Carla, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 90 \\ a - b = b - c \\ a = 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 90 \\ a + c = 2b \\ a = 2c \end{cases}$$

Da 2ª equação, temos $a + c = 2b$. Substituindo $a + c$ por $2b$ na 1ª equação, temos:

$2b + b = 90 \Rightarrow 3b = 90 \Rightarrow b = 30$

Da 3ª equação, temos $a = 2c$. Substituindo a por $2c$ e b por 30 na 1ª equação, temos:

$2c + 30 + c = 90 \Rightarrow c = 20$

Substituindo c por 20 na 3ª equação, temos:

$a = 2 \cdot 20 \Rightarrow a = 40$

Portanto, Ana tem 40 anos, Carla tem 20 anos e Bianca tem 30 anos.

Referências bibliográficas comentadas

Todos os *sites* foram acessados em 9 set. 2024.

Para a concepção desta coleção, diversos livros, artigos científicos, documentos oficiais do governo, revistas científicas, dissertações e *sites* foram consultados com o intuito de trazer materiais atualizados e que visam dar suporte às aprendizagens previstas para o Ensino Médio. Conheça as principais referências bibliográficas deste Volume.

ALVES, R. S. *Proposta metodológica para o ensino da Trigonometria baseada na psicologia pedagógica*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra: Natal, 2016.

Nessa proposta, o autor mostra a importância de usar a psicologia pedagógica no ensino da Trigonometria. Para isso, fundamenta-se em autores consagrados, como Van de Walle, na teoria da aprendizagem de Lev Vygotsky, na teoria da assimilação de Petr J. Galperin e, ainda, nos trabalhos da pesquisadora russa Nina F. Talzina. Traz sugestões para a abordagem de cada um dos tópicos da Trigonometria que foram consultados para a elaboração deste Manual.

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

Nesse livro, os estudantes são colocados no centro do processo educacional por meio do uso de metodologias ativas que favorecem a aprendizagem. O livro serve de referência para a concepção teórica das metodologias ativas e para as propostas de sua utilização nas práticas pedagógicas adotadas nesta coleção.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Por meio de teoria, exercícios, problemas e comentários, esse livro oferece uma visão ampliada da Geometria euclidiana plana, pois vai além do que se ensina no Ensino Médio. Foi utilizado como referência para o rigor conceitual adotado tanto no Livro do Estudante quanto neste Manual.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

A autora defende, nesse livro, a ideia de que a maneira como um estudante encara os próprios erros pode ser uma poderosa ferramenta no processo de aprendizagem e de ensino. Esses pontos foram levados em consideração durante a elaboração dos textos teóricos sobre avaliação encontrados neste Manual e da proposta didática desta coleção.

BOALER, J. *O que a Matemática tem a ver com isso?* Como professores e pais podem transformar a aprendizagem da Matemática e inspirar sucesso. Porto Alegre: Penso, 2019.

Essa obra apresenta um enfoque interessante sobre a aprendizagem da Matemática. A autora afirma que alguns fatores interferem no melhor entendimento dessa área, como a abordagem baseada em projetos, a avaliação que incentiva a aprendizagem e as estratégias e maneiras fundamentais de trabalhar, o que norteou a elaboração das propostas de avaliação que se encontram neste Manual. Também define o conceito do aprendizado da Matemática e a importância dele.

BORBA, M. de C. *et al*. *Fases das tecnologias digitais em Educação matemática*: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

O livro trata das mudanças ocorridas nas aulas de Matemática em consequência da inserção das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem. Inspirou a elaboração das propostas didáticas que utilizam tecnologias digitais desta coleção.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher: Edusp, 1974.

O autor apresenta e explica aspectos da História da Matemática, considerando a ordem cronológica e o local dos acontecimentos, desde a origem do conceito de número até os desenvolvimentos matemáticos do século XX. Ao longo dos capítulos, são apresentadas definições matemáticas importantes e as pessoas que trabalharam nelas. O livro foi utilizado como referência para dados históricos que se encontram neste Volume.

BRASIL. *Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: Senado Federal, 1996. Disponível em: https://tedit.net/81p5f9.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional é um marco regulatório fundamental que estabelece as diretrizes gerais para a organização e o funcionamento da educação no Brasil. Abrange todos os níveis e modalidades de ensino, desde a Educação Infantil até a Educação Superior, e define princípios como a igualdade de condições para o acesso e a permanência na escola, a liberdade de aprender e ensinar, bem como a valorização dos profissionais da educação brasileira.

BRASIL. *Lei n. 13.005, de 25 de junho de 2014*. Aprova o Plano Nacional de Educação – PNE e dá outras providências. Brasília, DF: MEC, 2014.

O Plano Nacional de Educação (PNE) foi instituído em 2014. O documento define 20 tópicos para garantir o acesso à educação de qualidade no Brasil até 2024, quando devem ser determinadas novas metas para o novo ciclo de anos. As metas e as estratégias específicas do PNE são estabelecidas para todos os níveis e modalidades de ensino no Brasil. Neste Manual, o documento foi utilizado para a elaboração de orientações didáticas.

BRASIL. Lei n. 14.533, de 11 de janeiro de 2023. Institui a Política Nacional de Educação Digital [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, edição extra, ano CLXI, n. 8-B, p. 1, 11 jan. 2023.

Promulgado em 2023, esse documento apresenta a lei que estabelece a criação da Política Nacional de Educação Digital (PNED). Esse documento foi consultado para guiar a elaboração das orientações e das propostas de atividades que envolvem a educação digital nesta coleção.

BRASIL. Lei n. 14.945, de 31 de julho de 2024. Altera a Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a fim de definir diretrizes para o Ensino Médio, [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, p. 5, 1º ago. 2024.

Essa lei foi promulgada pelo presidente da República e, até o fechamento desta coleção, era a versão mais atualizada da legislação para o Novo Ensino Médio. O documento foi usado, principalmente, como guia na concepção desta coleção e nas orientações didáticas encontradas neste Manual.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018a. Disponível em: https://tedit.net/pot336.

O texto da BNCC norteou a elaboração dos 3 Volumes desta coleção, seja nos textos destinados aos professores, seja nos propostos aos estudantes, assim como na proposta didática de distribuição dos conteúdos. As páginas introdutórias da BNCC e as dedicadas à etapa do Ensino Médio orientaram especificamente a vinculação entre os tópicos trabalhados nesta coleção em conformidade com as diretrizes desse documento normativo.

BRASIL. Ministério da Educação. *Computação*: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://tedit.net/93oura.

Em 2022, a BNCC foi complementada com diretrizes específicas que incluem o ensino de Computação no currículo escolar brasileiro. O documento, que visa promover o desenvolvimento de habilidades dos estudantes associadas ao pensamento computacional e à cultura digital, foi utilizado para a elaboração de algumas das seções e atividades desta coleção, bem como para as orientações didáticas deste Manual.

BRASIL. Ministério da Educação. *Projeto de vida*: *ser ou existir*. Caderno de práticas. Disponível em: https://tedit.net/nhft2i.

Nesse Caderno de práticas, são apresentadas algumas reflexões sobre o papel da escola no projeto de vida dos estudantes. O material foi utilizado como referência para a elaboração de atividades que envolvem projetos e as respectivas orientações didáticas.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília, DF: MEC, 2013. Disponível em: https://tedit.net/dtxfyz.

As Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCNs) são um conjunto de definições de princípios, fundamentos e procedimentos da Educação Básica elaborado com o objetivo de orientar e de assistir escolas e redes no desenvolvimento do projeto pedagógico. Essas diretrizes também fornecem subsídios para a elaboração de materiais didáticos e, por isso, foram consultadas e consideradas na elaboração desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. *Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva*. Brasília, DF: MEC, 2008. Disponível em: https://tedit.net/evvdwt.

Essa política, em conformidade com o documento disponível no portal do Ministério da Educação (MEC), estabelece as diretrizes fundamentais para a inclusão de estudantes com necessidades educacionais especiais no sistema regular de ensino. Também enfatiza a importância de garantir o acesso, a participação e a aprendizagem de todos os estudantes, independentemente das condições físicas, sensoriais, intelectuais ou múltiplas. O documento foi utilizado na elaboração das orientações que se encontram neste Manual e nas propostas de adaptação de atividades desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019a. Disponível em: https://tedit.net/gsxbfi.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019b. Disponível em: https://tedit.net/iu2eqx.

De acordo com a BNCC, os Temas Contemporâneos Transversais buscam contextualizar o que é ensinado por meio de temas que interessam aos estudantes, além de serem relevantes para o desenvolvimento deles como cidadãos. Por isso, devem ser incorporados aos currículos e às propostas pedagógicas escolares, de preferência de maneira transversal e integradora. Após a homologação da BNCC, visando esclarecer a inserção desses temas, esses 2 documentos foram elaborados pelo Ministério da Educação e passaram a servir de referencial para a concepção dos textos teóricos deste Manual, bem como de diversas propostas didáticas desta coleção.

BRASIL. Ministério dos Direitos Humanos. *Plano Nacional de Educação em Direitos Humanos*. Brasília, DF: Comitê Nacional de Educação em Direitos Humanos, 2018b. Disponível em: https://tedit.net/xr6rff.

Nessa publicação oficial, são apresentadas reflexões sobre a educação pautada em direitos humanos. Elas foram consideradas na elaboração das orientações didáticas e nas propostas de atividades desta coleção.

CARRAHER, T. N. (org.). *Aprender pensando*: contribuição da psicologia cognitiva para a educação. 19. ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

Essa obra apresenta algumas ideias sobre as contribuições dos estudos da psicologia cognitiva para a educação, oferecendo uma análise sobre como os processos cognitivos influenciam a aprendizagem e o desenvolvimento dos estudantes. Foi considerada na elaboração das propostas didáticas desta coleção.

CARVALHO, D. L. de. *Metodologia do ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 2011.

Esse livro contribui para a reflexão sobre estratégias que favorecem o ensino e a aprendizagem de Matemática, pois aborda diversas metodologias e estratégias de ensino que visam facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos pelos estudantes, promovendo um aprendizado significativo e contextualizado. Em razão dessas abordagens, serviu de referência para a concepção desta coleção.

CARVALHO, P. C. P. *Introdução à Geometria espacial*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

O autor apresenta, nessa obra, uma preparação para a transição da Geometria plana para a espacial. Também busca apresentar as propriedades e as demonstrações de maneira concreta e compreensível, o que também foi considerado na escolha da proposta pedagógica deste Volume.

CHAUI, M. *Iniciação à Filosofia*. Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. único.

Nesse livro didático, a autora apresenta conceitos e reflexões da Filosofia, incluindo os tipos de raciocínio (indução, dedução e abdução). Os conceitos explicados por ela foram utilizados como fio condutor das atividades que envolvem raciocínio lógico matemático nesta coleção.

COLL, C. Atenção à diversidade e qualidade do ensino. *Revista Educação Especial*, Santa Maria, n. 22, 2003. Disponível em: https://tedit.net/c2qv0d.

Nesse artigo, o autor compartilha reflexões sobre as implicações do olhar inclusivo no processo de ensino e aprendizagem e considera a diversidade inerente à condição humana. Essa abordagem norteou a elaboração das orientações didáticas deste Manual.

COSTA, A. C. G. da. *Protagonismo juvenil*: adolescência, educação e participação democrática. Salvador: Fundação Odebrecht, 2000.

A educação é abordada, nessa obra, considerando o jovem o núcleo central do processo educativo, o que condiz com a concepção pedagógica adotada nesta coleção. Para explanar essa realidade, o livro apresenta a descrição de projetos desenvolvidos na prática envolvendo experiências de protagonismo juvenil. Essas propostas foram consideradas na elaboração de algumas seções da coleção e em sugestões deste Manual.

CULTURA de paz: da reflexão à ação. Balanço da Década Internacional da Promoção da Cultura de Paz e Não Violência em Benefício das Crianças do Mundo. Brasília, DF: Unesco; São Paulo: Associação Palas Athena, 2010. Disponível em: https://tedit.net/l01hml.

Essa publicação da Unesco, que trata da cultura de paz, foi consultada para a elaboração deste Manual. A leitura desse texto contribui para a compreensão desse assunto, que compõe também o cotidiano escolar, levando em conta que os estudantes, que são o futuro de nossa sociedade, precisam internalizar a cultura da legitimidade e do respeito entre todos os cidadãos como modo de ser e viver.

D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

A leitura dessa obra favorece o exame crítico das tendências de educação matemática. O autor argumenta que a educação matemática deve ir além das fórmulas e algoritmos, incorporando aspectos históricos, filosóficos e culturais para promover uma compreensão mais profunda e significativa da Matemática. Essa obra forneceu subsídios para a construção das concepções e propostas desta coleção.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 1).

O autor apresenta uma análise da relação entre Matemática e Etnomatemática, ressaltando a importância da Etnomatemática no ensino ocidental, além de apresentar resultados de pesquisas do mundo todo na área. O livro foi utilizado como referencial teórico para a concepção desta coleção.

DEMO, P. *Professor/Conhecimento*. Brasília, DF: Unb, 2001. p. 1-12. Disponível em: https://tedit.net/vlho7e.

Nesse artigo, o autor apresenta reflexões sobre as características necessárias ao professor no mundo contemporâneo, as quais foram consideradas na elaboração das orientações didáticas desta coleção.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*. 2. ed. Campinas: Papirus, 2003.

Nesse artigo, o autor compartilha parte dos resultados das pesquisas que realizou sobre diferentes registros de representações semióticas na aprendizagem de Matemática. Esses resultados foram utilizados na elaboração de propostas didáticas para este Manual.

ELLEMBERG, J. *O poder do pensamento matemático*: a ciência de como não estar errado. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

O autor mostra, nesse livro, a necessidade de haver maior embasamento no pensamento matemático, considerando que existem casos em que a intuição pode falhar. De maneira motivadora, incentiva essa busca por mais conhecimento e leva o leitor a desenvolver o olhar crítico por meio de exemplos reais e instigantes, o que inspirou propostas didáticas utilizadas nesta coleção.

FAZENDA, I. *O que é interdisciplinaridade*. São Paulo: Cortez, 2008.

Esse livro explora a interdisciplinaridade não apenas como integração de disciplinas, mas também sob a perspectiva da busca de novos conhecimentos. A autora debate como a interdisciplinaridade pode enriquecer a prática pedagógica, facilitando a construção de conhecimentos mais significativos e contextualizados, fazendo um paralelo entre como isso pode se refletir na formação e na prática pedagógica. As atividades e seções interdisciplinares desta coleção foram propostas usando esse material como embasamento bibliográfico.

FERNANDES, D. *Avaliar para aprender*: fundamentos, práticas e políticas. São Paulo: Unesp, 2009.

Ao apresentar um panorama completo sobre o que e como avaliar, o autor afirma que a avaliação deve ir além da simples mensuração de resultados, sendo um processo contínuo e formativo que contribui para o desenvolvimento integral dos estudantes. Esses estudos foram considerados na elaboração de atividades e na proposição de avaliações nesta coleção.

FREITAS, M. C. de. Educação inclusiva: diferenças entre acesso, acessibilidade e inclusão. *Cadernos de Pesquisa (Fundação Carlos Chagas)*, São Paulo, v. 53, e10084, 3 jul. 2023. Disponível em: https://tedit.net/8fq46o.

O autor explora as nuances e distinções fundamentais entre os conceitos de acesso, acessibilidade e inclusão no contexto educacional, o que foi considerado nas orientações didáticas deste Manual. Argumenta, ainda, que, embora frequentemente sejam usados de modo intercambiável, esses termos têm significados distintos, que impactam diretamente a eficácia das políticas e práticas educacionais inclusivas.

IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018.

Esse atlas, produzido pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, reúne informações geográficas, cartográficas e estatísticas do Brasil e de outros países. Pela confiabilidade e precisão das informações, serviu de referencial na elaboração das propostas didáticas relacionadas às projeções cartográficas apresentadas neste Volume.

LIMA, E. L. *Matemática e ensino*. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).

O autor apresenta uma visão sobre escolas, professores e estudantes e sugere uma melhor abordagem por parte dos professores sobre os temas matemáticos, o que foi considerado na elaboração das orientações didáticas desta coleção. Ressalta, ainda, que qualquer estudante nas séries iniciais é capaz de aprender Matemática.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (org.). *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

Esse livro aborda aspectos didáticos do ensino da Geometria e como o estudante constrói o conhecimento geométrico, que serviu de referência para a elaboração deste Manual.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. *Álgebra linear*. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011. (Coleção Schaum).

Os autores apresentam, entre outros assuntos, matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares, além do estudo das transformações geométricas que utilizam matrizes, o que serviu de referencial para a escolha da abordagem didática dos conteúdos neste Volume.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*. São Paulo: Cortez, 2002.

Nesse livro, estão compilados estudos sobre a temática de avaliação. A obra alicerçou e corroborou os comentários sobre possíveis procedimentos propostos neste Manual de como avaliar os estudantes favorecendo a educação integral, e não apenas a mensuração quantitativa de notas.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem na escola:* reelaborando conceitos e criando a prática. 2. ed. Salvador: Malabares Comunicações e Eventos, 2005.

O autor propõe uma reavaliação dos métodos e objetivos da avaliação, argumentando que ela deve ser um processo contínuo e formativo, voltado para o desenvolvimento integral dos estudantes, em vez de apenas um mecanismo de classificação e exclusão. A abordagem descrita por esse autor foi considerada na elaboração de atividades e propostas de avaliação nesta coleção.

OLIVEIRA, C. A. C. *Trigonometria*: o radiano e as funções seno, cosseno e tangente. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia. Campina Grande, 2014.

Inicialmente, o autor discorre sobre aprendizagem significativa em Trigonometria: implicações para o ensino e o papel do professor. As sugestões foram referência na elaboração das propostas pedagógicas deste Manual.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 17, n. 33, jan./abr. 2006. Disponível em: https://tedit.net/ddvf63.

Esse artigo apresenta considerações sobre a avaliação especificamente em Matemática. As autoras discutem os desafios e as limitações das abordagens tradicionais de avaliação, que muitas vezes se concentram apenas na memorização e na aplicação mecânica de fórmulas. Essa concepção pedagógica faz parte dos pressupostos desta coleção.

PERRENOUD, P. *A avaliação*: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 2001.

O autor afirma que a avaliação tradicionalmente se concentra na certificação, ou seja, na validação de conhecimentos e habilidades adquiridas, muitas vezes resultando em práticas que priorizam a memorização e a padronização. Em contrapartida, ele defende uma lógica de aprendizagem, na qual a avaliação é vista como um processo contínuo e formativo, destinado a apoiar o desenvolvimento dos estudantes e a promover uma compreensão mais profunda e significativa dos conteúdos. Esse livro foi utilizado na concepção das propostas avaliativas desta coleção.

PERRENOUD, P. *As competências para ensinar no século XXI*: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Tradução: Cláudia Schilling e Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002.

A educação por competências com base no desenvolvimento de habilidades e valores não é uma novidade no âmbito educacional, e sim uma perspectiva de ensino já caracterizada como adequada ao século XXI. Esse livro foi utilizado para a elaboração tanto dos textos deste Manual como para embasar a concepção pedagógica desta coleção de ensino por competências.

PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

A metodologia de resolução de problemas descrita nesse livro inspirou o modo de encaminhar o desenvolvimento dos assuntos abordados nesta coleção, bem como as etapas e os passos propostos na resolução de problemas. O livro fornece ferramentas essenciais para professores e estudantes.

PÓLYA, G. *Mathematical discovery on understanding, learning and teaching problem solving*. New York: John Wiley & Sons, 2009. 2 v.

Destinado a estudantes e professores, esse livro indica estratégias, descritas também neste Manual, para a resolução de problemas, além de reforçar a importância da compreensão e do aprendizado durante esse processo. Para alcançar os objetivos, o autor ressalta que é essencial a observação dos dados e das condições, assim como persistência e paciência.

ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Em ordem cronológica, a autora apresenta fatos da história da Matemática sob um olhar crítico, analisando mitos e lendas perpetuados por muito tempo. Inicia com a abordagem de conceitos matemáticos desenvolvidos na Mesopotâmia, passando por Egito, Grécia, França e Alemanha. É o primeiro livro brasileiro a retratar a História da Matemática, sendo utilizado como referência para os dados históricos apresentados neste Volume.

SKOVSMOSE, O. *Educação crítica*: incerteza, matemática, responsabilidade. Tradução: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).

Nesse livro, é descrito, com base em ideias filosóficas e sociológicas, um cenário de questionamentos (de ordem não apenas teórica, como também prática) que envolvem fundamentos da Educação matemática crítica relacionados à ação pedagógica de professores. O livro serviu de referência bibliográfica para a elaboração do projeto didático desta coleção.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, Maria Ignez. *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2000.

As autoras compartilham pesquisas, reflexões e sugestões relacionando a leitura, a escrita e a resolução de problemas, teoria que é o fio condutor desta coleção.

WING, J. M. Computational thinking. Tradução: Cleverson Sebastião dos Anjos. *Communications of the ACM*, v. 49, n. 3, p. 33-35, 2006.

Esse artigo apresenta a tradução do trabalho "Computational Thinking", da pesquisadora Jeannette Wing. O texto discorre a respeito do percurso de ideias relacionadas aos estudos dessa pesquisadora sobre o pensamento computacional. Foi referência bibliográfica para a elaboração deste Manual e das propostas didáticas relacionadas ao pensamento computacional nesta coleção.