Luiz Roberto Dante
Fernando Viana

VOLUME III

3º ANO

Ensino Médio
Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

PNLD EM 2026 – 2029 – CATEGORIA 1 – MATERIAL DE DIVULGAÇÃO

CÓDIGO DA COLEÇÃO:
0111P26010120814

DO SEU JEITO

Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

editora ática

MANUAL DO PROFESSOR

Ensino Médio
Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

DO SEU JEITO

Matemática

Luiz Roberto Dante

Livre-docente em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp-SP), *campus* Rio Claro.

Doutor em Psicologia da Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).

Licenciado em Matemática pela Unesp-SP, *campus* Rio Claro.

Pesquisador em Ensino e Aprendizagem da Matemática pela Unesp-SP, *campus* Rio Claro.

Atuou como professor do Ensino Fundamental e do Ensino Médio na rede pública de ensino.

Autor de materiais didáticos e paradidáticos de Matemática para estudantes e professores da Educação Básica.

Fernando Viana

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB).

Licenciado e mestre em Matemática pela UFPB.

Professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB).

Professor do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e de cursos pré-vestibulares há mais de 20 anos.

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

1ª edição, São Paulo, 2024.

editora ática

editora ática

Direção executiva de negócio e editorial: Flavia Alves Bravin

Direção de negócio: Volnei Korzenieski

Direção editorial: Lidiane Vivaldini Olo

Gerência de conteúdo: Alice Ribeiro Silvestre

Edição: Pamela Hellebrekers Seravalli (ger.), Marina Muniz Campelo, Juliana Aparecida Bomjardim Soares, Marília Kerr (assist.), Julia Lima Souza, Daniela Gratner Schuck, João Paulo Caixeta, Saulo Augusto Nascimbem e Julia Correa Bueno (assist.)

Produção editorial: Renata Galdino

Revisão: Letícia Bento Pieroni (ger.), Carlos Eduardo Sigrist (coord.), Anderson Félix (líder de projeto), Aline Vieira, Ana Paula C. Malfa, Bruno Freitas, Daniela Lima, Danielle Modesto, Diego Carbone, Gabriela M. Andrade, Helena Settecerze, Heloísa Schiavo, Kátia Godoi, Luciana B. Azevedo, Luis Boa Nova, Luiz Gustavo Bazana, Luiza Thomaz, Malvina Tomaz, Marilia Lima, Paula de Jesus, Raquel Taveira, Ricardo Miyake e Vanessa P. Santos

Arte: Fernanda Costa da Silva (ger.), Erika Tiemi Yamauchi e Kleber de Messas (coord.), Thainá Fidelis Antenucci Cezar (ed. arte), Fórmula Produções editoriais (diagramação)

Digital: Daniela Teves Nardi (ger.), Rafael Pereira de Paula Freitas (coord. produção multimídia), Daniella dos Santos Di Nubila (coord. produção digital) e Rogério Fábio Alves (coord. conteúdo digital e publicação)

Ilustrações: Bruna Ishihara, Ericson Guilherme Luciano, Hector Gómez, Ilustra Cartoon, Lápis 13B Ilustrações, Luis Moura, Tiago Donizete Leme e WYM Design

Cartografia: Fernanda Costa da Silva (ger.), Eric Fuzii (coord.) e Alexandre Bueno

Design: Fernanda Costa da Silva (ger.), Erik Taketa (coord.), Luis Vassallo (proj. gráfico) e Talita Guedes (capas)

Licenciamentos: Flávio Matuguma

Licenciamento e iconografia: Roberta Bento (ger.), Iron Mantovanello (coord.), Alice Matoso, Claudia Balista, Douglas Cometti, Mariana Valeiro, Paula Squaiella, Roberta Freire, Thaisi Albarracin Lima (pesquisa e licenciamento), Fernanda Crevin (tratamento de imagens), Beatriz Alves dos Santos, Daniel Scucuglia, Ligia Dona, Liliane Rodrigues, Raísa Maris Reina, Sabrina Regina de Marinho e Sueli Ferreira (analista de licenciamento)

Foto de capa: ViDi Studio/stock.adobe.com, sibillin/Shutterstock e Kaspars Grinvalds/Shutterstock

Pré-impressão: Michel Shimamoto (coord.), Alessandro de Oliveira Queiroz, Camilla Félix Cianelli Chaves, Debora Fernandes, Diego Rodrigues de Lima, Fernanda de Oliveira, Lucas Meireles dos Santos e Valmir da Silva Santos

Todos os direitos reservados por Editora Ática S.A.

Alameda Santos, 960, 4º andar, setor 1
Cerqueira César – São Paulo – SP – CEP 01418-002
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
contato@saber.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Dante, Luiz Roberto
Do seu jeito : Matemática : área de Matemática e suas Tecnologias : volume 3 : Ensino médio / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2024.

ISBN 978-65-2670-274-1 - aluno
ISBN 978-65-2670-275-8 - professor

1. Matemática (Ensino médio) I. Viana, Fernando

CDD 510.7
24-4416

Angélica Ilacqua - Bibliotecária - CRB-8/7057

2024
Código da obra CL 721784
CAE 876535 (AL) / 876536 (PR)
1ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Envidamos nossos melhores esforços para localizar e indicar adequadamente os créditos dos textos e imagens presentes nesta obra didática. Colocamo-nos à disposição para avaliação de eventuais irregularidades ou omissões de créditos e consequente correção nas próximas edições. As imagens e os textos constantes nesta obra que, eventualmente, reproduzam algum tipo de material de publicidade ou propaganda, ou a ele façam alusão, são aplicados para fins didáticos e não representam recomendação ou incentivo ao consumo.

Impressão e acabamento

Apresentação

Querido estudante,

Ao elaborar esta coleção de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, consideramos o que há de mais moderno no processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento.

Nosso objetivo com a coleção é proporcionar a você condições necessárias para compreender e aplicar as principais ideias e ferramentas da Matemática no seu nível de ensino, atribuindo-lhes significado e possibilitando a resolução de problemas do mundo real. Além disso, a coleção foi concebida de modo a dar espaço para que você escolha os próprios meios de aprender e de ser protagonista do seu processo de aprendizagem, desenvolvendo a educação de maneira integral.

Todos os conceitos essenciais, próprios do Ensino Médio, foram explorados ao longo dos Volumes de maneira simples, intuitiva e compreensível para sua aprendizagem. As resoluções mecanizadas e o formalismo excessivo foram evitados; mantivemos, porém, o rigor necessário, coerente com o nível para o qual a coleção é proposta.

Na abertura de cada Unidade, apresentamos uma imagem relacionada aos conteúdos que você vai estudar, com o objetivo de lhe dar uma percepção de alguns dos temas que estarão presentes. Esperamos que isso instigue sua curiosidade!

Em seguida, em cada capítulo, há situações contextualizadas e, muitas vezes, integradas, que expressam os conteúdos e temas estudados. Nelas você pode analisar e investigar a utilização da Matemática de maneira simples, espontânea e eficiente, além de refletir sobre a presença e a importância dela no cotidiano.

No decorrer de cada capítulo, apresentamos textos, atividades e problemas significativos, que abordam fatos históricos e contextualizam a construção dos conteúdos estudados, bem como expõem e promovem a resolução de problemas relacionados a situações reais ou a outras áreas do conhecimento, explorando as tecnologias digitais – tão presentes em nossa vida – para proporcionar o desenvolvimento do pensamento computacional.

Desse modo, esta coleção de Matemática engloba todas as competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como as competências específicas e as habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias previstas para o Ensino Médio.

Sugestões e críticas para o aprimoramento deste trabalho serão sempre consideradas. Seja muito bem-vindo ao estudo da Matemática e suas Tecnologias que esta coleção lhe proporciona!

Forte abraço,

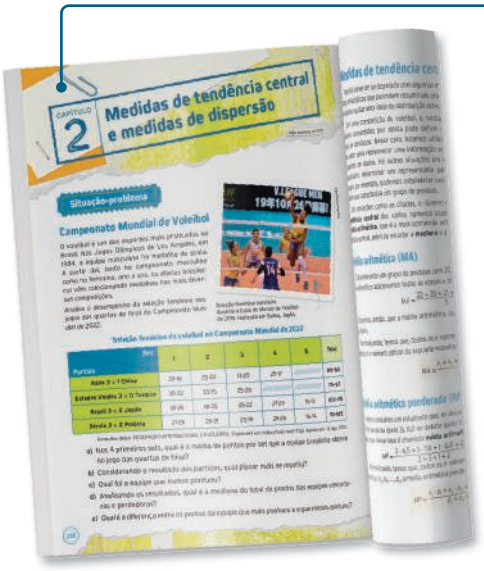
Os autores

Conheça seu livro

Este Volume está organizado em Unidades e capítulos. Nele você encontrará textos, boxes e seções. Conheça a seguir a estrutura deste Volume.

UNIDADE

Na **abertura** de cada Unidade, apresentamos uma imagem relacionada a um ou mais conteúdos ou temas abordados no decorrer dela. O texto e as questões apresentados propõem reflexões sobre os assuntos da Unidade e buscam introduzir, direta ou indiretamente, os conteúdos que serão estudados.



CAPÍTULO

Na **abertura** de cada capítulo, você encontra algumas **situações-problema** e questões relacionadas a elas que permitem investigações e explorações, preparando-o para os conteúdos do capítulo.

EXPLORE PARA DESCOBRIR

Atividades de exploração, experimentação, verificação e sistematização dos conteúdos apresentados no capítulo são indicadas nesse boxe, possibilitando que você formule ideias e crie estratégias de compreensão e de resolução de problemas.

FIQUE ATENTO

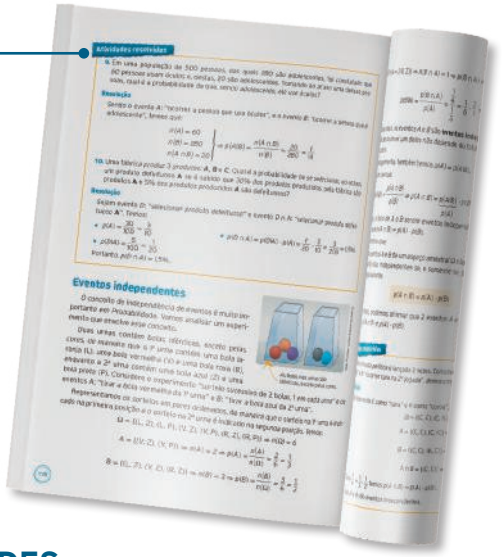
Boxe em que retomamos definições ou nomenclaturas, destacamos pontos importantes do conteúdo em estudo e apresentamos dicas que podem auxiliá-lo no seu estudo.

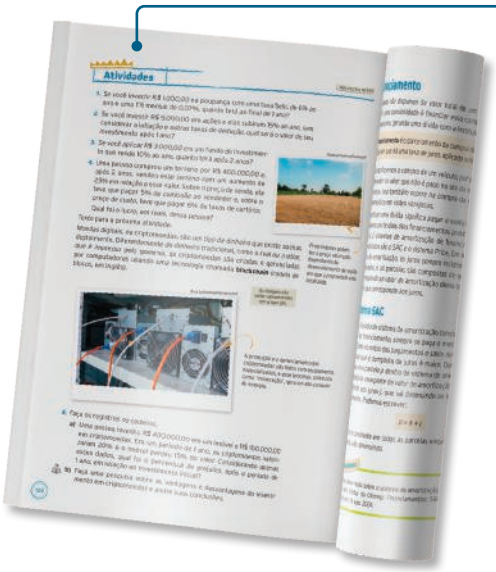
REFLITA

Questionamentos e reflexões sobre o conteúdo apresentado são propostos nesse boxe.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

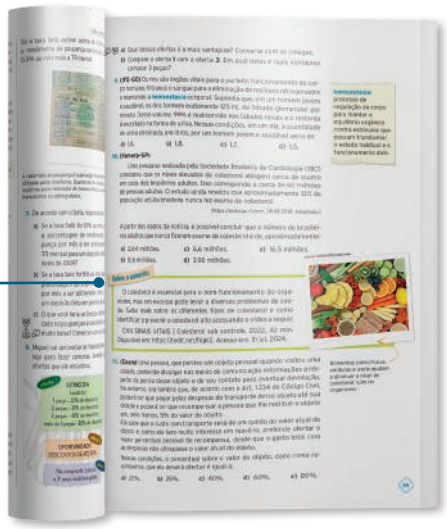
Acompanhe a resolução detalhada de atividades e problemas, bem como exemplificações de estratégias de resolução e o passo a passo da resolução de um problema.





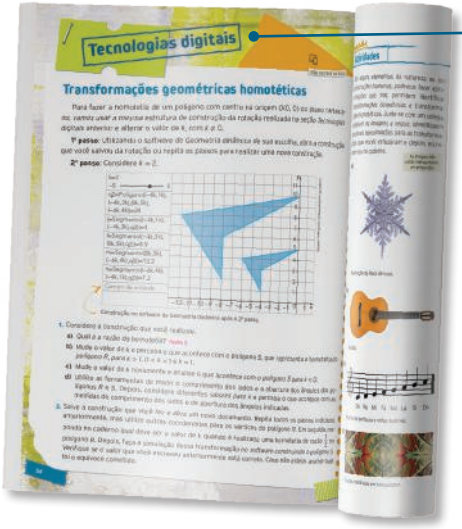
ATIVIDADES

Aqui você encontra atividades e problemas envolvendo contextos cotidianos, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, para você aplicar e aprofundar os conteúdos estudados. Há também atividades que visam à elaboração de perguntas e problemas.



SOBRE O ASSUNTO

Indicamos nesse boxe informações e curiosidades relacionadas aos conteúdos estudados, bem como sugestões de textos, vídeos, simuladores, museus, visitas, entre outros, para complementar e aprofundar seus estudos ou mesmo realizar pesquisas.



TECNOLOGIAS DIGITAIS

Nessa seção, propomos a utilização de diversas tecnologias, como calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* livres. Elas são muito úteis para fazer explorações e simulações de figuras geométricas, calcular medidas estatísticas, construir e manipular representações gráficas, organizar dados em planilhas, entre outras muitas utilidades.

CONEXÕES

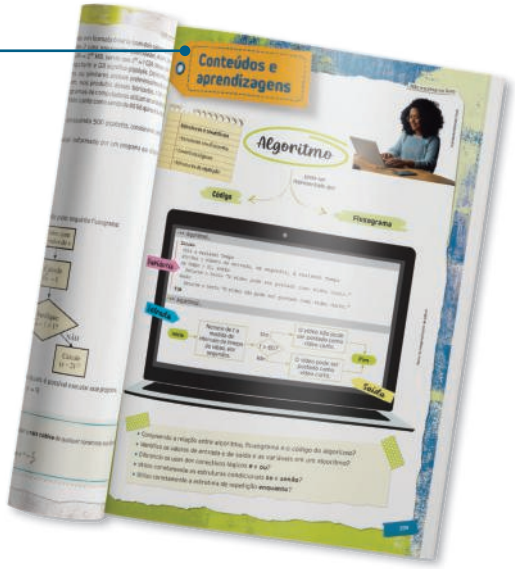
Temas relevantes e atuais que relacionam diferentes áreas do conhecimento são explorados na seção. Apresentamos uma seção de atividades que oferecem oportunidades de interpretação de textos e imagens, podendo incluir aplicação, pesquisa, ampliação e debate do tema da seção.

ALÉM DA SALA DE AULA

Nessa seção, propomos diferentes projetos interdisciplinares a serem compartilhados com a comunidade escolar. Cada projeto oferece mais de uma possibilidade de produto final, permitindo que você tenha autonomia para escolher a proposta mais relevante de acordo com sua realidade e seus objetivos.

ENEM E VESTIBULARES

Aqui propomos questões recentes e diversificadas do Enem e de vestibulares de todas as regiões do Brasil relacionadas aos conteúdos estudados no capítulo.



CONTEÚDOS E APRENDIZAGENS

Nessa seção, os principais conceitos estudados na Unidade são reapresentados de modo visual, atrativo e organizado. Em seguida, são propostas perguntas para que você reflita sobre o próprio aprendizado.

ÍCONES

Os ícones que acompanham algumas atividades e seções indicam a oportunidade de você explorar questões de Educação financeira, utilizar tecnologias digitais durante seu aprendizado, realizar as propostas coletivamente, em dupla ou em grupo, além de expor oralmente suas respostas e opiniões.

Educação financeira | **Tecnologias digitais** | **Dupla** | **Grupo** | **Oral**

Sumário

O trabalho com a BNCC 11

Unidade 1: Geometria no plano cartesiano 12

Capítulo 1: Geometria analítica: ponto, reta e circunferência 14

Introdução à Geometria analítica 15
- Sistema cartesiano ortogonal 15

Explorando a medida de distância entre 2 pontos 17

Formalizando a medida de distância entre 2 pontos 18

Explorando o conceito de coordenadas do ponto médio de um segmento de reta 20

Formalizando o conceito de coordenadas do ponto médio de um segmento de reta 20

Condição de alinhamento de 3 pontos 21

Equação da reta 22
- Inclinação de uma reta 22
- Coeficiente angular de uma reta 24
- Equação fundamental da reta 27
- Formas da equação da reta 28

Posições relativas de 2 retas no plano 30
- Retas paralelas 30
- Retas concorrentes 31
- Retas perpendiculares 32

Distância de um ponto a uma reta 33
- Fórmula da medida de distância de um ponto a uma reta 34

Definição e equação da circunferência 36
- Equação geral da circunferência 36

Conexões: Triangulação no GPS 39

Capítulo 2: Transformações geométricas 41

Explorando as transformações geométricas isométricas 42

Formalizando as transformações geométricas isométricas 42
- Translação 43
- Reflexão 44
- Rotação 45

Tecnologias digitais: Transformações geométricas isométricas 47

Explorando as transformações geométricas homotéticas 51

Formalizando as transformações geométricas homotéticas 52

Tecnologias digitais: Transformações geométricas homotéticas 54

Enem e vestibulares 58

Conteúdos e aprendizagens 61

Unidade 2: Educação financeira 62

Capítulo 1: Fundamentos da Matemática financeira 64
Explorando o conceito de porcentagem 65
Formalizando o conceito de porcentagem 65
Conexões: Um pouco da história do dinheiro 72
Aumentos, descontos e fator de atualização 74
Aumentos e descontos sucessivos 76
Formalizando alguns conceitos de Matemática financeira 81
Inflação 81
Juros simples 82
Juros compostos 83
Relação entre juros e funções 92
Conexões: Moedas sociais 95

Capítulo 2: Planejamento e gestão de orçamento pessoal 97
Orçamento pessoal 98
Poupança e outros investimentos 100
Poupança 100
Outros investimentos 101
Financiamento 103
O sistema SAC 103
O sistema Price 105
Conexões: Empreendedorismo 107
Dívidas e créditos 109
Cartão de crédito 109
Pix 111
Além da sala de aula: Simulador de financiamentos 113
Enem e vestibulares 116
Conteúdos e aprendizagens 119

Unidade 3: Análise combinatória e probabilidade 120

Capítulo 1: Análise combinatória: diferentes estratégias de contagem 122
Explorando o princípio fundamental da contagem 124
Formalizando o princípio fundamental da contagem 126
Explorando as permutações simples 131
Formalizando as permutações simples 132
Fatorial 132
Explorando as permutações com repetição 135
Formalizando as permutações com repetição 136
Explorando os arranjos simples 138
Formalizando os arranjos simples 139
Explorando as combinações simples 142
Formalizando as combinações simples 144
Propriedade das combinações 145
Tecnologias digitais: Permutação simples, arranjo e combinação na planilha eletrônica 148
Problemas que envolvem os vários tipos de agrupamento 150
Conexões: Afinação do cavaquinho 152

Capítulo 2: Probabilidade 154
Formalizando o conceito de probabilidade 156
Espaço amostral e evento 159
Eventos certos e eventos impossíveis 160
União e intersecção de eventos 161
Complementar de um evento 161
Explorando o cálculo de probabilidades 162
Formalizando o cálculo de probabilidades 162
Certeza e impossibilidade 163
Um pouco da história da Probabilidade 167
Cálculo de probabilidades com espaço amostral não discreto 169
Explorando a definição teórica de probabilidade e consequências 170
Formalizando a definição teórica de probabilidade 171
Consequências da definição teórica de probabilidade 171
Explorando o conceito de probabilidade condicional 175
Formalizando o conceito de probabilidade condicional 177
Eventos independentes 178
Conexões: Aplicações de probabilidade à Genética 182
Enem e vestibulares 184
Conteúdos e aprendizagens 187

Unidade 4: Estatística 188

Capítulo 1: Introdução à Estatística 190
População e amostra 192
Variável 193
Pesquisa estatística 195
Frequência absoluta e frequência relativa 196
Tabela de frequências 196
Conexões: Pesquisas de intenção de voto 201
Representações gráficas 203
Gráfico de segmentos 203
Gráfico de barras 206
Gráfico de setores 209
Histograma 211
Pictograma 214
Diagrama de ramos e folhas 214
Exemplos de construção de gráficos 216
Tecnologias digitais: Representações gráficas 220
Conexões: Poliomielite 223
Probabilidade e Estatística 225
Além da sala de aula: Alimentando o mundo em 2050 229

Capítulo 2: Medidas de tendência central e medidas de dispersão 232
Medidas de tendência central 233
Média aritmética (*MA*) 233
Média aritmética ponderada (*MP*) 233
Mediana (*Me*) 235
Moda (*Mo*) 236
Média aritmética, moda e mediana de acordo com as tabelas de frequências 236
Diagrama de caixa (*box-plot*) 243
Tecnologias digitais: Construção do diagrama de caixa 246
Medidas de dispersão 247
Amplitude (*A*) 247
Variância (*V*) 248
Desvio padrão (*DP*) 249
Conexões: IDH 252
Fazendo uma pesquisa estatística 254
Além da sala de aula: Densidade demográfica no Brasil 256
Enem e vestibulares 258
Conteúdos e aprendizagens 261

Unidade 5: Computação 262

Capítulo 1: Um pouco da história 264
A origem da computação 265
A computação moderna 267
A criação da programação 267
Máquina de Turing 268
A criação dos computadores 269
Funcionamento de um computador 270
Processamento de dados 271
Armazenamento de dados 271
Conexões: As matemáticas da corrida espacial 273

Capítulo 2: Algoritmos e fluxogramas 275
Explorando o conceito de algoritmo 276
Formalizando o conceito de algoritmo 277
Fluxogramas 278
Exemplos de algoritmos e de fluxogramas 278
Algoritmos em problemas de raciocínio lógico 278
Algoritmos em problemas de Matemática 280
Além da sala de aula: Algoritmos nas redes sociais 282

Capítulo 3: Conceitos iniciais de programação 284
Linguagens de programação 285
Entrada e saída 285
Variáveis 286
Estruturas condicionais 287
Conectivos lógicos 288
Conectivo lógico **e** 288
Conectivo lógico **ou** 290
Estruturas de repetição 292
Tecnologias digitais: Algoritmos no Scratch 294
Enem e vestibulares 297
Conteúdos e aprendizagens 299

Respostas 300
Lista de siglas 314
Referências bibliográficas comentadas 315
Transcrição de áudios 318

Objetos Educacionais Digitais (OEDs)

Transformações geométricas e a produção de mosaicos 42

Fractais 51

Inflação 81

Análise combinatória 122

Doenças genéticas 182

Pesquisas, gráficos e dados estatísticos 195

Mortalidade infantil 209

Água invisível 214

Medidas de dispersão 248

Censo demográfico 257

Inteligência artificial 268

Evolução dos computadores 269

Transcrição de áudios 318

O trabalho com a BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece o que cada estudante precisa aprender em cada etapa da Educação Básica, de maneira a estabelecer um currículo básico comum a todos os estudantes brasileiros.

Com o propósito de estabelecer uma educação de qualidade e com equidade, a BNCC foi elaborada considerando critérios claros, focados nos conhecimentos e nas habilidades essenciais para o desenvolvimento dos estudantes na sociedade do século XXI.

Nesta coleção, trabalhamos ao longo dos 3 Volumes todas as competências e habilidades da BNCC e os Temas Contemporâneos Transversais. A seguir apresentamos aqueles que são trabalhados em cada Unidade deste Volume.

Para conhecer os textos correspondentes aos códigos indicados, consulte o documento oficial disponível em: https://tedit.net/pot336 (acesso em: 4 ago. 2024).

Volume 3				
Unidade	**Competência geral da Educação Básica (CG)**	**Competência específica de Matemática e suas Tecnologias (CEMAT)**	**Habilidade de Matemática e suas Tecnologias (EM13MAT)**	**Tema Contemporâneo Transversal (TCT)**
Unidade 1	CG01, CG02, CG06	CEMAT01	EM13MAT105	*Ciência e Tecnologia*; *Educação para o Trânsito*
Unidade 2	CG01, CG06, CG07, CG010	CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03	EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT203, EM13MAT303	*Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Financeira*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Saúde*; *Trabalho*; *Vida Familiar e Social*
Unidade 3	CG01, CG02, CG03, CG08	CEMAT01, CEMAT03, CEMAT05	EM13MAT106, EM13MAT310, EM13MAT311, EM13MAT312, EM13MAT315, EM13MAT511	*Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Financeira*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Saúde*
Unidade 4	CG01, CG02, CG04, CG05, CG07, CG08, CG09, CG10	CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03, CEMAT04	EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT202, EM13MAT203, EM13MAT312, EM13MAT314, EM13MAT316, EM13MAT405, EM13MAT406, EM13MAT407	*Educação Alimentar e Nutricional*; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação Financeira*; *Educação para o Consumo*; *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso*; *Saúde*; *Vida Familiar e Social*
Unidade 5	CG01, CG04, CG05, CG07, CG08, CG09	CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04	EM13MAT103, EM13MAT315, EM13MAT405	*Ciência e Tecnologia*; *Educação em Direitos Humanos*; *Saúde*; *Vida Familiar e Social*

UNIDADE 1

Geometria no plano cartesiano

No dia 26 de novembro de 2022, o foguete Falcon 9 decolou do Centro Espacial Kennedy da NASA, na Flórida (EUA), levando suprimentos para a Estação Espacial Internacional. Para essa operação foi necessário fazer alguns cálculos utilizando as leis de Newton para determinar a trajetória exata da Estação Espacial e do foguete, de modo que eles se encontrassem.

Já no planeta Terra, por exemplo, existe o Sistema de Posicionamento Global (GPS – que vem do inglês *Global Positioning System*). Com ele, é possível saber a posição exata de qualquer ponto da superfície terrestre determinando as coordenadas geográficas por meio das linhas imaginárias traçadas sobre o globo terrestre, chamadas de latitude e de longitude.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta abertura encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Decolagem do Foguete Falcon 9 com a espaçonave de carga Dragon no Centro Espacial Kennedy da NASA, na Flórida, nos Estados Unidos. Foto de 2022.

- Exemplo de resposta: As coordenadas geográficas ajudam a localizar qualquer ponto na superfície terrestre, como a localização de uma embarcação em alto-mar.
- Sim, pois nele é possível determinar as coordenadas de um ponto, por exemplo.

Jim WATSON/AFP

- Qual é a importância de saber as coordenadas geográficas de qualquer ponto do globo terrestre?
- Na Matemática, o conceito de plano cartesiano pode ser relacionado ao funcionamento do GPS? Justifique.

CAPÍTULO 1

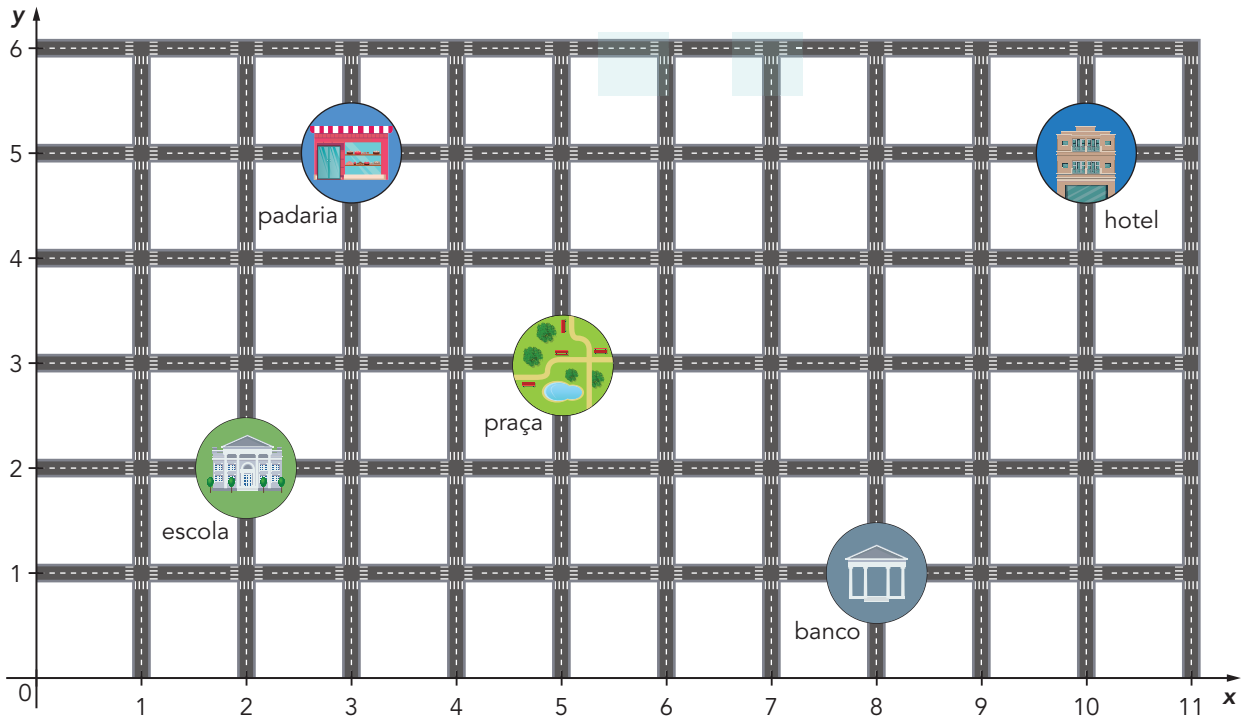
Geometria analítica: ponto, reta e circunferência

Situação-problema

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Esta situação-problema favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

Não escreva no livro



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

A imagem representa o tabuleiro de um jogo que simula o mapa de uma cidade. Cada unidade linear representada nos eixos do plano cartesiano corresponde a 1 casa do tabuleiro, sendo possível percorrer somente as distâncias nas linhas horizontais e nas linhas verticais do plano cartesiano.

a) Carolina está com o peão dela na posição da escola e quer encontrar o menor trajeto para deslocar o peão entre 2 localidades. Qual é a menor quantidade de casas que ela precisa percorrer com o peão para ir da escola até a padaria? E da padaria até a praça? 4 casas; 4 casas.

b) Mantendo a ideia do menor trajeto, quantas casas Carolina deve percorrer com o peão para, ao sair da escola, passar por todos os demais pontos destacados na ordem: escola, padaria, hotel, banco, praça e depois retornar à escola? 26 casas.

Introdução à Geometria analítica

Podemos dizer que a Geometria analítica está fundamentada na ideia de representar os pontos da reta numérica por números reais, e os pontos do plano cartesiano por pares ordenados de números reais. Assim, as figuras geométricas planas (reta, circunferência, etc.) podem ser descritas por equações. Desse modo, é possível tratar algebricamente muitas questões geométricas e, também, interpretar de maneira geométrica algumas situações algébricas.

Essa integração entre Geometria e Álgebra foi responsável por grandes progressos na Matemática e nas ciências em geral. Em Geometria analítica, estudaremos várias figuras e as propriedades geométricas delas por meio de processos algébricos (equações, inequações, sistemas, etc.).

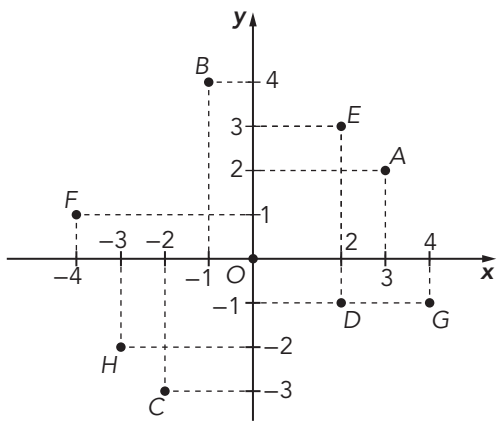
Sistema cartesiano ortogonal

Você se lembra de que existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano e o conjunto de pares ordenados de números reais, isto é, que a cada ponto do plano corresponde um único par ordenado (x, y), e que a cada par ordenado (x, y) está associado um único ponto no plano? Essa relação biunívoca não é única, pois depende do sistema de eixos ortogonais adotado.

Para estabelecer uma dessas correspondências biunívocas são usados 2 eixos ortogonais (eixo x e eixo y), que formam o **sistema cartesiano ortogonal** (ou **plano cartesiano**). A intersecção dos eixos x e y é o ponto O, chamado **origem** do sistema. Acompanhe o exemplo a seguir.

No sistema cartesiano ortogonal, cada par ordenado indicado está associado a um ponto.

$A(3, 2)$
$B(-1, 4)$
$C(-2, -3)$
$D(2, -1)$
$E(2, 3)$
$F(-4, 1)$
$G(4, -1)$
$H(-3, -2)$
$O(0, 0)$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Considerando o ponto $A(3, 2)$, dizemos que o número 3 é a coordenada x ou a **abscissa do ponto *A***, e o número 2 é a coordenada y ou a **ordenada do ponto *A***.

Professor, se julgar interessante, sugira aos estudantes que pesquisem as origens das palavras "ordenada" e "abscissa", de modo a enriquecer a participação deles na aula.

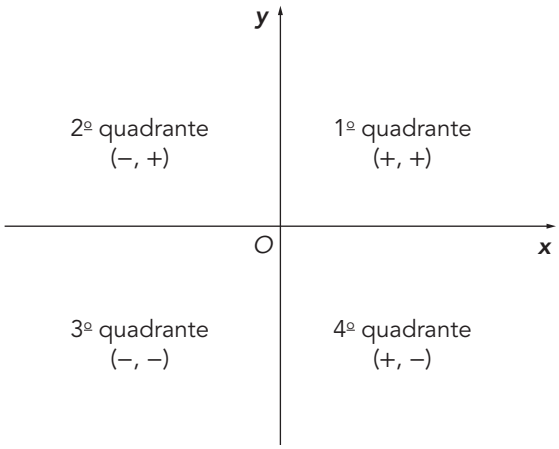
Fique atento

Correspondência biunívoca é a correspondência um a um, ou seja, que associa os elementos de 2 conjuntos, tal que cada elemento de um conjunto tenha um único correspondente no outro.

Os eixos ortogonais, por sua vez, são retas orientadas, que formam um ângulo com medida de abertura de 90° entre si, e que permitem a localização de pontos no plano cartesiano.

A seguir, listamos algumas das características do sistema cartesiano ortogonal.

- Os eixos x e y chamam-se eixos coordenados e dividem o plano em 4 regiões chamadas **quadrantes**, cuja identificação é feita conforme mostrado no plano cartesiano a seguir.

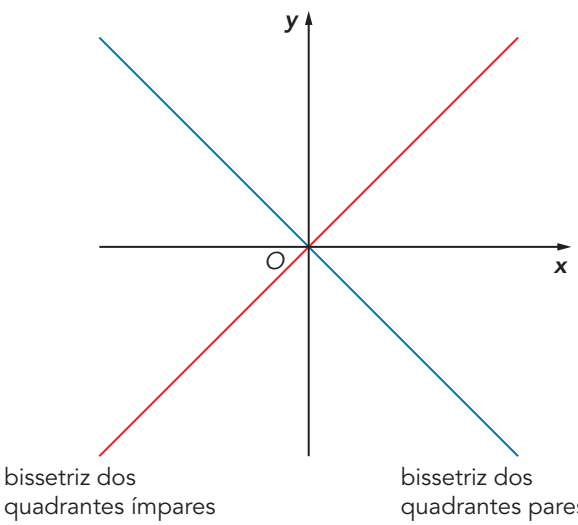


Banco de imagens/Arquivo da editora

- O sinal positivo ou negativo da abscissa e da ordenada depende do quadrante onde ele está localizado.
- Se o ponto P pertence ao eixo x, as coordenadas dele são $(a, 0)$, com $a \in \mathbb{R}$.
- Se o ponto P pertence ao eixo y, as coordenadas dele são $(0, b)$, com $b \in \mathbb{R}$.
- A reta que passa pela origem, formando um ângulo de medida de abertura 45° no sentido anti-horário, no caso dos quadrantes ímpares, e 135° no mesmo sentido, no caso dos quadrantes pares, com o eixo das abscissas, é chamada **bissetriz do quadrante**, por dividir o quadrante ao meio. Assim, podemos representar a bissetriz dos quadrantes pares e a bissetriz dos quadrantes ímpares conforme a imagem a seguir.

Fique atento

O ponto $O(0, 0)$ pertence aos 2 eixos.



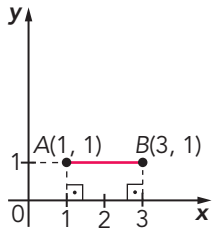
Banco de imagens/Arquivo da editora

Explorando a medida de distância entre 2 pontos

Dados 2 pontos A e B, a medida de distância entre eles, indicada por $d(A, B)$, é a medida de comprimento do segmento de reta de extremidades A e B.

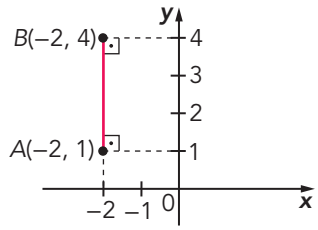
Acompanhe os exemplos a seguir.

a)



$d(A, B) = |3 - 1| = 2$

b)



$d(A, B) = |4 - 1| = 3$

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

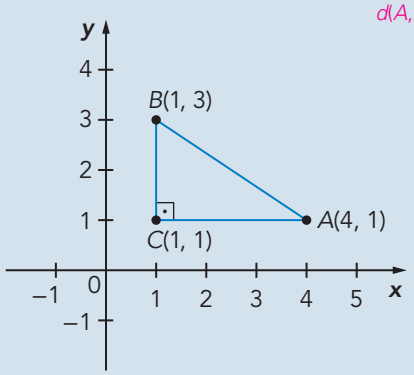
Explore para descobrir

Não escreva no livro

Considere um triângulo ABC que é retângulo em C e cujas coordenadas dos vértices são $A(4, 1)$, $B(1, 3)$ e $C(1, 1)$.

1. Determine no caderno a medida de comprimento dos catetos do triângulo retângulo.

$d(A, C) = 4 - 1 = 3$; $d(B, C) = 3 - 1 = 2$.

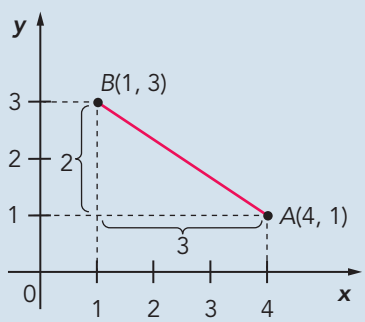


Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Agora, determine a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo.

$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow (AB)^2 = 13 \Rightarrow (AB) = \sqrt{13}$

3. Considere o segmento de reta $\overline{AB}$, com $A(4, 1)$ e $B(1, 3)$, representado em um plano cartesiano. Calcule no caderno a medida de distância entre os pontos A e B. $(AB)^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$

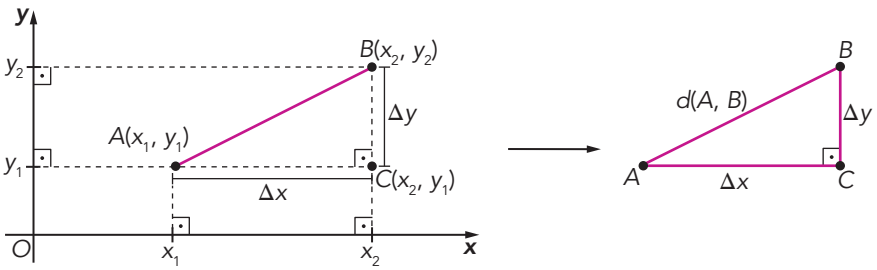


Banco de imagens/Arquivo da editora

Formalizando a medida de distância entre 2 pontos

É possível determinar uma expressão que indica a medida de distância entre quaisquer pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Como sempre podemos representar um triângulo ABC que é retângulo em C, o teorema de Pitágoras pode ser usado para esse cálculo.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora



Fique atento

$$\Delta x = |x_2 - x_1|$$
$$\Delta y = |y_2 - y_1|$$

Perceba que, no triângulo retângulo, as medidas $d(A, B)$, Δx e Δy devem ser positivas, uma vez que correspondem às medidas de comprimento dos lados do triângulo.

Assim:

$$[d(A, B)]^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Concluímos, então, que a medida de distância entre 2 pontos A e B quaisquer do plano, tal que $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Atividades resolvidas

1. Um ponto $P(a, 2)$ é equidistante dos pontos $A(3, 1)$ e $B(2, 4)$. Calcule a abscissa do ponto P.

Resolução

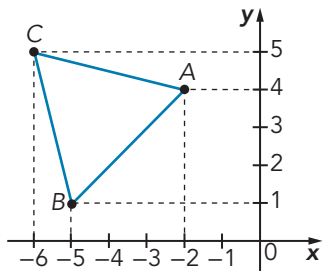
Como P é equidistante de A e de B, devemos ter:

$$d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow \sqrt{(3 - a)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{(2 - a)^2 + (4 - 2)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(3 - a)^2 + 1} = \sqrt{(2 - a)^2 + 4} \Rightarrow (3 - a)^2 + 1 = (2 - a)^2 + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9 - 6a + \cancel{a^2} + 1 = 4 - 4a + \cancel{a^2} + 4 \Rightarrow -6a + 4a = 4 + 4 - 9 - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2a = -2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

2. Demonstre que o triângulo com vértices $A(-2, 4)$, $B(-5, 1)$ e $C(-6, 5)$ é isósceles.

Resolução

Vamos calcular, então, as medidas de comprimento dos lados do triângulo ABC.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$d(A, B) = \sqrt{(-5 + 2)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(-6 + 2)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(-6 + 5)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

Como $d(A, C) = d(B, C)$, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AB}$.

Fique atento

Lembre-se de que um triângulo isósceles tem 2 lados com medidas de comprimento iguais.

2. Se $d(A, B) = 3$, então:
$\sqrt{(0 - a)^2 + (2 - 1)^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = 3 \Rightarrow a^2 + 1 = 9 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$

Atividades

Não escreva no livro

1. Calcule no caderno a medida de distância entre os pontos indicados em cada item.

a) $A(3, 7)$ e $B(1, 4)$. $d(A, B) = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

b) $E(3, -1)$ e $F(3, 5)$. $d(E, F) = \sqrt{0 + 36} = \sqrt{36} = 6$

c) $H(-2, -5)$ e $O(0, 0)$. $d(H, O) = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

d) $M(0, -2)$ e $N(\sqrt{5}, -2)$. $d(M, N) = \sqrt{5 + 0} = \sqrt{5}$

e) $P(3, -3)$ e $Q(-3, 3)$. $d(P, Q) = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

f) $C(-4, 0)$ e $D(0, 3)$. $d(C, D) = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

2. A medida de distância do ponto $A(a, 1)$ ao ponto $B(0, 2)$ é 3. Calcule a abscissa a.

3. Um ponto P pertence ao eixo das abscissas e é equidistante dos pontos $A(-1, 2)$ e $B(1, 4)$. Quais são as coordenadas do ponto P? $P(3, 0)$

4. A abscissa de um ponto P é -6 e a medida de distância de P ao ponto $Q(1, 3)$ é $\sqrt{74}$. Determine a ordenada do ponto P. -2 ou 8.

5. Reúna-se com um colega e, juntos, façam no caderno o que se pede nos itens a seguir.

a) Mostrem que um triângulo com vértices $A(0, 5)$, $B(3, -2)$ e $C(-3, -2)$ é isósceles. Depois, calculem a medida de perímetro dele. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual; medida de perímetro: $2\sqrt{58} + 6$.

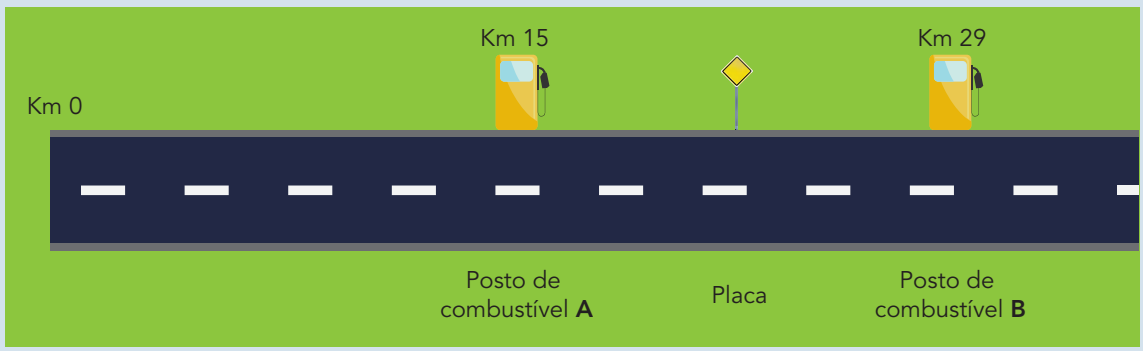
b) Um ponto $P(x, y)$ dista 3 unidades do ponto $A(2, 3)$. Escrevam uma equação que representa essa situação. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

Explorando o conceito de coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Explore para descobrir

Não escreva no livro

- Em uma estrada retilínea, um posto de combustível **A** está localizado no quilômetro 15. No quilômetro 29 da mesma estrada está localizado o posto de combustível **B**. Em qual quilômetro dessa estrada está localizada uma placa equidistante dos postos de combustível?

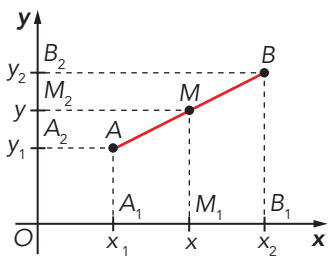


Banco de imagens/Arquivo da editora

$\frac{15 + 29}{2} = 22$; logo, a placa está localizada no quilômetro 22.

Formalizando o conceito de coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$ tal que $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são pontos distintos, vamos determinar as coordenadas de M, o ponto médio de $\overline{AB}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Considere:

- um segmento de reta com extremidades em $A(x_1, y_1)$ e em $B(x_2, y_2)$;
- o ponto $M(x, y)$, ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$.

Aplicando o teorema de Tales e considerando que $x_2 > x > x_1$ e $y_2 > y > y_1$, temos:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A_1M_1}{M_1B_1} \Rightarrow 1 = \frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow x - x_1 = x_2 - x \Rightarrow 2x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A_2M_2}{M_2B_2} \Rightarrow 1 = \frac{|y - y_1|}{|y_2 - y|} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \Rightarrow y - y_1 = y_2 - y \Rightarrow 2y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Então, podemos concluir que, dado um segmento de reta de extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$:

- a abscissa do ponto médio do segmento de reta é a média aritmética das abscissas das extremidades:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

- a ordenada do ponto médio do segmento de reta é a média aritmética das ordenadas das extremidades:

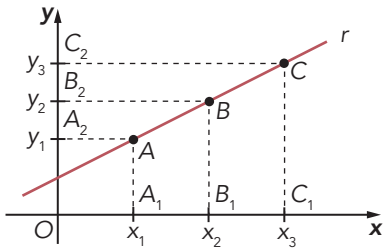
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Fique atento

- A demonstração independe da localização de A e de B nos quadrantes.
- Chamando de M o ponto médio de $\overline{AB}$, temos: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Condição de alinhamento de 3 pontos

Vamos considerar 3 pontos, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, alinhados.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \quad (\text{I})$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \quad (\text{II})$$

Comparando (I) e (II), temos:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}, \text{ com } x_3 - x_1 \neq 0 \text{ e } y_3 - y_1 \neq 0.$$

Assim,

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_1 = x_3y_2 - x_3y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + \cancel{x_1y_1} - x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_2 - \cancel{x_1y_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2 = 0$$

Perceba que o 1º termo dessa igualdade corresponde ao determinante D:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2 = 0$$

coluna das ordenadas dos pontos

coluna das abscissas dos pontos

Então, podemos dizer que, dados 3 pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, eles estão alinhados se, e somente se, $D = 0 \Rightarrow x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2 = 0$, com $x_3 - x_1 \neq 0$ e $y_3 - y_1 \neq 0$.

Professor, é importante mostrar aos estudantes que várias propriedades geométricas podem ser provadas por meio da Geometria analítica.

Atividades

Não escreva no livro

6. a) $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$;
$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-7 - 5}{2} = -6$; então, $M(2, -6)$.

6. Determine no caderno o ponto médio do segmento de reta de extremidades:

a) $A(1, -7)$ e $B(3, -5)$; **b)** $A(-1, 5)$ e $B(5, -2)$; **c)** $A(-4, -2)$ e $B(-2, -4)$.

7. Uma das extremidades de um segmento de reta é o ponto $A(-2, -2)$. Sabendo que $M(3, -2)$ é o ponto médio desse segmento de reta, calcule as coordenadas do ponto $B(x, y)$, que é a outra extremidade do segmento de reta.

7. Como $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, temos: $3 = \frac{-2 + x}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow -2 + x = 6 \Rightarrow x = 8$; $-2 = \frac{-2 + y}{2} \Rightarrow -2 + y = -4 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -2$; logo, $B(8, -2)$.

8. Verifique no caderno se os pontos:

a) $A(0, 2)$, $B(-3, 1)$ e $C(4, 5)$ estão alinhados; Não.

b) $A(-1, 3)$, $B(2, 4)$ e $C(-4, 10)$ podem ser os vértices de um mesmo triângulo. Sim.

9. No caderno, determine x de modo que os pontos $A(3, 5)$, $B(1, 3)$ e $C(x, 1)$ sejam os vértices de um triângulo. $x \neq -1$

10. Considerando uma reta r que contém os pontos $A(-1, -2)$ e $B(4, 2)$ e intersecta o eixo y no ponto P, determine no caderno as coordenadas do ponto P. $P\left(0, -\frac{6}{5}\right)$

11. A reta r contém os pontos $A(2, 0)$ e $B(0, 4)$ e a reta s contém os pontos $C(-4, 0)$ e $D(0, 2)$. O ponto de intersecção das 2 retas é $P(a, b)$. Nessas condições, calcule as coordenadas a e b do ponto P. $P\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$

6. b) $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$;
$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5 - 2}{2} = \frac{3}{2}$; então, $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

c) $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4 - 2}{2} = -3$
$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2 - 4}{2} = -3$; então, $M(-3, -3)$.

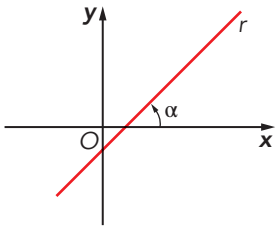
Equação da reta

Sabemos que por 2 pontos distintos passa uma única reta. A seguir, vamos estudar os elementos utilizados para determinar a equação de uma reta de acordo com a posição dela no plano cartesiano.

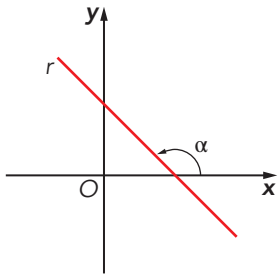
Inclinação de uma reta

Seja α a medida de abertura do ângulo entre a reta r e o eixo x. Essa medida de abertura α do ângulo é considerada do eixo x para a reta r, no sentido anti-horário, e denomina-se **inclinação** da reta r.

Quanto à inclinação de retas não paralelas ao eixo x, podemos ter:



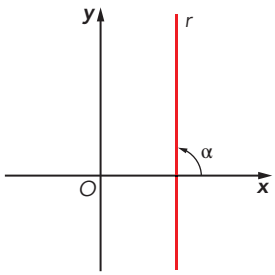
$0° < \alpha < 90°$



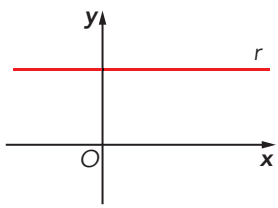
$90° < \alpha < 180°$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Além disso, a reta r pode ser paralela ao eixo x ou ao eixo y.



Se a reta r é paralela ao eixo y, então $\alpha = 90°$.



Se a reta r é paralela ao eixo x, dizemos que a inclinação da reta é 0, então $\alpha = 0°$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Entre as retas com inclinação de 90° está o eixo y. Analogamente, entre as retas de inclinação 0° está o eixo x.

Então, podemos dizer que, para cada reta r, a inclinação α é única e tal que $0° \leqslant \alpha < 180°$.

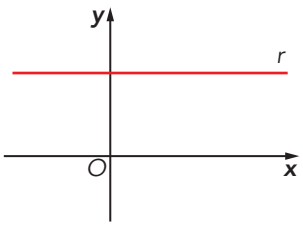
Coeficiente angular de uma reta

Vamos considerar uma reta r de inclinação α em relação ao eixo x. O **coeficiente angular** ou a **declividade** dessa reta r é o número real m que expressa a tangente trigonométrica de α, ou seja:

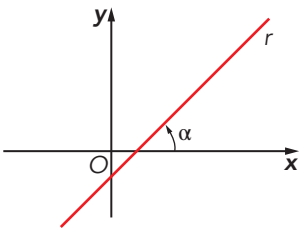
$$m = \tan \alpha$$

Vamos analisar todos os casos, considerando $0° \leqslant \alpha < 180°$:

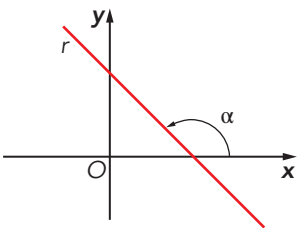
1º) Para $\alpha = 0°$, temos: $m = \tan \alpha = \tan 0° = 0$. Logo, o coeficiente angular é 0.



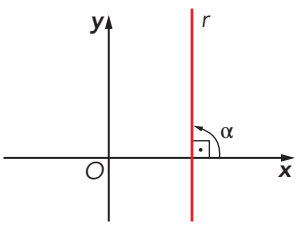
2º) Para $0° < \alpha < 90°$, temos: $\tan \alpha > 0 \Rightarrow m > 0$. Logo, o coeficiente angular é maior do que 0.



3º) Para $90° < \alpha < 180°$, temos: $\tan \alpha < 0 \Rightarrow m < 0$. Logo, o coeficiente angular é menor do que 0.



4º) Para $\alpha = 90°$, a tan α não é definida. Dizemos então que, quando $\alpha = 90°$, isto é, quando a reta é vertical, ela não tem coeficiente angular.



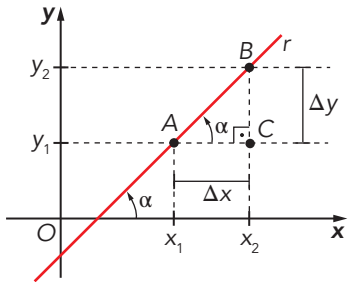
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

É possível calcular o coeficiente angular de uma reta com as coordenadas de 2 pontos que pertencem a ela.

Como para $\alpha = 0°$ (reta horizontal) o coeficiente angular é 0 e para $\alpha = 90°$ (reta vertical) não há coeficiente angular, vamos analisar os casos $0° < \alpha < 90°$ e $90° < \alpha < 180°$.

1º) $0° < \alpha < 90°$

Banco de imagens/Arquivo da editora



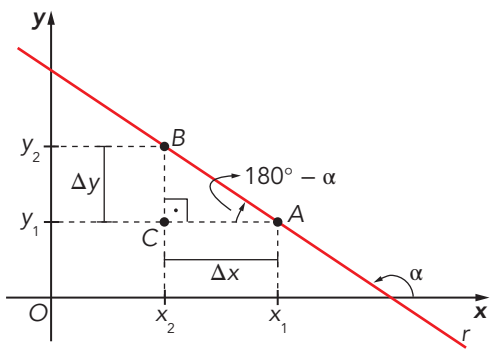
Considere a reta r, determinada por $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, e o ponto $C(x_2, y_1)$ não pertencente a r.
No triângulo retângulo ABC (com $\widehat{C}$ reto), temos:

$$\tan \alpha = \frac{d(C, B)}{d(A, C)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Então, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

2º) $90° < \alpha < 180°$

Banco de imagens/Arquivo da editora



Considere a reta r, determinada por $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, e o ponto $C(x_2, y_1)$ não pertencente a r.
No triângulo retângulo ABC (com $\widehat{C}$ reto), temos:

$$\tan (180° - \alpha) = \frac{d(C, B)}{d(C, A)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

Como $\tan (180° - \alpha) = -\tan \alpha$, temos:

$$-\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{-(x_1 - x_2)} \Rightarrow m = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Então, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Note que $x_2 \neq x_1$, já que r não é paralela ao eixo y. Podemos concluir que, se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são 2 pontos distintos quaisquer na reta r, que não é paralela ao eixo y ($x_1 \neq x_2$), o coeficiente angular m (ou a declividade m) de r é dado por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Assim, temos 2 maneiras de obter o coeficiente angular de uma reta, quando ele existir:

- conhecendo a inclinação α da reta, calculamos $m = \tan \alpha$;
- conhecendo 2 pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ da reta, calculamos $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Observação: agora você pode utilizar outro método para verificar o alinhamento de 3 pontos, comparando, 2 a 2, os coeficientes angulares das retas que passam pelos pontos. Por exemplo, na verificação do alinhamento de 3 pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, podemos verificar se ocorre $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$.

Fique atento

Perceba que podemos usar $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ou $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Atividades

Não escreva no livro

12. Determine no caderno coeficiente angular (ou declividade) da reta que contém os pontos:

a) $A(3, 2)$ e $B(-3, -1)$; $m = \frac{-1-2}{-3-3} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$

b) $A(2, -3)$ e $B(-4, 3)$; $m = \frac{3+3}{-4-2} = \frac{6}{-6} = -1$

c) $P_1(3, 2)$ e $P_2(3, -2)$; $m = \frac{-2-2}{3-3} = \frac{-4}{0}$. Não há coeficiente angular. A reta é paralela ao eixo y.

d) $P_1(-1, 4)$ e $P_2(3, 4)$; $m = \frac{4-4}{3+1} = \frac{0}{4} = 0$. O coeficiente angular é 0. A reta é paralela ao eixo x.

e) $P(5, 2)$ e $Q(-2, -3)$; $m = \frac{-3-2}{-2-5} = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$

f) $A(200, 100)$ e $B(300, 80)$. $m = \frac{80-100}{300-200} = \frac{-20}{100} = -\frac{1}{5}$

13. Sabendo que α é a inclinação de uma reta e m é a declividade (ou coeficiente angular) dela, copie e complete a tabela no caderno.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
m	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Não existe.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Reflita

Use régua e transferidor para representar, em um plano cartesiano, a reta r que contém o ponto (0, 5) e tem coeficiente angular $-\sqrt{3}$.

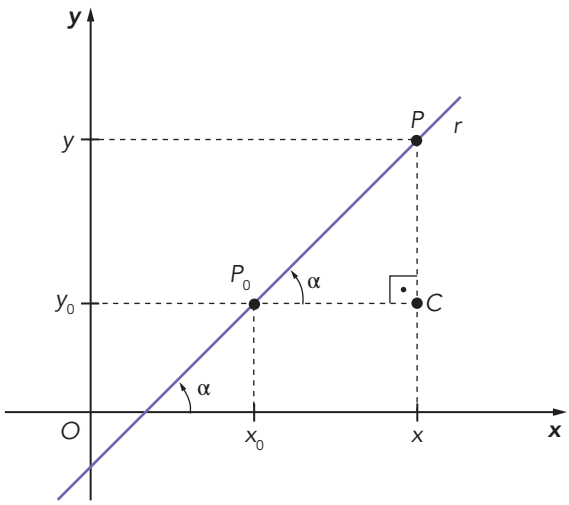
A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Equação fundamental da reta

Do postulado de determinação da reta, sabemos que:

> Dois pontos distintos determinam uma única reta que contém esses pontos, ou seja, dados 2 pontos distintos, existe uma única reta que contém os pontos.

Da mesma maneira, um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e o coeficiente angular m determinam uma única reta r. Considerando $P(x, y)$ um ponto genérico dessa reta, estudaremos que é possível obter uma equação de incógnitas x e y a partir dos números x_0, y_0 e m, chamada **equação fundamental da reta *r***.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

A **reta suporte** de um segmento de reta é a reta que contém esse segmento. Por exemplo, nesse plano cartesiano, r é a reta suporte do segmento de reta $\overline{P_0P}$.

Considerando os pontos $P(x, y)$ e $P_0(x_0, y_0)$ quaisquer da reta, o ponto $C(x, y_0)$, que não pertence à reta, e $\tan \alpha = m$, temos:

$$\tan \alpha = \frac{d(C, P)}{d(P_0, C)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y - y_0 = m(x - x_0)$$

Professor, ressalte aos estudantes que todas as formas de equações que estudaremos adiante podem ser obtidas a partir da equação fundamental da reta.

Perceba que:

- a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ independe de m ser positivo ou negativo e da localização do ponto P_0;
- se a reta é paralela ao eixo x, temos $m = 0$, e a equação da reta será da forma $y = y_0$;
- se a reta é paralela ao eixo y, todos os pontos da reta têm a mesma abscissa, e a equação será da forma $x = x_0$.

Atividades resolvidas

3. Determine a equação fundamental da reta que contém os pontos $A(-1, -2)$ e $B(5, 2)$.

Resolução

Calculamos o coeficiente angular da reta que contém os pontos $A(-1, -2)$ e $B(5, 2)$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 + 2}{5 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Usando o ponto $A(-1, -2)$, temos:

$$y - (-2) = \frac{2}{3}\left(x - (-1)\right) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}(x + 1)$$

A equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $y + 2 = \frac{2}{3}(x + 1)$.

Formas da equação da reta

A partir de agora, estudaremos 2 formas diferentes da equação da reta: a **equação reduzida da reta** e a **equação geral da reta**.

Equação reduzida da reta

Já estudamos que a equação fundamental da reta que contém um ponto $P(x_0, y_0)$, com coeficiente angular m, é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Suponha, então, que escolhamos um ponto ponto $A(0, n)$ da reta, que é o ponto em que ela intersecta o eixo y. Substituindo na equação fundamental da reta, temos:

$$y - n = m(x - 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - n = mx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{y = mx + n}$$

$y = mx + n$: n — coeficiente linear; m — coeficiente angular

O número real n, que é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo y, é chamado **coeficiente linear da reta**.

Essa forma é importante sobretudo porque permite obter o coeficiente angular de uma reta a partir de uma equação, além de expressar claramente a coordenada y em função de x. Essa equação é conhecida como **equação reduzida da reta**.

Fique atento

A equação reduzida de uma reta que passa pela origem é representada por $y = mx$.

Equação geral da reta

Vamos manipular algebricamente algumas equações da reta. Acompanhe os exemplos a seguir.

a) $y = -\frac{3}{4}x + 1$ pode ser dada por: $3x + 4y - 4 = 0$;

b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ pode ser dada por: $5x + 2y - 10 = 0$;

c) $x = 2$, que é paralela ao eixo y, pode ser dada por: $1x + 0y - 2 = 0$;

d) $y = 5$, que é paralela ao eixo x, pode ser dada por: $0x + 1y - 5 = 0$.

> **Fique atento**
>
> A mesma reta pode ter diversas representações na forma geral. Por exemplo, $x + 2y - 1 = 0$ também pode ser representada por $2x + 4y - 2 = 0$ e por infinitas equações equivalentes a essas.

É importante destacar que:

Toda reta do plano tem uma equação da forma $ax + by + c = 0$, na qual a, b e c são constantes, e a e b não são simultaneamente nulos. Essa equação é denominada **equação geral da reta**.

Professor, se julgar interessante, mostre aos estudantes que a equação geral da reta, dados 2 pontos distintos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ que pertencem a ela, pode ser obtida por meio da equação $D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Atividades resolvidas

4. Escreva, nas formas reduzida e geral, a equação da reta que contém o ponto (1, −6) e tem inclinação 135°.

Resolução

Pelos dados, é mais conveniente escrever inicialmente a equação na forma $(y - y_1) = m(x - x_1)$.

Como $\alpha = 135°$, temos: $m = \tan \alpha = \tan 135° = -1$.

E, como a reta contém o ponto (1, −6), temos: $y + 6 = -1(x - 1)$. Daí vem:

- forma reduzida: $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow y = -x + 1 - 6 \Rightarrow y = -x - 5$;
- forma geral: $y + 6 = -x + 1 \Rightarrow x + y - 1 + 6 = 0 \Rightarrow x + y + 5 = 0$.

Atividades

Não escreva no livro

14. Determine no caderno a equação da reta em cada caso.

a) A declividade é 4 e contém o ponto $A(2, -3)$.

b) A inclinação é 45° e contém o ponto $P(4, 1)$.

c) Contém o ponto $M(-2, -5)$ e tem coeficiente angular 0.

d) Contém o ponto $P(-3, -4)$ e é paralela ao eixo y.

e) Contém os pontos $A(3, 1)$ e $B(-5, 4)$.

f) Tem coeficiente angular $-\frac{1}{2}$ e contém o ponto $A(2, -3)$.

g) Contém o ponto $P(1, -7)$ e é paralela ao eixo x.

h) Contém os pontos $A(1, 1)$ e $B(-2, -2)$.

i) A inclinação é 150° e contém a origem do plano cartesiano.

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

15. Em cada caso, escreva no caderno uma equação geral da reta definida pelos pontos A e B.

a) $A(-1, 6)$ e $B(2, -3)$. $3x + y - 3 = 0$

b) $A(-1, 8)$ e $B(-5, -1)$. $9x - 4y + 41 = 0$

c) $A(5, 0)$ e $B(-1, -4)$. $2x - 3y - 10 = 0$

d) $A(3, 3)$ e $B(1, -5)$. $4x - y - 9 = 0$

16. Verifique se o ponto $P(2, 3)$ pertence à reta r que contém os pontos $A(1, 1)$ e $B(0, -3)$. $P \notin \overleftrightarrow{AB}$

17. Uma reta contém o ponto $P(-1, -5)$ e tem coeficiente angular $m = \frac{1}{2}$. Escreva no caderno a equação da reta na forma reduzida. $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{2}$

18. Passe a equação da reta para a forma indicada em cada caso:

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ para a forma reduzida; $y = -\frac{2x}{3} + 2$

b) $y - 6 = \frac{1}{2}(x + 4)$ para a forma geral. $x - 2y + 16 = 0$

19. Escreva no caderno a equação:

a) da reta bissetriz dos quadrantes ímpares; $y = x$ ou $x - y = 0$.

b) da reta bissetriz dos quadrantes pares; $y = -x$ ou $x + y = 0$.

c) do eixo x; $y = 0$

d) do eixo y. $x = 0$

20. Dada a reta que tem a equação $3x + 4y = 7$, determine no caderno o coeficiente angular dela. $-\frac{3}{4}$

21. Determine no caderno a equação reduzida da reta de coeficiente angular $m = -2$ e que intersecta o eixo y no ponto $A(0, -3)$. $y = -2x - 3$

22. Se os pontos $A(3, 5)$ e $B(-3, 8)$ determinam uma reta, calcule no caderno o valor de a para que o ponto $C(4, a)$ pertença a essa reta. $\frac{9}{2}$

Posições relativas de 2 retas no plano

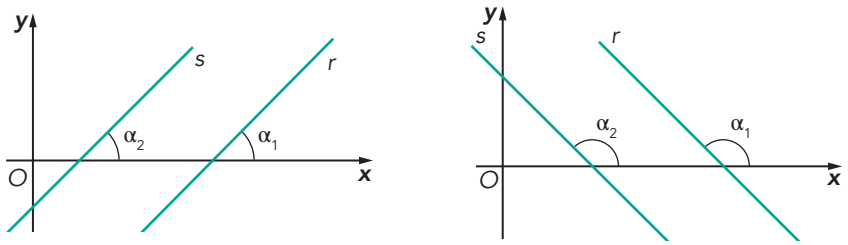
Se em um plano cartesiano estão contidas 2 retas, r e s, e elas forem distintas, então elas são paralelas ou concorrentes. Se as retas não forem distintas, então elas terão todos os pontos em comum e serão coincidentes.

Retas paralelas

Sendo α_1 a inclinação da reta r e α_2 a inclinação da reta s, temos:

$m_1 = m_2 \Rightarrow \tan \alpha_1 = \tan \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ (pois α_1 e α_2 estão entre 0° e 180°)

Se as inclinações são iguais, então as retas são paralelas ($r \parallel s$). Em cada plano cartesiano a seguir, analise as 2 retas distintas e não verticais que são paralelas.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

$\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \tan \alpha_1 = \tan \alpha_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow r \parallel s$

Professor, comente com os estudantes que o significado do símbolo $\Leftrightarrow$ na Matemática é "se, e somente se".

Duas retas distintas e não verticais, r e s, são paralelas se, e somente se, os coeficientes angulares delas são iguais ($m_1 = m_2$).

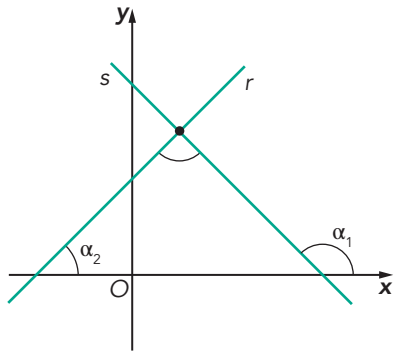
Fique atento

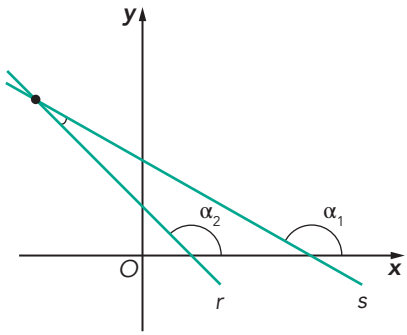
Se, além do mesmo coeficiente angular, as retas tiverem o mesmo coeficiente linear, então elas serão coincidentes.

Retas concorrentes

Se 2 retas do mesmo plano com coeficientes angulares diferentes não são paralelas, então elas são concorrentes.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora





$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow \tan \alpha_1 \neq \tan \alpha_2 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow r$ e s são concorrentes.

Duas retas distintas e não verticais, r e s, são concorrentes se, e somente se, os coeficientes angulares delas são diferentes ($m_1 \neq m_2$).

Atividades

Não escreva no livro

23. Qual é a posição da reta r, de equação $15x + 10y - 3 = 0$, em relação à reta s, de equação $9x + 6y - 1 = 0$? Paralela.

24. Sabendo que as retas de equações $(a + 3)x + 4y - 5 = 0$ e $x + ay + 1 = 0$ são paralelas, calcule no caderno o valor de a. -4 ou 1.

25. Em cada caso, determine no caderno a equação da reta que contém o ponto P e é paralela à reta da equação dada.

a) $P(1, 2)$ e $8x + 2y - 1 = 0$. $y = -4x + 6$ ou $4x + y - 6 = 0$.

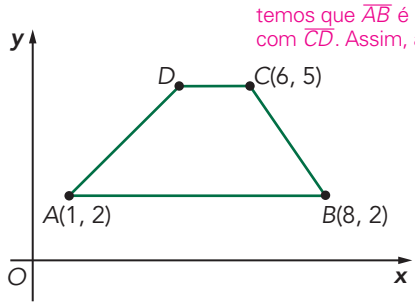
b) $P(-4, 2)$ e $y - 2 = 0$ $y = 2$ ou $y - 2 = 0$.

c) $P(-1, 3)$ e $2x - 5y + 7 = 0$ $y = \frac{2x}{5} + \frac{17}{5}$ ou $2x - 5y + 17 = 0$.

26. A seguir, representamos um trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Determine no caderno a equação da reta suporte da base menor do trapézio.

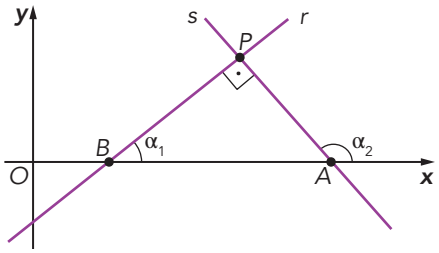
Pelos dados do enunciado, as bases do trapézio são $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Como A e B têm a mesma ordenada ($y_B = y_A = 2$), temos que $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo x, o que também ocorre com $\overline{CD}$. Assim, a equação da reta suporte de $\overline{CD}$ é $y = 5$.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Retas perpendiculares

No plano cartesiano a seguir estão representadas a reta r, de inclinação α_1, e a reta s, de inclinação α_2, de maneira que r e s são concorrentes e perpendiculares.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Pela Geometria plana, no triângulo APB temos:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90° \Rightarrow \tan \alpha_2 = \tan (\alpha_1 + 90°) = \frac{\operatorname{sen}\left(\alpha_1 + 90°\right)}{\cos\left(\alpha_1 + 90°\right)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 \cdot \cos 90° + \operatorname{sen} 90° \cdot \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1 \cdot \cos 90° - \operatorname{sen} \alpha_1 \cdot \operatorname{sen} 90°}$$

Fique atento

Na adição de ângulos, valem as fórmulas:

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

Como $\operatorname{sen} 90° = 1$ e $\cos 90° = 0$, temos:

$$\tan \alpha_2 = \frac{0 + \cos \alpha_1}{0 - \operatorname{sen} \alpha_1} \Rightarrow \tan \alpha_2 = -\frac{1}{\tan \alpha_1} \Rightarrow \tan \alpha_2 = -\frac{1}{\tan \alpha_1}$$

Sabendo que $\tan \alpha_2 = m_2$ e $\tan \alpha_1 = m_1$, temos que, se uma reta s, com coeficiente angular m_2, é perpendicular a uma reta r, com coeficiente angular m_1, então:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \text{ (com } m_1, m_2 \neq 0)$$

Reciprocamente, podemos provar que, dadas uma reta s, de coeficiente angular m_2, e uma reta r, de coeficiente angular m_1, se $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, então s é perpendicular a r.

Podemos então concluir que, dadas as retas r e s, de coeficientes angulares m_1 e m_2, temos:

$$r \perp s \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} \text{ ou } r \perp s \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1.$$

Atividades

Não escreva no livro

27. Determine no caderno a equação geral da reta que contém o ponto P e é perpendicular à reta r em cada um dos seguintes casos.

a) $P(2, 6)$ e equação de r: $2x - y + 3 = 0$. $x + 2y - 14 = 0$

b) $P(-3, 2)$ e equação de r: $3x + 4y - 4 = 0$. $4x - 3y + 18 = 0$

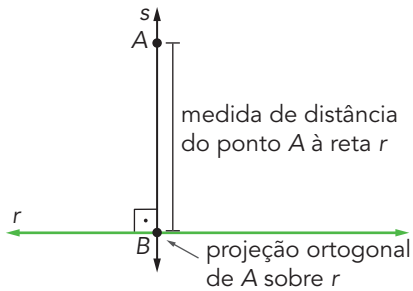
c) $P(3, 5)$ e equação de r: $y - 4 = 0$. $x = 3$

28. Determine no caderno as coordenadas do ponto N, simétrico ao ponto $M(2, 4)$ em relação à reta r, de equação $x - y - 6 = 0$. $N(10, -4)$

29. Sabendo que um triângulo tem como vértices os pontos $A(2, 1)$, $B(-2, -4)$ e $C(0, 2)$, determine no caderno a equação geral da reta suporte da altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo. $4x + 5y - 10 = 0$

Distância de um ponto a uma reta

Da Geometria plana, temos que a medida de distância de um ponto A a uma reta r é a medida de comprimento do segmento de reta de extremidades em A e em B, em que B é a projeção ortogonal de A sobre a reta r.



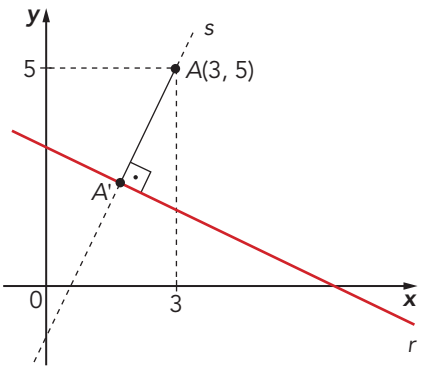
Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

A projeção ortogonal do ponto A sobre a reta r é um ponto que pertence à reta s, que, por sua vez, é perpendicular à reta r e contém o ponto A.

Acompanhe um exemplo: vamos determinar a medida de distância do ponto $A(3, 5)$ à reta r, de equação $x + 2y - 8 = 0$.

A distância do ponto A à reta r é a distância entre os pontos A e A', sendo A' a projeção ortogonal do ponto A sobre a reta r.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Coeficiente angular de r:

$$x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow 2y = -x + 8 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

- Equação da reta s:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$y - y_1 = m_2(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = 2(x - 3) \Rightarrow y - 5 = 2x - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - y - 1 = 0 \text{ (equação geral da reta)}$$

- As coordenadas de A' são aquelas do ponto de intersecção de r e s:

$$r: x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow x = -2y + 8 \ (\text{I})$$

$$s: 2x - y - 1 = 0 \ (\text{II})$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$2(-2y + 8) - y - 1 = 0 \Rightarrow -4y + 16 - y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y = -15 \Rightarrow y = 3$$

Substituindo $y = 3$ na equação (I), por exemplo, temos:

$$x = -2 \cdot 3 + 8 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, $A'(2, 3)$.

- Cálculo da medida de distância entre $A(3, 5)$ e $A'(2, 3)$:

$$d = \sqrt{(3 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

Logo, a medida de distância entre o ponto A e a reta r é $\sqrt{5}$.

Fórmula da medida de distância de um ponto a uma reta

Adotando o mesmo procedimento do exemplo anterior para um ponto $P(x_P, y_P)$ e uma reta r de equação $ax + by + c = 0$, obtemos uma fórmula que facilita o cálculo da medida de distância d de P a r.

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Reflita: Se $d = 0$, temos:

$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |ax_P + by_P + c| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow ax_P + by_P + c = 0$

Então, $P \in r$.

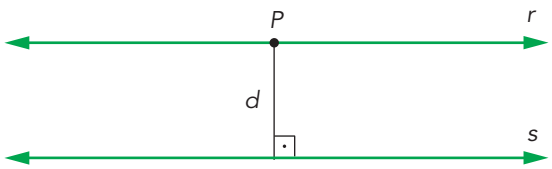
Não escreva no livro

Reflita

O que ocorre com um ponto P quando a medida de distância dele a uma reta r é $d = 0$?

Atividades resolvidas

5. Considere as retas r e s, de equações $2x + 3y - 10 = 0$ e $2x + 3y - 6 = 0$, respectivamente. Sabendo que essas retas são paralelas, calcule a medida de distância entre elas.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Resolução

Da Geometria plana, sabemos que a medida de distância entre 2 retas paralelas é igual à medida de distância de um ponto P qualquer de uma delas à outra reta.

- Cálculo das coordenadas de um ponto P qualquer da reta r:

$$2x + 3y - 10 = 0$$

Fazendo, arbitrariamente, $x = -1$, temos:

$$2(-1) + 3y - 10 = 0 \Rightarrow -2 + 3y - 10 = 0 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4$$

Portanto, $P(-1, 4)$.

- Cálculo da medida de distância de $P(-1, 4)$ à reta s: $2x + 3y - 6 = 0$.

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(-1) + 3 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{|4|}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

Logo, a medida de distância entre as retas é $\frac{4\sqrt{13}}{13}$.

Reflita

É possível demonstrar que, se 2 retas r: $ax + by + c_1 = 0$ e s: $ax + by + c_2 = 0$ são paralelas, então a medida de distância entre elas é dada por: $d_{r,s} = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Verifique essa fórmula com os dados da atividade resolvida **5**. $d_{r,s} = \frac{|(-10) - (-6)|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$

Atividades

Não escreva no livro

30. Nos seguintes casos, calcule no caderno a medida de distância entre o ponto P e a reta r:

a) $P(0, 3)$ e $4x + 3y + 1 = 0$. 2

b) $P(1, -5)$ e $3x - 4y - 2 = 0$. $\frac{21}{5}$

c) $P(3, -2)$ e $2x + y + 6 = 0$. $2\sqrt{5}$

d) $P(6, 4)$ e $y - 2 = 0$. 2

31. Dado o ponto $P(3, 2)$, determine no caderno a medida de distância entre P e a reta r nos seguintes casos:

a) r: $3x + 4y + 1 = 0$; $\frac{18}{5}$

b) r: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$; $\frac{7\sqrt{13}}{13}$

c) r: $y = 2x - 4$; 0 (então, $P \in r$)

d) r: $y = 6$; 4

e) r: $x = -1$; 4

f) r: $y - 4 = \frac{2}{5}(x - 3)$. $\frac{10\sqrt{29}}{29}$

32. Se a medida de distância entre o ponto $P(0, p)$ e a reta r, de equação $4x + 3y - 2 = 0$, é 2 unidades, então qual é o valor de p? 4 ou $-\frac{8}{3}$.

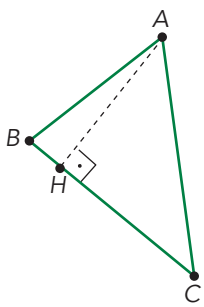
Texto para a próxima atividade.

Se os vértices de um triângulo são os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, então a medida de área S dessa região triangular é dada por:

$$S = \frac{1}{2}|D|, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } |D| \text{ é o módulo}$$

do determinante D.

33. Um triângulo tem os vértices nos pontos $A(1, 2)$, $B(-3, -1)$ e $C(2, -5)$. Faça, no caderno, o que se pede nos itens a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

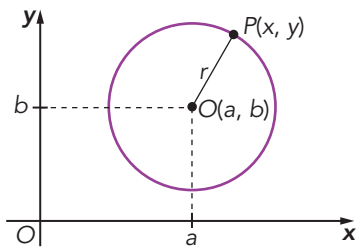
a) Utilizando a fórmula apresentada, calcule a medida de área da região limitada pelo triângulo ABC.
15,5 unidades de medida de área.

b) Calcule a medida de comprimento da altura do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$.
$\frac{31\sqrt{41}}{41}$ unidades de medida de comprimento.

Definição e equação da circunferência

Considere uma circunferência com centro $O(a, b)$ e a medida de comprimento do raio dessa circunferência, dada por r. Sabendo a circunferência de centro O é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do plano equidistantes de O, temos:

$$d(P, O) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Podemos considerar a equação da medida de comprimento do raio e, então, elevar ambos os membros da equação ao quadrado. Assim, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

(**equação reduzida da circunferência** de centro (a, b) e raio com medida de comprimento r)

Observação: no caso particular de o centro da circunferência estar na origem, ou seja, $a = b = 0$, a equação da circunferência de raio com medida de comprimento r é $x^2 + y^2 = r^2$.

Equação geral da circunferência

Ao desenvolver a equação reduzida da circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, obtemos o que se chama **equação geral da circunferência**:

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$, ou seja, $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$.

É comum as circunferências serem representadas pela equação geral delas, por exemplo, a circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Assim, temos 2 métodos diferentes que podem ser utilizados para obter a medida de comprimento do raio e as coordenadas do centro de uma circunferência a partir da equação geral dela.

Professor, ressalte a importância do método de completar os quadrados, que será utilizado no estudo da circunferência. Esse método evita a memorização de detalhes da forma geral da equação da circunferência.

Método de completar os quadrados

Nesse método, o objetivo é obter os quadrados perfeitos $(x - a)^2$ e $(y - b)^2$ a partir das informações apresentadas na equação geral.

Acompanhe como ele funciona com a equação geral $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ de uma circunferência.

- Agrupamos na equação geral os termos em x e os termos em y, isolando no outro membro o termo independente. É interessante deixar um espaço depois dos termos em x e dos termos em y, e 2 espaços no outro membro.

$$x^2 - 2x + ___ + y^2 + 4y + ___ = 4 + ___ + ___$$

- Adicionamos a ambos os termos da equação valores convenientes, de modo que os termos em x e os termos em y se transformam, cada qual, em um quadrado perfeito. Na prática, usamos os espaços vagos para escrever esses números. O número que completa o quadrado perfeito em x é o quadrado da metade do coeficiente de x, se o coeficiente de x^2 for 1. Assim, como o coeficiente de x é -2, metade de -2 é -1 e o quadrado de -1 é 1, adicionamos 1 em ambos os membros:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + ___ = 4 + 1 + ___$$

- Da mesma maneira, o número que completa o quadrado perfeito em y é o quadrado da metade do coeficiente de y, se o coeficiente de y^2 for 1. Assim, como o coeficiente de y é 4, metade de 4 é 2 e o quadrado de 2 é 4, adicionamos 4 em ambos os membros:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4 + 1 + 4$$

Assim, temos os seguintes quadrados perfeitos:

$$\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + \underbrace{y^2 + 4y + 4}_{(y+2)^2} = \underbrace{4 + 1 + 4}_{3^2}$$

- Portanto, a equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ representa uma circunferência de centro $(1, -2)$ e raio de medida de comprimento 3.

Observação: se os coeficientes de x^2 e de y^2 não forem 1, basta dividir toda a equação geral por um número conveniente para torná-los iguais a 1.

Fique atento

Perceba que o método de completar quadrados é conveniente porque não exige a memorização da equação geral, oferecendo, ainda, a possibilidade de ser adotado em outras equações, e não só na da circunferência. Contudo, a escolha do método para resolver as atividades parte do critério de cada um.

Método da comparação

De acordo com esse método, devemos comparar os coeficientes dos termos das 2 equações: a equação geral de uma circunferência e a equação dada.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4$$

Assim:

$$-2a = -2 \Rightarrow a = 1$$

$$-2b = 4 \Rightarrow b = -2$$

$a^2 + b^2 - r^2 = -4 \Rightarrow 1^2 + (-2)^2 - r^2 = -4 \Rightarrow 1 + 4 - r^2 = -4 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 3$ (não existe raio com medida de comprimento negativa)

Então, o centro da circunferência é $(1, -2)$, e a medida de comprimento do raio é 3.

38. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 + 2y = 2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 2 + 1 + 1 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
É uma circunferência de centro $C(-1, -1)$, e a medida de comprimento do raio é geral de uma circunferência 2.

Atividades

Não escreva no livro

34. Escreva no caderno as coordenadas do centro da circunferência e a medida de comprimento do raio da circunferência representada pela equação em cada item.

a) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1$ $C(5, 4)$ e $r = 1$.

b) $(x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 5$ $C(-2, -6)$ e $r = \sqrt{5}$.

c) $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ $C(2, 0)$ e $r = 2$.

d) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$ $C(-3, 1)$ e $r = 4$.

e) $x^2 + (y - 4)^2 = 1$ $C(0, 4)$ e $r = 1$.

f) $x^2 + y^2 = 10$ $C(0, 0)$ e $r = \sqrt{10}$.

35. Determine no caderno uma equação da circunferência que tem:

a) centro em $C(2, 5)$ e medida de comprimento do raio igual a 3;
Centro $C(2, 5)$ e $r = 3$: $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$.

b) centro em $M(-1, -4)$ e medida de comprimento do raio igual a $\sqrt{2}$;
Centro $M(-1, -4)$ e $r = \sqrt{2}$: $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 2$.

c) centro em $Q(0, -2)$ e medida de comprimento do raio igual a 4;
Centro $Q(0, -2)$ e $r = 4$: $(x - 0)^2 + (y + 2)^2 = 16 \Rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 16$.

d) centro em $D(4, 0)$ e medida de comprimento do raio igual a 5.
Centro $D(4, 0)$ e $r = 5$: $(x - 4)^2 + (y - 0)^2 = 25 \Rightarrow (x - 4)^2 + y^2 = 25$.

36. Obtenha no caderno a medida de comprimento do raio e as coordenadas do centro da circunferência em cada item.

a) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 6 = 0$ $r = 4$ e $C(2, -3)$.

b) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ $r = 4$ e $C(3, 1)$.

c) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$ $r = 2$ e $C(2, 4)$.

d) $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 9 = 0$ $r = 7$ e $C(-6, 2)$.

e) $x^2 + y^2 + 8x + 11 = 0$ $r = \sqrt{5}$ e $C(-4, 0)$.

f) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$ $r = \sqrt{20}$ e $C(3, -4)$.

g) $x^2 + y^2 - 4y = 0$ $r = 2$ e $C(0, 2)$.

h) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ $r = \sqrt{2}$ e $C(1, 1)$.

37. Verifique no caderno quais das equações a seguir representam uma circunferência.
Alternativas **a** e **d**.

a) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + xy + 4x + 6y - 3 = 0$

c) $2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$

d) $3x^2 + 3y^2 - 12x - 15y - 6 = 0$

e) $4x^2 - 4y^2 = 0$

f) $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = -5$

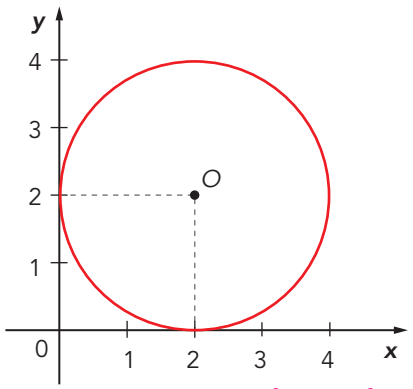
38. Verifique se a equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ representa uma circunferência. Em caso afirmativo, indique no caderno as coordenadas do centro e a medida de comprimento do raio da circunferência.

39. Os pontos $A(4, -2)$ e $B(2, 0)$ são as extremidades do diâmetro de uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio com medida de comprimento r. Determine no caderno uma equação dessa circunferência.
Exemplo de resposta: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$.

40. Quais são os valores que k pode assumir para que a equação $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 13k = 0$ represente uma circunferência? $\{k \in \mathbb{R} \mid k < 2\}$

41. Determine a equação de cada circunferência representada a seguir.

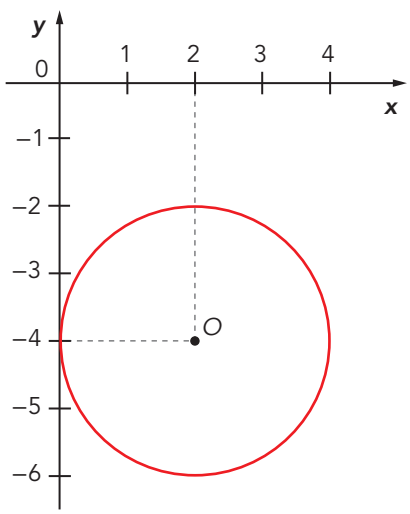
a)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplo de resposta: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

b)



Exemplo de resposta: $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4$.

Conexões

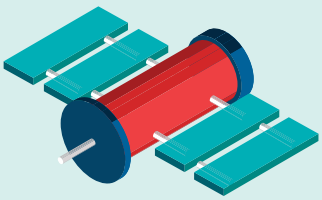
Triangulação no GPS

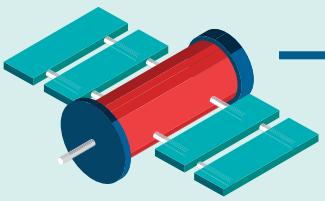
A Geometria analítica é utilizada para obter a localização com uma boa precisão. O Sistema de Posicionamento Global, também conhecido como GPS (do inglês, *Global Positioning System*), é um exemplo desse uso.

Macrovector/Shutterstock; Faber14/Shutterstock

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual. Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Ciência e Tecnologia* e *Educação para o Trânsito*.

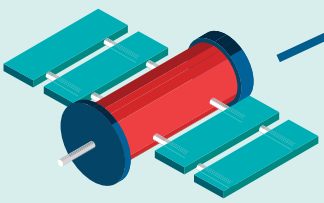
O GPS funciona por meio de uma rede de satélites que orbitam a Terra e transmitem sinais para receptores localizados na superfície terrestre.





A precisão do GPS depende de um princípio matemático conhecido como triangulação.

As imagens não estão representadas em proporção.



Exemplos de receptores são aqueles encontrados em carros e *smartphones*, por exemplo.

O método de triangulação utiliza a medida de distância entre o receptor e pelo menos 3 satélites para determinar a posição exata do receptor no planeta Terra.

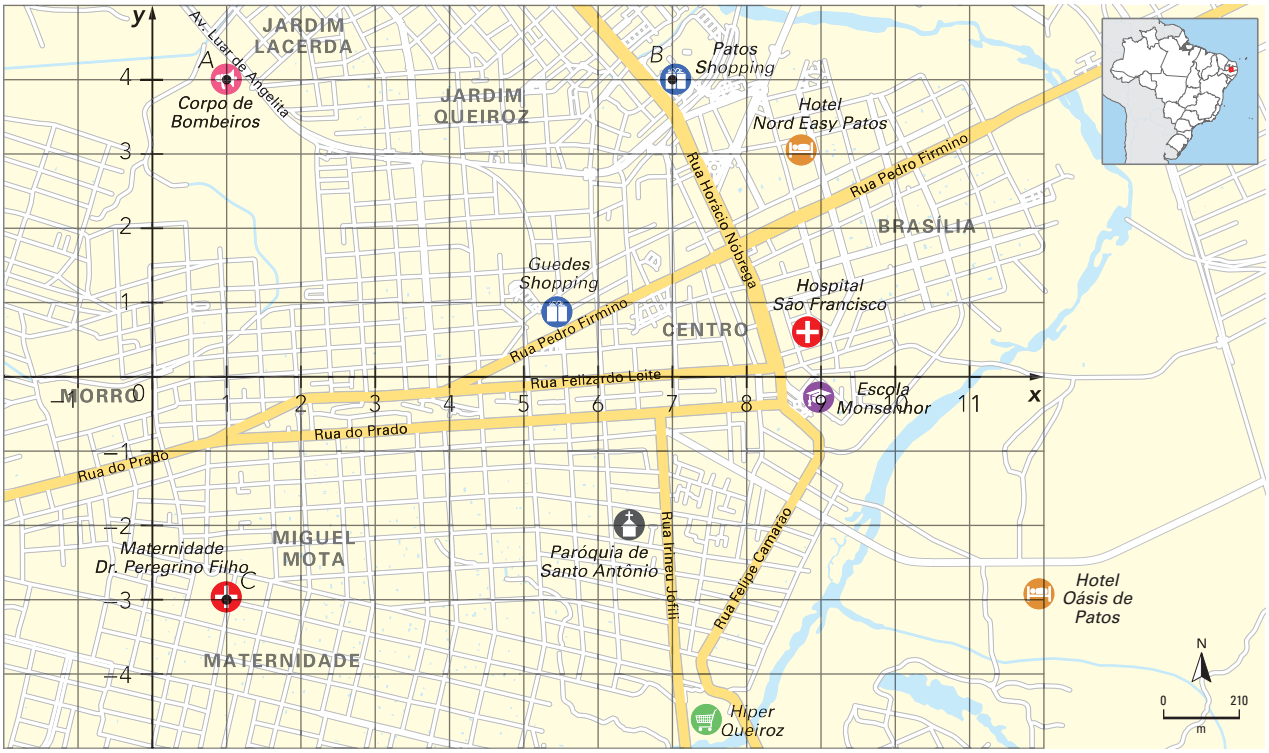
Fonte dos dados: SAMPAIO, Henrique. Como funciona e a qual importância do sistema GPS, que pode estar ameaçado? *Estadão*, São Paulo, 5 abr. 2024. Disponível em: https://tedit.net/bghug6. Acesso em: 3 set. 2024.

Conecte com o texto

1. $S = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|4 + 4 - 21 - 4 - 28 + 3| = 21$

$21 \cdot 39\,800{,}25 = 835\,805{,}25$; logo, $835\,805{,}25$ m^2.

1. Daniel mora na cidade de Patos, na Paraíba. Ele combinou de encontrar os amigos, mas não informou a localização exata dele. Daniel disse que está na região triangular que tem vértices no Corpo de bombeiros, no Patos Shopping e na Maternidade Dr. Peregrino Filho. Considerando que cada quadradinho da malha tem 39 800,25 m^2 de medida de área, qual é a medida de área da região em que os colegas precisariam procurá-lo?



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora; Banco de imagens/Arquivo de editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Pesquise e debata

2. Reúna-se com 3 colegas, e pesquisem em quais outras áreas a Geometria analítica é aplicada. Elaborem um cartaz ou uma apresentação utilizando tecnologias e apresentem para a turma.

Resposta pessoal.

Sobre o assunto

A matemática estadunidense Gladys Mae West (1930-) teve um papel indispensável no desenvolvimento do GPS. Desde 1956, trabalhou para a Marinha dos Estados Unidos, especializando-se em sistemas de larga escala para computadores e processamento de dados de satélites. Na década de 1980, West programou um computador para modelar o geoide da Terra com precisão, um feito essencial para o posterior desenvolvimento do GPS. O trabalho de West possibilitou, assim, avanços significativos na tecnologia de posicionamento global, o que a torna uma figura fundamental na criação do GPS que usamos atualmente.

Fonte dos dados: REIS, Laís. 'Mãe do GPS': Conheça a mulher negra por trás da invenção que mudou a tecnologia. *O Globo*, Rio de Janeiro, 27 mar. 2024. Disponível em: https://tedit.net/f2oqk3. Acesso em: 19 ago. 2024.

IanDagnall Computing/Alamy/Fotoarena

Gladys Mae West em Washington, D.C., nos Estados Unidos. Foto de 2018.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

CAPÍTULO 2

Transformações geométricas

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Se julgar necessário, retome com os estudantes a definição de cada transformação geométrica citada.

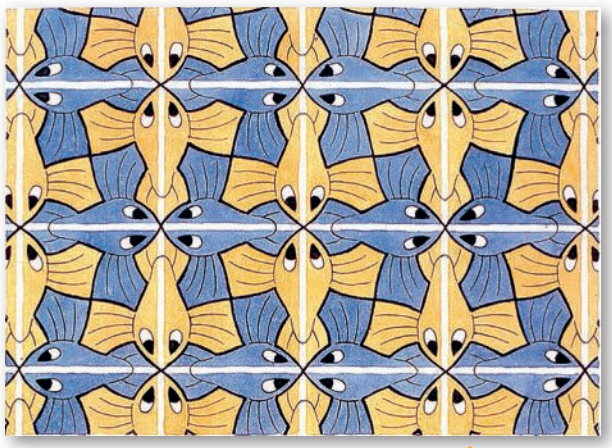
Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Situação-problema

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) é um dos mais famosos artistas gráficos do mundo. Escher foi um artista holandês e representava as obras dele em xilogravuras e litogravuras, utilizando, constantemente, formas geométricas e ilusões de ótica.

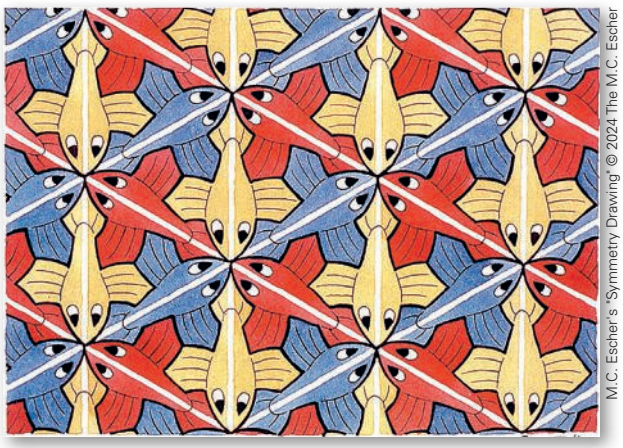
Nas imagens a seguir, é possível analisar 2 obras de Escher.

M.C. Escher's "Symmetry Drawing" © 2024 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved.



Simetria 122, de M. C. Escher, 1964 (aquarela de 35,7 cm × 24,5 cm).

M.C. Escher's "Symmetry Drawing" © 2024 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved.



Simetria 123, de M. C. Escher, 1964 (aquarela de 35,7 cm × 24,5 cm).

Responda no caderno aos itens a seguir. Exemplos de resposta:

a) Qual simetria ocorre entre 2 peixes que se encontram frente a frente na obra *Simetria 122*? Simetria de reflexão.

b) Qual simetria ocorre entre os 3 peixes (azul, amarelo e vermelho), cujas bocas se tocam, na obra *Simetria 123*? Simetria de rotação.

c) E qual simetria ocorre entre 2 peixes amarelos que se encontram em posições consecutivas, na mesma linha vertical, na obra *Simetria 123*? Simetria de translação.

d) É possível realizar uma composição de simetrias entre 2 peixes com cores distintas na obra *Simetria 122*? Sim, por exemplo, rotação e translação.

Sobre o assunto

Explore a galeria *on-line* que reúne a coleção de obras com temas matemáticos de Escher, disponível em: https://tedit.net/8wljim. Acesso em: 27 set. 2024.

Explorando as transformações geométricas isométricas

Podcast

Transcrição de áudio

Analise a foto apresentada.

O desenho formado no calçadão da praia de Copacabana tem origem portuguesa e representa as ondas do mar. No início do século XX, a calçada foi pavimentada com as sobras de pedras enviadas por Portugal. O padrão escolhido virou símbolo do bairro e, em 1970, o calçadão foi reformado e redesenhado por Roberto Burle Marx (1909-1994), arquiteto e paisagista brasileiro.

Fonte dos dados: BRISO, Caio Barretto. Calçadão de Copacabana foi o primeiro de pedras portuguesas no Rio. *O Globo*, 2015. Disponível em: https://tedit.net/j9wi0g. Acesso em: 13 ago. 2024.

Donatas Dabravolskas/Alamy/Fotoarena

Calçadão da praia de Copacabana, na cidade do Rio de Janeiro, RJ. Foto de 2021.

Sobre o assunto

Burle Marx ajudou a construir uma identidade própria para o paisagismo brasileiro, criando projetos com características distintas daquelas encontradas em jardins europeus. Além disso, ele valorizava muito a vegetação nativa de cada lugar, tendo descoberto mais de 40 novas espécies de plantas.

Para conhecer mais sobre ele, acesse a página do Museu de Arte Moderna do Rio de Janeiro, disponível em: https://tedit.net/0sg6f6. Acesso em: 4 set. 2024.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Analise a foto do calçadão de Copacabana e responda às perguntas no caderno.

1. Qual elemento se repete na formação do padrão? Descreva a formação desse padrão.

1. A onda do mar. Exemplo de resposta: Os semicírculos que representam as ondas do mar se repetem horizontalmente e verticalmente, formando um padrão por translação.

2. Quais transformações geométricas é possível identificar na imagem? Rotação e translação.

Formalizando as transformações geométricas isométricas

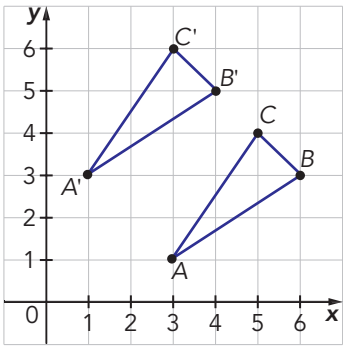
Professor, se julgar interessante, proponha um debate com a turma a respeito dos possíveis significados da palavra "isometria". Pergunte aos estudantes se já ouviram essa palavra antes e incentive que, juntos, eles construam o significado de maneira coletiva. Depois, retome a definição da palavra no contexto geométrico, apresentada no texto.

As transformações geométricas de figuras geométricas planas que preservam as medidas de comprimento dos lados e as medidas de abertura dos ângulos são chamadas **transformações geométricas isométricas** ou **isometrias**.

A **translação**, a **reflexão** e a **rotação** são exemplos de isometria.

Translação

Analise a seguir um triângulo ABC, de vértices $A(3, 1)$, $B(6, 3)$ e $C(5, 4)$. Considere a translação do $\triangle ABC$ em 2 unidades para a esquerda e 2 unidades para cima no plano cartesiano.



WYM Design/Arquivo da editora

Professor, se necessário, os estudantes podem representar os triângulos no plano cartesiano para obter as transformações isométricas citadas. Com isso, eles começam a explorar a relação das coordenadas dos vértices em cada tipo de transformação, que será formalizada adiante.

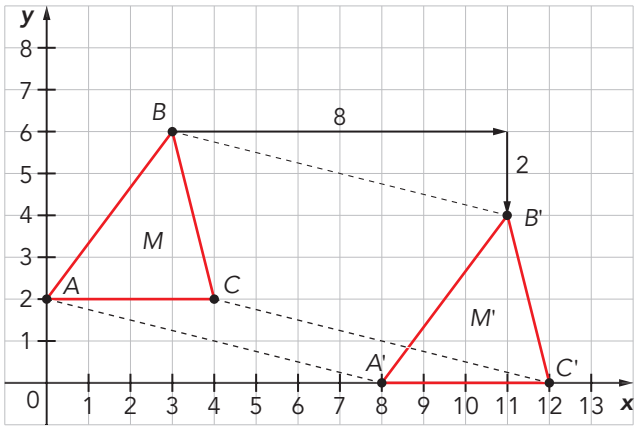
Não escreva no livro

Reflita

Quais seriam as coordenadas dos vértices do $\triangle A'B'C'$ se a translação do $\triangle ABC$ fosse de 3 unidades para a direita e 1 unidade para baixo?

$A'(6, 0)$; $B'(9, 2)$ e $C'(8, 3)$.

Agora, analise a seguir o polígono M' obtido da translação do polígono M.



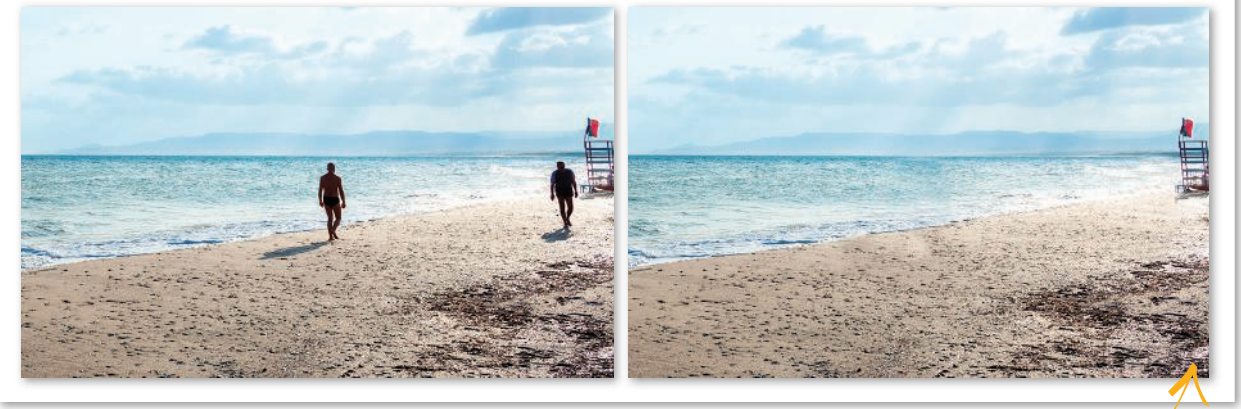
Banco de imagens/Arquivo da editora

Reflita

Nessa translação, qual é a relação entre as abscissas dos vértices correspondentes dos polígonos M e M'? E qual é a relação entre as ordenadas dos vértices correspondentes?

Coordenadas dos vértices do polígono M: $A(0, 2)$, $B(3, 6)$ e $C(4, 2)$.
Coordenadas dos vértices do polígono M': $A'(8, 0)$, $B'(11, 4)$ e $C'(12, 0)$.

As abscissas dos vértices do polígono M' equivalem às abscissas dos vértices correspondentes do polígono M adicionadas em 8 unidades. As ordenadas dos vértices do polígono M' referem-se às ordenadas dos vértices correspondentes do polígono M subtraídas de 2 unidades.



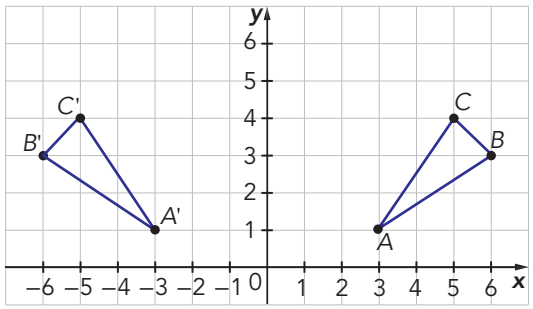
Fotos: Francesco Maltinti/Shutterstock

Alguns aplicativos de edição de imagens permitem apagar elementos da foto substituindo os *pixels* desses elementos por cópias de outra parte da imagem. Essa cópia e o reposicionamento de parte da imagem são translações dos *pixels*.

Reflexão

Considere novamente o triângulo ABC, de vértices $A(3, 1)$, $B(6, 3)$ e $C(5, 4)$. Vamos analisar a reflexão do $\triangle ABC$ em relação ao eixo y.

WYM Design/Arquivo da editora



Não escreva no livro

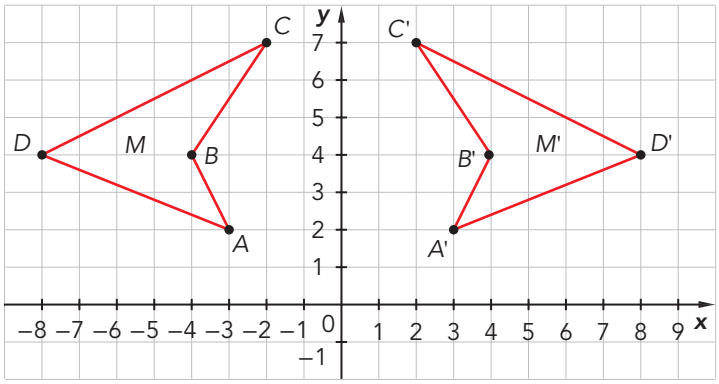
Reflita

Quais seriam as coordenadas dos vértices do $\triangle A'B'C'$ se a reflexão do $\triangle ABC$ fosse em relação ao eixo x?

$A'(3, -1)$; $B'(6, -3)$ e $C'(5, -4)$.

Agora, analise o polígono M' obtido da reflexão do polígono M em relação ao eixo y do plano cartesiano.

Banco de imagens/Arquivo da editora

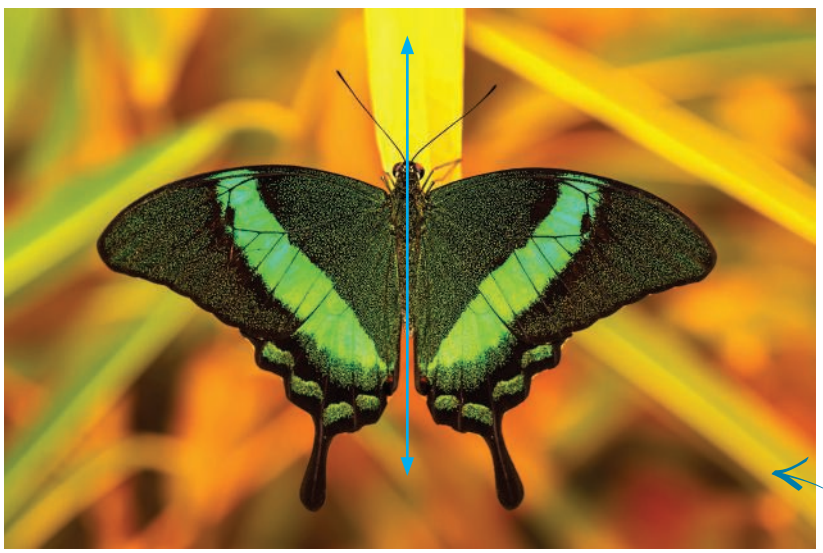


Coordenadas dos vértices do polígono M: $A(-3, 2)$, $B(-4, 4)$, $C(-2, 7)$ e $D(-8, 4)$.
Coordenadas dos vértices do polígono M': $A'(3, 2)$, $B'(4, 4)$, $C'(2, 7)$ e $D'(8, 4)$.

Reflita

Na reflexão em relação ao eixo y, qual é a relação entre as abscissas dos vértices correspondentes dos polígonos M e M'? E qual é a relação entre as ordenadas dos vértices correspondentes?

As abscissas dos vértices correspondentes dos polígonos M e M' têm o mesmo valor absoluto, com sinais opostos. As ordenadas dos vértices correspondentes dos polígonos M e M' são iguais.



Tiorina/Shutterstock

Analisando a foto da borboleta, podemos fazer aproximações e dizer que a imagem de um dos lados da foto é obtida refletindo a imagem do outro lado em relação à reta indicada.

Fique atento

Ao refletir um polígono em relação ao eixo y, dizemos que o polígono inicial e o polígono obtido são **simétricos** em relação ao eixo y, que é o **eixo de reflexão** ou **eixo de simetria** dessa transformação isométrica.

Dean Drobot/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

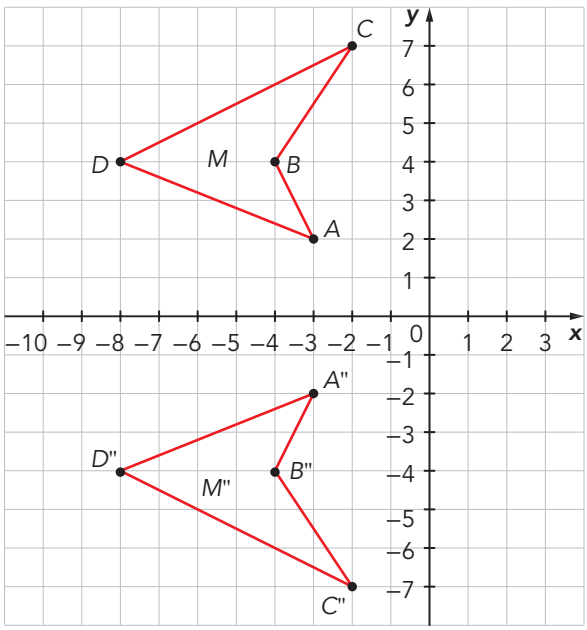
Sergey Eremin/Shutterstock

Quando tiramos uma *selfie* em um *smartphone* ou participamos de uma videochamada, nossa imagem aparece invertida na tela do aparelho. Mas, quando analisamos a foto que foi tirada na *selfie*, ela não está mais invertida. Essa inversão da imagem feita na tela, em relação à foto tirada, é obtida por uma reflexão de todos os *pixels* em relação a um eixo vertical do plano da foto.

Professor, se julgar necessário, relembre com os estudantes os casos de congruência de triângulos.

Agora, analise a seguir o polígono *M*" obtido da reflexão do mesmo polígono *M*, desta vez, em relação ao eixo *x* do plano cartesiano.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Não escreva no livro

Reflita

Na reflexão em relação ao eixo *x*, qual é a relação entre as abscissas e as ordenadas dos vértices correspondentes dos polígonos *M* e *M*"?

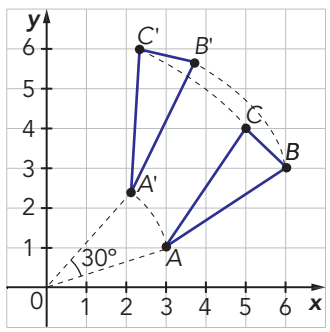
As abscissas dos vértices correspondentes dos polígonos *M* e *M*" são iguais, e as ordenadas dos vértices correspondentes dos polígonos *M* e *M*" têm o mesmo valor absoluto, com sinais opostos.

Coordenadas dos vértices do polígono *M*: *A*(−3, 2), *B*(−4, 4), *C*(−2, 7) e *D*(−8, 4).
Coordenadas dos vértices do polígono *M*": *A*"(−3, −2), *B*"(−4, −4), *C*"(−2, −7) e *D*"(−8, −4).

Rotação

Considere novamente o triângulo *ABC*, de vértices *A*(3, 1), *B*(6, 3) e *C*(5, 4). Analise a rotação do △*ABC*, de 30°, no sentido anti-horário e em torno da origem *O*(0, 0) do plano cartesiano.

WYM Design/Arquivo da editora



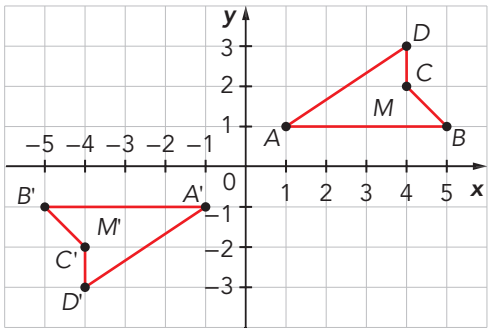
Reflita

Nessa e em cada transformação geométrica isométrica exemplificada anteriormente, podemos afirmar que o △*A'B'C'* é congruente ao △*ABC*? Por quê?

Sim, pois os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes também são congruentes.

Não escreva no livro

Analise o polígono M' obtido da rotação de 180° do polígono M, no sentido anti-horário e em torno da origem $O(0, 0)$ do plano cartesiano.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Coordenadas dos vértices do polígono M: $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(4, 2)$ e $D(4, 3)$.
Coordenadas dos vértices do polígono M': $A'(-1, -1)$, $B'(-5, -1)$, $C'(-4, -2)$ e $D'(-4, -3)$.

Reflita

Nessa rotação de 180°, no sentido anti-horário e em torno da origem $O(0, 0)$, qual é a relação entre as abscissas e as ordenadas dos vértices correspondentes dos polígonos M e M'? E se a mesma rotação de 180° fosse feita em torno da origem $O(0, 0)$, mas no sentido horário?

Tanto as abscissas quanto as ordenadas dos vértices correspondentes dos polígonos M e M' têm o mesmo valor absoluto com sinais opostos. No sentido horário, o resultado seria o mesmo, uma vez que o giro é de meia-volta.

Chase D'animulls/Shutterstock

Analisando a foto do cata-vento, podemos fazer aproximações e dizer que a imagem de cada hélice é obtida pela rotação de outra em relação ao centro do cata-vento.

As imagens não estão representadas em proporção.

Fotos: FJAH/Shutterstock; Sergey Eremin/Shutterstock

Ao girar uma foto na tela do *smartphone*, estamos fazendo uma rotação de todos os *pixels* em 90°, 180° e 270°, no sentido anti-horário e em torno do centro da imagem.

Tecnologias digitais

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Transformações geométricas isométricas

Vamos utilizar um *software* de Geometria dinâmica para construir transformações geométricas isométricas de polígonos no plano cartesiano.

Para as atividades propostas a seguir, sugerimos selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que permita a construção das representações propostas.

Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Translação

Professor, oriente os estudantes na escolha do *software on-line* ou aplicativo para as construções de modo que o programa escolhido apresente todas as funcionalidades necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir. Auxilie-os também nas explorações iniciais do programa e na identificação das ferramentas e das configurações disponíveis, e na maneira de acessá-las.

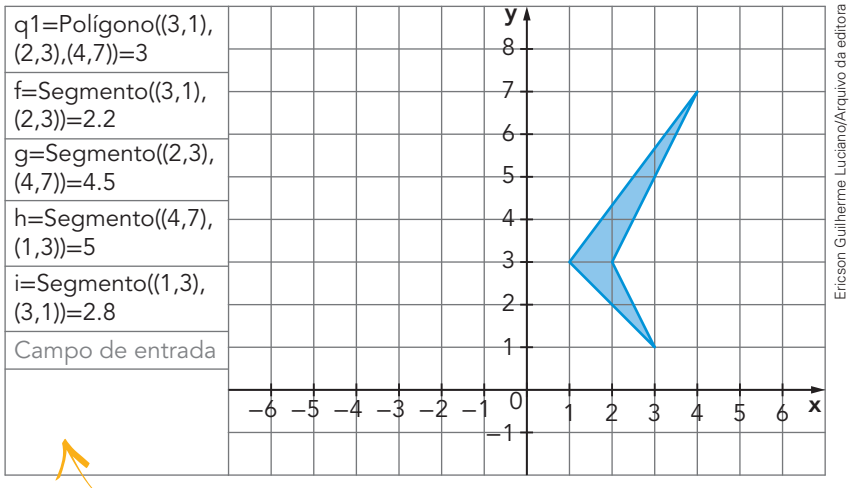
Vamos construir um polígono fornecendo as coordenadas dos vértices e, em seguida, fazer algumas translações em *a* unidades para a direita e *b* unidades para cima.

1º passo: Verifique se as configurações estão ajustadas para exibir a malha quadriculada e os eixos cartesianos.

2º passo: Construa o polígono *M*, que tem vértices nos pontos (3, 1), (2, 3), (4, 7) e (1, 3). Em alguns *softwares*, você pode fazer isso clicando nos pontos correspondentes do plano cartesiano utilizando uma ferramenta de construção de polígono. Alguns programas fornecem a possibilidade de indicar as coordenadas do polígono no campo de entrada utilizando o comando **Polígono((3,1),(2,3),(4,7),(1,3))**.

Fique atento

Lembre-se de adaptar as instruções de acordo com o *software* escolhido, já que as interfaces e os procedimentos podem variar.



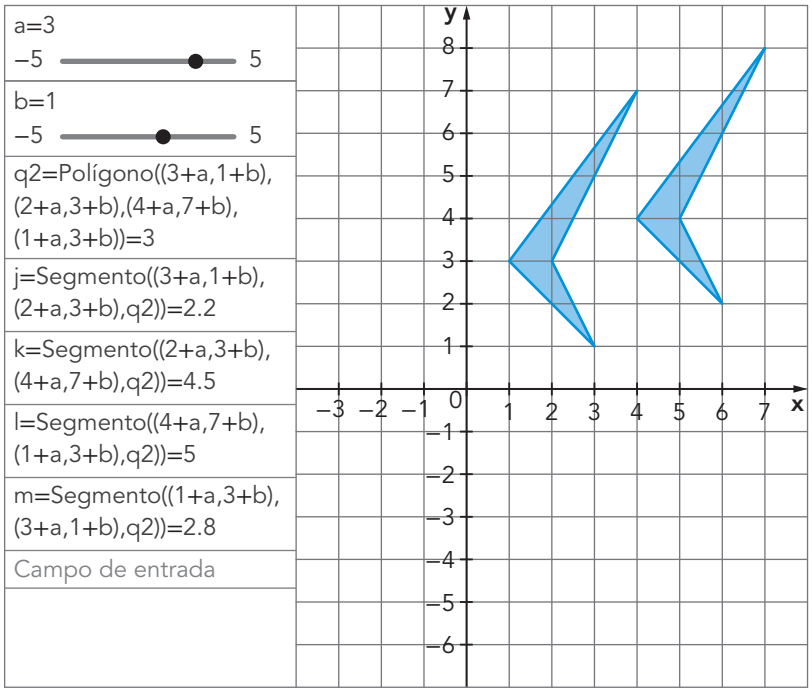
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Construção no *software* de Geometria dinâmica após o 2º passo.

3º passo: Considere as variáveis a e b para poder realizar as translações de acordo com esses parâmetros. Construa agora o polígono N, com vértices nos pontos $(3 + a, 1 + b)$, $(2 + a, 3 + b)$, $(4 + a, 7 + b)$ e $(1 + a, 3 + b)$.

Analogamente ao 2º passo, você também pode indicar no campo de entrada as coordenadas do polígono N usando o comando **Polígono((3+a,1+b),(2+a,3+b),(4+a,7+b),(1+a,3+b))**.

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora



Construção no *software* de Geometria dinâmica após o 3º passo.

Fique atento

Quando construímos os polígonos M e N, estamos identificando as coordenadas dos vértices do polígono inicial (polígono M) e da transformação geométrica dele (polígono N), que, neste caso, é uma translação de a unidades para a direita e b unidades para cima. No caso do exemplo, o *software* indicou $a = 3$ e $b = 1$ como valores iniciais das variáveis criadas.

1. Usando a construção que você fez, siga as instruções de cada item e, depois, converse com os colegas sobre o que você notou.

a) Para $a = 3$ e $b = 1$, qual foi a translação feita do polígono inicial? Translação de 3 unidades para a direita e 1 unidade para cima.

b) Altere apenas o valor de a e perceba o que acontece com o polígono transladado para $a > 0$, $a < 0$ e $a = 0$.

c) Agora, altere apenas o valor de b e perceba o que acontece com o polígono transladado para $b > 0$, $b < 0$ e $b = 0$.

d) Utilize as ferramentas de medir o comprimento dos lados e a abertura dos ângulos dos polígonos M e N. Depois, considere diferentes valores para a e b e perceba o que acontece com as medidas de comprimento dos lados e de abertura dos ângulos indicadas.

1. b) Exemplo de resposta: Com $a > 0$, o polígono inicial é transladado para a direita, com $a < 0$, o polígono é transladado para a esquerda e com $a = 0$, não há translação horizontal (nem para a direita, nem para a esquerda).

c) Exemplo de resposta: Com $b > 0$, o polígono inicial é transladado para cima, com $b < 0$, o polígono é transladado para baixo e com $b = 0$, não há translação vertical (nem para cima, nem para baixo).

d) Exemplo de resposta: As medidas de comprimento dos lados e as medidas de abertura dos ângulos não mudam ao se alterar os valores de a e b.

2. Salve a construção que você fez e abra um novo documento. Repita todos os passos indicados anteriormente, mas utilize outras coordenadas para os vértices do polígono M. Em seguida, responda no caderno qual deve ser o valor de a e de b quando o polígono M é transladado 6 unidades para a esquerda. Depois, faça a simulação dessa transformação no *software* construindo o polígono N. Verifique se o valor que você escreveu anteriormente está correto. Caso não esteja, analise qual foi o equívoco cometido. $a = -6$ e $b = 0$.

Reflexão

Vamos novamente construir um polígono fornecendo as coordenadas dos vértices e, em seguida, fazer as reflexões em relação ao eixo *x* e ao eixo *y* do plano cartesiano. Inicialmente, salve a construção que você fez e abra um novo documento.

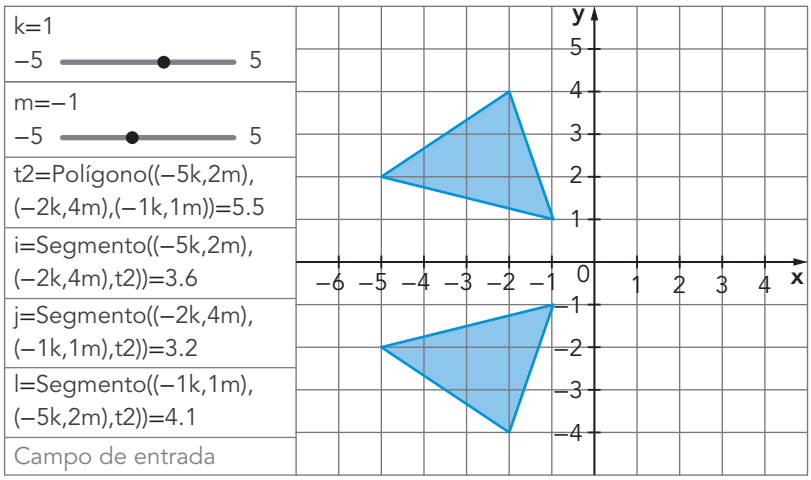
1º passo: Verifique se as configurações estão ajustadas para exibir a malha quadriculada e os eixos cartesianos.

2º passo: Construa o polígono *P*, que tem vértices nos pontos (–5, 2), (–2, 4) e (–1, 1). Lembre-se de que alguns programas também possibilitam indicar as coordenadas do polígono *P* no campo de entrada utilizando o comando **Polígono((–5,2),(–2,4),(–1,1))**.

3º passo: Considere as variáveis *k* e *m* para realizar as reflexões de acordo com esses parâmetros. Construa agora o polígono *Q*, com vértices nos pontos (–5*k*, 2*m*), (–2*k*, 4*m*) e (–1*k*, 1*m*).

Analogamente ao 2º passo, você também pode indicar as coordenadas do polígono *Q* no campo de entrada, usando o comando **Polígono((–5k,2m),(–2k,4m),(–1k,1m))**.

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora



Construção no *software* de Geometria dinâmica após o 3º passo.

3. Para realizar as reflexões do polígono *P* em relação aos eixos do plano cartesiano, podemos considerar $k = 1$ e $m = -1$, ou $k = -1$ e $m = 1$, no polígono *Q*.

a) Analise o polígono *Q* com $k = 1$ e $m = -1$. Comparando os polígonos *P* e *Q*, podemos dizer que *Q* é a reflexão de *P* em relação ao eixo *x* ou ao eixo *y*? Eixo *x*.

b) Considere agora $k = -1$ e $m = 1$. Nesse caso, a reflexão de *P* foi feita em relação a qual eixo do plano cartesiano? Eixo *y*.

4. Salve a construção que você fez e abra um novo documento. Repita todos os passos indicados anteriormente, mas utilize outras coordenadas para os vértices do polígono *P* e considere $k = 1$ e $m = -1$, ou $k = -1$ e $m = 1$. Escreva no caderno as coordenadas dos vértices do polígono *P* após ele ser refletido em relação ao eixo *x*. Depois, faça a simulação dessa transformação no *software* construindo o polígono *Q*. Verifique se as coordenadas que você escreveu anteriormente estão corretas. Caso não estejam, analise qual foi o equívoco cometido. Resposta pessoal.

Fique atento

Você acompanhará, mais adiante, o que acontece com essa construção para $k = -1$ e $m = -1$. Para outros valores de *k* e *m*, não temos transformações geométricas que preservem as medidas de comprimento dos lados e as medidas de abertura dos ângulos do polígono inicial.

Rotação

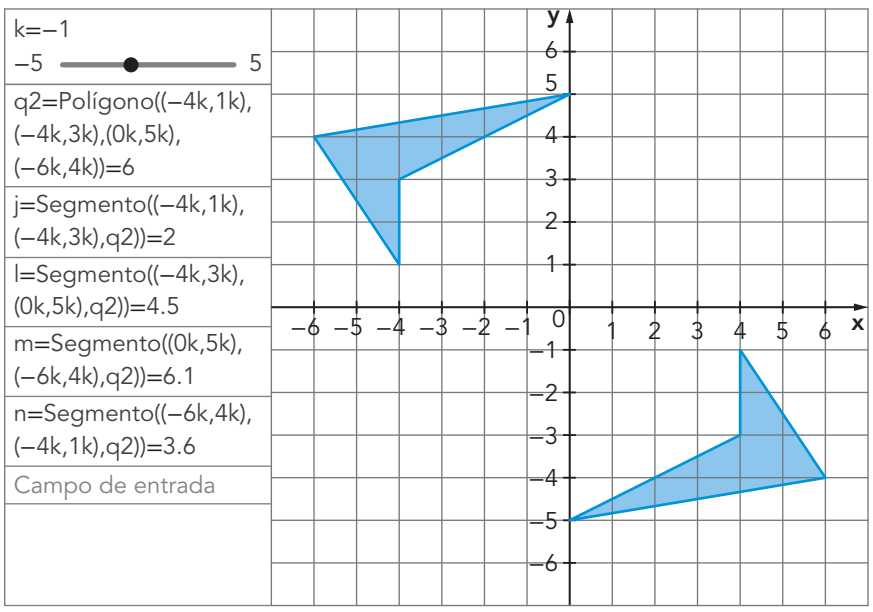
Agora, vamos construir um polígono fornecendo as coordenadas dos vértices, para depois realizar uma rotação de 180° desse polígono, no sentido anti-horário e em torno da origem *O*(0, 0) do plano cartesiano. Lembre-se de salvar as construções anteriores antes de começar um novo documento.

1º passo: Verifique se as configurações estão ajustadas para exibir a malha quadriculada e os eixos cartesianos.

2º passo: Construa o polígono *R*, que tem vértices nos pontos (4, 1), (−4, 3), (0, 5) e (−6, 4). Lembre-se de que alguns programas também possibilitam indicar as coordenadas do polígono no campo de entrada utilizando o comando **Polígono((−4,1),(−4,3),(0,5),(−6,4))**.

3º passo: Considere a variável *k* para realizar a rotação de acordo com esse parâmetro. Construa agora o polígono *S*, com vértices nos pontos (−5*k*, 1*k*), (−4*k*, 3*k*), (0*k*, 5*k*) e (−1*k*, 4*k*).

Analogamente ao 2º passo, você também pode indicar as coordenadas do polígono *S* no campo de entrada usando o comando **Polígono((−4k,1k),(−4k,3k),(0k,5k),(−6k,4k))**.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Construção no *software* de Geometria dinâmica após o 3º passo.

5. Exemplo de resposta: As medidas de comprimento dos lados correspondentes são iguais e as medidas de abertura dos ângulos correspondentes são iguais.

5. Para realizar a rotação de 180°, no sentido anti-horário e em torno da origem do plano cartesiano, vamos considerar $k = -1$ no polígono *S*. Utilize as ferramentas de medir o comprimento dos lados e a abertura dos ângulos dos polígonos *R* e *S*. O que você percebe ao comparar essas medidas?

6. Salve a construção que você fez e abra um novo documento. Repita todos os passos indicados anteriormente, mas utilize outras coordenadas para os vértices do polígono *R* e considere $k = -1$. Escreva no caderno as coordenadas dos vértices do polígono *S* após ele ser rotacionado 180°, no sentido anti-horário em relação à origem. Depois, faça a simulação dessa transformação no *software* construindo o polígono *S*. Verifique se as coordenadas que você escreveu anteriormente estão corretas. Caso não estejam, analise qual foi o equívoco cometido. Resposta pessoal.

Fique atento

Você acompanhará, mais adiante, o que acontece com a construção quando $k \neq -1$.

Explorando as transformações geométricas homotéticas

As fotos a seguir apresentam exemplos de fractais na natureza.

As imagens não estão representadas em proporção.

Paggi Eleanor/Shutterstock

A *Aloe vera*, também conhecida como babosa, é um exemplo de fractal na natureza em que é possível notar na foto que as partes menores (as folhas) se repetem, formando um padrão.

aaltair/Shutterstock

Interior da concha de um *Nautilus*.

Mas o que é um fractal?

Com origem no latim, *fractus* significa "fragmento, quebrado". Um fractal é um padrão que se repete com estruturas autossimilares em várias escalas, ou seja, há cópias exatas ou aproximadas do objeto em pedaços ampliados ou reduzidos.

Carrossel de imagens

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Analise as fotos e responda às perguntas no caderno.

1. Qual elemento se repete na formação do padrão na foto da babosa? Descreva a formação desse padrão.

As folhas da babosa. Exemplo de resposta: As folhas da babosa se mantêm com o mesmo formato, mas vão aumentando de tamanho e mudando de posição, formando uma espiral.

2. Analise agora a foto da concha. Qual elemento se repete na formação do padrão?

As estruturas da concha. Exemplo de resposta: Assim como na babosa, as estruturas da concha se mantêm com o mesmo formato, mas vão aumentando de tamanho e mudando de posição, formando uma espiral.

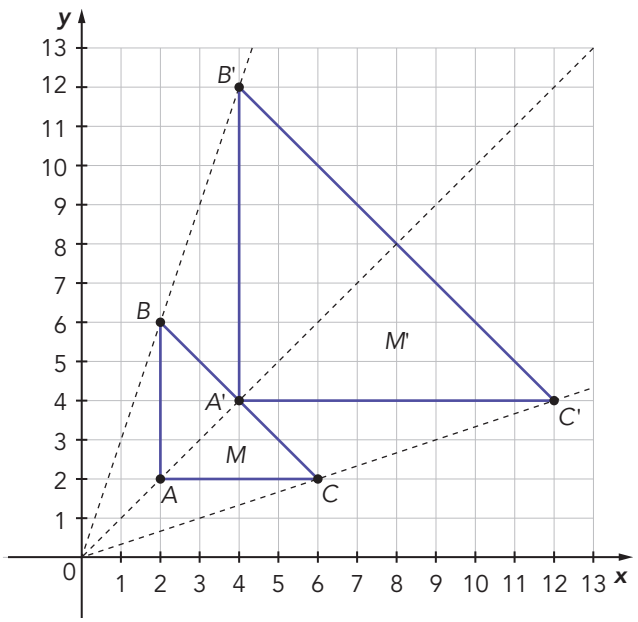
Formalizando as transformações geométricas homotéticas

Nem todas as transformações geométricas de figuras geométricas planas preservam as medidas de comprimento dos lados da figura. A **transformação homotética**, ou **homotetia**, é uma transformação geométrica que preserva a forma da figura inicial, bem como as medidas de abertura dos ângulos, mas não preserva as medidas de comprimento dos lados.

Fique atento

As ampliações e reduções de figuras planas que você estudou no Ensino Fundamental são exemplos de transformações homotéticas.

Vamos agora analisar uma construção geométrica. O polígono *M*, representado a seguir, foi ampliado em 100%, gerando o polígono *M*'. Nesse novo polígono, as medidas de comprimento dos lados são o dobro das medidas de comprimento correspondentes aos lados no polígono *M*.



WYM Design/Arquivo da editora

Coordenadas dos vértices do polígono *M*: *A*(2, 2), *B*(2, 6) e *C*(6, 2).
Coordenadas dos vértices do polígono *M*': *A*'(4, 4), *B*'(4, 12) e *C*'(12, 4).

Geometricamente, para fazer essa transformação homotética do polígono *M*, fixamos um ponto *O* como **centro da homotetia** e representamos, a partir desse ponto, semirretas que têm origem em *O* e que passam pelos vértices do polígono *M*. Nesse caso, o ponto *O* escolhido é o ponto (0, 0), origem do plano cartesiano.

Então, o polígono M' é obtido fazendo-se:

- $OA' = 2 \cdot OA$;
- $OB' = 2 \cdot OB$;
- $OC' = 2 \cdot OC$.

Dizemos, nesse caso, que o polígono M' obtido é **homotético** ao polígono M, com **razão** $k = 2$.

Reflita

Não escreva no livro

Dados 2 polígonos homotéticos em um plano cartesiano, como podemos calcular a razão da homotetia? Essa razão pode ser igual a 0? Justifique sua resposta.

Exemplo de resposta: Dividindo a medida de comprimento de um dos lados do polígono obtido pela medida de comprimento do lado correspondente do polígono inicial. A razão não pode ser 0, pois, nesse caso, todos os pontos obtidos da homotetia dos vértices do polígono inicial seriam coincidentes e não haveria um polígono diferente.

Fire_dragon/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

Analisando a foto destas bonecas russas, também conhecidas como matrioscas, podemos fazer aproximações e deduzir que a imagem de cada boneca é obtida da imagem de outra por homotetia em relação ao ponto indicado.

Jota Buyinch Photo/Shutterstock

Quando ampliamos ou reduzimos a visualização de uma foto em um *smartphone*, estamos aplicando uma homotetia em todos os *pixels* da imagem.

Reflita

Podemos afirmar que 2 polígonos homotéticos são sempre semelhantes? Por quê?

Sim, pois os ângulos correspondentes são congruentes e as medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais (a razão entre as medidas de comprimento dos lados correspondentes é a razão da homotetia). Professor, se julgar necessário, relembre com os estudantes os casos de semelhança de triângulos.

Tecnologias digitais

Não escreva no livro

Transformações geométricas homotéticas

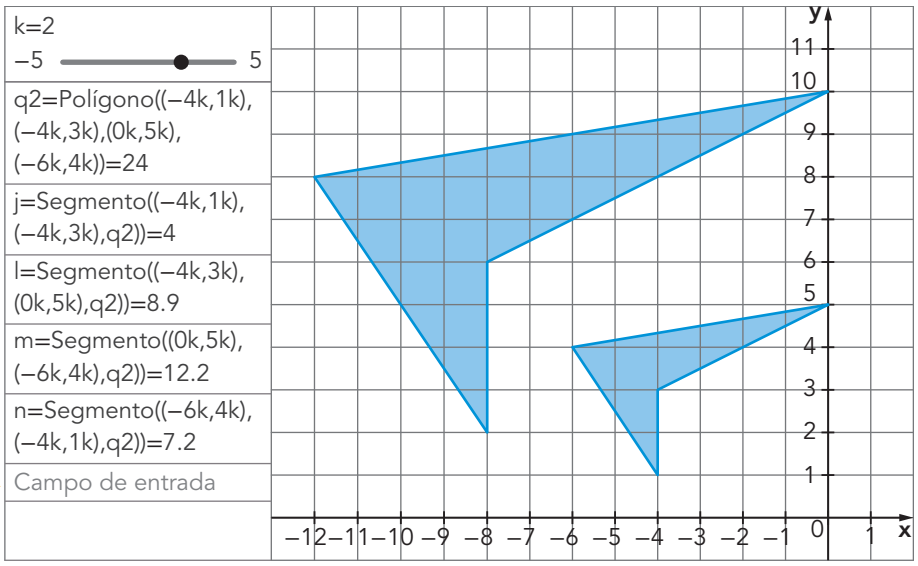
Para fazer a homotetia de um polígono com centro na origem $O(0, 0)$ do plano cartesiano, vamos usar a mesma estrutura de construção da rotação realizada na seção *Tecnologias digitais* anterior e alterar o valor de k, com $k \neq 0$.

1º passo: Utilizando o *software* de Geometria dinâmica de sua escolha, abra a construção que você salvou da rotação ou repita os passos para realizar uma nova construção.

2º passo: Considere $k = 2$.

1. b) Exemplo de resposta: Com $k > 0$, há a simulação da ampliação do polígono R; com $0 < k < 1$, ocorre a simulação da redução do polígono R e, com $k = 1$, os polígonos R e S são coincidentes.

1. c) Exemplo de resposta: Com $k < 0$, há a simulação da rotação do polígono R em 180°, no sentido anti-horário e em torno da origem do plano cartesiano; ocorre também a ampliação para $k < -1$ e a redução para $-1 < k < 0$.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Construção no *software* de Geometria dinâmica após o 2º passo.

1. d) Exemplo de resposta: As medidas de comprimento dos lados são multiplicadas por k, se $k > 0$, ou por $-k$, se $k < 0$, e as medidas de abertura dos ângulos não se alteram.

1. Considere a construção que você realizou.

a) Qual é a razão da homotetia? Razão 2.

b) Mude o valor de k e perceba o que acontece com o polígono S, que representa a homotetia do polígono R, para $k > 1$, $0 < k < 1$ e $k = 1$.

c) Mude o valor de k novamente e analise o que acontece com o polígono S para $k < 0$.

d) Utilize as ferramentas de medir o comprimento dos lados e a abertura dos ângulos dos polígonos R e S. Depois, considere diferentes valores para k e perceba o que acontece com as medidas de comprimento dos lados e de abertura dos ângulos indicadas.

2. Salve a construção que você fez e abra um novo documento. Repita todos os passos indicados anteriormente, mas utilize outras coordenadas para os vértices do polígono R. Em seguida, responda no caderno qual deve ser o valor de k quando é realizada uma homotetia de razão $\frac{1}{2}$ no polígono R. Depois, faça a simulação dessa transformação no *software* construindo o polígono S. Verifique se o valor que você escreveu anteriormente está correto. Caso não esteja, analise qual foi o equívoco cometido. Resposta pessoal.

1. f) Rotações de 90° de um azulejo no sentido horário ou anti-horário e em torno da quina do azulejo; reflexões do azulejo em relação a uma reta vertical e em relação a uma reta horizontal e translações do azulejo na vertical e na horizontal.

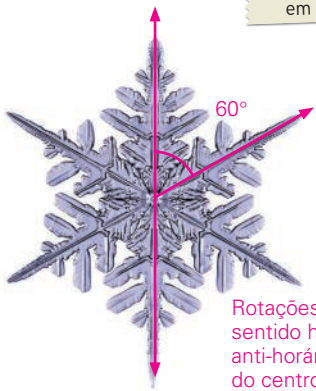
Não escreva no livro

1. Em alguns elementos da natureza ou em construções humanas, podemos fazer aproximações que nos permitem identificar transformações isométricas e transformações homotéticas. Junte-se com um colega, analisem as imagens a seguir, identifiquem possíveis aproximações para as transformações que vocês estudaram e depois escrevam-nas no caderno.

Exemplos de resposta:

As imagens não estão representadas em proporção.

a)



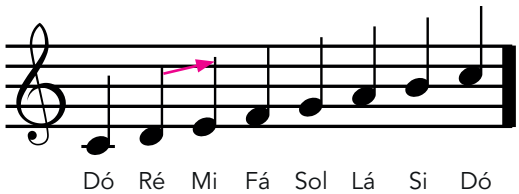
Yegor Larin/Shutterstock

Ilustração de floco de neve. Rotações de 60°, no sentido horário ou anti-horário e em torno do centro do floco de neve, e reflexão em relação a uma reta, por exemplo, reta vertical que passa pelo centro.

b)

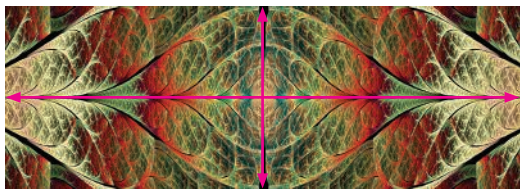
Oleg1824/Shutterstock

Violão. Reflexão em relação a uma reta horizontal que passa pelo centro da imagem.

c)

Olha Polishchuk/Shutterstock

Trecho de partitura e notas musicais. Translações de uma nota musical.

d)



PinkCat/Shutterstock

Fractal construído em computador. Reflexões em relação a uma reta horizontal que passa pelo centro da imagem e em relação a uma reta vertical que passa pelo centro da imagem.

e)

perfectlab/Shutterstock

Tapete. Reflexões em relação a uma reta horizontal que passa pelo centro da imagem e em relação a uma reta vertical que passa pelo centro da imagem.

f)

Pascale Gueret/Shutterstock

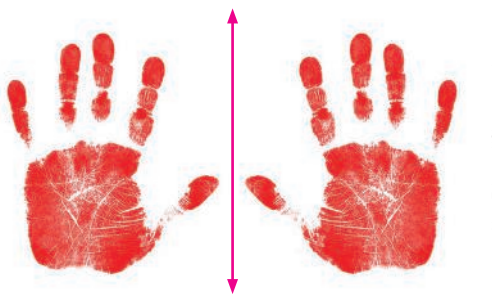
Parede de azulejos.

g)

Seyhan Ahen/Shutterstock

Bordado. Rotações de 90° no sentido horário ou anti-horário e em torno do centro do bordado.

h)



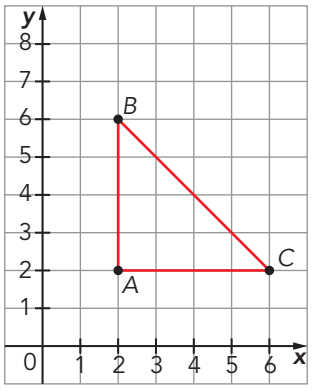
Neo Edmund/Shutterstock

Marcas feitas de tinta com as palmas das mãos em uma folha de papel. Reflexão de uma marca de mão com tinta em relação a uma reta vertical.

2. Escolha uma das imagens da atividade anterior e, em um plano cartesiano, faça uma representação geométrica de parte dela. Em seguida, represente as transformações geométricas isométricas desse recorte de modo a compor o restante da imagem. Resposta pessoal.

3. b) A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

3. Considere o triângulo *ABC* representado no plano cartesiano.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Nesse triângulo, será aplicada uma homotetia de centro na origem do plano cartesiano com razão $\frac{1}{2}$. Quais são as coordenadas dos vértices do triângulo obtido?

$A(1, 1)$, $B(1, 3)$ e $C(3, 1)$.

b) Agora, represente em um plano cartesiano o triângulo obtido por homotetia do triângulo *ABC*, com centro na origem do plano cartesiano e razão $-\frac{3}{2}$.

Texto para a próxima atividade.

O artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972) se notabilizou pelas obras em que costumava representar construções impossíveis, como o preenchimento irregular do plano, as explorações do infinito e as metamorfoses.

Nas obras de Escher, também é possível perceber diversos trabalhos envolvendo transformações geométricas.

No *site* oficial do artista (https://tedit.net/1om8dv; acesso em: 13 ago. 2024), pode-se conhecer as obras dele.

Analise a obra *Limite de círculo IV (céu e inferno)*.

Limite de círculo IV (céu e inferno), de Maurits Cornelis Escher, 1960 (xilogravura de 41,5 cm × 41,5 cm).

M.C. Escher's "Limite circular IV" © 2024 The M.C. Escher Company - The Netherlands. All rights reserved.

4. Analise a obra de arte criada por Escher. Quais medidas de abertura de rotação ele pode ter usado nas transformações geométricas dessa obra?

a) 45° e 135°.
b) 60° e 120°.
c) 120° e 120°.
d) 100° e 135°.
e) Apenas 72°.

Analisando a obra, verificamos que há na imagem 3 figuras claras dispostas de modo que cada uma corresponde a uma rotação de 120° (no sentido horário ou anti-horário) da outra em relação ao centro da imagem. Também há 3 figuras escuras com as mesmas rotações entre si. Alternativa **c**.

Sobre o assunto

Metamorfose é a mudança completa de forma, natureza ou estrutura, e essa mudança é representada por Escher nas obras que fazem parte da série *Metamorphose*.

Escher explora visualmente uma espécie de jogo de associação mental que costumava brincar quando criança.

Ele se deitava na cama e pensava em dois temas para os quais ele teria que criar uma conexão lógica.

[...]

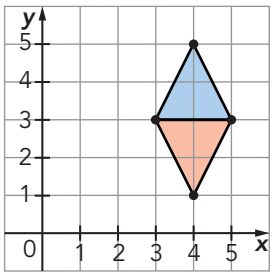
[Na obra *Metamorfose 2* (em inglês, *Metamorphosis 2*)] Escher representou essa cadeia de associações por meio do uso de formas geométricas (triângulos, quadrados, hexágonos, etc.) e figuras (lagartos, abelhas, pássaros, peças de xadrez, cidades) que, progressivamente, da esquerda para a direita, vão se transformando umas nas outras – movimento que justifica o título da série.

RONCOLATO, Murilo. As metamorfoses de Escher neste documentário interativo. *Nexo Jornal*, São Paulo, 29 set. 2018. Disponível em: https://tedit.net/t7b061. Acesso em: 13 ago. 2024.

8. De acordo com a figura e analisando as alternativas, podemos perceber que houve uma rotação de 90° no sentido horário, com o ponto *B* no centro da rotação e uma translação de 3 unidades para a direita do polígono *ABCDE*.
Alternativa **d**.

5. A figura geométrica plana representada no plano cartesiano a seguir será submetida às transformações indicadas.

Banco de imagens/Arquivo da editora



a) Figura inicial: (3, 3), (4, 1), (5, 3) e (4, 5). Figura final: (5, 3), (6, 1), (7, 3) e (5, 5).

1ª) Reflexão em relação ao eixo das abscissas.

2ª) Rotação de 180° no sentido anti-horário e em torno da origem do plano.

3ª) Translação em 2 unidades para a esquerda.

4ª) Reflexão em relação ao eixo das ordenadas.

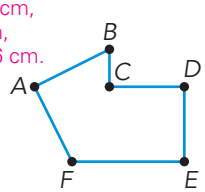
a) Quais são as coordenadas dos vértices da figura inicial e da figura final?

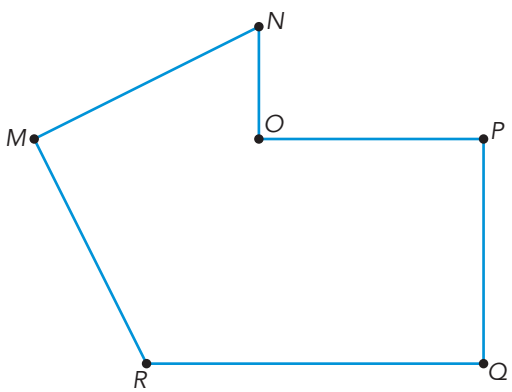
b) Seria possível obter a figura final usando uma única transformação isométrica da figura inicial? Se sim, qual?
Sim; uma translação em 2 unidades para a direita.

6. Os hexágonos *ABCDEF* e *MNOPQR* são semelhantes. Sabendo que a razão de homotetia é 3 e que $AB = 2{,}2$ cm, $BC = 1$ cm, $CD = 2$ cm, $DE = 2$ cm, $EF = 3$ cm e $FA = 2{,}2$ cm, determine a medida de comprimento de cada um dos lados do hexágono *MNOPQR*.

$MN = 6{,}6$ cm, $NO = 3$ cm, $OP = 6$ cm, $PQ = 6$ cm, $QR = 9$ cm e $MR = 6{,}6$ cm.

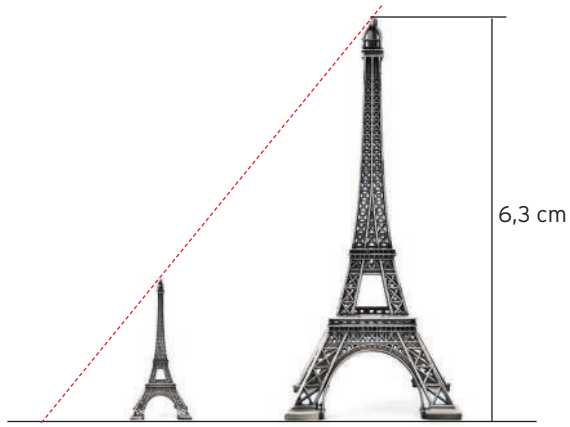
Banco de imagens/Arquivo da editora



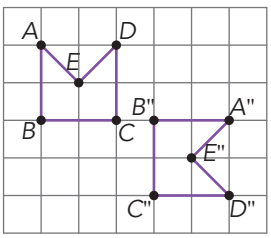


7. Duas miniaturas da Torre Eiffel, monumento símbolo da cidade de Paris (França), foram fotografadas e verificou-se que as imagens obtidas são homotéticas. Sabendo que a medida de comprimento da altura da miniatura maior é 6,3 cm e que a razão de homotetia é 2,8, qual é a medida de comprimento da altura da miniatura menor? 2,25 cm

Darrin Wassom/Shutterstock



8. Analise os polígonos *ABCDE* e *A"B"C"D"E"* na malha quadriculada a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

No caderno, indique a alternativa que apresenta a transformação geométrica que precisa ser realizada no polígono *ABCDE* para que ele fique na mesma posição do polígono *A"B"C"D"E"*. Alternativa **d**.

a) Apenas rotação de 90° no sentido horário, com centro de rotação no ponto *B*.

b) Rotação de 90° no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto *B*, e translação de 3 unidades para a direita.

c) Rotação de 90° no sentido horário, com centro de rotação no ponto *B*, e translação de 4 unidades para a direita.

d) Rotação de 90° no sentido horário, com centro de rotação no ponto *B*, e translação de 3 unidades para a direita.

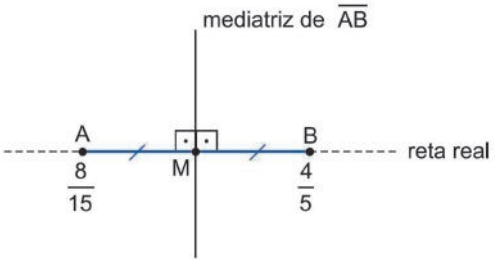
Na atividade **8**, comente com os estudantes que, para obter o polígono *A"B"C"D"E"*, também é possível, primeiro, fazer a translação do polígono *ABCDE* em 3 unidades para a direita e, depois, a rotação de 90° no sentido horário, considerando o centro de rotação no ponto *B*.

Enem e vestibulares

1. **(EEAR-SP)** Sejam $A(-4, -2)$, $B(1, 3)$ e $M(a, b)$ pontos do plano cartesiano. Se M é ponto médio de $\overline{AB}$ o valor de $a + b$ é: Alternativa **b**.

a) -2. **b)** -1. **c)** 1. **d)** 2.

2. **(Famema-SP)** A figura indica a posição dos pontos A e B sobre a reta dos números reais e a mediatriz de $\overline{AB}$, que intersecta a reta real no ponto M. Assim, temos que $\frac{8}{15}$ e $\frac{4}{5}$ são coordenadas, na reta real, dos pontos A e B, respectivamente.



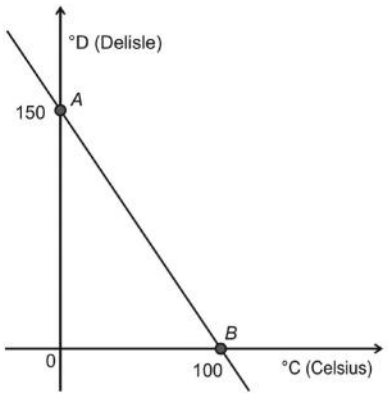
Reprodução/Famema-SP, 2023.

Nessas condições, a coordenada do ponto M, na reta real, é: Alternativa **d**.

a) $\frac{3}{5}$. **c)** $\frac{4}{3}$. **e)** $\frac{5}{3}$.

b) $\frac{4}{5}$. **d)** $\frac{2}{3}$.

3. **(Enem)** A escala de temperatura Delisle (°D), inventada no século XVIII pelo astrônomo francês Joseph-Nicholas Delisle, a partir da construção de um termômetro, foi utilizada na Rússia no século XIX. A relação entre as temperaturas na escala Celsius (°C) e na escala Delisle está representada no gráfico pela reta que passa pelos pontos A e B.



Reprodução/Enem, 2021.

Disponível em: www.profibus.com.br. Acesso em: 22 mar. 2013.

Qual é a relação algébrica entre as temperaturas nessas duas escalas? Alternativa **d**.

a) $2D + C = 100$

b) $2D + 3C = 150$

c) $3D + 2C = 300$

d) $2D + 3C = 300$

e) $3D + 2C = 450$

4. **(EEAR-SP)** Dadas as retas $r: 2x - 3y - 9 = 0$, $s: 8x - 12y + 7 = 0$ e $t: 3x + 2y - 1 = 0$, pode-se afirmar, corretamente, que: Alternativa **c**.

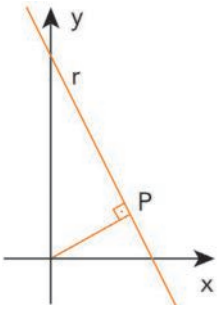
a) r e t são paralelas.

b) r e s são coincidentes.

c) s e t são perpendiculares.

d) r e s são perpendiculares.

5. **(Uerj)** [Analise] no plano cartesiano a seguir a reta r, de equação $y = 5 - 3x$, sendo $x \in \mathbb{R}$, e seu ponto P, que é o mais próximo da origem.



Reprodução/Uerj, 2023.

O ponto P tem a seguinte abscissa: Alternativa **b**.

a) 1,3. **c)** 1,7.

b) 1,5. **d)** 1,9.

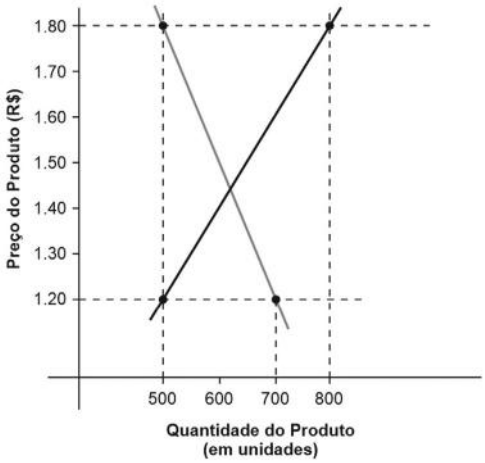
6. **(Fempar-PR)** Criada por Adam Smith, a Lei da Oferta e da Demanda tenta explicar o que determina o preço e a quantidade de um produto no mercado.

Em linhas gerais, ela estabelece que:

- quanto menor for o preço, maior será a procura (demanda) pelos consumidores; e
- quanto maior for o preço, maior será a oferta por parte de quem vende.

O Preço de Equilíbrio é o único preço em que as expectativas dos consumidores e dos vendedores concordam. É exatamente nesse valor que a quantidade demandada equivale à quantidade ofertada.

O gráfico a seguir ilustra as Curvas de Demanda e Oferta de certo produto além de informar as coordenadas cartesianas de pontos pertencentes a essas curvas.



Reprodução/Fempar, 2022.

Dado que essas curvas de demanda e oferta estão representadas por retas, é possível estabelecer as respectivas equações e, por meio de um sistema, encontrar o preço de equilíbrio, que vale Alternativa **d**.

a) R$ 1,41.
b) R$ 1,42.
c) R$ 1,43.
d) R$ 1,44.
e) R$ 1,45.

7. **(ESA-MG)** Em uma determinada aula de Geometria Analítica, uma candidata do Concurso da ESA, da área da saúde, deparou-se com a seguinte situação $x^2 + y^2 = 2x + 2y - 1$. Ao desenvolver essa igualdade a estudante obteve: Alternativa **d**.

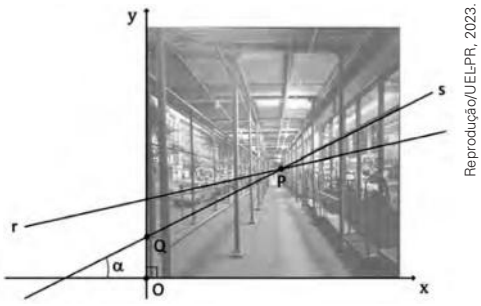
a) Uma circunferência centrada na origem.
b) Uma circunferência de centro –1 e –1 e raio 2.
c) Uma circunferência de centro –1 e –1 e raio $\sqrt{2}$.
d) Uma circunferência de centro 1 e 1 e raio 1.
e) Nenhuma das alternativas anteriores.

8. **(UEL-PR)** Leia o texto a seguir.

O que é a técnica do Ponto de Fuga? É o conhecimento de como representar a tridimensionalidade em um plano, por meio de uma referência no horizonte para fazer as linhas e construir a percepção de profundidade.

Adaptado de: vivadecora.com.br

Uma geômetra deseja estudar a obra *Supermarket*, de Richard Estes, que gera percepção visual de profundidade. Para este fim, utiliza duas retas perpendiculares x e y graduadas, de modo a estabelecer um sistema de coordenadas cartesianas, cuja origem O coincide com o canto inferior esquerdo da obra. Seja P o ponto em que as retas r e s se cruzam, conforme diagrama a seguir.

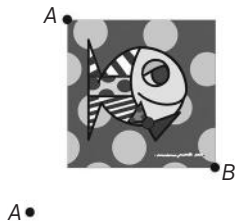


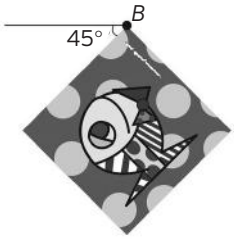
Reprodução/UEL-PR, 2023.

Admitindo que a reta r tem equação $16y = 3x + 80$, que a reta s passa pelo ponto $Q = \left(0, \frac{5}{2}\right)$ e sabendo que $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, [indique no caderno] a alternativa que apresenta, corretamente, as coordenadas do ponto P. Alternativa **b**.

a) (8, 3)
b) $\left(8, \frac{13}{2}\right)$
c) $\left(9, \frac{5}{2}\right)$
d) (10, 3)
e) $\left(10, \frac{13}{2}\right)$

9. **(Enem)** A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B. Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.





Reprodução/Enem, 2017.

Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°. A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de Alternativa **b**.

a) 90° no sentido horário.

b) 135° no sentido horário.

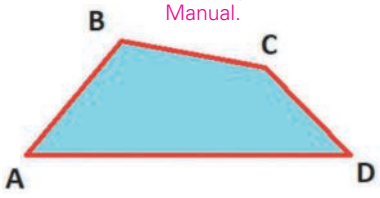
c) 180° no sentido anti-horário.

d) 270° no sentido anti-horário.

e) 315° no sentido horário.

10. (Uema) Dentre as funções de um profissional de topografia está o reconhecimento de áreas, a relação dessas áreas com polígonos, a localização de seus vértices e o cálculo de área.

A figura, a seguir, representa um esboço que um topógrafo fez de um terreno, representado por um quadrilátero, com vértices $A(3, 2)$, $B(5, 6)$, $C(11, 5)$ e $D(12, 2)$ em coordenadas cartesianas. As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.



Reprodução/Uema, 2020.

Com base nas informações dadas,

a) faça [no caderno] o esboço do quadrilátero *ABCD* que representa [o] formato do terreno. O esboço deve ser feito em um sistema de coordenadas no plano cartesiano.

b) calcule a área total do terreno.

11. (UFJF-MG) Considere as circunferências:

C_1: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ e

C_2: $(x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 4$

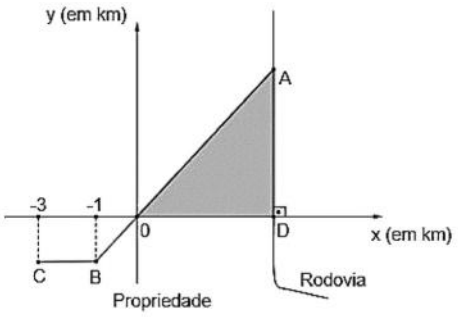
Determine a equação da reta que passa perpendicularmente pelo ponto médio do segmento de reta cujos extremos são os centros das circunferências C_1 e C_2. $y = -2x + 13$

12. (FGV-SP) A reta de equação $y = mx$ divide o triângulo de vértices (0, 0), (2, 2) e $(4m, 0)$ em dois triângulos de áreas iguais.

a) Quais são as coordenadas, em termos de m, do ponto de intersecção da reta $y = mx$ com a reta que contém os pontos (2, 2) e $(4m, 0)$? $M(2m + 1, 1)$

b) Considerando os dois triângulos de áreas iguais, qual é a soma de todos os valores possíveis de m? $-\frac{1}{2}$

13. (UFU-MG) Uma empresa do setor do agronegócio possui uma propriedade às margens de uma rodovia. Planejando construir um espaço com 9 km² de área, destinado ao fluxo de descarga de caminhões, inicia-se o esboço desse projeto, representando-o em um sistema de coordenadas cartesianas xOy, conforme indicado na figura [a seguir], cujo espaço em questão corresponde à área do triângulo OAD (hachurado).



Reprodução/UFU-MG, 2022.

Figura ilustrativa e sem escalas

Uma parte da divisa da propriedade, representada pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, corresponde ao gráfico da função de variável real x, f: $(-3, k) \to \mathbb{R}$ onde k é uma constante real, sendo a abscissa de D, $D(k, 0)$, e é conhecido que $f: \left(-\sqrt{5}\right) = -2$.

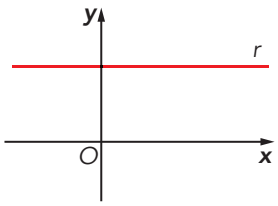
Com base nessas informações, resolva os itens [a seguir], justificando suas respostas.

a) Determine a equação cartesiana da reta que passa pelos pontos A e B. $y = 2x$

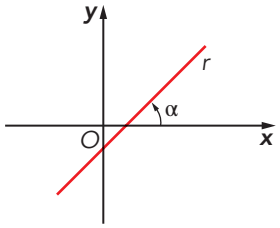
b) Determine o valor da constante k. $k = 3$

Conteúdos e aprendizagens

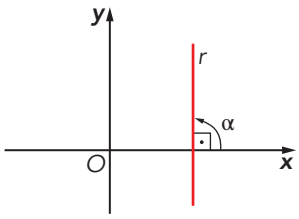
Inclinação da reta e coeficiente angular



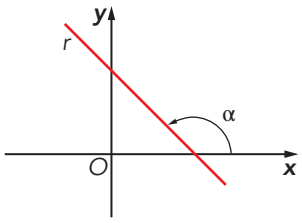
Para $\alpha = 0°$, temos $m = \tan \alpha = \tan 0° = 0$.



Para $0° < \alpha < 90°$, temos $\tan \alpha > 0 \Rightarrow m > 0$.



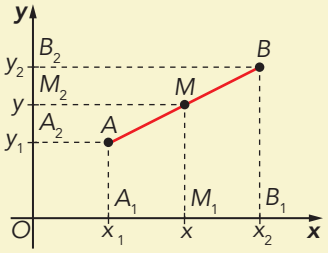
Para $\alpha = 90°$, a tan α não é definida. Dizemos então que, quando $\alpha = 90°$, isto é, quando a reta é vertical, ela não tem declividade.



Para $90° < \alpha < 180°$, temos $\tan \alpha < 0 \Rightarrow m < 0$.

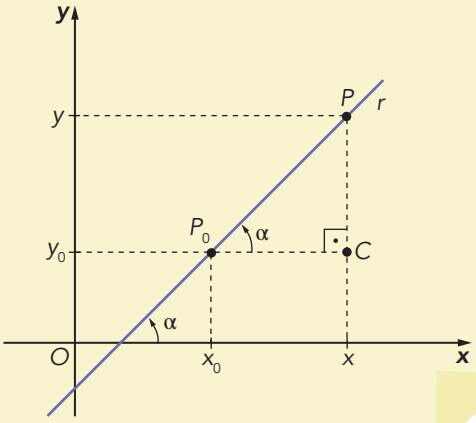
Ponto médio

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



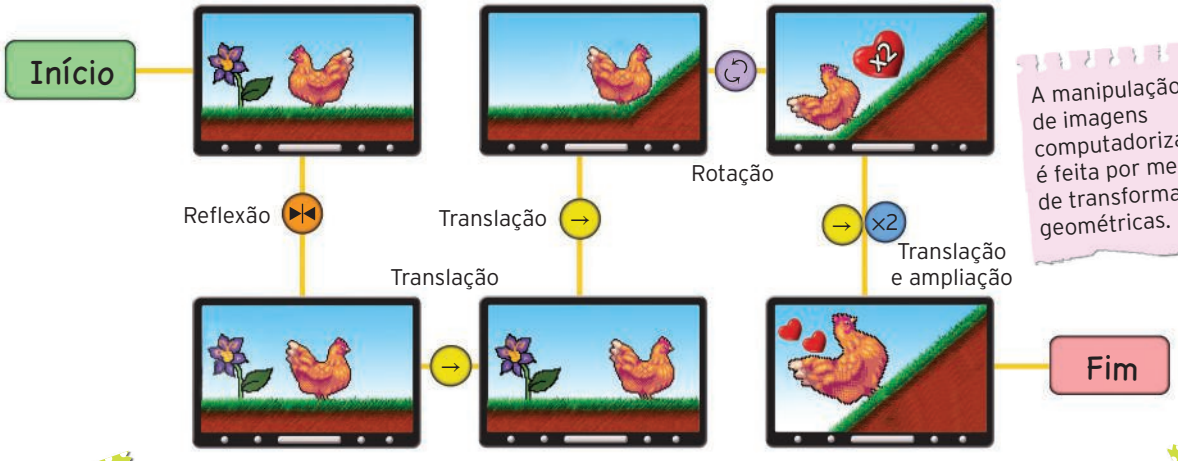
Equação fundamental da reta

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Transformações geométricas



A manipulação de imagens computadorizadas é feita por meio de transformações geométricas.

Luis Moura/Arquivo da editora

- Sei determinar a equação da reta e da circunferência?
- Reconheço as diferentes transformações geométricas no plano cartesiano?
- Compreendo como aplicar transformações geométricas para construir figuras?

Respostas pessoais.

UNIDADE 2

Educação financeira

Pesquisa do Instituto Locomotiva e MFM Tecnologia aponta que oito em cada dez famílias brasileiras estão endividadas e um terço têm dívidas em atraso.

[...]

O que continua abrindo mais brechas para a inadimplência é o cartão de crédito, de acordo com a pesquisa. O cartão foi a fonte de 60% dos débitos em aberto neste ano, porcentagem que superou a de 2022, de 56%.

BOND, Letycia. A cada dez brasileiros, oito estão endividados, mostra pesquisa. *Agência Brasil*, 7 dez. 2023. Disponível em: https://tedit.net/q99ifd. Acesso em: 30 jul. 2024

Planilhas são ferramentas úteis para a organização financeira.

Rawpixel.com/Shutterstock

- Seus responsáveis têm o hábito de fazer um planejamento financeiro mensal? Em caso afirmativo, você participa desse planejamento? Respostas pessoais.
- Ao lidar com dinheiro, você costuma se preocupar com o planejamento financeiro? Resposta pessoal.
- No caderno, liste alguns objetivos pessoais ou familiares, do ponto de vista financeiro de médio e longo prazo, e explique como pretende concretizar cada um deles. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 1

Fundamentos da Matemática financeira

Situação-problema

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Não escreva no livro

Promoção de roupa

Kirin Art/Shutterstock

Os lojistas costumam indicar, na vitrine das lojas, a porcentagem de desconto aplicado sobre o preço de um produto para chamar a atenção dos consumidores.

Alguns meses antes de lançar uma nova coleção de roupa, as lojas costumam fazer promoções com as peças da coleção vigente. Em alguns casos são aplicados descontos sobre o preço de venda dos itens se o pagamento for à vista, ou seja, feito de uma única vez; em outros, o desconto independe da forma de pagamento. Por exemplo, um produto que custa R$ 100,00, após um desconto de 20%, custará R$ 80,00.

Considere que, em determinada loja, os descontos das peças em promoção são dados de maneira progressiva, em que o cliente tem 10% de desconto na compra de 1 peça, 20% na compra de 2 peças e 30% na compra de 3 ou mais peças. Supondo que um cliente dessa loja deseja comprar 2 camisetas e 1 calça da promoção que, juntas e sem desconto, custam R$ 200,00, responda no caderno.

a) Qual será o percentual de desconto aplicado nessa compra? Como são 3 peças, será 30% de desconto.

b) Quantos reais o cliente deverá pagar por essa compra? Quantos reais ele economizou?
$0{,}3 \cdot 200 = 60$; $200 - 60 = 140$. Portanto, o cliente pagará R$ 140,00 e vai economizar R$ 60,00.

Explorando o conceito de porcentagem

A porcentagem é utilizada em diversos contextos, principalmente de ordem financeira, como no cálculo do valor de parcelas, no pagamento de impostos, no rendimento da poupança, entre outros.

Considere, por exemplo, uma pessoa que pretende fazer a compra anunciada a seguir, no valor de R$ 1.800,00, usando o dinheiro que está aplicado em um fundo de investimento que rende 1% líquido ao mês.

Ela quer saber, do ponto de vista financeiro, qual destas opções de pagamento é a mais vantajosa:

- pagar à vista;

  ou

- pagar em 2 parcelas iguais de R$ 903,00 cada uma, sendo uma parcela de entrada e a 2ª parcela depois de 1 mês.

Fique atento

O rendimento de 1% líquido significa que, depois de descontar impostos, taxas e encargos, o valor disponível ao investidor para resgate será o valor investido mais 1% desse valor.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Considere a situação apresentada, em que a pessoa tem R$ 1.800,00 aplicados em um fundo de investimento. Calcule quanto o dinheiro dessa pessoa vai render caso ela escolha pagar em 2 parcelas e só retire o valor da 2ª parcela do fundo de investimento quando for realizar o pagamento.
2. Qual dessas opções de pagamento, do ponto de vista financeiro, é a mais vantajosa para essa pessoa? Justifique.

1. A 1ª parcela de R$ 903,00 é paga como entrada e a 2ª, depois de 1 mês. Após o pagamento da 1ª parcela, sobram R$ 897,00 aplicados no fundo; como ele rende 1% ao mês, esse valor vai render 1% até o pagamento da 2ª parcela.
0,01 · 897,00 = 8,97; logo, R$ 8,97.

É mais vantajosa a opção de pagamento em 2 parcelas, pois, pagando à vista, a pessoa vai gastar R$ 1.800,00, e, pagando em 2 parcelas, a pessoa vai gastar R$ 6,00 a mais no pagamento (já que 2 · 908 = 1 806), mas vai obter R$ 8,97 com a aplicação no fundo de investimento, ou seja, sobra uma quantia de R$ 2,97 após o pagamento de todas as parcelas.

Formalizando o conceito de porcentagem

No Ensino Fundamental, estudamos que a porcentagem é uma maneira utilizada para indicar uma fração de denominador 100 ou qualquer representação de um número equivalente.

Reflita

Quais números inteiros são equivalentes a 100%, 200% e 300%?

$100\% = \frac{100}{100} = 1$.
Analogamente, 200% = 2 e 300% = 3.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, as atividades podem ser realizadas em duplas de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Acompanhe os exemplos:

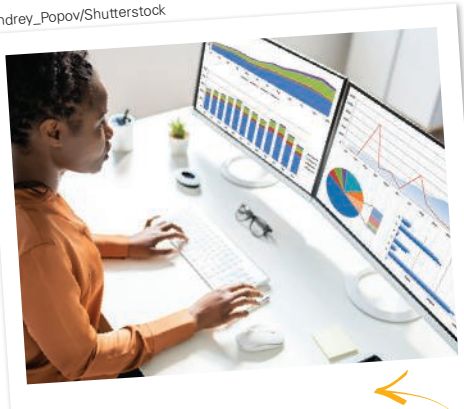
a) 50% é o mesmo que $\frac{50}{100}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 0,5.

b) 75% é o mesmo que $\frac{75}{100}$ ou $\frac{3}{4}$ ou 0,75.

c) 25% é o mesmo que $\frac{25}{100}$ ou $\frac{1}{4}$ ou 0,25.

d) 5% é o mesmo que $\frac{5}{100}$ ou $\frac{1}{20}$ ou 0,05.

Andrey_Popov/Shutterstock



A porcentagem é um conceito essencial no estudo de situações financeiras.

Fique atento

Para as atividades desta Unidade, caso você e o professor julguem necessário, faça o uso de tecnologias digitais, como planilhas eletrônicas e calculadoras.

Atividades resolvidas

1. (Uncisal) Ao publicar um artigo científico, um pesquisador recebeu um bônus de 15% sobre o seu salário. Se sobre o seu salário não incide nenhum desconto, não houve nenhuma outra bonificação e o bônus foi de R$ 975,00, qual a remuneração do pesquisador no mês em que recebeu o prêmio?

a) R$ 1.121,25 **c)** R$ 2.122,05 **e)** R$ 7.475,00

b) R$ 2.096,25 **d)** R$ 6.500,00

Resolução

Vamos indicar por x o salário, em real, do pesquisador. Assim:

$$\overbrace{0{,}15x}^{\text{bonificação}} = 975 \Rightarrow \overbrace{x}^{\text{salário}} = 6\,500$$

Então, a remuneração do pesquisador no mês em que recebeu o prêmio será o salário (R$ 6.500,00) adicionado à bonificação (R$ 975,00), totalizando R$ 7.475,00.

Alternativa **e**.

Atividades

1. b) $\frac{56}{70} = \frac{8}{10} = 80\%$

Não escreva no livro

1. Calcule e responda no caderno.

a) Qual é o valor de 60% de 95? $0{,}60 \cdot 95 = 57$

b) Quanto por cento de 70 é igual a 56?

c) Qual é o número em que 15% dele corresponde a 6? $0{,}15 \cdot x = 6 \Rightarrow x = 40$

d) Quanto é 3,5% de R$ 650,00? $0{,}035 \cdot$ R$ 650,00 = R$ 22,75

e) De qual quantia R$ 75,20 correspondem a 20%? $0{,}20 \cdot x =$ R$ 75,20 $\Rightarrow x =$ R$ 376,00

f) Em relação a um total de R$ 300,00, a quantia de R$ 171,00 corresponde a quanto por cento? $\frac{171}{300} = \frac{57}{100} = 57\%$

g) O valor correspondente a 0,5% de R$ 85,00 é maior ou menor do que 1% de R$ 170,00? $0{,}005 \cdot 85 = 0{,}425$ e $0{,}01 \cdot 170 = 1{,}7$. Logo, 0,5% de R$ 85,00 é menor do que 1% de R$ 170,00.

2. $\frac{75}{100}(x+9) = \frac{75}{100}x + \frac{9 \cdot 75}{100} = \frac{75}{100}x + \frac{675}{100} = \frac{3}{4}x + 6{,}75$

2. Se x indica uma quantia, podemos representar 60% de x por $\frac{60x}{100}$ ou $\frac{3x}{5}$ ou $0{,}6x$. Seguindo esse raciocínio, represente, no caderno, 75% de $(x + 9)$.

3. O salário de Roberto, em 2024, era R$ 2.000,00 mensais. Em 2025, ele passou a ganhar R$ 2.500,00 mensais. De quanto por cento foi o aumento? $\frac{2\,500}{2\,000} = 1{,}25 = 1 + 0{,}25$; ou seja, 25%.

4. A medida de volume total de água que entra em nosso organismo e sai dele, por dia, varia de 1 500 mL a 3 000 mL. Aproximadamente 47% dessa medida se origina das bebidas ingeridas, como água, sucos, chás, etc. De acordo com esses dados, determine a medida de volume de água mínima e máxima, em mililitros, que entra em nosso organismo e sai dele, proveniente das bebidas que ingerimos.

Texto para a próxima atividade.

Existem no mundo milhões de pessoas vivendo com o vírus da imunodeficiência humana (HIV), causador da aids. De acordo com o Programa Conjunto das Nações Unidas sobre HIV/AIDS (Unaids), em 2023, cerca de 630 mil pessoas morreram por doenças relacionadas à aids. E desde a aparição da aids, no início da década de 1980, até 2023, cerca de 42,3 milhões de pessoas morreram de causas relacionadas a essa doença.

Fonte dos dados: UNAIDS, 2024. Global HIV & AIDS statistics. Disponível em: https://tedit.net/jowosk. Acesso em: 30 jul. 2024.

Kateryna Kon/Shutterstock

Ilustração fora de proporção e em cores fantasia do vírus do HIV.

5. Em relação ao total de mortes relacionadas à aids apresentado no texto, determine a porcentagem de pessoas que morreram em decorrência dessa doença apenas em 2023. $\frac{630\,000}{42\,300\,000} \simeq 1{,}5\%$; aproximadamente 1,5%.

4. $0{,}47 \cdot 1\,500 = 705$; $0{,}47 \cdot 3\,000 = 1\,410$; logo, entre 705 mL e 1 410 mL.

Sobre o assunto

No ano de 2015, a Organização das Nações Unidas (ONU) definiu os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável. São 17 objetivos que abordam os principais desafios enfrentados pela população mundial. Por exemplo, o objetivo **3** abrange as esferas de saúde e bem-estar e inclui a erradicação da epidemia de aids.

Para saber mais sobre esses objetivos que balizam políticas públicas e ações coletivas, consulte https://tedit.net/tcggid. Acesso em: 31 jul. 2024.

Reprodução/ONU

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável definidos pela ONU.

Reflita

Não escreva no livro

Das doenças citadas no objetivo **3**, alguma está sendo combatida na sua região? Pesquise quais medidas estão sendo tomadas ou poderiam ser tomadas para alcançar esse objetivo.

A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

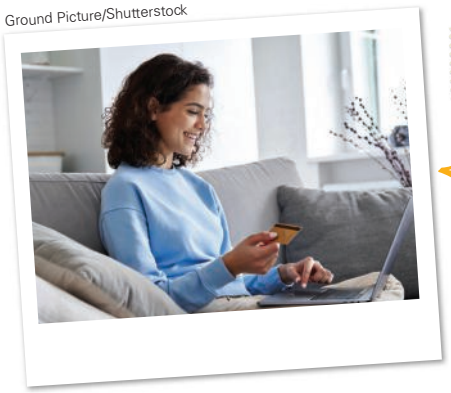
6. O salário líquido (ou seja, após o pagamento de impostos) de Vívian é R$ 2.200,00. Sabe-se que foram descontados 20% do salário bruto para o pagamento de impostos. Qual é o salário bruto de Vívian?

$2\,200 = x - (x \cdot 0{,}20) \Rightarrow 0{,}80x = 2\,200 \Rightarrow x = 2\,750$; ou seja, R$ 2.750,00.

Texto para a próxima atividade.

A caderneta de poupança é a mais tradicional aplicação financeira dos brasileiros. A partir de 2012, a remuneração da poupança passou a depender da data da aplicação. Para depósitos feitos até 3 de maio de 2012, a remuneração é de 0,5% ao mês mais a taxa referencial (TR) mensal.

Ground Picture/Shutterstock



As imagens não estão representadas em proporção.

Atualmente é muito comum o uso de bancos digitais nas transações financeiras.

Fique atento

A **taxa referencial** (TR) é um índice criado pelo governo para complementar os juros pagos na poupança. Ela é calculada pelo Banco Central do Brasil de acordo com o dinheiro que é emprestado, por investidores, às 30 maiores instituições financeiras do país, e é utilizada para calcular a remuneração de diversas aplicações financeiras, incluindo a poupança.

A **taxa Selic** (Sistema Especial de Liquidação e de Custódia) é a taxa básica de juros da economia brasileira, definida pelo Comitê de Política Monetária (Copom) do Banco Central. Ela serve de referência para as taxas de juros cobradas em diversas operações de crédito e em investimentos bancários.

Entretanto, para depósitos feitos a partir de 4 de maio de 2012, sempre que a taxa Selic estiver igual a ou menor do que 8,5% ao ano, o rendimento mensal da poupança passará a ser 70% da taxa Selic mensal (que obtemos ao dividir o valor da taxa Selic anual por 12) mais a TR mensal.

Se a taxa Selic estiver acima de 8,5% ao ano, o rendimento da poupança continuará a ser de 0,5% ao mês mais a TR mensal.

Dirceu Portugal/Fotoarena

A caderneta de poupança é a aplicação financeira mais utilizada pelos brasileiros. Quando ela foi criada, os registros eram realizados de maneira física, ou seja, eram manuscritos ou datilografados.

7. De acordo com o texto, responda no caderno.

a) Se a taxa Selic for 10% ao ano, qual será a porcentagem de rendimento da poupança por mês a ser adicionada com a TR mensal para um depósito feito em janeiro de 2009? 0,5% ao mês.

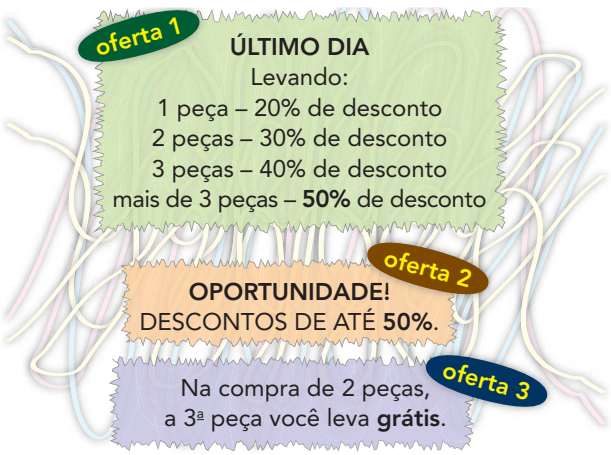
b) Se a taxa Selic for 8% ao ano, qual será a porcentagem de rendimento da poupança por mês a ser adicionada com a TR para um depósito feito em janeiro de 2019?

$(0{,}08 : 12) \cdot 0{,}7 \simeq 0{,}0047$; logo, aproximadamente 0,47% ao mês.

c) O que você faria se tivesse dinheiro aplicado na poupança e a taxa Selic estivesse muito baixa? Converse com os colegas.

Resposta pessoal.

8. Miguel vai aproveitar as liquidações de uma loja para fazer compras. Analise algumas ofertas que ele encontrou.



Banco de imagens/Arquivo da editora

8. b) Na oferta **1**, 3 peças recebem 40% de desconto e, na oferta **3**, não recebem desconto, mas o cliente ganha 1 peça extra. Se considerarmos essa vantagem, o valor do desconto será aproximadamente 33% na oferta **3**. Portanto, a oferta mais vantajosa é a oferta **1**.

a) Qual dessas ofertas é a mais vantajosa? Converse com os colegas.
A oferta mais vantajosa depende da quantidade de peças desejada.

b) Compare a oferta **1** com a oferta **3**. Em qual delas é mais vantajoso comprar 3 peças?

9. **(IFG-GO)** Os rins são órgãos vitais para o perfeito funcionamento do corpo humano, filtrando o sangue para a eliminação de resíduos nitrogenados e mantendo a **homeostasia** corporal. Suponha que, em um homem jovem e saudável, os rins formem exatamente 125 mL de filtrado glomerular por minuto. Desse volume, 99% é reabsorvido nos túbulos renais e o restante é excretado na forma de urina. Nessas condições, em um dia, a quantidade de urina eliminada, em litros, por um homem jovem e saudável seria de:

a) 1,6. **b)** 1,8. **c)** 1,7. **d)** 1,5.

homeostasia: processo de regulação do corpo para manter o equilíbrio orgânico contra estímulos que possam transtornar o estado habitual e o funcionamento dele.

9. 0,01 · 125 mL = 1,25 mL; temos que 24 · 60 = 1 440; assim, 1 440 · 1,25 mL = = 1 800 mL = 1,8 L.

Portanto, a medida de volume de urina eliminada seria 1,8 L. Alternativa **b**.

10. **(Famerp-SP)**

Uma pesquisa realizada pela Sociedade Brasileira de Cardiologia (SBC) constatou que os níveis elevados de colesterol atingem cerca de quatro em cada dez brasileiros adultos. Isso corresponde a cerca de 60 milhões de pessoas adultas. O estudo ainda revelou que aproximadamente 11% da população adulta brasileira nunca fez exame de colesterol.

(https://noticias.r7.com, 08.08.2018. Adaptado.)

A partir dos dados da notícia, é possível concluir que o número de brasileiros adultos que nunca fizeram exame de colesterol é de, aproximadamente: Alternativa **e**.

a) 2,64 milhões. **c)** 6,6 milhões. **e)** 16,5 milhões.

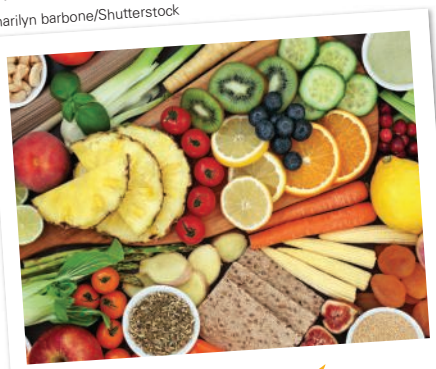
b) 8,6 milhões. **d)** 3,96 milhões.

Sobre o assunto

O colesterol é essencial para o bom funcionamento do organismo, mas em excesso pode levar a diversos problemas de saúde. Saiba mais sobre os diferentes tipos de colesterol e como identificar e prevenir o colesterol alto acessando o vídeo a seguir.

CNN SINAIS VITAIS | Colesterol sob controle. 2022. 42 min. Disponível em: https://tedit.net/fiqkl2. Acesso em: 31 jul. 2024.

marilyn barbone/Shutterstock



Alimentos como frutas, verduras e aveia ajudam a diminuir o nível do colesterol ruim no organismo.

11. **(Enem)** Uma pessoa, que perdeu um objeto pessoal quando visitou uma cidade, pretende divulgar nos meios de comunicação informações a respeito da perda desse objeto e de seu contato para eventual devolução. No entanto, ela lembra que, de acordo com o Art. 1234 do Código Civil, poderá ter que pagar pelas despesas do transporte desse objeto até sua cidade e poderá ter que recompensar a pessoa que lhe restituir o objeto em, pelo menos, 5% do valor do objeto.

Ela sabe que o custo com transporte será de um quinto do valor atual do objeto e, como ela tem muito interesse em reavê-lo, pretende ofertar o maior percentual possível de recompensa, desde que o gasto total com as despesas não ultrapasse o valor atual do objeto.

Nessas condições, o percentual sobre o valor do objeto, dado como recompensa, que ela deverá ofertar é igual a: Alternativa **e**.

a) 20%. **b)** 25%. **c)** 40%. **d)** 60%. **e)** 80%.

12. **(Enem)** Um ciclista amador de 61 anos de idade utilizou um monitor cardíaco para medir suas frequências cardíacas em quatro diferentes tipos de trechos do percurso. Os resultados das frequências cardíacas máximas alcançadas nesses trechos foram:

Trechos do percurso	Frequências cardíacas máximas (bpm)
Leve no plano	90
Forte no plano	120
Subida moderada	130
Subida forte	140

Sabe-se que a faixa aeróbica ideal para o ganho de condicionamento físico é entre 65% e 85% da frequência cardíaca máxima (Fc máx.), que, por sua vez, é determinada pela fórmula:

$$\text{Fc máx.} = 220 - \text{idade},$$

em que a idade é dada em ano e Fc máx. é dada em bpm (batimento por minuto).

Os trechos do percurso nos quais esse ciclista se mantém dentro de sua faixa aeróbica ideal, para o ganho de condicionamento físico, são:

Alternativa **d**.

a) leve no plano, forte no plano, subida moderada e subida forte.
b) leve no plano, forte no plano e subida moderada.
c) forte no plano, subida moderada e subida forte.
d) forte no plano e subida moderada.
e) leve no plano e subida forte.

13. Ao longo do ano é comum ocorrer variações de preços de produtos alimentícios e isso se deve a circunstâncias diversas, como variações climáticas, alterações no mercado econômico ou alguma praga na plantação.

DanPereiraMS/Shutterstock

A variação de preços nos alimentos tem forte impacto no orçamento da maior parte das famílias brasileiras.

De acordo com o Índice de Preços ao Consumidor Regional (IPC-Regional), o preço dos alimentos aumentou 43,24% entre janeiro de 2020 e março de 2023.

Fonte dos dados: G1 CE. Aumento de preço de alimentos puxa inflação para famílias de baixa renda no Nordeste, aponta pesquisa. *G1 Ceará*, 9 maio 2023. Disponível em: https://tedit.net/a14y7t. Acesso em: 31 jul. 2024.

$\frac{3,95 - 2,5}{2,5} = 0,58 = 58\%$

Supondo que, em uma feira, 1 quilograma de tomate que custava R$ 2,50 passou a custar R$ 3,95, determine o percentual de acréscimo.

14. Em um Centro de Referência de Assistência Social (Cras) de determinado município, uma assistente social atendeu, ao longo de 1 mês, o total de 1300 pessoas. A tabela apresenta algumas informações sobre esses atendimentos, nos períodos da manhã e da tarde, e a porcentagem de pessoas atendidas por período em relação à quantidade de pessoas atendidas no mês.

Atendimentos realizados

Período / Idade	Manhã	Tarde	Porcentagem
Pessoas com 0 a 17 anos	300	250	***y***
Pessoas com 18 anos ou mais	*x*	350	***z***
Total	**700**	**600**	**100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

Reprodução/CRAS

Nos Cras são oferecidos diversos serviços de assistência social.

No início do mês seguinte, a assistente social precisou apresentar as informações do mês anterior, porém, no dia da apresentação, ela percebeu que ainda faltavam 3 dados na tabela. Quais valores a assistente social deve substituir por *x*, *y* e *z*, respectivamente, para completar a tabela em relação ao mês citado?

Alternativa **c**.

a) 400, 50% e 50%.
b) 400, 48% e 52%.
c) 400, 42,3% e 57,7%.
d) 400, 43,7% e 56,3%.
e) 400, 30% e 70%.

16. Analisando o gráfico, temos que, aos 4 anos e 4 meses, a menina tinha 105 cm de medida de altura. Assim: $\frac{105}{85} \simeq 1{,}235 = 1 + 23{,}5\%$.

Portanto, o aumento percentual da medida de altura no período considerado foi, aproximadamente, 23,5%. Alternativa **a**.

15. (Uncisal)

As lâmpadas de LED são mais eficientes que as lâmpadas comuns porque utilizam bem menos energia que estas para produzir uma mesma quantidade de luz (lúmen). Enquanto uma lâmpada incandescente consome 60 watts de energia elétrica para produzir determinada quantidade de lúmen, uma lâmpada de LED precisa de apenas 15 watts.

Disponível em: www.tecmundo.com.br. Acesso em: 3 nov. 2018 (adaptado).

Em uma residência na qual as lâmpadas incandescentes sejam responsáveis por 40% do consumo mensal de energia, a troca dessas lâmpadas por lâmpadas de LED diminuirá o consumo mensal de energia em:

Alternativa **c**.

a) 18%.

b) 27%.

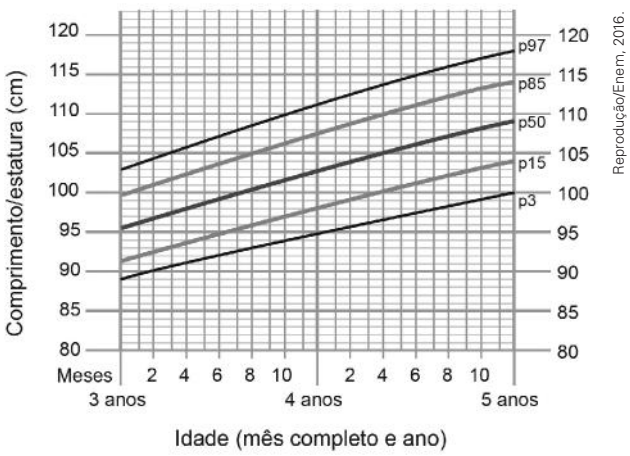
c) 30%.

d) 45%.

e) 60%.

16. (Enem) A fim de acompanhar o crescimento de crianças, foram criadas pela Organização Mundial da Saúde (OMS) tabelas de altura, também adotadas pelo Ministério da Saúde do Brasil. Além de informar os dados referentes ao índice de crescimento, a tabela traz gráficos com curvas, apresentando padrões de crescimento estipulados pela OMS.

O gráfico apresenta o crescimento de meninas, cuja análise se dá pelo ponto de intersecção entre o comprimento, em centímetro, e a idade, em mês completo e ano, da criança.



Reprodução/Enem, 2016.

Disponível em: www.aprocura.com.br. Acesso em: 22 out. 2015 (adaptado).

Uma menina aos 3 anos de idade tinha altura de 85 centímetros e aos 4 anos e 4 meses sua altura chegou a um valor que corresponde a um ponto exatamente sobre a curva p50.

Qual foi o aumento percentual da altura dessa menina, descrito com uma casa decimal, no período considerado?

a) 23,5%

b) 21,2%

c) 19,0%

d) 11,8%

e) 10,0%

17. (Enem) Devido ao não cumprimento das metas definidas para a campanha de vacinação contra a gripe comum e o vírus H1N1 em um ano, o Ministério da Saúde anunciou a prorrogação da campanha por mais uma semana. A tabela apresenta as quantidades de pessoas vacinadas dentre os cinco grupos de risco até a data de início da prorrogação da campanha.

Balanço parcial nacional da vacinação contra a gripe

Grupo de risco	População (milhão)	População já vacinada	
		(milhão)	(%)
Crianças	4,5	0,9	20
Profissionais de saúde	2,0	1,0	50
Gestantes	2,5	1,5	60
Indígenas	0,5	0,4	80
Idosos	20,5	8,2	40

Disponível em: http://portalsaude.saude.gov.br. Acesso em: 16 ago. 2012.

Qual é a porcentagem do total de pessoas desses grupos de risco já vacinadas?

Alternativa **d**.

a) 12

b) 18

c) 30

d) 40

e) 50

18. A quantia de R$ 1.890,00 foi repartida entre 3 pessoas da seguinte maneira: Marta recebeu 80% da quantia de Luís, e Sérgio recebeu 90% da quantia de Marta. Quanto recebeu cada pessoa? Luís: R$ 750,00; Marta: R$ 600,00; e Sérgio: R$ 540,00.

Conexões

Um pouco da história do dinheiro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual. Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Diversidade Cultural*.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de História, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Por muitos séculos o comércio era realizado exclusivamente por meio de trocas de produtos ou serviços, prática conhecida como escambo.

O conceito de dinheiro nasce antes de 1000 a.C., da necessidade de se referir a todos os produtos com uma mesma escala de valores.

Hector Gómez/Arquivo da editora

A troca de produtos por sal ficou conhecida como salário.

Os primeiros registros de dinheiro são da Mesopotâmia e da China

O termo *shekel*, referente a uma unidade de medida antiga utilizada na **Mesopotâmia**, era usado para definir tanto uma medida de massa específica de cevada quanto quantidades equivalentes de materiais como prata, bronze e cobre.

Na **China**, as primeiras unidades-padrão de trocas adotadas foram as espadas e outros tipos de arma e de ferramenta. Por volta de 1000 a.C., os chineses passaram a utilizar réplicas das armas e das ferramentas, em miniatura e fundidas em bronze. Assim, as trocas de produtos por armas ou ferramentas passaram a ser feitas, não com os objetos reais, mas com os modelos deles – mais fáceis de transportar e guardar.

As imagens não estão representadas em proporção.

Hao Zhao/Universidade Zhengzhou, China.

Moedas de bronze em formato de espada encontradas em 2021 no sítio arqueológico de Guazhuang, na China. A partir da datação por radiocarbono, foi determinado que a fábrica de moedas chinesa começou a operar entre 640 e 550 a.C., sendo a mais antiga fábrica de moedas de que se tem conhecimento.

O uso de uma única unidade para definir tanto a medida de massa quanto o valor da moeda é um conceito semelhante ao da **libra britânica** – originalmente definida como a medida de massa de uma libra de prata (equivalente a 457 gramas), e que passou a designar também o nome da moeda.

No século VII a.C. surgem, na **Lídia**, as moedas com formato arredondado, tais como as conhecemos atualmente.

Bible Land Pictures/akg/Album/Fotoarena

Moeda da Lídia, com 220 gramas e desenho de um leão (símbolo do reino) e de um touro (símbolo dos povos rivais) lutando. 561 a.C.-546 a.C. Medidas das dimensões da moeda: 1,54 cm × 1,18 cm.

2. Exemplo de resposta: Devido às relações comerciais entre diferentes povos, o escambo tornou-se cada vez mais inviável, pois era difícil decidir quantas unidades de um produto *x* seriam equivalentes a certa quantidade de um produto *y*. Assim, surgiu a necessidade de se referir a todos os produtos usando a mesma escala de valores.

Antigo Reino da Lídia (700 a.C.-546 a.C.)

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: DUBY, G. *Atlas historique mondial*. 2. ed. Paris: 2007. p. 12.

Os bancos surgem oficialmente por volta de 1600 como uma alternativa para armazenar o dinheiro em segurança.

Os bancos emitiam comprovantes do dinheiro armazenado. Esses comprovantes deram origem ao **papel-moeda**.

As imagens não estão representadas em proporção.

Cédulas de Real. No Brasil, atualmente o dinheiro em circulação aceito em todo o território é o Real.

Fotos: Reprodução/Casa da Moeda do Brasil/Ministério da Fazenda

Com o dinheiro, surgiu a operação de empréstimo de dinheiro. Quem tinha dinheiro emprestava a quem precisava por certo período. Quem tomou emprestado ficava devendo a quantia emprestada mais um valor adicional pelo "aluguel" da quantia que tomou emprestada. Esse valor adicional é o **juro**.

Como desde a Antiguidade cada país cunhava as próprias moedas, era sempre necessário trocar moedas de um país por moedas de outro, em uma operação chamada **câmbio**.

Fontes dos dados: LAGO, Luiz Aranha Corrêa do. *A moeda metálica em perspectiva histórica*: notas em torno de uma exposição. 1ª parte: de cerca de 600 a.C. ao séc. XV d.C. Rio de Janeiro: PUC-RJ, 2004. Disponível em: https://tedit.net/qoiye7. ORIGEM do dinheiro. *Casa da Moeda do Brasil*, Rio de Janeiro, 2023. Disponível em: https://tedit.net/sk2xei. KRAMER, Jillian. Encontrada fábrica de moedas mais antiga do mundo na China. *National Geographic*, [*s. l.*], 10 ago. 2021. Disponível em: https://tedit.net/3h0shv. Acesso em: 31 jul. 2024.

Conecte com o texto

1. Exemplo de resposta: Escambo é o nome dado à prática de troca de serviços ou de produtos sem o uso de moeda. Essa transação é caracterizada pela permuta que antecede o uso do dinheiro.

1. O que era o escambo? Escreva no caderno um pequeno texto explicando essa prática.
2. Por qual motivo surgiu a necessidade de criar o dinheiro como alternativa à prática de escambo?

Aumentos, descontos e fator de atualização

Agora que você já relembrou como realizar cálculos envolvendo porcentagem, vamos explorar situações que envolvem aumentos, descontos e fatores de atualização de quantias.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Como citado, a **taxa Selic** é a taxa básica de juros do Brasil. Ela é um instrumento usado pelo Banco Central para o controle da inflação e interfere em todas as relações de empréstimo de valores. A cada 45 dias o Comitê de Política Monetária do Banco Central (Copom) define o valor dessa taxa.

No início do ano de 2021, um título público atrelado à Selic pagava 2% de taxa de juros ao ano. Já no início de 2022, o mesmo título pagava 9,25% ao ano. No início de 2023, a taxa percentual anual era de 13,75% e, no início do ano seguinte, reduziu para 11,25%.

Fonte dos dados: BANCO CENTRAL DO BRASIL. Taxas de juros básicas – Histórico. Disponível em: https://tedit.net/0ilpn1. Acesso em: 8 ago. 2024.

Sobre o assunto

Para saber mais sobre a taxa Selic, acesse o vídeo a seguir.

O que é a taxa Selic. E como ela funciona. *Nexo Jornal*. 4 min 31 s. 2018. Disponível em: https://tedit.net/be7nkg. Acesso em: 31 jul. 2024.

Para resolver as atividades a seguir, suponha que as taxas mencionadas no texto se mantiveram estáveis ao longo de cada ano citado e que não existem outras taxas ou impostos cobrados nos investimentos.

1. Uma pessoa que investiu R$ 1.000,00 no início de 2021 acumulou quanto ao final daquele ano?
1,02 · 1 000 = 1 020; logo, R$ 1.020,00.

2. Considere que o investidor manteve o investimento. Quanto ele resgatou ao final de 2023?
1,0925 · 1 020 = 1 114,35; 1,1375 · 1 114,35 ≃ 1 267,57; logo, aproximadamente R$ 1.267,57.

3. Como você responderia à atividade **1** utilizando apenas uma multiplicação? Exemplo de resposta: Multiplicar diretamente o capital inicial investido (R$ 1.000,00) por 1,02 (que corresponde à taxa de juros adicionada a 1).

4. Junte-se a um colega para tentar descobrir como chegar à resposta da atividade **2** também por meio de uma única multiplicação. Exemplo de resposta: O valor resgatado é obtido por meio das 3 taxas conhecidas nos diferentes períodos e, como o valor investido é R$ 1.000,00, obtemos: 1,02 · 1,0925 · 1,1375 · 1 000 ≃ 1 267,57.

A razão (f) entre 2 valores de uma grandeza (como os investimentos citados no *Explore para descobrir*) em momentos diferentes (passado, presente ou futuro) é denominada **fator de atualização**.

Na divisão entre 2 valores quaisquer $\left(\frac{A}{B}, \text{com } B \neq 0\right)$, só há 3 resultados possíveis:

- ou resulta em 1;
- ou é maior do que 1;
- ou é menor do que 1.

Quando o resultado da divisão é 1, ambos os valores são iguais. Um valor é 100% do outro.

Se um eletrodoméstico, por exemplo, custava R$ 500,00 e passou a custar R$ 525,00, ao calcular $\frac{\text{preço final}}{\text{preço inicial}} = \frac{\text{R\$ 525,00}}{\text{R\$ 500,00}} = 1{,}05$, podemos entender o resultado de 2 maneiras equivalentes:

1ª) R$ 525,00 é 5% maior do que R$ 500,00;

ou

2ª) R$ 525,00 é 105% de R$ 500,00 (portanto, 5% maior).

Fique atento

Quando os valores A e B são iguais, podemos dizer que $f = 1$ é o fator neutro.

Alf Ribeiro/Shutterstock

Loja de eletrodomésticos.

Se, em vez de um aumento, o eletrodoméstico receber um desconto no valor, passando de R$ 500,00 para R$ 450,00, ao calcular $\frac{\text{preço final}}{\text{preço inicial}} = \frac{\text{R\$ 490,00}}{\text{R\$ 500,00}} = 0{,}90$, também podemos entender o resultado de 2 maneiras equivalentes:

1ª) R$ 450,00 é 10% menor do que R$ 500,00;

ou

2ª) R$ 450,00 é 90% de R$ 500,00 (portanto, 10% menor).

Na prática, é possível determinar o fator de atualização (f) conhecendo a taxa de juros (i) e, alternativamente, determinar a taxa de juros conhecendo o fator de atualização.

- Se $f > 1$, então $f = 1 + i$; portanto, a taxa é $i = f - 1$.
- Se $f < 1$, então $f = 1 - i$; portanto, a taxa é $i = 1 - f$.

Na comparação de 2 valores diferentes de uma mesma grandeza, $f > 1$ significa **aumento** ou **acréscimo** de valor, por outro lado, $f < 1$ significa **desconto** (ou **perda** de valor), pois o valor da grandeza variou no período e o valor mais antigo é a base de comparação.

Quando $f = 1$, que é o fator neutro, significa que não houve variação:

$$f = \frac{\text{valor novo}}{\text{valor anterior}}$$

$f > 1 \rightarrow$ aumento

$f < 1 \rightarrow$ desconto

$f = 1 \rightarrow$ não houve variação

Aumentos e descontos sucessivos

A seguir, vamos descobrir como calcular, de maneira mais prática, o resultado de aumentos e descontos que ocorrem mais de uma vez e que, por esse motivo, são chamados de **sucessivos**.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Uma mercadoria custava inicialmente R$ 1.000,00 e recebeu 2 aumentos sucessivos, um de 2% e o outro de 10%. Depois, recebeu um desconto de 5%.

1. Qual é o valor da mercadoria após o 1º aumento? $(1 + 0{,}02) \cdot 1\,000 = 1\,020$; logo, R$ 1.020,00.

2. Qual é o valor da mercadoria após o 2º aumento? $(1 + 0{,}1) \cdot 1\,020 = 1122$; logo, R$ 1.122,00.

3. No caderno, explique como você fez para responder à atividade **2**. Exemplo de resposta: Calculando um aumento de 10% sobre o valor calculado na atividade **1** (ou seja, $1{,}1 \cdot 1020 = 1122$).

4. Qual é o valor da mercadoria após o desconto de 5%? $(1 - 0{,}05) \cdot 1\,122 = 1\,065{,}90$; logo, R$ 1.065,90.

5. No caderno, explique como você fez para responder à atividade **4**. Exemplo de resposta: Calculando um desconto de 5% sobre o valor calculado no item **b** (ou seja, $0{,}95 \cdot 1\,122 = 1\,065{,}9$).

6. Junte-se a um colega para tentar descobrir como obter a resposta da atividade **4** usando uma única multiplicação. $1{,}02 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}95 \cdot 1\,000 = 1\,065{,}9$ ou $(1 + 0{,}02) \cdot (1 + 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}05) \cdot 1\,000 = 1\,065{,}9$.

No *Explore para descobrir*, você calculou aumentos e descontos sucessivos. Agora, vamos generalizar como podemos efetuar cálculos como esses.

Para compor vários aumentos ou descontos sucessivos, basta multiplicar os fatores individuais e, assim, obter o fator acumulado ($f_{\text{acumulado}}$), que é o fator de atualização entre o 1º e o último valor considerados.

$$f_{\text{acumulado}} = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot \ldots$$

Depois, basta multiplicá-lo pelo valor inicial para obter o valor após todos os aumentos ou descontos.

Atividades resolvidas

2. A tabela a seguir traz a variação do preço do dólar em cada dia, em uma semana qualquer, em termos percentuais em relação ao dia útil anterior. No valor acumulado desses 5 dias, o que aconteceu com o preço do dólar: subiu ou caiu? Quanto por cento?

Variação do preço do dólar em uma semana

Dia da semana	Variação
Segunda-feira	–2,35%
Terça-feira	1,37%
Quarta-feira	1,05%
Quinta-feira	–0,13%
Sexta-feira	0,21%

Dados elaborados para fins didáticos.

Resolução

Primeiro, precisamos identificar os fatores de atualização que incidiram sobre o valor do dólar em cada dia:

$$f_1 = 1 - 0{,}0235 = 0{,}9765$$
$$f_2 = 1 + 0{,}0137 = 1{,}0137$$
$$f_3 = 1 + 0{,}0105 = 1{,}0105$$
$$f_4 = 1 - 0{,}0013 = 0{,}9987$$
$$f_5 = 1 + 0{,}0021 = 1{,}0021$$

Assim, temos:

$$f_{\text{acumulado}} = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot f_5 = 0{,}9765 \cdot 1{,}0137 \cdot 1{,}0105 \cdot 0{,}9987 \cdot 1{,}0021$$
$$f_{\text{acumulado}} \simeq 1{,}00107$$

Como $f_{\text{acumulado}} > 1$, temos:

$$f = 1 + i \Rightarrow i \simeq 0{,}00107 = 0{,}107\%$$

Portanto, o dólar teve uma alta de cerca de 0,107%.

Atividades

Não escreva no livro

19. Escreva no caderno o fator de atualização correspondente a cada situação a seguir.

a) 3% de aumento. $f = 1 + 0{,}03 \Rightarrow f = 1{,}03$

b) 3% de desconto. $f = 1 - 0{,}03 \Rightarrow f = 0{,}97$

c) 15% de aumento. $f = 1 + 0{,}15 \Rightarrow f = 1{,}15$

d) 15% de desconto. $f = 1 - 0{,}15 \Rightarrow f = 0{,}85$

e) 230% de aumento. $f = 1 + 2{,}30 \Rightarrow f = 3{,}3$

f) 3 000% de aumento. $f = 1 + 30 \Rightarrow f = 31$

20. Analise cada fator de atualização, definindo o valor da taxa e indicando se é aumento ou desconto.

a) $f = 1{,}13$ $f = 1{,}13 \Rightarrow f = 1 + 0{,}13$; logo, aumento de 13%.

b) $f = 0{,}70$ $f = 0{,}70 \Rightarrow f = 1 - 0{,}30$; logo, desconto de 30%.

c) $f = 2$ $f = 2 \Rightarrow f = 1 + 1$; logo, aumento de 100%.

d) $f = 0{,}95$ $f = 0{,}95 \Rightarrow f = 1 - 0{,}05$; logo, desconto de 5%.

e) $f = 30$ $f = 30 \Rightarrow f = 1 + 29$; logo, aumento de 2 900%.

21. O fluxo de veículos em determinada rua passou de 3 veículos por hora para 3 veículos por minuto depois que ela foi asfaltada. De quanto foi o aumento percentual do fluxo de veículos nessa rua?

Alf Ribeiro/Shutterstock

Tráfego de carros.

21. Como 3 veículos por minuto correspondem a 180 veículos por hora, temos: $\frac{\text{fluxo novo}}{\text{fluxo antigo}} = \frac{180}{3} = 60$; logo, $f = 1 + i \Rightarrow i = 59 = 5\,900\%$.

22. $\frac{\text{valor novo}}{\text{valor antigo}} = \frac{799}{999} \simeq 0{,}8$; logo, $f = 1 - i \Rightarrow i = 0{,}2 = 20\%$. Portanto, o desconto foi aproximadamente 20%.

Não escreva no livro

22. Em uma promoção, o preço de um celular passou de R$ 999,00 para R$ 799,00. De quanto foi o desconto nessa promoção?

23. Avalie o fator acumulado de cada situação a seguir, definindo o aumento ou o desconto equivalente.

a) Aumento de 3% e aumento de 5%. Aumento de 8,15%.

b) Aumento de 10% e desconto de 20%. Desconto de 12%.

c) Três aumentos de 10%. Aumento de 33,1%.

d) Dois aumentos de 6% e 3 descontos de 4%. Desconto de 0,6%.

24. Cecília investiu R$ 11.000,00 em um fundo de aplicação de um banco e, hoje, após 3 meses, tem R$ 11.440,00. Qual foi o rendimento percentual obtido nesse período de 3 meses? 4%

25. O preço de uma camisa passou de R$ 50,00 para R$ 59,00. Qual foi o aumento percentual do preço da camisa? 18%

Purd77/Shutterstock

Loja de roupas.

26. Um objeto que custava R$ 70,00 teve o preço aumentado em R$ 10,50. De quanto por cento foi o aumento? 15%

27. Uma mercadoria custava R$ 80,00 e esse preço foi reajustado (aumentado) em 5%. Se sobre o novo preço for dado um desconto de 5%, ela voltará a custar R$ 80,00? Calcule os preços após o aumento e após o desconto e justifique sua resposta.

28. O mesmo modelo de um fogão está sendo vendido em 2 lojas nas seguintes condições:

As imagens não estão representadas em proporção.

Luna Brillante/Shutterstock

Modelo de fogão à venda.

- na 1ª loja, sobre o preço de R$ 800,00, há um desconto de 8%;
- na 2ª loja, sobre o preço de R$ 820,00, há um desconto de 10%.

Qual dessas ofertas é a mais vantajosa financeiramente para o cliente? A oferta da 1ª loja.

29. O Índice Bovespa (Índice da Bolsa de Valores de São Paulo – Ibovespa) é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Ele indica o retorno financeiro (valorização e lucro) de um valor de 100 pontos teoricamente aplicado em ações em 2 de janeiro de 1968. Analise a tabela a seguir, que mostra a variação percentual desse índice em 5 anos.

Variação Índice Bovespa – 2019 a 2023

Ano	Variação
2023	22,28%
2022	4,7%
2021	–11,9%
2020	2,9%
2019	31,6%

Fonte dos dados: UOL. BVSP Bovespa Ind. Disponível em: https://tedit.net/4xxfp4. Acesso em: 30 jul. 2024.

Se o Ibovespa fechou o ano de 2020 com 119 017,24 pontos, com quantos pontos ele estava no fim de 2021?

$x = (1 - 0{,}119) \cdot 119\,017{,}24 = 0{,}881 \cdot 119\,017{,}24 \simeq 104\,854{,}2$
Portanto, aproximadamente, 104 854,2 pontos.

30. O preço de uma calça teve um aumento de 8% e passou a custar R$ 81,00. Qual era o preço antes do aumento?

30. $p \cdot 1{,}08 = 81{,}00 \Rightarrow p = \frac{81}{1{,}08} = 75$; portanto, a calça custava R$ 75,00 antes do aumento.

27. Considerando um aumento de 5%, temos: $80 \cdot 1{,}05 = 84$.
Considerando o aumento e o desconto que o sucedeu, temos: $f_{\text{acumulado}} = 1{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}9975$; logo, $80 \cdot 0{,}9975 = 79{,}80$.
Portanto, a mercadoria não voltará a custar R$ 80,00. Após o aumento, ela custará R$ 84,00 e, após o desconto a que se sucedeu, ela custará R$ 79,80.

31. $p \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}03 = 2{,}59 \Rightarrow p = \frac{2{,}59}{1{,}0815} \simeq 2{,}39$; portanto, o etanol custava aproximadamente R$ 2,39 antes dos aumentos.

31. Um posto de combustíveis aumentou os preços em 5% em fevereiro e 3% em janeiro.

Ekaterina Lapina/Shutterstock

Posto de gasolina.

Se o etanol custa agora R$ 2,59, quanto custava antes dos aumentos? Utilize uma calculadora para realizar os cálculos.

32. O que é mais vantajoso em uma compra: receber um único desconto de 55% ou 2 descontos sucessivos de 30%? Justifique sua resposta no caderno.

33. **(Enem)** O colesterol total de uma pessoa é obtido pela soma da taxa do seu "colesterol bom" com a taxa do seu "colesterol ruim". Os exames periódicos, realizados em um paciente adulto, apresentaram taxa normal de "colesterol bom", porém, taxa do "colesterol ruim" (também chamado LDL) de 280 mg/dL.

O quadro apresenta uma classificação de acordo com as taxas de LDL em adultos.

Taxa de LDL (mg/dL)

Ótima	Menor do que 100
Próxima de ótima	De 100 a 129
Limite	De 130 a 159
Alta	De 160 a 189
Muito alta	190 ou mais

Disponível em: www.minhavida.oom.br. Acesso em: 15 out. 2015 (adaptado).

O paciente, seguindo as recomendações médicas sobre estilo de vida e alimentação, realizou o exame logo após o primeiro mês, e a taxa de LDL reduziu 25%. No mês seguinte, realizou novo exame e constatou uma redução de mais 20% na taxa de LDL.

Professor, se necessário, ao trabalhar com a atividade **34**, comente com os estudantes que a taxa de inflação é o nome dado ao aumento de preços de produtos ou serviços. Essa taxa (que é um fator de atualização) será estudada mais adiante, neste capítulo.

De acordo com o resultado do segundo exame, a classificação da taxa de LDL do paciente é:

$f_{acumulado} = 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6$; logo, $0{,}6 \cdot 280 = 168$. Alternativa **d**.

a) ótima.

b) próxima de ótima.

c) limite.

d) alta.

e) muito alta.

34. Se, durante um processo inflacionário, determinado produto passa por 3 aumentos consecutivos de 10%, isso corresponderia a um único acréscimo de:

a) 30%.

b) 32%.

c) 33,1%.

d) 34,2%.

e) 35,5%.

$f_{acumulado} = (1{,}1)^3 = 1{,}331$; logo, $f = 1 + i \Rightarrow i = 0{,}331 = 33{,}1\%$.

Portanto, corresponde a um aumento de 33,1%. Alternativa **c**.

Texto para a próxima atividade.

Leia o trecho de uma matéria da *Exame*, de 24 de março de 2023.

> Os preços das carnes caíram nas últimas semanas, com variação abaixo da inflação do período, conforme mostrou o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo-15 (IPCA-15), prévia da inflação mensal [...]
>
> Já o preço das carnes, individualmente, caiu 0,91% no período.
>
> As carnes que mais tiveram queda de preço foram a carne de carneiro (–2,66%), o contrafilé (–2,04%) e a picanha (–1,43%).

RIVIERA, Carolina. Preço da carne cai em março; picanha e contrafilé são destaques. *Exame*, 24 de março de 2023. Disponível em:https://tedit.net/sh81xr. Acesso em: 31 jul. 2024.

rocharibeiro/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

Segundo o *Guia Alimentar para a População Brasileira*, do Ministério da Saúde, as carnes vermelhas são boas fontes de proteína e nutrientes, mas, como são ricas em gorduras saturadas, devem ser consumidas com moderação.

32. Exemplo de resposta: É mais vantajoso optar por um único desconto de 55%. Um desconto de 55% corresponde a 0,45 · x, enquanto 2 descontos sucessivos de 30% correspondem a 0,49 · x, pois 0,7 · 0,7 = 0,49. Portanto, o desconto de 55% é maior.

35. $\frac{\text{preço novo}}{\text{preço antigo}} = \frac{41{,}60}{42{,}00} \simeq 0{,}9905$; logo, $f = 1 - i \Rightarrow i \simeq 0{,}0095 = 0{,}95\%$. Portanto, a queda percentual do preço foi aproximadamente 0,95%.

Não escreva no livro

35. Considere que em um supermercado o preço da carne de sol variou de R$ 42,00 para R$ 41,60. Qual foi a queda percentual do preço? Utilize uma calculadora para realizar os cálculos.

Texto para a próxima atividade.

O inglês Isaac Newton (1643-1727) foi o cientista que relacionou a força de atração entre 2 planetas, as medidas de massa deles e a medida de comprimento da distância entre os centros de gravidade desses planetas. Ele determinou:

Dois corpos atraem-se com força diretamente proporcional às medidas de massa deles e inversamente proporcional ao quadrado da medida de comprimento da distância que separa os centros de gravidade deles.

A fórmula criada por ele é $F = \frac{G \cdot M \cdot m}{d^2}$, em que F é a medida de força de atração, G é a constante gravitacional, M e m são as medidas de massa dos corpos e d é a medida de comprimento da distância entre os centros de massa deles.

36. Se a medida de comprimento da distância entre 2 corpos é aumentada em 20%, de quanto é, aproximadamente, a redução percentual na força de atração entre eles? 31%

Texto para a próxima atividade.

Fanny Roos, atleta sueca de arremesso de peso, durante uma competição em Paris, na França. Foto de 2023.

Victor Velter/Shutterstock

O arremesso de peso é uma modalidade esportiva olímpica. Nesse esporte, os atletas arremessam, de acordo com cada categoria, uma bola de metal o mais longe que conseguirem usando a técnica do giro. Em competições com mais de 8 atletas, cada um deles tem direito a 3 lançamentos.

37. Considere uma competição de arremesso de peso em que a 3ª colocada atingiu a marca de exatos 20 metros, a 2ª colocada superou a marca da 3ª em 7% e a 1ª colocada superou a marca da 2ª em 2%. Qual foi a marca da 1ª colocada? Utilize uma calculadora para realizar os cálculos.

$f_{\text{acumulado}} = 1{,}07 \cdot 1{,}02 = 1{,}0914$; logo, $1{,}0914 \cdot 20 = 21{,}828$. Portanto, a marca da 1ª colocada foi 21,828 m.

38. Com o avanço da indústria tecnológica, é bem comum que produtos comercializados por essa área tenham valorizações altas em um curto período. Apostando nisso, Breno decidiu investir na área e abriu uma empresa que monta e revende dispositivos tecnológicos. Um dos dispositivos montados pela empresa de Breno tem grande perspectiva de **valorização**. Os aumentos no valor do dispositivo ao longo do tempo podem ser acompanhados na tabela a seguir.

Variação do valor do dispositivo ao longo do tempo

Ano	Valor do dispositivo (em reais)
2012	50
2018	57,5
2024	66,125

Dados elaborados para fins didáticos.

Supondo que a taxa de crescimento para os anos seguintes continue a mesma, qual seria o valor aproximado, em reais, desse dispositivo vendido pela empresa de Breno em 2042? Alternativa **c**.

a) 99,5 **c)** 100,57 **e)** 200,5
b) 102,57 **d)** 88,5

39. Carlos é dono de uma loja e, para recuperar o lucro nas vendas dos produtos, decide fazer um grande saldão, no qual, ao comprar qualquer peça, o cliente recebe 30% de desconto. Com essa ideia, Carlos fez com que as vendas aumentassem bastante. Após certo período, porém, o empresário percebeu que alguns objetos da loja não trariam o lucro desejado se vendidos com esse desconto; assim, depois de aplicar 30% de desconto, resolveu aplicar um aumento de 20% sobre o último valor desses produtos. Para obter o valor de um produto que sofreu essa redução e, logo após, o aumento citado, basta multiplicar o valor inicial por: Alternativa **b**.

a) 1,2.
b) 0,84.
c) 0,7.
d) 0,3.
e) 0,5.

Formalizando alguns conceitos de Matemática financeira

Vamos supor que uma pessoa aplique certa quantia, chamada **capital**, em uma caderneta de poupança por determinado **período**. Então, no final desse período, essa pessoa recebe, como compensação, uma quantia acrescida a esse capital, que recebe o nome de **juros**. Essa quantia pode ser estabelecida por uma porcentagem.

Ao final da aplicação, a pessoa terá na conta dela a quantia correspondente ao **capital** (***C***) mais os **juros** (***j***), que é conhecida como **montante** (***M***), ou seja, $M = C + j$. A razão $i = \frac{j}{C}$ é a taxa de crescimento do capital, também conhecida como **taxa de juros** (***i***), geralmente expressa em porcentagem, e será sempre associada ao período da operação.

Acompanhe o exemplo a seguir.

Um banco oferece um investimento com rendimento de 0,8% ao mês. Se uma quantia de R$ 600,00 for aplicada nesse investimento, vamos analisar o montante que o cliente terá na conta dele ao término de 1 mês.

$$j = 0{,}8\% \text{ de } 600 = 0{,}008 \cdot 600 = 4{,}8, \text{ ou seja, R\$ } 4{,}80.$$

$$M = 600 + 4{,}8 = 604{,}8$$

Então, ao término de 1 mês de aplicação, o montante será R$ 604,80.

Fique atento

Um empréstimo feito com um banco ou uma instituição financeira é parecido com uma **aplicação financeira.** Na aplicação, o montante corresponde ao valor resgatado após determinado período, de acordo com o capital investido e os juros do rendimento. No empréstimo, o montante corresponde ao valor devido após determinado período, de acordo com o valor tomado do empréstimo (capital ou principal) e os juros cobrados por ele.

Inflação

A **taxa de inflação** é o nome dado ao aumento de preços de produtos ou serviços. Geralmente é indicada por um índice percentual que corresponde à variação dos preços em comparação com um período anterior. Quando a taxa de inflação é positiva, significa que os preços aumentaram; e quando é negativa, que os preços diminuíram.

No Brasil, diferentes órgãos, públicos e privados, divulgam periodicamente taxas de inflação. O índice considerado a taxa oficial de inflação do país é o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) e é calculado pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).

Para definir o IPCA, o IBGE coleta dados de centenas de itens (produtos e serviços) em dezenas de municípios, totalizando mais de 400 mil preços. Esses itens recebem um peso diferente, e a média ponderada desses preços é a base de cálculo para o índice.

Fique atento

Quando a taxa de inflação é negativa, dizemos que ocorreu uma **deflação**.

Vídeo

Sobre o assunto

Para saber mais sobre a taxa de inflação e a cesta de produtos e serviços que o IBGE utiliza para o cálculo do IPCA, visite os endereços eletrônicos a seguir (acesso em: 9 out. 2024):

- Inflação. IBGE. Disponível em: https://tedit.net/y9twap.
- Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF). IBGE. Disponível em: https://tedit.net/04e7k9.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Sugestões de leitura que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de o acesso ser realizado em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras situações similares do capítulo.

Desse modo, um aumento de 10% no preço do feijão ou uma redução de 10% no preço dos combustíveis reflete de maneira diferente no cálculo da inflação oficial do Brasil.

Juros simples

2. $j = 0{,}01 \cdot 12 \cdot 1\,000 = 120$; logo, $M = 1\,000 + 120 = 1\,120$.
Portanto, o montante acumulado será R$ 1.120,00.
3. $j = 0{,}01 \cdot 36 \cdot 1\,000 = 360$; logo, $M = 1\,000 + 369 = 1\,360$.
Portanto, a quantia referente aos juros será R$ 360 e o montante será R$ 1.360,00.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Tainá decidiu aplicar, por 5 meses, R$ 1.000,00 em uma aplicação à taxa de juros simples de 1% ao mês. Para saber o valor que teria na conta após 5 meses, ela organizou as informações em uma tabela.

1. Copie e complete as anotações de Tainá no caderno.

Período	Juros (em reais)	Montante (em reais)
Após 1 mês	$0{,}01 \cdot 1 \cdot 1000 = 10$	$1000 + 10 = 1010$
Após 2 meses	$0{,}01 \cdot 2 \cdot 1000 = 20$	$1000 + 20 = 1020$
Após 3 meses	$0{,}01 \cdot 3 \cdot 1000 = 30$	$1\,000 + 30 = 1\,030$
Após 4 meses	$0{,}01 \cdot 4 \cdot 1\,000 = 40$	$1\,000 + 40 = 1\,040$
Após 5 meses	$0{,}01 \cdot 5 \cdot 1\,000 = 50$	$1\,000 + 50 = 1\,050$

2. Qual será o montante após 1 ano de aplicação?

3. Qual é a quantia referente aos juros e ao montante após 3 anos de aplicação?

4. Como você fez para responder às atividades **1** e **2**? Converse com os colegas.
Resposta pessoal.

No *Explore para descobrir*, estudamos que, no sistema de juros simples, os juros incidem apenas sobre o capital investido, e o montante obtido nesse regime de capitalização depende do capital inicial, do período de aplicação e da taxa de juros.

Acompanhe mais um exemplo.

Pedro emprestou de um banco R$ 10.000,00. Após 2 meses, pagou R$ 10.400,00. Os juros pagos por Pedro foram R$ 400,00 e a taxa de juros, durante o período, foi $\frac{400}{10\,000} = \frac{4}{100} = 4\%$. Considerando que os juros incidem apenas sobre o valor inicial, a taxa foi **2% ao mês**.

O principal (ou capital), que era a dívida inicial de Pedro, é R$ 10.000,00; o montante, que era a dívida na época do pagamento, é R$ 10.400,00.

Nesse exemplo, o capital C é aplicado durante t períodos, assim a taxa de juros i por período incide apenas sobre o capital inicial, gerando desse modo os mesmos juros no período. Os juros j, em situações como essa, são chamados de **juros simples**.

A taxa de juros i é dada por $i = \frac{j}{C}$; assim, os juros obtidos no fim de um período são dados por: $j = C \cdot i$.

Os juros obtidos no fim de t períodos são dados por: $j = (C \cdot i) \cdot t$.

E o montante obtido no sistema de juros simples é dado por:

$$M = C + j \text{ ou } M = C + C \cdot i \cdot t = C(1 + i \cdot t).$$

Juros compostos

fizkes/Shutterstock

Geralmente, estabelecimentos cobram juros compostos em compras e empréstimos.

Acompanhe o exemplo a seguir.

Um capital de R$ 40.000,00 foi aplicado à taxa de 2% ao mês durante 3 meses. Qual foi o montante no fim dos 3 meses?

No **sistema de juros simples**, calculamos:

- juros produzidos em 1 mês:

$$2\% \text{ de } 40\,000 = 0{,}02 \cdot 40\,000 = 800$$

- juros produzidos em 3 meses:

$$3 \cdot 800 = 2\,400$$

- montante no fim de 3 meses:

$$40\,000 + 2\,400 = 42\,400$$

Logo, depois de 3 meses, o montante em um sistema de juros simples será R$ 42.400,00.

No **sistema de juros compostos**, temos:

- juros produzidos no 1º mês: 2% de 40 000 = 800;
- montante no fim do 1º mês: 40 000 + 800 = 40 800;
- juros produzidos no 2º mês: 2% de 40 800 = 816;
- montante no fim do 2º mês: 40 800 + 816 = 41 616;
- juros produzidos no 3º mês: 2% de 41 616 = 832,32;
- montante no fim do 3º mês: 41 616 + 832,32 = 42 448,32.

Logo, depois de 3 meses em um sistema de juros compostos, o montante será R$ 42.448,32.

Note que, no sistema de juros simples, os juros foram R$ 2.400,00, e no de juros compostos, foram R$ 2.448,32.

Perceba que existe uma diferença de R$ 2.488,32 entre cada montante no fim do 3º mês (pois R$ 42.448,32 − R$ 40.000,00 = R$ 2.488,32). O que gerou essa diferença?

Essa diferença foi gerada pelo fato de que, no sistema de juros compostos, devemos calcular os juros no fim de cada período, formando um novo montante sobre o qual se calculam os juros do período seguinte, até esgotar o período da aplicação (é o que denominamos "juros sobre juros").

Reflita

Não escreva no livro

- Em um sistema de juros compostos, uma dívida de R$ 1.000,00 que sofre incidência de 10% de taxa de juros ao mês resulta em qual saldo devedor depois de 2 meses?
- Qual é a porcentagem que representa os juros acumulados em relação ao valor da dívida?

- $0{,}1 \cdot 1\,000 = 100$
  $1\,000 + 100 = 1\,100$
  $0{,}1 \cdot 1\,100 = 110$
  $1\,100 + 110 = 1\,210$
  Portanto, depois de 2 meses a dívida será R$ 1.210,00.
- $\frac{1\,210}{1\,000} = 1{,}21$; logo, 21%.

Agora, acompanhe o cálculo, no sistema de juros compostos, do montante (M), produzido por um capital (C) e aplicado à taxa de juros (i) no fim de t períodos.

Período	Montante inicial	Juros	Montante no fim do período
1º período	C	$i \cdot C$	$M_1 = C + i \cdot C = C(1 + i)$
2º período	M_1	$i \cdot M_1$	$M_2 = M_1 + i \cdot M_1 = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$
3º período	M_2	$i \cdot M_2$	$M_3 = M_2 + i \cdot M_2 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$
⋮	⋮	⋮	⋮

No fim de t períodos, o montante será $M = C(1 + i)^t$.

Podemos, então, escrever que, no sistema de juros compostos, o capital C, aplicado à taxa de juros i ao período, produz juros j e gera um montante M após t períodos.

$$M = C(1 + i)^t$$

e

$$j = M - C$$

Fique atento

Usando o fator de atualização, podemos escrever o montante $M = C \cdot f^t$, em que $f = 1 + i$.

Acompanhe outro modo de calcular o montante (M).

Temos:

C: R$ 40.000,00;

i: 2% ao mês (0,02);

t: 3 meses.

- Montante ao final de 3 meses:

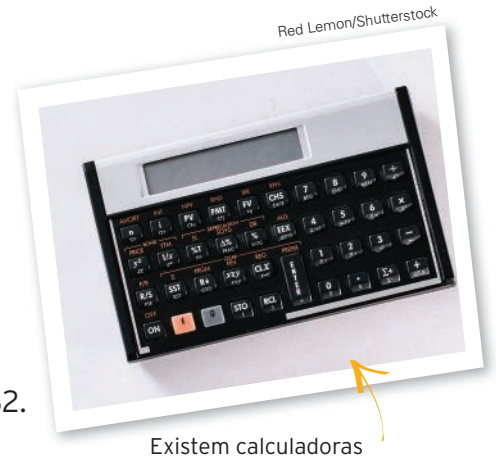
$$M = C\,(1 + i)^t = 40\,000(1{,}02)^3 = 40\,000 \cdot 1{,}061208 = \\ = 42\,448{,}32$$

Portanto, o montante ao final de 3 meses é R$ 42.448,32.

- Juros produzidos nos 3 meses:

$$j = 42\,448{,}32 - 40\,000 = 2\,448{,}32$$

Portanto, a quantia referente aos juros ao final de 3 meses é R$ 2.448,32.



Red Lemon/Shutterstock

Existem calculadoras criadas especialmente para realizar cálculos em contextos financeiros. Elas são denominadas calculadoras financeiras.

Fique atento

Não se esqueça de que, para as atividades desta Unidade, caso você e o professor julguem necessário, pode-se fazer uso de tecnologias digitais, como planilhas eletrônicas e calculadoras.

Atividades resolvidas

3. Quanto receberá de juros, no fim de 1 semestre, uma pessoa que investiu a quantia de R$ 6.000,00 à taxa de juros compostos de 1% ao mês?

Fique atento

$(1 + 0{,}01)^6 = (1{,}01)^6 \simeq 1{,}0615$ é o fator acumulado em 6 meses.

Resolução

C: R$ 6.000,00

t: 1 semestre = 6 meses

i: 1% (0,01) ao mês

$M = C(1 + i)^6 = 6\,000(1 + 0{,}01)^6 \simeq 6\,369$

Então, temos:

$$j = M - C = 6\,369 - 6\,000 = 369$$

Logo, a pessoa receberá aproximadamente R$ 369,00 de juros.

4. Paula fez um empréstimo de R$ 3.000,00 em um banco, à taxa de juros compostos de 1% ao mês. Após 2 meses, pagou R$ 1.500,00 e, 1 mês após esse pagamento, liquidou o débito. Qual foi o valor desse último pagamento?

Resolução

Após 2 meses, o montante da dívida é dado por:

$M = C(1 + i)^2 = 3\,000 \cdot (1 + 0{,}01)^2 = 3\,060{,}3$

Considerando o pagamento de R$ 1.500,00, resta um saldo de:

$$3\,060{,}3 - 1500 = 1560{,}3$$

Novo montante da dívida:

$$M = 1560{,}3 \cdot (1 + 0{,}01)^1 \simeq 1575{,}9$$

O último pagamento foi R$ 1.575,90.

5. Um capital de R$ 2.000,00, aplicado a uma taxa de juros compostos, rendeu, após 4 meses, juros de R$ 165,00. Qual foi a taxa de juros mensal?

Resolução

C: R$ 2.000,00

t: 4 meses

j: R$ 165,00

M: R$ 2.165,00 = R$ 2.000,00 + R$ 165,00

i: ?

Temos:

$$M = C(1 + i)^t \Rightarrow 2165 = 2\,000(1 + i)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + i)^4 = \frac{2165}{2\,000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + i)^4 = 1{,}0825 \Rightarrow 1 + i = \sqrt[4]{1{,}0825} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + i \simeq 1{,}020015981 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i \simeq 0{,}020015981 \Rightarrow i \simeq 2{,}0015981\%$$

Portanto, a taxa de juros foi aproximadamente 2% ao mês.

Atividade resolvida passo a passo

6. (UFSM-RS) A chegada da televisão no Brasil facilitou o acesso à informação. Com o avanço da tecnologia, os aparelhos estão cada dia mais modernos e consequentemente mais caros.

Um consumidor deseja adquirir uma televisão com tecnologia de última geração. Enquanto aguarda o preço da televisão baixar, ele aplica o capital disponível de R$ 3.000,00 a juros simples de 0,8% ao mês em uma instituição financeira, por um período de 18 meses.

O montante, ao final desse período, é igual a:

a) R$ 7.320,00.
b) R$ 5.400,00.
c) R$ 4.320,00.
d) R$ 3.432,00.
e) R$ 3.240,00.

Fique atento

Em aproximações, costuma-se dividir uma taxa anual por 12 para determinar uma taxa mensal. Esse procedimento seria o equivalente a considerar uma taxa de juros simples que incide mensalmente sobre o capital para gerar o montante. No entanto, uma taxa mensal i_M equivalente à taxa anual i_A deve satisfazer a relação $\left(1 + i_M\right)^{12} = 1 + i_A$.

Resolução

Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dado o capital inicial (R$ 3.000,00), a taxa de juros mensal (0,8%) e o período de aplicação (18 meses).

b) O que se pede?

Pede-se o montante ao final dessa aplicação, que dura 18 meses.

Planejando a solução

Por se tratar de um problema de juros simples, vamos utilizar as seguintes relações do montante e dos juros/rendimento:

$$M = C + j$$
$$j = (C \cdot i) \cdot t$$

em que M é o montante, C é o capital, i é a taxa de juros e t é o intervalo de tempo da aplicação.

Antes de realizar o cálculo dos juros/rendimento, é interessante transformar a taxa de juros em um valor decimal para facilitar os cálculos.

Executando o que foi planejado

- Transformando a taxa de juros em um valor decimal:

$$0{,}8\% = \frac{0{,}8}{100} = 0{,}008$$

- Calculando os juros/rendimento:

$$j = 3\,000 \cdot 0{,}008 \cdot 18 = 432$$

A quantia referente aos juros é R$ 432,00.

- Calculando o montante ao final de 18 meses:

$$M = 3\,000 + 432 = 3\,432$$

O montante é R$ 3.432,00 ao final de 18 meses.

Verificando

Ao mês, o capital disponível de R$ 3.000,00 rende R$ 24,00, resultante do cálculo:

$$0{,}008 \cdot 3.000 = 24$$

Assim, como sabemos que a aplicação foi de 18 meses, ao término desse período o capital disponível terá rendido R$ 432,00 (pois $18 \cdot 24 = 432$). Logo, verifica-se que o montante resultante da aplicação é R$ 3.432,00.

Emitindo a resposta

Alternativa **d**.

Ampliando a atividade Não escreva no livro

a) Considere que o mesmo consumidor decidiu aumentar o montante obtido na aplicação para comprar uma televisão que será lançada daqui a 1 ano com valor inicial de R$ 4.500,00. Para isso, fez um novo investimento com rendimento de 2% ao mês e a aplicação foi feita em regime de juros simples. O consumidor terá, ao final da 2ª aplicação, dinheiro suficiente para adquirir a TV? Se não tiver, quanto faltará para completar o valor da TV?

b) Converse com os colegas sobre a rapidez do avanço tecnológico e os reflexos desse processo na sociedade, no que diz respeito aos mais variados aspectos sociais e econômicos. Relatem as experiências vivenciadas no mundo tecnológico e os "frutos" que vocês conseguiram coletar delas. Resposta pessoal.

7. Qual é o período necessário para que um capital dobre se for aplicado, a juros compostos, a uma taxa de 30% ao ano?

Resolução

$$M = C \cdot f^t \text{ e } M = 2C \Rightarrow 2C = C \cdot (1{,}3)^t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1{,}3)^t = 2$$

Para resolvermos essa equação, vamos primeiramente notar que $(1{,}3)^2 = 1{,}69$ e $(1{,}3)^3 = 2{,}197$; portanto, para algum t entre 2 e 3, temos $(1{,}3)^t = 2$. Vamos usar uma planilha eletrônica para nos ajudar nessa tarefa.

- Digite na 1ª linha da coluna A da planilha eletrônica a letra t e, nas linhas seguintes, os valores de 2,1 a 2,9, variando de 0,1 em 0,1.
- Digite $(1{,}3)^t$ na célula B1. Depois, na célula B2, digite **=1,3^A2** e pressione a tecla "Enter"; a planilha calculará $(1{,}3)^{2{,}1} \simeq 1{,}7349$. Clique e arraste a alça de autopreenchimento até a célula B10.

a) $C = 3\,432$; $i = 0{,}02$; $t = 12$.
$M = C(1 + i \cdot t) = 3\,432 \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 12) = 4\,255{,}68$
$j = 4\,500 - 4\,255{,}68 = 244{,}32$
Portanto, vão faltar R$ 244,32.

- O resultado aproximado deverá ser o seguinte:

t	$(1{,}3)^t$
2,1	1,7349
2,2	1,7810
2,3	1,8284
2,4	1,8770
2,5	1,9269
2,6	1,9781
2,7	2,0307
2,8	2,0847
2,9	2,1401

Logo, podemos considerar a resposta para 2,7 anos, que corresponde a aproximadamente 2 anos e 8 meses. Portanto, o capital dobrará após aproximadamente 2 anos e 8 meses.

8. Qual deve ser o período para que a quantia de R$ 30.000,00 gere o montante de R$ 32.781,81, quando aplicada à taxa de 3% ao mês, no sistema de juros compostos?

Resolução

C: 30 000; M: 32 781,81; i: 3% ao mês (0,03); t: ?

$$M = C(1+i)^t \Rightarrow (1+i)^t = \frac{M}{C} \Rightarrow (1{,}03)^t = \frac{32\,781{,}81}{30\,000} \Rightarrow (1{,}03)^t = 1{,}092727$$

Novamente, com o apoio de uma planilha eletrônica, podemos calcular $(1{,}03)^2 = 1{,}0609$ e $(1{,}03)^3 = 1{,}092727$. Portanto, o período deve ser 3 meses.

Reflita: Exemplo de resposta: Pode-se construir uma planilha similar que calcule os valores $(1{,}3)^t$ para valores entre 2,6 e 2,7, com variação de 0,01 em 0,01, por exemplo. Nesse caso, obtém-se $t \simeq 2{,}64$, que corresponde a aproximadamente 2 anos, 7 meses e 20 dias.

Reflita

Para obter uma aproximação ainda melhor para a resposta à atividade resolvida **7**, como você procederia? Qual seria essa resposta?

Atividades

40. $f_{acumulado} = 1{,}8 \cdot 1{,}5 = 2{,}7$; logo, $f > 1$; assim, temos: $i = f - 1 = 2{,}7 - 1 = 1{,}7 = 170\%$. Portanto, o reajuste foi de 170%. O poder de compra diminui, pois os produtos ficam mais caros.

Não escreva no livro

Texto para a próxima atividade.

O Brasil viveu, nas décadas de 1980 e 1990, um período com índices altíssimos de inflação. Os preços eram remarcados quase que diariamente, o que fazia com que as pessoas precisassem fazer as compras do mês no mesmo dia que recebiam o salário para não perder o poder de compra até o próximo pagamento. Economistas chamam esse momento de aumento de preços de hiperinflação.

40. Se um produto passou por um reajuste de 80% em determinado mês e, no mês seguinte, outro de 50%, qual foi o reajuste ao final desses 2 aumentos? Nessa situação, o poder de compra de uma pessoa que queira adquirir esse produto aumenta ou diminui? Justifique sua resposta no caderno.

41. Se em determinada região o feijão triplicou de preço em 1 mês, qual foi o aumento percentual desse item? Sabendo que o feijão, nessa região, tem um peso de 2% no cálculo da inflação e que todos os demais itens que compõem o índice de inflação se mantiveram estáveis, qual foi a variação da inflação nesse mês? 200%; 4%.

Fique atento

Poder de compra é a capacidade de comprar produtos ou contratar serviços.

Agliberto Lima/Estadão Conteúdo

As etiquetadoras eram um dos instrumentos mais utilizados pelos varejistas no período de hiperinflação. Os preços sofriam reajustes mais rapidamente do que o tempo para ajustar os valores nos caixas das lojas, de modo que a etiqueta garantia o preço final do produto.

Não escreva no livro

42. Responda no caderno aos itens a seguir.

a) De janeiro a abril de 2023, mais de 70% dos reajustes salariais superaram a inflação para o período. O que isso significa para o trabalhador em termos de poder de compra?

Fonte dos dados: MATOS, Fábio. Mais de 70% dos reajustes salariais superaram a inflação em 2023. *Metrópoles*, 21 maio 2023. Disponível em: https://tedit.net/70a2ew. Acesso em: 8 ago. 2024.

Significa que houve um ganho no poder de compra, ou seja, o trabalhador pôde consumir mais do que consumia no ano anterior.

b) Considere uma pessoa que ganha R$ 2.000,00 por mês e que o índice de inflação no período foi de 4,6%. Qual foi o ganho real (ganho acima da inflação), em reais, desse trabalhador se o reajuste do salário dele foi 8%? R$ 68,00

43. Quanto renderá a quantia de R$ 600,00, aplicada a juros simples, com taxa de 2,5% ao mês, ao final de 1 ano e 3 meses?
$j = C \cdot i \cdot t \Rightarrow j = 600 \cdot 0{,}025 \cdot 15 = 225$; logo, renderá R$ 225,00 de juros.

44. Um capital de R$ 800,00, aplicado a juros simples com uma taxa de 2% ao mês, resultou no montante de R$ 880,00 em certo período. Qual foi o período de aplicação?
$j = M - C$ e $j = C \cdot i \cdot t \Rightarrow M - C = C \cdot i \cdot t \Rightarrow$
$\Rightarrow 880 - 800 = 800 \cdot 0{,}02 \cdot t \Rightarrow t = \frac{80}{800 \cdot 0{,}02} = 5$
Portanto, o período de aplicação foi 5 meses.

45. Uma dívida de R$ 750,00 foi paga 8 meses depois de contraída e a quantia referente aos juros foi R$ 60,00. Sabendo que o cálculo foi feito usando juros simples, qual foi a taxa de juros mensal?

45. $j = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 60 = 750 \cdot i \cdot 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow i = \frac{60}{750 \cdot 8} = \frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\%$
Portanto, a taxa de juros mensal foi de 1%.

46. Um capital aplicado a juros simples rendeu, à taxa de 25% ao ano, juros de R$ 110,00 depois de 24 meses. Qual foi esse capital? R$ 220,00

47. Se uma mercadoria cujo preço é R$ 200,00 for paga em 6 meses, com taxa de 20% ao ano, quanto será pago de juros no sistema de juros simples?
$j = C \cdot i \cdot t \Rightarrow j = 200 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 20$; logo, R$ 20,00.

48. Calcule o montante produzido por um capital de R$ 5.000,00 aplicado à taxa de 6% ao bimestre, após 1 ano, no sistema de juros compostos.
$M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}06)^6 \simeq 7\,092{,}60$; logo, aproximadamente R$ 7.092,60.

49. Um capital de R$ 900,00 foi aplicado a juros compostos à taxa de 18% ao ano durante 2 anos. Quanto rendeu de juros:

a) em porcentagem? $f_{acumulado} = (1 + i)^t = (1{,}18)^2 = 1{,}3924$; logo, 39,24%.

b) em reais? $0{,}3924 \cdot 900 = 353{,}16$; logo, R$ 353,16.

50. Um capital aplicado a juros simples gerou, à taxa de 4% ao mês, um montante de R$ 11.317,60 depois de 1 ano e meio. Qual foi o capital aplicado?
R$ 6.580,00

51. Uma dívida de R$ 700,00 foi contraída a juros compostos de 2% ao mês para ser quitada em 4 meses.

a) Quanto deverá ser pago para quitar a dívida?
$700 \cdot (1{,}02)^4 \simeq 757{,}70$; logo, aproximadamente R$ 757,70.

b) Qual é a taxa de juros acumulada nesse período de 4 meses?
$(1{,}02)^4 \simeq 1{,}0824$; logo, aproximadamente 8,24%.

52. Carlos deixou R$ 800,00 aplicados por 3 anos em um fundo de investimento. Se o rendimento médio desse fundo fosse de 1% ao mês, quanto Carlos teria ao final desse período? $M = C(1 + i)^t = 800 \cdot (1 + 0{,}01)^{36} \simeq 1\,144{,}61$; logo, aproximadamente R$ 1.144,61.

Fique atento

O regime de juros simples não ocorre no dia a dia. As situações que consideram a modalidade de juros simples são hipotéticas. Considere sempre a modalidade de juros compostos nas situações em que a modalidade não é explicitada.

53. Após 6 meses, temos: $M_1 = 1\,000 \cdot (1{,}007)^6 \simeq 1\,042{,}74$.
Considerando o novo capital de 1 000,00 + 1 042,74 = 2 042,74, após outros 6 meses, temos: $M_2 = 2\,042{,}74 \cdot (1{,}007)^6 \simeq 2\,130{,}05$.
Portanto, depois de 1 ano, Afonso tinha aproximadamente R$ 2.130,05 na poupança.

53. Afonso depositou R$ 1.000,00 na poupança no primeiro dia de fevereiro de 2023 e, depois de 6 meses, depositou mais R$ 1.000,00. Nesse período, a aplicação rendeu, em média, 0,7% ao mês. Depois de 1 ano, quanto ele tinha na poupança?

54. Melissa quer construir uma planilha eletrônica que dê o montante para certo capital aplicado a uma taxa de 4% ao mês em regime de juros simples, sendo o período medido em meses. Para isso, montou a estrutura apresentada a seguir.

Reprodução/LibreOffice

	A	B	C	D	E	F
1	**Capital**		**Prazo**		**Montante**	

Detalhe da tela da planilha eletrônica.

a) Que fórmula Melissa pode digitar na célula F1 para obter o montante, dados os valores inseridos nas células B1 e D1? **=B1*(1+0,04*D1)**

b) Construa uma planilha igual à de Melissa e insira na célula F1 a fórmula obtida no item anterior. Depois, teste diferentes valores para o prazo e responda: Em quantos meses um capital de R$ 100,00 triplicará? E um capital de R$ 200,00? 50 meses; 50 meses.

c) No sistema de juros simples à taxa de 4% ao mês, qual é o período para que um capital C triplique? 50 meses.

d) Altere a fórmula do montante, dessa vez considerando o regime de juros compostos, repita os testes e responda às mesmas perguntas do item **b**. Lembre-se de usar uma planilha eletrônica para calcular o valor aproximado de t. Dica: $(1{,}04)^{20} \simeq 2{,}19$ e $(1{,}04)^{30} \simeq 3{,}24$.
29 meses; 29 meses.

e) No sistema de juros compostos, a uma taxa de juros mensais de 4%, qual é período para um capital C triplicar? Use uma calculadora ou uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos. 29 meses.

f) Compare os valores obtidos nos itens **c** e **e**. Justifique no caderno por que os resultados são diferentes. Porque o regime de juros compostos faz com que o montante aumente mais em determinado prazo em comparação com o regime de juros simples.

Professor, na atividade **54**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

55. Pretende-se aplicar um capital de R$ 500,00 à taxa de 9% ao mês.

a) Utilizando uma planilha eletrônica, construa uma tabela que compare, mês a mês, ao longo de 1 ano, o montante quando o capital é aplicado nos regimes de juros simples e juros compostos. A tabela encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) O montante em ambos os sistemas de juros é igual em algum dos meses? Por quê? Sim, em janeiro, porque para $t = 1$, temos $500(1 + 0{,}09 \cdot t) = 500(1{,}09)^t$.

c) Qual sistema de juros apresentou um crescimento maior ao longo do ano?
O sistema de juros compostos.

56. Em qual período, à taxa de 4% ao mês, uma aplicação de R$ 1.000,00 renderá juros de R$ 160,00 no sistema de juros compostos? Use uma calculadora ou uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos.

56. Precisamos determinar t tal que $1\,000 \cdot (1{,}04)^t = 1\,170$. Usando uma calculadora ou uma planilha eletrônica, podemos calcular $1\,000 \cdot (1{,}04)^4 \simeq 1\,169{,}86$. Portanto, a partir do 4º mês, a aplicação terá rendido R$ 160,00.

57. Carla fez um empréstimo de R$ 2.000,00, na modalidade de juros simples, a uma taxa de 5% ao mês, e 1 mês após o empréstimo pagou R$ 1.000,00. Além disso, 1 mês depois desse pagamento, ela liquidou a dívida. Qual foi o valor desse último pagamento?
$j = C \cdot t \cdot i = 2\,000 \cdot 2 \cdot 0{,}05 = 200$. Logo, a dívida total era de R$ 2.200,00.
Como ela já tinha pago R$ 1.000,00, para liquidar a dívida, a última parcela seria de R$ 1.200,00.

Não escreva no livro

58. No Brasil, a década de 1990 foi marcada pelo início da informatização dos lares brasileiros. A aquisição de computadores deixou de ser quase exclusivamente de universidades e corporações e passou a ser mais acessível, apesar do preço alto na época.

A imagem mostra a propaganda de um computador à venda por R$ 4.194,00 à vista. Suponha que uma pessoa quis adquirir esse computador, mas não tinha dinheiro para pagar à vista e fez um parcelamento a juros simples, com uma taxa de 1% ao mês, durante 2 anos. Qual foi o valor total, aproximadamente, pago pelo computador?

Artsplav/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

OB production/Shutterstock

a) R$ 4.800,00
b) R$ 4.900,00
c) R$ 5.000,00
d) R$ 5.100,00
e) R$ 5.200,00

$M = C + C \cdot i \cdot t \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 4\,194 + 4\,194 \cdot$
$\cdot 0{,}01 \cdot 24 = 5\,200{,}56$
Portanto, o valor total pago pelo computador foi aproximadamente R$ 5.200,00. Alternativa **e**.

59. **(Enem)** Um rapaz possui um carro usado e deseja utilizá-lo como parte do pagamento na compra de um carro novo. Ele sabe que, mesmo assim, terá que financiar parte do valor da compra.

Depois de escolher o modelo desejado, o rapaz faz uma pesquisa sobre as condições de compra em três lojas diferentes. Em cada uma, é informado sobre o valor que a loja pagaria por seu carro usado, no caso de a compra ser feita na própria loja. Nas três lojas são cobrados juros simples sobre o valor a ser financiado, e a duração do financiamento é de um ano.

O rapaz escolherá a loja em que o total, em real, a ser desembolsado será menor. O quadro resume o resultado da pesquisa.

Loja	Valor oferecido pelo carro usado (R$)	Valor do carro novo (R$)	Percentual de juros (%)
A	13.500,00	28.500,00	18 ao ano
B	13.000,00	27.000,00	20 ao ano
C	12.000,00	26.500,00	19 ao ano

A quantia a ser desembolsada pelo rapaz, em real, será:

a) 14.000.
b) 15.000.
c) 16.800.
d) 17.255.
e) 17.700.

59. O valor desembolsado de acordo com as condições de cada loja é dado a seguir.

• Loja **A**: $C = 28\,500 - 13\,500 =$
$= 15\,000$. Assim: $1{,}18 \cdot 15\,000 =$
$= 17\,700$, que corresponde a R$ 17.700,00.

• Loja **B**: $C = 27\,000 - 13\,000 =$
$14\,000$. Assim: $1{,}2 \cdot 14\,000 =$
$= 16\,800$, que corresponde a R$ 16.800,00.

• Loja **C**: $C = 26\,500 - 12\,000 =$
$= 14\,500$. Assim:

$1{,}19 \cdot 14\,500 = 17\,255$, que corresponde a R$ 17.255,00.
Portanto, comprando na loja **B**, o rapaz desembolsará a menor quantia, que corresponde a R$ 16.800,00.
Alternativa **c**.

60. Mônica é uma estudante do curso de Estatística em uma universidade e sempre gostou de investir. Porém, antes de fazer certos investimentos, considera todas as condições possíveis, a fim de evitar perder dinheiro no investimento.

Certa vez, ela estava interessada em aplicar R$ 3.000,00 a uma taxa de juros de 5% ao mês e, ao avaliar o potencial de rendimento do capital que tinha, chegou às seguintes conclusões:

I. considerando o regime de capitalização simples, os juros a serem recebidos ao final de 12 meses serão R$ 1.800,00;
II. considerando o regime de capitalização simples e um prazo de 24 meses, o valor a ser recebido de juros será menos de R$ 3.000,00.

I. $j = C \cdot i \cdot t \Rightarrow j = 3000 \cdot 0{,}05 \cdot 12 = 1800$; verdadeira. **II**. $j = C \cdot i \cdot t \Rightarrow j = 3000 \cdot 0{,}05 \cdot 24 = 3600$; falsa.
III. $M = C + j = 3000 + 3600 = 6600$; verdadeira. Portanto, são verdadeiras as afirmativas **I** e **III**.
Alternativa **c**.

III. considerando o regime de capitalização simples, esse investimento vai produzir um montante de exatamente R$ 6.600,00 ao final de 24 meses.

Fique atento

O regime de juros simples também é chamado de regime de capitalização simples e o regime de juros compostos também é chamado de regime de capitalização composta.

Nesse contexto, está(ão) correta(s) apenas a(s) afirmativa(s):

a) **I**.
b) **I** e **II**.
c) **I** e **III**.
d) **II** e **III**.
e) **I**, **II** e **III**.

61. **(Enem)** Um pequeno comerciante pretende aplicar R$ 60.000,00 em ações na Bolsa de Valores. O quadro seguinte traz algumas das opções de investimento.

Fundos de ações	Retorno em 12 meses	Taxa de administração
W W W W	27,5%	12%
BBBT	24,7%	15%
BGT Capital	29,5%	13%
JGPF	25,9%	14%
IKPQ	23,9%	11%

Fique atento

Considere, para a atividade **61**, que a taxa de administração dos fundos de ações incide sobre o montante acumulado em cada período.

Dentre as opções apresentadas no quadro, a melhor aplicação para esse montante de dinheiro é: Alternativa **b**.

a) BBBT.
b) BGT Capital.
c) IKPQ.
d) JGPF.
e) W W W W.

62. $M = C(1 + i)^t = 20000 \cdot (1 + 0{,}013)^{96} \simeq$
$\simeq 20000 \cdot 3{,}46 = 69200$
Ricardo precisará pagar aproximadamente R$ 69.200,00 pelo empréstimo.
Alternativa **a**.

62. Ricardo precisou de um empréstimo de R$ 20.000,00 para fazer uma reforma na casa dele e concordou em pagar esse valor sob um regime de capitalização composto com uma taxa de 1,3% ao mês e um prazo de 96 meses.

Ao fim desse prazo, quanto Ricardo precisará pagar pelo empréstimo?
(Considere $(1{,}013)^{96} \simeq 3{,}46$.)

a) R$ 69.200,00
b) R$ 42.900,00
c) R$ 35.000,00
d) R$ 42.500,00
e) R$ 53.000,20

Pae GAG/Shutterstock

Ao realizar empréstimos, é importante, considerando a renda familiar, calcular o montante que será pago para realizar um planejamento dos pagamentos que seja financeiramente viável.

63. Além das opções de investimento atreladas a valores fixos de taxa de juros, é comum aplicações apresentarem opções de taxa em função do Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), por exemplo.

Considere uma aplicação de R$ 5.000,00 por 15 anos com taxa de juros anual de IPCA + 4%. Qual será o montante final nessa situação?

Não é possível calcular o montante final da aplicação, pois não é possível prever qual será o IPCA ao longo dos 15 anos, portanto, trata-se de um problema com dados incompletos.

Relação entre juros e funções

Acompanhe o exemplo a seguir.

Consideremos uma dívida de R$ 10.000,00 sobre a qual incidem juros de 40% ao ano. Acompanhe a seguir a evolução ano a ano dos montantes da dívida nos 2 tipos de sistema de juros: simples e composto.

Período	Montante a juros simples (em reais)	Montante a juros compostos (em reais)
Após 1 ano	$10\,000 + 10\,000 \cdot 0{,}4 \cdot 1 = 14\,000$	$10\,000 + 10\,000 \cdot 0{,}4 = 14\,000$
Após 2 anos	$10\,000 + 10\,000 \cdot 0{,}4 \cdot 2 = 18\,000$	$14\,000 + 14\,000 \cdot 0{,}4 = 19\,600$
Após 3 anos	$10\,000 + 10\,000 \cdot 0{,}4 \cdot 3 = 22\,000$	$19\,600 + 19\,600 \cdot 0{,}4 = 27\,440$
Após 4 anos	$10\,000 + 10\,000 \cdot 0{,}4 \cdot 4 = 26\,000$	$27\,440 + 27\,440 \cdot 0{,}4 = 38\,416$
Após t anos	$10\,000 + 4\,000t$	$10\,000 \cdot (1{,}4)^t$

Podemos notar que, no sistema de juros simples, o montante aumenta um valor fixo (R$ 4.000,00) ano a ano. Já no sistema de juros compostos, o montante é multiplicado por 1,4 ano a ano, resultando em aumentos diferentes em cada ano.

Isso ocorre porque o montante, no sistema de juros simples, é obtido em função do período segundo a relação $M = 10\,000 + 4\,000t$ e, no sistema de juros compostos, é obtido em função do período por meio de $M = 10\,000 \cdot (1{,}4)^t$. Dizemos no 1º caso que o crescimento do montante da dívida é **linear** e, no segundo caso, **exponencial**.

Para um capital inicial C, o montante acumulado no regime de juros simples é dado por $M = C(1 + i \cdot t)$ e no sistema de juros compostos é dado por $M = C(1 + i)^t$. Ambas as relações mostram uma dependência entre M e t. Para cada t existe um único valor correspondente de M.

Você já deve ter estudado que, quando existe uma relação de dependência entre 2 grandezas, podemos escrever uma delas em função da outra. Essa relação de dependência na Matemática é chamada de **função**.

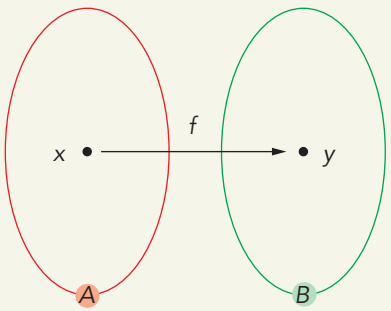
Fique atento

Lembre-se de como podemos definir uma função: dados 2 conjuntos não vazios A e B, uma função f de A em B é uma relação que associa cada elemento x pertencente a A a um único elemento y pertencente a B.

$f: A \to B$ (lemos: f é uma função de A em B)

$x \mapsto y$

O conjunto A é o domínio (D) da função f, o conjunto B é o contradomínio (CD) e o conjunto de todos os y obtidos pela função é o conjunto imagem (Im(f)).



Banco de imagens/Arquivo da editora

Reflita: Para $t = 0$, temos $M = 10\,000$, que representa o valor inicial da dívida.

Não escreva no livro

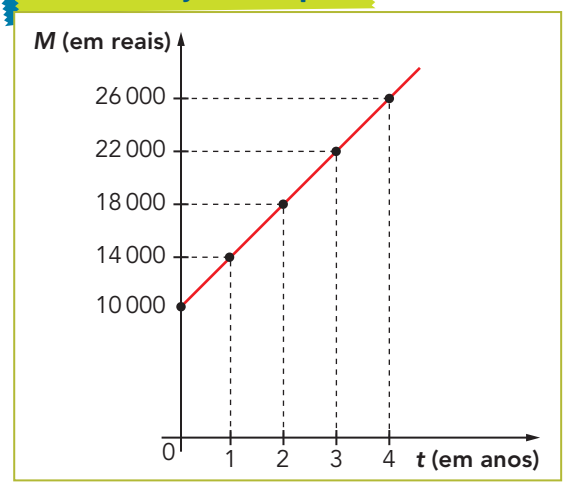
No exemplo dado, dizemos que M está em função de t e que M é a variável dependente e t é a variável independente.

Representando graficamente os montantes obtidos nos 2 sistemas de juros, obtemos os gráficos representados a seguir.

Reflita

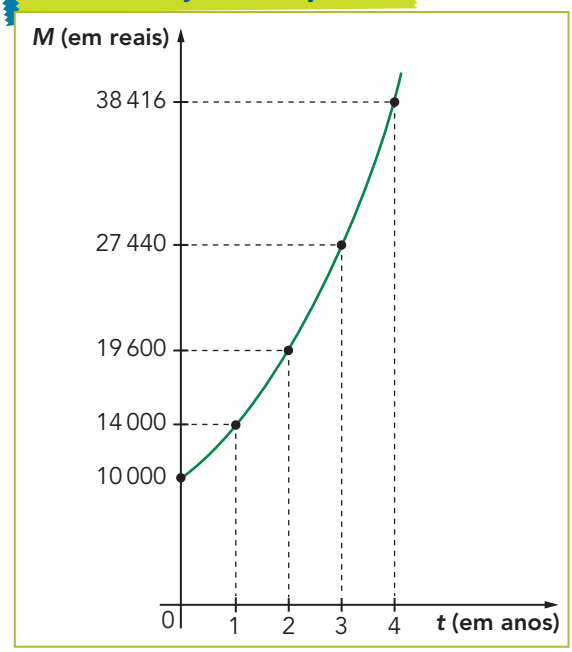
Qual é o montante para $t = 0$? O que esse valor representa?

Sistema de juros simples



Banco de imagens/Arquivo da editora

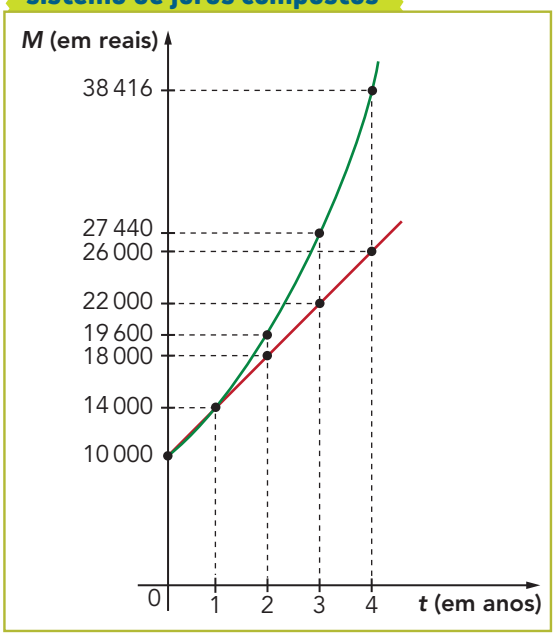
Sistema de juros compostos



Banco de imagens/Arquivo da editora

Agora, vamos comparar os 2 gráficos, colocando-os em um mesmo sistema de eixos.

Sistema de juros simples e sistema de juros compostos



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que as intersecções dos gráficos ocorrem nos pontos (0, 10 000) e (1, 14 000). Isso significa que, decorrido exatamente 1 ano (período em que incidem as taxas de juros), os montantes a juros simples e a juros compostos coincidem. Do ponto (1, 14 000) em diante, o gráfico do montante a juros compostos está sempre acima do gráfico do montante a juros simples, ou seja, para qualquer valor de t (em anos), $t > 1$, o montante da dívida a juros compostos é maior do que o montante a juros simples.

Reflita

Determine o valor da dívida de R$ 10.000,00 em ambos os sistemas considerando que o credor vai quitá-la em 6 meses.

Reflita: Como t é o período em anos e queremos saber o valor da dívida após 6 meses, temos $t = \frac{1}{2}$.

Juros simples:

$M = 10\,000 \cdot \left(1 + 0{,}4 \cdot \frac{1}{2}\right) =$

$= 10\,000 \cdot 1{,}2 = 12\,000.$

Juros compostos:

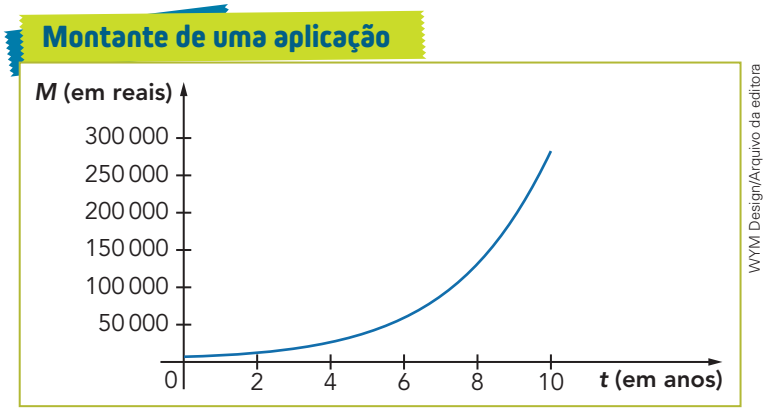
$M = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}4)^{\frac{1}{2}} =$

$= 10\,000 \cdot \sqrt{1{,}4} \simeq 11\,832{,}16.$

Portanto, a dívida é R$ 12.000,00 no sistema de juros simples e aproximadamente R$ 11.832,16 no sistema de juros compostos.

Atividades resolvidas

9. O gráfico a seguir mostra, ano a ano, o montante de um capital inicial de R$ 5.000,00 aplicado em certo sistema de juros.



WYM Design/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

De acordo com o gráfico, responda:

a) Qual foi o sistema de juros utilizado nessa aplicação: simples ou compostos?

b) Qual será o montante obtido após 6 anos, sabendo que após 1 ano o montante era R$ 7.500,00?

Resolução

a) O aumento anual do montante não é constante e o crescimento do montante nessa aplicação é exponencial. Portanto, foi utilizado o sistema de juros compostos nessa aplicação.

b) Como o capital aplicado era R$ 5.000,00 e o montante após 1 ano era R$ 7.500,00, temos:

$$M = C(1 + i)^1 \Rightarrow 7\,500 = 5\,000 + 5\,000i \Rightarrow 2\,500 = 5\,000i \Rightarrow i = \frac{2\,500}{5\,000} = 0{,}5$$

Assim, concluímos que a taxa de juros é 0,5 ao ano.

$$M = 5\,000(1 + 0{,}5)^6 \Rightarrow M = 5\,000(1{,}5)^6 \simeq 56\,953{,}13$$

Portanto, após 6 anos o montante será aproximadamente R$ 56.953,13.

Atividades

Não escreva no livro

64. Considere que uma pessoa, em janeiro de 2023, tenha feito um empréstimo de R$ 12.000,00 em uma instituição financeira à taxa de 3% ao mês. Em qual dos sistemas de juros essa pessoa vai precisar de menos de R$ 17.000,00 para quitar o empréstimo após 1 ano? Qual é a quantia necessária para quitar a dívida nesse sistema de juros?

65. Um capital de R$ 300,00 foi aplicado a uma taxa de juros de 10% ao ano, durante 4 anos.

a) Represente graficamente, no caderno, a evolução ano a ano dessa aplicação nos sistemas de juros simples e de juros compostos. Os gráficos encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Qual é o montante obtido após 2 anos em cada um dos sistemas de juros? Juros simples: R$ 360,00; juros compostos: R$ 363,00.

c) Ao final dos 4 anos, qual é a diferença, em reais, entre os montantes obtidos nos 2 sistemas de juros? R$ 19,23

64. Juros simples: $M = C(1 + i \cdot t) = 12\,000 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot 12) = 16\,320$.
Juros compostos: $M = C(1 + i)^t = 12\,000(1 + 0{,}03)^{12} = 12\,000(1{,}03)^{12} \simeq 17\,109{,}13$.
Portanto, a pessoa vai precisar de menos de R$ 17.000,00 no sistema de juros simples. Serão necessários R$ 16.320,00.

Conexões

Moedas sociais

A moeda oficial de um país tem 3 principais funções na sociedade: ela serve de meio de troca de serviços e mercadorias, como unidade de medida (referencial para as trocas) e como reserva de valor (maneira de medir a riqueza ao longo do tempo).

Atualmente, além do Real, moeda oficial brasileira, existem outras moedas em circulação no país: as **moedas sociais** (ou moedas complementares), denominação que se dá às formas monetárias alternativas, não oficiais, em geral ligadas às experiências de economia solidária. As moedas sociais, válidas apenas nos territórios que as implementam, são instituídas com o objetivo de incentivar a produção e o consumo local.

Segundo a Rede Brasileira de Bancos Comunitários, em todo o território nacional há mais de 152 moedas sociais em circulação. Palmas, Cocal, Rios, Semear e Sururu são os nomes de algumas moedas sociais brasileiras.

Rafaela Araújo/Folhapress

Cédulas da moeda social Sururu, em circulação em comunidade quilombola no vale do Iguape (BA). Foto de 2023.

Pessoas que moram em comunidades tradicionais, como extrativistas, quilombolas e indígenas, ou em locais com maior vulnerabilidade social, têm acesso dificultado a bancos tradicionais, tanto pela inexistência de agências nessas localidades, quanto pela dificuldade de acesso a crédito no modelo tradicional, devido às altas taxas cobradas e à exigência de garantias (fiadores ou bens). Os bancos comunitários surgiram como alternativa para esses grupos sociais, oferecendo linhas de crédito com taxas muito menores do que as convencionais. O crédito é oferecido de acordo com a confiança e não com a avaliação do risco do negócio.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Financeira, Educação para o Consumo, Educação para Valorização do Multiculturalismo nas Matrizes Históricas e Culturais Brasileiras* e *Vida Familiar e Social*.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Sociologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Não escreva no livro

Existem algumas regras para o uso das moedas sociais. Cada unidade da moeda deve valer 1 real; por exemplo, 1 sururu deve ser equivalente a 1 real para o pagamento de produtos e serviços dentro da comunidade. Além disso, todas as moedas têm nas cédulas um aviso de que a moeda social não pode ser trocada pelo dinheiro em real, isso porque ela deve ser utilizada apenas dentro da comunidade. Essa prática incentiva o comércio local e a valorização da economia da própria comunidade, gerando assim mais empregos e investimentos.

O Brasil não é o único país com moedas sociais: Alemanha, Austrália, Estados Unidos, França, Reino Unido e Nova Zelândia também têm comunidades que utilizam moedas complementares.

Fontes dos dados: MARASCULO, Márcia. Moedas sociais: saiba como funciona a economia alternativa no Brasil. *Galileu*, 8 ago. 2019. Disponível em: https://tedit.net/pxnh5x. CIDADE do MA inaugura 1º banco quilombola do país. *G1*, 20 nov. 2007. Disponível em: https://tedit.net/wdeb9t. Acesso em: 7 jul. 2023.

Jarbas Oliveira/Fotoarena

O primeiro banco comunitário brasileiro foi o Banco Palmas, inaugurado em 1998 no Conjunto Palmeira, situado na periferia de Fortaleza (CE), com o objetivo de promover o desenvolvimento local. Foto de 2010.

Além dos bancos comunitários, as moedas sociais podem ser encontradas em clubes de troca e em algumas feiras solidárias. Em geral, a opção pela criação de moedas sociais nasce das necessidades da comunidade que se organiza instituindo um modelo próprio, adaptado à realidade local.

Na economia solidária, os trabalhadores organizam-se voluntária e democraticamente, criando alternativas de geração de trabalho e renda, sobretudo para as populações mais vulneráveis, fortalecendo a inclusão social.

Sobre o assunto

Leia o texto e assista ao vídeo indicados a seguir para saber mais sobre as moedas sociais e como criar uma moeda social e um banco comunitário (acesso em: 7 jul. 2024).

- Como criar uma moeda social e um banco comunitário. Instituto Akatu. Disponível em: https://tedit.net/41431i.
- Moeda Social movimenta economia em Mosqueiro – Liberal Comunidade. 9 min 24 s. 2022. Fórum – Moedas sociais. Disponível em: https://tedit.net/a564q6.

Conecte com o texto

1. De que maneira as moedas sociais e os bancos comunitários podem contribuir para melhorias em uma comunidade?

1. Exemplo de resposta: As moedas sociais e os bancos comunitários podem promover mais acessibilidade a serviços financeiros em relação a moedas e bancos comuns, garantindo que a população tenha condições de participar da economia local.

2. Existe alguma moeda social ou banco comunitário onde você vive? Em caso afirmativo, na sua opinião, isso causa algum impacto positivo na vida das pessoas? Respostas pessoais.

CAPÍTULO 2

Planejamento e gestão de orçamento pessoal

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação-problema

Anthony Paz/Shutterstock

É importante desenvolver o hábito de reservar uma parte da própria renda, seja para criar uma reserva de emergência, seja para poder, posteriormente, realizar uma compra do próprio interesse.

Poupança

Como citamos no capítulo **1** desta Unidade, uma das opções mais usadas para guardar parte da renda é a poupança. Apesar de geralmente render menos do que outras opções de aplicação financeira, ela se destaca por ter alta liquidez (o dinheiro guardado geralmente pode ser sacado com facilidade) e por estar coberta pelo Fundo Garantidor de Créditos (FGC), entidade privada que garante à pessoa que investiu, ou depositou em poupança, o pagamento dessa quantia até um valor máximo, caso a instituição financeira na qual o depósito foi feito "quebre" (seja liquidada pelo Banco Central).

São garantidos até 250 mil reais por instituição financeira e por CPF até um limite de 1 milhão de reais.

Suponha que uma pessoa conseguiu juntar R$ 1.500,00 e decidiu que guardaria esse dinheiro na poupança no início do mês. Além dessa quantia, ela planeja, mensalmente, separar R$ 150,00 do salário para aplicar nessa poupança ao final do mês.

Reflita

Quais são os limites de cobertura para a proteção do FGC? Pesquise na internet para responder.

a) Ao final de 4 meses, quanto ela terá depositado na poupança? 1 500,00 + 4 · 150,00 = 2 100,00; logo R$ 2.100,00.

b) Suponha que, ao final de cada mês, ao valor guardado na poupança seja acrescido 0,6% do valor que havia no início do mês.

Copie as anotações a seguir no caderno e preencha-as, para calcular o total na poupança ao final de 4 meses. (Use uma calculadora e, caso necessário, arredonde os valores.)

Mês	Valor no início do mês (em reais)	Acréscimo de 0,6% (em reais)	Total no fim do mês: valor no início do mês + acréscimo + depósito mensal (em reais)
1	1500	0,6% · 1500 = 9	1500 + 9 + 150 = 1659
2	1659	0,6% · 1659 ≃ 9,95	1659 + 9,95 + 150 = 1818,95
3	1 818,95	0,6% · 1 818,95 ≃ 10,91	1 818,95 + 10,91 + 150 = 1 979,86
4	1 979,86	0,6% · 1 979,86 ≃ 11,88	1 979,86 + 11,88 + 150 = 2 141,74

c) Qual é a diferença entre o valor na poupança ao final de 4 meses e o valor depositado na poupança nesse período? 2 468,45 – 2 400,00 = 68,45; logo, R$ 41,75.

Professor, no item **b**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão.

Orçamento pessoal

A Educação financeira nos permite entender como usar nosso dinheiro da melhor maneira. Para isso, é necessário ter uma série de atitudes, como aprender a poupar, a investir e a como gastar.

Ao se fazer uma compra ou contratar um serviço, por exemplo, devemos fazer a cotação de preços, isto é, uma consulta dos preços, e sempre avaliar uma relação conhecida como **custo-benefício**. Essa é uma relação que nos permite avaliar se o que estamos pagando por um produto ou serviço tem um preço justo e atende às nossas expectativas.

Um bom começo para a organização das finanças é estabelecer um **orçamento** para que tudo o que se relaciona ao dinheiro seja devidamente controlado e esteja, na medida do possível, de acordo com o planejamento.

O orçamento é um planejamento, realizado em determinado período, para estimar e organizar as despesas e os gastos, além de aproveitar oportunidades de investimentos.

Não escreva no livro

Reflita

Você já havia pensado em um modo de organizar suas finanças?

Resposta pessoal.

Criar um orçamento pessoal é uma habilidade valiosa que pode ajudar pessoas em qualquer etapa da vida a gerenciar o dinheiro de maneira eficaz. Então, como devemos proceder para organizar um orçamento pessoal? Acompanhe as principais etapas a serem seguidas.

- **1ª etapa: Estabelecimento de metas**

  Tente estabelecer metas que você possa alcançar financeiramente com suas economias, como a compra de um celular, um *videogame* ou metas maiores. Para quem pretende se mudar para outra cidade a fim de cursar o Ensino Superior ou frequentar um curso com mensalidade, por exemplo, pode ser interessante ter algum dinheiro guardado considerando esses gastos futuros.

- **2ª etapa: Elaboração de uma planilha**

  Planilhas são ferramentas utilizadas para organizar dados em linhas e colunas. Isso pode ser feito em uma folha de papel ou em planilhas eletrônicas.

fizkes/Shutterstock

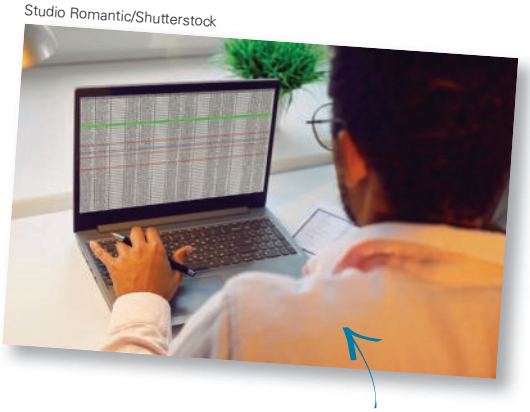
Ao organizar um orçamento, é necessário acompanhar periodicamente a evolução do planejamento e avaliar os resultados obtidos. Esse acompanhamento é o que permite fazer ajustes quando necessário.

Na planilha, registre todos os seus rendimentos fixos ou esporádicos, incluindo mesadas, pagamentos de serviços prestados por você, presentes que recebeu, entre outros. Adicione todos esses valores. O resultado será sua **receita** do período, ou seja, sua renda, por exemplo, naquele mês.

Depois, anote todas as suas **despesas**, elas correspondem aos gastos fixos e variáveis que você terá no período considerado. Transporte, alimentação, lazer, investimento, compra de livros podem ser considerados despesas.

Ao subtrair o valor total das despesas do valor da receita, obtemos o **saldo** do período.

Studio Romantic/Shutterstock



Planilhas eletrônicas permitem um alto nível de automatização dos cálculos por meio de fórmulas. Nelas também é possível gerar gráficos dos dados inseridos.

Sobre o assunto

A idade mínima permitida para o trabalho no Brasil é 16 anos, exceto na condição de aprendiz, permitida a partir dos 14 anos. Além disso, de acordo com o art. 7º, inciso XXXIII, da Constituição Federal, é proibido o trabalho noturno, perigoso e insalubre para menores de 18 anos.

Acesse mais informações no manual disponibilizado pelo Ministério do Trabalho e Emprego.

MTE. Manual de Perguntas e Respostas sobre Trabalho Infantil e Proteção ao Adolescente Trabalhador. Disponível em: https://tedit.net/f7rkeq. Acesso em: 12 ago. 2024.

Analise um exemplo de planilha para a organização das finanças de junho de 2025 de um estudante do Ensino Médio.

- **3ª etapa: Acompanhamento**

  Acompanhe diariamente seu orçamento e não deixe de anotar receitas ou despesas por menores que sejam. Assim, você conseguirá identificar padrões em seus gastos e entender melhor se é possível economizar mais em algum deles para atingir seu objetivo financeiro.

- **4ª etapa: Continue aprendendo**

  Leia sobre o tema, converse com especialistas, procure apostilas, livros, vídeos de fontes confiáveis na internet, etc. para aprender mais sobre diferentes métodos de organização financeira e conceitos relevantes para uma administração eficaz das finanças.

	A	B
1	**Receita**	**Valores (em R$)**
2	Mesada	50
3	Prêmios ou presentes	30
4	Outros	0
5	Total	80
6	**Despesa**	**Valores (em R$)**
7	Transporte	15
8	Lazer	35
9	Viagens	0
10	Livros	20
11	Outros	0
12	Total	70
13	**Saldo mensal**	**10**

Reprodução/LibreOffice

Detalhe da tela do LibreOffice.

Fique atento

Busque fontes de informação confiáveis ao estudar Educação financeira. Procure saber se as pessoas que estão falando ou escrevendo sobre o assunto são formadas em Economia, Administração, Ciências contábeis ou áreas correlatas antes de seguir os conselhos delas.

Poupança e outros investimentos

Poupança

A poupança é a principal aplicação financeira utilizada pela população brasileira, sendo conhecida por ser uma opção simples e segura. Os motivos para poupar são diversos: realizar uma compra de valor alto, fazer viagens, manter uma reserva de emergência, guardar parte da renda para a aposentadoria, entre outros.

fizkes/Shutterstock

Menores de idade podem abrir uma conta em uma instituição financeira desde que estejam acompanhados pelo responsável legal.

Fique atento

Conforme estabelecido pelo Banco Central, instituições financeiras devem oferecer aos clientes a possibilidade de abrir e usufruir dos serviços básicos de uma conta-corrente ou conta poupança de maneira totalmente gratuita.

O rendimento da poupança, também conhecida como caderneta de poupança, pode variar de acordo com a Taxa Referencial (TR) e a taxa Selic (Sistema Especial de Liquidação e de Custódia).

Professor, se necessário, retome com os estudantes o que são essas taxas, conforme definições apresentadas no capítulo **1** desta Unidade.

Para depósitos feitos a partir de 4 de maio de 2012, o rendimento da poupança ocorre da seguinte maneira:

- quando a taxa Selic é menor do que ou igual a 8,5% ao ano, a poupança rende mensalmente 70% da taxa Selic mensal mais a TR mensal;
- quando a taxa Selic está acima de 8,5% ao ano, o rendimento é de 0,5% ao mês mais a TR mensal.

Acompanhe os exemplos a seguir.

a) Selic a 8% ao ano e TR mensal a 0,07%.

Quando a Selic está a 8% ao ano, a rentabilidade da poupança é de 70% da Selic mais a TR.

70% da Selic anual: $0{,}7 \cdot 0{,}08 = 0{,}056$.

Rentabilidade mensal:

$$0{,}056 : 12 \simeq 0{,}0047;\ 0{,}0047 + 0{,}0007 = 0{,}0054$$

Rentabilidade anual total: $(1 + 0{,}0054)^{12} \simeq 1{,}06676$, ou seja, um aumento de 6,676% ao ano.

Portanto, se você investir R$ 1.000,00 na poupança com a Selic a 8% ao ano e a TR mensal a 0,07%, ao longo de 1 ano, após esse período o montante será R$ 1.066,76.

Fique atento

Nesta situação, após 1 ano o rendimento foi R$ 66,76. Porém, esses cálculos não consideram a inflação e, para calcular o ganho real de poder de compra, é necessário levar em conta a inflação acumulada durante o ano.

Professor, as regras para o rendimento da poupança consideram o valor da taxa Selic anual, divulgado pelo Comitê de Política Monetária (Copom) do Banco Central. Porém, o cálculo do rendimento mensal da poupança é feito considerando a fração de $\frac{1}{12}$ desse valor.

b) Selic a 10% ao ano e TR mensal a 0,07%.
Quando a Selic está a 10% ao ano, a rentabilidade da poupança é de 0,5% ao mês mais a TR.
Rentabilidade mensal: $0{,}005 + 0{,}0007 = 0{,}0057$.
Rentabilidade anual total: $(1 + 0{,}0057)^{12} \simeq 1{,}07059$, ou seja, um aumento de 7,059% ao ano.
Portanto, se você investir R$ 1.000,00 na poupança com a Selic a 10% ao ano e a TR mensal a 0,07%, após esse período, o montante será R$ 1.070,59.

Outros investimentos

Embora seja o mais utilizado, a poupança não é o único tipo de investimento. A seguir, vamos apresentar, em linhas gerais, outras modalidades de investimento.

Títulos públicos e títulos privados

Títulos são empréstimos que você faz a governos (títulos públicos, como títulos do Tesouro Direito) ou empresas (títulos privados, como debênture e CDB). Quando você compra um título, está emprestando dinheiro a essa entidade e em troca receberá, além do valor emprestado, juros ao longo do tempo.

Títulos públicos são geralmente considerados mais seguros porque são garantidos pelo governo, enquanto títulos privados têm um risco maior devido à possibilidade de a empresa não conseguir pagar a dívida. Outros riscos incluem a variação da taxa de juros e mudanças nas condições econômicas do país.

Mercado de ações

Ações são uma parte da propriedade de uma empresa. Quando você compra uma ação, está tornando-se um sócio, isto é, um acionista dessa empresa. Se a empresa tiver um bom desempenho financeiro, o valor das suas ações pode subir e você conseguirá vender essas ações por mais dinheiro do que pagou. Além disso, algumas empresas pagam uma parte dos lucros aos acionistas, o que é chamado de dividendo.

Um dos riscos desse tipo de investimento é a volatilidade, ou seja, os preços podem cair drasticamente por estarem sujeitos à influência de fatores econômicos e políticos e do desempenho da empresa.

Sobre o assunto

- Acesse o Portal do Investidor, no *site* do Governo Federal, para saber mais a respeito desses e de outros tipos de investimento, assim como as vantagens e desvantagens de cada um deles. Disponível em: https://tedit.net/xgpgjh. Acesso em: 9 ago. 2024.
- Acesse o simulador disponível no *site* do Tesouro Nacional para realizar uma simulação de investimento em diferentes títulos do Tesouro Direto, que retorna uma previsão do valor que poderá ser resgatado no futuro a partir de diferentes quantias aplicadas. Disponível em: https://tedit.net/n8y0at. Acesso em: 9 ago. 2024.

1. Como 6% < 8,5%, temos uma rentabilidade de 70% da Selic ao ano mais a TR. Logo, o rendimento anual, em reais, é dado por: $0{,}7 \cdot 0{,}06 = 0{,}042$; logo, $0{,}042 : 12 = 0{,}0035$; então, $0{,}0035 + 0{,}0007 = 0{,}0042$; por fim, temos: $(1 + 0{,}0042)^{12} \cdot 1\,000 \simeq 1\,051{,}58$. Portanto, o montante ao final de 1 ano é R$ 1.051,58.

Atividades

Não escreva no livro

1. Se você investir R$ 1.000,00 na poupança com uma taxa Selic de 6% ao ano e uma TR mensal de 0,07%, quanto terá ao final de 1 ano?

2. Se você investir R$ 5.000,00 em ações e elas subirem 15% ao ano, sem considerar a inflação e outras taxas de dedução, qual será o valor do seu investimento após 1 ano? $5\,000 + 750 = 5\,750$; logo, R$ 5.750,00.

3. Se você aplicar R$ 3.000,00 em um fundo de investimento que rende 10% ao ano, quanto terá após 2 anos?

4. Uma pessoa comprou um terreno por R$ 400.000,00 e, após 2 anos, vendeu esse terreno com um aumento de 25% em relação a esse valor. Sobre o preço de venda, ela teve que pagar 5% de comissão ao vendedor e, sobre o preço de custo, teve que pagar 6% de taxas de cartório.

Qual foi o lucro, em reais, dessa pessoa?

Puttachat Kumkrong/Shutterstock

Propriedades podem ter o preço valorizado dependendo do desenvolvimento da região em que a propriedade está localizada.

Texto para a próxima atividade.

Moedas digitais, ou criptomoedas, são um tipo de dinheiro que existe apenas digitalmente. Diferentemente do dinheiro tradicional, como o real ou o dólar, que é impresso pelo governo, as criptomoedas são criadas e gerenciadas por computadores usando uma tecnologia chamada ***blockchain*** (cadeia de blocos, em inglês).

afina_baikalskaya/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

A produção e o gerenciamento das criptomoedas são feitos com equipamentos especializados, e esse processo, conhecido como "mineração", gera um alto consumo de energia.

3. Ano **1**: Rendimento no 1º ano: $0{,}1 \cdot 3\,000 = 300$. Montante após 1 ano: $3\,000 + 300 = 3\,300$. Ano **2**: Rendimento no 2º ano: $0{,}1 \cdot 3\,300 = 330$. Montante após 2 anos: $3\,300 + 330 = 3\,630$. O montante após 2 anos é R$ 3.630,00.

4. Valor de compra: R$ 400.000,00. Valor de venda: $400\,000 + 0{,}25 \cdot 400\,000 = 500\,000$. Comissão: $0{,}05 \cdot 500\,000 = 25\,000$. Taxas: $0{,}06 \cdot 400\,000 = 24\,000$. Lucro: $500\,000 - 400\,000 - 25\,000 - 24\,000 = 51\,000$. O lucro foi R$ 51.000,00.

5. Faça os registros no caderno.

a) Uma pessoa investiu R$ 400.000,00 em um imóvel e R$ 100.000,00 em criptomoedas. Em um período de 1 ano, as criptomoedas valorizaram 20% e o imóvel perdeu 15% do valor. Considerando apenas esses dados, qual foi o percentual de prejuízo, após o período de 1 ano, em relação ao investimento inicial?

b) Faça uma pesquisa sobre as vantagens e desvantagens do investimento em criptomoedas e anote suas conclusões. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Professor, no item **b**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

5. a) Investimento inicial: $100\,000 + 400\,000 = 500\,000$. Valor final das criptomoedas: $100\,000 + 0{,}20 \cdot 100\,000 = 120\,000$. Valor final do imóvel: $400\,000 - 400\,000 \cdot 0{,}15 = 340\,000$. Valor dos investimentos após 1 ano: $120\,000 + 340\,000 = 460\,000$. Como temos que $(460\,000 \div 500\,000) \cdot 100 = 92\%$, o percentual de prejuízo foi de 8%.

Financiamento

Quando não dispomos do valor total de um bem que queremos adquirir, uma possibilidade é financiar essa compra em uma instituição financeira, gerando uma dívida com a instituição.

Financiamento é o parcelamento da compra de um produto ou serviço em que há uma taxa de juros aplicada sobre o saldo devedor.

Quando fazemos a compra de um veículo, por exemplo, em geral, o saldo devedor (o valor que não é pago no ato da compra) é financiado em parcelas. Isso também ocorre na compra de um móvel ou de um eletrodoméstico em redes varejistas.

Amortizar uma dívida significa pagar o saldo devedor ou ao menos parte dele. Nos financiamentos praticados no Brasil, os 2 sistemas de amortização de financiamentos mais praticados são o SAC e o sistema Price. Em ambos os modelos de amortização, os juros sempre incidem sobre o saldo devedor, e as parcelas são compostas de uma parte que corresponde ao valor de amortização desse saldo e outra parte que corresponde aos juros.

Krakenimages.com/Shutterstock

Antes de assinar um contrato de financiamento de um imóvel é importante conhecer quais modalidades de empréstimos são praticados no Brasil e as características de cada uma.

O sistema SAC

SAC é a sigla de sistema de amortização constante, em que, a cada parcela do financiamento, sempre se paga o mesmo valor de amortização. Como no início dos pagamentos o saldo devedor é alto, a parte da parcela que é composta de juros é maior. Desse modo, podemos dizer que uma parcela p dentro do sistema de amortização constante é composta de uma parte do valor de amortização a e uma parte correspondente aos juros j, que vai diminuindo ao longo do período de financiamento. Podemos escrever:

$$p = a + j$$

em que a é constante em todas as parcelas enquanto j e, consequentemente p, vão diminuindo.

Sobre o assunto

Para saber mais sobre o sistema de amortização constante (SAC), acesse a videoaula produzida pelo Portal da Obmep: Financiamentos: SAC. Disponível em: https://tedit.net/im6y4n. Acesso em: 13 ago. 2024.

Vamos verificar, por meio de um exemplo, como calcular as parcelas nesse sistema de amortização.

Suponha que uma construtora, com a intenção de lançar um condomínio de casas, tenha financiado um terreno.

O preço do terreno à vista seria 1 milhão de reais, mas foi combinado com o proprietário que a construtora pagaria esse terreno em 5 parcelas anuais, a taxa de juros de 10% ao ano, com a 1ª parcela a ser paga exatamente 1 ano após a compra.

Sabendo que no financiamento desse terreno foi utilizado o sistema SAC, podemos determinar o valor de amortização que compõe cada parcela dividindo o valor financiado pela quantidade de parcelas.

Temos:

$$a = \frac{1\,000\,000}{5} = 200\,000$$

Portanto, o valor de amortização em cada parcela é R$ 200.000,00.

Conhecendo o valor de amortização da 1ª parcela, para determiná-la temos de saber também o valor correspondente aos juros que incidiram da data da compra até o pagamento.

Os juros incidem sobre o saldo devedor; desse modo, na 1ª parcela temos:

$$j = 0{,}1 \cdot 1\,000\,000 = 100\,000$$

Assim, o valor da 1ª parcela é dado por:

$$p = a + j \Rightarrow p = 200\,000 + 100\,000 = 300\,000$$

Portanto, a quantia correspondente aos juros é R$ 100.000,00, e o valor da 1ª parcela é R$ 300.000,00.

Para determinar o valor de cada parcela, costuma-se organizar os dados com os valores, cada data de pagamento, valor da parcela, valor de amortização dessa parcela, valor dos juros que compõem essa parcela e saldo devedor após pagá-la. No nosso exemplo, temos que, na data inicial (data 0), não há parcela, valor de amortização ou juros, temos apenas o saldo devedor de R$ 1.000.000,00.

Para a data **1** (neste caso, 1 ano após a compra), aplicamos a taxa de juros sobre o saldo devedor anterior para descobrir os juros (j) que vão compor a parcela. Além disso, já determinamos o valor de amortização (a), no caso, constante. Finalmente, podemos completar a 2ª linha com o valor da parcela ($p = a + j$) e o novo saldo devedor, que é igual ao valor amortizado e subtraído do saldo devedor anterior mais os juros do período.

Data	Valor de amortização a (em reais)	Juros j (em reais)	Parcela $p = a + j$ (em reais)	Saldo devedor (em reais)
0	-	-	-	1000000
1	200000	100000	300000	800000
2	200000	80000	280000	600000
3	200000	60000	260000	400000
4	200000	40000	240000	200000
5	200000	20000	220000	0

Professor, se necessário, acompanhe com os estudantes os cálculos na 2ª linha da tabela e, depois, peça que expliquem os cálculos das demais linhas: Valor de amortização a: fixo de R$ 200.000,00; Juros j: $0{,}1 \cdot 1\,000\,000 = 100\,000$; logo, R$ 100.000,00. Parcela p: $200\,000 + 100\,000 = 300\,000$; logo, R$ 300.000,00. Saldo devedor: $1\,000\,000 - 200\,000 = 800\,000$; logo, R$ 800.000,00.

O sistema Price

Esse sistema apareceu pela primeira vez na obra *Observações sobre pagamentos remissivos*, escrita pelo matemático e filósofo inglês Richard Price (1723-1791), em 1771. O sistema Price, também chamado de Tabela Price ou sistema de amortização francês, que já foi bastante utilizado nas transações feitas no Brasil, caracteriza-se por uma série de parcelas fixas, proporcionando maior previsibilidade ao consumidor no momento dos pagamentos.

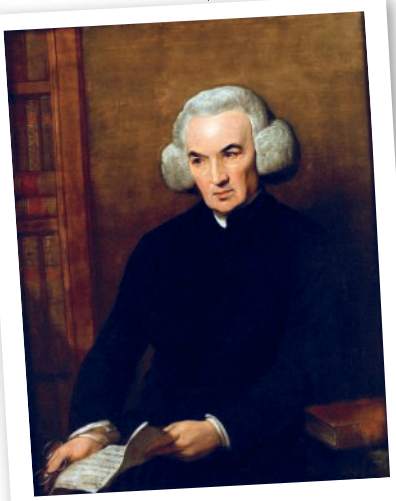
Não escreva no livro

Reflita

Qual é o valor total pago pelo terreno, que custava inicialmente 1 milhão de reais?

$300\,000 + 280\,000 + 260\,000 + 240\,000 + 220\,000 = 1\,300\,000$; logo, R$ 1.300.000,00.

Reprodução/Coleção particular



Richard Price, 1784, em retrato feito por Benjamin West. Óleo sobre tela, 185 cm × 87,5 cm.

As imagens não estão representadas em proporção.

Sobre o assunto

Para saber mais sobre o sistema de amortização Price, acesse a videoaula produzida pelo Portal da Obmep: Financiamentos: Price. Disponível em: https://tedit.net/arm0mi. Acesso em: 13 ago. 2024.

Da mesma maneira que no sistema SAC, no sistema Price os juros incidem sobre o saldo devedor e a parcela é composta de 2 partes: valor de amortização e juros. No entanto, como as parcelas são fixas, o valor de amortização e os juros de cada uma delas variam. O exemplo a seguir ilustra como é feito o cálculo de cada parcela.

Depois de pesquisar por alguns meses, Enzo encontrou o modelo de *smartphone* que gostaria de comprar com um preço que julgou justo. O aparelho é vendido por R$ 1.100,00 à vista ou em 3 parcelas iguais, com taxa de juros de 4,5% ao mês, e a 1ª parcela deve ser paga 1 mês após a compra.

Kwangmoozaa/Shutterstock

Smartphones à venda em loja varejista.

Para determinar o valor da parcela, Enzo organizou os dados como apresentado seguir.

Data	Valor de amortização $a = p - j$ (em reais)	Juros j (em reais)	Parcela p (em reais)	Saldo devedor (em reais)
0	-	-	-	1100
1	$p - 49{,}5$	49,5	p	$1149{,}50 - p$
2	$1{,}045 \cdot p - 51{,}73$	$51{,}73 - 0{,}045 \cdot p$	p	$1201{,}23 - 2{,}045 \cdot p$
3	$1{,}092 \cdot p - 54{,}06$	$54{,}06 - 0{,}092 \cdot p$	p	$1255{,}29 - 3{,}137 \cdot p$

Note que:

- como ele não conhece o valor das parcelas, indica todas iguais a p;
- os juros em cada parcela são dados pelo saldo devedor do período anterior multiplicado pela taxa de juros (no 1º mês: $0{,}045 \cdot 1100$);
- o valor de amortização de cada parcela é igual aos juros da parcela subtraído do valor da parcela fixa (no 1º mês: $p - 49{,}5$);
- o saldo devedor, após o pagamento de cada parcela, é igual ao saldo do período anterior subtraído do valor de amortização (no 1º mês: $1100 - (p - 49{,}5) = 1100 + 49{,}5 - p$).
- Após o pagamento da última parcela, o saldo devedor deve ser 0, pois, nesse momento, a dívida deve estar quitada.

Dessa maneira, temos:

$$1255{,}29 - 3{,}137 \cdot p = 0 \Rightarrow p \simeq 400{,}16$$

Portanto, o valor de cada parcela é R$ 400,16.

Atividades

Não escreva no livro

6. Uma empreendedora vai financiar a compra de um imóvel comercial no valor de R$ 90.000,00 em 12 parcelas mensais com juros de 1% ao mês. Determine o valor total que será pago pelo imóvel se ela utilizar o sistema SAC. R$ 95.850,00

7. Uma empresa decidiu financiar a compra de um equipamento no valor de R$ 60.000,00 em 3 parcelas mensais utilizando o sistema Price, com uma taxa de juros mensal de 2%. Copie no caderno a tabela a seguir e preencha-a com os valores que faltam.

Data	Valor de amortização (em reais)	Juros j (em reais)	Parcela p (em reais)	Saldo devedor (em reais)
0	-	-	-	60 000
1	$p - j$	1200	20 805,28	40 394,72
2	19 997,39	807,89	20 805,28	20 397,33
3	20 397,33	407,95	20 805,28	0

Conexões

Empreendedorismo

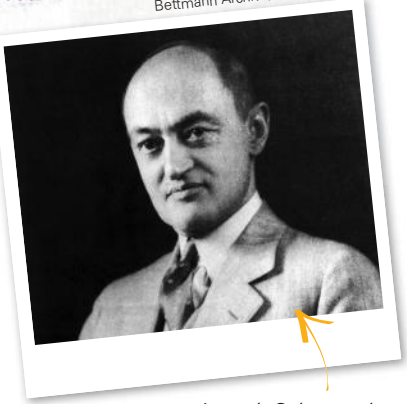
Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Trabalho*.

A palavra **empreender** significa fazer, executar ou realizar. O empreendedorismo no mundo do trabalho surgiu devido às transformações que vêm acontecendo na sociedade, principalmente no que se refere à necessidade de criação de novos negócios e oportunidades.

O economista austríaco Joseph Schumpeter (1883-1950) acreditava que as inovações tecnológicas são as principais impulsionadoras do desenvolvimento econômico no sistema capitalista. As ideias de Schumpeter são a base do empreendedorismo como conhecemos hoje: a habilidade de desenvolver soluções inovadoras a partir da identificação de problemas e oportunidades no mercado.

Bettmann Archive/Getty Images

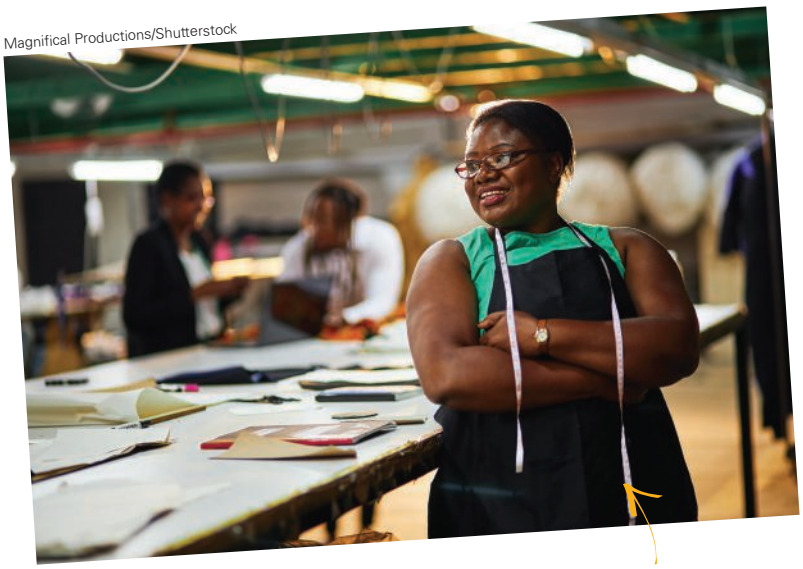


Joseph Schumpeter em 1900.

As imagens não estão representadas em proporção.

Um empreendedor pode, por exemplo, abrir uma oficina que conserta escapamentos de carros. Se oferecer atendimento diferenciado e um serviço de qualidade, resolvendo um problema comum ou implementando processos inovadores e mais eficientes do que se conhece até o momento, o empreendimento pode ser um sucesso.

Magnifical Productions/Shutterstock



Em 2022, as mulheres representavam 34% dos empreendedores brasileiros.

Atualmente, entende-se que há 2 tipos de motivação que levam uma pessoa a empreender.

- **Oportunidade**: ocasião em que se percebe uma oportunidade de investimento, seja por meio do aperfeiçoamento de um negócio que já existe ou da criação de um novo empreendimento.
- **Necessidade**: ocasião em que uma pessoa precisa de uma nova fonte de renda para garantir o sustento familiar. Isso ocorre quando, por exemplo, um indivíduo está desempregado e resolve abrir o próprio negócio.

Negócios que surgem da visão inovadora de empreendedores podem crescer muito e acabar gerando impacto, seja no mercado em que estão inseridos, seja na sociedade como um todo. No entanto, ideias simples e bem aplicadas também podem ser um bom exemplo de empreendedorismo.

GaudiLab/Shutterstock

Além da invenção de um novo produto, é possível empreender ao propor inovações em processos, ou seja, no modo como uma produção ocorre, visando mais economia, sustentabilidade ou outros tipos de impactos positivos na comunidade local.

Giovanni Seabra Baylao/Shutterstock

Acarajé é um prato que consiste em um bolinho feito de feijão-fradinho comumente servido com camarão, vatapá, tomate, cebola e pimenta.

As imagens não estão representadas em proporção.

Após ser demitida do emprego em uma grande loja de departamentos, Ana Ercília Silva resolveu empreender com a venda de acarajé na cidade de Aracaju (SE). Como diferencial, criou o "acarajé gigante", que se tornou um sucesso na capital sergipana. Esse sucesso aumentou ainda mais após uma publicação sobre o estabelecimento ter viralizado nas redes sociais, dobrando as vendas da empresa.

Fonte dos dados: Empreendedorismo feminino: como lidar com os desafios da questão de gênero nos negócios. *CNN*, 15 jun. 2023. Disponível em: https://tedit.net/iv589e. BANDEIRA, P. V. R.; SILVA, T. S. Motivações para o Empreendedorismo: necessidade e oportunidade. ID *online. Revista de psicologia*, v. 17, n. 66, maio 2023. Disponível em: https://tedit.net/q6xouq. SILVA, Rebecca. Empreendedora viraliza com acarajé gigante e vendas dobram em um mês. *Pequenas Empresas & Grandes Negócios*, 3 out. 2023. Disponível em: https://tedit.net/7ojoqu. Acesso em: 12 ago. 2024.

Conecte com o texto

1. Considere os 2 tipos de empreendedorismo mencionados no texto: de oportunidade e de necessidade. Compare-os e converse com um colega sobre quais são os principais desafios e as vantagens de cada um.
Resposta pessoal.

2. Imagine que você deseja abrir um novo negócio no bairro em que mora. Descreva uma ideia de empreendimento que poderia ser bem-sucedida e explique por que essa ideia seria inovadora e atenderia a uma necessidade ou oportunidade no mercado local. Resposta pessoal.

Pesquise e debata

3. A história de Ana Ercília Silva demonstra como uma pequena inovação pode ter um grande impacto. Pesquise outro caso de um pequeno empreendedor brasileiro que teve sucesso por meio da inovação e compartilhe com os colegas o que você aprendeu sobre ele.
A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Dívidas e créditos

Cartão de crédito

O cartão de crédito é uma forma de empréstimo oferecida por bancos e outras instituições financeiras. Ele permite que você faça compras, à vista ou parceladas, e pague por elas depois. Os comerciantes gostam dessa modalidade porque conseguem vender um produto ou serviço de maior custo e têm a garantia de receber o pagamento. Os clientes também se beneficiam, porque o crédito possibilita a realização de uma compra para a qual não se tem o valor total disponível no momento.

Todas as compras que o consumidor faz com o cartão de crédito são acumuladas para serem pagas a cada mês, em data previamente acertada com a instituição financeira. Essas compras vêm discriminadas na **fatura** e o consumidor paga a totalidade da fatura na data ou apenas uma parte do valor total (conhecida como pagamento mínimo). O valor que não é quitado passa para a fatura do mês seguinte acrescido de juros.

Miljan Zivkovic/Shutterstock

Seja em compras *on-line* ou em estabelecimentos comerciais, o cartão de crédito é, atualmente no Brasil, um dos principais meios de pagamento.

Os juros cobrados pelos cartões de crédito são um dos mais altos do mercado financeiro e, por isso, pode não compensar passar a dívida da fatura para o mês seguinte. O ideal é sempre controlar os gastos e pagar a totalidade da fatura na data certa, todo mês, assim os juros do cartão são evitados.

Porém, é comum consumidores inexperientes gastarem demais e depois não conseguirem pagar a fatura. Também pode acontecer algum imprevisto financeiro, como a perda do emprego ou um gasto extraordinário que impeça o consumidor de quitar o valor integral da fatura. Nesses casos, é aconselhável fazer um empréstimo pessoal no banco (pois a taxa de juros é menor do que a cobrada no cartão de crédito) ou retirar dinheiro de alguma aplicação financeira a fim de pagar toda a fatura, para que a dívida não aumente no mês seguinte.

Fique atento

Os dados apresentados no cartão de crédito são suficientes para que pessoas mal-intencionadas os usem em transações *on-line*. Por esse motivo, em caso de perda ou roubo do cartão de crédito, entre em contato com a operadora do cartão e solicite o bloqueio. Também é necessário ter cuidado ao indicar os dados do cartão de crédito em compras na internet para garantir a autenticidade do *site* de vendas e que este oferece segurança na transação financeira.

As operadoras de cartão de crédito, geralmente os bancos ou instituições financeiras que emitem o cartão de uma empresa de crédito, costumam cobrar do consumidor uma taxa anual (**anuidade**) para a manutenção do cartão. Se o consumidor sempre pagar a fatura total em dia, os gastos extras que poderá ter são a anuidade do cartão e, em alguns casos, o seguro. A taxa anual varia de operadora para operadora e pode chegar a 0 em determinados casos. Sempre vale a pena negociar com a operadora o valor da taxa.

Acompanhe a seguir algumas dicas para evitar problemas financeiros ao usar um cartão de crédito.

As imagens não estão representadas em proporção.

Dicas para o uso responsável do cartão de crédito

Ilustrações: Luis Moura/Arquivo da editora

Estabeleça um planejamento. Muitas vezes, compras de valores baixos vão se acumulando ao longo do mês até chegarem a um valor alto sem que você perceba. Como você já estudou no tópico "Orçamento pessoal", é importante ter um controle, físico ou digital, do seu orçamento mensal, detalhando todos os gastos e monitorando diariamente para evitar surpresas.

Tome cuidado com o limite do cartão. Usar todo o limite do seu cartão de crédito pode ser prejudicial. É importante se lembrar que tudo o que for passado no crédito terá de ser considerado no orçamento do mês seguinte, ou seja, quanto mais você utilizar o crédito, menos dinheiro terá disponível no futuro.

Evite parcelar os pagamentos em muitas vezes. Parcelamentos no cartão de crédito podem ser uma boa opção para adquirir um bem que seria impossível comprar à vista. Por outro lado, é necessário ter cautela com esse recurso, porque ele depende de uma previsão de como as suas finanças estarão até o fim do período de parcelamento. Assim, se houver uma emergência ou alguma fonte de renda da sua família deixar de existir, pode ser que o dinheiro previsto para cobrir essas parcelas não esteja mais disponível no futuro.

Fonte dos dados: 5 DICAS para usar o cartão de crédito de forma inteligente. *Exame*. Disponível em: https://tedit.net/0b09d5. Acesso em: 9 ago. 2024.

Pix

O Pix é um sistema de pagamentos instantâneos criado pelo Banco Central do Brasil e lançado no ano de 2020. Desde a sua implementação, a maioria das instituições financeiras adotou esse novo modelo de pagamento, assim como muitas pessoas físicas. O objetivo do Banco Central ao lançar o Pix foi incentivar o uso de pagamentos digitais, reduzir a circulação de dinheiro em espécie e democratizar o acesso ao sistema financeiro.

Diego Thomazini/Shutterstock

O Pix é realizado por meio de aplicativos ou internet *banking* em dispositivos eletrônicos.

Para pessoas físicas, o Pix é gratuito. Para empresas, ele é mais barato do que o TED e o DOC, métodos de transação de dinheiro que podem custar mais de 10 reais por operação.

O Pix está disponível 24 horas por dia, todos os dias da semana. As transações são realizadas de maneira instantânea, com baixo custo e alta segurança. Isso significa que o dinheiro sai da conta do pagador e vai diretamente para a conta do recebedor, sem a necessidade de intermediários, como empresas ou outras instituições.

Fonte dos dados: O QUE é Pix?. *Banco Central do Brasil*. Disponível em: https://tedit.net/3w7g01. Acesso em: 8 ago. 2024.

Fique atento

O DOC (Documento de Ordem de Crédito) era uma modalidade de pagamento com limite de R$ 4.999,99 e que caía na conta do recebedor no dia seguinte ao da transação. Essa modalidade foi encerrada no dia 29 de fevereiro de 2024 devido à maior conveniência do Pix.

Sobre o assunto

Assista ao vídeo do Banco Central do Brasil sobre como lidar com golpes financeiros envolvendo Pix.

Banco Central do Brasil. BC te explica #1 – 7 dicas para lidar com golpes envolvendo Pix. Disponível em: https://tedit.net/27cmt1. Acesso em: 8 ago. 2024.

8. Juros: 0,4 · 250 = 100; dívida total: 250 + 100 = 350; logo, R$ 350,00.

Atividades

Não escreva no livro

8. Maria tinha uma dívida de R$ 250,00 no cartão de crédito. Com o passar do tempo, essa dívida aumentou devido aos juros altos, que chegaram a 40% sobre o valor original. Qual é o valor da dívida atualizada de Maria?

Texto para a próxima atividade.

Milhas aéreas são recompensas oferecidas por companhias aéreas para aqueles que voam com frequência utilizando a mesma empresa. Após ter acumulado determinada quantidade de milhas, é possível trocá-las por descontos nas passagens, que podem até chegar ao valor total do bilhete. Instituições financeiras costumam oferecer programas que associam pontos a quantias gastas com o cartão de crédito, e esses pontos podem ser trocados por produtos, serviços ou milhas aéreas.

9. Raquel acumula 1 ponto de fidelidade para cada R$ 5,00 gastos no cartão de crédito. Ela gasta R$ 1.500,00 por mês no cartão. Além disso, a cada 3 pontos acumulados, ela troca por 1 milha no programa de uma companhia aérea. Quantas milhas Raquel terá ao final de 1 ano?

9. Pontos mensais: 1 500 ÷ 5 = 300. Pontos anuais: 12 · 300 = 3 600. Milhas anuais: 3 600 ÷ 3 = 1 200.

Não escreva no livro

10. Carlos costuma fazer 15 transferências bancárias por mês, cada uma custando R$ 10,00 com TED. Quanto ele economizaria em 1 ano se passasse a realizar essas transferências na modalidade de pagamento por Pix, que é gratuita para pessoas físicas?

10. Custo mensal com TED: $15 \cdot 10 = 150$. Custo anual com TED: $12 \cdot 150 = 1\,800$. Economia anual: R$ 1.800,00.

11. Larissa atrasou o pagamento de uma fatura de R$ 100,00 no cartão de crédito e teve de arcar com uma multa de 2% sobre o valor da fatura atrasada, além de juros de 1,5% ao mês. Quanto ela terá de pagar a mais por essa fatura após um mês da data de pagamento?

11. Multa por atraso: $2\% \cdot$ R$ 100,00 = R$ 2,00. Juros por atraso: $1{,}5\% \cdot$ R$ 100,00 = R$ 1,50. Custo adicional total: R$ 2,00 + R$ 1,50 = = R$ 3,50. Larissa terá que pagar R$ 3,50 a mais.

Texto para a próxima atividade.

Instituições financeiras oferecem aos clientes um serviço chamado de cheque especial, que consiste em um empréstimo pré-aprovado que é ativado caso o cliente realize uma compra de valor maior do que o saldo disponível na conta. Se uma pessoa que optou por utilizar esse serviço quer comprar um produto que custa R$ 300,00, por exemplo, e tem apenas R$ 200,00 disponíveis na conta, poderá fazer a compra, mas utilizará R$ 100,00 do cheque especial e terá de pagar esse valor com juros no mês seguinte.

Fique atento

Recomenda-se utilizar o cheque especial apenas em caso de emergência e pagar a dívida assim que possível.

12. Natália utilizou R$ 2.000,00 do cheque especial, que tem uma taxa de juros de 8% ao mês. Se ela quiser pagar essa dívida, de uma vez, após 2 meses da utilização do cheque especial, qual será o valor total que Natália terá de pagar?

12. Valor da dívida após o 1º mês: R$ 2.000,00 $\cdot$ 1,08 = = R$ 2.160,00. Valor da dívida após o 2º mês: R$ 2.160,00 $\cdot$ 1,08 = = R$ 2.332,80. Natália terá de pagar R$ 2.332,80.

13. Paulo foi a um restaurante *self-service* onde o preço do quilograma de comida é R$ 80,00. Ele serviu-se de 450 gramas de comida e, ao optar por pagar com Pix, recebeu um desconto de 5% no valor total. Qual foi o valor pago por Paulo?

13. Valor sem desconto: $0{,}450 \cdot 80 = 36$; logo, R$ 36,00. Desconto: $5\% \cdot 36 = 1{,}8$; logo, R$ 1,80. Valor pago com desconto: $36{,}00 - 1{,}80 = 34{,}20$. Paulo pagou R$ 34,20.

14. **(Enem)** Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado.

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de:

a) 398,02.
b) 400,00.
c) 401,94.
d) 404,00.
e) 406,02.

Considerando V o valor do produto à vista, em reais.
1º pagamento: o valor com juros do produto é $1{,}01V$ e, feito o pagamento de R$ 202,00, a dívida restante, em reais, passa a ser $1{,}01V - 202$.
2º pagamento: a dívida restante, em reais, é reajustada pela taxa de juros de 1% ao mês, totalizando $1{,}01 \cdot (1{,}01V - 202) = 1{,}0201V - 204{,}02$.
Como a 2ª parcela deve quitar essa dívida, temos: $1{,}0201V - 204{,}02 = 204{,}02 \Rightarrow 1{,}0201V = 408{,}04 \Rightarrow$
$\Rightarrow V = \frac{408{,}04}{1{,}0201} = 400$. Alternativa **b**.

15. Na sua opinião, quais são as vantagens e desvantagens de utilizar um cartão de crédito? Resposta pessoal.

16. Converse com seus familiares ou responsáveis, ou faça uma pesquisa em fontes confiáveis na internet, sobre o que podemos fazer para evitar endividamentos desnecessários. Resposta pessoal.

17. Por que o pagamento mínimo de uma fatura de cartão de crédito deve ser evitado? Exemplo de resposta: A quantia não paga é passada para a fatura do mês seguinte, acrescida de juros. Assim, efetuando o pagamento total da fatura evita-se a postergação de uma dívida e o pagamento de juros altíssimos.

Além da sala de aula

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Ciência e Tecnologia*, *Educação Financeira* e *Vida Familiar e Social*.

Simulador de financiamentos

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Educação digital, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Educação digital.

Banco de imagens/Arquivo da editora

No SAC, as parcelas são mais altas no início e menores no final. O valor financiado é amortizado mensalmente. Na tabela Price, as parcelas começam mais baixas, mas são fixas durante todo o período de financiamento.

Podemos utilizar uma planilha eletrônica para facilitar os cálculos e simular o valor de todas as parcelas de um financiamento.

Acompanhe como utilizar o ***software* livre** LibreOffice para calcular todas as parcelas de um financiamento nos sistemas SAC e Price.

A instalação desse *software* no computador é simples: acesse o *site* https://tedit.net/amkhew (acesso em: 17 jul. 2024), clique em **Baixe já**, escolha a versão compatível com o computador que estiver usando e siga os passos para finalizar a instalação do programa.

Nos exemplos serão utilizados os seguintes dados:

- período: 240 meses (20 anos);
- valor do financiamento: R$ 240.000,00;
- taxa de juros: 0,7% ao mês;
- outros encargos: R$ 80,00 por mês.

Ao abrir o LibreOffice, clique em **Planilha Calc**. Perceba que a planilha eletrônica é formada por linhas (**1**, **2**, **3**, **4**, ...) e colunas (**A**, **B**, **C**, **D**, ...). Siga o passo a passo indicado para cada sistema de financiamento.

***software* livre:** qualquer programa gratuito de computador cujo código-fonte é disponibilizado para permitir o uso, o estudo, a cópia e a redistribuição.

Financiamento pelo sistema SAC

1º passo: Na 1ª linha, vamos incluir algumas informações sobre a simulação. Na célula B1 digite **período (em meses)**, na célula C1 digite **240**, na célula D1 digite **taxa de juros (mensal)** e na célula E1 digite **0,70%**.

2º passo: Agora, na célula A3 digite **data**, na célula B3 digite **amortização**, na célula C3 digite **juros**, na célula D3 digite **outros encargos**, na célula E3 digite **parcela** e na célula F3 digite **saldo devedor**.

3º passo: Agora, na 4ª linha da planilha, vamos preencher apenas os 3 valores: A4, com **0**, D4, com **80** e F4, com **240 000**. Esses valores correspondem respectivamente à data de início do financiamento, ao valor de outros encargos, que fixamos em R$ 80,00, e ao valor inicial do saldo devedor, que é R$ 240.000,00.

Fique atento

Além da taxa de juros que é contratada no financiamento (sobretudo o imobiliário), as instituições financeiras cobram outros encargos como seguro, taxas de manutenção do contrato e taxa de relacionamento de conta-corrente.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

4º passo: Agora, na 5ª linha, vamos digitar algumas fórmulas. Para a data, na célula A5, digitamos **=A4+1**. Para a amortização, na célula B5, digitamos **=$F$4/$C$1**. Para os juros, na célula C5, digitamos **=$E$1*F4**. Para os outros encargos, na célula D5, digitamos **=$D$4**. Para a parcela, na célula E5, digitamos **=B5+C5+D5**. Para o saldo devedor, na célula F5, digitamos **=F4−B5**. Feito isso, as 5 primeiras linhas da planilha devem ter a seguinte estrutura:

Fique atento

O símbolo $ nas planilhas eletrônicas indica que o elemento imediatamente à direita está fixado. Podemos utilizá-lo, por exemplo, para fixar:

- uma coluna: se uma fórmula contém **$A2**, a coluna **A** permanece fixa e a linha **2** pode ser atualizada;
- uma linha: se uma fórmula contém **C$3**, a linha **3** permanece fixa e a coluna **C** pode ser atualizada;
- uma célula: se uma fórmula contém **$F$6**, a coluna F e a linha **6** permanecem fixas.

	A	B	C	D	E	F
1		período (em meses)	240	taxa de juros (mensal)	0,70%	
2						
3	**data**	**amortização**	**juros**	**outros encargos**	**parcela**	**devedor**
4	0			R$ 80,00		R$ 240.000,00
5	1	R$ 1.000,00	R$ 1.680,00	R$ 80,00	R$ 2.760,00	R$ 239.000,00

Reprodução/LibreOffice

Detalhe da tela do LibreOffice Calc após o 4º passo.

5º passo: Selecione na 5ª linha as colunas de **A** a **F** e posicione o cursor do *mouse* sobre a alça de preenchimento. Clique e arraste essa alça para baixo até a linha **244** da planilha. Ela vai autopreencher as linhas mantendo as fórmulas que introduzimos na 5ª linha.

Fique atento

Note que a linha **244** da planilha apresenta as informações correspondentes ao 240º mês do financiamento. Por exemplo, o valor da última parcela e o saldo devedor, que é zero.

Financiamento pelo sistema Price

1º passo: Abra uma nova planilha em branco. Aproveite as 5 primeiras linhas da planilha anterior, copie e cole na nova planilha; vamos editar apenas as fórmulas necessárias para mudar o sistema de amortização.

2º passo: Na célula E5, digite **=PGTO($E$1;$C$1;−F$4;0)+D5** e, na célula B5, digite **=E5−D5−C5**.

Fique atento

- A fórmula **=PGTO()** faz o cálculo automático da parcela no sistema de amortização Price, basta informar, nessa ordem, a taxa de juros mensal, o período (também em meses) e o oposto do saldo devedor (indicado, neste caso, por **−$F$4**, **−$F$5**, **−$F$6**, etc).
- Caso seu *software* esteja no idioma em inglês, a fórmula que corresponde a =PGTO() é a =PMT().

3º passo: Selecione na 5ª linha as colunas de **A** a **F** e posicione o cursor do *mouse* sobre a alça de preenchimento. Clique e arraste essa alça para baixo até a linha **244** da planilha. Ela vai autopreencher as linhas atualizando as fórmulas que editamos na 5ª linha.

Fique atento

Novamente, note que a linha **244** da planilha apresenta o valor da última parcela e o saldo devedor no 240º mês do financiamento.

Indo além: Direito à moradia

Leia o texto e depois faça o que é pedido.

O que é direito à moradia?

Um direito humano fundamental desde 1948

A moradia adequada foi reconhecida como direito humano em 1948, com a Declaração Universal dos Direitos Humanos, tornando-se um direito humano universal, aceito e aplicável em todas as partes do mundo como um dos direitos fundamentais para a vida das pessoas.

[...] O direito à moradia integra o direito a um padrão de vida adequado. Não se resume a apenas um teto e quatro paredes, mas ao direito de toda pessoa ter acesso a um lar e a uma comunidade seguros para viver em paz, dignidade e saúde física e mental. A moradia adequada deve incluir:

- Segurança da posse[...]
- Disponibilidade de serviços, infraestrutura e equipamentos públicos [...]
- Custo acessível [...]
- Habitabilidade [...]
- Não discriminação e priorização de grupos vulneráveis [...]
- Localização adequada [...]
- Adequação cultural [...]

O QUE é moradia? *Faculdade de Arquitetura e Urbanismo da Universidade de São Paulo*. Disponível em: https://tedit.net/j1ve9y. Acesso em: 18 jul. 2024.

Ainda que seja considerado um direito humano, na realidade social e econômica brasileira, o acesso à moradia muitas vezes só se dá por meio de financiamento imobiliário. E, para a maioria das pessoas, compreender como ele funciona e quais são seus custos reais pode ser bastante complexo.

Na comunidade em que vocês vivem, todas as pessoas têm moradia própria? Que tal organizar um evento para esclarecer dúvidas da comunidade sobre os tipos de financiamento imobiliário e os custos envolvidos?

Etapas

1. Organização

Reúna-se em grupos de 3 a 5 estudantes.

2. Pesquisa

Analisem a realidade da comunidade em que vivem. As pessoas têm residência própria? Se não têm, são elegíveis para fazer um financiamento imobiliário? Quais são as vantagens e as desvantagens de cada sistema de amortização?

Pesquisem ainda qual é o impacto de um financiamento imobiliário na renda de uma família e de que maneira ele deve ser feito para não comprometer a renda familiar, evitando o endividamento.

3. Desenvolvimento

Coletem dados sobre os sistemas de amortização Price e SAC. Verifiquem quais são as características necessárias para conseguir um financiamento imobiliário com uma instituição bancária (por exemplo, não pode haver restrição no nome, é necessária uma renda mínima, entre outros).

4. Produto final

Opção 1: Evento na comunidade escolar

- De acordo com os dados coletados, organizem um evento em que possam tirar dúvidas da comunidade sobre os tipos de financiamento imobiliário. Vocês podem organizar estações em que cada membro do grupo se responsabilize pelo atendimento de uma pessoa ou de um grupo de pessoas.
- É importante que todos do grupo saibam as diferenças entre os sistemas de amortização para explicar aos participantes do evento. Se possível, façam simulações com dados reais trazidos pelos participantes.

Opção 2: Cartilha com um passo a passo de como criar uma planilha de orçamento

- Organizem os dados coletados em uma cartilha ilustrada que contenha a explicação de como criar, utilizando um *software*, uma planilha de orçamento familiar. Verifiquem a possibilidade de distribuir a cartilha para os membros da comunidade escolar.

Professor, apesar de sugerirmos as simulações com dados reais, é importante que os estudantes sejam respeitosos ao fazer perguntas pessoais e tenham em mente a importância do sigilo das informações financeiras dos convidados.

Enem e vestibulares

1. **(Provão Paulista)** O balancete do total de vendas de uma loja, em um determinado mês, está apresentado na tabela a seguir:

	blusa	calça	vestido
Valor unitário	R$ 45,00	R$ 80,00	R$ 60,00
Quantidade vendida	100	50	60

De acordo com os dados, ao analisar a quantidade de produtos vendidos e o valor total arrecadado com a venda de cada produto, pode-se afirmar que: Alternativa **c**.

a) o valor total arrecado com a venda de todos os itens foi de R$ 12.000,00.

b) o valor obtido com a venda de vestidos foi maior que o valor obtido com a venda de blusas.

c) o valor obtido com a venda das blusas representou menos da metade do total arrecado.

d) a quantidade total de itens vendidos foi de 185.

e) o item que mais contribuiu para o valor total das vendas foi a calça.

2. **(Uerj)**

Juros e taxas de financiamentos imobiliários explodem dívida real

Os financiamentos imobiliários surpreendem os clientes. Ao longo do tempo, os juros e as taxas de correção monetária de seus empréstimos fazem com que os valores de suas dívidas reais sejam bem mais altos do que o esperado. Esse aumento é expresso pela metáfora contida no verbo "explodir".

Considere que, após o pagamento de 24 parcelas mensais de R$ 1.000,00 mais os juros e taxas estabelecidos pelo banco, um cliente esperava que sua dívida real fosse reduzida em R$ 24.000,00. Porém, a redução foi de R$ 16.000,00.

Em relação a R$ 24.000,00 o valor de R$ 16.000,00 representa um percentual que está mais próximo de:

a) 55%.

b) 67%.

c) 75%.

d) 87%.

3. **(UEA-AM)** Um aluno errou 15% do número total de questões de uma prova e acertou as outras 68 questões. Entre as questões que ele errou, 25% foi por distração no momento de preencher a folha de respostas. Se esse aluno tivesse marcado corretamente as questões que errou por distração no preenchimento, o número total de questões certas, em relação ao número total de questões da prova, corresponderia a: Alternativa **a**.

a) 88,75%.

b) 85,25%.

c) 78,50%.

d) 90,35%.

e) 82,15%.

4. **(Fempar-PR)** Luíza foi comprar jalecos brancos e viu uma promoção pela qual se interessou: "comprando um jaleco branco pelo preço normal, você ganha 50% de desconto no segundo jaleco branco e 70% de desconto no terceiro jaleco branco".

Feita a compra, Luíza verificou que, em relação ao preço normal total dos 3 jalecos, ela teve um desconto de: Alternativa **d**.

a) 70%.

b) 60%.

c) 50%.

d) 40%.

e) 30%.

2. $\frac{16\,000}{24\,000} = 0{,}666\ldots \simeq 67\%$; logo, 67%. Alternativa **b**.

5. **(Enem)** Em janeiro do ano passado, a direção de uma fábrica abriu uma creche para os filhos de seus funcionários, com 10 salas, cada uma com capacidade para atender 10 crianças a cada ano. As vagas são sorteadas entre os filhos dos funcionários inscritos, enquanto os não contemplados pelo sorteio formam uma lista de espera. No ano passado, a lista de espera teve 400 nomes e, neste ano, esse número cresceu 10%.

A direção da fábrica realizou uma pesquisa e constatou que a lista de espera para o próximo ano terá a mesma quantidade de nomes da lista de espera deste ano. Decidiu, então, construir, ao longo desse ano, novas salas para a creche, também com capacidade de atendimento para 10 crianças cada, de modo que o número de nomes na lista de espera no próximo ano seja 25% menor que o deste ano.

O número mínimo de salas que deverão ser construídas é: Alternativa **b**.

a) 10.
b) 11.
c) 13.
d) 30.
e) 33.

6. **(Enem)** No ano em que uma empresa lançou seu novo modelo de celular no mercado brasileiro, investiu 45 milhões de reais no primeiro semestre em cada uma das cinco regiões do país, colocando à venda 30 mil aparelhos por região. No primeiro semestre, todos os aparelhos colocados à venda foram vendidos, gerando um lucro total de 30 milhões de reais. No segundo semestre, a empresa decidiu que faria o mesmo investimento e colocou à venda as mesmas quantidades de aparelhos por região. Por causa da demanda observada, a empresa considerou que todos os aparelhos desse modelo que fossem ofertados sejam vendidos e, além disso, planeja obter um lucro total 10% maior no segundo semestre do que o que obteve no primeiro.

Para que essa empresa alcance o lucro planejado, qual deve ser o valor de venda, em real, de um aparelho celular desse modelo, no segundo semestre desse ano? Alternativa **b**.

a) R$ 1.650,00
b) R$ 1.720,00
c) R$ 1.870,00
d) R$ 2.500,00
e) R$ 2.600,00

7. **(Unifor-CE)** Ana possui uma pequena lanchonete onde vende coxinha. No dia 3 de outubro, ela aumentou o preço da coxinha em 30%; no dia 20 de outubro, ela aumentou o preço da coxinha em 10%. Se P era o preço da coxinha no dia primeiro de outubro, qual será o preço da coxinha após os dois aumentos? Alternativa **a**.

a) $1{,}43P$
b) $1{,}4P$
c) $0{,}43P$
d) $0{,}4P$
e) $P + 4$

8. **(Fuvest-SP)** Se, em 15 anos, o salário mínimo teve um aumento nominal de 300% e a inflação foi de 100%, é correto afirmar que o aumento real do salário mínimo, nesse período, foi de: Alternativa **b**.

a) 50%.
b) 100%.
c) 150%.
d) 200%.
e) 250%.

Fique atento

O aumento real do salário mínimo é fundamental para a manutenção e melhoria do poder de compra dos trabalhadores. Quando o salário mínimo cresce mais do que a inflação, significa que os trabalhadores não apenas conseguem manter o padrão de vida, mas também podem melhorá-lo.

9. **(Enem)** Uma rede de supermercados vende latas de sucos em *packs* (pacotes) com 12 latas. A venda é feita da seguinte forma:

- um *pack* é vendido por R$ 21,60;
- na compra de dois *packs*, o segundo tem 40% de desconto sobre o seu valor.

Entretanto, essa rede de supermercados costuma disponibilizar também o valor unitário do produto em cada uma das situações de compra. Para obter esse valor, basta dividir o total gasto pela quantidade de latas adquiridas.

Em determinado dia, nos cinco supermercados da rede que vendem os *packs* da forma descrita, os registros do valor unitário da lata de suco para o cliente que comprava dois *packs* eram diferentes entre si, conforme os dados:

- Loja **I**: R$ 1,08;
- Loja **II**: R$ 1,40;
- Loja **III**: R$ 1,44;
- Loja **IV**: R$ 1,76;
- Loja **V**: R$ 1,78.

Em um dos supermercados, o valor unitário está correto, de acordo com o costume da rede ao vender dois *packs*.

Esse supermercado corresponde à loja: Alternativa **c**.

a) **I**.
b) **II**.
c) **III**.
d) **IV**.
e) **V**.

10. **(Unisc-RS)** Um comércio do interior cobra de seus clientes, quando pagam em atraso, juros simples de 1% ao mês. Nessa condição, qual foi o tempo de atraso de uma prestação de R$ 1.250,00 se esta foi quitada com R$ 1.350,00? Alternativa **b**.

a) 9 meses
b) 8 meses
c) 10 meses
d) 9,5 meses
e) 10,33 meses

11. **(UEA-AM)** Ronaldo fez um empréstimo de R$ 1.000,00. Ao final do primeiro mês, foram aplicados juros de 10% sobre o valor da dívida, e ele fez um pagamento de R$ 300,00. Ao final do segundo mês, foram aplicados juros de 10% sobre o saldo da dívida, e ele fez um pagamento de R$ 500,00. Ao final do terceiro mês, foram aplicados juros de 10% sobre o saldo da dívida, e ele fez um pagamento para quitá-la. O valor do último pagamento feito por Ronaldo foi de: Alternativa **a**.

a) R$ 418,00.
b) R$ 309,00.
c) R$ 500,00.
d) R$ 531,00.
e) R$ 200,00.

12. **(UFJF-MG)** André decidiu fazer 4 depósitos de R$ 1.000,00, todo mês de dezembro, ao longo de 4 anos consecutivos, em uma aplicação de rendimento anual igual a 10%, segundo juros compostos. Entretanto, ele não pode fazer o 3º depósito. Nos demais anos ele fez os depósitos normalmente. Qual valor o André terá na aplicação num ano após o último depósito? Alternativa **d**.

a) R$ 2.541,10
b) R$ 3.641,10
c) R$ 3.774,10
d) R$ 3.895,10
e) R$ 4.005,10

13. **(Uerj)** Uma instituição financeira oferece os seguintes tipos de aplicação a seus clientes:

- Alfa – rendimento com juros simples, a uma taxa de 12% ao ano, durante 5 anos;
- Beta – rendimento com juros compostos, a uma taxa de 10% ao ano, durante 2 anos.

Considere que um cliente fez uma aplicação Alfa no valor de R$ 2.000,00. Após 5 anos, esse cliente fez uma aplicação Beta, durante dois anos, com o montante y obtido na aplicação Alfa acrescido de x reais. Sabe-se que os juros obtidos pela aplicação Beta foram iguais a R$ 1.050,00.

Calcule o valor de x, em reais, que foi acrescentado ao montante y. R$ 1.800,00

Conteúdos e aprendizagens

Não escreva no livro

Educação financeira

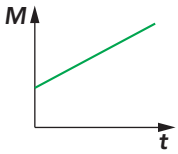
As imagens não estão representadas em proporção.

Investimento

Juros (j) incidem ao longo do período (t) sobre o capital (C), gerando uma quantia chamada montante (M).

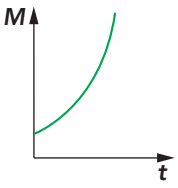
Montante (M)

Juro simples



Os juros podem ser simples ou compostos.

Juros compostos



Banco de imagens/Arquivo da editora

Em um financiamento, os juros geralmente incidem sobre o saldo devedor e a dívida total é composta do valor emprestado, dos juros e de outras taxas.

Planilhas eletrônicas e outros *softwares* ou aplicativos podem ser usados para calcular e acompanhar as taxas de um financiamento.

Investimentos e organização financeira em planilhas ajudam a atingir metas financeiras.

Ilustrações: Luis Moura/Arquivo da editora

Investimentos

Poupança | **Ações** | **Títulos**

- Compreendo conceitos básicos de Matemática financeira, como capital, montante, juros e taxa de juros, e entendo como eles se relacionam?
- Compreendo a diferença entre o crescimento de juros simples e o de juros compostos?
- Consigo aplicar os conceitos de Educação financeira estudados para tomar decisões financeiramente vantajosas, como fazer um orçamento pessoal ou escolher o melhor sistema de financiamento?
- Consigo construir uma planilha eletrônica para organizar minhas receitas e os gastos?
- Conheço as vantagens e desvantagens de diferentes tipos de aplicações financeiras e modalidades de pagamento? Respostas pessoais.

UNIDADE 3

Análise combinatória e probabilidade

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta abertura encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

É bastante provável que você já tenha entrado em algum *site* e feito um cadastro em que teve de criar uma senha. Geralmente, as senhas são compostas de sequências com números, letras e caracteres especiais. São muitas maneiras de obter senhas diferentes.

A senha faz parte da confirmação da autenticidade de um usuário para possibilitar o acesso a determinada informação ou a um conteúdo.

Espera-se que os estudantes comentem que uma pessoa com más intenções, e com habilidades de um *hacker*, teria muito mais dificuldade para descobrir uma senha forte.

Yuganov Konstantin/Shutterstock

- Quantas senhas diferentes com 3 caracteres distintos podem ser criadas com as letras maiúsculas A, B e C? 6 senhas diferentes.
- Qual é a importância de criar uma senha forte, ou seja, que não contenha poucos caracteres nem palavras ou números fáceis de adivinhar?

CAPÍTULO 1

Análise combinatória: diferentes estratégias de contagem

Situação-problema 1

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Sorveteria

Long Zhiyong/Shutterstock

Podcast

Transcrição de áudio

Sorveterias *self-service* oferecem ao cliente a possibilidade de escolher entre diversos sabores de sorvete e complementos, e montar a própria sobremesa.

Existem sorveterias em que os clientes podem escolher diversos sabores de sorvete, bem como diferentes tipos de calda e de fruta.

No cardápio de uma sorveteria, há 8 sabores de sorvete, 5 tipos de fruta e 3 tipos de calda. As bolas de sorvete são do mesmo tamanho e cada bola deve ter um único sabor. Para montar a sobremesa, primeiro, é colocada a quantidade de bolas de sorvete desejada com os sabores escolhidos. Depois, é colocada a quantidade de caldas dos sabores escolhidos. Por fim, é adicionada a quantidade de frutas dos tipos escolhidos. Considere que a ordem dos ingredientes, em cada categoria (sorvete, calda e fruta), no caso de haver mais de um, faz diferença ao montar a sobremesa.

a) Quantas são as possibilidades diferentes de compor uma sobremesa com 2 bolas de sorvete de sabores diferentes, sem calda e sem frutas? $8 \cdot 7 = 56$; logo, há 56 possibilidades diferentes.

b) Quantas são as possibilidades diferentes de sobremesa com 1 bola de sorvete de chocolate, nenhuma calda e 3 frutas diferentes? $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; logo, há 60 possibilidades diferentes.

c) Quantas são as possibilidades diferentes de sobremesa com 1 bola de sorvete de morango, 2 caldas diferentes e nenhuma fruta? $2 \cdot 3 = 6$; logo, há 6 possibilidades diferentes.

d) Quantas são as possibilidades diferentes de sobremesa com 2 bolas de sabores diferentes de sorvete, 2 caldas diferentes e 3 tipos de fruta? $56 \cdot 6 \cdot 60 = 20\,160$; logo, há 20 160 possibilidades diferentes.

Situação-problema 2

Aula de xadrez

a) Consideramos que cada estudante do grupo com 4 é identificado pelas letras A, B, C e D. É preciso considerar que AB e BA, por exemplo, são a mesma dupla. Assim, é possível formar 6 duplas diferentes: AB, AC, AD, BC, BD e CD.

b) Consideramos que cada estudante do grupo com 6 é identificado pelas letras A, B, C, D, E e F. Novamente, é preciso considerar que AB e BA, por exemplo, são a mesma dupla. Logo, são 15 duplas diferentes: AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF e EF.

PhotoByToR/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

O xadrez é um jogo milenar que estimula o raciocínio lógico e estratégico, desafiando os jogadores a planejar cada movimento.

Em um curso de xadrez, o professor precisa organizar a turma de maneira que cada estudante tenha a oportunidade de jogar uma vez com cada um dos outros colegas. Essa organização proporciona aos estudantes, a cada partida, uma experiência nova e permite que eles desenvolvam novas estratégias.

Considere uma turma que tem 12 estudantes. Reúna-se com um colega para realizar os itens a seguir no caderno.

a) Na primeira aula, o professor organizou a turma em 3 grupos de 4 estudantes cada um deles. Escrevam todas as duplas diferentes que é possível formar em cada grupo.

b) Na segunda aula, o professor faz uma separação diferente, dividindo a turma em 2 grupos com 6 estudantes em cada um deles. Escrevam todas as duplas diferentes que é possível formar em cada grupo.

Sobre o assunto

Stas Malyarevsky/Shutterstock

No primeiro movimento, cada um dos 8 peões pode andar 1 ou 2 casas para a frente, e cada um dos 2 cavalos pode andar 2 casas para a frente e, em seguida, 1 casa para a esquerda ou para a direita.

O jogo de xadrez é um terreno fértil para diversos problemas de **análise combinatória**. Para o primeiro movimento, por exemplo, existem 20 possibilidades diferentes.

Um dos problemas mais famosos da Matemática, o problema das n rainhas, envolve peças de xadrez: De quantas maneiras diferentes pode-se distribuir n rainhas em um tabuleiro de $n \times n$ casas, de modo que nenhuma delas possa atacar as outras? Para $n = 8$, sabe-se que são 92 possibilidades. No entanto, quanto maior o valor de n, mais difícil é encontrar todas as soluções. Para conhecer as regras do xadrez e uma solução aproximada para o problema das n rainhas em que $n = 1000$, sugerimos as leituras a seguir.

- RONDINELLI, Paula. Xadrez. *Brasil Escola*, [*s. d.*]. Disponível em: https://tedit.net/2y2ugl. Acesso em: 30 set. 2024.
- REDAÇÃO Galileu. Matemático de Harvard soluciona problema de 153 anos do xadrez. *Galileu*, Rio de Janeiro, 28 jan. 2022. Disponível em: https://tedit.net/9nq1jp. Acesso em: 30 set. 2024.

Explorando o princípio fundamental da contagem

Você acabou de explorar situações-problema que envolvem contagem de possibilidades. Agora, vamos explorar situações de contagem nas quais podemos utilizar o **princípio fundamental da contagem** e o **princípio aditivo**.

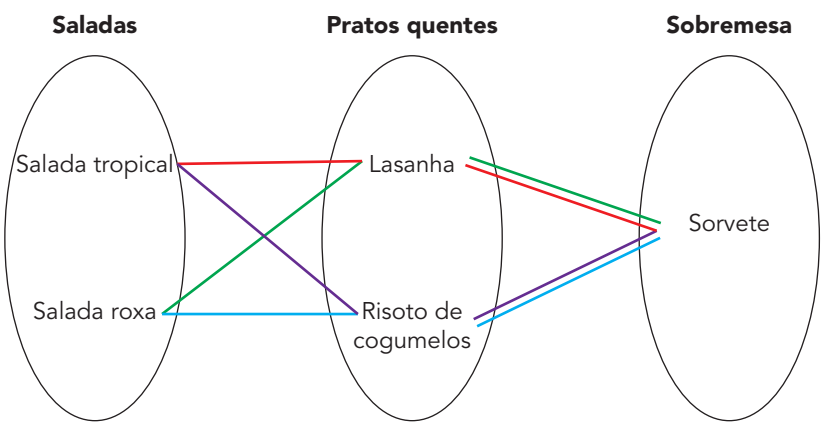
Acompanhe algumas situações.

a) O menu executivo de um restaurante é dividido em 2 tipos de salada (salada tropical e salada roxa), 2 tipos de prato quente (lasanha e risoto de cogumelos) e 1 opção de sobremesa (sorvete com calda de chocolate).

Considerando que os clientes vão escolher 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa a cada refeição, podemos organizar todas as opções possíveis fazendo desenhos.

Ilustrações: Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

Ou podemos organizar as opções de refeições utilizando diagramas.



WYM Design/Arquivo da editora

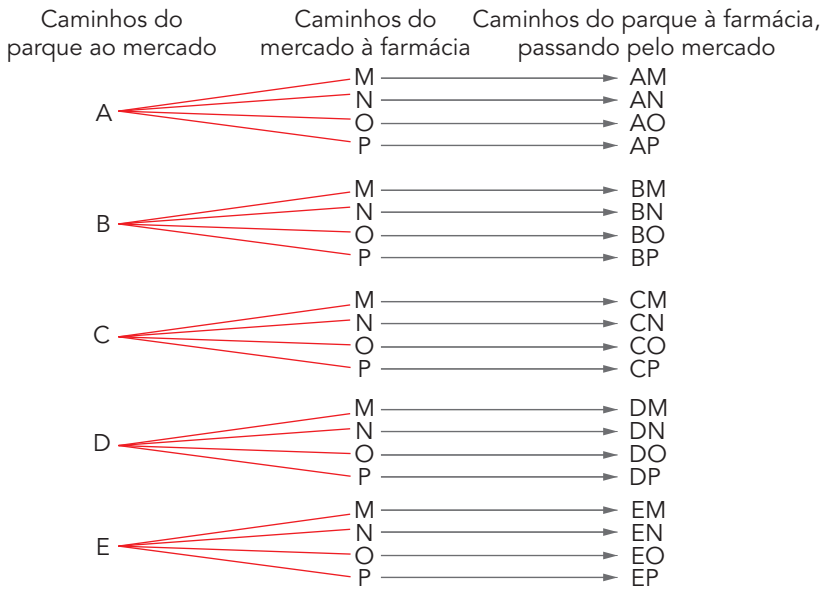
Note que esse acontecimento tem 3 etapas, com 2 possibilidades em 2 etapas e 1 possibilidade em outra, totalizando 4 possibilidades (pois $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$).

b) Uma pessoa está no parque e quer ir à farmácia, mas antes precisa passar no mercado. Ela considerou 5 caminhos diferentes para chegar ao mercado, saindo do parque, e 4 caminhos diferentes para chegar à farmácia, saindo do mercado.

Se essa pessoa escolher o caminho A do parque ao mercado, pode escolher os caminhos M, N, O ou P do mercado até a farmácia. Logo, são 4 possibilidades de caminho: AM, AN, AO e AP.

Se utilizarmos esse raciocínio para cada um dos caminhos do parque até o mercado, podemos obter todas as possibilidades de caminhos do parque até a farmácia passando pelo mercado.

É possível representar essa situação por meio de um **diagrama de árvore** ou **árvore de possibilidades**. Esse esquema recebe esse nome porque é associado com os galhos de uma árvore.



WYM Design/Arquivo da editora

Ao analisar a árvore de possibilidades, podemos verificar que há 5 possibilidades de caminhos diferentes para ir do parque ao mercado e 4 possibilidades de caminhos diferentes para ir do mercado à farmácia. Dessa maneira, o total de possibilidades de caminhos diferentes é $5 \cdot 4 = 20$.

Assim, podemos concluir que existem 20 caminhos diferentes para ir do parque à farmácia passando pelo mercado.

Reflita: 1ª etapa: parque-mercado; 2ª etapa: mercado-farmácia. Porque a escolha em uma etapa não influencia a escolha da outra etapa.

Não escreva no livro

Reflita

Podemos dizer que o caminho do parque à farmácia é um acontecimento composto de 2 etapas sucessivas e independentes. Quais são elas? Por que elas são independentes?

c) Em um jogo de tabuleiro, a ação do jogador é definida ao jogar 2 dados. Um deles tem 4 faces, e em cada uma delas há uma das letras A, B, C ou D. O outro dado tem 6 faces, numeradas de 1 a 6.

Jiri Hera/Shutterstock

Existem diversos tipos de jogo de tabuleiro, e os componentes deles variam de acordo com as regras e o propósito do jogo.

Podemos montar uma tabela para indicar todas as possibilidades de resultados a cada jogada.

Possibilidades de resultados a cada jogada

Dado de 4 faces / Dado de 6 faces	A	B	C	D
1	1A	1B	1C	1D
2	2A	2B	2C	2D
3	3A	3B	3C	3D
4	4A	4B	4C	4D
5	5A	5B	5C	5D
6	6A	6B	6C	6D

Dados elaborados para fins didáticos.

Note que esse acontecimento tem 2 etapas, com 4 possibilidades em uma e 6 possibilidades em outra, totalizando 24 possibilidades (pois $4 \cdot 6 = 24$).

Podemos fazer uma lista com todas as possibilidades: 1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 1D, 2D, 3D, 4D, 5D e 6D.

Formalizando o princípio fundamental da contagem

As análises das situações anteriores exemplificam o princípio fundamental da contagem, que pode ser definido da seguinte maneira:

Um acontecimento é composto de n etapas a_1, a_2, ..., a_n, sucessivas e independentes, de maneira que:

- a quantidade de possibilidades distintas de a_1 ocorrer é b_1;
- para cada possibilidade da etapa a_1, a quantidade de possibilidades distintas de a_2 ocorrer é b_2;

  ⋮
- para cada possibilidade das etapas anteriores, a quantidade de possibilidades distintas de a_n ocorrer é b_n.

Então, a quantidade de possibilidades de o acontecimento ocorrer é dada por:

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$$

Esse é o **princípio fundamental da contagem**.

Fique atento

O princípio fundamental da contagem também pode ser chamado de **princípio da multiplicação** ou **princípio multiplicativo**.

Analise alguns exemplos em que o princípio fundamental da contagem é utilizado.

a) Quantos números diferentes de 3 algarismos podemos formar com 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

centena	dezena	unidade

Esse acontecimento tem 3 etapas: a centena, a dezena e a unidade.

Há 5 possibilidades para a centena (o algarismo 0 não é permitido), 6 para a dezena e 6 para a unidade.

Utilizando o princípio fundamental da contagem, calculamos: $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$.

Logo, podemos formar 180 números diferentes.

b) Quantos **anagramas** diferentes de 3 letras distintas podemos formar com as letras A, B, C, D, E, F e G?

1ª letra	2ª letra	3ª letra

Esse acontecimento tem 3 etapas: a 1ª letra, a 2ª letra e a 3ª letra.

Há 7 possibilidades para a 1ª letra, 6 possibilidades para a 2ª letra (todas as opções anteriores menos 1 que foi utilizada) e 5 possibilidades para a 3ª letra (todas as opções anteriores menos 2 que foram utilizadas).

Utilizando o princípio fundamental da contagem, podemos calcular: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Logo, é possível formar 210 anagramas diferentes.

c) Em uma tarde, Pedro pode escolher entre ir ao parque ou ao cinema. No parque, ele pode caminhar ou andar de bicicleta; no cinema, ele pode assistir a 1 entre 4 filmes. Quantas possibilidades diferentes de passeio Pedro pode escolher?

Se ele escolher ir ao parque, então há 2 possibilidades de atividades.

Se ele escolher ir ao cinema, então há 4 possibilidades de filmes.

$$2 + 4 = 6$$

Portanto, Pedro tem 6 possibilidades diferentes de passeio.

No exemplo anterior, utilizamos o princípio aditivo, que nos permite adicionar as possibilidades do acontecimento **1** às possibilidades do acontecimento **2**.

O **princípio aditivo** é utilizado sempre que podemos escolher um **ou** outro acontecimento, sendo que ambos não podem ser escolhidos ao mesmo tempo.

Reflita: Se tivermos o algarismo 0 nas centenas, significa que não há centenas nesse número. Por exemplo: $\underline{0}\,\underline{4}\,\underline{5} = 45$.

Não escreva no livro

Reflita

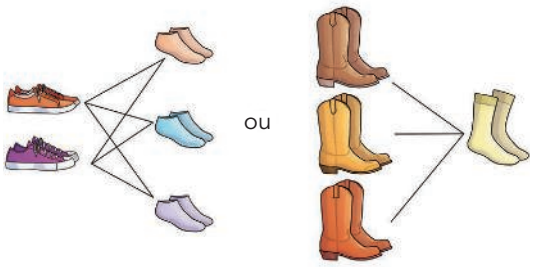
O 0 é excluído do algarismo das centenas pois o número considerado deve ter 3 algarismos. Justifique.

anagramas: palavras que são formadas mudando a ordem das letras da palavra original. Em Matemática, consideramos todas as possibilidades, mesmo que alguma palavra formada não tenha sentido ou não tenha registro no dicionário.

Professor, para a atividade **3**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

Analise outro exemplo a seguir.

d) Carina tem 2 pares de tênis e 3 pares de botas. Dentre os 4 pares de meias que possui, 3 pares de meias diferentes podem ser usados com os pares de tênis, e apenas 1 par de meias pode ser usado com as botas. De quantas maneiras diferentes ela pode escolher um calçado e o par de meias adequado?



Ilustrações: Tiago Donizete Leme/ Arquivo da editora

Vamos analisar separadamente as possibilidades de escolha do tênis ou da bota.

Acontecimento 1: Escolher um par de tênis e um par de meias adequado para usar com o tênis.

_____ _____
tênis meias

Esse acontecimento tem 2 etapas: a escolha do tênis e a escolha da meia.

Há 2 possibilidades diferentes para a escolha do tênis e 3 possibilidades para a escolha da meia.

Utilizando o princípio fundamental da contagem, calculamos: $2 \cdot 3 = 6$.

Acontecimento 2: Escolher um par de botas e um par de meias adequado para usar com as botas.

_____ _____
bota meias

Esse acontecimento tem 2 etapas: a escolha da bota e a escolha das meias.

Há 3 possibilidades diferentes para a escolha da bota e 1 possibilidade para a escolha das meias.

Utilizando o princípio fundamental da contagem, calculamos: $3 \cdot 1 = 3$.

Como ela vai utilizar o tênis **ou** a bota, podemos utilizar o **princípio aditivo** e adicionar as possibilidades de cada escolha.

$$6 + 3 = 9$$

Carina tem 9 possibilidades diferentes de escolher o calçado com as respectivas meias.

3. Exemplo de problema: Em um menu executivo de um restaurante vegano há 4 tipos de salada, 5 tipos de massa, 3 tipos de carne de soja e 3 tipos de sobremesa. De quantas maneiras distintas podemos fazer uma refeição composta de 1 salada, 1 massa, 1 tipo de carne de soja e 1 sobremesa?

Atividades

Não escreva no livro

1. Existem 2 vias de locomoção para ir de uma cidade **A** para uma cidade **B** e 3 vias de locomoção de uma cidade **B** a uma cidade **C**. De quantas maneiras distintas podemos ir de **A** a **C** passando por **B**? $2 \cdot 3 = 6$; logo, de 6 maneiras distintas.

2. Em um restaurante há 5 tipos de salada, 4 tipos de prato quente e 3 tipos de sobremesa. De quantas maneiras distintas podemos fazer uma refeição composta de 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa? Podemos multiplicar a quantidade de opções de salada, prato quente e sobremesa: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Portanto, há 60 maneiras distintas.

3. Pesquise em restaurantes e estabelecimentos alimentícios outros menus e, no caderno, elabore um problema como o anterior. Depois, troque com um colega e resolva o problema dele.

4. Uma atividade é composta de 7 itens do tipo "verdadeiro ou falso". De quantas maneiras distintas um estudante pode responder a essa atividade aleatoriamente, ou seja, "chutando" as respostas? Cada atividade tem 2 possibilidades diferentes: verdadeiro ou falso. Podemos multiplicar a quantidade de possibilidades para as 7 atividades: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128$. Portanto, há 128 maneiras distintas.

6. $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{90 \text{ vezes}} = 5^{90}$; logo, de 5^{90} maneiras distintas.

5. Em um salão de festas há 6 janelas. De quantas maneiras distintas podemos escolher quais janelas estarão abertas ou fechadas de modo que pelo menos 1 das janelas esteja aberta? $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$; $64 - 1 = 63$; logo de 63 maneiras distintas.

6. Em uma prova de vestibular com 90 questões do tipo teste, cada questão tem 5 alternativas. O estudante deve preencher um cartão de respostas assinalando o quadrinho correspondente à resposta de cada questão.

Supondo que todas as questões sejam respondidas, de quantas maneiras diferentes o cartão de respostas com as 90 questões dessa prova pode ser preenchido aleatoriamente? Indique a resposta em forma de potência.

7. Um *show* de talentos vai fazer audições com 3 jurados. Cada candidato tem direito a 5 minutos de apresentação e pode cantar, dançar, realizar um truque de mágica, etc. Se ao menos 1 dos jurados aprovar o candidato, ele passa para a próxima etapa. De quantas maneiras diferentes um candidato pode ser aprovado? De 7 maneiras diferentes.

sirtravelalot/Shutterstock

Algumas pessoas participam de *shows* de talento para fazer apresentações de canto, dança, entre outras, com a intenção de mostrar a arte delas para o mundo.

Texto para a próxima atividade.

Linguistas afirmam que é impossível saber ao certo quantas palavras existem em um idioma, pois os dicionários apresentam palavras que já saíram de uso, além de deixar de incluir novos vocábulos. Contudo, estima-se que a língua portuguesa tenha mais de 400 000 palavras.

Fonte dos dados: QUAL é o idioma com mais vocábulos? *Superinteressante*, *[s. l.]*, 4 jul. 2018. Disponível em: https://tedit.net/9833hv. Acesso em: 20 jul. 2024.

8. Cada letra na palavra tem 26 possibilidades diferentes, já que elas podem se repetir. Podemos multiplicar a quantidade de possibilidades das 4 letras: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4 = 456\,976$. Logo, podem ser formadas 456 976 palavras diferentes.

Os matemáticos podem ajudar a quantificar as palavras existentes, mas o trabalho dos linguistas de determinar quais fazem sentido ou não é essencial.

8. Considerando que o alfabeto que utilizamos no Brasil tem 26 letras, qual é a quantidade de palavras diferentes, com ou sem sentido, que podem ser formadas com 4 letras?

9. Carlos vai reformar a casa dele e precisa escolher os acabamentos da sala de jantar. O arquiteto fez as seguintes sugestões, considerando a escolha entre tinta e papel de parede:

- se Carlos escolher colocar papel de parede, então ele tem 4 opções de papel de parede e 5 opções de piso para escolher;
- se Carlos decidir pintar as paredes, então ele tem 3 cores disponíveis e 4 opções de piso que combinam.

Quantas são as possibilidades diferentes de escolha de Carlos?

10. A política de determinado hospital exige que de 5 em 5 anos seja feita uma eleição para 3 cargos de liderança. Para concorrer neste ano, existem 6 candidatos a diretor, 4 candidatos a vice-diretor e 4 candidatos a chefe de RH. Sabendo que um mesmo candidato não pode concorrer nem ser eleito a cargos distintos, de quantas maneiras diferentes é possível definir a equipe?

a) 96 maneiras.
b) 16 maneiras.
c) 24 maneiras.
d) 30 maneiras.
e) 80 maneiras.

Podemos multiplicar a quantidade de possibilidades de cada cargo: $6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$. Logo, há 96 maneiras diferentes. Alternativa **a**.

11. Júlia quer assistir a um filme no cinema, a um espetáculo circense ou a uma peça de teatro. O circo que está na cidade em que ela mora apresenta 2 espetáculos distintos; cada um dos 3 cinemas da cidade tem 5 filmes diferentes em cartaz; e cada um dos 2 teatros mais próximos está apresentando 2 espetáculos diferentes. De quantas maneiras diferentes Julia pode escolher o que fazer? $3 \cdot 5 = 15$; $2 \cdot 2 = 4$; $2 + 15 + 4 = 21$; logo, de 21 maneiras diferentes.

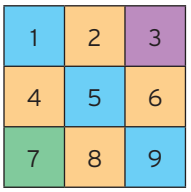
9. Se colocar o papel de parede, então são 20 possibilidades: $4 \cdot 5 = 20$.
Se escolher pintar as paredes, então são 12 possibilidades: $3 \cdot 4 = 12$.
O total de possiblidades diferentes é: $20 + 12 = 32$. Portanto, há 32 possibilidades diferentes.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, pode-se preparar uma versão tátil do tabuleiro e das peças para que eles manipulem e pensem nas possibilidades para, então, descrevê-las.

Não escreva no livro

Texto para a próxima atividade.

O jogo do quadrado é composto de um tabuleiro com 9 casas, numeradas de 1 a 9, como na imagem.



WYM Design/ Arquivo da editora

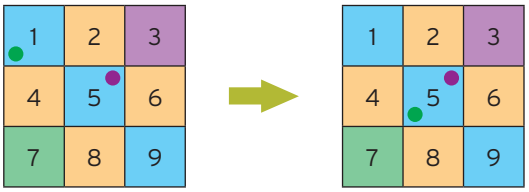
O objetivo desse jogo é eliminar a peça do adversário ou chegar ao ponto de partida do oponente. Para isso, é permitido mover a peça apenas 1 vez por rodada, no sentido horizontal ou vertical.

A partida ocorre com apenas 2 jogadores, e cada um usa uma única peça.

As regras do jogo são as seguintes:

- por meio de um sorteio, os participantes devem decidir quem será o 1º e quem será o 2º jogador;
- no início do jogo, a peça do 1º jogador começa na casa 7, enquanto a peça do 2º jogador começa na casa 3;
- a cada rodada, o jogador pode mover a peça 1 casa na vertical ou na horizontal, inclusive para a casa onde estava na rodada anterior. Contudo, não é permitido voltar ao respectivo ponto de partida, isto é, à casa 7 para o 1º jogador e à casa 3 para o 2º jogador;
- se as peças estiverem na mesma diagonal e a 1 casa de distância, o próximo jogador deve eliminar a peça do adversário e colocar sua peça na casa em que está a peça adversária;

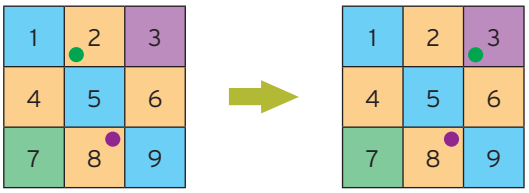
Ilustrações: WYM Design/ Arquivo da editora



Se o 1º jogador (peça verde) ocupar a casa 1 e o 2º jogador (peça roxa) ocupar a casa 5, então o 1º jogador deve eliminar o 2º jogador.

- caso uma peça esteja em uma casa adjacente ao ponto de partida adversário, é obrigatório ir para essa casa;

Ilustrações: WYM Design/ Arquivo da editora

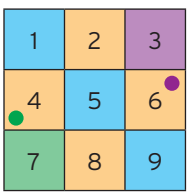


Se o 1º jogador (peça verde) ocupar a casa 2 e o 2º jogador (peça roxa) ocupar a casa 8, então o 1º jogador deve ir para o ponto de partida do 2º jogador (casa 3).

- a quantidade máxima de movimentos permitidos é 8, considerando os movimentos de ambos os jogadores. Se, após o final do 8º movimento, o jogo não terminar, considera-se o resultado um empate.

Fontes dos dados: AMBROSI, L. *Jogos em uma sequência didática para o ensino de análise combinatória*. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2017. Disponível em: https://tedit.net/i5qfwg; LOPES, José Marcos; REZENDE, Josiane de Carvalho. Um novo jogo para o estudo do raciocínio combinatório e do cálculo de probabilidade. *Bolema*: Mathematics Education Bulletin, Rio Claro, v. 23, n. 36, p. 657-682, 2010. Disponível em: https://tedit.net/d1qip3. Acesso em: 19 ago. 2024.

12. Considere uma situação hipotética, em que duas pessoas estão jogando o jogo do quadrado, o 1º jogador (peça verde) posiciona a peça dele na casa 4 no 1º movimento. Em seguida, o 2º jogador (peça roxa) posiciona a peça dele na casa 6, conforme a imagem.



WYM Design/ Arquivo da editora

O primeiro jogador sempre vence nesse cenário. O diagrama de árvore encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Supondo que, durante determinado jogo, nenhum dos 2 jogadores moveu a própria peça para a posição em que estava na rodada anterior, quais são os possíveis resultados dessa partida? Construa um diagrama de árvore no caderno para justificar sua resposta.

Fique atento

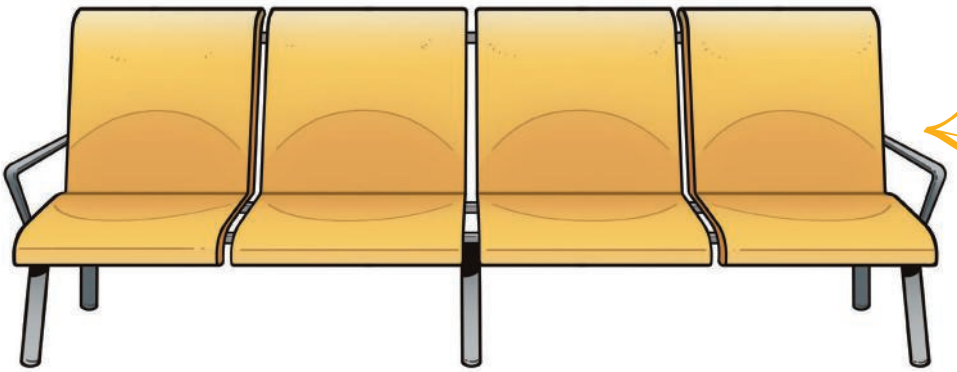
O tipo de raciocínio necessário para essa atividade é chamado **decomposição**.

Explorando as permutações simples

Permutar é sinônimo de trocar. Nos problemas de contagem, a permutação pode ser associada à noção de embaralhar, isto é, trocar a posição dos objetos.

Estudaremos agora quantos agrupamentos podemos formar quando temos *n* elementos e todos são usados em cada agrupamento.

Ana, Bruno, Carolina e Douglas foram a um parque e sentaram-se juntos no mesmo banco, lado a lado. Em quantas configurações diferentes os 4 amigos podem ter se sentado?



Tiago Donizete Leme/ Arquivo da editora

Banco do parque com 4 lugares. Nesse exemplo, a ordem em que os amigos vão se sentar no banco é importante. É ela que determina que existem diferentes possibilidades.

Vamos indicar os 4 amigos utilizando as primeiras letras dos nomes deles.

- Se Ana ficar no 1º lugar à esquerda, temos as possibilidades: ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC e ADCB.
- Se Bruno ficar no 1º lugar à esquerda, temos as possibilidades: BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC e BDCA.
- Se Carolina ficar no 1º lugar à esquerda, temos as possibilidades: CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB e CDBA.
- Se Douglas ficar no 1º lugar à esquerda, temos as possibilidades: DBCA, DBAC, DCBA, DCAB, DABC e DACB.

Dessa maneira, concluímos que os 4 amigos podem ter sentado em 24 configurações diferentes, pois $4 \cdot 6 = 24$.

Também podemos usar o princípio fundamental da contagem para contar as opções.

Qualquer um dos 4 colegas pode se sentar no 1º lugar. No 2º lugar sobram 3 opções, já que uma pessoa não pode se sentar em dois lugares ao mesmo tempo. Sobram 2 opções no 3º lugar. Por fim, falta apenas 1 pessoa, que deve se sentar no 4º lugar.

Dessa maneira, temos: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; ou seja, 24 configurações diferentes.

Formalizando as permutações simples

De modo geral, a pergunta relacionada à permutação é: De quantas maneiras diferentes podemos ordenar em fila n objetos distintos escolhidos entre n objetos? Podemos escolher o 1º elemento da fila de n maneiras. Agora, de quantas maneiras diferentes podemos escolher o 2º elemento da fila? De $n - 1$ maneiras diferentes. Prosseguindo assim e usando o princípio fundamental da contagem, a quantidade de agrupamentos ordenados que podemos obter com todos esses n elementos é dada por: $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Considerando n elementos distintos, com $n \in \mathbb{N}^*$, os agrupamentos ordenados formados por esses n elementos recebem o nome de **permutações simples** quando não há repetição de elementos.
Indicamos por P_n a quantidade de permutações simples de n elementos e escrevemos: $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Fatorial

O valor obtido com P_n é chamado **fatorial** do número natural n e indicado por $n!$ (lê-se "fatorial de n" ou "n fatorial").
Assim, temos: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, para $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geqslant 1$. Considera-se $0! = 1$.

Logo, a quantidade de permutações simples de n objetos, ou seja, a quantidade de vezes que podemos colocar n objetos distintos em diferentes ordens é $n!$. Escrevemos:

$$P_n = n!$$

Exemplos:

a) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

c) $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$

d) $P_0 = 0! = 1$

Fique atento

Podemos escrever:

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$
$$15! = 15 \cdot 14!$$

Fique atento

O cálculo da quantidade de maneiras distintas como 4 colegas podem se sentar em um banco, apresentado anteriormente, pode ser indicado por $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Atividades resolvidas

1. Simplifique as expressões:

a) $\frac{20!}{18!}$

b) $\frac{48! + 49!}{50!}$

c) $\frac{n!}{(n+1)!}$

Resolução

a) $\frac{20!}{18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 380$

b) $\frac{48! + 49!}{50!} = \frac{48! + (49 \cdot 48!)}{50!} =$

$= \frac{\cancel{48!} \cdot (1 + 49)}{50 \cdot 49 \cdot \cancel{48!}} = \frac{\cancel{50}}{\cancel{50} \cdot 49} = \frac{1}{49}$

c) $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$

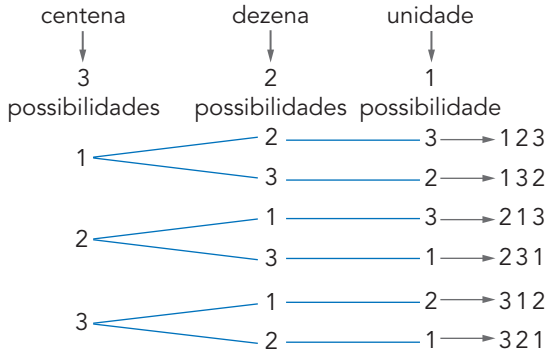
2. Quantos números diferentes de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?

Resolução

1ª maneira: resolução por tentativa.

Temos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Concluímos, então, que são 6 os números procurados.

2ª maneira: árvore de possibilidades.



Banco de imagens/Arquivo da editora

3ª maneira: princípio fundamental da contagem.

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$$

É possível formar 6 números diferentes com algarismos distintos.

Perceba que a **ordem dos algarismos** é muito importante. Todos os números diferem entre si pela ordem dos algarismos.

3. Calcule quantos são os anagramas:

a) da palavra PERDÃO;

b) da palavra PERDÃO que iniciam com P e terminam em O;

c) da palavra PERDÃO em que as letras A e O aparecem juntas e nessa ordem (ÃO);

d) da palavra PERDÃO em que as letras PER aparecem juntas em qualquer ordem.

Resolução

Cada anagrama corresponde a uma ordem de colocação dessas 6 letras.

a) Basta calcular P_6:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Há 720 anagramas da palavra PERDÃO.

b) P __ __ __ __ O

Devemos permutar as 4 letras não fixas, ou seja, calcular P_4:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Há 24 anagramas da palavra PERDÃO iniciados com P e terminados em O.

c) Aqui é como se ÃO fosse uma só letra: PERD**ÃO**; assim, temos de calcular P_5:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Há 120 anagramas da palavra PERDÃO em que as letras ÃO ficam juntas nessa ordem.

d) Considerando PER como uma só letra, **PER**DÃO, temos de calcular P_4:

$$P_4 = 4! = 24$$

Como as 3 letras de PER podem aparecer em qualquer ordem, $P_3 = 3! = 6$; ou seja, há 6 possibilidades de escrevê-las juntas.

Assim, a quantidade de anagramas é:

$$P_4 \cdot P_3 = 24 \cdot 6 = 144$$

Há 144 anagramas da palavra PERDÃO em que as letras PER aparecem juntas em qualquer ordem.

4. Se colocarmos todos os anagramas da palavra ÂNGULO listados em ordem alfabética, como em um dicionário, quais serão as posições das palavras indicadas a seguir?

a) ÂGLNOU **b)** UONLGÂ

Resolução

a) Como todas as letras estão em ordem alfabética, a palavra ÂGLNOU ocupará a 1ª posição.

b) Como as letras da palavra UONLGÂ estão na ordem inversa à da 1ª posição, essa palavra ocupará a última posição.

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Assim, UONLGÂ ocupará a 720ª posição.

15. $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$; logo, 256 números. $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; logo, 24 números com algarismos distintos.
16. a) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$; logo, há 120 configurações diferentes.
b) $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; $2 \cdot 24 = 48$; logo, há 48 configurações diferentes.

Atividades

Não escreva no livro

18. b) $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; logo, 6 anagramas.

13. $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; logo, 6 palavras diferentes: ALI, AIL, LAI, LIA, IAL, ILA.

13. Quantas palavras diferentes (que tenham significado ou não na língua portuguesa) de 3 letras é possível formar com as letras A, L e I? Quais são essas palavras?

14. Quantos são os anagramas da palavra AMOR?
$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; logo, 24 anagramas.

15. Quantos números de 4 algarismos podemos escrever com os algarismos 2, 4, 6 e 8? E números com 4 algarismos distintos?

16. Considere um banco retilíneo de 5 lugares.

a) Quantas são as configurações diferentes em que um grupo de 5 pessoas pode se sentar nesse banco?

b) Se 2 pessoas desse grupo resolverem ficar juntas em qualquer ordem, quantas são as configurações possíveis em que todos podem se sentar no banco?

c) No caderno, elabore um problema como o dos itens anteriores, mas suponha uma situação diferente de escolha de lugares. Depois, troque-o com um colega e resolva o problema dele. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

17. Quantos números naturais com algarismos distintos entre 5 000 e 10 000 podemos formar com os algarismos 1, 2, 4 e 6?
$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; logo, 6 números.

18. Considere todos os anagramas da palavra TEORIA.

a) Quantos são? $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$; logo, 720 anagramas.

b) Quantos começam por TEO?

c) Quantos têm as letras TEO juntas nessa ordem? $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; logo, 24 anagramas.

d) Quantos anagramas apresentam as letras TEO juntas em qualquer ordem?
$P_4 \cdot P_3 = 24 \cdot 6 = 144$; logo, 144 anagramas.

e) Quantos anagramas apresentam as vogais juntas, em ordem alfabética, e as consoantes juntas, em qualquer ordem?
$P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$; $P_2 = 2! = 2$; $2 + 2 = 4$; logo, 4 anagramas.

19. Escolha outra palavra que tenha todas as letras diferentes, imponha uma condição envolvendo as letras e elabore um problema no caderno sobre os anagramas dessa palavra. Depois, troque-o com um colega e resolva o problema dele.
Exemplo de problema: Considerando a palavra JANEIRO, quantos anagramas podem ser obtidos com as vogais juntas em qualquer ordem?

20. Colocando todos os anagramas da palavra AMIGO listados em ordem alfabética, como em um dicionário, qual será a:

a) 1ª palavra? AGIMO

b) 2ª palavra? AGIOM

c) 25ª palavra? GAIMO

d) penúltima palavra? OMIAG

e) 55ª palavra? IGAMO

Texto para a próxima atividade.

De acordo com o *Guinness World Records*, a russa Valentina Vassilyeva (1707-1782) foi a mulher que deu à luz mais filhos no mundo. Ela passou por 27 trabalhos de parto: 16 deles foram de gêmeos, 7 de trigêmeos e 4 de quadrigêmeos.

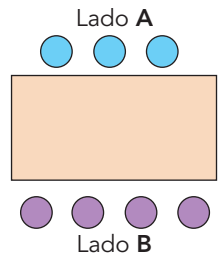
Biologicamente falando, uma gravidez média de 1 filho leva 40 semanas. Se forem gêmeos, 37 semanas. Se forem trigêmeos, 32 semanas. Se forem quadrigêmeos, 30 semanas. Como em um ano há 52 semanas, podemos concluir que Valentina esteve grávida por, aproximadamente, 18 anos inteiros.

Fontes dos dados: BRANCO, Mariana. A gravidez de gêmeos. *Crescer, [s. l.]*, 5 out. 2021. Disponível em: https://tedit.net/k4onwx; MOTOMURA, Marina. Qual foi a mulher que teve mais filhos até hoje? *Superinteressante*, [s. *l.*], 4 jul. 2018. Disponível em: https://tedit.net/zr73xe. Acesso em: 19 ago. 2024.

21. $16 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 32 + 21 + 16 = 69$; $P_{69} = 69!$; logo, há 69! maneiras diferentes.

21. Há quantas maneiras diferentes de enfileirar todos os filhos de Valentina? Registre no caderno na forma de um fatorial.

22. Um grupo de 4 estudantes e 3 monitores deve ocupar os 7 lugares de uma mesa retangular como na imagem. Os estudantes devem se posicionar no lado **B** da mesa e os monitores no lado **A**. Cada um dos lugares deve ser ocupado por uma única pessoa.



Banco de imagens/Arquivo da editora

De quantos modos diferentes isso pode ser feito? $P_4 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144$; logo, de 144 modos diferentes.

23. Em um jogo de bilhar, há 15 bolas numeradas de 1 a 15 mais a bola branca, que não é numerada.

Um jogador pretende enfileirar essas bolas (inclusive a branca) de modo que as bolas 1 e 2 não fiquem juntas. A quantidade de maneiras distintas como isso pode ser feito é igual a:

a) $16! - 2!$.
b) $16! \cdot 2!$.
c) $16! - (15! \cdot 2!)$.
d) $16! - 15! - 2!$.
e) $14! \cdot 2!$.

23. Quantidade de maneiras como as 16 bolas podem ser enfileiradas: $P_{16} = 16!$.
Quantidade de maneiras como as bolas 1 e 2 ficam juntas: $P_{15} \cdot P_2 = 15! \cdot 2!$.
Quantidade de maneiras como as bolas 1 e 2 não ficam juntas: $16! - (15! \cdot 2!)$.
Alternativa **c**.

Explorando as permutações com repetição

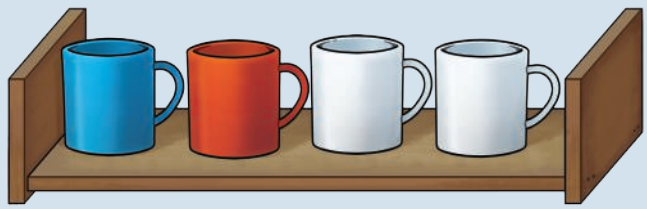
Já estudamos as permutações simples, em que todos os elementos permutados são diferentes. Agora, vamos estudar os casos de permutação com elementos repetidos.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Tulio tem 4 canecas: 1 caneca azul, 1 caneca vermelha e 2 canecas brancas. Todas as canecas são iguais e se diferenciam exclusivamente pelas cores.

Tiago Donizete Leme/ Arquivo da editora



Possível organização das canecas.

a) Liste no caderno todas as possibilidades de organizar essas canecas em uma prateleira. Use A para a caneca azul, V para a caneca vermelha, B_1 para uma das canecas brancas e B_2 para a outra caneca branca. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Quantas possibilidades de organização das canecas existem? 24 possibilidades.

2. Considere que as 2 canecas brancas são iguais.

a) Reescreva no caderno a lista de todas as possibilidades de organização das canecas substituindo B_1 e B_2 por B. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Analise essa nova lista de possibilidades de organização das canecas. Algumas delas estão repetidas; quantas vezes cada possibilidade se repete? 2 vezes.

c) Quantas possibilidades diferentes de organização existem? 12 possibilidades.

3. Tulio quebrou a caneca vermelha e comprou outra caneca branca para substituí-la.

a) Liste no caderno todas as possibilidades diferentes de organizar as canecas na prateleira. Utilize A para a caneca azul e B_1, B_2 e B_3 para as canecas brancas. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Reescreva no caderno a lista de todas as possibilidades de organização substituindo B_1, B_2 e B_3 por B. A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

c) Analise a nova lista de organizações. Quantas vezes as possibilidades que são iguais se repetem? 6 vezes.

d) Quantas organizações diferentes você listou? 4 organizações.

4. Reúna-se com um colega para considerar os resultados das atividades anteriores e indicar, no caderno, uma maneira de calcular a quantidade de organizações diferentes sem precisar listar cada uma delas. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que é necessário dividir a quantidade de permutações, sem considerar as repetições, pelo número de permutações dos elementos repetidos.

Professor, para o item **a** da atividade **1**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Formalizando as permutações com repetição

Em anagramas de palavras, é muito comum encontrar elementos repetidos na permutação. A seguir, vamos analisar algumas permutações das letras da palavra BATATA.

Uma possibilidade de permutação é a própria palavra: BATATA.

Se mudarmos apenas 2 das letras A de lugar, teremos: BATATA.

Perceba que, com a troca das 2 letras A, a palavra continua a mesma. Logo, só podemos considerar uma possibilidade para essas configurações. Isso ocorre quando há elementos repetidos na permutação.

Se as letras A fossem diferentes e as letras T também, poderíamos considerar as letras B, A_1, A_2, A_3, T_1, T_2, e o total de anagramas seria $P_6 = 6!$.

Mas as permutações entre as 3 letras A não produzirão um novo anagrama. Por exemplo, todas as opções a seguir representam o mesmo anagrama.

BATATA
BATATA
BATATA
BATATA
BATATA
BATATA
} → BATATA

Então, precisamos dividir P_6 por P_3.

O mesmo ocorre com as 2 letras T: também precisamos dividir P_6 por P_2.

Portanto, a quantidade de anagramas da palavra BATATA pode ser calculada por:

$$\frac{P_6}{P_3 \cdot P_2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = 60$$

A palavra BATATA tem 60 anagramas.

A fórmula que pode ser utilizada em problemas como esse é definida por:

A permutação de n elementos, dos quais um elemento é repetido R_1 vezes, outro elemento é repetido R_2 vezes, e assim por diante, é dada por:

$$P_n^{R_1, R_2, \ldots, R_n} = \frac{n!}{R_1! \cdot R_2! \cdot \ldots \cdot R_n!}$$

Fique atento

Para resolver problemas que envolvem permutação simples ou com repetição, podemos transformar a situação em um anagrama.

27. Calculamos a permutação das 4 camisetas considerando as repetições de cores.

$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 6$; logo, de 6 maneiras diferentes.

Atividades resolvidas

5. Quantos são os anagramas da palavra ARARA?

Resolução

Nesse caso, há 3 três letras A, 2 letras R e um total de 5 letras.

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = 10$$

Logo, há 10 anagramas da palavra ARARA.

6. Quantos anagramas da palavra CAMARADA começam com A?

Resolução

Fixamos uma letra A e fazemos os possíveis anagramas com as demais letras: CAMARAD.

Nesse caso, são 7 letras, sendo que 3 delas se repetem.

$$P_7^{3,1,1,1,1} = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

Há 840 anagramas da palavra CAMARADA que começam com A.

Atividades

24. a) Podemos calcular a permutação de 4 letras, considerando que 2 se repetem.

$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 6$; logo, 6 anagramas.

Não escreva no livro

24. Em relação à palavra BEBÊ:

a) quantos são os anagramas?

b) quais são os anagramas?
BBEE, EEBB, EBEB, EBBE, BEEB e BEBE.

> **Fique atento**
>
> Por convenção, a acentuação gráfica não é considerada nos anagramas. Na palavra **bebê**, por exemplo, há a repetição de 2 letras **E**, independentemente de ter acento ou não.

25. Determine quantos são os anagramas das palavras:

a) MISSISSIPPI; 34 650 anagramas.

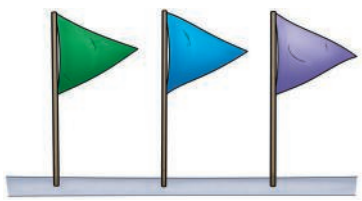
b) ARARAQUARA; 5 040 anagramas.

c) ABÓBORA; 630 anagramas.

d) BISCOITO; 10 080 anagramas.

e) ARARAQUARA que começam e terminam com A. 1 120 anagramas.

26. Em um lote imobiliário são utilizadas 30 bandeiras exatamente iguais, senão pelas cores, para delimitar a área do novo empreendimento. As bandeiras são dispostas em linha reta, na lateral do lote próxima à rodovia e paralela a ela, à mesma medida de distância umas das outras. $P_{30}^{12,10,8} = \frac{30!}{12! \cdot 10! \cdot 8!}$



Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

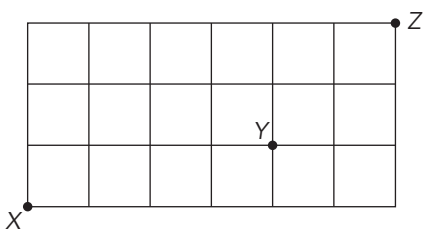
Bandeiras verde, azul e roxa.

As bandeiras têm 3 cores diferentes: 12 delas são verdes, 8 são azuis e 10 são roxas. De quantas maneiras diferentes é possível dispor as bandeiras? Indique a resposta no caderno, se necessário, usando fatorial.

27. Fabiana tem 4 camisetas iguais, sendo 2 pretas e 2 brancas. De quantas maneiras diferentes ela pode empilhar as 4 camisetas na estante do guarda-roupa?

28. Uma prova tem 10 questões objetivas, cada uma valendo 1 ponto se estiver certa ou 0 ponto se estiver errada (não há "meio certo" nas questões). De quantos modos diferentes é possível tirar nota 7 nessa prova?

29. Em um jogo, é necessário escolher um trajeto que leve de um ponto a outro do tabuleiro.



WYM Design/Arquivo da editora

Tabuleiro do jogo.

28. Podemos calcular a permutação de 10 atividades, considerando como repetição as 7 questões certas e as 3 erradas.

$P_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 120$; logo, de 120 modos diferentes.

29. d) $\frac{(n+m)!}{n! \cdot m!}$

Pelas regras do jogo, só é permitida a locomoção sobre as linhas verticais e as linhas horizontais do tabuleiro. Além disso, só são permitidos 2 movimentos: D (horizontal para a direita) e C (vertical para cima).

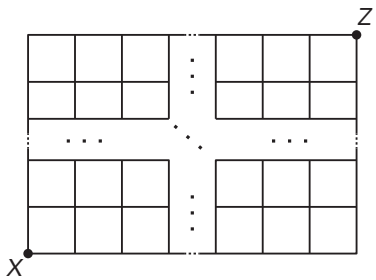
Por exemplo, no tabuleiro 6 × 3 apresentado, para sair de *X* e chegar a *Y*, é possível percorrer o trajeto DDDDC ou o trajeto DDCDD.

a) Existem quantos trajetos diferentes que saem de *X* e chegam a *Y*? 5 trajetos diferentes.

b) Existem quantos trajetos diferentes que saem de *X* e chegam a *Z*? 84 trajetos diferentes.

c) Existem quantos trajetos diferentes que saem de *X* e chegam a *Z* sem passar por *Y*? 81 trajetos diferentes.

d) Considere que o objetivo de um jogo que tem um tabuleiro genérico com *n* colunas e *m* linhas (tabuleiro *n* × *m*) é sair de um ponto *X* e chegar ao ponto *Z*, conforme a imagem a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Tabuleiro genérico *n* × *m*.

De acordo com os itens anteriores, escreva no caderno uma expressão, usando *n* e *m*, para determinar a quantidade de trajetos diferentes que saem de *X* e chegam a *Z*.

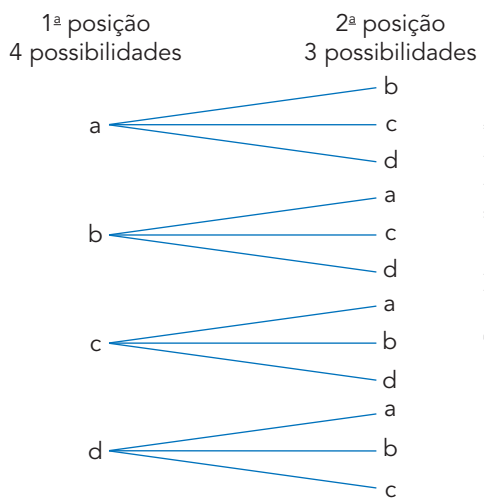
30. No caderno, elabore um problema de permutação com repetição de elementos cuja resposta seja $\frac{8!}{3!}$. Depois troque com um colega e resolva o problema dele.

Exemplo de problema: Quantos anagramas existem com as letras da palavra ELEMENTO?

Explorando os arranjos simples

Estudamos que a permutação simples de *n* elementos é qualquer agrupamento ordenado desses *n* elementos sem repetição. Agora, tendo *n* elementos distintos, vamos estudar os agrupamentos ordenados de 1 elemento, de 2 elementos, de 3 elementos, ..., de *p* elementos, em que $n, p \in \mathbb{N}^*$ e $p \leqslant n$.

Para isso, vamos considerar as letras a, b, c e d, e verificar quantos agrupamentos ordenados diferentes de 2 letras distintas podemos formar.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Na 1ª posição, há 4 possibilidades (pois temos 4 elementos disponíveis: a, b, c e d).
- Na 2ª posição, há 3 possibilidades (utilizamos 1 elemento na 1ª posição e sobram 3 elementos).

Pelo princípio fundamental da contagem, podemos concluir que há, no total, 12 possibilidades diferentes, pois 4 · 3 = 12.

Os 12 agrupamentos ordenados diferentes são:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

Esses agrupamentos são chamados de **arranjos simples**. Arranjamos 4 elementos 2 a 2, e obtivemos 12 arranjos diferentes.

Formalizando os arranjos simples

Agora, vamos calcular a quantidade de agrupamentos de n elementos distintos arranjados p a p, em que $n, p \in \mathbb{N}^*$ e $p \leqslant n$, ou seja, vamos calcular $A_{n,\,p}$ (lê-se "arranjo de n elementos tomados p a p").

Para $n = p$, temos $A_{n,\,n} = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = \dfrac{n!}{1} = n! = P_n$.

Para $p < n$, temos n elementos distintos e vamos arranjá-los p a p considerando o número de possibilidades de cada etapa:

- na 1ª posição: n possibilidades, pois temos n elementos disponíveis;
- na 2ª posição: $(n-1)$ possibilidades, pois temos $(n-1)$ elementos disponíveis;
- na 3ª posição: $(n-2)$ possibilidades, pois temos $(n-2)$ elementos disponíveis;

⋮ ⋮

- na nª posição: $n-(p-1)$ possibilidades, pois temos $n-(p-1)$ elementos disponíveis.

Ao aplicar o princípio fundamental da contagem, a quantidade de possibilidades é dada por:

$$A_{n,\,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot \left[n-(p-1)\right]}_{p \text{ fatores}}$$

Fique atento

$n-(p-1)$ é o mesmo que $n-p+1$.

Podemos, ainda, indicar $A_{n,\,p}$ utilizando fatoriais:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Multiplicando esse número por $\dfrac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p) \cdot (n-p-1) \cdot (n-p-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-p)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!}$$

Fique atento

Como $p < n$, multiplicar um número por $\dfrac{(n-p)!}{(n-p)!}$ corresponde a multiplicá-lo por 1; logo, o valor do número não se altera.

Portanto:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Resumindo:

Arranjos simples de n elementos tomados p a p (com $p \in \mathbb{N}^*$ e $p \leqslant n$) são os agrupamentos ordenados que podem ser formados com p dos n elementos distintos dados.

A quantidade desses agrupamentos é indicada por $A_{n,p}$ ou A_n^p e é calculada da seguinte maneira:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

ou

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Fique atento

Para problemas de contagem com esse tipo de agrupamento, você pode usar tanto o princípio fundamental da contagem como a fórmula para calcular a quantidade de arranjos.

Exemplos:

a) $A_{10,4} = \underset{\downarrow}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = 5\,040$ ou $A_{10,4} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 5\,040$.
$(10 - 4 + 1)$

b) $A_{8,2} = \underset{\downarrow}{8 \cdot 7} = 56$ ou $A_{8,2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$.
$(8 - 2 + 1)$

Atividades resolvidas

7. Quantos números de 2 algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução

Procuramos agrupamentos de 2 elementos em que a ordem é importante; por exemplo: $12 \neq 21$.

Temos 9 elementos que devem ser arranjados 2 a 2. Assim, calculamos:

$$A_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 72$$

Portanto, existem 72 números de 2 algarismos distintos que podem ser escritos com os algarismos de 1 a 9.

8. Responda aos itens.

a) Quantas palavras (que pertencem à língua portuguesa ou não) de 4 letras distintas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM?

b) Quantas dessas palavras começam com a letra E?

Resolução

a) Usando o princípio fundamental da contagem:

Temos 8 possibilidades para a 1ª letra, 7 para a 2ª, 6 para a 3ª e 5 para a 4ª letra.

Assim: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680$.

Logo, podemos formar 1 680 palavras.

b) Usando a fórmula para o cálculo da quantidade de arranjos:

Se fixarmos E como a 1ª letra, teremos de arranjar as 3 restantes das 7 que sobraram.

Assim: $A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} =$

$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Portanto, podemos formar 210 palavras.

Professor, perceba que na atividade resolvida **8**, também é possível utilizar a fórmula de arranjo para resolver o item **a** e o princípio fundamental da contagem para resolver o item **b**. Verifique se os estudantes também têm essa percepção.

37. Exemplo de problema: De quantas maneiras diferentes é possível pintar os 13 países em um mapa da América do Sul, cada um de uma cor, com 15 cores de lápis de cor? Dê a resposta em fatorial.
Professor, oriente os estudantes a definir bem as regiões escolhidas para que o problema seja claro. Se necessário, peça que imprimam a parte do mapa de que eles vão precisar e indiquem as regiões.

Não escreva no livro

Atividades

31. Calcule no caderno:

a) $A_{4,2}\ \frac{4!}{2!} = 12$

b) $A_{6,3}\ \frac{6!}{3!} = 120$

c) $A_{4,4}\ \frac{4!}{0!} = 24$

d) $A_{5,1}\ \frac{5!}{4!} = 5$

e) $A_{7,0}\ \frac{7!}{7!} = 1$

f) $A_{n,0}\ \frac{n!}{n!} = 1$

32. No caderno, determine a expressão correspondente a:

a) $A_{x,2}\ x^2 - x$

b) $A_{x-3,2}\ x^2 - 7x + 12$

c) $A_{2x+1,3}\ 8x^3 - 2x$

33. Um clube tem 10 membros. A diretoria é formada por 1 presidente, 1 vice-presidente, 1 secretário e 1 tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas 1 desses cargos, de quantas maneiras diferentes é possível formar uma diretoria? Tente resolver essa atividade de 2 maneiras, usando o princípio fundamental da contagem e usando a fórmula para o cálculo de arranjos, depois compare as resoluções. De 5 040 maneiras diferentes.

34. Um sofá comporta 4 pessoas. De quantas maneiras diferentes apenas 4 pessoas de um grupo de 6 podem se sentar nesse sofá?

35. De quantas maneiras diferentes podemos escolher aleatoriamente uma pivô e uma armadora em um grupo de 12 jogadoras de basquete?

36. Um estudante tem 6 lápis de cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele poderá pintar em um mapa os estados da região Sudeste do Brasil (São Paulo, Rio de Janeiro, Minas Gerais e Espírito Santo), cada um de uma cor? De 360 maneiras diferentes.

37. Considere as regiões de um continente, um país ou um estado do mapa-múndi. Em seguida, elabore no caderno um problema como o anterior que use essas regiões. Depois, troque com um colega e resolva o problema dele.

38. Os cargos de presidente e vice-presidente de um grêmio estudantil serão ocupados, respectivamente, pelo 1º e pelo 2º colocado em uma eleição na qual concorrem 15 estudantes. De quantas maneiras diferentes é possível preencher esses cargos? De 210 maneiras diferentes.

39. A Fórmula 1 (F1) surgiu em 1950 e é a competição de mais alto nível do mundo envolvendo motores automobilísticos. Considerando que 20 pilotos participaram das corridas de uma temporada, de quantas maneiras o pódio de 3 competidores poderia ser formado? De 6 840 maneiras diferentes.

40. Uma família de 12 pessoas decidiu aproveitar as férias de fim de ano fazendo uma viagem do Rio de Janeiro (RJ) em direção a Fortaleza (CE) de ônibus. No momento da compra das passagens, havia 15 lugares vazios no ônibus. De quantas maneiras distintas é possível organizar essa família nos 15 lugares restantes do ônibus? $A_{15,12} = \frac{15!}{3!}$ Alternativa **a**.

a) $\frac{15!}{3!}$

b) $15!$

c) $12!$

d) $\frac{15!}{3! \cdot 12!}$

e) $15! \cdot 3!$

41. Responda às questões a seguir no caderno.

a) Quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 4, 5, 6, 7 e 8? 120 números.

b) Quantos desses números formados são ímpares? 48 números.

42. Uma das mais tradicionais provas de atletismo que ocorre no Brasil é a corrida de São Silvestre, que acontece sempre no 1º dia do ano. Até 1988, essa competição iniciava nas últimas horas do dia 31 de dezembro e terminava nas primeiras horas da madrugada do dia 1º de janeiro, ou seja, começava em um ano e terminava em outro.

Considere que 4 quenianos, 3 argelinos, 4 brasileiros e 2 franceses compõem o grupo que cruzou primeiro a linha de chegada.

a) De quantos modos diferentes podemos compor os 3 primeiros lugares desse pódio? De 1 716 modos diferentes.

b) De quantos modos diferentes podemos compor os 3 primeiros lugares para que haja, pelo menos, 1 brasileiro? De 1 212 modos diferentes.

34. $A_{6,4} = \frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$; logo; de 360 maneiras diferentes.

35. $A_{12,2} = \frac{12!}{10!} = 12 \cdot 11 = 132$; logo; de 132 maneiras diferentes.

2. a) São 24 maneiras diferentes de escolher os estudantes: abc, abd, acb, acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd, bda, bdc, cab, cad, cba, cbd, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca e dcb.

Explorando as combinações simples

Estudamos que um arranjo simples de n elementos é qualquer agrupamento ordenado que é possível formar com p dos n elementos distintos. Agora, vamos estudar as combinações simples de n elementos distintos tomados p a p.

2. b) Temos que: abc, acb, bac, bca, cab e cba são equivalentes; abd, adb, bad, bda, dab e dba são equivalentes; acd, adc, cad, cda, dac e dca são equivalentes; bcd, bdc, cbd, cdb, dbc e dcb são equivalentes. Cada uma das possibilidades se repete 6 vezes.

Explore para descobrir

1. c) Podemos dividir a quantidade de possibilidades pela quantidade de repetições: $\frac{12}{2} = 6$. São 6 maneiras diferentes de escolher as duplas.

Não escreva no livro

Professor, ressalte que, além da lista, os estudantes podem representar uma tabela ou uma árvore de possibilidades nas atividades **1** e **2**.

Reúna-se com um colega para realizar as atividades a seguir no caderno.

1. É preciso escolher 2 estudantes de um grupo de 4 para assumir os cargos de diretor e vice-diretor de um grêmio estudantil.

a) De quantas maneiras diferentes podemos escolher esses 2 estudantes? Escrevam no caderno todas as possibilidades. Os estudantes a, b, c e d podem ser escolhidos de 12 maneiras diferentes: ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd e dc.

Dica: use uma letra diferente para identificar cada um dos 4 estudantes.

b) Considerem que, após uma reunião, os integrantes do grêmio decidiram que a gestão passaria a ser horizontal. Logo, os cargos de diretor e de vice-diretor passaram a ter as mesmas tarefas e atribuições. Retomem as possibilidades que foram listadas no item anterior, verifiquem quais escolhas de estudantes passaram a ser equivalentes após essa mudança e respondam: Quantas vezes cada combinação de estudantes se repete na lista? Dica: pintem da mesma cor as escolhas equivalentes. Temos que: ab é equivalente a ba; ac é equivalente a ca; ad é equivalente a da; bc é equivalente a cb; bd é equivalente a db; cd é equivalente a dc. Logo, cada uma das possibilidades se repete 2 vezes.

c) Considerando a situação do item anterior, de quantas maneiras diferentes é possível escolher uma dupla em um grupo de 4 estudantes para ocupar os 2 cargos de diretores?

2. Para compor o grêmio, também é preciso escolher 3 entre 4 estudantes para os cargos de tesoureiro sênior, tesoureiro pleno e tesoureiro júnior.

a) De quantas maneiras diferentes podemos escolher esses 3 estudantes para ocupar cada um dos cargos? Listem no caderno todas as possibilidades para justificar sua resposta.

b) Com a decisão de tornar a gestão horizontal, os 3 cargos passaram a ter atribuições iguais e a ser nomeados apenas como tesoureiro. Retomem a lista de possibilidades do item anterior, verifiquem quais escolhas de estudantes passaram a ser equivalentes após essa mudança e respondam: Quantas vezes cada escolha de estudantes se repete na lista? Dica: pintem da mesma cor as escolhas equivalentes.

c) Considerando o item anterior, de quantas maneiras diferentes é possível escolher um trio em um grupo de 4 estudantes para ocupar os 3 cargos de tesoureiro?

3. Analisem os cálculos que vocês realizaram anteriormente e expliquem como os itens **c** das atividades **1** e **2** poderiam ser calculados sem listar todas as possibilidades. Resposta pessoal.

A seguir, vamos analisar as situações do *Explore para descobrir* utilizando conjuntos.

2. c) Podemos dividir a quantidade de possibilidades pela quantidade de repetições.
$\frac{24}{6} = 4$; logo, há 4 maneiras diferentes de escolher os trios.

Chamamos de conjunto um grupo de elementos que podem ser números, pessoas, objetos, etc. Para representar um conjunto, podemos colocar os elementos dele entre chaves, separados por vírgula. Por exemplo, podemos indicar o conjunto A dos números naturais pares de 1 a 10 por $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Considere 2 conjuntos A e B que pertencem ao mesmo conjunto universo U. Se todos os elementos de B forem também elementos de A, dizemos que B é subconjunto de A ou que B está **contido** em A.

Por exemplo, o conjunto C dos números naturais múltiplos de 2 e de 3 simultaneamente, entre os números 1 a 10, pode ser representado por $C = \{6\}$ e é um subconjunto de $D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Indicamos assim: $C \subset D$ (lê-se "C está contido em D").

Nas situações que envolvem contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos.

No item **b** da atividade **1** do *Explore para descobrir*, é preciso escolher 2 entre 4 estudantes. Como os cargos passaram a ser equivalentes, a ordem de escolha não importa.

Representando os 4 estudantes por a, b, c e d, precisamos determinar todos os subconjuntos de 2 elementos do conjunto de 4 elementos {a, b, c, d}.

Podemos obter as seguintes combinações de 2 elementos: {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d} e {c, d}. Cada uma dessas combinações dá origem a 2 arranjos diferentes. Por exemplo, ao permutar todos os elementos da combinação {a, b}, encontramos os arranjos: ab e ba. Isso significa que o número de arranjos de 4 elementos tomados 2 a 2 é o dobro do número de combinações de 4 elementos tomados 2 a 2.

Representando os 4 estudantes por a, b, c e d precisamos determinar todos os subconjuntos de 3 elementos do conjunto de 4 elementos {a, b, c, d}.

Podemos obter as seguintes combinações de 3 elementos: {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}.

Cada combinação dessas dá origem a 6 arranjos, que apresentam todos os modos possíveis de permutar os 3 elementos. Por exemplo: ao permutar todos os elementos da combinação {a, b, c}, encontramos os arranjos: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Isso significa que o número de arranjos de 4 elementos tomados 3 a 3 é 6 vezes o número de combinações de 4 elementos tomados 3 a 3.

Acompanhe outros exemplos a seguir.

a) Ane, Elisa, Felipe, Gustavo e Igor formam uma equipe. Eles precisam se organizar em duplas para confeccionar uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades de organização das duplas?

Representamos Ane por a; Elisa por e; Felipe por f; Gustavo por g; e Igor por i. Precisamos determinar todos os subconjuntos de 2 elementos do conjunto de 5 elementos {a, e, f, g, i}.

Fique atento

Em cada situação, todos os conjuntos são subconjuntos do mesmo conjunto, que é denominado **conjunto universo** e é indicado com a letra U.

Fique atento

O conjunto vazio é um conjunto em que não há elementos. Ele pode ser representado como $V = \{\ \}$ ou como $V = \varnothing$. O conjunto vazio está contido em todos os conjuntos que existem.

Fique atento

A ordem em que os elementos aparecem dentro de um conjunto não é importante. Por exemplo, o conjunto {a, b, c} é igual ao conjunto {a, c, b}, que é igual ao conjunto {b, c, a}.

Os subconjuntos de 2 elementos desse conjunto são: {a, e}, {a, f}, {a, g}, {a, i}, {e, f}, {e, g}, {e, i}, {f, g}, {f, i}, {g, i}.

Chamamos esses subconjuntos de **combinações simples** de 5 elementos tomados com 2 elementos, ou tomados 2 a 2. Nesse caso, a quantidade de combinações é 10.

b) Júlio precisa escolher 4 entre 6 opções de frutas para fazer uma salada de frutas. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer essa escolha?

Representemos por a, b, c, d, e, f as 6 frutas que podem ser escolhidas. Precisamos determinar todos os subconjuntos de 4 elementos do conjunto de 6 elementos {a, b, c, d, e, f}.

Os subconjuntos de 4 elementos desse conjunto são: {a, b, c, d}, {a, b, c, e}, {a, b, c, f }, {a, b, d, e}, {a, b, d, f}, {a, b, e, f}, {a, c, d, e}, {a, c, d, f}, {a, c, e, f}, {a, d, e, f}, {b, c, d, e}, {b, c, d, f}, {b, c, e, f}, {b, d, e, f}, {c, d, e, f}.

Esses são os subconjuntos de combinações simples de 6 elementos tomados 4 a 4. O número de combinações é 15.

Gorenkova Evgenija/Shutterstock

Existem muitas combinações possíveis de ingredientes para montar uma salada de frutas.

Formalizando as combinações simples

Considerando $p \leqslant n$, em que $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, na combinação simples de n elementos distintos, tomados p a p, obtemos $p!$ arranjos ao permutar os elementos de cada combinação. Assim, utilizando as fórmulas de arranjo e de permutação, podemos escrever:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Calcular a quantidade de combinações simples de n objetos tomados p a p é o mesmo que perguntar de quantos modos diferentes podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados. Por esse motivo, a **ordem dos elementos não importa** em contextos que envolvem a combinação.

Combinações simples de n elementos tomados p a p (com $p \leqslant n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que podem ser formados com os n elementos dados.

Indica-se por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$ a quantidade de combinações de n elementos tomados p a p, e calcula-se: $C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$ ou $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$.

Fique atento

Como são subconjuntos de um conjunto, **a ordem dos elementos não importa**. Só consideramos subconjuntos distintos os que diferem pela natureza dos próprios elementos.

Fique atento

Chama-se **número binomial** o número $\binom{n}{p}$, com n e p naturais e $n \geqslant p$, tal que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$ (n é o numerador e p é a classe do número binomial).

Do mesmo modo que é possível obter a fórmula da quantidade de combinações de n elementos distintos tomados p a p por meio da divisão do número de arranjos de n elementos distintos tomados p a p pelo número de permutações de p elementos distintos, podemos obter a combinação sem usar a fórmula. Esse procedimento será utilizado nas atividades resolvidas a seguir.

Propriedade das combinações

Podemos notar que:

$C_{3,2} = C_{3,1}$, pois $C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ e $C_{3,1} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$.

$2 + 1 = 3$

$C_{5,3} = C_{5,2}$, pois $C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ e $C_{5,2} = \frac{A_{5,2}}{2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$.

$3 + 2 = 5$

De modo geral, vale a propriedade:

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}$$

pois: $C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot \left(n-(n-p)\right)!} = C_{n,n-p}$

Essa propriedade é muito útil para simplificar os cálculos e é conhecida como **igualdade de combinações complementares**.

Não escreva no livro

Reflita

Para $p = n$, temos $C_{n,n}$. Qual é o valor de $C_{n,n}$?

$C_{n,n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$

Atividades resolvidas

9. De quantos modos diferentes um técnico pode escalar um time de basquete composto de 5 jogadores tendo à disposição 12 atletas que jogam em qualquer posição?

Resolução

1ª maneira: sem usar a fórmula para o cálculo da quantidade de combinações.

No time de basquete, 5 jogadores são escolhidos entre 12.

Se considerarmos que a ordem dos jogadores importa, o número de possibilidades seria $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$.

Como os atletas jogam em qualquer posição, a ordem não importa. Então, para calcular o número das combinações diferentes que o técnico pode utilizar para escalar o time, devemos dividir 95 040 pelo fatorial da quantidade de elementos escolhidos (5 elementos): $\frac{95\,040}{5!} = \frac{95\,040}{120} = 792$.

Logo, é possível escalar o time de basquete de 792 modos diferentes.

2ª maneira: usando a fórmula para o cálculo da quantidade de combinações simples.

Devemos procurar a quantidade de subconjuntos (ou combinações) com 5 elementos tirados de um conjunto de 12 elementos. A ordem não importa; cada subconjunto difere um do outro apenas pela natureza dos elementos.

$C_{12,5} = \frac{A_{12,5}}{5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$

Assim, concluímos que é possível escalar o time de basquete de 79 modos diferentes.

10. Em um grupo de 6 idosos e 5 jovens, é preciso formar comissões de 6 pessoas com exatamente 4 idosos. Quantas comissões como essas podem ser formadas?

Resolução

Para formar cada comissão, devemos escolher 4 idosos e 2 jovens.

Escolha dos idosos: $C_{6,4}$.

Escolha dos jovens: $C_{5,2}$.

Pelo princípio fundamental da contagem, multiplicamos esses números. Logo:

$$C_{6,4} \cdot C_{5,2} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} =$$

$$= \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2! \cdot \cancel{3!}} =$$

$$= \frac{30}{2} \cdot \frac{20}{2} = 15 \cdot 10 = 150$$

Assim, podem ser formadas 150 comissões diferentes com 6 pessoas (4 idosos e 2 jovens) em cada uma delas.

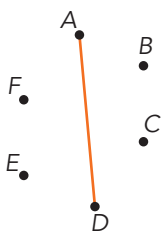
11. Em um plano marcamos 6 pontos distintos, dos quais 3 nunca estão alinhados.

a) Quantos segmentos de reta podemos representar ligando-os 2 a 2?

b) Quantos triângulos podemos formar tendo sempre 3 desses pontos como vértices?

Resolução

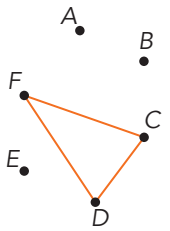
a) Marcamos 6 pontos em um plano, onde não há 3 deles alinhados.



Como em cada segmento de reta há 2 extremos e, por exemplo, o segmento de reta $\overline{AD}$ é o mesmo que o segmento de reta $\overline{DA}$, o número de segmentos de reta é dado por $C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

Portanto, podemos representar 15 segmentos de reta diferentes.

b) Como cada triângulo é determinado por 3 pontos não colineares, temos, independentemente da ordem deles:



$$C_{6,3} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20$$

Logo, podemos formar 20 triângulos diferentes.

12. De quantas maneiras distintas podemos colocar 10 bolas de cores diferentes em 3 urnas de modo que fiquem 2 bolas na 1ª urna, 3 bolas na 2ª urna e 5 bolas na 3ª urna?

Resolução

Há $C_{10,2}$ maneiras de escolher as 2 bolas que ficarão na 1ª urna. Para cada maneira, há $C_{8,3}$ possibilidades de escolher as 3 bolas que ficarão na 2ª urna. Pelo princípio fundamental da contagem, há, então, $C_{10,2} \cdot C_{8,3}$ maneiras de distribuir 2 bolas na 1ª urna e 3 bolas na 2ª urna. Para cada uma dessas possibilidades, há $C_{5,5}$ maneiras de colocar 5 bolas na terceira urna.

Portanto, novamente pelo princípio fundamental da contagem, há $C_{10,2} \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,5}$ maneiras diferentes de colocar 2 bolas na 1ª urna, 3 bolas na 2ª urna e 5 bolas na 3ª urna.

$$C_{10,2} \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,5} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{5! \cdot 0!} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{8!}} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 0!} =$$

$$= 45 \cdot 56 \cdot 1 = 2520$$

Portanto, há 2520 possibilidades diferentes de fazer essa distribuição.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Banco de imagens/Arquivo da editora

43. Calculamos a combinação de 10 questões tomadas 8 a 8. Temos: $C_{10,8} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 45$; logo, de 45 maneiras diferentes.

44. Vamos calcular a combinação de 30 estudantes tomados 5 a 5.
Temos: $C_{30,5} = \frac{30!}{5! \cdot 25!} = \frac{\cancel{30} \cdot 29 \cdot \overset{7}{\cancel{28}} \cdot 27 \cdot 26}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 142\,506$;
logo, de 142 506 modos diferentes.

Atividades

Não escreva no livro

43. Em uma prova, o estudante deve escolher 8 questões de um total de 10 para resolver. De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher essas 8 questões?

44. De quantos modos diferentes é possível formar uma comissão de 5 estudantes em uma turma de 30 estudantes?

45. Foram escolhidas 4 cartas de um baralho de 52 cartas. De quantas maneiras diferentes essas cartas poderiam ter sido escolhidas? De 270 725 maneiras diferentes.

46. Em um grupo de 10 pessoas estão Anderson e Eduardo. Quantas comissões diferentes de 5 pessoas podemos formar:

a) em que ambos estejam presentes? 56 comissões diferentes.

b) em que nenhum deles esteja presente? 56 comissões diferentes.

c) em que apenas um deles esteja presente? 140 comissões diferentes.

47. No caderno, elabore um problema como o anterior, mas com uma quantidade diferente de pessoas e uma nova condição para a formação das comissões. Depois, troque com um colega para que um resolva o problema do outro. O exemplo de problema encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

48. A diretoria de uma associação é formada por 10 pessoas: 6 delas com idade entre 45 e 50 anos e 4 com idade entre 35 e 40 anos. De quantas maneiras podemos formar uma comissão dessa diretoria que tenha 3 pessoas com idade entre 45 e 50 anos e 2 pessoas com idade entre 35 e 40 anos? De 120 maneiras diferentes.

49. Um rapaz tem 5 bermudas de cores diferentes e 6 camisetas com estampas distintas. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher:

a) 1 bermuda e 1 camiseta? De 30 maneiras diferentes.

b) 2 bermudas e 2 camisetas para um passeio? De 150 maneiras diferentes.

c) 4 peças quaisquer de roupas, entre bermudas e camisetas, para uma viagem? De 330 maneiras diferentes.

50. No caderno, elabore um problema cuja resposta seja calculada por $C_{5,2} \cdot C_{6,3}$.

51. Uma turma tem 24 estudantes, sendo que 10 não usam óculos e 14 usam. De quantos modos diferentes podemos escolher:

a) 3 estudantes que usam óculos e 2 que não usam? De 16 380 modos diferentes.

b) 5 estudantes quaisquer? De 42 504 modos diferentes.

c) 1 estudante que usa óculos e 1 que não usa? De 140 modos diferentes.

52. Em um grupo, há 5 pessoas canhotas e 6 pessoas destras. De quantas maneiras diferentes podemos escolher uma comissão de 4 pessoas com:

a) exatamente 3 pessoas canhotas? **a)** De 60 maneiras diferentes.

b) pelo menos 3 pessoas canhotas? De 65 maneiras diferentes.

c) no máximo 1 pessoa canhota? De 115 maneiras diferentes.

53. Considere 10 pontos sendo 6 na reta r e 4 na reta s. De quantos modos diferentes podemos formar triângulos com vértices nesses pontos? De 96 modos diferentes.

Banco de imagens/Arquivo da editora

54. Na cantina da escola, Marco deseja comprar um lanche com 2 salgados, 2 bebidas e 2 sobremesas. As opções disponíveis são:

- salgados: pastel (R$ 4,00), coxinha (R$ 3,50), empada (R$ 4,50), esfirra (R$ 3,00) e quibe (R$ 3,00);
- bebidas: suco (R$ 3,00), refrigerante (R$ 3,50) e água (R$ 2,50);
- sobremesas: bolo (R$ 2,50), sorvete (R$ 3,00) e fruta (R$ 2,00).

a) De quantos modos diferentes Marco pode montar um lanche com 2 salgados diferentes, 2 bebidas diferentes e 2 sobremesas diferentes? De 90 modos diferentes.

b) Quais são os custos totais mínimo e máximo dos lanches que Marco pode escolher, considerando que ele nunca vai pedir 2 unidades de algum dos itens? Custo mínimo: R$ 16,00. Custo máximo: R$ 20,50.

c) Qual outro aspecto, além do custo, uma pessoa deve considerar ao comprar alimentos? Exemplo de resposta: Deve-se considerar também o quão saudável é cada opção, evitando, se possível, o consumo de ultraprocessados, por exemplo.

50. Exemplo de problema: Em um grupo de 11 amigos, sendo que 5 deles viajaram nas férias e 6 não viajaram, de quantos modos diferentes podemos escolher 2 pessoas que viajaram e 3 que não viajaram?

Tecnologias digitais

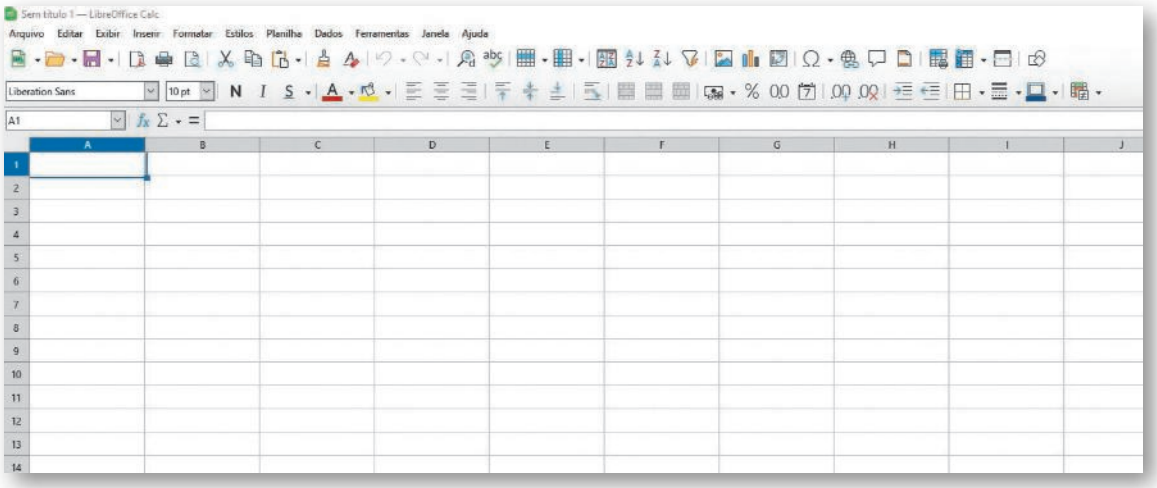
Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Permutação simples, arranjo e combinação na planilha eletrônica

Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Acompanhe como utilizar o *software* livre LibreOffice para calcular a quantidade de agrupamentos simples utilizando permutações, arranjos e combinações.

Ao abrir o LibreOffice, clique em "Planilha Calc". A planilha eletrônica é formada por linhas (**1**, **2**, **3**, **4**, ...) e colunas (**A**, **B**, **C**, **D**, ...).



Reprodução/LibreOffice

Tela inicial do LibreOffice Calc.

Vamos calcular o que se pede em cada item a seguir utilizando uma planilha eletrônica.

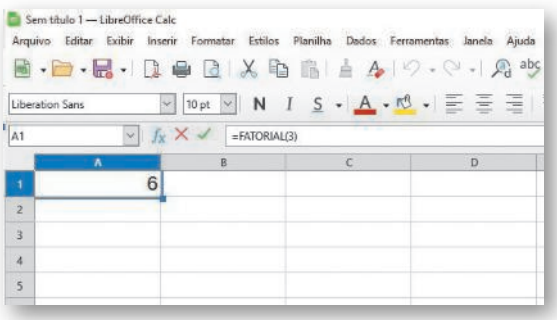
a) Quantidade de permutações das letras A, B e C.

b) Quantidade de arranjos das letras A, B, C e D escolhendo 2 letras.

c) Quantidade de combinações das letras A, B e C escolhendo 2 letras.

Siga o passo a passo para calcular o que é pedido em cada item.

1º passo: Vamos calcular o que é pedido no item **a**. Sabendo que a permutação simples de *n* elementos é igual ao fatorial de *n*, vamos calcular a permutação simples das letras A, B e C. Para isso, digite na célula A1 **=FATORIAL(3)** e tecle "Enter".



Reprodução/LibreOffice

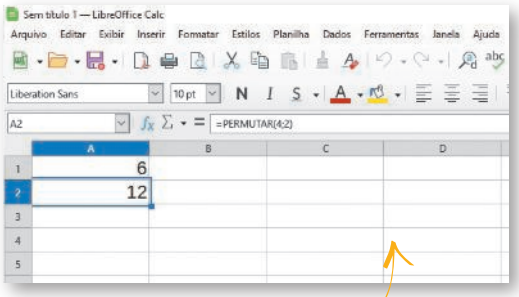
Tela do LibreOffice após o 1º passo.

O resultado da quantidade de permutações das letras A, B e C vai aparecer na célula A1.

$$P_3 = 3! = 6$$

Esse número indica as possibilidades: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA.

2º passo: Para realizar o que é pedido no item **b**, precisamos calcular um arranjo simples, com 2 elementos escolhidos entre as 4 letras A, B, C e D. Para isso, digite na célula A2 **=PERMUTAR(4;2)** e tecle "Enter".



Reprodução/LibreOffice

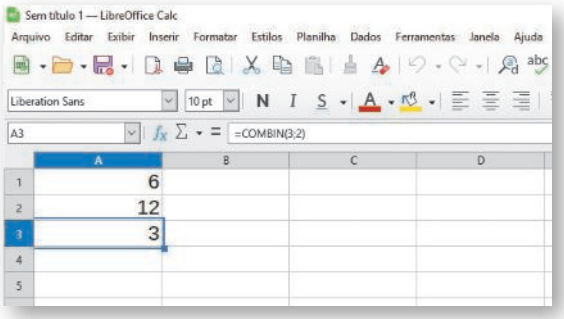
Tela do LibreOffice após o 2º passo.

O resultado do cálculo do arranjo das 4 letras A, B, C e D tomadas 2 a 2 vai aparecer na célula A2.

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 4 \cdot 3 = 12$$

Esse número indica as possibilidades: AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB e DC.

3º passo: Vamos calcular o que é pedido no item **c**. Calcule a combinação simples das letras A, B e C tomadas 2 a 2. Para isso, digite na célula A3 **=COMBIN(3;2)** e tecle "Enter".



Reprodução/LibreOffice

Tela do LibreOffice após o 3º passo.

O resultado do cálculo da combinação simples das três letras A, B e C tomadas 2 a 2 deve aparecer na célula A3.

$$C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3$$

Esse número indica as possibilidades: AB, AC e BC.

Agora que você já sabe utilizar as ferramentas, podemos usá-las para calcular valores muito grandes que seriam mais difíceis de calcular sem o *software*.

Use o LibreOffice Calc para realizar os cálculos necessários na solução de cada problema a seguir.

1. O RG é o Registro Geral de pessoas no Brasil e é considerado um dos documentos mais importantes do cidadão. O padrão de numeração varia de acordo com o estado em que ele é emitido; no Rio Grande do Sul, por exemplo, o padrão é ter 10 algarismos.

Fonte dos dados: SAIBA mais: cada estado tem um padrão de numeração. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 7 maio 2010. Disponível em: https://tedit.net/0axikh. Acesso em: 19 ago. 2024.

Quantos números de RG é possível formar no Rio Grande do Sul com algarismos diferentes de 0 a 9? Podemos usar a fórmula **=FATORIAL(10)**, que retorna 3 628 800; logo, é possível formar 3 628 800 números.

2. Considere todas as 26 letras do alfabeto. Quantas palavras de 8 letras, que tenham sentido ou não, é possível formar com 8 letras diferentes do alfabeto? Podemos usar a fórmula **=PERMUTAR(26;8)**, que retorna 62 990 928 000; logo, é possível formar 62 990 928 000 palavras.

3. Um *site* de venda de produtos escolhe diariamente 18 anúncios para serem publicados. De quantas maneiras diferentes é possível escolher os anúncios de um dia entre 50 anúncios diferentes?

Podemos usar a fórmula **=COMBIN(50;18)**, que retorna 18 053 528 883 775; logo, de 18 053 528 883 775 maneiras diferentes.

Problemas que envolvem os vários tipos de agrupamento

Analise as atividades resolvidas a seguir, que abordam situações de permutação, arranjo e combinação, e depois resolva os problemas de acordo com o conteúdo que foi estudado.

Atividades resolvidas

13. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar usando os algarismos 1, 3, 4, 6 e 9?

Resolução

$A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 1} = 60$ ou $A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Podemos formar 60 números.

14. Quantos anagramas tem a palavra BANANA?

Resolução

$P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot 1} = 60$

A palavra BANANA tem 60 anagramas.

15. Quantas comissões diferentes de 3 pessoas podemos formar para representar um grupo de 10 pessoas?

Resolução

$C_{10,3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{7!}} = 120$ ou $C_{10,3} = \frac{A_{10,3}}{3!} = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 120$.

Podemos formar 120 comissões diferentes.

55. a) Podemos calcular a quantidade total de possibilidades de escolha para cada pacote de viagem da seguinte maneira. Pacote **A**: Museus: $C_{5,3} = 10$; Praias: $C_{4,2} = 6$; Parques: $C_{3,1} = 3$. Calculando a quantidade total de combinações para o Pacote **A**, temos: $10 \cdot 6 \cdot 3 = 180$.

Pacote **B**: Museus: $C_{6,2} = 15$; Praias: $C_{4,3} = 4$; Parques: $C_{4,1} = 4$; Calculando a quantidade total de combinações para o Pacote **B**, temos: $15 \cdot 4 \cdot 4 = 240$.

b) Pacote **A**: $3 \cdot 100 + 2 \cdot 170 + 1 \cdot 200 = 840$
Pacote **B**: $2 \cdot 100 + 3 \cdot 170 + 1 \cdot 200 = 910$
Logo, o pacote **A** custa R$ 840,00, e o pacote **B** custa R$ 910,00.

Atividades

Professor, é importante que os estudantes saibam identificar o tipo de agrupamento solicitado em cada atividade. É interessante que eles analisem o enunciado, conversem e determinem a estratégia de resolução juntos.

Não escreva no livro

55. Os estudantes da 3ª série do Ensino Médio estão organizando a viagem de formatura e têm 2 opções de pacotes de viagem. Cada pacote oferece diferentes atividades, e os estudantes devem escolher entre essas opções.

Pacotes de viagem para formatura

Opção \ Pacote	A	B
Museus	5 opções, das quais devem escolher 3.	6 opções, das quais devem escolher 2.
Praias	4 opções, das quais devem escolher 2.	4 opções, das quais devem escolher 3.
Parques	3 opções, das quais devem escolher 1.	4 opções, das quais devem escolher 1.

Dados elaborados para fins didáticos.

Sabendo que cada escolha de pacote de museus custa R$ 100,00, cada escolha do pacote de praias custa R$ 170,00 e cada escolha do pacote de parques custa R$ 200,00, faça o que se pede no caderno.

a) Calcule a quantidade total de possibilidades de escolha para cada pacote de viagem.

b) Qual é o custo total de cada pacote de viagem?

c) Qual é a opção financeiramente mais vantajosa de escolha de pacote para os estudantes? Podemos dizer que essa será a melhor opção para todos?

O pacote **A** é a opção mais vantajosa do ponto de vista financeiro; contudo, para escolher a melhor opção neste caso, é preciso considerar outros aspectos, como desejos pessoais e custo-benefício.

Professor, na atividade **57**, ressalte que a questão faz referência aos modos distintos de escolha de 3 cores, não às diferentes maneiras de pintar a bandeira. Por esse motivo, a ordem da escolha de cores não importa.

Texto para a próxima atividade.

> As novas placas no padrão Mercosul começaram a ser usadas no Brasil. [...] A flexibilidade do código alfanumérico permitirá à placa do Mercosul oferecer mais de 450 milhões de combinações. No sistema antigo, ainda vigente em alguns Estados, o teto de combinações era de 175 milhões.
>
> Os sete caracteres da placa atual brasileira foram mantidos, porém com quatro letras e três números, e não mais três letras e quatro números.

RIBEIRO, Rodrigo. Placa do Mercosul: tire suas dúvidas e saiba o que já mudou no projeto. *Quatro rodas*, São Paulo, 4 set. 2021. Disponível em: https://tedit.net/8n3xlt. Acesso em: 18 ago. 2024.

Paulo Fernandes/ Fotoarena

56. Atualmente, a sequência de letras (L) e números (N) segue o seguinte padrão: LLLNLNN. Na placa da imagem, no padrão Mercosul, há a combinação RIO2A18. Considerando apenas essas letras, esses números e as novas regras para as placas no padrão Mercosul, quantas placas com códigos diferentes podemos formar?

57. Muitos países ao redor do mundo têm bandeiras tricolores. Considere alguns exemplos.

Lugas/ Adobe Stock

Bandeira da Alemanha.

SHOBU MIAH/ Adobe Stock

Bandeira da Chade.

JackF/Adobe Stock

Bandeira da Colômbia.

SHOBU MIAH/ Adobe Stock

Bandeira da Costa do Marfim.

De quantos modos é possível escolher 3 cores distintas, em uma caixa com 12 lápis de cores diferentes, para pintar uma bandeira tricolor?
De 220 maneiras diferentes.

58. A diretoria de um clube é composta de 10 membros, que podem ocupar a função de presidente, secretário ou tesoureiro. De quantas maneiras diferentes podemos formar, com os 10 membros, chapas com um presidente, um secretário e um tesoureiro?
De 720 maneiras diferentes.

59. Em um ônibus, há 5 lugares vagos. Duas pessoas entram no ônibus. De quantas maneiras diferentes elas podem ocupar os 2 lugares?
De 20 maneiras diferentes.

60. Em uma competição com 10 países, de quantas maneiras diferentes podem ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?
De 720 maneiras diferentes.

61. Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA? 151 200 anagramas.

62. Sobre uma circunferência são indicados 6 pontos distintos. Quantos quadriláteros com vértices nesses pontos é possível representar?
15 quadriláteros.

63. Na despedida de um grupo de amigos, 36 abraços foram trocados. Sabendo que cada um abraçou todos os outros, quantos amigos estavam reunidos? 9 amigos.

64. Considere a palavra LÓGICA para responder às questões a seguir.

a) Quantas permutações (anagramas) diferentes podemos formar? 720 anagramas.

b) Quantos anagramas começam com L?
120 anagramas.

c) Quantos começam com LO? 24 anagramas.

d) Quantos começam e terminam com vogal?
144 anagramas.

e) Quantos começam com consoante e terminam com vogal? 216 anagramas.

f) Em quantos anagramas as letras L, O, G estão juntas, nessa ordem? 24 anagramas.

g) Em quantos anagramas as letras L, O, G estão juntas? 144 anagramas.

65. Quantos números de 4 algarismos distintos maiores do que 2 000 podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6? 300 números.

66. De quantas maneiras diferentes é possível escolher uma dupla em um grupo de 8 tenistas?
De 28 maneiras diferentes.

67. Um grupo de 20 pessoas participou de uma gincana em que o 1º colocado ganhou um computador, o 2º, uma TV, o 3º, uma geladeira, e o 4º e o 5º colocados recebem, cada um, um liquidificador igual. De quantos modos diferentes esses prêmios podem ser distribuídos?
De 930 240 modos diferentes.

56. Podemos usar o princípio fundamental da contagem para calcular o número de possibilidades das letras e dos números: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144$.

Conexões

Afinação do cavaquinho

O samba é um dos elementos mais representativos da cultura brasileira. Ele surgiu por volta do século XIX no estado da Bahia, mas encontrou espaço para se desenvolver no Rio de Janeiro. Durante algum tempo, foi marginalizado por ser uma dança e um estilo musical ligado à cultura preta. O samba ganhou reconhecimento e passou a ser tido como um símbolo nacional apenas por volta de 1940, durante o governo de Getúlio Vargas.

Hector Gómez/Arquivo da editora

No samba, a harmonia é feita por instrumentos de corda; os mais populares são o violão e o cavaquinho, que é um instrumento português criado na região de Braga e levado por imigrantes lusitanos para vários lugares do mundo, entre eles o Brasil.

No Brasil, o cavaquinho popularizou-se como instrumento solo nas mãos do músico Waldir Azevedo (1923-1980), que é o autor das músicas mais executadas do repertório de cavaquinho, como "Brasileirinho", "Delicado" e "Pedacinhos do céu".

Não escreva no livro

No cavaquinho, as notas podem ser tocadas individualmente ou juntas. O cavaquinho é similar ao violão, mas tem apenas 4 cordas e, portanto, pode soar até 4 notas diferentes de uma única vez, uma em cada corda.

A afinação possibilita que diferentes conjuntos de notas soem ao mesmo tempo. No caso do cavaquinho, a afinação relaciona-se com a espessura da corda e a tensão à qual ela está sendo submetida. Cada corda gera uma nota musical diferente e, geralmente, é estabelecido um padrão para a sequência de notas nas cordas do instrumento. No cavaquinho, em especial, existem diferentes afinações, isto é, existem diferentes sequências de notas para as 4 cordas; essa escolha é feita de acordo com os costumes etnográficos da comunidade. Logo, as diferentes combinações de afinação fazem do cavaquinho um instrumento adaptável ao tipo de música tocado em cada região.

Fontes dos dados: PORTILHO, Gabriela. Como surgiu o samba? *Superinteressante*, São Paulo, 4 jul. 2018. Disponível em: https://tedit.net/2iur8r; PREFEITURA DO RIO DE JANEIRO. O cavaquinho. *Cidades das Artes*, Rio de Janeiro, 21 abr. 2014. Disponível em: https://tedit.net/suiwlt. Acesso em: 20 jul. 2024.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Conecte com o texto

1. As cordas de um cavaquinho têm as seguintes possibilidades para a afinação:

- a 1ª corda pode ser afinada em ré ou mi;
- a 2ª corda pode ser afinada em LÁ, SI ou dó;
- a 3ª corda pode ser afinada em MI, FÁ ou SOL;
- a 4ª pode ser afinada em DÓ ou RÉ.

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Diversidade Cultural* e *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*. Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Língua Portuguesa, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

a) Sabendo que as notas dó, ré e mi são exatamente uma oitava (conjunto das 7 notas musicais) mais agudas do que as notas DÓ, RÉ e MI, respectivamente, nesse cenário, quantas são as possibilidades de afinação desse cavaquinho? $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36$; logo, há 36 possibilidades de afinação.

b) Se considerássemos outro cenário, poderíamos ter muito mais possibilidades de afinações. Você concorda com essa afirmação? O que ela implica em termos de possibilidades musicais? Resposta esperada: Existe uma quantidade muito grande de afinações diferentes para o cavaquinho. Isso possibilita mais arranjos e, possivelmente, até a criação de mais estilos musicais.

Pesquise e debata

2. Pesquise se na comunidade em que você mora existem instrumentos musicais com afinações específicas. Procure compreender os motivos e resultados dessas escolhas. Depois, compartilhe sua descoberta com os colegas. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

CAPÍTULO 2

Probabilidade

Situação-problema 1

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Pesquisa de medicamentos

O desenvolvimento de um novo medicamento passa obrigatoriamente por algumas etapas antes de o produto chegar ao consumidor. A 1ª etapa é a pesquisa experimental ou fase pré-clínica, em que os testes são feitos em células e em animais. A 2ª etapa é a pesquisa clínica, em que os testes são realizados em seres humanos com o objetivo de testar a segurança e a eficácia do medicamento.

Um laboratório está fazendo testes para verificar a segurança e a eficácia de um novo medicamento. Dois grupos de 100 pessoas cada foram selecionados para a pesquisa de maneira que todas as pessoas do grupo **1** tomaram o medicamento e todas as do grupo **2** tomaram um **placebo**.

Depois de 1 mês, no grupo que tomou o medicamento verificou-se que 50 pessoas não tiveram nenhum efeito adverso, 30 pessoas apresentaram apenas vermelhidão no rosto, 10 pessoas apresentaram apenas coceira nas mãos e 10 pessoas apresentaram os 2 sintomas.

Elnur/Adobe Stock

Para que um novo medicamento chegue aos consumidores, ele precisa passar por diversas etapas de testes a fim de garantir a segurança para quem o ingere e a eficácia do tratamento.

placebo: preparação sem efeitos farmacológicos que é ministrada para parte do grupo de voluntários nas pesquisas de teste de medicamentos.

a) Qual é a probabilidade de uma pessoa apresentar apenas vermelhidão no rosto ao tomar esse medicamento?
$n(A) = 30$; $p(A) = \frac{30}{100} = 30\%$; logo, 30%.

b) Qual é a probabilidade de uma pessoa apresentar coceira nas mãos ao tomar esse medicamento? $n(B) = 10 + 10 = 20$; $p(B) = \frac{20}{100} = 20\%$; logo, 20%.

c) Qual é a probabilidade de uma pessoa apresentar vermelhidão no rosto ou coceira nas mãos ao tomar esse medicamento?
$n(C) = 30 + 10 + 10 = 50$; $p(C) = \frac{50}{100} = 50\%$; logo, a probabilidade é 50%.

Situação-problema 2

Sorteio em redes sociais

"Quer ganhar um produto da nossa loja? Então siga o nosso perfil, curta a foto oficial e deixe um comentário marcando 3 amigos!". Você já se deparou com esse tipo de publicidade nas redes sociais? Essa prática tem se tornado comum para divulgar produtos ou tornar marcas novas mais conhecidas, e a probabilidade de uma pessoa ser sorteada é proporcional à quantidade de comentários que ela deixa na publicação.

Uma loja de eletrônicos fez uma postagem para sortear um celular mediante o compartilhamento da publicação e o registro de comentários. Sabendo que essa postagem já tem 2 000 comentários, a probabilidade de ganhar o sorteio com apenas um desses comentários é $\frac{1}{2\,000}$ ou 0,0005 ou 0,05%. Todos esses valores são maneiras diferentes de representar a mesma **probabilidade**.

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fique atento! Sorteios em redes sociais só são permitidos se forem promovidos por pessoas jurídicas, isto é, por lojas ou empresas.

a) Uma pessoa que fez 200 dos 2 000 comentários dessa postagem tem qual probabilidade de ganhar o sorteio?

b) Foram coletados os seguintes dados sobre os comentários do sorteio:

a) Considerando que $n(\Omega) = 2\,000$ e que $n(A) = 200$, tal que A é o evento "ganhar", temos:

$$p(A) = \frac{200}{2\,000} = \frac{1}{10} = 10\%$$

Dados dos comentários do sorteio

Regiões do Brasil / Faixa etária	Nordeste	Norte	Demais regiões	Total
De 13 a 15 anos	300	200	300	**800**
Acima de 15 anos	100	300	800	**1200**
Total	**400**	**500**	**1100**	**2000**

Dados elaborados para fins didáticos.

Sabendo que a pessoa sorteada é da região Nordeste, qual é a probabilidade de que ela tenha de 13 a 15 anos?

Como a pessoa é da região Nordeste, podemos considerar que $n(\Omega) = 400$. Sendo B o evento "ganhador ter de 13 a 15 anos", temos que $n(B) = 300$. Assim:

$$p(B) = \frac{300}{400} = \frac{3}{4} = 75\%$$

Formalizando o conceito de probabilidade

A palavra **probabilidade** é derivada do latim *probare*, que significa "provar" ou "testar". É comum usarmos a palavra provável para indicar algo que não se tem certeza de que vai acontecer. Também é frequente que essa palavra esteja associada aos termos "sorte", "azar", "incerto" e "duvidoso", de acordo com o contexto da frase.

Há certos fenômenos (ou experimentos) que, embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo, no lançamento de uma moeda perfeita, o resultado é imprevisível, não se pode determinar se ele será cara ou coroa antes de o lançamento ser realizado. Aos fenômenos (ou experimentos) desse tipo damos o nome de fenômenos aleatórios (ou casuais).

Reflita

Qual é o significado de expressões como "moeda perfeita" e "dado não viciado"?

Uma "moeda perfeita" é a moeda em que os 2 lados têm a mesma probabilidade de ocorrer. O "dado não viciado" é um dado em que cada uma das faces tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Por exemplo, são aleatórios os fenômenos:

- lançamento de um dado não viciado;
- resultado de um jogo de roleta;
- resultado dos números sorteados em uma loteria.

Pelo fato de não sabermos o resultado exato de um fenômeno aleatório, buscamos a **probabilidade** de determinado resultado ocorrer. A **teoria da Probabilidade** é um ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

Artem/Adobe Stock

Muitos jogos de tabuleiro utilizam dados, que geralmente são os responsáveis pelos resultados parciais ou finais.

As imagens não estão representadas em proporção.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Organizem-se em grupos de 4 estudantes, depois leiam e conversem sobre a situação a seguir.

Muitos jogos utilizam roletas para definir os movimentos. Existe um jogo em que o objetivo é descobrir para qual faixa da roleta a seta vai apontar depois que a roleta parar de girar.

Analise a roleta.

A cada rodada, os jogadores tentam adivinhar qual será a faixa sorteada indicando um grupo de faixas de acordo com o número, a cor ou o desenho. Por exemplo, é possível dizer que a faixa sorteada terá um coração ou, então, dizer que a faixa sorteada será azul.

Tiago Donizete Leme/ Arquivo da editora

Neste jogo, a roleta é girada e a faixa sorteada é indicada pela seta.

Não escreva no livro

Analise no quadro a seguir as opções de categorias mais comuns nesse jogo e as respectivas pontuações caso o jogador adivinhe a faixa indicada na roleta.

Categoria	Pontuação
Cores quentes (vermelho ou laranja) ou frias (azul ou roxo)	2 pontos
Números pares ou números ímpares	2 pontos
Cores: vermelho, azul, branco, amarelo ou roxo	4 pontos
Desenhos: coração, raio, estrela ou nuvem	5 pontos
Um número em específico de 1 a 20	20 pontos

O jogador pode indicar qual categoria quiser em cada rodada; o que muda é a quantidade de pontos recebidos. Professor, incentive os estudantes a refletir a respeito das possibilidades de acordo com as regras do jogo.

Você acha que a pontuação diferenciada de acordo com a característica indicada é justa? Explique. Resposta pessoal. Espera-se que o estudante perceba que, quanto menor é a probabilidade de acertar o elemento da faixa sorteada, maior é a pontuação.

2. Crie uma categoria de indicação para o jogo. Depois avalie, de acordo com as regras existentes, qual seria a pontuação justa. Exemplo de resposta: Números múltiplos de 4. Assim como há 5 números múltiplos de 4 de 1 a 20, há também 5 desenhos de cada tipo, então a pontuação deveria ser a mesma atribuída para essa categoria, portanto, 5 pontos.

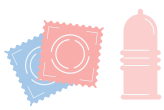
Atividades

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

Texto para a próxima atividade.

Atualmente existem diversos métodos contraceptivos, isto é, métodos que evitam a gravidez não planejada. Cada método, além da probabilidade de sucesso, tem diferentes prós e contras que precisam ser analisados para uma escolha adequada às necessidades de cada pessoa. Acompanhe os prós e contras de 3 métodos contraceptivos.

Método	Taxa de sucesso	Prós	Contras
Pílula anticoncepcional feminina	91%	Tornam os períodos menstruais mais regulares, diminuem a acne e as cólicas menstruais.	Não protege contra infecções sexualmente transmissíveis (IST), é preciso ter muita disciplina para tomar no mesmo horário todos os dias, e pode gerar efeitos colaterais, como náuseas e ganho de massa.
Preservativo masculino 	82%	Oferece proteção contra IST.	É necessário colocar imediatamente antes da relação sexual, precisa ser trocado a cada relação sexual e existe o risco de furar ou se romper.
Preservativo feminino	79%	Oferece proteção contra IST e pode ser inserido algum tempo antes da relação sexual.	Pode se mover ou ser desconfortável durante a relação sexual. Precisa ser trocado a cada relação sexual.

Miller Inna/Shutterstock

Fonte dos dados: PRÓS e contras de diferentes métodos contraceptivos. *Center for Young Women's Health*, 19 jun. 2017. Disponível em: https://tedit.net/axdxbu. Acesso em: 20 ago. 2024.

1. Acesse o *site* https://tedit.net/axdxbu (acesso em: 23 jun. 2024) e leia os prós e contras de outros métodos contraceptivos. Reúna-se com um colega e responda aos itens no caderno.

a) Existe um método contraceptivo que seja 100% seguro? Não, todos os métodos têm uma probabilidade de falha.

b) Quais critérios uma pessoa deve levar em conta ao escolher um método contraceptivo adequado? Resposta esperada: Frequência de relações sexuais, quantidade de parceiros, efeitos colaterais, custos dos métodos, etc.

Texto para a próxima atividade.

A metformina de liberação prolongada é um medicamento indicado para o tratamento de casos de diabetes tipo 2. Essa é uma doença que pode causar diversos problemas de saúde.

Andrey_Popov/Shutterstock

Uma das maneiras de gerenciar o diabetes é aferir a glicemia nos horários indicados pelo médico endocrinologista.

As reações indesejáveis relacionadas à medicação são classificadas em muito comuns, com probabilidade de até 10%, como náusea, vômito, diarreia e dor abdominal; comuns, com probabilidade de até 1%, como distúrbios do paladar; ou raras e muito raras, com probabilidade de até 0,1%, como diminuição da absorção da vitamina B12 e reações cutâneas.

2. Considerando os riscos da piora da diabetes, reúna-se com um colega e conversem sobre como podemos utilizar a probabilidade para justificar o uso desse medicamento, apesar dos possíveis efeitos colaterais.

2. Resposta esperada: Não utilizar o medicamento implica riscos graves à saúde, como a perda da visão. Além disso, os efeitos colaterais mais comuns do medicamento têm menor gravidade, e os efeitos mais graves têm probabilidade muito baixa de ocorrer.

3. Com a democratização da internet, uma pessoa comum pode transformar uma informação em viral utilizando as redes sociais, independentemente da veracidade da notícia. De acordo com uma pesquisa recente publicada no periódico Science, uma notícia falsa (*fake news*) se espalha 70% mais rápido do que uma notícia verdadeira. Isso ocorre porque, segundo o estudo, as *fake news* têm características fantásticas, inéditas e inimagináveis, além de incorporar fatos reais de maneira lógica. Esse paradoxo é conhecido como "pós-verdade".

Fonte dos dados: LEITE, Ana Cláudia. Fake news em tempos de pós-verdade: uma introdução. *Caderno da Escola Superior de Gestão Pública, Política, Jurídica e Segurança*, Curitiba, v. 3, n. 1, p. 70-91, jan./jun. 2020. Disponível em: https://tedit.net/gpoej6. Acesso em: 20 ago. 2024.

Como a percepção de uma notícia ser verdadeira ou falsa pode ser afetada pelo fato de que as *fake news* se espalham 70% mais rápido? Explique usando o conceito de probabilidade.

3. Resposta esperada: Em um ambiente em que notícias estão sendo constantemente compartilhadas, a presença de características que aceleram a disseminação de uma notícia pode influenciar a percepção de veracidade.

Espaço amostral e evento

Em um experimento (ou fenômeno) aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado **espaço amostral (Ω)**. Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado **evento**.

Acompanhe alguns exemplos de fenômenos (ou experimentos) **aleatórios**.

a) Experimento: retirar 1 carta de um baralho de 52 cartas e registrar o determinado naipe.

Considerando C = copas, E = espadas, O = ouros e P = paus, sabemos que, ao retirar 1 carta de um baralho completo, o conjunto dos resultados possíveis é {C, E, O, P}. Se considerarmos apenas as cartas do naipe ouros, temos o subconjunto {O}. Podemos concluir que:

- espaço amostral: $\Omega = \{C, E, O, P\}$;
- evento B: "Retirar 1 carta cujo naipe seja ouros" → $B = \{O\}$.

Joaquin Corbalan P/Shutterstock

Um baralho comum é formado por 52 cartas, sendo 13 cartas de cada naipe. Para cada naipe, há cartas numeradas de 2 a 10, além das cartas ás, valete, dama e rei.

As imagens não estão representadas em proporção.

Quando um evento é formado por apenas 1 elemento do espaço amostral, ele é chamado **evento elementar**.

b) Experimento: escolher um instante do dia e registrar esse horário.

Ao escolher um instante qualquer de um dia, verificamos que o conjunto de todos os resultados possíveis para o horário h, em horas, a partir do início do dia, será dado por $\{h \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant h < 24\}$.

Tomando só os instantes antes do meio-dia, temos o subconjunto $\{h \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant h < 12\}$. Podemos concluir que:

- espaço amostral: $\Omega = \{h \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant h < 24\}$;
- evento C: "Escolher um instante antes do meio-dia" → $C = \{h \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant h < 12\}$.

psdgraphics.com/Adobe Stock

Existem diversos modelos de relógio de ponteiros; alguns apresentam os ponteiros e os números de 1 a 12, outros apenas os ponteiros.

Os espaços amostrais podem ser **discretos** ou **não**. Os espaços amostrais discretos são aqueles em que é possível contar os elementos utilizando números naturais. O exemplo **a** mostra um espaço amostral discreto.

O exemplo **b** mostra um espaço amostral não discreto (também chamado de espaço amostral contínuo), pois não é possível contar todos os elementos do conjunto $\{h \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant h < 24\}$.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Atividades

6. Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; evento A: "ocorrer um número múltiplo de 3" → $A = \{3, 6\}$.

Não escreva no livro

4. No lançamento de uma moeda perfeita, determine o espaço amostral e o evento A: "ocorrer cara". Denotamos "cara" por C e "coroa" por K.

Espaço amostral: $\Omega = \{C, K\}$; evento A: "ocorrer cara" → $A = \{C\}$.

5. Considerando um jogo que utiliza as 52 cartas de um baralho comum, descreva no caderno o espaço amostral do experimento "retirar aleatoriamente uma carta do baralho" e o evento A: "Retirar um ás do baralho".

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

6. No lançamento de um dado de 8 faces numerado de 1 a 8, determine o espaço amostral do experimento "lançar um dado de 8 faces" e o evento "ocorrer um número múltiplo de 3".

7. Descreva, no caderno, o espaço amostral do experimento "sortear uma peça entre peças numeradas de 1 a 50" e o evento "sortear uma peça com número primo".

8. Já faz mais de 1 século que as mulheres passaram a ocupar postos de trabalho em larga escala, mas elas ainda ocupam apenas 10% dos cargos de CEO (Chief Executive Officer) das maiores empresas dos EUA, isto é, cargos de presidência.

Fonte dos dados: ELTING, Liz. 10% das maiores empresas dos EUA agora têm CEOs mulheres. *Forbes*, 7 fev. 2023. Disponível em: https://tedit.net/ki7mdr. Acesso em: 22 ago. 2024.

a) Pesquise na internet, em fontes confiáveis, quais são alguns dos motivos pelos quais, até hoje, mulheres ocupam menos lugares de liderança.

A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

b) Em uma empresa preocupada com a diversidade, há 2 homens (Júlio e Pedro) e 2 mulheres (Beatriz e Luciana) ocupando os 4 cargos de liderança. Determine o espaço amostral do experimento "sortear uma pessoa em cargo de liderança na empresa" e o evento A "sortear uma mulher em cargo de liderança na empresa".

Fique atento

Ao fazer buscas na internet, é importante verificar se a fonte utilizada é confiável. Fontes confiáveis costumam divulgar as próprias fontes ou pesquisas utilizadas para veicular determinada informação.

9. Pense em um experimento aleatório e, no caderno, descreva textualmente esse experimento e um evento dele. Depois, troque com um colega e peça a ele que determine, utilizando a notação de conjuntos, o espaço amostral e o evento desse experimento.

7. Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$; evento A: "sortear um número primo" → $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$.

Eventos certos e eventos impossíveis

No experimento aleatório "lançar um dado não viciado de 6 faces e registrar o resultado", temos o espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Considerando o evento A: "ocorrência de um número menor do que 7", temos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Podemos perceber que o espaço amostral é o mesmo que o evento, portanto, neste caso, escrevemos $A = \Omega$.

Quando um evento é igual ao espaço amostral, ele é chamado **evento certo**.

Considere agora o evento B: "ocorrência de número maior do que 6". No dado não existe número maior do que 6. Portanto, $B = \varnothing$.

Quando um evento é vazio, ele é chamado **evento impossível**.

Dizemos que A é um evento certo e B é um evento impossível.

Fique atento

Quando não especificados, os dados dos experimentos são sempre os comuns, de 6 faces e não viciados.

9. Exemplo de resposta: Experimento: "sortear uma carta entre as 26 cartas escritas com uma letra do alfabeto da língua portuguesa em cada uma delas". Evento: "sortear uma vogal".

8. b) Espaço amostral: $\Omega = \{\text{Beatriz, Júlio, Luciana, Pedro}\}$; evento A: "sortear uma mulher em cargo de liderança na empresa" → $A = \{\text{Beatriz, Luciana}\}$.

10. a) Espaço amostral: $\Omega = \{C, K\}$. Evento A: "ocorrer cara" $\rightarrow A = \{C\}$. Evento B: "ocorrer coroa" $\rightarrow B = \{K\}$.
b) Os eventos A e B são mutuamente exclusivos e complementares, pois $A \cap B = \{C\} \cap \{K\} = \varnothing$ e $A \cup B = \{C\} \cup \{K\} = \{C, K\} = \Omega$.

União e intersecção de eventos

Podemos realizar também **a união** e a **intersecção de eventos**. Considere, no lançamento de um dado não viciado de 6 faces, os eventos a seguir.

- C: "ocorrência de número par" $\rightarrow C = \{2, 4, 6\}$.
- D: "ocorrência de número múltiplo de 3" $\rightarrow D = \{3, 6\}$.
- E: "ocorrência de número par ou número múltiplo de 3" $\rightarrow E = C \cup D = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 6\} = \{2, 3, 4, 6\}$ (nesse caso, temos uma união de eventos).
- F: "ocorrência de número par e múltiplo de 3" $\rightarrow F = C \cap D = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} = \{6\}$ (nesse caso, temos uma intersecção de eventos).

Complementar de um evento

Considere, no lançamento de um dado não viciado de 6 faces, os eventos a seguir.

- C: "ocorrência de número par" $\rightarrow C = \{2, 4, 6\}$.
- H: "ocorrência de número ímpar" $\rightarrow H = \{1, 3, 5\}$.

Note que $C \cap H = \varnothing$ e $C \cup H = \Omega$. Por isso, C e H são chamados eventos complementares.

Os eventos A e B de um mesmo espaço amostral Ω são **eventos complementares** se $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = \Omega$. Indicamos assim: $A = \overline{B} = \complement_{\Omega}^{B}$ (complementar de B em relação a Ω) e $B = \overline{A} = \complement_{\Omega}^{A}$ (complementar de A em relação a Ω).

Se a intersecção de 2 eventos é o conjunto vazio, então são chamados **eventos mutuamente exclusivos**.

Por exemplo, no lançamento de um dado não viciado de 6 faces, os eventos F: "ocorrência de número par e múltiplo de 3" ($F = \{6\}$) e H: "ocorrência de número ímpar" ($H = \{1, 3, 5\}$) são mutuamente exclusivos ($F \cap H = \varnothing$), mas não são complementares ($F \cup H = \{1, 3, 5, 6\} \neq \Omega$).

11. a) Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, evento C: "ocorrer um número maior do que 6" $\rightarrow C = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Atividades

12. c) O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Não escreva no livro

10. No lançamento de uma moeda perfeita, considere os eventos A: "ocorrer cara" e B: "ocorrer coroa".

a) Determine o espaço amostral e os eventos A e B.

b) Os eventos A e B são mutuamente exclusivos? São complementares? Justifique sua resposta.

11. Considere o lançamento de um dado não viciado de 12 faces numeradas de 1 a 12 e o evento C: "ocorrer um número maior do que 6".

a) Indique no caderno o espaço amostral e o evento C.

b) Indique no caderno o evento D que é complementar de C.

Evento D: "ocorrer um número menor ou igual a 6" $\rightarrow$ $\rightarrow D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

12. Foram colocadas 15 bolinhas coloridas em uma caixa: 5 bolinhas vermelhas, 4 verdes, 4 amarelas e 2 azuis. Considere o experimento "retirar uma bolinha da caixa" e faça os registros no caderno.

a) Como pode ser classificado o evento A: "retirar uma bolinha da caixa"?

Evento certo.

b) Como pode ser classificado o evento B: "retirar uma bolinha branca da caixa"?

Evento impossível.

c) Considere esse espaço amostral e crie 2 eventos complementares.

d) Considere esse espaço amostral e crie 2 eventos mutuamente exclusivos que não sejam complementares.

Exemplo de resposta: Evento P: "retirar uma bolinha azul" e evento Q: "retirar uma bolinha amarela". Esses eventos não são complementares, pois a união deles não é igual ao espaço amostral.

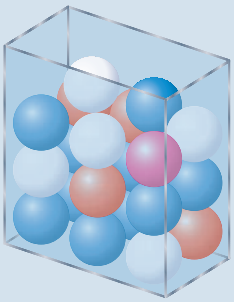
Explorando o cálculo de probabilidades

Vamos explorar uma situação em que o conceito de probabilidade está envolvido.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Considere uma caixa com 20 bolinhas iguais, exceto pelas cores. Dessas bolinhas, 10 são azuis, 5 são brancas, 4 são vermelhas e 1 é rosa. Reúna-se com um colega e, juntos, respondam e justifiquem cada item no caderno.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

1. Ao retirar aleatoriamente uma bolinha da caixa, é mais provável que ela seja rosa ou vermelha? Justifiquem.
   É mais provável que seja vermelha, pois há mais bolinhas vermelhas do que rosa na caixa.
2. Ao retirar aleatoriamente uma bolinha da caixa, é mais provável que ela seja vermelha ou azul? Justifiquem. É mais provável que seja azul, pois há mais bolinhas azuis na caixa.
3. É impossível tirar uma bolinha rosa da caixa? Justifiquem.
   Não. Resposta esperada: Apesar de pouco provável, ainda é possível retirar uma bolinha rosa da caixa.
4. Ao tirar uma bolinha da caixa, é certo que ela será azul? Justifiquem.
   Não. Resposta esperada: Há bolinhas de outras cores que podem ser retiradas da caixa: branca, vermelha ou rosa.

Formalizando o cálculo de probabilidades

Em um fenômeno ou experimento aleatório em que todo evento elementar tem a mesma probabilidade de ocorrer – como retirar uma bolinha de uma caixa de bolinhas coloridas –, quanto maior o número de elementos de um evento dentro de um mesmo espaço amostral, maior a probabilidade de ele vir a ocorrer.

Dizemos que, se um fenômeno (ou experimento) aleatório tem espaço amostral Ω não vazio, finito e equiprovável, então a **probabilidade** de ocorrer um evento A com espaço amostral Ω é indicada por $p(A)$ e é dada por:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou}$$

$$p(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Considerando a caixa com 20 bolinhas iguais, exceto pela cor, sendo 10 azuis, 5 brancas, 4 vermelhas e 1 rosa, temos os seguintes eventos: A: "retirar uma bolinha azul"; B: "retirar uma bolinha branca"; C: "retirar uma bolinha vermelha"; D: "retirar uma bolinha rosa".

Sabendo que $n(\Omega) = 20$, podemos calcular as probabilidades de cada um desses eventos ocorrer.

Fique atento

Eventos que têm a mesma probabilidade de ocorrência são chamados **eventos equiprováveis**.

- Há 10 bolinhas azuis, então $n(A) = 10$. Logo, $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$.
- Há 5 bolinhas brancas, então $n(B) = 5$. Logo, $p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$.
- Há 4 bolinhas vermelhas, então $n(C) = 4$. Logo, $p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$.
- Há 1 bolinha rosa, então $n(D) = 1$. Logo, $p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\%$.

Fique atento

A probabilidade pode ser indicada na forma de fração, porcentagem ou decimal.

Certeza e impossibilidade

Vamos relacionar a probabilidade do evento impossível e do evento certo com os demais eventos. Considerando um evento A que pertence a um espaço amostral Ω não vazio, finito e equiprovável, os conjuntos $\varnothing$, A e Ω estão sempre relacionados por $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

Relacionando o número de elementos desses conjuntos, temos $n(\varnothing) \leqslant n(A) \leqslant n(\Omega)$. Dividindo esses números por $n(\Omega) > 0$, obtemos: $\frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} \leqslant \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leqslant \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$. Como $n(\varnothing) = 0$, temos $\frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} = 0$. Sabemos que $\frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$. Logo, concluímos que $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Isso significa que a probabilidade de ocorrer um evento pode assumir valores de 0 a 1.

Quando $p(A) = 0$, o evento A é o **evento impossível**, e não há possibilidade de que ele venha a ocorrer.

Quando $p(A) = 1$, o evento A é o **evento certo**, e há certeza de que ele ocorrerá.

Atividades resolvidas

1. Considere o experimento aleatório do lançamento de uma moeda perfeita. Qual é a probabilidade de ocorrer cara?

Resolução

Tanto "ocorrer cara" como "ocorrer coroa" (que são os eventos elementares) têm a mesma probabilidade de ocorrer. Considerando C como cara e K como coroa, temos:

- espaço amostral: $\Omega = \{C, K\} \Rightarrow n(\Omega) = 2$;
- evento A: "ocorrer cara" $\rightarrow A = \{C\} \Rightarrow n(A) = 1$.

Portanto, $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$.

Fique atento

Como $0{,}5 = \frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$, no lançamento de uma moeda perfeita, a probabilidade de ocorrer cara é $\frac{1}{2}$ ou 50%. Isso não significa que, se jogarmos a moeda 2 vezes, em uma das jogadas com certeza ocorrerá cara e, na outra, coroa.

Significa que, **após um número grande de jogadas**, a tendência é que em aproximadamente 50% (metade) delas ocorra cara.

2. Considere todos os números naturais de 4 algarismos distintos que é possível formar com os algarismos 1, 3, 4, 7, 8 e 9. Escolhendo um deles ao acaso, qual é a probabilidade de ocorrer um número que comece por 3 e termine em 7?

Resolução

$\left.\begin{array}{l} \underline{?}\ \underline{?}\ \underline{?}\ \underline{?} \rightarrow n(\Omega) = A_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \\ \underline{3}\ \underline{?}\ \underline{?}\ \underline{7} \rightarrow n(A) = A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow p(A) = \frac{12}{360} = \frac{1}{30}$$

3. No lançamento simultâneo de 3 moedas perfeitas distinguíveis, qual é a probabilidade de ocorrer:

a) **pelo menos** 2 caras?

b) **exatamente** 2 caras?

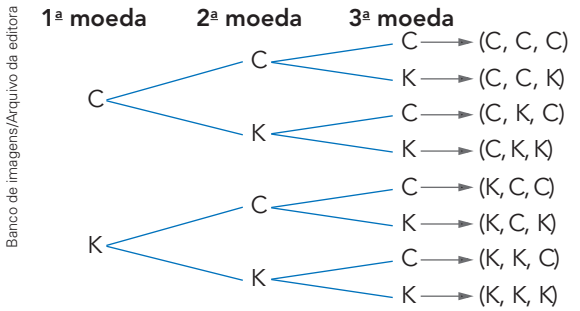
Reflita Não escreva no livro

Qual é a diferença entre dizer "pelo menos 2" e "exatamente 2"?

Quando se diz "pelo menos 2", admite-se que aconteçam 2 ou mais situações. Quando se diz "exatamente 2", há somente 2 situações.

Resolução

Nesse caso, é conveniente usar a árvore de possibilidades. Considerando C como cara e K como coroa, temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

$\Omega = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (C, K, K), (K, C, C), (K, C, K), (K, K, C), (K, K, K)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow n(\Omega) = 8$

a) Evento A: "ocorrer pelo menos 2 caras" $\rightarrow A = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C)\} \Rightarrow n(A) = 4$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

b) Evento B: "ocorrer exatamente 2 caras" $\rightarrow$
$\rightarrow B = \{(C, C, K), (C, K, C), (K, C, C)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow n(B) = 3$.

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

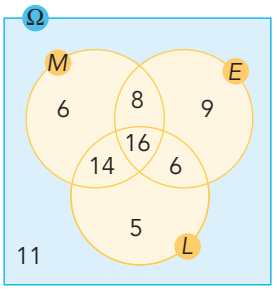
4. Em um grupo de 75 jovens, 16 gostam de música, esporte e leitura; 24 gostam de música e esporte; 30 gostam de música e leitura; 22 gostam de esporte e leitura; 6 gostam somente de música; 9 gostam somente de esporte; e 5 jovens gostam somente de leitura.

a) Qual é a probabilidade de, ao escolher aleatoriamente 1 desses jovens, ele gostar de música?

b) Qual é a probabilidade de, ao escolher aleatoriamente 1 desses jovens, ele não gostar de qualquer dessas atividades?

Resolução

Podemos representar o diagrama de Venn considerando M = música, E = esporte e L = leitura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) $n(\Omega) = 75$

Seja o evento A: "escolher 1 estudante que goste de música", então temos:

$$n(A) = 6 + 8 + 16 + 14 = 44$$

Probabilidade de gostar de música:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{44}{75} \simeq 0{,}586 = 58{,}6\%$$

b) $n(\Omega) = 75$

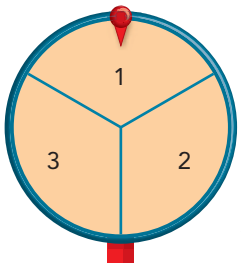
Seja o evento B: "escolher 1 estudante que não goste de nenhuma das atividades", então temos:

$$n(B) = 75 - (6 + 9 + 5 + 8 + 6 + 14 + 16) =$$
$$= 75 - 64 = 11$$

Probabilidade de não gostar de qualquer dessas atividades:

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{11}{75} \simeq 0{,}146 = 14{,}6\%$$

13. Analise a imagem da roleta e, no caderno, faça o que se pede nos itens a seguir. **a)** $\Omega = \{1, 2, 3\}$; $A = \{2\}$; $B = \{1, 3\}$.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

a) Considerando o experimento "sortear um número na roleta", defina o espaço amostral e os eventos *A*: "ocorrer o número 2" e *B*: "ocorrer número ímpar".

b) Calcule $p(B)$. $p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{3} \simeq 0,7 = 70\%$

14. No lançamento de um dado perfeito de 6 faces, qual é a probabilidade de ocorrer:

a) um número par? 50%

b) um número primo? 50%

c) o número 3? Aproximadamente 16,7%.

d) um número menor do que 3? Aproximadamente 33,3%.

e) um número menor do que 1? 0%

f) um número menor do que 7? 100%

15. Em uma caixa há bolas iguais, exceto pela cor, de modo que 6 bolas são brancas e 4 bolas são vermelhas. Qual é a probabilidade de, ao acaso, ser retirada:

a) uma bola vermelha? 40%

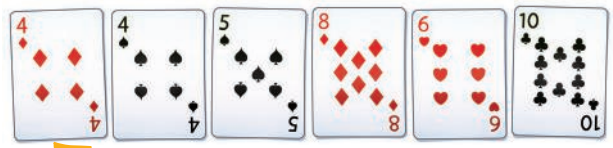
b) uma bola branca? 60%

16. Pesquisadores desenvolveram 2 medicamentos diferentes para o tratamento de uma doença. A probabilidade de cura dessa doença caso o paciente não receba nenhum tratamento é 20%. O medicamento **A** garante probabilidade de cura igual a 80% considerando que o paciente não tenha nenhuma outra comorbidade. A cada doença associada, a probabilidade de cura cai 5 pontos percentuais (5%). O medicamento **B** garante probabilidade de cura igual a 60% independentemente da comorbidade do paciente.

a) Qual medicamento deve ser receitado para uma pessoa que tenha 2 comorbidades além da doença? O medicamento **A**.

b) A partir de quantas comorbidades se torna mais indicado o uso do medicamento **B**? A partir de 5 comorbidades.

17. Diversos jogos utilizam baralhos comuns, de 52 cartas. Em um desses jogos, foram selecionadas estas 6 cartas: 4 de ouros (4O), 4 de espadas (4E), 5 de espadas (5E), 8 de ouros (8O), 6 de copas (6C) e 10 de paus (10P).



Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

Cartas do jogo de baralho.

Sorteando, aleatoriamente, uma das 6 cartas, qual é a probabilidade de ocorrer:

a) a carta com o 6 de copas? 16,7%

b) uma carta vermelha? 50%

c) uma carta de espadas? 33,3%

d) uma carta que é um 4? 33,3%

e) uma carta com um número par? 83,3%

18. Considere pedaços iguais de papel numerados de 1 a 13, igualmente dobrados em uma caixa. Qual é a probabilidade de que o número retirado seja:

a) par? 46,2%

b) divisível por 3? 30,8%

c) um número primo? 46,2%

d) maior do que 8? 38,5%

e) menor do que 10? 69,2%

f) um número maior do que 5 e menor do que 10? 30,8%

g) múltiplo de 4? 23,1%

19. No lançamento simultâneo de 2 dados perfeitos e distinguíveis, um branco e outro vermelho, qual é a probabilidade de que:

a) a soma seja 7? 16,7%

b) a soma seja par? 50%

c) a soma seja um número primo? 41,7%

d) a soma seja maior do que 1 e menor do que 8? 30,6%

e) ambos os números sejam pares? 25%

f) ambos os números sejam iguais? 16,7%

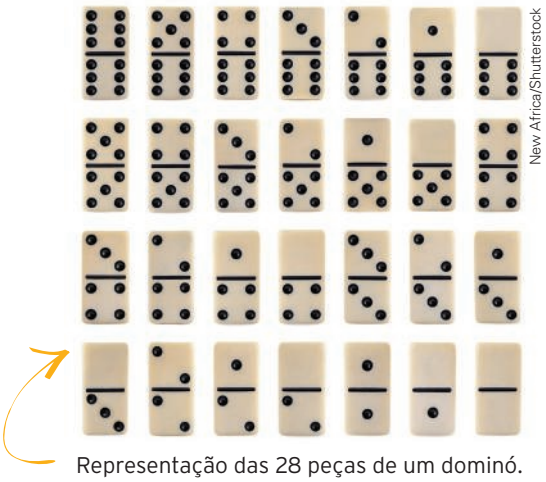
g) o número no dado vermelho seja múltiplo do número no dado branco? 38,9%

Professor, na atividade **19**, ressalte para os estudantes que os dados serem distinguíveis, neste caso de cores diferentes, implica que resultados como (1, 2) e (2, 1) são diferentes.

21. Exemplo de problema: Em uma caixa há 7 chaves, sendo que 2 delas abrem determinado cadeado. Qual é a probabilidade de 1 dessas chaves, selecionada ao acaso, abrir o cadeado?

Não escreva no livro

20. O dominó é um jogo formado por 28 peças retangulares. Cada peça é dividida ao meio, e em cada parte da peça há a indicação de um número que é representado por uma quantidade de bolinhas que varia de 0 a 6.



New Africa/Shutterstock

Representação das 28 peças de um dominó.

De acordo com a imagem, classifique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as sentenças a seguir considerando o sorteio de uma das peças do dominó.

a) A probabilidade de retirar aleatoriamente uma peça que tenha 2 partes iguais a 6 é $\frac{1}{28}$. V

b) A probabilidade de retirar aleatoriamente uma peça cuja quantidade total de bolinhas seja um número menor do que 3 é $\frac{1}{4}$. F

c) A probabilidade de retirar aleatoriamente uma peça que tenha pelo menos uma parte com exatamente 4 bolinhas é $\frac{5}{28}$. F

d) A probabilidade de retirar aleatoriamente uma peça que tenha pelo menos uma parte com exatamente 2 bolinhas é $\frac{1}{4}$. V

e) A probabilidade de retirar aleatoriamente uma peça que tenha pelo menos uma parte igual a 2 ou 4 bolinhas é $\frac{1}{2}$. F

f) A probabilidade de retirar aleatoriamente uma peça cuja quantidade total de bolinhas seja um número maior do que 9 é $\frac{1}{7}$. V

g) Em algumas regiões do país, as pedras do dominó que têm ambas as partes com a mesma quantidade de bolinhas são chamadas de "carroça" ou "carroção". A probabilidade de retirar aleatoriamente uma carroça é $\frac{1}{6}$. F

21. Crie um espaço amostral e um evento que pertença a ele. Depois, elabore um problema que pergunte qual é a probabilidade de ocorrer esse evento.

22. Foram entrevistados 100 estudantes em uma enquete. Desses, 70 responderam que frequentavam um curso de Computação, 28 responderam que frequentavam um curso de Inglês e 10 responderam que frequentavam ambos, Computação e Inglês. Qual é a probabilidade de um desses estudantes, selecionado ao acaso:

a) estar frequentando somente o curso de Computação? 60%

b) não estar frequentando nenhum desses cursos? 12%

23. Em uma enquete, foram entrevistadas 80 pessoas sobre os meios de transporte que utilizavam para ir ao trabalho ou à escola. Dessas, sabemos que 12 utilizavam metrô e trem, 14, carro e trem, e 18, carro e metrô; 5 utilizavam os 3 meios de transporte: carro, metrô e trem. No total, 30 responderam carro, 42 responderam metrô, e 28 responderam trem. Qual é a probabilidade de que uma dessas pessoas, selecionada ao acaso, utilize:

a) apenas metrô? 21,25%

b) apenas trem? 8,75%

c) trem e metrô, mas não carro? 8,75%

d) nenhum dos 3 veículos? 23,75%

e) apenas 1 desses veículos? 33,75%

24. Considere um baralho de 52 cartas diferentes.

a) De quantas maneiras diferentes é possível escolher aleatoriamente 2 cartas desse baralho? De 1 326 maneiras diferentes.

b) De quantas maneiras diferentes é possível escolher aleatoriamente 2 cartas de espadas desse baralho? De 78 maneiras diferentes.

c) Qual é a probabilidade de, escolhendo-se aleatoriamente 2 cartas desse baralho, ocorrer 2 cartas de espadas? $\frac{1}{17}$

Um pouco da história da Probabilidade

Nos séculos XV e XVI, matemáticos italianos começaram a conceituar a ideia de probabilidade.

Em 1494, o monge franciscano e célebre matemático Luca Paccioli (1445-1517) publicou o livro *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita* (Soma da proporção e proporcionalidade da Geometria aritmética) contendo problemas de probabilidade. Esse livro trouxe fama a Paccioli, permitindo que ele se tornasse professor de Matemática na corte do duque Ludovico Sforza (1452-1508), em Milão (Itália), tendo como estudante Leonardo da Vinci (1452-1519).

Reprodução/Museu Nacional de Capodimonte, Nápoles, Itália.

Retrato de Luca Paccioli, de Jacopo de Barbari, c. 1495 (óleo sobre madeira, 98 cm × 108 cm).

Girolamo Cardano (1501-1576) nasceu em Pavia (Itália), formou-se em Medicina e trabalhou na universidade dessa mesma cidade, atuando como um cientista polivalente, uma vez que as pesquisas dele envolviam Matemática, Medicina, Física, Química, Astrologia, Astronomia e jogos. Unindo o interesse por Matemática e jogos, Cardano escreveu, em 1526, o livro *De ratiociniis in ludo aleae* (Os raciocínios nos jogos de azar), que só foi publicado em 1663. Por esse motivo, muitos matemáticos contemporâneos de Cardano não tiveram a oportunidade de lê-lo.

Blaise Pascal (1623-1662), o grande personagem da teoria da Probabilidade, era filho do matemático Étienne Pascal (1588-1651). De início, Étienne não queria que o filho Blaise se dedicasse à Matemática e procurou dar a ele incentivos em outras áreas; porém, isso de nada adiantou, pois o talento matemático do jovem se revelou cedo. Aos 14 anos já acompanhava o pai nas reuniões da Academia Mersénne, em Paris (França), e, aos 16 anos, publicou o primeiro trabalho em Geometria, intitulado *Essay pour les coniques* (Ensaio para as cônicas).

A teoria da Probabilidade nasceu dos debates matemáticos que aconteciam por correspondência entre Pascal e Pierre de Fermat (1607-1665). Antes da teoria da Probabilidade, esse ramo da Matemática era trabalhado de maneira intuitiva. As cartas trocadas entre Pascal e Fermat — que citaram por vezes os problemas propostos por Chevalier de Méré (1607-1684), amigo de Blaise e fanático por jogos de dados — foram fundamentais para o desenvolvimento dos conceitos modernos de Probabilidade e as respectivas propriedades. Pascal ficou conhecido pelos conhecimentos de Probabilidade ao resolver o problema do jogo interrompido. Na época, perguntava-se como um prêmio deveria ser dividido entre 2 jogadores se, por algum motivo, o jogo não chegasse ao fim.

Pouco tempo depois, em 1657, o cientista holandês Christian Huygens (1629-1695), inspirado nesses debates, publicou o primeiro livro voltado ao estudo das probabilidades, *Libellus de ratiociniis in ludo aleae* (Sobre o raciocínio em jogos de azar, ou O valor de todas as chances em jogos de fortuna: cartas, dados, apostas, loterias, etc. — matematicamente demonstrado), um tratado sobre problemas relacionados com jogos de dados.

Devido ao apelo popular dos jogos de azar, a teoria da Probabilidade se tornou bastante comum, desenvolvendo-se rapidamente durante o século XVIII. Nesse período, as principais contribuições ao campo da Probabilidade foram realizadas por Jakob Bernoulli (1654-1705) e Abraham de Moivre (1667-1754), que, em 1718, escreveu o livro *Doutrina das probabilidades*.

Mais tarde, Leonhard Euler (1707-1783) e Jean-Baptiste D'Alembert (1717-1783) desenvolveram outros estudos sobre probabilidades, aplicando-os à Economia, às Ciências Sociais e a loterias.

O astrônomo e matemático francês Pierre de Laplace (1749-1827) introduziu ideias novas de cálculo e aplicações de probabilidades no livro *Teoria analítica das probabilidades* (1812). Antes de Laplace, a teoria da Probabilidade era voltada para o desenvolvimento de técnicas matemáticas aplicadas aos jogos de azar. Laplace aplicou as ideias probabilísticas a muitos problemas científicos e práticos, como teoria de erros, cálculos de seguros, Mecânica e Estatística.

De acordo com Boyer e Merzbach (2012):

> a teoria das probabilidades deve mais a Laplace que a qualquer outro matemático. A partir de 1774, ele escreveu muitos artigos sobre o assunto, cujos resultados incorporou no clássico *Théorie analytique des probabilités* [Teoria analítica das probabilidades], de 1812. Ele considerou a teoria em todos os aspectos e em todos os níveis [...].
>
> BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. p. 329.

Mais recentemente, os nomes de Jules Henri Poincaré (1854-1912), Émile Borel (1871-1956) e John von Neumann (1903-1957) aparecem ligados ao estudo de probabilidades e teoria dos jogos.

Fonte dos dados: BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. p. 197, 200, 253, 260-262, 309, 329.

Retrato de Laplace, de Pierre-Narcisse Guerin, c. 1838 (óleo sobre tela, 145 cm × 109 cm).

Reprodução/Palácio de Versalhes, França.

Cálculo de probabilidades com espaço amostral não discreto

O espaço amostral pode ser discreto (finito ou enumerável) ou não discreto. Quando o espaço amostral não é discreto, como um intervalo do conjunto dos números reais, não é possível enumerar os elementos dele. Nesses casos, usa-se uma estratégia diferente para calcular a probabilidade.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Considere a reta dos números reais de 0 a 10 e o experimento "sortear um número real entre 0 e 10" sabendo que o espaço amostral desse evento é equiprovável. Faça os registros no caderno.

a) Descreva o intervalo que representa o espaço amostral Ω. $\Omega = [0, 10]$

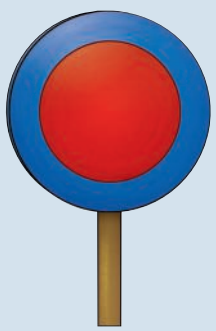
b) Justifique por que Ω não é um espaço amostral discreto. Ω é um conjunto com elementos não enumeráveis.

c) Seja o evento A: "ocorrer um número de 0 a 2". Descreva o intervalo que representa o evento A. $A = [0, 2]$

d) Em sua opinião, a probabilidade de ocorrer o evento A é maior, menor ou igual a 50%? Justifique. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que a probabilidade de o evento A ocorrer é menor do que 50%, pois é possível separar a reta dos números reais de 0 a 10 em 5 partes iguais: [0, 2], [2, 4], [4, 6], [6, 8] e [8, 10].

e) Considerando a reta dos números reais de 0 a 10 como 100%, qual é a porcentagem da reta que corresponde ao evento A? 20%

2. Um jogo de dardos tem um alvo circular com 2 partes de maneira que tanto a parte vermelha quanto a parte azul têm medida de área de 1 m^2 cada uma.



Tiago Donizete Leme/ Arquivo da editora

Jogos de dardos podem ter duas ou mais regiões limitadas por circunferências concêntricas. Quanto mais perto do centro o jogador acerta um dardo, maior é a pontuação que ele recebe.

Fique atento

Circunferências concêntricas são circunferências que têm o centro no mesmo ponto.

Considere o experimento "lançar um dardo no alvo". Sabendo que qualquer ponto desse alvo tem a mesma probabilidade de ser atingido, independentemente da habilidade dos jogadores, e que o dardo sempre acertará algum ponto do alvo, responda aos itens no caderno.

a) Qual é a medida de área da região em que o dardo pode ser acertado? $1 + 1 = 2$; logo, 2 m^2.

b) Seja o evento B: "acertar o dardo no círculo vermelho", qual é a medida de área da região que representa esse evento? 1 m^2

c) Em sua opinião, a probabilidade de ocorrer o evento B é maior, menor ou igual a 50%? Justifique.

d) A medida de área do círculo vermelho representa qual porcentagem em relação à medida de área da região do alvo que o dardo pode atingir? $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

2. c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que a probabilidade de o evento B ocorrer é igual a 50%, pois a parte vermelha do círculo representa exatamente metade da medida de área da região do alvo que pode ser atingida.

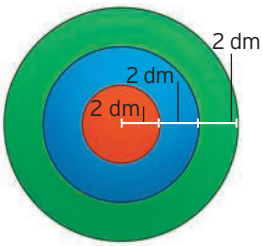
Para calcular a probabilidade de ocorrer eventos que pertencem a espaços amostrais não discretos, podemos usar estratégias como identificar a porcentagem que o evento representa no espaço amostral, ou utilizar as medidas de área relacionadas ao espaço amostral e ao evento.

Atividades

Não escreva no livro

25. Considere o experimento "escolher aleatoriamente um número na reta dos números reais entre 0 e 200". Qual é a probabilidade de ocorrer o evento *A*: "escolher um número entre 40 e 60"? $\frac{20}{200} = 0{,}1 = 10\%$

26. Um jogo de dardos tem um tabuleiro formado por desenhos que lembram 1 círculo e 2 coroas circulares concêntricas com as medidas indicadas na figura ao lado.



Tiago Donizete Leme/ Arquivo da editora

Fique atento

Lembre-se de que a medida de área de um círculo cuja medida de comprimento do raio é *r* é dada por $\pi \cdot r^2$.

Considerando que a probabilidade de acertar qualquer ponto no alvo é igual, ao lançar um dardo no alvo, calcule a probabilidade de:

a) acertar a parte vermelha do alvo; $\frac{1}{9}$

b) acertar a parte azul do alvo; $\frac{1}{3}$

c) acertar a parte verde do alvo. $\frac{5}{9}$

Explorando a definição teórica de probabilidade e consequências

Vamos analisar alguns eventos do fenômeno aleatório do lançamento de um dado não viciado.

2. a) $A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

A probabilidade é 50%.

b) $B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

A probabilidade é 50%.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

Reúna-se com um colega para realizar as atividades a seguir no caderno.

1. Considerem o lançamento de um dado não viciado de 6 faces numeradas de 1 a 6.

a) Qual é o espaço amostral Ω desse experimento? $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) Qual é o número de elementos do espaço amostral? $n(\Omega) = 6$

2. No espaço amostral descrito na atividade **1**, considerem os eventos *A*: "ocorrer número par" e *B*: "ocorrer número ímpar".

a) Descrevam o evento *A*. Depois, indiquem o número de elementos e calculem a probabilidade de *A*.

b) Descrevam o evento *B*. Depois, indiquem o número de elementos e calculem a probabilidade de *B*.

c) Analisem se os eventos *A* e *B* são mutuamente exclusivos.

Sim, os eventos *A* e *B* são mutuamente exclusivos, pois $A \cap B = \varnothing$.

d) Considerem o evento *C*: "ocorrer número par e ímpar" e descrevam o evento *C*. Depois, indiquem o número de elementos e calculem a probabilidade de *C*.

2. d) $C = \{\} \Rightarrow n(C) = 0 \Rightarrow p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0 = 0\%$. A quantidade de elementos é 0, e a probabilidade é 0%.

2. e) $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(D) = 6 \Rightarrow p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{6}{6} = 1 = 100\%$

A probabilidade é 100%.

e) Considerem o evento D: "ocorrer número par ou ímpar" e descrevam o evento D. Depois, indiquem o número de elementos e calculem a probabilidade de D.

f) Conversem com os colegas sobre os eventos A e B e como eles se relacionam com o evento C e com o evento D. Temos que $A \cap B = \varnothing = C$ e $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = D$.
O evento C é a intersecção dos eventos A e B. O evento D é a união dos eventos A e B.

O evento C da atividade **2** do *Explore para descobrir* é equivalente ao evento $A \cap B$. Como $A \cap B = \varnothing$, podemos dizer que os eventos A e B são mutuamente exclusivos.

O evento D é equivalente ao evento $A \cup B$. Podemos escrever $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Formalizando a definição teórica de probabilidade

Definimos probabilidade como uma função que associa a cada evento A de um espaço amostral Ω um número $p(A)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1ª propriedade: $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$ para todo evento A.

2ª propriedade: Se Ω é o espaço amostral, então $p(\Omega) = 1$.

3ª propriedade: Se $A \cap B = \varnothing$, então $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, em que B é um evento do espaço amostral Ω e A e B são eventos mutuamente exclusivos.

Consequências da definição teórica de probabilidade

Temos as seguintes consequências da definição teórica de probabilidade:

1ª consequência: Impossibilidade ou $p(\varnothing) = 0$.

Da 3ª propriedade da definição teórica de probabilidade resulta que $p(\varnothing) = 0$.

Não escreva no livro

Reflita

Demonstre no caderno que $p(\varnothing) = 0$ aplicando a 3ª propriedade para calcular $p(A \cup \varnothing)$.

$p(A \cup \varnothing) = p(A) + p(\varnothing)$, pois A e $\varnothing$ são conjuntos disjuntos.
$p(A \cup \varnothing) = p(A) \Rightarrow p(A) = p(A) + p(\varnothing) \Rightarrow p(\varnothing) = 0$

2ª consequência: Probabilidade do evento complementar.

Note que, sendo $\overline{A}$ a notação para "complementar de A", temos:

$$A \cup \overline{A} = \Omega \text{ e } A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

Logo, $p(\Omega) = p\left(A \cup \overline{A}\right)$. Aplicando a 1ª e a 2ª propriedades da definição teórica de probabilidade, temos:

$$1 = p(A) + p\left(\overline{A}\right) \text{ ou, equivalentemente, } p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A).$$

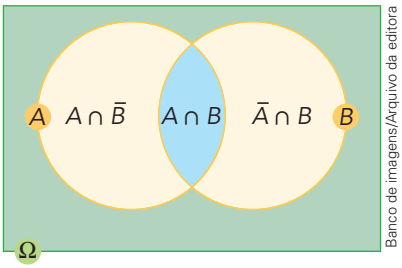
3ª consequência: Probabilidade da união de 2 eventos.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Vamos utilizar a 3ª propriedade da definição teórica de probabilidade para demonstrar isso.

Professor, as propriedades de conjuntos foram apresentadas no Volume **1** desta coleção. Se julgar necessário, retome com os estudantes algumas delas.

Vamos considerar os eventos A e B de um espaço amostral Ω, de maneira que $\overline{A}$ é o evento complementar de A e $\overline{B}$ é o evento complementar de B. Podemos representar o diagrama de Venn a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Temos que:

- $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, com $(A \cap B)$ e $(A \cap \overline{B})$ conjuntos disjuntos (I).
- $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B$, com $(A \cap \overline{B})$ e B conjuntos disjuntos (II).

Considerando (I) e a 3ª propriedade da definição teórica de probabilidade, temos:

$$p(A) = p\left((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\right) \Rightarrow p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B) \text{ (III)}$$

Além disso, utilizando (II) e a 3ª propriedade, temos:

$$p(A \cup B) = p\left((A \cap \overline{B}) \cup B\right) \Rightarrow p(A \cup B) = p + p(B) \text{ (IV)}$$

Aplicando (III) em (IV), temos:

$$p(A \cup B) = p(A) - p(A \cap B) + p(B) \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Podemos calcular a probabilidade da união dos eventos A e B com a fórmula: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Atividades resolvidas

5. No lançamento simultâneo de 2 dados perfeitos distinguíveis de 6 faces, numeradas de 1 a 6, qual é a probabilidade de ocorrer soma par ou soma múltipla de 3?

Resolução

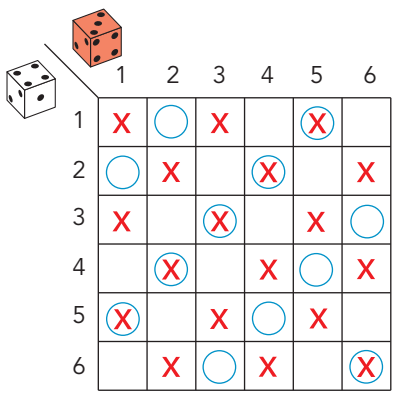
Neste experimento, o espaço amostral é equiprovável.

No quadro ao lado, representamos o espaço amostral de 36 elementos: $n(\Omega) = 36$.

Marcamos com **X** o evento A: "ocorrer soma par" e com ◯ o evento B: "ocorrer soma múltipla de 3".

Assim, foram marcados 18 **X** e 12 ◯, ou seja, $n(A) = 18$ e $n(B) = 12$.

Note que $n(A \cap B) = 6$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Logo:

$$p(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad p(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \qquad p(A) \cap p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Assim, a probabilidade de ocorrer "soma par ou soma múltipla de 3" é dada por:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{probabilidade de ocorrer soma par}}} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\substack{\text{probabilidade de ocorrer soma múltipla de 3}}} - \underbrace{\frac{1}{6}}_{\substack{\text{probabilidade de ocorrer soma par e múltipla de 3}}}$$

$$p(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

A probabilidade é $\frac{2}{3}$.

6. Em uma moeda viciada, a probabilidade de ocorrer cara é o dobro da probabilidade de ocorrer coroa. Qual é a probabilidade de ocorrer cara?

Fique atento

Quando um experimento é dito viciado ou não honesto, os eventos elementares do espaço amostral não são equiprováveis.

Resolução

Como a moeda é viciada, os eventos elementares não são equiprováveis. Porém, sabemos que $p(\Omega) = 1$.

Considerando os eventos C: "ocorrer cara" e K: "ocorrer coroa", temos, de acordo com a 2ª consequência da definição teórica de probabilidade, $p(C) + p(K) = 1 \Rightarrow p(C) = 1 - p(K)$.

De acordo com o enunciado, sabemos que $p(C) = 2p(K)$.

Logo, $1 - p(K) = 2p(K) \Rightarrow 3p(K) = 1 \Rightarrow p(K) = \frac{1}{3} \Rightarrow p(C) = 1 - p(K) \Rightarrow p(C) = \frac{2}{3}$.

A probabilidade de ocorrer cara é $\frac{2}{3}$.

7. Uma máquina produziu 50 parafusos, dos quais 5 eram defeituosos. Sabendo que foram pegos, ao acaso, 3 parafusos, responda aos itens no caderno.

a) Qual é a probabilidade de que os 3 sejam perfeitos?

b) Qual é a probabilidade de que pelo menos 1 seja defeituoso?

Resolução

a) $n(\Omega)$ é o número de combinações de 50 elementos tomados 3 a 3.

$$n(\Omega) = C_{50,3} = \binom{50}{3} = \frac{50!}{3! \cdot 47!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot \overset{8}{\cancel{48}} \cdot \cancel{47!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{47!}} =$$

$$= 50 \cdot 49 \cdot 8$$

Fique atento

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n - p)!}$$

Evento A: "os 3 parafusos são perfeitos".

$$n(A) = C_{45,3} = \binom{45}{3} = \frac{\overset{15}{\cancel{45}} \cdot \overset{22}{\cancel{44}} \cdot 43 \cdot \cancel{42!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{42!}} = 15 \cdot 22 \cdot 43$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15 \cdot 22 \cdot 43}{50 \cdot 49 \cdot 8} = \frac{14190}{19600} \simeq 72{,}4\%$$

A probabilidade é, aproximadamente, 72,4%.

b) Evento E: "pelo menos 1 é defeituoso", que é o complementar do evento A: "os 3 são perfeitos" (que é o mesmo que "nenhum é defeituoso").

Logo: $p(E) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) \Rightarrow p(E) \simeq 1 - 0{,}724 \simeq 0{,}276 \Rightarrow p(E) \simeq 27{,}6\%$.

A probabilidade é, aproximadamente, 27,6%.

8. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos e $p(A) = 0{,}25$ e $p(B) = 0{,}5$, determine no caderno:

a) $p(A \cup B)$ **b)** $p(\overline{A \cup B})$ **c)** $p(\overline{B})$

Resolução

a) Temos $p(A) = 0{,}25$ e $p(B) = 0{,}5$.

$p(A \cap B) = 0$, pois $(A \cap B) = \varnothing$ (mutuamente exclusivos).

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}25 + 0{,}5 - 0 = 0{,}75$

b) $p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

c) $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

Atividades

Não escreva no livro

27. Duas cartas são retiradas aleatoriamente de um baralho de 52 cartas. Qual é a probabilidade de que:

a) 1 seja de copas e 1 seja de ouros? $\frac{13}{204}$

b) pelo menos 1 seja de ouros? $\frac{15}{34}$

28. Em uma urna existem bolas idênticas, numeradas de 1 a 17. Qualquer uma delas tem a mesma probabilidade de ser retirada. Qual é a probabilidade de retirar uma bola cujo número seja:

a) par? $\frac{8}{17}$

b) primo? $\frac{7}{17}$

c) par ou primo? $\frac{14}{17}$

d) par e primo? $\frac{1}{17}$

e) nem par nem primo? $\frac{3}{17}$

f) par, mas não primo? $\frac{7}{17}$

g) primo, mas não par? $\frac{6}{17}$

Texto para a próxima atividade.

Oswaldo Gonçalves Cruz (1872-1917) foi um médico, bacteriologista, epidemiologista, sanitarista e cientista brasileiro pioneiro no estudo das moléstias tropicais. Conhecido pelo combate a várias epidemias, como a da varíola e a da febre amarela, ele foi responsável pela erradicação da varíola no Rio de Janeiro na primeira década do século XX. No final de 1910, foi chamado às pressas pelo governo do Pará para dar fim a uma epidemia de febre amarela. Prometeu sanar o problema em 6 meses. Analise o quadro a seguir, que mostra a atuação dele na capital paraense na contenção da febre amarela.

Resultado das medidas de contenção da febre amarela entre novembro de 1910 e maio de 1911

Mês	Quantidade de doentes	Quantidade de mortes
Novembro de 1910	96	49
Dezembro de 1910	85	37
Janeiro de 1911	27	15
Fevereiro de 1911	13	9
Março de 1911	4	1
Abril de 1911	2	1
Maio de 1911	1	0
Total	**228**	**112**

Fonte dos dados: FRANCO, Odair. *História da febre amarela no Brasil*. Rio de Janeiro: Ministério da Saúde, 1969. Disponível em: https://tedit.net/ofkkq4. Acesso em: 22 ago. 2024.

29. Se no período de novembro de 1910 a maio de 1911 alguém contraiu a febre amarela, qual é a probabilidade de essa pessoa não ter falecido vítima da doença? $\frac{29}{57}$

30. Em uma turma há 16 estudantes com 15 anos de idade e 20 com 16 anos de idade, sendo que metade dos estudantes com 15 anos e metade dos estudantes com 16 anos têm cabelos castanhos. Ao escolher um estudante ao acaso, qual é a probabilidade de que tenha 15 anos de idade ou cabelos castanhos? $\frac{13}{18}$

31. Uma máquina produziu 40 peças, das quais 3 eram defeituosas. Ao pegar ao acaso 2 peças, qual é a probabilidade de que:

a) ambas sejam perfeitas? $\frac{666}{780}$

b) ambas sejam defeituosas? $\frac{3}{780}$

c) pelo menos 1 seja defeituosa? $\frac{114}{780}$

Texto para a próxima atividade.

No jogo chamado campo minado, o jogador precisa descobrir em quais posições (delimitadas pelos quadrados) estão colocadas 10 minas (bombas).

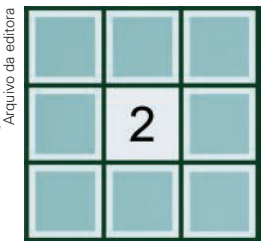
Tiago Donizete Leme/ Arquivo da editora

O tabuleiro do campo minado pode ser composto de diferentes maneiras. Nesse exemplo, ele tem 8 linhas e 8 colunas. Além disso, há um contador de minas e um cronômetro.

As regras do jogo são as seguintes:

- Você pode revelar 1 quadrado clicando nele com o *mouse*. Se você revelar 1 mina, perderá o jogo.
- O número que aparece no quadrado indica quantas minas existem nos 8 quadrados que o cercam.

Tiago Donizete Leme/ Arquivo da editora



O número 2 indica que existem 2 minas espalhadas nos 8 quadrados que cercam o número 2.

- Para marcar um quadrado que você acha que contém uma mina, clique nele com o botão direito do *mouse*. Ele ficará marcado com uma bandeirinha.

32. Utilize essas informações e verifique qual das opções a seguir é a melhor para dar o próximo clique utilizando o tabuleiro indicado, considerando que o objetivo é não revelar acidentalmente uma mina. Justifique sua escolha. Opção **2**.

Opção **1**: Escolher aleatoriamente qualquer um dos 8 quadrados que cercam o número 2 já revelado.

Opção **2**: Escolher aleatoriamente qualquer um dos 8 quadrados que cercam o número 1 já revelado.

Opção **3**: Escolher aleatoriamente qualquer um dos quadrados restantes não incluídos nas opções anteriores.

Explorando o conceito de probabilidade condicional

Explore para descobrir

2. $A = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(A) = 3$

$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$; a probabilidade é 50%.

Não escreva no livro

Reúna-se com um colega, e façam os registros no caderno. Considerem o experimento "lançamento de um dado não viciado", com 6 faces numeradas de 1 a 6.

1. Indiquem o espaço amostral desse experimento e o número de elementos. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(\Omega) = 6$.

2. Indiquem a probabilidade do evento A: "ocorrer número ímpar".

3. Suponham que, ao realizar o experimento, já se saiba que não ocorreu o número 6. Dessa maneira, pode-se considerar o evento B: "não ocorrer 6". Descrevam o evento B e indiquem o número de elementos dele. $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $n(B) = 5$.

4. Podemos considerar o evento C: "ocorrer número ímpar, dado que não será 6". Descrevam o evento C e indique o número de elementos dele. $C = \{1, 3, 5\}$ e $n(C) = 3$.

5. Qual é a probabilidade de ocorrer o evento A considerando que o evento B ocorreu, isto é, qual é a probabilidade de o evento C ocorrer? $p(A|B) = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$; a probabilidade é 60%.

Após realizar as atividades **1** a **5** do *Explore para descobrir*, podemos perceber que, para calcular a probabilidade de ocorrer o evento A, dado que o evento B ocorreu, é necessário considerar que a quantidade de possibilidades é o número de elementos de B, e não o número de elementos do espaço amostral Ω.

Além disso, o número de casos favoráveis deixou de ser o número de elementos de A e passou a ser o número de elementos de $(A \cap B)$.

Sendo $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos que $(A \cap B) = \{1, 3, 5\}$ e $n(A \cap B) = 3$.

Analise agora a situação a seguir.

Felipe, Gabriel, Heitor, Igor, Joana, Kátia, Lúcia e Marina estão reunidos para revelar o amigo secreto durante uma confraternização. Felipe, Gabriel, Joana e Kátia são adolescentes, enquanto os demais são adultos. Felipe se dispõe a ser o primeiro a falar e todos tentam acertar o amigo secreto dele.

Podemos escrever o espaço amostral do experimento "possibilidades de amigo secreto de Felipe" como $\Omega = \{\text{Gabriel, Heitor, Igor, Joana, Kátia, Lúcia, Marina}\}$; então, temos $n(\Omega) = 7$. Nesse momento, a probabilidade de cada uma das 7 pessoas do espaço amostral ser o amigo secreto de Felipe é $\frac{1}{7}$.

Ladanifer/Shutterstock

O amigo-secreto é um jogo em que as pessoas se sorteiam em um grupo para trocar presentes.

Felipe revela que o amigo secreto dele é um adulto. Dessa maneira, Gabriel sabe que a probabilidade de ele ser o amigo secreto de Felipe é 0. Ao mesmo tempo, a probabilidade de Lúcia, bem como dos outros 3 adultos, passou a ser $\frac{1}{4}$.

Essas probabilidades mencionadas, 0 e $\frac{1}{4}$, são condicionadas a uma informação extra. A presença dessa informação extra modifica a probabilidade de Gabriel ser o amigo secreto de Felipe, assim como a probabilidade de Lúcia ser a amiga secreta de Felipe, pois a informação extra modifica o espaço amostral.

Matematicamente, indicamos a probabilidade do evento A condicionada ao fato de já ter ocorrido o evento B por $p(A|B)$. Agora, vamos definir os eventos existentes nessa situação.

M é o evento "o amigo secreto de Felipe é adulto"; dessa maneira, $M = \{\text{Heitor, Igor, Lúcia, Marina}\}$ e $n(M) = 4$.

G é o evento "o amigo secreto de Felipe é Gabriel"; dessa maneira. $G = \{\text{Gabriel}\}$ e $n(G) = 1$.

L é o evento "o amigo secreto de Felipe é Lúcia"; dessa maneira, $L = \{\text{Lúcia}\}$ e $n(L) = 1$.

Quando os eventos L e G não estavam condicionados a nenhuma informação extra, tínhamos $p(G) = p(L) = \frac{1}{7}$. Mas, agora, ambos estão condicionados ao fato de que M ocorreu. Assim, devemos calcular $p(G|M)$ e $p(L|M)$. Quando o evento M ocorre, o espaço amostral passa a ser formado pelos elementos de M.

Para o cálculo de uma probabilidade condicional, é necessário verificar se o evento está ou não contido no novo espaço amostral.

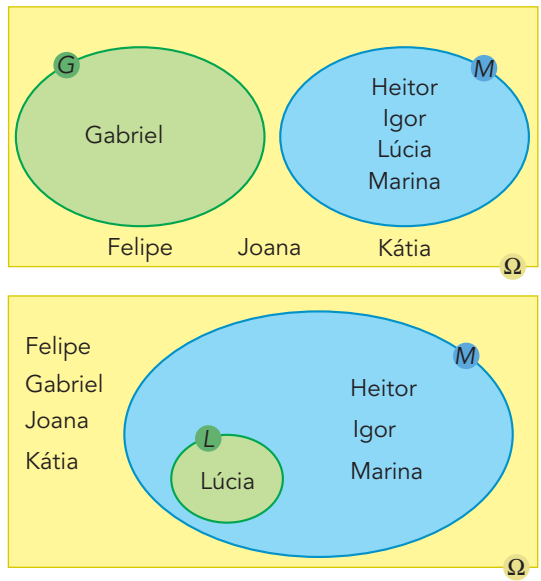
Gabriel, que é adolescente, não pertence ao conjunto M, dos adultos. Dessa maneira, temos:

$G \cap M = \varnothing$ e $n(G \cap M) = 0$, portanto, $p(G|M) = 0$.

$$p(G|M) = \frac{n(G \cap M)}{n(M)} = \frac{0}{4} = 0$$

Lúcia, que é adulta, pertence ao conjunto M, dos adultos. Dessa maneira, $L \cap M = \{\text{Lúcia}\}$ e $n(L \cap M) = 1$.

$$p(L|M) = \frac{n(L \cap M)}{n(M)} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$



Ilustrações:WYM Design/Arquivo da editora

Formalizando o conceito de probabilidade condicional

Definimos a probabilidade condicional do seguinte modo:

Dados 2 eventos A e B, com $p(B) > 0$, que pertencem a um espaço amostral Ω não vazio, a probabilidade condicional de ocorrer A já tendo ocorrido B é dada por $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Podemos simplificar a fórmula da probabilidade condicional:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \cdot \frac{n(\Omega)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Perceba que uma consequência direta dessa definição é que $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A|B)$.

Atividades resolvidas

9. Em uma população de 500 pessoas, das quais 280 são adolescentes, foi constatado que 60 pessoas usam óculos e, destas, 20 são adolescentes. Tomando ao acaso uma dessas pessoas, qual é a probabilidade de que, sendo adolescente, ela use óculos?

Resolução

Sendo o evento A: "ocorrer a pessoa que usa óculos", e o evento B: "ocorrer a pessoa que é adolescente", temos que:

$$\left.\begin{array}{l} n(A) = 60 \\ n(B) = 280 \\ n(A \cap B) = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{20}{280} = \frac{1}{14}$$

10. Uma fábrica produz 3 produtos: **A**, **B** e **C**. Qual é a probabilidade de se selecionar, ao acaso, um produto defeituoso **A** se é sabido que 30% dos produtos produzidos pela fábrica são produtos **A** e 5% dos produtos produzidos **A** são defeituosos?

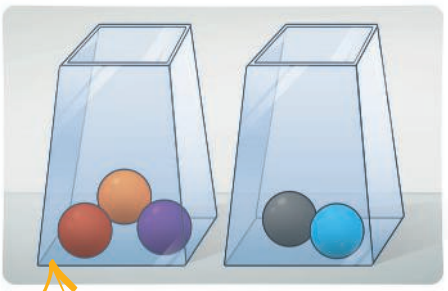
Resolução

Sejam evento D: "selecionar produto defeituoso" e evento $D \cap A$: "selecionar produto defeituoso **A**". Temos:

- $p(A) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$
- $p(D|A) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$
- $p(D \cap A) = p(D|A) \cdot p(A) = \frac{1}{20} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{200} = 1{,}5\%$

Portanto, $p(D \cap A) = 1{,}5\%$.

Eventos independentes



Tiago Donizete Leme/ Arquivo da editora

As bolas nas urnas são idênticas, exceto pelas cores.

O conceito de independência de eventos é muito importante em Probabilidade. Vamos analisar um experimento que envolve esse conceito.

Duas urnas contêm bolas idênticas, exceto pelas cores, de maneira que a 1ª urna contém uma bola laranja (L), uma bola vermelha (V) e uma bola roxa (R), enquanto a 2ª urna contém uma bola azul (Z) e uma bola preta (P). Considere o experimento "sorteio sucessivo de 2 bolas, 1 em cada urna" e os eventos A: "tirar a bola vermelha da 1ª urna" e B: "tirar a bola azul da 2ª urna".

Representamos os sorteios em pares ordenados, de maneira que o sorteio na 1ª urna é indicado na primeira posição e o sorteio na 2ª urna é indicado na segunda posição. Temos:

$$\Omega = \{(L, Z), (L, P), (V, Z), (V, P), (R, Z), (R, P)\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$$

$$A = \{(V, Z), (V, P)\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$B = \{(L, Z), (V, Z), (R, Z)\} \Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$B \cap A = \{(V, Z)\} \Rightarrow n(B \cap A) = 1 \Rightarrow p(B \cap A) = \frac{n(B \cap A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{1} = \frac{1}{2}$$

Nesse caso, os eventos A e B são **eventos independentes**. A probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de ter ou não ocorrido o outro.

Analogamente, também temos $p(A) = p(A|B)$.

Assim, temos:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A \cap B) = \underbrace{p(A|B)}_{p(A)} \cdot p(B) = p(A) \cdot p(B)$$

Logo, o fato de A e B serem eventos independentes é equivalente a dizer que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Definimos que:

Dois eventos A e B de um espaço amostral Ω não vazio (com $p(A) \neq 0$ e $p(B) \neq 0$) são independentes se, e somente se, $p(A|B) = p(A)$, ou, de modo equivalente:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Com isso, podemos afirmar que 2 eventos A e B são **dependentes** quando $p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$.

Atividades resolvidas

11. Uma moeda perfeita é lançada 2 vezes. Considerando os eventos A: "ocorrer cara na 1ª jogada" e B: "ocorrer cara na 2ª jogada", demonstre que os eventos A e B são independentes.

Resolução

Considerando C como "cara" e K como "coroa", temos:

$$\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$$

$$A = \{(C, C), (C, K)\} \Rightarrow p(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(C, C), (K, C)\} \Rightarrow p(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{(C, C)\} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Como $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, temos $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Logo, A e B são eventos independentes.

38. Considerando os eventos A: "ocorrer parafuso bom na 1ª retirada" e B: "ocorrer parafuso defeituoso na 2ª retirada", temos que $p(A \cap B) = \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{99} = \frac{1}{11}$; a probabilidade é $\frac{1}{11}$.

Atividades

36. Exemplo de problema: Qual é a probabilidade de ocorrer a soma 5 se ocorreu 1 no primeiro dado?

Não escreva no livro

33. Ao retirar aleatoriamente 1 carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de retirar 1 ás vermelho sabendo que a carta retirada é de copas? $\frac{1}{13}$

34. Uma família planejou ter 3 filhos. Qual é a probabilidade de que a família tenha 3 filhos do sexo masculino já que o 1º filho que nasceu é do sexo masculino? $\frac{1}{4}$

35. Dois dados não viciados, de 6 faces numeradas de 1 a 6, são lançados. Qual é a probabilidade de ocorrer soma 8 se ocorreu o 3 no primeiro dado? $\frac{1}{6}$

36. Considere os dados da atividade anterior, pense em outros eventos e, no caderno, elabore um problema. Depois, troque com um colega para que ele resolva o seu problema.

37. Durante uma festa na escola, Pedro está participando de um jogo de sorte. No jogo, ele pode escolher entre 2 caixas (caixa **A** e caixa **B**). Cada caixa contém 2 bolas: uma verde e uma azul. Pedro deve escolher uma caixa e, em seguida, retirar uma bola sem olhar.

a) No, caderno, represente o diagrama de árvore para as possíveis escolhas e resultados de Pedro. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Qual é a probabilidade de Pedro retirar uma bola azul? $\frac{1}{2}$ ou 50%.

38. Em um conjunto de 100 parafusos, 90 estão em boas condições. Dois deles são retirados, sucessivamente, ao acaso, sem reposição. Qual é a probabilidade de que o 1º parafuso defeituoso seja encontrado na 2ª retirada?

39. Trinta por cento (30%) de uma população tem deficiência de certa vitamina em razão de uma alimentação não equilibrada. Dez por cento (10%) das pessoas com essa deficiência de vitamina têm certa doença. Qual é a probabilidade de que uma pessoa selecionada ao acaso tenha a doença e a deficiência de vitamina? 3%

40. Considere um algoritmo que recebe e verifica se formulários de inscrição para um vestibular foram preenchidos corretamente. Em caso afirmativo, o algoritmo envia para o candidato um boleto para pagamento. Se o candidato cometeu algum erro, o algoritmo envia um *e-mail* informando sobre a incorreção. Se o candidato efetua o pagamento do boleto, o algoritmo envia um *e-mail* confirmando a inscrição. Se o pagamento não for efetuado dentro do prazo, o candidato recebe um *e-mail* informando que sua inscrição não foi realizada.

a) No caderno, construa um fluxograma que represente esse algoritmo. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Suponha que a probabilidade de o formulário ser preenchido corretamente é 95% e que a probabilidade de o boleto ser pago é 80%. Calcule a probabilidade de um candidato receber um *e-mail* de confirmação de inscrição. 76%

41. Um pescador tem 80% de probabilidade de conseguir pescar algum peixe se não chover e 30% se chover. Suponha que, em determinado dia, a probabilidade de chover seja 40%.

a) Qual é a probabilidade de o pescador não pescar nenhum peixe? 40%

b) Sabendo que o pescador não pescou nenhum peixe, qual é a probabilidade de ter chovido? 70%

42. Em provas automobilísticas, a escolha dos pneus é fundamental para o bom desempenho de um carro. Suponha que, em determinado momento da prova, um piloto que está usando pneus apropriados para pista seca estivesse em 1º lugar. Ele recebeu um aviso de que a probabilidade de não chover nos próximos 10 minutos seria 10%.

Sabe-se que, se não chover, a probabilidade de vencer a corrida sem trocar de pneus é 80%. Contudo, se chover, a probabilidade de vencer a corrida sem trocar os pneus é 30%. Por fim, se chover, a probabilidade de vencer a corrida trocando os pneus é 70%. Qual é a melhor decisão para esse piloto, trocar ou não os pneus? O piloto deve trocar os pneus.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade.

43. Exemplo de problema: Uma urna contém 5 etiquetas cortadas e dobradas de maneira idêntica, identificadas com as letras A, B, C, D, E. Duas delas são retiradas ao acaso, sucessivamente. Qual é a probabilidade de ocorrer 2 vogais se não há reposição das etiquetas a cada sorteio?

43. Pense em uma situação em que seja necessário sortear algo mais de 1 vez sem que haja reposição do objeto sorteado e, no caderno, elabore um problema. Depois, troque com um colega para que ele resolva o seu problema.

Texto para a próxima atividade.

Um famoso paradoxo matemático, conhecido como paradoxo de Monty Hall, foi retratado em 1998 pelo professor Nicolau C. Saldanha. Nele, é apresentado o problema a seguir.

Em um programa de auditório, o convidado deve escolher uma dentre três portas. Atrás de uma das portas há um carro e atrás de cada uma das outras duas há um bode. O convidado ganhará o que estiver atrás da porta; devemos supor neste problema que o convidado prefere ganhar o carro. O procedimento para escolha da porta é o seguinte: o convidado escolhe inicialmente, em caráter provisório, uma das três portas. O apresentador do programa, que sabe o que há atrás de cada porta, abre neste momento uma das outras duas portas, sempre revelando um dos dois bodes. O convidado agora tem a opção de ficar com a primeira porta que ele escolheu ou trocar pela outra porta fechada. Que estratégia deve o convidado adotar? Com uma boa estratégia, que probabilidade tem o convidado de ganhar o carro?

SALDANHA, Nicolau C. *Como perder amigos e enganar pessoas*. Eureka, n. 1, p. 41-50, 1998.

Tiago Donizete Leme/ Arquivo da editora

O programa de televisão intitulado Let's Make a Deal (Vamos fazer um acordo) foi exibido de 1963 a 1976 nos Estados Unidos e era comandado pelo apresentador Monty Hall (1921-2017). O programa fez tanto sucesso que por diversas vezes foi relançado entre 1980 e 1991.

O cálculo da probabilidade de ganhar o carro mudando ou não de porta pode ser resolvido de maneira simples. Analise o quadro a seguir e suponha que o participante tenha inicialmente escolhido a porta **1** e que a distribuição dos bodes e do carro seja feita, em cada caso, sem repetição e de maneira aleatória.

Porta 1	Porta 2	Porta 3	Não mudando a porta	Mudando a porta
Carro	Bode	Bode	Ganha o carro	Ganha o bode
Bode	Carro	Bode	Ganha o bode	Ganha o carro
Bode	Bode	Carro	Ganha o bode	Ganha o carro

Quando o participante não muda de porta, a probabilidade de ele ganhar o carro é $\frac{1}{3}$. Contudo, fazendo a mudança no momento oportuno, a probabilidade de ganhar o carro passa a ser $\frac{2}{3}$. Isso se dá pelo fato de que, se não houver a mudança da porta escolhida, a única maneira de o participante ganhar o carro é ele ter escolhido a porta correta na primeira tentativa. Ou seja, é mais vantajoso mudar de porta.

Caso o participante escolha as portas 2 ou 3, a verificação é feita de maneira análoga.

Fonte dos dados: MLODINOW, Leonard. *O andar do bêbado*: como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009; SALDANHA, Nicolau C. *Como perder amigos e enganar pessoas*. Eureka, n. 1, p. 41-50, 1998.

44. Com relação ao paradoxo de *Monty Hall*, faça a verificação das probabilidades descritas no texto considerando que o participante escolha primeiro a porta **2**.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Conexões

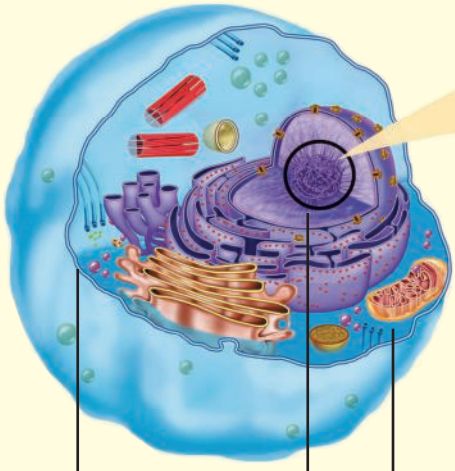
Aplicações de probabilidade à Genética

Infográfico clicável

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

As imagens não estão representadas em proporção.

Imagens em cores fantasia.

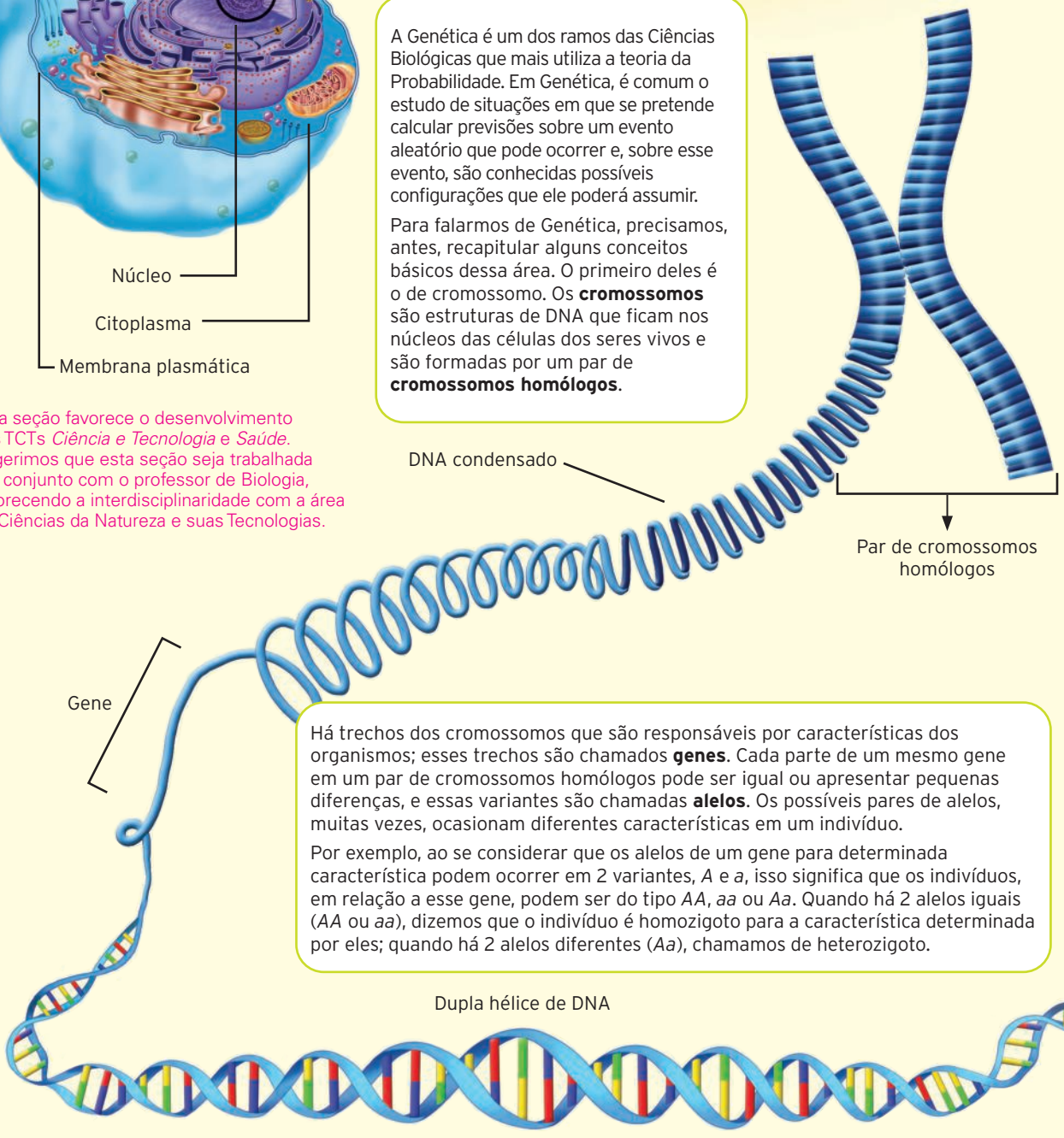


Luís Moura/Arquivo da editora

A Genética é um dos ramos das Ciências Biológicas que mais utiliza a teoria da Probabilidade. Em Genética, é comum o estudo de situações em que se pretende calcular previsões sobre um evento aleatório que pode ocorrer e, sobre esse evento, são conhecidas possíveis configurações que ele poderá assumir.

Para falarmos de Genética, precisamos, antes, recapitular alguns conceitos básicos dessa área. O primeiro deles é o de cromossomo. Os **cromossomos** são estruturas de DNA que ficam nos núcleos das células dos seres vivos e são formadas por um par de **cromossomos homólogos**.

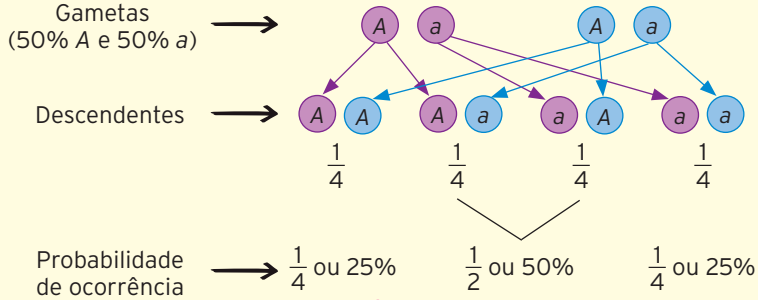
Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Ciência e Tecnologia* e *Saúde*. Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.



Há trechos dos cromossomos que são responsáveis por características dos organismos; esses trechos são chamados **genes**. Cada parte de um mesmo gene em um par de cromossomos homólogos pode ser igual ou apresentar pequenas diferenças, e essas variantes são chamadas **alelos**. Os possíveis pares de alelos, muitas vezes, ocasionam diferentes características em um indivíduo.

Por exemplo, ao se considerar que os alelos de um gene para determinada característica podem ocorrer em 2 variantes, *A* e *a*, isso significa que os indivíduos, em relação a esse gene, podem ser do tipo *AA*, *aa* ou *Aa*. Quando há 2 alelos iguais (*AA* ou *aa*), dizemos que o indivíduo é homozigoto para a característica determinada por eles; quando há 2 alelos diferentes (*Aa*), chamamos de heterozigoto.

Luis Moura/Arquivo da editora



Os descendentes de um casal heterozigotos *Aa* são formados por um espermatozoide (gameta masculino), que pode ter alelo *A* ou *a*, e por um óvulo (gameta feminino), que também pode ter alelo *A* ou *a*. Admitindo-se que a probabilidade de um gameta ser *A* é igual à probabilidade de ser *a*, ou seja, assumindo que esses eventos são equiprováveis, e considerando essas características, os descendentes poderão apresentar 3 tipos de genótipo, *AA*, *aa* ou *Aa*, e cada genótipo tem uma probabilidade de ocorrer, como aparece no esquema.

Conecte com o texto

1. Nessa situação, por que os genótipos *AA* e *aa* têm, cada um, probabilidade de ocorrência de 25%, enquanto o genótipo *Aa* tem probabilidade de ocorrência de 50%? A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

2. Um alelo é **dominante** se determina uma característica do organismo quando está na forma *AA* ou *Aa* (ou seja, indivíduos homozigotos ou heterozigotos para essa característica). Um alelo é **recessivo** se determina uma característica apenas na forma *aa* (ou seja, para indivíduos homozigotos).

   Um exemplo de característica recessiva é o albinismo. No ser humano, o albinismo é determinado por um gene recessivo *a*, enquanto a ausência de albinismo é determinada pelo alelo dominante *A*. Isso significa que, em relação a esse gene, o albinismo ocorre apenas em indivíduos *aa*, enquanto a ausência de albinismo ocorre em indivíduos *AA* ou *Aa*.

   Considere que um casal com pigmentação não albina teve, como primeiro descendente, uma criança albina.

   a) Qual é o genótipo dos pais da criança para albinismo: *AA*, *Aa* ou *aa*? Justifique.
   A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

   b) Qual é a probabilidade de que os próximos 2 filhos desse casal sejam ambos albinos?

   c) Qual é a probabilidade de que os próximos 2 filhos sejam ambos não albinos?

2. b) Para cada filho, temos:
$\Omega = \{AA, Aa_1, Aa_2, aa\} \Rightarrow n(\Omega) = 4$
A: "ocorrer aa" $\Rightarrow n(A) = 1$
$p(A) = \frac{1}{4}$

Considerando que são 2 filhos, temos:
$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 6{,}25\%$

Pesquise e debata

3. Pesquise algumas doenças ou características físicas que são hereditárias e determinadas por um gene recessivo ou dominante no indivíduo. Procure compreender a ocorrência dessa doença ou característica. Depois, compartilhe sua descoberta com os colegas. A resposta depende da pesquisa realizada pelo estudante.

Para cada filho, temos:
$\Omega = \{(A, A), (A, a_1), (A, a_2), (a, a)\} \Rightarrow n(\Omega) = 4$
B: "não ocorrer aa" $\Rightarrow n(B) = 3$
$p(B) = \frac{3}{4}$

Considerando que são 2 filhos, temos:
$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} = 56{,}25\%$

Sobre o assunto

Acesse o *site* https://tedit.net/9axrnk ou assista ao vídeo disponível em https://tedit.net/2fqzcd (acesso em: 22 jul. 2024) para conhecer mais os estudos e as aplicações da Genética.

2. a) Como ambos os pais são não albinos, os genótipos deles podem ser *AA* ou *Aa*. Entretanto, como o filho é albino (e, portanto, tem genótipo *aa*), isso implica que ele foi formado pela união de um gameta masculino *a* e um gameta feminino *a*. Portanto, ambos os pais são *Aa*.

Enem e vestibulares

1. A quantidade de times possíveis, com a restrição apresentada, será obtida pelo produto das possibilidades de se escolher uma goleira dentre as 3, e 4 jogadoras dentre as 17 restantes. Assim, $C_{3,1} \cdot C_{17,4}$. Alternativa **e**.

2. Trata-se de uma permutação com elementos repetidos. Observe que a palavra UNISINOS tem 8 letras, sendo 2 letras N, 2 letras I e 2 letras S. Logo: $P_8^{2,2,2} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 5\,040$. Alternativa **c**.

1. (UFRGS-RS) Um time de futebol de salão dispõe de vinte jogadoras de futebol, entre as quais apenas Antônia, Maria e Eduarda são goleiras. O número de times possíveis, com cinco jogadoras, em que apenas a goleira joga em uma posição fixa, é:

a) $C_{17,4}$.
b) $C_{20,4}$.
c) $C_{20,5}$.
d) $C_{3,1} + C_{17,4}$.
e) $C_{3,1} \cdot C_{17,4}$.

2. (Unisinos-RS) Um anagrama é uma palavra ou frase formada pela permutação das letras de outra palavra ou frase. Como exemplos, podemos citar: repito é um anagrama de perito, frutas, de trufas. Na contagem de anagramas são permitidas palavras que não fazem sentido, como rraaa, que seria um anagrama de arara. Quantos anagramas distintos podemos formar com a palavra UNISINOS?

a) 64
b) 2 520
c) 5 040
d) 2 0160
e) 40 320

3. (Unicamp-SP) Em um campeonato, os times de vôlei são compostos por 6 jogadores. O treinador de um dos times tem à sua disposição 8 pessoas para montar a equipe. De quantas [maneiras] distintas ele pode fazer isso?

a) 8 **b)** 18 **c)** 28 **d)** 38 Alternativa **c**.

4. (UEG-GO) O corpo de bombeiros [tem] uma equipe de 10 paramédicos. A cada chamada, 3 paramédicos saem juntos para fazer o atendimento. A quantidade de diferentes composições com 3 paramédicos que podem ser formadas é: Alternativa **b**.

a) 125.
b) 120.
c) 110.
d) 100.
e) 90.

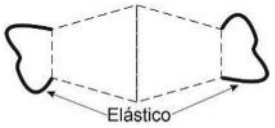
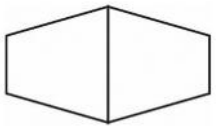
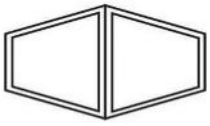
5. (Enem) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas. A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão: Alternativa **a**.

a) $\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}$.
b) $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$.
c) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$.
d) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$.
e) $\frac{21!}{7!14!}$.

6. (Epcar-MG) No contexto atual, a máscara deve fazer parte do nosso vestuário.

Usuários desse item de extrema necessidade individual e coletiva buscam a produção caseira e, para isso, existem vários modelos disponíveis com sugestões de materiais.

Considere a confecção de máscaras caseiras, seguindo os modelos [dos desenhos] a seguir bem como as especificações de materiais para cada uma de suas partes.

Elástico	Tipos	Cores
	Roliço Chato	Vermelho Preto Branco
Lado interno do tecido	**Tipos**	
	Proteção antiviral Sem proteção antiviral	
Lado externo do tecido	**Tipos**	**Padrões**
	Algodão Tricoline TNT	Lisos Estampados

Reprodução/CPCAR, 2022.

Com as especificações indicadas [anteriormente], a quantidade de máscaras diferentes que se pode confeccionar é igual a: Alternativa **d**.

a) 12.
b) 14.
c) 36.
d) 72.

7. **(Enem)** A senha de um cofre é uma sequência formada por oito dígitos, que são algarismos escolhidos de 0 a 9. Ao inseri-la, o usuário se esqueceu dos dois últimos dígitos que formam essa senha, lembrando somente que esses dígitos são distintos.

Digitando ao acaso os dois dígitos esquecidos, a probabilidade de que o usuário acerte a senha na primeira tentativa é: Alternativa **b**.

a) $\frac{2}{8}$.
c) $\frac{2}{90}$.
e) $\frac{2}{100}$.
b) $\frac{1}{90}$.
d) $\frac{1}{100}$.

8. **(Enem)** No alojamento de uma universidade, há alguns quartos com o padrão superior ao dos demais. Um desses quartos ficou disponível, e muitos estudantes se candidataram para morar no local. Para escolher quem ficará com o quarto, um sorteio será realizado. Para esse sorteio, cartões individuais com os nomes de todos os estudantes inscritos serão depositados em uma urna, sendo que, para cada estudante de primeiro ano, será depositado um único cartão com seu nome; para cada estudante de segundo ano, dois cartões com seu nome; e, para cada estudante de terceiro ano, três cartões com seu nome. Foram inscritos 200 estudantes de primeiro ano, 150 de segundo ano e 100 de terceiro ano. Todos os cartões têm a mesma probabilidade de serem sorteados.

Qual a probabilidade de o vencedor do sorteio ser um estudante de terceiro ano?

Alternativa **e**.

a) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{8}$
e) $\frac{3}{8}$
b) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{2}{9}$

9. **(Unesp-SP)** Analise a tabela [a seguir], que indica os resultados de um estudo para avaliação da relação entre o peso e a pressão arterial de um grupo de indivíduos.

Pressão arterial	Peso deficiente	Peso normal	Peso em excesso
Normal	20%	45%	15%
Elevada	1%	9%	10%

Renato fez parte desse estudo e sabe que está com excesso de peso. Ao ver a tabela com o resultado do estudo, calculou corretamente que a probabilidade da aferição da sua pressão arterial ter indicado valores elevados é de: Alternativa **d**.

a) 12%.
d) 40%.
b) 4%.
e) 10%.
c) 50%.

10. **(Enem)** Ao realizar o cadastro em um aplicativo de investimentos, foi solicitado ao usuário que criasse uma senha, sendo permitido o uso somente dos seguintes caracteres:

- algarismos de 0 a 9;
- 26 letras minúsculas do alfabeto;
- 26 letras maiúsculas do alfabeto;
- 6 caracteres especiais !, @, #, $, *, &.

Três tipos de estruturas para senha foram apresentadas ao usuário:

- tipo **I**: formada por quaisquer quatro caracteres distintos, escolhidos dentre os permitidos;
- tipo **II**: formada por cinco caracteres distintos, iniciando por três letras, seguidas por um algarismo e, ao final, um caractere especial;
- tipo **III**: formada por seis caracteres distintos, iniciando por duas letras, seguidas por dois algarismos e, ao final, dois caracteres especiais.

Considere p_1, p_2 e p_3 as probabilidades de se descobrirem ao acaso, na primeira tentativa, as senhas dos tipos **I**, **II** e **III**, respectivamente.

Nessas condições, o tipo de senha que apresenta a menor probabilidade de ser descoberta ao acaso, na primeira tentativa, é o Alternativa **a**.

a) tipo **I**, pois $p_1 < p_2 < p_3$.
b) tipo **I**, pois tem menor quantidade de caracteres.
c) tipo **II**, pois tem maior quantidade de letras.
d) tipo **III**, pois $p_3 < p_2 < p_1$.
e) tipo **III**, pois tem maior quantidade de caracteres.

11. **(Uerj)**

População agredida fisicamente no Brasil em 2009

Cor ou raça	Homens	Mulheres
Branca	567 000	474 000
Preta	88 000	608 000

Adaptado de IBGE/PNAD, 2009.

A partir dos dados da tabela, escolhe-se ao acaso uma pessoa dessa população.

Sabendo que essa pessoa é uma mulher, a probabilidade de ela ser preta é mais próxima de: Alternativa **b**.

a) 0,64.
b) 0,56.
c) 0,44.
d) 0,36.

12. **(UFGD-MS)** Maria e João, recém-casados, pretendem ter três filhos. Por isso, o casal decidiu fazer o teste de ancestralidade. O resultado do mapeamento genético mostrou que existe um quarto de chance de um distúrbio congênito, o albinismo, ser transmitido a um filho ou a uma filha. Diante dessa situação, a probabilidade de, exatamente, dois dos três filhos possuírem essa característica é de: Alternativa **e**.

a) $\frac{2}{3}$.
b) $\frac{1}{4}$.
c) $\frac{1}{64}$.
d) $\frac{3}{16}$.
e) $\frac{9}{64}$.

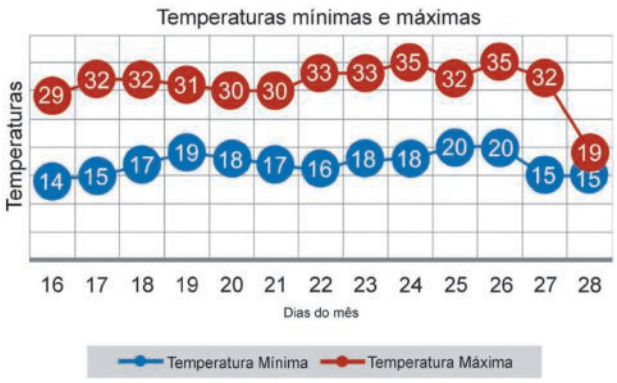
13. **(Unicamp-SP)** Pedra-papel-tesoura, também chamado *jankenpon* ou *jokempô*, é um jogo recreativo para duas pessoas. Nesse jogo, os participantes usam as mãos para representar os símbolos de pedra, papel e tesoura, conforme mostrado nos *emojis* a seguir:

Comvest/Unicamp-SP, 2022.

Pelas regras do jogo, o participante que escolher "pedra" ganha do que escolher tesoura; o participante que escolher tesoura ganha do que escolher papel; por fim, o que escolher papel ganha do que escolher pedra. Se ambos escolherem os mesmos símbolos, eles empatam. Admitindo que os participantes escolhem os símbolos com igual probabilidade, qual a chance de acontecer pelo menos um empate em três partidas? Alternativa **d**.

a) $\frac{16}{27}$
b) $\frac{17}{27}$
c) $\frac{18}{27}$
d) $\frac{19}{27}$

14. **(Unicamp-SP)** O gráfico a seguir exibe as temperaturas mínimas e máximas previstas para o período entre os dias 16 e 28 do mês de dezembro de 2023 numa determinada cidade.



Comvest/Unicamp-SP, 2024.

a) Considerando registros históricos, a temperatura máxima média para o mês de dezembro nesta cidade é de 27 graus. A temperatura máxima média prevista no período apresentado no gráfico é maior ou menor do que a média histórica? Justifique. Maior.

b) Uma pessoa vai se mudar para esta cidade no período indicado no gráfico. Ela poderá escolher qualquer dia para fazer a sua mudança. Qual a probabilidade de que ela escolha se mudar em um dia em que a temperatura mínima prevista seja maior do que 17 graus? Justifique. $\frac{6}{13}$

Conteúdos e aprendizagens

Não escreva no livro

Yuganov Konstantin/Shutterstock

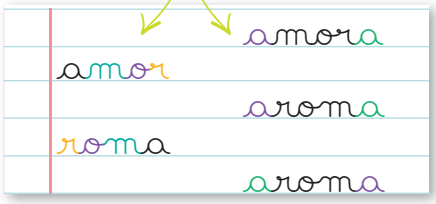
Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Análise combinatória

As imagens não estão representadas em proporção.

Permutação

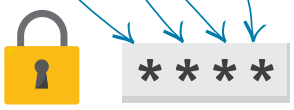
simples



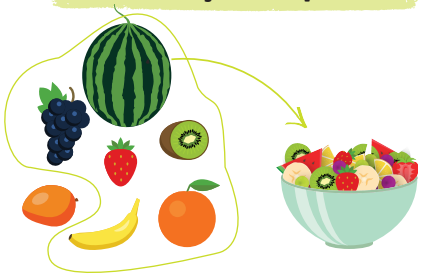
com repetição

Arranjo simples

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



Combinação simples



freepik/freepik

Probabilidade

Considerando uma caixa de bolinhas coloridas...

Espaço amostral

... se quiséssemos sortear uma bolinha da cor azul...

Evento

... qual seria a probabilidade de essa bolinha ser sorteada?

Cálculo da probabilidade

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos do evento}}{\text{número de elementos do espaço amostral}}$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- Consigo resolver problemas de permutação simples, permutação com repetição, arranjo simples e combinação simples?
- Compreendo a diferença entre arranjo e combinação simples?
- Entendo o que são probabilidade em espaço amostral equiprovável, probabilidade da união e probabilidade condicional?
- Consigo resolver problemas que envolvem o cálculo de probabilidade? Respostas pessoais.

UNIDADE 4

Estatística

A Estatística está muito presente no cotidiano e tem por objetivo coletar, organizar e divulgar dados a respeito de determinada população. O Sindicato das Entidades Mantenedoras do Ensino Superior em São Paulo (Semesp), por exemplo, é responsável pelo Mapa do Ensino Superior, no qual apresenta informações confiáveis para se estabelecer estratégias ou formular políticas públicas para o desenvolvimento da Educação Superior no Brasil.

Segundo a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), 23% dos brasileiros entre 25 e 34 anos concluíram o Ensino Superior em 2023.

- Exemplo de resposta: O Censo Demográfico brasileiro avalia o perfil demográfico e socioeconômico da população. População e educação.
- Exemplo de resposta: Espera-se que os estudantes respondam que é necessário saber o objetivo da pesquisa, elaborar uma pergunta, escolher o público-alvo, coletar e organizar os dados e formular uma conclusão.

Rawpixel.com/Shutterstock

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

- Imagine que você deseja fazer uma pesquisa. Quais passos você seguiria para que a pesquisa fosse bem estruturada?
- Pesquise o que é o Censo Demográfico brasileiro e indique 2 variáveis que são pesquisadas.

CAPÍTULO 1

Introdução à Estatística

Situação-problema 1

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Internet

A importância da internet atualmente é indiscutível. Por meio dela, transcendemos os limites geográficos e podemos nos comunicar em tempo real com pessoas em qualquer lugar do mundo. O uso da internet possibilitou a realização de aulas *on-line*, o acesso a um acervo de conteúdos diversos, a prática de compras e de transações bancárias sem sair de casa, entre outras atividades.

Diante dessa realidade, diversos navegadores se atualizaram e permitiram melhores experiências na rede.

A fim de descobrir qual navegador de internet, dos 3 mais bem avaliados do mercado brasileiro, é o mais utilizado, uma empresa de tecnologia fez uma pesquisa com 200 pessoas. Cada entrevistado indicou apenas o navegador que mais utiliza. A tabela a seguir apresenta alguns dos resultados da pesquisa.

Prostock-studio/Adobe Stock

Entre 2022 e 2023, o Brasil tinha cerca de 156 milhões de usuários de internet de acordo com o resultado de uma pesquisa realizada pela TIC Domicílios.

Navegadores de internet mais utilizados no Brasil

Navegador	Quantidade de usuários	Porcentagem de usuários
A	100	50%
B	30	15%
C	70	35%
Total	200	100%

Dados elaborados para fins didáticos.

Professor, no item **a**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

a) Copie a tabela no caderno e complete-a com os dados que estão faltando.

b) De acordo com a pesquisa, qual dos 3 navegadores é o mais utilizado no Brasil? Qual é a porcentagem de indicações que ele recebeu? O navegador **A**. Recebeu 50% das indicações.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem diferentes mídias podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Situação-problema 2

Pacotes de viagem

Uma agência de turismo pretende sortear um pacote de viagem entre os clientes. Para isso, decide fazer uma pesquisa para descobrir qual é o estilo de viagem favorito da clientela. As opções de pacotes que serão sorteados são as seguintes:

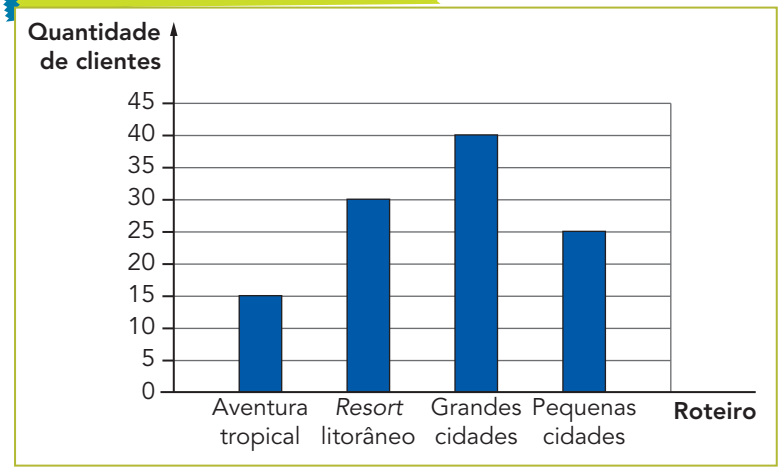
- Roteiro "aventura tropical", incluindo Johannesburgo, na África do Sul.
- Roteiro "*resort* litorâneo", incluindo Maragogi, em Alagoas.
- Roteiro "grandes cidades", incluindo Dublin, na Irlanda.
- Roteiro "pequenas cidades", incluindo Puerto Natales, no Chile.

A pessoa responsável por coletar os dados entrou em contato com todos os clientes do banco de dados da agência e, com os dados obtidos, elaborou o gráfico apresentado a seguir.

meunierd/Shutterstock

A ponte Samuel Beckett, retratada na imagem e apelidada de harpa, é uma ponte estaiada situada em Dublin, capital da Irlanda. O nome dela remete ao dramaturgo irlandês Samuel B. Beckett (1906-1989), autor de dezenas de peças teatrais, livros e roteiros de filmes. Foto de 2023.

Roteiro preferido dos clientes



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

O dono da agência, no entanto, achou o gráfico pouco representativo e, em parceria com um publicitário, fez algumas modificações que resultaram na seguinte imagem para a campanha da agência de viagens:

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) De acordo com os dados apresentados, qual é o roteiro preferido dos clientes?

O roteiro "grandes cidades".

b) Qual é a vantagem de utilizar um gráfico para representar os dados?

c) O que você achou do gráfico após as modificações feitas pelo dono da agência? Há alguma indicação ou informação errada?

d) Você já se deparou com gráficos com imprecisões ou informações erradas na mídia? Como você pode averiguar a integridade dessas informações?

b) Resposta esperada: É uma maneira de representar visualmente um conjunto de dados, que permite perceber rapidamente qual categoria obteve mais votos e a que obteve menos votos.

c) Resposta pessoal. A resposta esperada encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

d) Resposta pessoal. A resposta esperada encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

População e amostra

Nas situações-problema anteriores, podemos notar que o uso da pesquisa estatística é bastante comum nas várias atividades humanas.

As pesquisas fornecem as informações necessárias para embasar as tomadas de decisão. Por exemplo, com os dados de uma pesquisa, os governantes podem identificar áreas prioritárias de investimento em educação, transporte, saúde, segurança pública, habitação, assistência social, acessibilidade, entre outros importantes setores. Desse modo, o objetivo de uma pesquisa é extrair informações de dados coletados para obter uma melhor compreensão das situações que eles retratam.

ABCDstock/Adobe Stock

Tendo em mãos dados de uma pesquisa, os governantes podem identificar áreas prioritárias de investimento, como a rede elétrica.

Mas não são apenas os governantes e o setor público que realizam pesquisas. Para identificar, por exemplo, qual é o melhor produto a ser lançado no mercado e qual é o preço ideal a ser cobrado, uma empresa pode, e deve, realizar previamente uma pesquisa envolvendo os clientes ou possíveis compradores.

A realização de uma pesquisa envolve algumas etapas, como a escolha da amostra, a coleta e a organização dos dados, a apresentação desses dados (em tabelas, gráficos, etc.) e a interpretação dos resultados.

O ramo da Matemática que trata desses assuntos é a **Estatística**. Nesta Unidade, vamos estudar noções de Estatística.

Ao realizar uma pesquisa estatística, chamamos de **população** ou **universo estatístico** o conjunto de elementos que apresenta a característica em que temos interesse. Quando consultamos todos os elementos do universo estatístico (população), consideramos que estamos realizando uma **pesquisa censitária**.

Fique atento

Todo elemento da população é chamado de **indivíduo**.

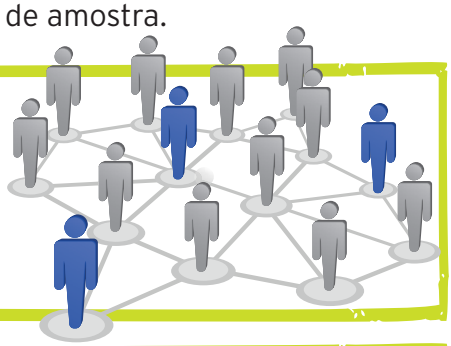
Mas, quando realizamos um estudo estatístico, nem sempre é possível consultar toda a população com a qual pretendemos realizar o estudo. Quando isso ocorre, utilizamos uma **amostra** da população para obter os dados a serem investigados, ou seja, um subconjunto da população que nos possibilita obter um resultado que retrate do modo mais próximo possível a realidade. Nesse caso, a pesquisa será uma **pesquisa amostral**.

Para assegurar que as conclusões obtidas com os resultados verificados para a amostra de determinada população não sejam equivocadas, é preciso garantir uma amostra que tenha as mesmas características da população.

A seleção de uma amostra pode ser feita de diversas maneiras. Vamos analisar a seguir alguns tipos de amostra.

Amostra aleatória simples

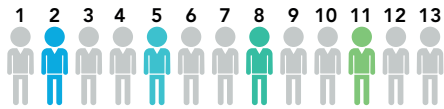
Quando os elementos da amostra são escolhidos aleatoriamente, ou seja, ao acaso. Todos os elementos têm a mesma probabilidade de serem escolhidos.



Freepik/Freepik

Amostra sistemática

Quando os elementos da população estão ordenados, de modo que possam ser identificados pela posição. O primeiro elemento da amostra é escolhido de modo aleatório e os demais são selecionados a partir de um intervalo regular.



Freepik/Freepik

Amostra estratificada

Quando a população é dividida em subgrupos, chamados de estratos. Esses subgrupos são identificados por alguma característica similar e os indivíduos são escolhidos aleatoriamente de cada estrato. Para evitar erros na pesquisa, é comum que seja sorteada, dentro de cada estrato, uma quantidade de indivíduos proporcional ao total de elementos que pertencem a ele.

YURII/Adobe Stock

Não escreva no livro

Reflita

Em qual situação o número de elementos da amostra é igual ao número de elementos do universo estatístico?

Quando todos os elementos do universo são pesquisados, isto é, quando a pesquisa é censitária.

Variável

As características que se deseja investigar em um estudo estatístico são chamadas de **variáveis**. São exemplos de variáveis: idade, medida de altura, quantidade de irmãos, estado civil, tipo de sabonete, etc.

Para a variável tipo de sabonete, a escolha pode ser, por exemplo, líquido ou em barra. Dizemos que esses são **valores da variável** tipo de sabonete.

As variáveis podem ser classificadas em **qualitativas** ou **quantitativas**.

- **Variáveis qualitativas**: quando os possíveis valores representam uma qualidade ou um atributo dos indivíduos pesquisados. Por exemplo: estado civil, esporte preferido e tipo de sabonete.

  As variáveis qualitativas podem ser **ordinais**, quando é possível ordenar os valores, ou **nominais**, quando isso não ocorre.

- **Variáveis quantitativas**: quando os possíveis valores são números. Por exemplo: medida de altura, idade e quantidade de irmãos.

  As variáveis quantitativas são **discretas** quando os valores formam um conjunto em que é possível contar os elementos utilizando números naturais; caso contrário, elas são **contínuas**.

Fique atento

Para as atividades desta Unidade, caso você e o professor julguem necessário, faça uso de tecnologias digitais, como planilhas eletrônicas e calculadoras.

2. A população é composta de 200 pessoas com idade entre 18 e 30 anos e de 300 pessoas com idade entre 31 e 50 anos; portanto, 500 pessoas. Já a amostra é composta de 10% das pessoas que compõem a população; portanto, 50 pessoas.

4. O questionário apresenta 3 variáveis quantitativas (perguntas 3, 5 e 7). Sendo assim: $3 \cdot 534 = 1\,602$. Logo, 1 602 respostas.

Atividades

Não escreva no livro

1. Classifique as variáveis em qualitativas nominais, qualitativas ordinais, quantitativas discretas ou quantitativas contínuas.

a) Número de filhos. Quantitativa discreta.

b) Renda mensal. Quantitativa contínua.

c) Tipo de combustível. Qualitativa nominal.

d) Quantidade de cômodos em uma residência. Quantitativa discreta.

e) Grau de parentesco. Qualitativa nominal.

f) Grau de escolaridade. Qualitativa ordinal.

Texto para a próxima atividade.

Na produção de uma vacina, depois que toda a etapa laboratorial é realizada, é necessário testá-la em um pequeno grupo de pessoas voluntárias buscando-se avaliar a eficácia e os efeitos colaterais para, somente então, liberar o uso a toda a população.

2. Suponha que 10% das pessoas de um grupo de pacientes composto de 200 pessoas com idade entre 18 e 30 anos e de 300 pessoas com idade entre 31 e 50 anos se voluntariaram para o teste de uma vacina. Para esse teste, determine a quantidade de pessoas da população e da amostra.

3. Segundo um levantamento realizado pela Associação Nacional dos Registradores de Pessoas Naturais, nos dados dos cartórios de registro civil os nomes de bebês com maior número de registros em 2023 foram Gael, com 22 478 registros, Helena, com 23 132, e Miguel, com 25 216. Nesse caso, qual foi a variável investigada? Ela pode ser classificada em qualitativa ou quantitativa? Nome; qualitativa.

Fonte dos dados: ARPEN BRASIL. Cartórios do Brasil divulgam os nomes mais registrados em 2023. *Arpen Brasil*, [*s. l.*], 19 dez. 2023. Disponível em: https://tedit.net/87ips3/. Acesso em: 25 jul. 2024.

Texto para a próxima atividade.

De acordo com o Ministério da Infraestrutura, as rodovias brasileiras são a principal forma de deslocamento de pessoas e cargas, por esse motivo, conhecer o perfil de quem viaja por elas é importante.

Em uma rodoviária, 2 funcionários ficaram responsáveis por realizar uma pesquisa para entender melhor o perfil de quem utiliza ônibus para viajar. Analise o questionário proposto.

1. Qual é o seu estado civil?
2. Você possui veículo próprio?
3. Quantas vezes por mês você utiliza este terminal rodoviário?
4. Qual é a principal razão desta viagem: lazer, trabalho ou visita à família?
5. Qual é, aproximadamente, o tempo de viagem até o destino final?
6. Em relação aos serviços deste terminal, você está: satisfeito, parcialmente satisfeito ou insatisfeito?
7. Qual é a quantia mensal que você costuma gastar neste terminal, incluindo passagem, alimentação, entretenimento, etc.?

4. Depois de entrevistar 534 pessoas, o trabalho foi dividido da seguinte maneira: um funcionário analisaria as variáveis qualitativas, e o outro, as variáveis quantitativas. Dessa maneira, o funcionário responsável pelas variáveis quantitativas analisou quantas respostas?

5. No dia 24 de fevereiro de 2023, foram divulgados dados que alertaram os brasileiros preocupados com o meio ambiente. A tabela a seguir apresenta esses dados.

Desmatamento na Amazônia Legal (2016 a 2023)

Fevereiro/ano	Medida de área devastada (em km²)
2019	138,08
2020	185,73
2021	122,8
2022	198,67
2023*	208,75

* Faltando 11 dias para completar o mês.
Fonte dos dados: BRONZE, Giovanna. Mesmo antes do fim, fevereiro de 2023 tem recorde de desmatamento na Amazônia Legal. *CNN Brasil*, São Paulo, 25 fev. 2023. Disponível em: https://tedit.net/j5bilf. Acesso em: 25 jul. 2024.

a) Como podemos classificar a variável área devastada? Variável quantitativa contínua.

b) Uma pessoa, ao ler a notícia, divulgou em uma rede social que só no mês de fevereiro de 2023 foram registrados 208,75 km² de área devastada na Amazônia Legal. Qual foi o erro que essa pessoa cometeu? Divulgar que o registro da área devastada foi no mês de fevereiro considerando o mês completo, não especificando que o registro era apenas entre 1º e 17 de fevereiro.

Pesquisa estatística

Podcast Transcrição de áudio

A Estatística é usada em diversas áreas, como no setor financeiro, na Medicina, na indústria, no comércio, nos estudos climáticos, na saúde pública, nas políticas públicas, nas eleições, entre outras. Usamos a Estatística para analisar fenômenos presentes ou passados, mas ela também serve para prever a probabilidade de eventos futuros.

Qual é o passo a passo para realizar uma pesquisa estatística? Acompanhe as etapas descritas a seguir.

Bruna Ishihara/Arquivo da editora

Frequência absoluta e frequência relativa

Uma professora que dá aulas particulares de inglês fez uma pesquisa sobre a satisfação dos estudantes em relação às aulas e obteve as seguintes respostas:

Gabriel – satisfeito
Felipe – parcialmente satisfeito
Laura – insatisfeito
Isabel – parcialmente satisfeito
Cláudio – insatisfeito

Ana – satisfeito
Carlos – satisfeito
Letícia – parcialmente satisfeito
Giovana – satisfeito
Miguel – satisfeito

Ilustrações: munnacreativehub/Shutterstock

A quantidade de vezes que cada valor da variável é citado na pesquisa representa a **frequência absoluta** desse valor.

No exemplo, a variável é satisfação, e a frequência absoluta de cada um dos valores é: satisfeito, 5; parcialmente satisfeito, 3; insatisfeito, 2.

Já a **frequência relativa** representa a frequência absoluta em relação ao total de citações. Para o exemplo, temos as seguintes frequências relativas:

- satisfeito: $\frac{5}{10}$ ou 0,5 ou 50%;
- parcialmente satisfeito: $\frac{3}{10}$ ou 0,3 ou 30%;
- insatisfeito: $\frac{2}{10}$ ou 0,2 ou 20%.

Tabela de frequências

A tabela que mostra a variável, os valores que ela assume e a respectiva frequência absoluta (FA) e frequência relativa (FR) é chamada tabela de frequências.

Analise a seguir a tabela de frequências do exemplo anterior.

Satisfação dos estudantes de inglês

Satisfação	FA	FR (em %)
Satisfeito	5	50
Parcialmente satisfeito	3	30
Insatisfeito	2	20
Total	**10**	**100**

Dados elaborados para fins didáticos.

Fique atento

A soma de todas as frequências relativas de uma amostra é 100% se expressa em porcentagem, ou 1 se expressa na forma fracionária ou decimal.

A tabela de frequências do exemplo anterior mostra todos os valores que a variável pode assumir. Mas, em algumas situações, quando a variável é quantitativa e aparecem muitos valores diferentes, torna-se inviável colocar uma linha para cada valor na tabela de frequências. Nesses casos, agrupamos os valores em **classes** (ou **intervalos**).

Para isso, determinamos a **amplitude total**, que é a diferença entre o maior e o menor valor da variável. Depois, escolhemos a quantidade de classes para distribuir os valores da variável. Por fim, considerando um número conveniente que seja maior do que a amplitude total ou igual a ela e seja divisível pelo número de classes, determinamos a **amplitude da classe** de cada classe.

Por exemplo, suponha que, em uma pesquisa realizada com um grupo de estudantes, os valores assumidos pela variável medida de massa variem de 48,5 a 82,9 kg. Foi pesquisada a medida de massa de 50 estudantes; destes, 8 tinham massa de 54 kg; 5 tinham massa de 56 kg; 6, massa de 61 kg; 12, massa de 67 kg; 5, massa de 70 kg, e 5, massa de 73,5 kg, enquanto 9 apresentaram massa de 80 kg.

Assim, a amplitude total é dada por 82,9 kg − 48,5 kg = 34,4 kg. Esses valores serão agrupados em 5 classes. Escolhendo o número 35 (pois $35 \geqslant 34{,}4$) para determinar a amplitude da classe, fazemos:

$$35 \div 5 = 7$$

Sendo assim, se iniciarmos a 1ª classe no valor mínimo do conjunto de dados, teremos:

- A 1ª classe começa em 48,5 kg e vai até 55,5 kg (pois 48,5 + 7 = = 55,5).
- A 2ª classe começa em 55,5 kg e vai até 62,5 kg (pois 55,5 + 7 = = 62,5), e assim por diante, até a 5ª e última classe.

Com essas informações, podemos construir a tabela de frequências.

Medida de massa de um grupo de estudantes

Medida de massa (em kg)	FA	FR (em %)
48,5 ⊢ 55,5	8	16
55,5 ⊢ 62,5	11	22
62,5 ⊢ 69,5	12	24
69,5 ⊢ 76,5	10	20
76,5 ⊢ 83,5	9	18
Total	**50**	**100**

Dados elaborados para fins didáticos.

O símbolo ⊢ é utilizado para representar as classes de valores. Ele indica que apenas o limite inferior está incluído na classe representada. Por exemplo, a medida de massa 69,5 kg não está incluída em 62,5 ⊢ 69,5, mas está incluída em 69,5 ⊢ 76,5. Dessa maneira, um mesmo valor não é incluído em 2 classes diferentes.

Reflita: Sim. Se iniciássemos a 1ª classe em 48 kg, a 7ª classe conteria valores até 83 kg (pois 48 + 35 = = 83); portanto, como a maior medida de massa observada é igual a 82,9 kg, todos os valores estariam contemplados pelos intervalos considerados. No entanto, não seria possível iniciar em 47 kg, pois 47 + + 35 = 82 e 82 < 82,9.

Não escreva no livro

Reflita

A 1ª classe poderia iniciar em 48 kg? E em 47 kg?

Fique atento

O limite superior de uma classe deve ser igual ao limite inferior da classe seguinte.

7. b) Medida de altura: quantitativa contínua; cor dos olhos: qualitativa nominal; cor do cabelo: qualitativa nominal; tipo sanguíneo: qualitativa nominal.

Atividades

Não escreva no livro

6. A tabela a seguir é resultante de uma pesquisa. Copie-a no caderno e complete-a com os dados que estão faltando.

Gênero musical mais procurado em um serviço de *streaming*

Gênero musical	FA	FR
Sertanejo	15	0,30
MPB	12	0,24
Rock	16	0,32
Clássico	7	0,14
Total	**50**	**1,00**

Dados elaborados para fins didáticos.

Texto para a próxima atividade.

O termo **fenótipo** (do grego *pheno*, "evidente", "brilhante", e *typos*, "característico") significa o conjunto de características visíveis ou detectáveis de um indivíduo, sejam elas físicas, morfológicas ou fisiológicas.

Para um trabalho de Ciências da Natureza, um grupo de estudantes realizou uma pesquisa com 50 dos 200 estudantes do Ensino Médio de certa escola. Analise a seguir os resultados dessa pesquisa.

Medida de altura dos estudantes

Medida de altura (em m)	Quantidade de estudantes
1,56 ⊢ 1,62	8
1,62 ⊢ 1,68	20
1,68 ⊢ 1,74	12
1,74 ⊢ 1,80	10

Dados elaborados para fins didáticos.

Cor dos olhos dos estudantes

Cor dos olhos	Azul	Verde	Castanho	Preto
Quantidade de estudantes	4	6	30	10

Dados elaborados para fins didáticos.

Cor do cabelo dos estudantes

Cor do cabelo	Castanho	Loiro	Preto	Ruivo
Quantidade de estudantes	20	16	12	2

Dados elaborados para fins didáticos.

Tipo sanguíneo dos estudantes

Tipo sanguíneo	A	B	AB	O
Quantidade de estudantes	10	18	8	14

Dados elaborados para fins didáticos.

7. No caderno, faça o que se pede em cada item.

a) Quais foram as variáveis investigadas nessa pesquisa? Medida de altura, cor dos olhos, cor do cabelo e tipo sanguíneo.

b) Classifique cada uma das variáveis.

c) Os 50 estudantes consultados representam uma população ou uma amostra? Justifique sua resposta. Amostra, pois a população é composta de 200 estudantes.

d) Qual é a frequência absoluta do tipo sanguíneo O? E a frequência relativa?

e) Qual é a frequência absoluta da cor de cabelo ruivo? E a frequência relativa?

f) Qual é a amplitude da classe de cada intervalo da tabela de frequências da variável medida de altura? 1,62 − 1,56 = 0,06; logo, 0,06 m.

g) Qual é a frequência relativa correspondente à cor dos olhos mais frequente na amostra? E a correspondente ao tipo sanguíneo menos frequente? $\frac{30}{50} = 0,6 = 60\%$; $\frac{8}{50} = 0,16 = 16\%$.

8. Na tabela a seguir, estão representados alguns resultados do levantamento feito sobre o salário dos funcionários de uma empresa.

Salário dos funcionários de uma empresa

Salário (em R$)	FA	FR (em %)
A ⊢ *B*	*I*	10
C ⊢ *D*	15	*L*
E ⊢ *F*	30	50
G ⊢ *H*	6	*M*
1960 ⊢ 2050	*J*	*N*
Total	***K***	*O*

Dados elaborados para fins didáticos.

7. d) FA = 14; FR = $\frac{14}{50} = 0,28 = 28\%$. **e)** FA = 2; FR = $\frac{2}{50} = 0,04 = 4\%$.

a) Quais são os valores de A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N e O?

b) Qual é a amplitude total dos dados dessa amostra?
Não é possível responder, pois os dados estão organizados em classes.

9. Entre a Proclamação da República, em 1889, e o ano de 1964, o Brasil teve mais de 20 presidentes da República – desde o alagoano Manuel Deodoro da Fonseca até o gaúcho João Belchior Marques Goulart. Analise o quadro a seguir que mostra o nome e o estado de origem de cada um dos presidentes da República desse período.

Nome	Estado de origem
Deodoro da Fonseca	Alagoas
Floriano Peixoto	Alagoas
Prudente de Moraes	São Paulo
Campos Sales	São Paulo
Rodrigues Alves	São Paulo
Afonso Pena	Minas Gerais
Nilo Peçanha	Rio de Janeiro
Hermes da Fonseca	Rio Grande do Sul
Venceslau Braz	Minas Gerais
Delfim Moreira	Minas Gerais
Epitácio Pessoa	Paraíba
Artur Bernardes	Minas Gerais
Washington Luís	Rio de Janeiro
Getúlio Vargas	Rio Grande do Sul
Eurico Dutra	Mato Grosso
Café Filho	Rio Grande do Norte
Carlos Luz	Minas Gerais
Nereu Ramos	Santa Catarina
Juscelino Kubitscheck	Minas Gerais
Jânio Quadros	Mato Grosso do Sul
Ranieri Mazzilli	São Paulo
João Goulart	Rio Grande do Sul

a) Usando os dados apresentados no quadro, elabore, no caderno, uma tabela de frequências para o estado de origem dos presidentes. Indique as frequências absoluta e relativa para cada estado. A tabela encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) De acordo com os dados da tabela que você construiu no item anterior, qual é o estado de origem da maioria dos presidentes desse período? Minas Gerais.

8. a) Da tabela, temos que $H = 1\,960$ e, como $2\,050 - 1\,960 = 90$, então a amplitude de cada classe é 90. Assim:
$G = 1\,960 - 90 = 1\,870$; logo, $F = 1\,870$.
$E = 1\,870 - 90 = 1\,780$; logo, $D = 1\,780$.
$C = 1\,780 - 90 = 1\,690$; logo, $B = 1\,690$.
$A = 1\,690 - 90 = 1\,600$
Se 50% equivalem a 30, então 10% equivalem a 6 e, assim, obtemos os dados que faltam: $I = 6$; $L = 25$; $M = 10$ e $O = 100$.
Temos:
$10 + L + 50 + M + N = 100 \Rightarrow N = 5$.
Logo, $J = 3$ e $K = 60$.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade.

gonzagon/Shutterstock

Exercitar o que se aprende pode trazer diversos benefícios. Estudos mostram que a colaboração em grupos de estudo pode melhorar a compreensão do conteúdo, aumentar a motivação e reduzir o estresse.

10. Para um trabalho escolar, Pedro entrevistou 60 estudantes da escola onde estuda para descobrir quantas horas por dia, fora da escola, eles costumam estudar.

Analise na tabela a seguir alguns dos dados que Pedro obteve.

Tempo dedicado aos estudos

Tempo (em min)	FA	FR (em %)
60 ⊢ 120	24	40
120 ⊢ 180	15	y
180 ⊢ 240	12	20
240 ⊢ 300	x	z
Total	**60**	**100**

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Qual é o valor de x, y e z?

b) Qual é a porcentagem dos entrevistados que estudam menos de 3 horas por dia?

c) Qual é a porcentagem dos entrevistados que estudam 4 horas ou mais por dia?

10. a) Da tabela, temos:
$x = 60 - (24 + 15 + 12) =$
$= 60 - 51 = 9$
$y = \frac{15}{60} = 0{,}25 = 25\%$
$z = \frac{9}{60} = 0{,}15 = 15\%$
b) Como 1 h = 60 min, temos 3 h = 180 min. Assim, a porcentagem dos entrevistados que estudam menos de 3 h é dada por: 40% + 25% = 65%.
c) Os entrevistados que estudam 4 horas ou mais estão compreendidos no intervalo de 240 min a 300 min. Logo, a porcentagem é 15%.

Texto para a próxima atividade.

O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) foi criado em 2007 e reúne, em um só indicador, os resultados de dois conceitos igualmente importantes para a qualidade da educação: o fluxo escolar e as médias de desempenho nas avaliações. O Ideb é calculado a partir dos dados sobre aprovação escolar, obtidos no Censo Escolar, e das médias de desempenho no Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb).

[...]

O índice também é importante condutor de política pública em prol da qualidade da educação. É a ferramenta para acompanhamento das metas de qualidade para a educação básica, que tem estabelecido, como meta para 2022, alcançar média 6 – valor que corresponde a um sistema educacional de qualidade comparável ao dos países desenvolvidos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Índice de Desenvolvimento da Educação Básica*. Brasília, DF: Ministério da Educação. Disponível em: https://tedit.net/zrkfio. Acesso em: 25 jul. 2024.

11. No caderno, faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Pesquise o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica mais atual de cada estado do Brasil e faça uma tabela de frequências para apresentar os dados obtidos. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

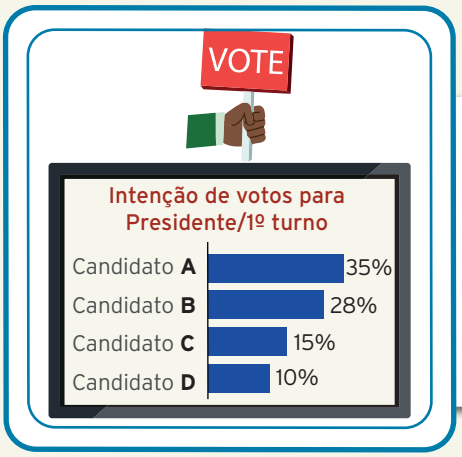
b) De acordo com os dados que você obteve, quantos estados, aproximadamente, obtiveram um índice próximo da meta estabelecida para 2022? A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Professor, ressalte para os estudantes a importância de usar fontes confiáveis para realizar a pesquisa. Eles podem consultar, por exemplo, o *site* do IBGE Cidades ou o do Ideb, disponíveis em: https://tedit.net/qvsyyy; https://tedit.net/uhduf5 (acesso em: 25 jul. 2024).

Conexões

Pesquisas de intenção de voto

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.



1

Durante o período eleitoral, os noticiários de rádio e televisão costumam divulgar afirmações como esta:

"Foram ouvidos 2 401 eleitores, a margem de erro é de 2 pontos percentuais para mais ou para menos e o nível de confiança da pesquisa é 95%".

Mas o que isso significa? Ouvindo apenas 2 401 eleitores, é possível saber aproximadamente o percentual da intenção de votos da população do país em relação a determinado candidato?

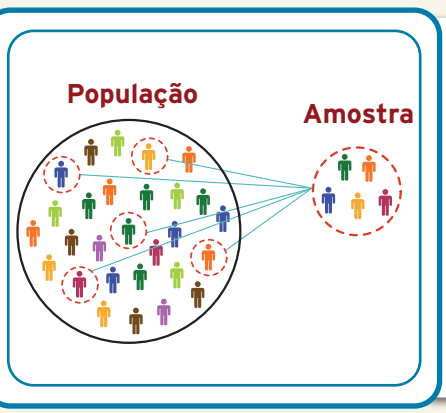
2

Quando não é possível entrevistar toda a população, seleciona-se uma amostra dela e, de acordo com os resultados da pesquisa realizada com essa amostra, são feitas inferências para a população.

Para realizar uma pesquisa, primeiro é preciso definir o público-alvo. No caso de uma pesquisa eleitoral para presidente da República no Brasil, por exemplo, o público-alvo seria os 155 milhões de eleitores brasileiros (dado divulgado em 2022 pelo Tribunal Superior Eleitoral (TSE). Depois, é preciso elaborar um questionário com perguntas que possibilitem uma única interpretação e que não induzam o entrevistado a determinada resposta, pois isso poderia alterar o resultado, comprometendo a credibilidade da pesquisa.

Fonte dos dados: TSE. Brasil tem mais de 155 milhões de eleitoras e eleitores aptos a votar em 2024. Disponível em: https://tedit.net/woggbe. Acesso em: 13 ago. 2024.

Bruna Ishihara/Arquivo da editora



3

Como seria inviável entrevistar os mais de 150 milhões de eleitores brasileiros, determina-se a quantidade de pessoas que serão entrevistadas estabelecendo o número de elementos da amostra, geralmente uma amostra estratificada.

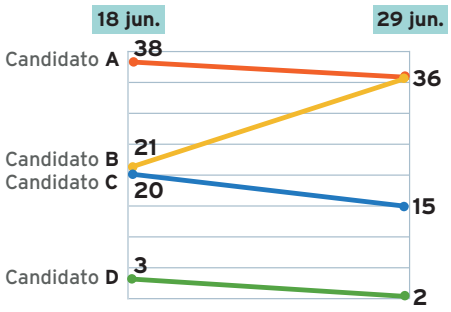
O número de eleitores da amostra é definido levando em conta os dados demográficos do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), podendo também ser considerados outros fatores, como gênero, escolaridade, renda e idade. O cálculo é feito utilizando-se ferramentas matemáticas e estatísticas avançadas, e é válido para grandes populações (a quantidade de eleitores brasileiros, por exemplo), associado à margem de erro que se pretende obter na pesquisa.

Bruna Ishihara/Arquivo da editora

4

Todas as pesquisas amostrais têm margem de erro, pois se trata de uma amostra da população. Assim, a margem de erro de 2 pontos percentuais, por exemplo, para mais ou para menos, indica que, se a pesquisa afirmar que um candidato tem 36% de intenção de votos, então esse percentual pode variar de 34% a 38%. Já o nível de confiança de 95% indica que, se a pesquisa for repetida 100 vezes com os mesmos critérios, em 95 delas os resultados estarão dentro da variação de 2 pontos percentuais para mais ou para menos.

Intenção de voto para presidente/1º turno



Margem de erro: 2 pontos para mais ou para menos.

Dados elaborados para fins didáticos.

5

Por fim, define-se o perfil dos entrevistados, que são escolhidos utilizando-se um banco de dados, fornecidos pelo IBGE (principal fonte utilizada). Assim, contando com o trabalho minucioso realizado por profissionais da área de Estatística, é possível prever a intenção de votos de mais de 150 milhões de eleitores consultando apenas 2 401 deles.

Conecte com o texto

1. O que significa dizer que o nível de confiança de uma pesquisa é de 99%?

1. Exemplo de resposta: Significa que, se a pesquisa for realizada 100 vezes, obedecendo aos mesmos critérios, o resultado estará dentro da margem de erro em 99 vezes.

2. Se uma população é composta de 20 000 eleitores, para que o nível de confiança seja de 100%, quantos eleitores devem ser consultados?

Toda a população, isto é, os 20 000 eleitores.

3. A amostra de uma pesquisa para a eleição do prefeito de um município é 1 068 eleitores. Nesse município, para a qual o voto é obrigatório por lei, 40% da população é composta de pessoas com idade entre 45 e 70 anos e deseja-se que a quantidade de pessoas de 18 a 44 anos da amostra seja proporcional à quantidade de pessoas nessa mesma faixa etária da população. Quantas pessoas de 18 a 44 anos, aproximadamente, devem fazer parte dessa amostra?

60% de 1 068: 0,6 · 1 068 = 640,8
Portanto, aproximadamente 641 pessoas com idade de 18 a 44 anos.

Pesquise e debata

4. Em sua opinião, por que quanto menor a margem de erro e maior o nível de confiança, maior é a quantidade de pessoas que precisam ser entrevistadas?

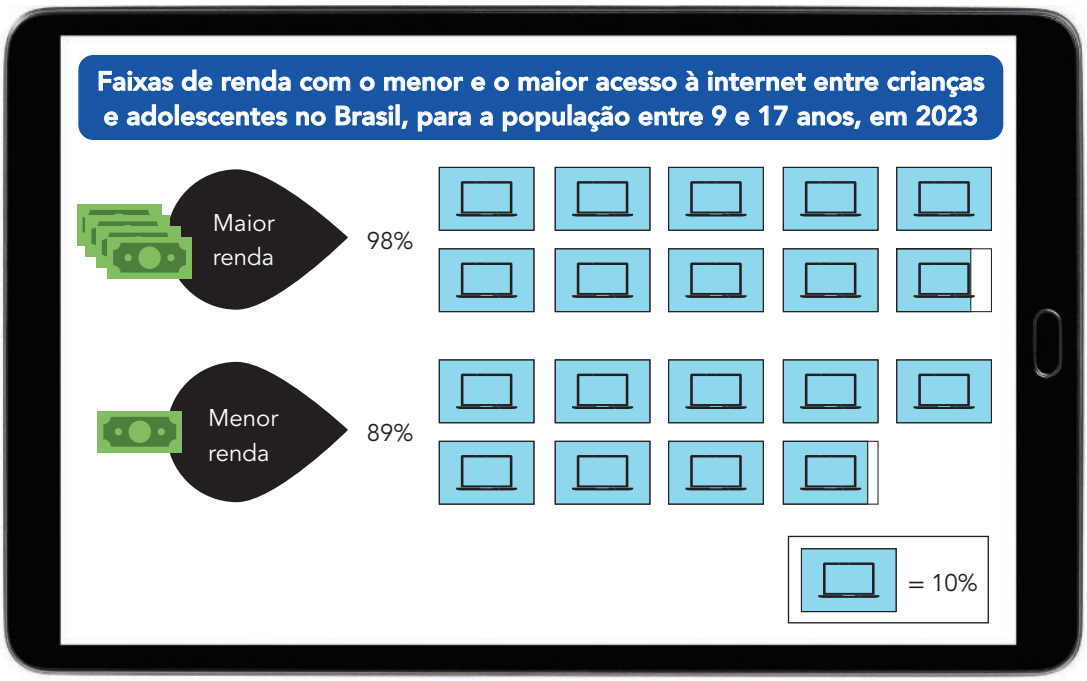
Exemplo de resposta: Quanto menor a margem de erro e maior o nível de confiança, mais preciso será o resultado da pesquisa. Sendo assim, é importante entrevistar mais pessoas do que seria necessário, por exemplo, no caso de uma pesquisa com margem de erro maior e nível de confiança menor.

Fique atento

No Brasil, o voto é obrigatório para cidadãos legalmente capazes que tenham entre 18 e 70 anos de idade. Para pessoas analfabetas, maiores de 70 anos, ou que tenham entre 16 e 18 anos, o voto é facultativo.

Representações gráficas

A representação gráfica fornece uma visualização mais rápida dos dados pesquisados quando comparamos com a observação direta dos dados brutos. Por isso, é comum os meios de comunicação apresentarem informações estatísticas por meio de gráficos. Acompanhe a seguir um exemplo.



Quang Vinh Tran/Shutterstock; rawpixel.com/Freepik; Yeti studio/Shutterstock

Fonte dos dados: ACESSO: conectividade & dinâmicas de uso. *TIC kids online Brasil*, São Paulo, 25 out. 2023. Disponível em: https://tedit.net/l4k0rj. Acesso em: 25 jul. 2024.

Gráfico de segmentos

A tabela a seguir mostra a venda de celulares de uma empresa de tecnologia no 2º semestre de determinado ano.

Venda de celulares no 2º semestre

Mês	Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Quantidade de celulares vendidos	3010	2500	3205	4680	4680	5308

Dados elaborados para fins didáticos.

Essa situação estabelece uma correspondência que pode ser expressa por pares ordenados: (Julho, 3010), (Agosto, 2500), e assim por diante. Representando cada um dos pontos associados a esses pares ordenados e os segmentos de reta consecutivos que têm extremidades nesses pontos, obtemos um **gráfico de segmentos**.

Esse tipo de gráfico é utilizado principalmente para mostrar a evolução das frequências dos valores de uma variável durante certo período.

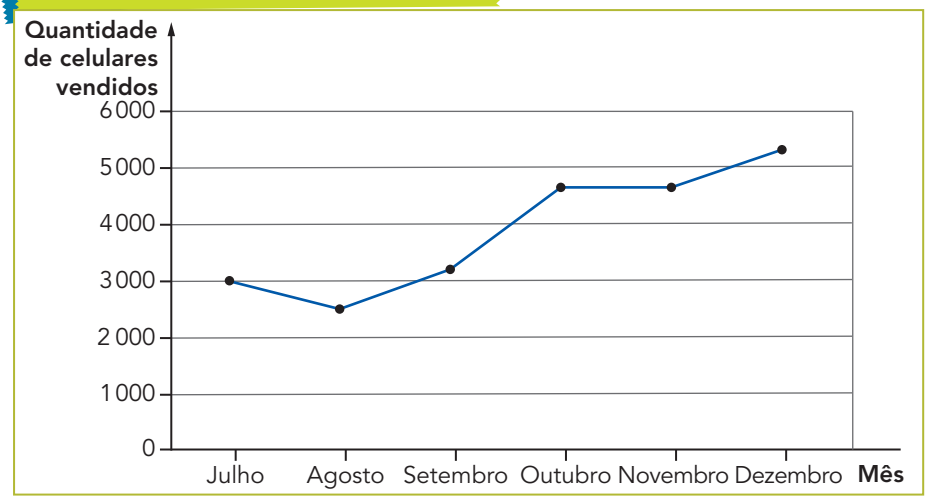
Fique atento

O gráfico de segmentos é chamado também de **gráfico de linha**.

A posição de cada segmento de reta indica crescimento, decrescimento ou estabilidade.

Professor, explique aos estudantes que as escalas escolhidas para os eixos coordenados variam de acordo com a necessidade de representação.

Venda de celulares no 2º semestre



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Pelo gráfico anterior, podemos perceber que:

- de julho a agosto as vendas caíram;
- de outubro a novembro as vendas permaneceram estáveis;
- o crescimento de setembro a outubro foi maior do que o de novembro a dezembro;
- o mês com maior quantidade de vendas do período foi dezembro;
- no mês de setembro foram vendidos pouco mais de 3000 celulares.

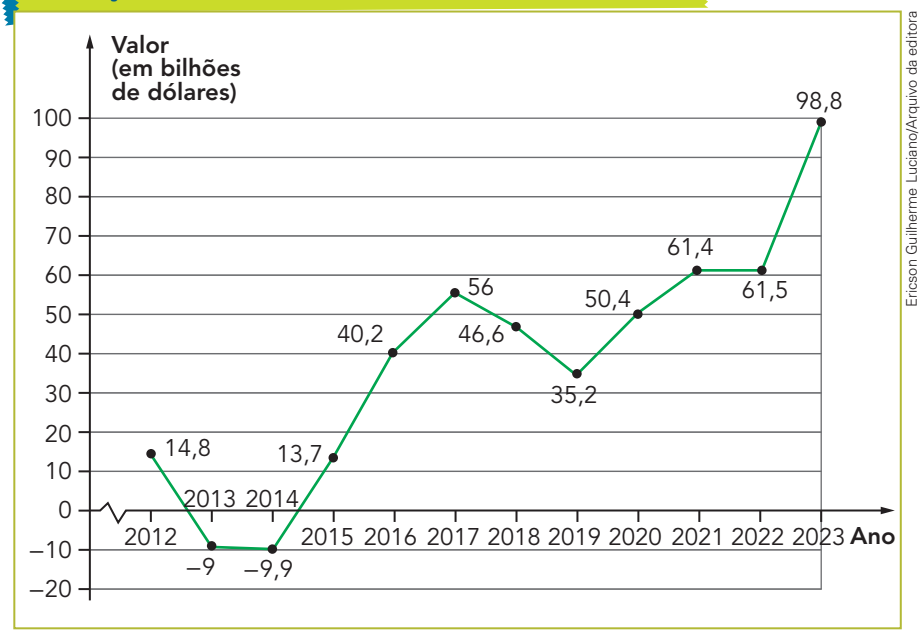
Fique atento

Em casos em que se deseja destacar parte do gráfico, pode-se representar um trecho de modo não proporcional. No gráfico a seguir há um trecho omitido no eixo horizontal indicado pelo sinal ⁓.

Analise outro exemplo de gráfico de segmentos.

O gráfico apresenta a evolução do saldo da balança comercial do Brasil no período de 2012 a 2023. Saldo da balança comercial é um termo econômico que indica a diferença entre o que é exportado e o que é importado. Quando o saldo é positivo, o país exportou mais do que importou. Caso ocorra o inverso, dizemos que o saldo é negativo.

Evolução do saldo comercial do Brasil (2012-2023)



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: RESULTADOS do Comércio Exterior Brasileiro – Dados Consolidados. Portal *gov.br*, 2023. Disponível em: https://tedit.net/bgavap; COMÉRCIO exterior brasileiro bate recordes e fecha 2023 com saldo de US$ 98,8 bi. Portal *gov.br*, 2024. Disponível em: https://tedit.net/epskrz. Acesso em: 26 jul. 2024.

12. b) Crescimento: 2014 a 2017, 2019 a 2023. Decrescimento: 2012 a 2014, 2017 a 2019.
d) Em 2014, o saldo era de –9,9 bilhões de dólares e, em 2015, 13,7 bilhões de dólares. Assim, o aumento foi de 23,6 bilhões de dólares.
e) Exemplo de resposta: Se o saldo comercial de um país piora, pode haver uma maior dependência de importações, o que pode elevar os preços dos produtos importados. Isso pode aumentar o custo de vida e afetar o orçamento familiar.

Atividades

Não escreva no livro

12. Utilize o gráfico "Evolução do saldo comercial do Brasil (2012-2023)", que apresenta a evolução do saldo da balança comercial brasileira.

a) Em qual ano o saldo comercial foi o maior? 2023

b) Quais foram os períodos de crescimento e de decrescimento do saldo comercial?

c) Em quais dos anos apresentados no gráfico o Brasil importou mais do que exportou? Em 2013 e 2014.

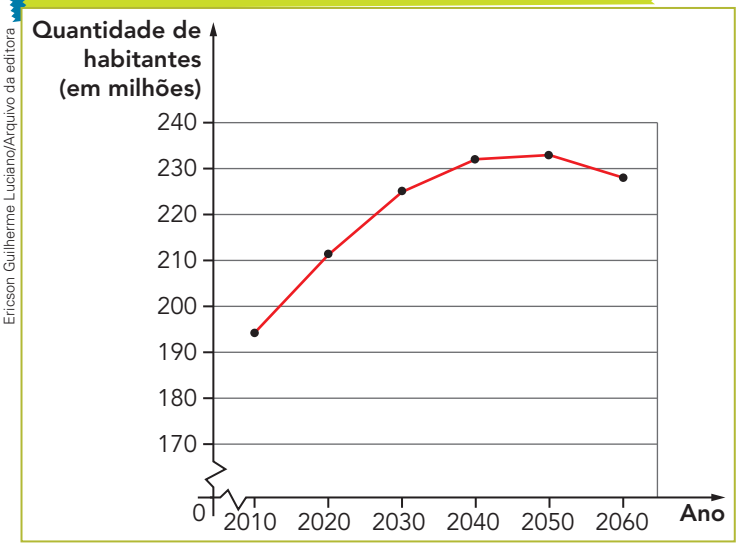
d) Em quantos bilhões de dólares cresceu o saldo de 2014 para 2015?

e) Explique como mudanças no saldo comercial de um país podem afetar as finanças pessoais. Dê exemplos de como uma reserva financeira pode ajudar a lidar com essas situações.

13. Analise o gráfico que apresenta a projeção da população brasileira de 2010 a 2060.

Professor, a atividade **13** favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação Financeira* e *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso*.

Projeção da população brasileira (2010-2060)



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Em qual ano a projeção corresponde a aproximadamente 211 milhões de habitantes? 2020

b) De 2050 a 2060, a projeção da população apresenta crescimento, decrescimento ou estabilidade? Apresenta decrescimento.

c) Em sua opinião, quais fatores podem ter contribuído para o comportamento analisado no item anterior? Exemplo de resposta: Taxas de fecundidade ou de natalidade menores, taxa de mortalidade maior, entre outros fatores.

d) De acordo com o Censo Demográfico de 2022, do IBGE, a população idosa brasileira aumentou 39,8% em relação aos dados apresentados pelo Censo de 2010. Suponha que o governo planeje economizar uma quantia fixa por ano a fim de preparar-se para os custos associados ao envelhecimento da população. Se o governo começa a economizar em 2035 e deseja ter 1 trilhão de reais acumulados até 2060, quanto precisa economizar anualmente, sem considerar juros e inflação? 40 bilhões de reais.

Fonte dos dados: BRASIL. CRESCIMENTO da população idosa traz desafios para a garantia de direitos. Portal *gov.br*, 5 out. 2023. Disponível em: https://tedit.net/9rj485. Acesso em: 13 ago. 2024.

e) Como o aumento da população idosa pode impactar os sistemas de aposentadoria, e como os órgãos governamentais podem utilizar a Estatística para planejar melhor os recursos necessários para lidar com esses impactos? Considere também como esses planejamentos podem promover o respeito e a valorização do idoso na sociedade. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Gráfico de barras

Ao final de um curso de empreendedorismo, os participantes foram convidados a avaliar o conteúdo das aulas. De acordo com essa avaliação, o coordenador do curso elaborou a tabela a seguir.

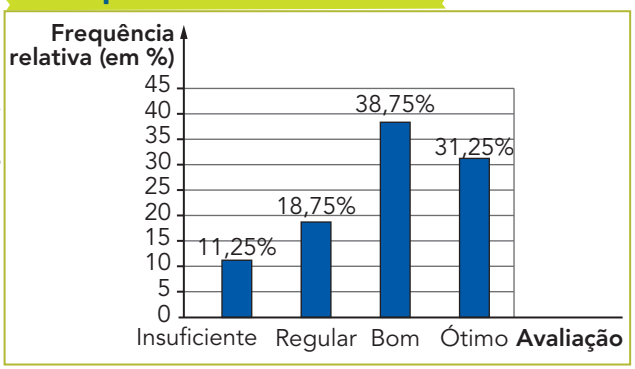
Avaliação do conteúdo do curso de empreendedorismo

Avaliação	FA	FR
Insuficiente	18	11,25%
Regular	30	18,75%
Bom	62	38,75%
Ótimo	50	31,25%
Total	**160**	**100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

Com os dados da tabela, é possível construir os gráficos de barras representados a seguir.

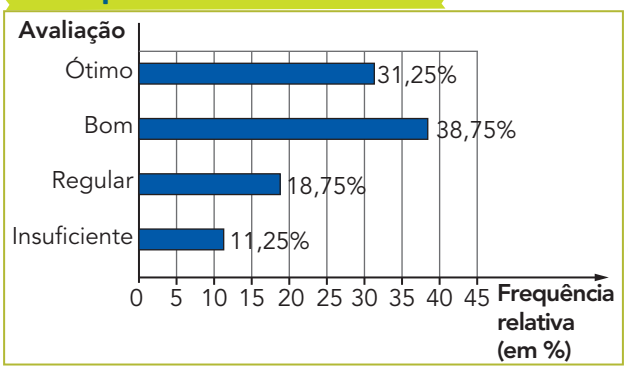
Avaliação do conteúdo do curso de empreendedorismo



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Avaliação do conteúdo do curso de empreendedorismo

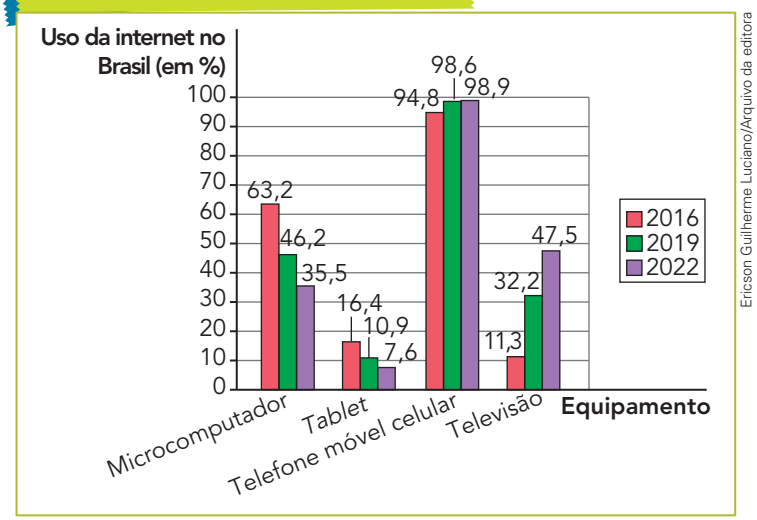


Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Analise a seguir outros exemplos de gráficos de barras.

Uso da internet no Brasil (em %)



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

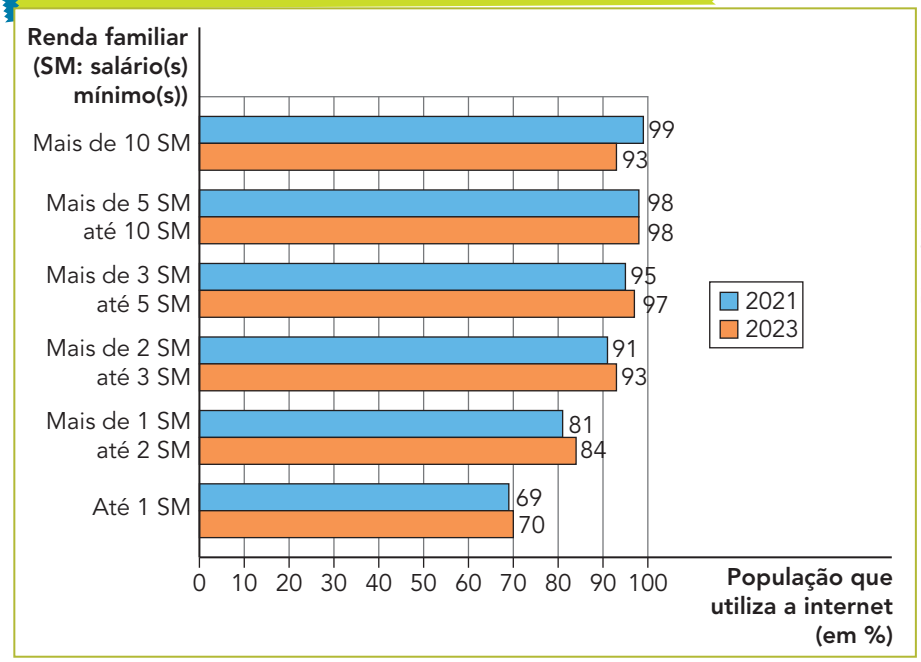
Fique atento

As barras podem ser representadas na vertical ou na horizontal. O gráfico de barras verticais também pode ser chamado de **gráfico de colunas**.

Fonte dos dados: BELANDI, Caio. 161,6 milhões de pessoas com 10 anos ou mais de idade utilizaram a Internet no país, em 2022. *Agência IBGE notícias*, [*s. l.*], 9 nov. 2023. Disponível em: https://tedit.net/bnrhh7. Acesso em: 26 jul. 2024.

14. c) Quantidade de estudantes que votaram: 5 + 3 + 8 + 12 + 6 + 6 = 40
Quantidade de estudantes com 15 anos de idade que votaram: 5 + 8 + 6 = 19
Quantidade de estudantes com 16 anos de idade que votaram: 3 + 12 + 6 = 21

Domicílios brasileiros com acesso à internet (em %)



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fique atento

Alguns *softwares* chamam a primeira representação gráfica de **gráfico de colunas agrupadas** e a segunda de **gráfico de barras agrupadas**.

Fontes dos dados: CENTRO REGIONAL DE ESTUDOS PARA O DESENVOLVIMENTO DA SOCIEDADE DA INFORMAÇÃO. TIC Domicílios 2021. *Cetic.br*, [*s. l.*]. Disponível em: https://tedit.net/2fqu9l; CENTRO REGIONAL DE ESTUDOS PARA O DESENVOLVIMENTO DA SOCIEDADE DA INFORMAÇÃO. TIC Domicílios 2023. *Cetic.br*, [*s. l.*]. Disponível em: https://tedit.net/7vi8lq/. Acesso em: 26 jul. 2024.

Note que, no primeiro gráfico, é possível comparar o tipo de equipamento utilizado para acessar a internet nos anos de 2016, 2019 e 2022. Já no segundo gráfico, é possível comparar o acesso à internet por renda familiar em 2021 e 2023.

14. d) Fausto obteve 20 votos (8 + 12 = 20). Assim, temos:
$\frac{20}{40} = 0{,}5 = 50\%$
Portanto, Fausto obteve 50% dos votos.

Atividades

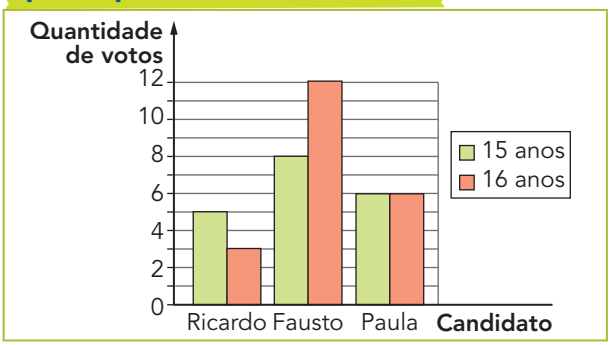
Não escreva no livro

14. Em uma eleição para representante de classe, os candidatos foram Ricardo, Fausto e Paula. Cada estudante votou em apenas 1 dos candidatos.

O gráfico apresentado a seguir mostra o resultado da votação.

De acordo com os dados apresentados, responda no caderno.

Votos por faixa etária na eleição para representante de classe



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Quantos votos obteve a candidata Paula?
6 + 6 = 12; logo, 12 votos.

b) Quantos estudantes com 15 anos de idade votaram em Ricardo? 5 estudantes.

c) Quantos estudantes votaram ao todo? Quantos deles tinham 15 anos de idade e quantos tinham 16 anos de idade?

d) Qual é a porcentagem de votos recebidos por Fausto?

Texto para a próxima atividade.

Em 2020, durante o período de quarentena (distanciamento social) adotado em alguns estados brasileiros em decorrência da pandemia de covid-19, organizações da sociedade civil e pessoas que se dedicam a proteger os animais relataram que a adoção de cães e gatos aumentou em até 50%.

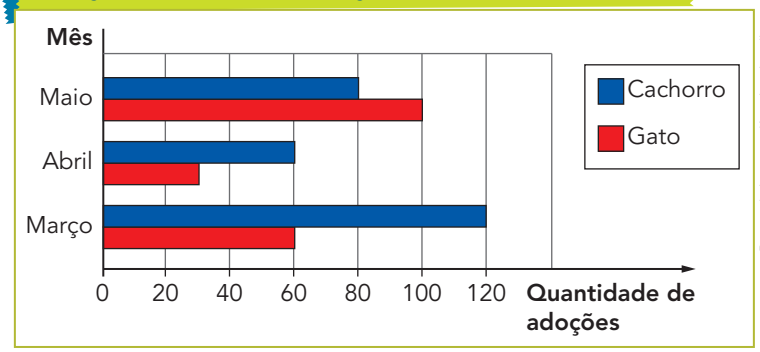
Fonte dos dados: PAIVA, Deslange. Procura por adoção de cães e gatos cresce na pandemia; cuidadores fazem alerta. *G1*, 3 abr. 2020. Disponível em: https://tedit.net/g8dlwt. Acesso em: 13 ago. 2024.

16. Exemplo de problema: Em qual mês a quantidade de adoções de gatos superou a quantidade de adoções de cachorros? Em quais meses a quantidade de adoções de cachorros foi o dobro da quantidade de adoções de gatos?

Não escreva no livro

Considere que este gráfico apresenta a quantidade de adoções que ocorreram em um centro de acolhimento de animais abandonados nos meses de março, abril e maio de 2020.

Adoções de animais (março, abril e maio de 2020)



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

15. De acordo com o gráfico, a diferença entre a quantidade de cachorros e de gatos adotados durante esses 3 meses é um número entre: Alternativa **c**.

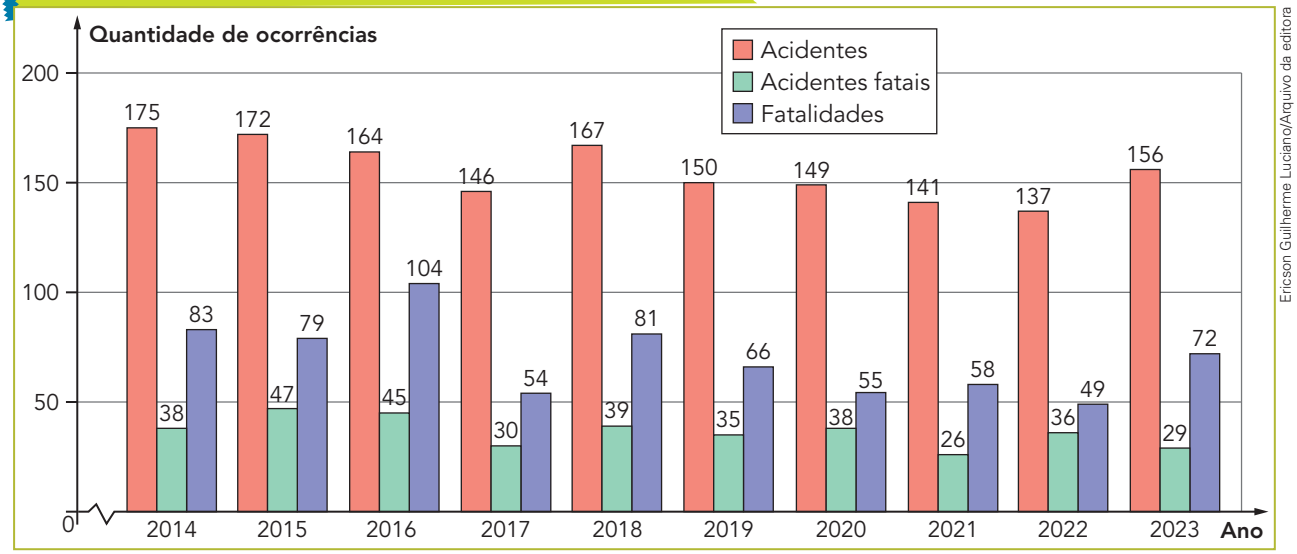
a) 20 e 40. **b)** 40 e 60. **c)** 60 e 80. **d)** 80 e 100. **e)** 100 e 120.

16. No caderno, elabore 2 questões que possam ser respondidas utilizando os dados apresentados na atividade anterior.

17. O ano de 2021 registrou queda no número de acidentes aéreos no Brasil. O gráfico a seguir apresenta um levantamento estatístico sobre acidentes aéreos no Brasil de 2014 a 2023. Ele mostra a quantidade de acidentes, a quantidade de acidentes fatais, isto é, acidentes em que houve mortos e a quantidade de fatalidades, ou seja, de mortes ocasionadas por acidentes aéreos.

Analisando o gráfico, responda, no caderno, às seguintes questões.

Panorama dos acidentes aéreos no Brasil (2014-2023)



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: FORÇA AÉREA BRASILEIRA. Centro de Investigações e Prevenção de Acidentes Aeronáuticos (Cenipa). *Painel Sipaer*, Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://tedit.net/qmzqey. Acesso em: 27 jul. 2024.

a) Quantos acidentes ocorreram no período de 2014 a 2023? 1 557

b) Analisando o total de acidentes ocorridos em 2014 em relação ao total de acidentes ocorridos em 2019, qual foi o decréscimo percentual? Aproximadamente 14%.

c) Em quais anos a quantidade de fatalidades foi superior a 90? Apenas em 2016.

d) Em qual ano ocorreu a menor quantidade de acidentes fatais? 2021

e) Em qual ano foi registrada a maior diferença entre o total de acidentes e a quantidade de acidentes fatais? 2014

f) Em comparação com a média de 2014 a 2022, em quantos por cento a quantidade de acidentes fatais diminuiu em 2023? E quanto aumentou a quantidade de fatalidades?

Aproximadamente 21,6%; aproximadamente 3%.

18. **(UFRGS-RS)** O gráfico [apresentado] representa a quantidade de dados armazenados no mundo inteiro, em *zettabytes*.

Reprodução/UFRGS, 2020.

Fonte: Gráfico adaptado de UNECE Statistics Wikis (United Nations Economic Commission for Europe).

Com base nos dados do gráfico, considere as afirmações apresentadas.

I. Em relação a 2019, a expectativa é que a quantidade de dados armazenados cresça mais de 20% em 2020.

II. De 2017 a 2019, em termos percentuais, a quantidade de dados armazenados cresceu mais de 100%.

III. Em termos percentuais, pode-se afirmar que a quantidade de dados armazenados cresceu mais no período de 2012 a 2016 do que no período de 2016 a 2019.

Quais estão corretas? Alternativa **e**.

a) Apenas **I**. **b)** Apenas **II**. **c)** Apenas **III**. **d)** Apenas **I** e **II**. **e)** **I**, **II** e **III**.

Gráfico de setores

Em uma exposição, a quantidade de visitantes foi de 3 500 no 1º dia, 1 400 no 2º dia e 2 100 no 3º dia.

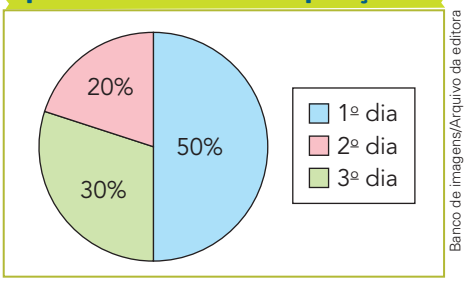
Analise como podemos representar esses dados em uma tabela de frequências e em um gráfico de setores.

Quantidade de visitantes nos primeiros 3 dias de exposição

Dia	FA	FR
1º dia	3 500	50%
2º dia	1 400	20%
3º dia	2 100	30%
Total	**7 000**	**100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

Quantidade de visitantes nos primeiros 3 dias de exposição



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Mapa clicável

No gráfico de setores, o círculo todo representa o total (100%), e os setores indicam a frequência correspondente aos valores da variável.

Na construção do gráfico de setores, determina-se o ângulo correspondente a cada setor proporcionalmente à frequência do valor da variável. A seguir, mostramos como podemos determinar a medida de abertura do ângulo do setor correspondente à frequência do 2º dia.

- Usando a frequência absoluta e aplicando a regra de 3 simples, temos:

$$\frac{1400}{7000} = \frac{x}{360°} \Rightarrow 7000x = 504000° \Rightarrow x = 72°$$

- Usando a frequência relativa, em porcentagem, temos: x é 20% de 360°, assim:

$$x = 0{,}20 \cdot 360° = 72°$$

19. b) Se, em 2022, o Brasil tinha aproximadamente 210 milhões, então:

$\frac{100\%}{27\%} = \frac{210 \text{ milhões}}{x} \Rightarrow \frac{1}{0{,}27} = \frac{210 \text{ milhões}}{x} \Rightarrow x = 56{,}7 \text{ milhões}$

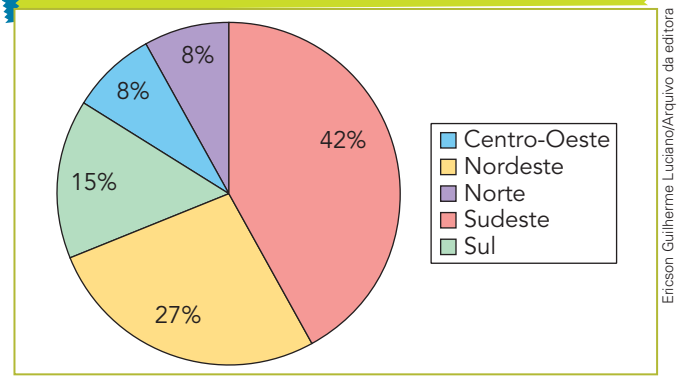
Portanto, aproximadamente, 56,7 milhões de habitantes.

Não escreva no livro

Atividades

19. Em 2022, o IBGE realizou um Censo Demográfico da população brasileira que possibilitou saber a quantidade de habitantes em cada região do país. Analise o gráfico apresentado.

Porcentagem de habitantes por região (2022)



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

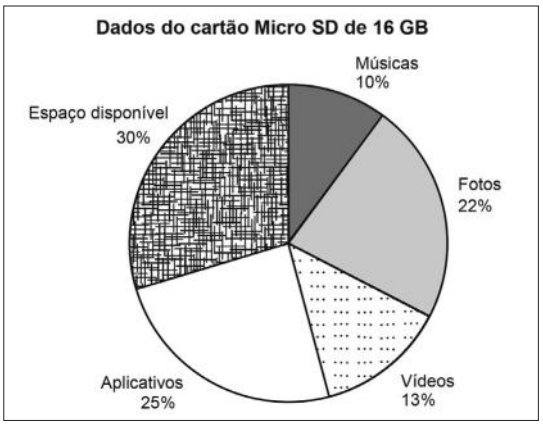
Fonte dos dados: BELANDI, Caio; GUIMARÃES, Carlos Alberto. Brasil tem 207,8 milhões de habitantes, mostra prévia do Censo 2022. *Agência IBGE Notícias*, Rio de Janeiro, 28 dez. 2022. Disponível em: https://tedit.net/b0lmkr. Acesso em: 27 jul. 2024.

De acordo com os dados apresentados no gráfico, responda:

a) Em 2022, qual região do Brasil tinha mais habitantes? Região Sudeste.

b) Se o país tinha, aproximadamente, 210 milhões de habitantes em 2022, quantos deles viviam na região Nordeste?

20. **(Enem)** O cartão Micro SD é um tipo de mídia utilizada para armazenamento de dados (arquivos, fotos, filmes, músicas etc.). Um usuário tem um cartão Micro SD de 16 GB e, utilizando seu computador, visualiza, em termos percentuais, os dados armazenados no cartão, conforme o gráfico.



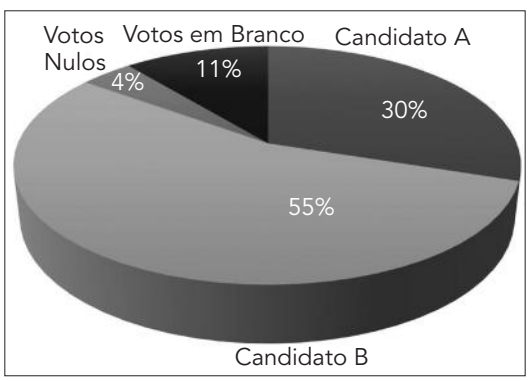
Reprodução/Enem, 2017.

O usuário adquiriu um cartão do mesmo tipo, mas de 32 GB com o objetivo de gravar os dados do seu cartão de 16 GB em seu novo cartão de 32 GB. No entanto, para aumentar o espaço de armazenamento disponível, decidiu não gravar suas músicas no novo cartão.

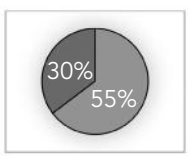
Analisando o gráfico, o espaço disponível no novo cartão de 32 GB, em termos percentuais, é igual a: Alternativa **c**.

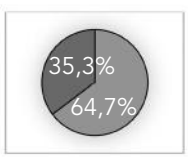
a) 60. **b)** 65. **c)** 70. **d)** 75. **e)** 80.

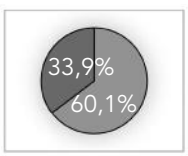
21. **(CMRJ)** O gráfico [apresentado] mostra o resultado da apuração dos votos do segundo turno de uma eleição entre os candidatos **A** e **B**. Sabendo que votos válidos são os votos dados a cada candidato, não sendo computados os votos brancos e nulos, qual alternativa melhor representa a situação dos candidatos **A** e **B**?

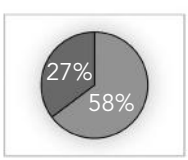


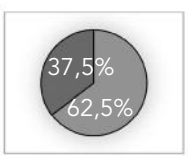
Reprodução/CMRJ, 2018.

a)


c)


b)


d)


e)


Do gráfico, temos: 30% + 55% = 85%.

Assim, para o candidato **A**, temos: $\frac{85\%}{100\%} = \frac{30\%}{x} \Rightarrow x \simeq 35{,}3\%$.

Para o candidato **B**, temos: $y + 35{,}3\% = 100\% \Rightarrow y = 64{,}7\%$. Alternativa **c**.

Histograma

Quando os valores assumidos por uma variável estão agrupados em classes ou intervalos, é comum o uso de um tipo de gráfico conhecido por **histograma**.

O histograma é um gráfico de colunas retangulares justapostas, em que as bases de cada coluna retangular representam os limites de cada classe, e a medida de altura de cada coluna é proporcional à frequência absoluta, ou seja, proporcional à frequência relativa da classe correspondente.

Por exemplo, consideremos a tabela de frequências apresentada neste capítulo que mostra a medida de massa, em quilograma, de um grupo de estudantes.

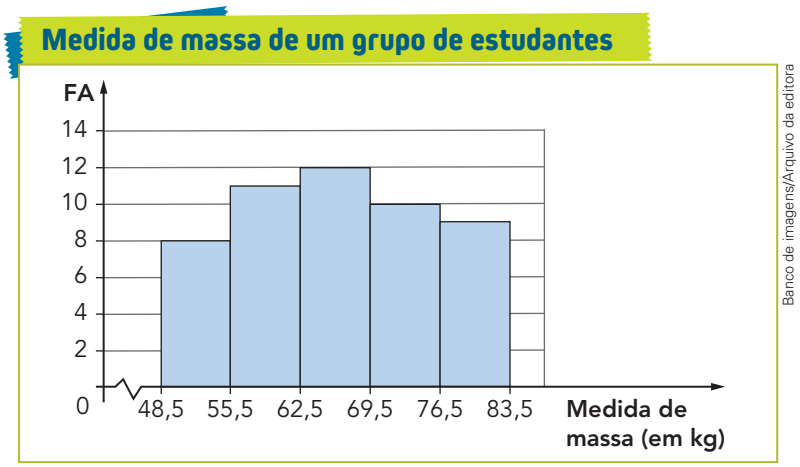
De acordo com os dados da tabela de frequências, podemos construir um histograma de modo análogo à construção de um gráfico de colunas. Nesse caso, os intervalos de classe são indicados nas bases inferiores das colunas retangulares.

Medida de massa de um grupo de estudantes

Medida de massa (em kg)	FA	FR (em %)
48,5 ⊢ 55,5	8	16
55,5 ⊢ 62,5	11	22
62,5 ⊢ 69,5	12	24
69,5 ⊢ 76,5	10	20
76,5 ⊢ 83,5	9	18
Total	**50**	**100**

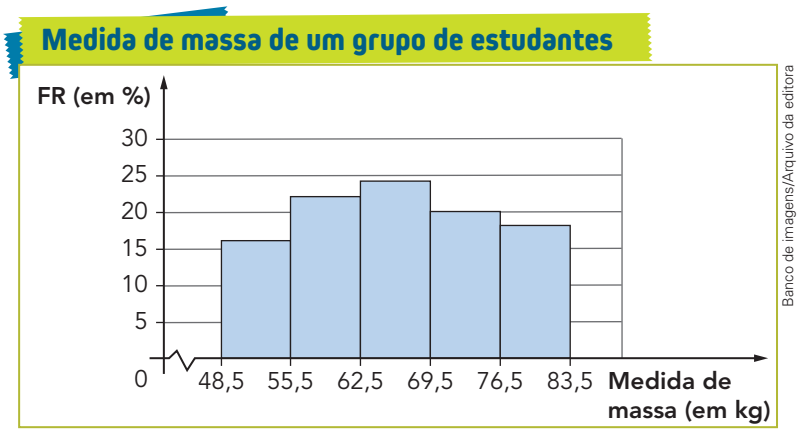
Dados elaborados para fins didáticos.

- Histograma com os intervalos de classe relacionados às frequências absolutas:



Dados elaborados para fins didáticos.

- Histograma com as classes relacionadas às frequências relativas (em porcentagem):



Dados elaborados para fins didáticos.

Às vezes, utilizamos como representante de cada classe o valor médio correspondente. Por exemplo, 52 é o valor médio correspondente à classe 48,5 ⊢ 55,5. Esses valores são representados como pontos médios das bases de cada coluna retangular do histograma.

Os segmentos de reta que ligam em sequência os pontos médios das bases superiores de cada coluna retangular do histograma formam um gráfico de segmentos conhecido como **polígono de frequência**.

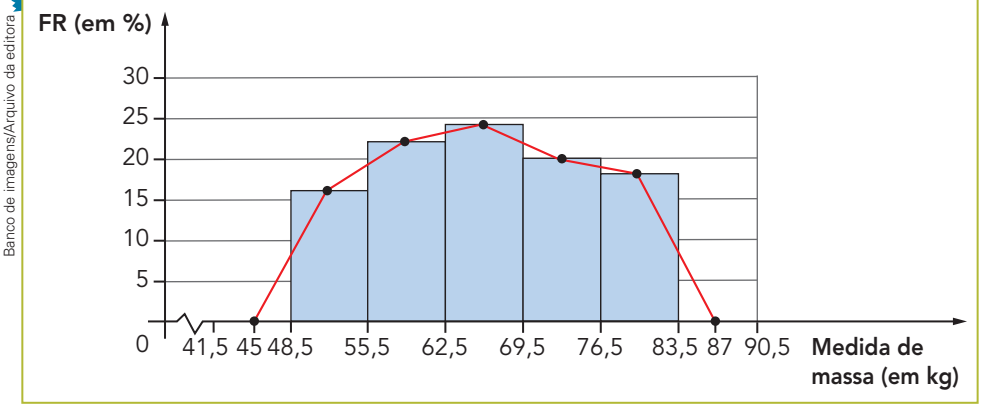
Reflita

Não escreva no livro

Qual é o valor médio correspondente a cada uma das classes?

$48,5 \vdash 55,5$: $\frac{48,5 + 55,5}{2} = 52$;
$55,5 \vdash 62,5$: $\frac{55,5 + 62,5}{2} = 59$;
$62,5 \vdash 69,5$: $\frac{62,5 + 69,5}{2} = 66$;
$69,5 \vdash 76,5$: $\frac{69,5 + 76,5}{2} = 73$;
$76,5 \vdash 83,5$: $\frac{76,5 + 83,5}{2} = 80$.

Medida de massa de um grupo de estudantes



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

O polígono de frequência sempre inicia no ponto médio da classe anterior ao primeiro e termina no ponto médio da classe posterior ao último. No exemplo, o polígono inicia em 45, ponto médio de 41,5 ⊢ 48,5, e termina em 87, ponto médio de 83,5 ⊢ 90,5.

Atividades

Não escreva no livro

22. O quadro a seguir apresenta as notas bimestrais de Matemática de uma turma de Ensino Médio composta de 40 estudantes.

2,5	6,5	2,0	7,5	8,0	3,5	9,0	7,5	9,0	8,0
8,0	5,5	4,5	5,5	9,5	3,0	10,0	6,0	10,0	6,5
9,5	3,0	7,0	8,5	8,5	6,5	8,5	2,0	5,0	7,0
10,0	8,0	4,0	6,5	10,0	6,0	6,0	8,0	7,5	9,0

a) No caderno, construa um histograma para apresentar os dados do quadro anterior.

b) Quantos estudantes obtiveram nota igual ou superior a 6,5?
9 + 11 + 6 = 26; logo, 26 estudantes.

O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

c) Quantos estudantes obtiveram nota inferior a 5?
3 + 5 = 8; logo, 8 estudantes.

d) Qual é a porcentagem de estudantes que obtiveram nota igual ou superior a 9,5?
$\frac{6}{40} = 0,15 = 15\%$; logo, 15% dos estudantes.

23. A alternativa **a** é falsa, pois a classe 4000 ⊢ 4500 não inclui o limite superior. A alternativa **b** é falsa, pois a classe 1500 ⊢ 2000 inclui o limite inferior, portanto pode haver pelo menos um funcionário com salário de R$ 1.500,00. A alternativa **c** é verdadeira, pois os salários inferiores a R$ 2.500,00 correspondem a 30% (10% + 20% = 30%). A alternativa **d** é falsa, pois os salários iguais ou superiores a R$ 3.500,00 correspondem a 20% (15% + 5% = 20%). A alternativa **e** é falsa, pois não é possível afirmar com certeza que há algum funcionário com salário de R$ 2.820,00, pois os salários estão agrupados em classes. Alternativa **c**.

23. O histograma seguinte apresenta o salário, em reais, de 100 funcionários de determinada empresa.

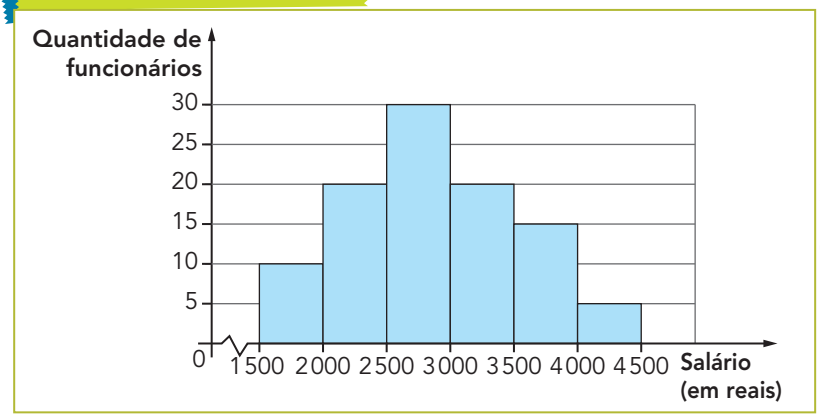
De acordo com os dados apresentados no histograma, é correto afirmar que:

a) a empresa tem pelo menos 1 funcionário com salário igual a R$ 4.500,00.

b) essa empresa não tem funcionário com salário igual a R$ 1.500,00.

c) apenas 30% dos funcionários dessa empresa têm salário inferior a R$ 2.500,00.

Salário dos funcionários



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

d) apenas 10% dos salários pagos pela empresa são iguais ou superiores a R$ 3.500,00.

e) com certeza há algum funcionário com salário igual a R$ 2.820,00.

24. Analise o gráfico a seguir, que mostra o percentual da população brasileira em determinadas faixas etárias.

a) 65 anos de idade ou mais; 10,9 − 5,9 = 5; logo, 5 pontos percentuais.

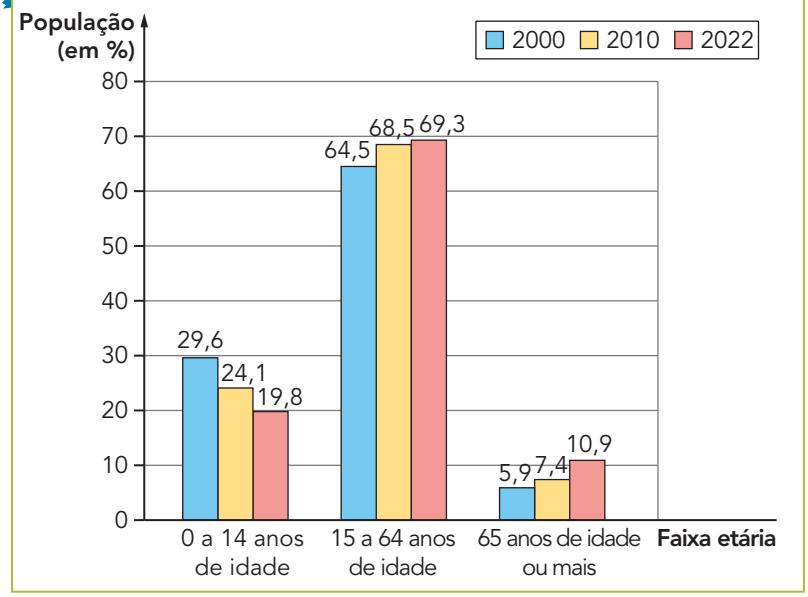
De acordo com os dados do gráfico, responda no caderno.

a) Qual foi a faixa etária da população brasileira que mais cresceu percentualmente de 2000 a 2022? De quanto foi esse crescimento em pontos percentuais?

b) Qual foi a faixa etária da população brasileira que mais diminuiu de 2000 a 2022? De quanto foi essa redução em pontos percentuais?

0 a 14 anos de idade; 29,6 − 19,8 = 9,8; logo, 9,8 pontos percentuais.

População residente (em %) – Brasil



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. Pirâmide etária. *Educa.ibge-jovens*, Rio de Janeiro: IBGE, 2022. Disponível em: https://tedit.net/mhfa9n. Acesso em: 27 jul. 2024.

25. O quadro a seguir apresenta na 1ª coluna a descrição de alguns levantamentos estatísticos e na 2ª coluna tipos de representações gráficas.

A1: Distribuição das medidas de altura dos estudantes de uma turma agrupadas em intervalos (ou classes).	G1: Gráfico de setores
A2: Evolução de vendas de um produto ao longo do tempo.	G2: Histograma
A3: Distribuição percentual dos votos obtidos por 5 candidatos à Presidência da República.	G3: Gráfico de segmentos

Indique em qual das alternativas a seguir é apresentada a associação mais adequada entre os levantamentos estatísticos e as representações gráficas.

a) A1 e G1; A2 e G2; A3 e G3.
b) A1 e G2; A2 e G3; A3 e G1.
c) A1 e G3; A2 e G2; A3 e G1.
d) A1 e G1; A2 e G3; A3 e G2.
e) A1 e G2; A2 e G1; A3 e G2.

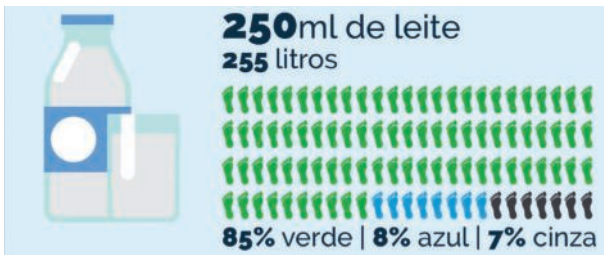
É mais adequado apresentar a distribuição das medidas de altura dos estudantes agrupadas em intervalos em um histograma, a evolução de vendas de um produto ao longo do tempo em um gráfico de segmentos e a distribuição percentual dos votos em um gráfico de setores.
Alternativa **b**.

Pictograma

É comum encontrar em publicações de revistas, jornais e *sites* representações gráficas em que são usadas imagens ou desenhos relacionados ao tema da pesquisa para apresentar os dados. Esse tipo de representação gráfica é conhecido como **pictograma** (ou **gráfico pictórico**). Analise alguns exemplos a seguir.

Quantidade de água no processo de produção de 250 mL de leite

Reprodução/EBC



Pé Azul
Calcula a quantidade de água superficial ou subterrânea evaporada, incorporada em produtos, devolvida ao mar ou lançada em outra bacia.

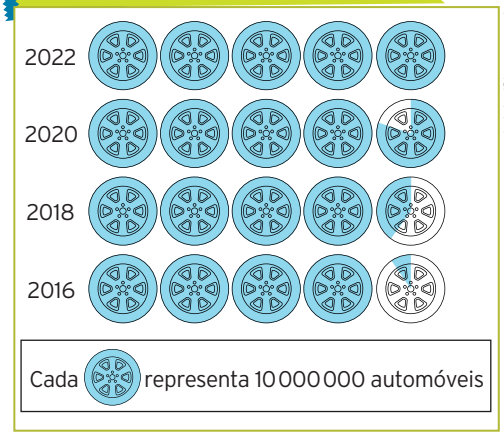
Pé Verde
Quando a água da chuva evapora ou é incorporada em um produto durante a sua produção.

Pé Cinza
Mede o volume de água necessário para diluir a poluição gerada durante o processo produtivo.

FERREIRA, Priscila. Água invisível. *EBC*, Brasília, DF, 2028. Disponível em: https://tedit.net/iydfws. Acesso em: 18 set. 2024.

Infográfico clicável

Frota de automóveis no Brasil



monkylabz/Shutterstock

Fonte dos dados: IBGE. *Frota de veículos*. Disponível em: https://tedit.net/uund52. Acesso em: 27 jul. 2024.

Diagrama de ramos e folhas

Uma maneira interessante de apresentar a distribuição de frequências de uma variável quantitativa é o **diagrama de ramos e folhas**.

Para montar esse diagrama, inicialmente organizamos os valores em ordem crescente. Por exemplo, para o conjunto de dados 23, 35, 12, 72, 23, 91, 15, 125, 17, 95, 98, 34, 92, teremos:

12, 15, 17, 23, 23, 34, 35, 72, 91, 92, 95, 98, 125

Em seguida, podemos reorganizar os dados separando-os pelas dezenas, uma em cada linha:

12	15	17	
23	23		
34	35		
72			
91	92	95	98
125			

Agora, cada um dos números deve ser separado em 2 colunas, de maneira que a coluna da esquerda indique a quantidade de dezenas exatas, e a coluna da direita indique o algarismo das unidades de cada número. Analise o diagrama de ramos e folhas apresentado.

A coluna com as dezenas é chamada **ramos**, e a coluna com as unidades, **folhas**. Os ramos e as folhas podem representar qualquer ordem de grandeza, por exemplo: dezenas e unidades, centenas e dezenas, milhares e centenas.

Também é possível apresentar esse diagrama suprimindo os termos da primeira coluna que não possuem "folhas" (4, 5, 6, 8, 10 e 11).

Conjunto de dados

1	2 5 7
2	3 3
3	4 5
4	
5	
6	
7	2
8	
9	1 2 5 8
10	
11	
12	5

Legenda: 1|2 significa 12.

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

26. A alternativa **a** é falsa, pois há 3 entrevistados com 16 anos. A alternativa **b** é falsa, pois há 2 entrevistados com mais de 50 anos: 51 e 52 anos. A alternativa **c** é falsa, pois foram entrevistadas 21 pessoas. A alternativa **d** é verdadeira, pois há 3 entrevistados com idade entre 30 e 40 anos: 31, 31 e 33 anos. A alternativa **e** é falsa, pois há 4 entrevistados com 17 anos. Logo, alternativa **d**.

Não escreva no livro

Atividades

26. Próximo ao período das eleições, um grupo de estudantes decidiu fazer uma pesquisa com os colegas e os funcionários da escola em que estudavam. Como não seria possível realizar a pesquisa com todos os funcionários e estudantes da escola, eles decidiram selecionar uma amostra.

Entre as informações que desejavam descobrir, estava a idade das pessoas entrevistadas. Analise a seguir os dados que obtiveram para essa variável.

Idade das pessoas entrevistadas

1	6 6 6 7 7 7 7 8
2	1 1 2 3
3	0 1 1 3
4	2 3 3
5	1 2

Legenda: 1|6 significa 16 anos.

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

De acordo com o diagrama, podemos afirmar que:

a) havia exatamente 4 pessoas com 16 anos na amostra.

b) havia apenas 1 pessoa com mais de 50 anos na amostra.

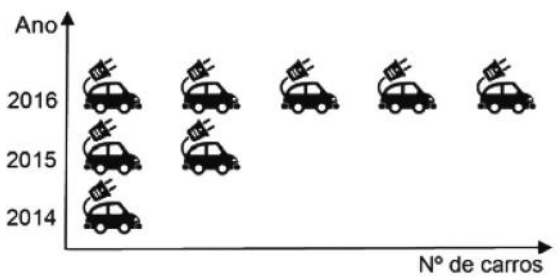
c) a amostra era composta de 26 pessoas.

d) havia ao menos 3 pessoas com idades entre 30 e 40 anos.

e) havia somente 1 pessoa com 17 anos.

27. **(Enem)** De acordo com um relatório recente da Agência Internacional de Energia (AIE), o mercado de veículos elétricos atingiu um novo marco em 2016, quando foram vendidos mais de 750 mil automóveis da categoria. Com isso, o total de carros elétricos vendidos no mundo alcançou a marca de 2 milhões de unidades desde que os primeiros modelos começaram a ser comercializados em 2011.

No Brasil, a expansão das vendas também se verifica. A marca **A**, por exemplo, expandiu suas vendas no ano de 2016, superando em 360 unidades as vendas de 2015, conforme representado no gráfico.



Reprodução/Enem, 2018.

Disponível em: www.tecmundo.com.br. Acesso em: 5 dez. 2017.

A média anual do número de carros vendidos pela marca **A**, nos anos representados no gráfico, foi de:

a) 192.

b) 240.

c) 252.

d) 320.

e) 420.

De acordo com o gráfico, de 2015 para 2016 foram representados 3 "carrinhos" a mais. Sendo x a quantidade de carros correspondente a cada "carrinho" no gráfico, temos: $3x = 360 \Rightarrow x = 120$.
Vendas em 2016: $5 \cdot 120 = 600$; vendas em 2015: $2 \cdot 120 = 240$; vendas em 2014: 120.
Portanto, a média anual de carros nos anos representados no gráfico é dada por:
$\frac{600 + 240 + 120}{3} = \frac{960}{3} = 320$
Alternativa **d**.

Exemplos de construção de gráficos

Estudamos vários tipos de gráficos utilizados para representar dados estatísticos. É importante escolher sempre qual deles é o mais adequado à situação analisada.

Acompanhe a seguir alguns exemplos de construção de gráficos:

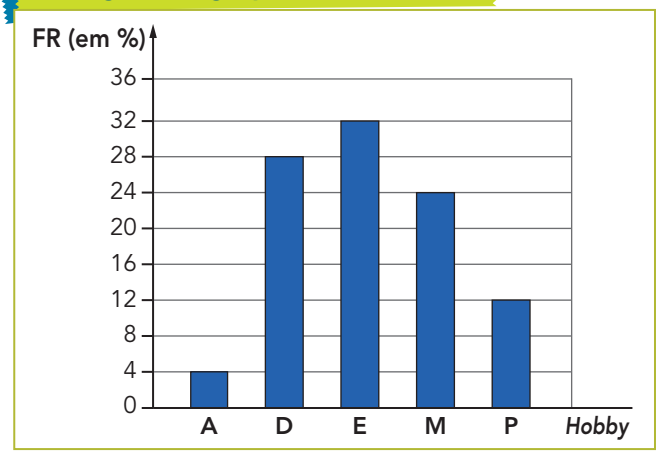
1º) Vamos construir um gráfico de barras e outro de setores para apresentar os dados representados na tabela de frequências.

***Hobby* de um grupo de estudantes**

Hobby	FA	FR (em %)
Aeromodelismo **(A)**	1	4
Dança **(D)**	7	28
Esporte **(E)**	8	32
Música **(M)**	6	24
Patinação **(P)**	3	12
Total	**25**	**100**

Dados elaborados para fins didáticos.

***Hobby* de um grupo de estudantes**



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Nesse caso, todas as porcentagens são múltiplas de 4, então podemos usar 4% na escala.

$$\frac{4}{100} = \frac{x}{360°} \Rightarrow 100x = 1440° \Rightarrow x = 14{,}4°$$

Cada 4% corresponde a um setor de 14,4°.

E: $32\% = 8 \cdot 4\% \Rightarrow 8 \cdot 14{,}4° = 115{,}2°$

M: $24\% = 6 \cdot 4\% \Rightarrow 6 \cdot 14{,}4° = 86{,}4°$

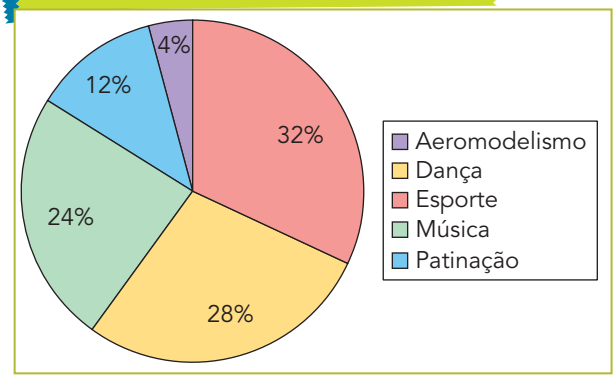
P: $12\% = 3 \cdot 4\% \Rightarrow 3 \cdot 14{,}4° = 43{,}2°$

D: $28\% = 7 \cdot 4\% \Rightarrow 7 \cdot 14{,}4° = 100{,}8°$

A: $4\% \Rightarrow 14{,}4°$

Assim, temos:

***Hobby* de um grupo de estudantes**



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

$$115{,}2° + 86{,}4° + 43{,}2° + 100{,}8° + 14{,}4° = 360°$$

2º) Na realização de uma prova, foi anotada a medida de intervalo de tempo, em minutos, que cada estudante precisou para concluí-la: 56; 51,2; 57; 49; 51,7; 51,1; 46; 50,5; 50; 47; 44,2; 57; 53,4; 50,1; 43; 55,5; 48,8; 56; 49; 51; 47; 46; 54; 52,1; 55; 45,8; 49,1; 50; 48,2; 51,6. De acordo com esses dados, vamos construir a tabela de frequências e optar por utilizar 5 intervalos para distribuir os dados.

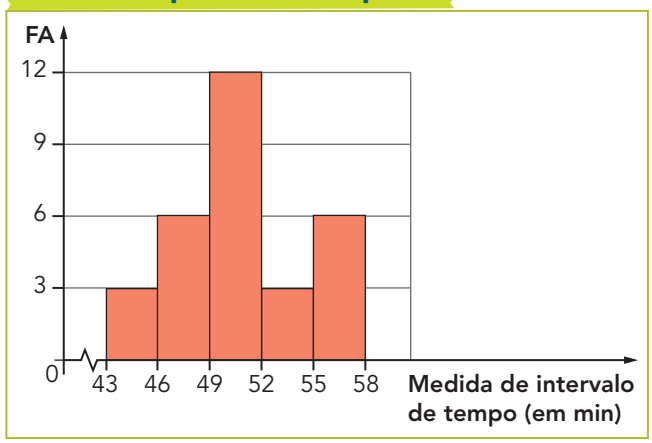
Subtraindo o menor valor do maior valor, obtemos a amplitude total: 57 − 43 = 14. Sabendo que são 5 intervalos e escolhendo convenientemente o número 15, a amplitude de cada classe será: 15 ÷ 5 = 3. Assim, podemos construir a tabela e, em seguida, um histograma com os intervalos relacionados às frequências absolutas.

Medida de intervalo de tempo necessário para concluir a prova

Medida de intervalo de tempo (em min)	FA	FR (em %)
43 ⊢ 46	3	10
46 ⊢ 49	6	20
49 ⊢ 52	12	40
52 ⊢ 55	3	10
55 ⊢ 58	6	20
Total	**30**	**100**

Dados elaborados para fins didáticos.

Medida de intervalo de tempo necessário para concluir a prova



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Atividades

28. a) A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
b) 200 + 0,07 · 200 = 214; logo, deverá pagar R$ 214,00.

Não escreva no livro

Texto para a próxima atividade.

c) Porque, como a taxa de juros é mensal, a cada mês a dívida aumenta, podendo atingir valores muito maiores do que o valor original da compra.

Quando o saldo de uma conta bancária fica negativo, significa que o titular fez uma compra cujo valor é maior do que o saldo que havia disponível naquele momento, e o banco liberou a quantia faltante em forma de crédito. A partir do mês seguinte, é cobrado o valor do crédito utilizado mais uma taxa de juros mensal sobre ele, até que o titular quite a dívida. Esse serviço é chamado de cheque especial.

28. A tabela mostra o saldo bancário de uma pessoa ao final de cada mês durante o 1º semestre de um ano.

a) Construa, no caderno, um gráfico de segmentos e escreva o que você pode concluir de acordo com a representação dele.

b) Quanto essa pessoa deverá pagar no mês de julho para quitar a dívida do cheque especial gerada em junho, considerando que o banco cobra uma taxa de juros de 7% por esse serviço?

c) Por que é importante pagar a dívida do cheque especial assim que possível?

Saldo bancário no 1º semestre

Mês	Saldo (em R$)
Janeiro	3.500,00
Fevereiro	2.200,00
Março	–100,00
Abril	1.500,00
Maio	2.600,00
Junho	–200,00

Dados elaborados para fins didáticos.

29. As medidas de área dos estados da região Sudeste do Brasil são, em valores aproximados: São Paulo: 250 000 km²; Espírito Santo: 46 000 km²; Rio de Janeiro: 44 000 km²; Minas Gerais: 590 000 km².

Construa, no caderno, um gráfico de barras para representar esses dados.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Fonte dos dados: IBGE. *Área territorial – Brasil, Grandes Regiões, Unidades da Federação e Municípios*. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. Disponível em: https://tedit.net/yop4uk. Acesso em: 24 jul. 2024.

Professor, na atividade **29**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes não videntes, a elaboração deste tipo gráfico pode ser realizada com mecanismos próprios, explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Outra possibilidade é indicar a formação de duplas de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

32. a) Sim. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) A afirmação do patrão é falsa, pois o ajuste não repõe as perdas causadas pela inflação do período.

Não escreva no livro

30. As medidas de temperatura máxima registradas em um município durante o período de 20 dias foram as seguintes:

30 °C; 32 °C; 31 °C; 31 °C; 33 °C; 28,5 °C; 33,5 °C; 27 °C; 30 °C; 34 °C; 30,5 °C; 28 °C; 30,5 °C; 29,5 °C; 26 °C; 31 °C; 31 °C; 29 °C; 32 °C; 31,5 °C.

No caderno, faça uma tabela de frequências com 5 intervalos para representar esses dados. Depois, construa o histograma correspondente. O exemplo resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

31. Os estudantes de uma turma tiveram que optar pelo estudo de uma língua estrangeira entre espanhol, francês, inglês ou italiano. Analise a tabela que registra as escolhas deles, e construa no caderno um gráfico de setores para representar os dados dela.

Porcentagem de estudantes por idioma escolhido

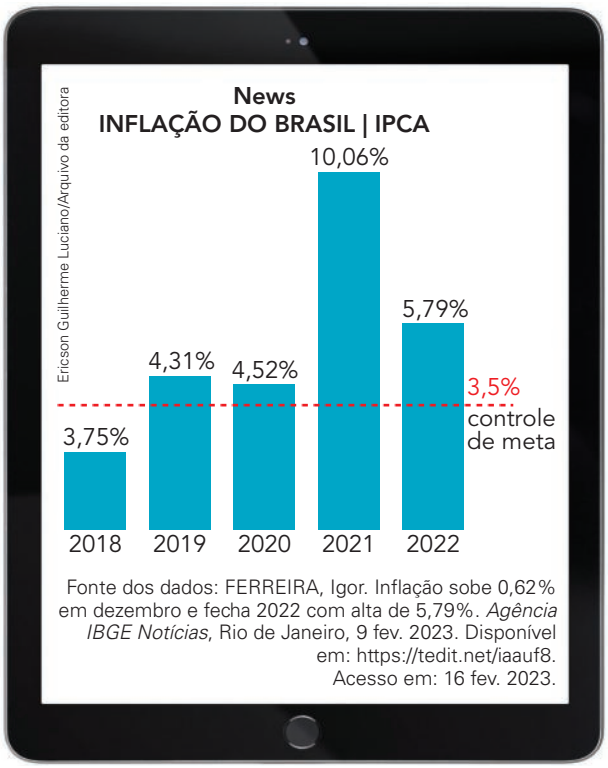
Língua estrangeira	Porcentagem
Espanhol	30%
Francês	20%
Inglês	40%
Italiano	10%

Dados elaborados para fins didáticos.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

32. Para mostrar o comportamento da inflação no Brasil, um veículo de informação divulgou o gráfico apresentado, utilizando dados do IBGE.

Analise o gráfico e faça os registros no caderno.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Teerapong Yovaga/Shutterstock

a) Esse gráfico apresenta erros? Em caso afirmativo, quais?

b) De acordo com o gráfico que apresenta a inflação no Brasil de 2018 a 2022, suponha que uma pessoa tivesse um salário fixo de R$ 2.000,00 por mês desde o início de 2018. O patrão propôs no final de 2022 um aumento de 25% dizendo que, com isso, estaria atualizando o salário de acordo com a inflação. Essa afirmação é verdadeira? Justifique.

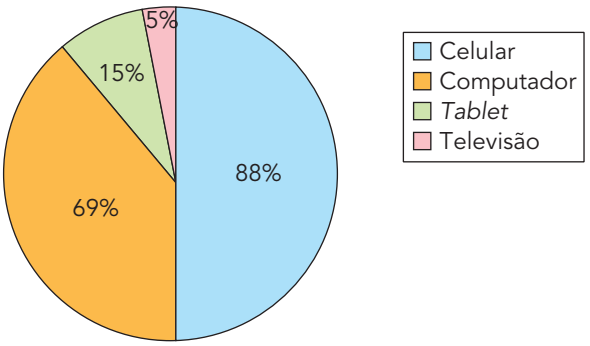
c) Explique como a inflação impacta os preços de produtos e serviços no mercado. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

33. Muitas vezes, informações corretas podem ser apresentadas de maneira equivocada. Analise o gráfico apresentado que mostra a porcentagem de pessoas por dispositivo eletrônico utilizado para se informar.

Qual erro é possível identificar nesse gráfico? Justifique sua resposta.

Exemplo de resposta: No gráfico apresentado, a soma das porcentagens das categorias é superior a 100%, mas, em um gráfico de setores, o círculo todo representa o total (100%) e os setores indicam a frequência correspondente aos valores da variável.

Dispositivos eletrônicos utilizados para se informar

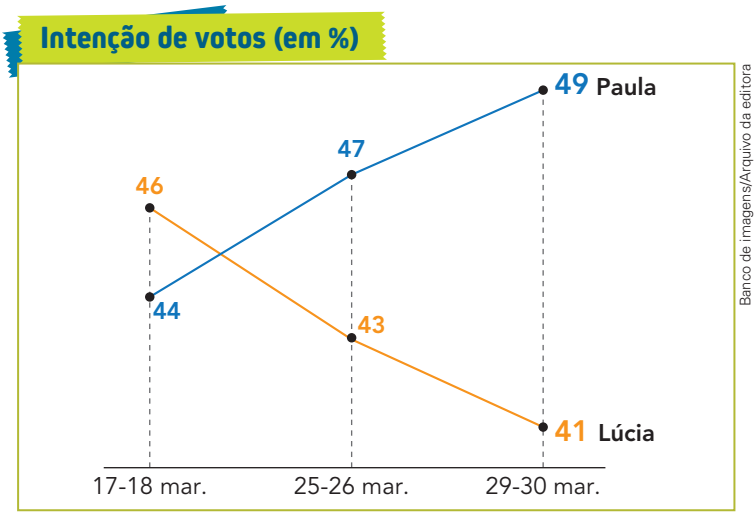


Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Professor, o conceito de inflação é abordado na Unidade **2** deste Volume. Caso tenha optado por reordenar os conteúdos e abordá-la posteriormente, proponha aos estudantes que realizem uma pesquisa para responder ao item **c**.

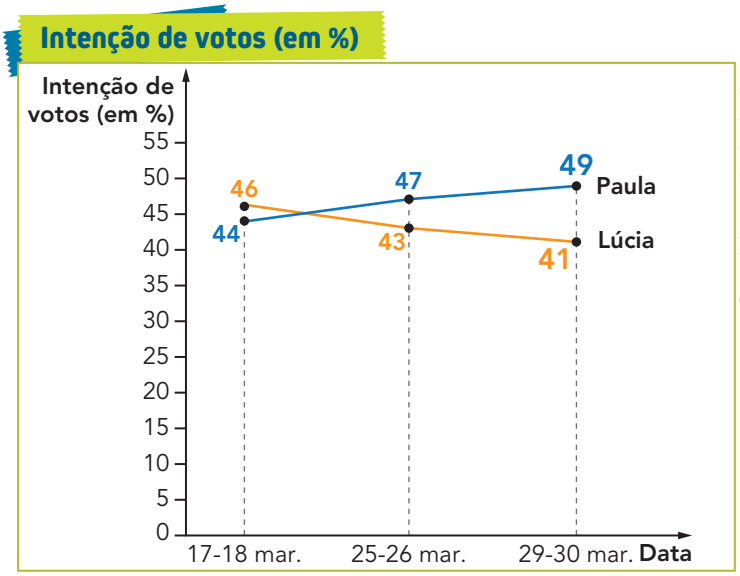
34. Durante a campanha para presidente do grêmio estudantil, um grupo de estudantes fez uma pesquisa e divulgou o gráfico a seguir para mostrar a intenção de votos entre as candidatas Paula e Lúcia. A margem de erro da pesquisa foi de 2 pontos percentuais para mais ou para menos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Depois de alguns dias, o mesmo grupo de estudantes publicou uma nova versão do gráfico anterior, pois havia identificado um erro.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Analise atentamente os 2 gráficos e responda às perguntas no caderno.

a) Qual é o erro apresentado no 1º gráfico?

b) Considere as informações correspondentes a 29-30 mar. apresentadas em ambos os gráficos. Caso os gráficos não indicassem a porcentagem de intenção de votos, comparando apenas o ponto correspondente à intenção de votos para cada candidata, o que se poderia concluir ao analisar o 1º gráfico? E o 2º gráfico?

c) É considerado empate técnico quando a intenção de votos de 2 ou mais candidatos está dentro da margem de erro. Considerando a margem de erro e os dados apresentados, havia um empate técnico na pesquisa realizada em qual data?

Havia um empate técnico na pesquisa realizada em 17-18 de março, pois, como a margem de erro era de 2 pontos percentuais para mais ou para menos, a intenção de votos de Paula poderia estar entre 42% e 46%, e a de Lúcia, entre 44% e 48%. Portanto, a intenção de voto nas duas candidatas poderia estar entre 44% e 46%.

Fique atento

Se uma pesquisa apresenta margem de erro de 2 pontos percentuais e o candidato **A** tem 31% das intenções de voto e o candidato **B**, 33%, dizemos que esses candidatos estão empatados tecnicamente, pois o candidato **A** pode ter de 29% a 33% das intenções de voto, enquanto o candidato **B** terá de 31% a 35%. Portanto, a intenção de voto de ambos pode estar entre 31% e 33%.

34. a) Espera-se que os estudantes verifiquem que a escala dos eixos do gráfico está errada, porque a diferença entre o eixo horizontal, que deve representar 0 pontos, e o ponto que representa o número 41 é muito menor do que a diferença entre o ponto que representa o 41 e o que representa o 49, por exemplo.
b) Espera-se que os estudantes percebam que, no 1º gráfico, caso não tivesse a indicação das porcentagens, seria possível concluir que a diferença entre a intenção de votos entre as candidatas, em 29-30 de março, era maior do que realmente é indicado pelos dados (mais ou menos 8%). No 2º gráfico, essa diferença parece um pouco menor do que no 1º gráfico.

Tecnologias digitais

Representações gráficas

Vamos utilizar um *software* de Geometria dinâmica para construir um histograma e um diagrama de ramos e folhas para representar um conjunto de dados.

Para as atividades propostas a seguir, sugerimos selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que permita a construção desse tipo de representação gráfica.

Considere como exemplo a idade dos 20 estudantes de uma turma do Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Idade dos estudantes de uma turma da EJA

Nome	Idade
André	20
Amanda	20
Bárbara	23
Beatriz	30
Caio	30
Daniel	35
David	35
Eduardo	40
Elis	40
Fernanda	40
Gabriel	52
Gabriela	52
Igor	52
João	60
Joaquim	60
José	61
Laura	61
Maria Aparecida	65
Maria das Graças	70
Maria Lúcia	70

Dados elaborados para fins didáticos.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

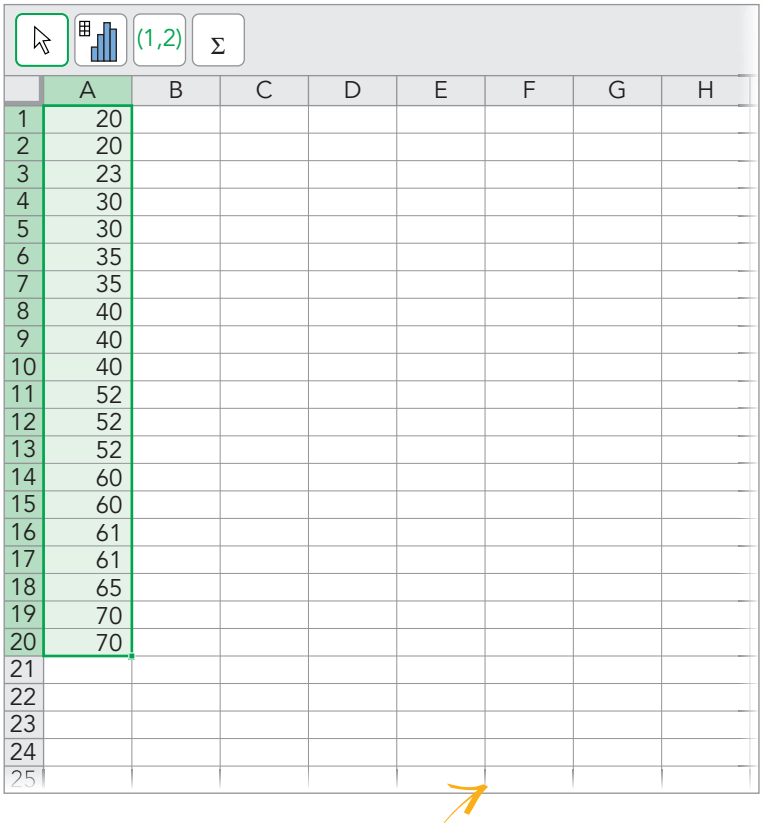
Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Oriente os estudantes na escolha do *software* ou aplicativo para a construção das representações de modo que o programa escolhido apresente todas as funcionalidades necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir. Auxilie-os também nas explorações iniciais do programa e na identificação das ferramentas e das configurações disponíveis, além de como acessá-las.

Agora, vamos utilizar algumas representações gráficas estudadas neste capítulo para apresentar esses dados. A seguir apresentamos alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* de Geometria dinâmica.

1º passo: No *software* escolhido, encontre e selecione a opção "planilha". Depois, preencha a planilha que vai aparecer com as idades mostradas na tabela anterior.

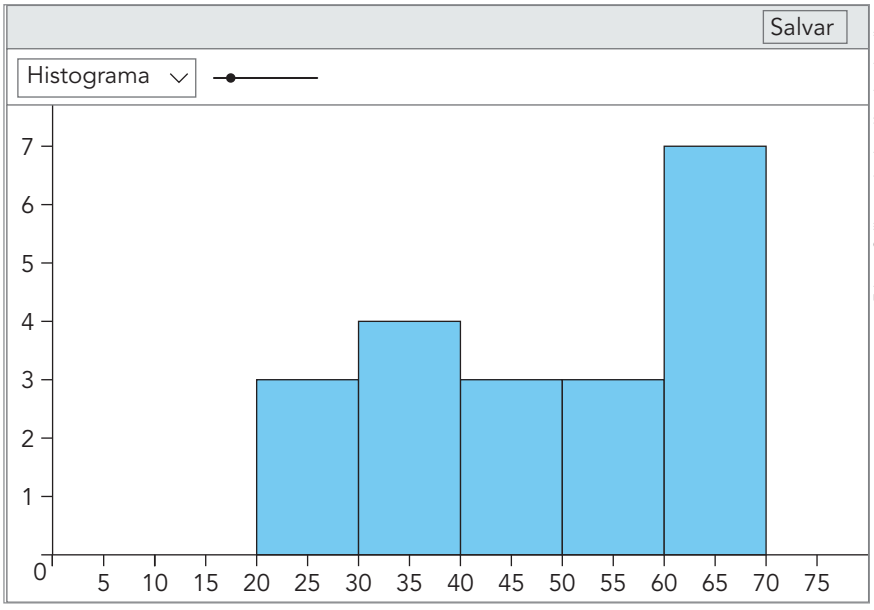
2º passo: Selecione as células da planilha com as idades. Em seguida, localize e selecione a opção do *software* que gera um histograma.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	20							
2	20							
3	23							
4	30							
5	30							
6	35							
7	35							
8	40							
9	40							
10	40							
11	52							
12	52							
13	52							
14	60							
15	60							
16	61							
17	61							
18	65							
19	70							
20	70							
21								
22								
23								
24								
25								

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de planilha, no *software* de Geometria dinâmica, após o 1º passo.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de histograma, no *software* de Geometria dinâmica, após o 2º passo.

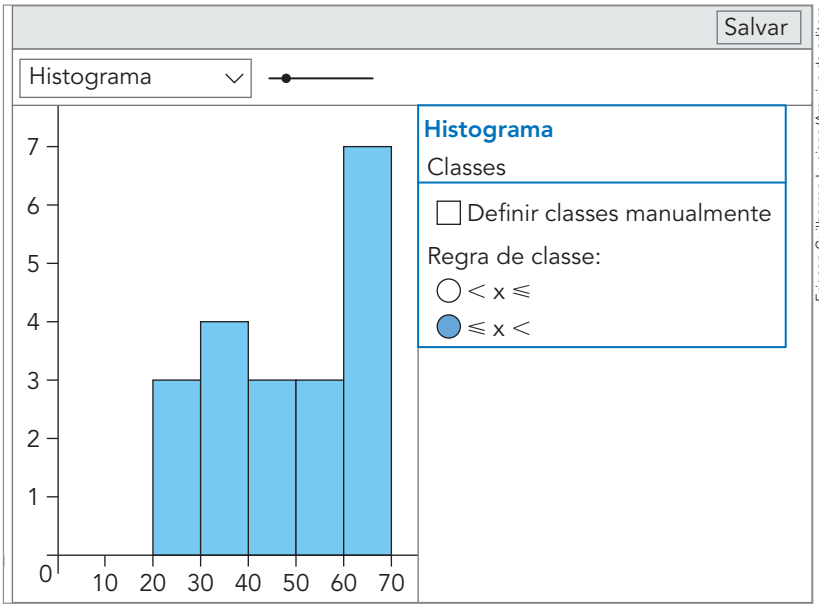
Fique atento

Em alguns *softwares*, a opção de gerar um histograma aparece como "Análise univariada".

Fique atento

É possível alterar a quantidade de classes (intervalos) do histograma movimentando o controle deslizante que provavelmente aparecerá na tela. Movimente o controle deslizante e analise as alterações apresentadas no histograma.

3º passo: Em alguns *softwares*, é possível alterar a regra de classe manualmente. No exemplo a seguir, está selecionada a opção $\leqslant x <$.



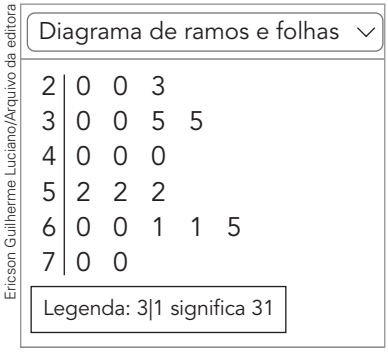
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de histograma, no *software* de Geometria dinâmica, após o 3º passo.

Note que, no cálculo do *software*, o valor 70 ficou dentro do intervalo da última classe e, nesse caso, o limite superior está incluso nela. Assim, temos um intervalo fechado à esquerda e à direita, que denotamos por ⊢⊣. Desse modo, temos os seguintes intervalos no histograma gerado: 20 ⊢ 30, 30 ⊢ 40, 40 ⊢ 50, 50 ⊢ 60 e 60 ⊢⊣ 70.

4º passo: Localize e selecione a opção que gera um diagrama de folhas no programa. O programa deverá exibir o respectivo diagrama para o conjunto de dados.

Depois, salve o diagrama de ramos e folhas que você criou.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de diagrama, no *software* de Geometria dinâmica, após o 4º passo.

Fique atento

Em alguns *softwares*, as opções de salvar o projeto aparecem como "Gravar" ou "Baixar como".

1. Analise novamente o histograma gerado no *software* e responda: Qual classe apresenta a maior frequência? Classe: 60 ⊢⊣ 70.
2. Determine, analisando o diagrama de ramos e folhas, os valores mínimo e máximo das idades. O valor mínimo é 20 anos de idade, e o máximo, 70 anos de idade.
3. Agora, junte-se a um colega e façam uma pesquisa com 15 colegas de sala para descobrir a quantidade de irmãos e a quantidade de pessoas que residem na casa de cada um deles. Depois, utilizem o *software* selecionado para fazer um histograma e um diagrama de ramos e folhas para cada uma das variáveis pesquisadas. Por fim, analisem os dados obtidos, identificando, por exemplo, a quantidade de irmãos mais frequente. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Conexões

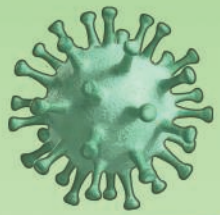
Poliomielite

1

A poliomielite é uma doença causada pelo poliovírus. Vírus são parasitas intracelulares com uma estrutura muito simples: basicamente são formados por apenas um material genético (DNA ou RNA e, no caso dos citalomegavírus, ambos) e uma cápsula proteica que protege esse material genético. A cápsula proteica é chamada de capsídeo e o formato dela nos poliovírus é o de um icosaedro regular.

2

As más condições habitacionais e a falta de saneamento básico e de higiene são alguns dos fatores que favorecem a transmissão do poliovírus. A infecção da medula e do cérebro pelo poliovírus costuma causar sequelas motoras, como paralisia de uma das pernas, dificuldade de falar, atrofia muscular e osteoporose.



Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Saúde*. Sugerimos que ela seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

3

Além das consequências citadas, os sintomas mais frequentes da poliomielite são:

- mal-estar;
- febre;
- vômitos;
- constipação intestinal (prisão de ventre);
- espasmos;
- dor de cabeça;
- dor de garganta e no corpo;
- diarreia;
- rigidez na nuca.

Ilustrações: Luis Moura/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Imagens em cores fantasia.

4

O último registro de poliomielite no Brasil foi em 1990. Nas últimas 3 décadas, têm sido feitas campanhas nacionais de vacinação, muitas delas 2 vezes ao ano, para que a taxa de 95% de imunização (para crianças com até 1 ano de vida), recomendada pela Organização Mundial da Saúde (OMS), seja atingida.

Não escreva no livro

Luis Moura/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

5

Não existe tratamento específico para poliomielite, e a vacina é a única maneira de prevenção da doença. Por isso, é muito importante que as crianças menores de 5 anos sejam vacinadas.

Fonte dos dados: POLIOMIELITE. Portal *gov.br*. Disponível em: https://tedit.net/26va6b. Acesso em: 14 ago. 2024.

Conecte com o texto

1. Em grupos, façam uma pesquisa com o intuito de descobrir quantos estudantes do Ensino Médio da escola sabem o que é poliomielite e como preveni-la. Para isso, elaborem no caderno um questionário com as perguntas que serão feitas. Resposta pessoal.

Pesquisa e debata

Professor, se possível, organize os estudantes de modo que grupos diferentes entrevistem pessoas diferentes. Se houver 5 outras turmas de Ensino Médio, por exemplo, você pode organizar os grupos para que cada um entreviste os estudantes de uma delas.
Exemplos de pergunta: "Você já ouviu falar da poliomielite?"; "O que você sabe sobre poliomielite?"; "Você sabe qual é a principal maneira de combater essa doença?".

2. De posse dos dados da pesquisa realizada por vocês, acessem o *site* DataSus (disponível em: https://tedit.net/uiiixk; acesso em: 24 jul. 2024), que, entre outras informações, divulga ano a ano a taxa de imunização atingida com algumas vacinas por faixa etária, região, estado e município, entre elas a da poliomielite. Procurem a proporção de imunização para o município onde a escola se encontra e anotem as informações no caderno ou em uma folha avulsa.

A resposta depende dos dados coletados pelos estudantes.

Claudia Balista/Arquivo da editora

A vacina contra poliomielite (contra pólio) pode ter outros nomes na caderneta de vacinação, como vacina inativada poliomielite (VIP), poliomielite, pentavalente (no caso, apenas a pentavalente acelular inclui poliomielite), hexavalente ou Sabin, esta última uma referência a Albert Bruce Sabin (1906-1993), médico e pesquisador polonês que desenvolveu a vacina oral contra a poliomielite, conhecida como "gotinha" no Brasil.

3. Com os dados que vocês pesquisaram, promovam uma campanha para divulgar o resultado da pesquisa e mostrem as proporções de vacinação que obtiveram para o município, o estado e a região onde a escola se encontra. Com a turma, e com o auxílio do professor, decidam quais indicadores e representações dos dados (gráficos, tabelas ou outra representação) vão ser usados e como comunicar os resultados da pesquisa de maneira clara e precisa.

A resposta depende dos dados pesquisados pelos estudantes. Professor, oriente os estudantes a utilizar as representações gráficas que já estudaram ao longo deste capítulo.

Sobre o assunto

Para obter mais informações sobre a poliomielite e os mitos sobre a vacina, sugerimos o *site* do Ministério da Saúde, disponível em: https://tedit.net/26va6b. Acesso em: 27 jul. 2024.

Probabilidade e Estatística

Quando se diz que a probabilidade de um avião cair é, aproximadamente, 1 em 1 milhão, é porque a frequência relativa de ocorrência de acidentes corresponde a aproximadamente 1 acidente a cada 1 milhão de decolagens.

Quanto maior for a quantidade de experimentos, melhor será a estimativa da probabilidade usando-se a frequência relativa. Ao jogar uma moeda não viciada 2 vezes, é possível que ocorra cara 2 vezes. Contudo, seria absurdo afirmar, após esses experimentos, que a probabilidade de ocorrer cara ao lançar uma moeda é 100%, pois a quantidade de experimentos é muito pequena.

Entretanto, ao jogar uma moeda 200 vezes, é possível verificar algo como 94 caras e 106 coroas; jogando 2 000 vezes, 1 034 caras e 966 coroas; 20 000 vezes, 10 091 caras e 9 909 coroas.

Ocorrência de face "cara" no lançamento de uma moeda não viciada

Quantidade de jogadas	FA	FR (em %)
2	2	100
200	94	47
2 000	1 034	51,7
20 000	10 091	50,46

Dados elaborados para fins didáticos.

Pela tabela anterior, portanto, percebe-se que a frequência relativa tende ao valor teórico de 50% para a probabilidade de ocorrer cara e 50% para a probabilidade de ocorrer coroa.

Previsões do tempo, resultados eleitorais, mortalidade causada por doenças, entre outras, são probabilidades calculadas usando-se frequências relativas de pesquisas estatísticas. Nesses casos, quanto maior for o histórico de dados a ser analisado, melhor será a previsão.

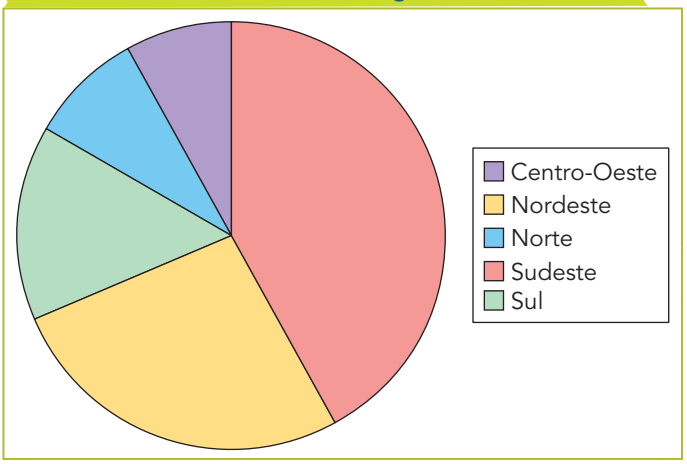
Yeti studio/Shutterstock

Lançamento de uma moeda.

Atividades resolvidas

1. Considerando que a população total do Brasil registrada em 2022 foi aproximadamente 210 milhões de habitantes e que no gráfico a medida de abertura do ângulo do setor circular que representa a região Centro-Oeste é 28,8°, calcule a porcentagem da população da região Centro-Oeste em relação à população do Brasil e o número de habitantes dessa região em 2022.

Distribuição da população brasileira por regiões de acordo com o Censo Demográfico de 2022



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Censo Demográfico 2022*: prévia da população. Rio de Janeiro: IBGE, 2022. Disponível em: https://tedit.net/erbntf. Acesso em: 27 jul. 2024.

Resolução

$$\begin{matrix} 360° & — & 100\% \\ 28{,}8° & — & x \end{matrix} \Rightarrow x \simeq 8\%$$

8% de 210 000 000 de habitantes é igual a 16 800 000 habitantes.

Logo, a população da região Centro-Oeste em 2022 correspondia a aproximadamente 8% da população do Brasil, ou seja, 16 800 000 habitantes.

2. Uma garrafa opaca fechada contém 20 bolinhas idênticas, distribuídas entre 3 cores: preta, vermelha e amarela. Não é possível identificar as cores das bolinhas, exceto se virarmos a garrafa de ponta-cabeça, quando uma das bolinhas vai para o gargalo e então se pode identificar a cor dela. Ao longo de vários dias, repetiu-se 2 000 vezes a seguinte operação: chacoalhava-se e tombava-se a garrafa para então anotar a cor da bolinha que aparecia no gargalo, sem retirar a bolinha da garrafa. A quantidade de vezes que cada cor foi obtida foi registrada no quadro a seguir.

Qual deve ser a quantidade de bolinhas de cada cor dentro da garrafa?

Bolinhas na garrafa

Cor da bolinha	Quantidade de ocorrências
Preta	396
Vermelha	910
Amarela	694

Dados elaborados para fins didáticos.

Resolução

Como a quantidade de experimentos é grande, podemos esperar que a frequência relativa seja aproximadamente igual à probabilidade teórica. A tabela de frequências relativas está registrada no quadro a seguir.

Frequências das cores obtidas ao verificar 2 000 vezes a cor de uma bolinha

Cor da bolinha	Quantidade de ocorrências	Frequência relativa
Preta	396	0,198
Vermelha	910	0,455
Amarela	694	0,347

Dados elaborados para fins didáticos.

Assim, se tivermos x bolinhas pretas, y bolinhas vermelhas e z bolinhas amarelas, as probabilidades teóricas serão:

$$p(\text{preta}) = \frac{x}{20} \qquad p(\text{vermelha}) = \frac{y}{20} \qquad p(\text{amarela}) = \frac{z}{20}$$

Igualando as probabilidades teóricas com as respectivas frequências relativas, temos:

$$\frac{x}{20} = 0{,}198 \Rightarrow x = 3{,}96$$

$$\frac{y}{20} = 0{,}455 \Rightarrow y = 9{,}10$$

$$\frac{z}{20} = 0{,}347 \Rightarrow z = 6{,}94$$

Como as quantidades x, y e z de bolinhas são números inteiros, temos $x = 4$, $y = 9$ e $z = 7$.

Atividades

Não escreva no livro

35. Junte-se a um colega e verifiquem **empiricamente** que a probabilidade de ocorrência da face cara no lançamento de uma moeda é $\frac{1}{2}$, e a probabilidade da ocorrência da face coroa também é $\frac{1}{2}$. Respostas pessoais.

empiricamente: que se fundamenta na experiência prática.

a) Qual resultado vocês esperam para 20 lançamentos dessa moeda?

b) Lancem a moeda 20 vezes e registrem no caderno os resultados em uma tabela. Em seguida, contabilizem o total de vezes que cada face saiu. Vocês acertaram o resultado?

c) Repitam a experiência jogando a mesma moeda no mesmo local e com a mesma intensidade de força. Vocês obtiveram o mesmo resultado? Na opinião de vocês, por que isso ocorreu?

d) Se uma moeda for lançada 1000 vezes e todos os resultados forem cara, o que vocês podem supor a respeito dessa moeda?

36. Um dado foi lançado 1000 vezes, e a quantidade de vezes que cada face foi obtida foi registrada na tabela a seguir.

Quantidade de vezes que cada face foi obtida em 1 000 lançamentos de um dado

Face	1	2	3	4	5	6
Quantidade de ocorrências	157	171	160	166	171	175

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Junte-se a um colega e façam no caderno uma tabela de frequências relativas expressando os resultados em porcentagem.

b) Na opinião da dupla, o dado jogado é honesto? Justifique.

36. a) A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
b) As frequências relativas são parecidas e com valores em torno do resultado teórico (16,6%). Com 1 000 jogadas, o resultado teórico esperado seria que ocorresse cerca de 166 vezes cada face. Assim, podemos afirmar que o dado aparenta não estar viciado.

Não escreva no livro

Texto para a próxima atividade.

As mensalidades dos planos de saúde são estabelecidas por faixa etária. Acompanhe na tabela a seguir alguns valores.

Valores das mensalidades do plano "Melhor Saúde"

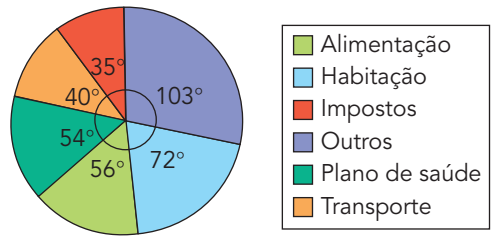
Faixa etária	Mensalidade (em reais)
Até 18 anos	312,28
De 19 a 33 anos	519,17
De 34 a 48 anos	781,20
De 49 a 58 anos	1083,17
59 anos ou mais	1768,49

Dados elaborados para fins didáticos.

O gráfico apresenta o comprometimento do rendimento mensal de uma pessoa que recebe 4 salários-mínimos por mês e aderiu ao plano de saúde "Melhor Saúde".

Em cada setor do gráfico, estão indicados o item referente ao gasto e a medida de abertura do ângulo correspondente, em graus.

Comprometimento do rendimento mensal



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

37. Sabendo que o salário-mínimo nacional valia, em 2022, R$ 1.302,00, junte-se a um colega e resolvam os itens no caderno, utilizando uma calculadora quando necessário.

a) Desconsiderando a opção "Outros", que não se refere a um gasto específico, qual é o item que consome a maior fatia do salário dessa pessoa? Habitação.

b) Determinem qual é o comprometimento do rendimento mensal dessa pessoa, em porcentagem, com o plano de saúde "Melhor Saúde".

c) Determinem a que faixa etária pertence essa pessoa. De 34 anos a 48 anos.

d) Sabendo que, em 1º de janeiro de 2024, o salário-mínimo nacional foi reajustado para R$ 1.412,00 e que a mensalidade do plano de saúde "Melhor Saúde" subiu na mesma proporção que o salário-mínimo (comparado com 2022), calculem o custo do plano de saúde para uma criança de 8 anos em 2024.

e) Na opinião de vocês, por que o valor da mensalidade de um plano de saúde tende a aumentar de acordo com a faixa etária?

Exemplo de resposta: Porque, à medida que envelhecemos, os gastos com saúde tendem a aumentar.

fizkes/Shutterstock

O Rol de Procedimentos e Eventos em Saúde da ANS determina os procedimentos que devem, obrigatoriamente, ser disponibilizados por um plano de saúde.

b) Comparando 54° com 360°, temos: $\frac{54}{360} = 0{,}15 = 15\%$.
Então, essa pessoa compromete 15% da renda mensal com o plano de saúde.

d) Proporção de aumento: $\frac{1\,412}{1\,302} \simeq 1{,}0845$.
Aumento da mensalidade do plano de saúde para até 18 anos: 1,0845 · R$ 312,28 ≃ R$ 338,67.

Além da sala de aula

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Alimentando o mundo em 2050

Projeções da Organização das Nações Unidas (ONU) estimam que a população mundial alcançou 8 bilhões de pessoas em 2022, e esse número deve atingir 9 bilhões em 2037.

Alimentar todas essas pessoas é um grande desafio. Ainda segundo a ONU, atualmente 828 milhões de pessoas passam fome, embora uma área aproximadamente equivalente à da América Latina seja destinada à plantação de alimentos, e uma área aproximadamente equivalente à do continente africano seja destinada à criação de animais para o abate.

Aumentar em larga escala as áreas destinadas à agricultura, no entanto, não é uma boa saída, já que implica gerar novos desmatamentos, destruindo fauna e flora locais e contribuindo para desequilíbrios climáticos.

Pensando na quantidade de calorias geradas para alimentar seres humanos, apenas 55% das calorias originadas nas plantações são utilizadas diretamente no consumo humano. Cerca de 35% das calorias oriundas de plantações são utilizadas para alimentar os animais de abate, e 9% delas acabam sendo transformadas em biocombustíveis ou utilizadas em produtos industriais.

jrslompo/Shutterstock

O Brasil é o maior produtor e exportador de uma das principais *commodities* (produtos que funcionam como matéria-prima) do mundo – a soja. Em 2020/2021, o Brasil produziu 138 milhões de toneladas de soja, com a ocupação de 39 milhões de hectares de área plantada, aproximadamente. Dela derivam grãos para a alimentação humana, o farelo, que é o principal ingrediente para nutrição animal, e o óleo para produção de bens de consumo para cozinha, medicamentos e biodiesel.

Ainda considerando os valores energéticos, para cada 100 calorias consumidas por uma vaca leiteira, o ser humano obtém de volta 40 calorias por meio do leite. Na criação de aves, para cada 100 calorias gastas, 22 são obtidas por meio de ovos, e 12 por meio de carne de frango. Para a carne de porco, essa proporção é de 100 para 10, e para a carne bovina a proporção é de 100 calorias gastas para apenas 3 calorias obtidas revertidas em alimentação humana.

Pensar na alimentação humana por meio apenas da quantidade de calorias ingeridas é uma simplificação, pois uma alimentação saudável deve ser equilibrada em relação à quantidade ingerida de nutrientes, proteínas, carboidratos e gorduras.

Fonte dos dados: LADEIRA, Sávio. Somos 8 bilhões de pessoas e não vamos parar por aí. *G1*, [*s. l.*], c2022. Disponível em: https://tedit.net/omn264; FOME cresce no mundo e atinge 9,8% da população global. *ONU News*, [*s. l.*], 6 jul. 2022. Disponível em: https://tedit.net/7cfreb; LENNON, Raul. Entenda como o Brasil se tornou o maior produtor e exportador de soja do mundo. *Agência FPA*, [*s. l.*], 15 set. 2022. Disponível em: https://tedit.net/ue7xoa. Acesso em: 24 jul. 2024.

Uma das soluções para aumentar a produção de alimentos é conseguir aproveitar melhor os terrenos já destinados à agricultura. Esses cuidados vão desde a utilização de equipamentos e tecnologias mais modernas nas plantações, irrigações e colheitas até a mudança dos hábitos alimentares da população, reduzindo-se principalmente o consumo de carne oriunda de animais ruminantes, como vacas, ovelhas e cabras.

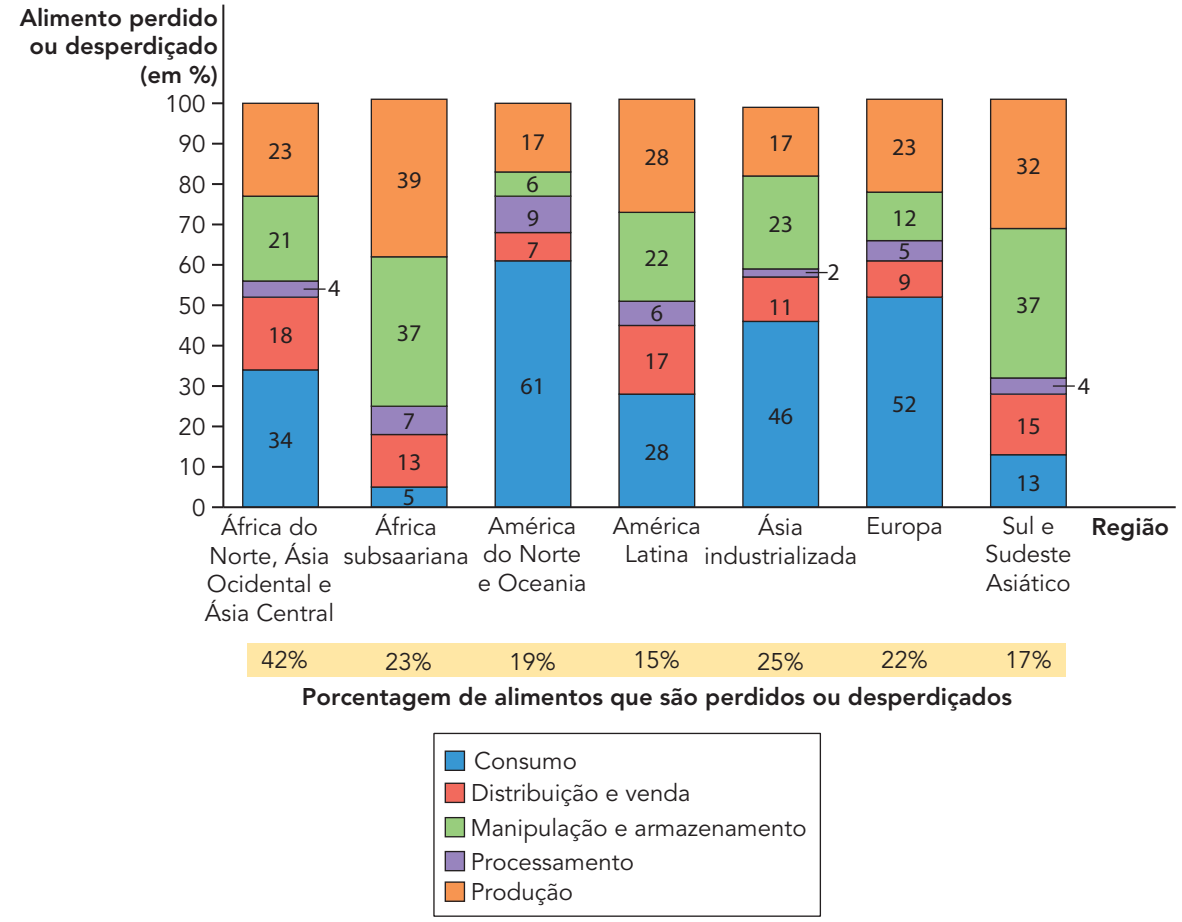
Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação para o Consumo*, *Educação Alimentar e Nutricional* e *Saúde*. Sugerimos que ela seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Mesmo com a quantidade crescente de pessoas que passam fome, um dos fatores limitantes da disponibilidade de alimentos em grande escala ainda é o desperdício da comida produzida. Um relatório da ONU para a Organização para Alimentação e Agricultura (FAO) estima que $\frac{1}{3}$ dos alimentos produzidos, equivalente a 1,3 bilhão de toneladas, é perdido ou desperdiçado anualmente.

Da produção ao consumidor final, os alimentos passam por diferentes etapas: manipulação e armazenamento, processamento (se aplicável), distribuição e venda. As perdas podem ocorrer em quaisquer das etapas necessárias para que o alimento chegue ao consumidor final, como mostra o gráfico a seguir, com dados de 2011.

Alimentos perdidos ou desperdiçados em cada etapa da cadeia de obtenção por regiões do mundo (em %)

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora



Fontes dos dados: RECEITA para reduzir perda e desperdício de alimentos. *WRI Brasil*, [*s. l.*], 26 set. 2017. Disponível em: https://tedit.net/fvi40g; FAO. *Global Food Losses and Food Waste:* Extent, Causes and Prevention. Roma: UN FAO, 2011. Disponível em: https://tedit.net/gozyj7. Acesso em: 27 jul. 2024.

O gráfico apresenta a porcentagem de alimentos perdidos e desperdiçados em cada etapa da obtenção dos alimentos, para diferentes regiões do mundo. Os valores apresentados são aproximados e não totalizam 100% em todos os casos.

De acordo com o gráfico, é possível verificar que a etapa que apresenta a maior parte do percentual de alimentos perdidos ou desperdiçados varia em diferentes regiões do mundo. Regiões com maior abundância de alimento, como a América do Norte e a Europa, têm maior percentual de desperdício durante o consumo. Já parte da Ásia e da África têm maiores problemas de infraestrutura, perdendo mais alimentos durante a produção e o transporte.

Sobre o assunto

Para obter mais informações sobre a produção mundial de alimentos, sugerimos os *sites* indicados a seguir (acesso em: 27 jul. 2024).

- Banco Mundial. Disponível em: https://tedit.net/hbhfyc.
- Organização das Nações Unidas para Alimentação e Agricultura (FAO). Disponível em: https://tedit.net/3lne6s.
- WRI Brasil. Disponível em: https://tedit.net/g6qsh5.

Indo além: O cardápio médio

Os textos anteriores nos convidam a uma reflexão importante sobre alimentação: o custo energético na produção de animais para abate, isto é, para a produção de proteína animal é extremamente ineficiente, variando de 12% a apenas 3% dependendo da espécie de animal criado para essa finalidade. Uma maneira de amenizar essa ineficiência é criar o hábito de uma dieta com consumo reduzido de proteína animal e, em compensação, aumento de consumo de proteínas vegetais, por exemplo.

Etapas

1. Organização

Dividam a turma em 3 grupos: cada um deles investigará o consumo de um tipo de proteína animal dentre as citadas no texto (bovina, suína e de frango).

2. Pesquisa

- Elaborem uma pesquisa investigativa com a finalidade de descobrir qual é a quantidade de proteína consumida pelas pessoas que vocês conhecem.
- Considerem também investigar na mesma pesquisa o consumo de alimentos ricos em proteínas vegetais, por exemplo: oleaginosas, cereais e leguminosas.

3. Desenvolvimento

- Desenvolvam, de acordo com os hábitos das pessoas que vocês investigaram na pesquisa, o "cardápio médio" dessa amostra pesquisada.
- Pesquisem, em *sites* confiáveis, a quantidade de proteína contida no cardápio médio que vocês obtiveram.

4. Produto final

Opção 1: Sugestão de cardápio com redução de proteína animal.

- Mapeiem quais são as proteínas animais mais consumidas segundo a pesquisa de vocês.
- Pesquisem alimentos de origem vegetal que tenham a mesma quantidade de proteína dessas carnes.
- Apresentem um cardápio alternativo, com mais opções vegetais e menos consumo de carnes.
- Se possível, compartilhem esse cardápio com a amostra de pessoas que respondeu à pesquisa, mas lembre-as de que é apenas uma sugestão e não tem nenhuma recomendação médica.

Opção 2: Dia de alimentação na escola.

- Organizem um evento para a escola, os familiares e as pessoas no entorno da escola focado em bons hábitos alimentares.
- Exibam cartazes mostrando os alimentos mais comuns que vocês identificaram na pesquisa e façam uma ficha nutricional de cada um deles.
- Se houver possibilidade, convidem um nutricionista para palestrar e apresentar alimentos que tenham carga proteica maior ou equivalente às carnes, por exemplo, entre outras dicas nutricionais relevantes.

CAPÍTULO 2

Medidas de tendência central e medidas de dispersão

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Situação-problema

Campeonato Mundial de Voleibol

O voleibol é um dos esportes mais praticados no Brasil. Nos Jogos Olímpicos de Los Angeles, em 1984, a equipe masculina foi medalha de prata. A partir daí, tanto no campeonato masculino como no feminino, ano a ano, os atletas brasileiros vêm colecionando medalhas nas mais diversas competições.

Analise o desempenho da seleção feminina nos jogos das quartas de final do Campeonato Mundial de 2022.

Kazuhiro NOGI/AFP

Seleção feminina brasileira durante a Copa do Mundo de Voleibol de 2019, realizada em Osaka, Japão.

Seleção feminina de voleibol no Campeonato Mundial de 2022

Partida \ Set	1	2	3	4	5	Total
Itália 3 × 1 China	25-16	25-22	13-25	25-17		**88-80**
Estados Unidos 3 × 0 Turquia	25-22	25-15	25-20			**75-57**
Brasil 3 × 2 Japão	18-25	18-25	25-22	27-25	15-13	**103-110**
Sérvia 3 × 2 Polônia	21-25	25-21	25-19	24-26	16-14	**111-105**

Fonte dos dados: FEDERAÇÃO INTERNACIONAL DE VOLEIBOL. Disponível em: https://tedit.net/1l72pj. Acesso em: 15 ago. 2024.

a) Nos 4 primeiros *sets*, qual é a média de pontos por *set* que a equipe brasileira obteve no jogo das quartas de final? $\frac{18 + 18 + 25 + 27}{4} = 22$; logo, 22 pontos.

b) Considerando o resultado das partidas, qual placar mais se repetiu? 3 × 2, com 2 ocorrências.

c) Qual foi a equipe que menos pontuou? Turquia (57 pontos).

d) Analisando os resultados, qual é a mediana do total de pontos das equipes vencedoras e perdedoras? $\frac{88 + 103}{2} = 95{,}5$; logo, 95,5 pontos.

e) Qual é a diferença entre os pontos da equipe que mais pontuou e a que menos pontuou? 111 − 57 = 54; logo, 54 pontos.

Medidas de tendência central

Você já deve ter se deparado com algumas medidas estatísticas que permitem resumir um grupo de dados ou dar uma ideia da distribuição deles.

Em uma competição de voleibol, a média de pontos convertidos por atleta pode definir qual mais se destacou. Nesse caso, estamos utilizando um valor para representar uma informação em um conjunto de dados. Há outras situações em que é necessário determinar um representante para um grupo, por exemplo, podemos estabelecer uma única idade que caracteriza um grupo de pessoas.

CarlosBarquero/Adobe Stock

Grupo de pessoas que pode ser caracterizado por uma média de 30 anos de idade.

Em situações como as citadas, o número obtido é a **medida da tendência central** dos vários números usados. Vamos retomar a **média aritmética**, que é a mais conhecida entre as medidas de tendência central, além de estudar a **mediana** e a **moda**.

Média aritmética (*MA*)

Considerando um grupo de pessoas com 22, 20, 21, 24 e 20 anos, podemos calcular a média aritmética adicionando todas as idades e dividindo pela quantidade de pessoas.

$$MA = \frac{22 + 20 + 21 + 24 + 20}{5} = \frac{107}{5} = 21{,}4$$

Dizemos, então, que a média aritmética, ou simplesmente a média de idade do grupo, é 21,4 anos.

Formalizando, temos que, dados os n valores x_1, x_2, x_3, ..., x_n de uma variável, a média aritmética é o número obtido da seguinte maneira:

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Média aritmética ponderada (*MP*)

Agora considere um estudante que, no decorrer do bimestre, obteve 6,5 na prova (peso 2), 7,0 na pesquisa (peso 3), 6,0 no debate (peso 1) e 7,0 no trabalho em grupo (peso 2), a média dele, que nesse caso é chamada **média aritmética ponderada**, será:

$$MP = \frac{2 \cdot 6{,}5 + 3 \cdot 7{,}0 + 1 \cdot 6{,}0 + 2 \cdot 7{,}0}{2 + 3 + 1 + 2} = \frac{13 + 21 + 6 + 14}{8} = \frac{54}{8} = 6{,}75$$

Formalizando, temos que, dados os n valores x_1, x_2, x_3, ..., x_n atribuídos a n frequências (ou pesos) p_1, p_2, p_3, ..., p_n, a média aritmética ponderada é o número obtido da seguinte maneira:

$$MP = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}$$

Atividades resolvidas

Atividade resolvida passo a passo

1. (Uncisal) Em cada bimestre, uma faculdade exige a realização de quatro tipos de avaliação, calculando a nota bimestral pela média ponderada dessas avaliações. Se a tabela apresenta as notas obtidas por uma aluna nos quatro tipos de avaliações realizadas e os pesos dessas avaliações, sua nota bimestral foi aproximadamente igual a:

Avaliação	Nota	Peso
Prova escrita	6,00	4
Avaliação continuada	7,00	4
Seminário	8,00	2
Trabalho em grupo	9,00	2

a) 8,6. **c)** 7,5. **e)** 6,8.
b) 8,0. **d)** 7,2.

Resolução

Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

É dada uma tabela que apresenta as notas obtidas por uma estudante nos quatro tipos de avaliação e o peso de cada uma delas.

Tais informações servem para o cálculo da nota bimestral, que é obtida pela média aritmética ponderada.

b) O que se pede?

Pede-se a nota bimestral da estudante.

Planejando a solução

Os dados contidos no enunciado informam que se trata de um problema de média ponderada, a qual será obtida de acordo com as informações presentes na tabela.

Indicando as notas por n_1, n_2, n_3 e n_4, o cálculo da média ponderada é realizado da seguinte maneira:

$$MP = \frac{(p_1 \cdot n_1) + (p_2 \cdot n_2) + (p_3 \cdot n_3) + (p_4 \cdot n_4)}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}$$

Executando o que foi planejado

Nota bimestral da estudante:

$$MP = \frac{(4 \cdot 6) + (4 \cdot 7) + (2 \cdot 8) + (2 \cdot 9)}{4 + 4 + 2 + 2} = \frac{86}{12} \simeq 7{,}2$$

Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **d**.

Ampliando a atividade Não escreva no livro

a) Devido a algumas mudanças na coordenação pedagógica da faculdade citada, os pesos das avaliações foram modificados e passaram a ser números naturais decrescentes. O peso da prova escrita continua igual a 4 e a ordem de decrescimento é a mesma indicada na tabela. Sendo assim, qual é o peso das demais avaliações?

b) O que vocês acham do método de avaliação das escolas? Resposta pessoal.

a) Como são 4 números naturais decrescentes e o 1º número é 4, temos que os demais são 3, 2 e 1, respectivamente.

A média aritmética é usada como medida de tendência central, ou seja, como maneira de, por meio de um único número, dar uma ideia das características de determinado conjunto de valores. No entanto, é importante ressaltar que, em algumas situações, a presença de um valor bem maior ou bem menor do que os demais faz com que a média aritmética não consiga exprimir o perfil correto do conjunto.

Consideremos, por exemplo, um grupo de pessoas com idades de 2, 3, 2, 1, 2 e 50 anos. A média de idade, que é 10 anos, não demonstra as características desse grupo em termos de idade. Em casos como esse são usadas outras medidas de tendência central, como a **mediana** e a **moda**.

Mediana (*Me*)

A presença de valores que destoam muito dos demais, por serem muito maiores ou muito menores, pode distorcer a média aritmética, fazendo com que ela não caracterize de maneira adequada o conjunto de valores. Por esse motivo, é conveniente definirmos outra medida de tendência central, a **mediana**.

Assim, dados n números na sequência $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, em que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, a **mediana** será:

- o número que ocupar a posição central se n for ímpar;
- a média aritmética dos 2 números que ocuparem as posições centrais se n for par.

A sequência $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é chamada de **rol**.

Acompanhe alguns exemplos.

a) Em uma turma, foi anotada a quantidade de estudantes que faltaram durante um período de 15 dias: 3, 5, 2, 0, 2, 1, 3, 4, 5, 7, 0, 2, 3, 4 e 7. Organizando os valores em ordem crescente, temos:

$$\underbrace{0, 0, 1, 2, 2, 2, 3}_{\text{7 valores}}, \underset{\downarrow}{3}, \underbrace{3, 4, 4, 5, 5, 7, 7}_{\text{7 valores}}$$

Me

Como o número de elementos é ímpar, temos um número ocupando a posição central (8ª posição).

Logo, a mediana é 3.

Simbolicamente, registramos $Me = 3$ estudantes.

b) As idades dos estudantes de uma equipe são 12, 16, 14, 12, 13, 16, 16 e 17 anos.

Para determinar a mediana, inicialmente colocamos esses valores na ordem crescente (também poderíamos ter colocado na ordem decrescente):

$$12, 12, 13, \underbrace{14, 16}_{\substack{\text{as}\\ \text{2 posições}\\ \text{centrais}}}, 16, 16, 17$$

Como temos uma quantidade par de valores, calculamos a média aritmética entre os 2 números que ocupam as posições centrais, que são o 4º e o 5º termos.

Logo, a mediana é dada por: $Me = \dfrac{14 + 16}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$.

Escrevemos $Me = 15$ anos.

Fique atento

Na definição, o rol é uma sequência não decrescente, com todas as repetições de valores (se houver). Também podemos estabelecer o rol como a sequência não crescente, com todas as repetições de valores (se houver), dada por $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, em que $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n$.

Não escreva no livro

Reflita

Percentualmente, quantos valores num conjunto de dados são menores ou iguais à mediana? E maiores ou iguais a ela?

O esperado é que pelo menos 50% dos valores sejam menores ou iguais à mediana e, da mesma maneira, pelo menos 50% dos valores sejam maiores ou iguais a ela.

Moda (*Mo*)

No exemplo do grupo de pessoas com idades de 2, 3, 2, 1, 2 e 50 anos, a média aritmética das idades é 10 anos e, no entanto, essa medida pouco informa sobre o grupo de pessoas, pois a idade 50 anos distorce essa medida. Em casos como esse é mais eficiente utilizar a moda das idades para representar o conjunto de dados. Nesse exemplo, a moda das idades é 2 anos ($Mo = 2$ anos).

Assim, dados n números, a **moda** será o valor que aparecer mais vezes no conjunto.

Analise outro exemplo.

Suponha que um estudante tenha anotado, durante 10 dias, a medida de intervalo de tempo necessária, em minutos, para ir da casa dele à escola. Os registros que ele obteve foram: 15 min, 14 min, 18 min, 15 min, 14 min, 25 min, 16 min, 15 min, 15 min e 16 min. Nesse caso, a moda é 15 min, ou seja, $Mo = 15$ min.

Se as notas obtidas por um estudante foram 6,0; 7,5; 7,5; 5,0 e 6,0, dizemos que a moda é 6,0 e 7,5 e que a distribuição é **bimodal**.

Observação: Quando não há repetição de números, como para os números 7, 9, 4, 5 e 8, não há moda e a distribuição é chamada **amodal**.

Não escreva no livro

Reflita

Em uma pesquisa com um grupo de adolescentes, foi perguntado qual era o esporte preferido de cada um deles, entre futebol, natação, vôlei, basquete e ciclismo. O resultado foi o seguinte: 14 preferiram futebol; 7, natação; 8, vôlei; 5, basquete e 4, ciclismo. Qual medida de tendência central melhor representa esse conjunto?

Resposta esperada: A moda é a mais indicada, pois, como estamos tratando nesse exemplo de uma variável qualitativa, não é possível calcular os valores de média e mediana.

Média aritmética, moda e mediana de acordo com as tabelas de frequências

Agora vamos acompanhar maneiras de determinar as medidas de tendência central estudadas quando os dados estão organizados em tabelas de frequência.

a) Vamos analisar o caso em que há frequência absoluta de cada uma das respostas.

Quantidade de irmãos de cada estudante de uma turma de Ensino Médio

Quantidade de irmãos	0	1	2	3	Total
FA	8	15	12	5	**40**

Dados elaborados para fins didáticos.

Média aritmética:

$$MA = \frac{8 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{40} = \frac{0 + 15 + 24 + 15}{40} = \frac{54}{40} = 1{,}35$$

Logo, $MA = 1{,}35$ irmão.

Fique atento

Embora 1,35 irmão aparentemente seja um absurdo, é correto um valor desse tipo, assim como 3,5 gols por partida, 7,2 medalhas por equipe, etc., pois a média aritmética é uma medida de tendência.

Mediana:

Como o total de frequências é 40 (número par), os valores centrais são o 20º e o 21º.

Se colocados na ordem crescente, teremos os 8 valores correspondentes a 0 irmão, seguidos dos 15 valores de 1 irmão, e assim por diante. Então, o 20º e o 21º valores serão, ambos, 1 irmão.

$$Me = \frac{1+1}{2} = 1$$

Logo, $Me = 1$ irmão.

Moda:

A maior frequência é 15, que corresponde ao valor 1 irmão. Logo, $Mo = 1$ irmão.

b) Considere que os valores estejam distribuídos em classes, representadas por intervalos e não por valores absolutos. Dessa maneira, não temos acesso aos dados brutos. Para o cálculo da média de uma distribuição de valores em classes, convenciona-se o uso do valor médio de cada classe (*VM*) associado a cada frequência.

Medida de massa de um grupo de pessoas

Medida de massa (em kg)	Valor médio (*VM*)	Frequência absoluta (FA)
40 ⊢ 44	42	1
44 ⊢ 48	46	3
48 ⊢ 52	50	7
52 ⊢ 56	54	6
56 ⊢ 60	58	3
Total		**20**

Dados elaborados para fins didáticos.

Dessa maneira, calculamos a média aritmética:

$$MA = \frac{1 \cdot 42 + 3 \cdot 46 + 7 \cdot 50 + 6 \cdot 54 + 3 \cdot 58}{20} = \frac{1028}{20} = 51{,}4$$

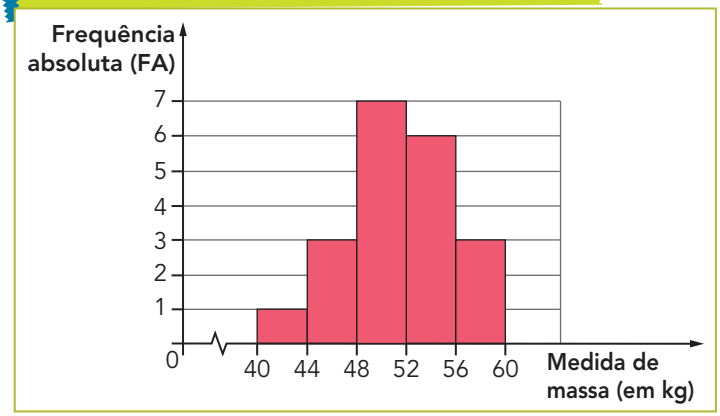
Assim, a média aritmética é 51,4 kg.

A moda em um conjunto de valores que está agrupado em classes também não é representada por um valor absoluto, mas pela classe mais frequente, chamada de **classe modal**. Nesse caso, a classe modal é 48 ⊢ 52, que tem frequência 7, e a moda é o ponto médio dessa classe, isto é, 50 kg.

Podemos representar os dados dessa distribuição para o cálculo da mediana em um histograma.

Perceba que, pela distribuição dos valores de acordo com as classes, temos 11 pessoas cuja medida de massa é menor do que ou igual a 52 kg; portanto, a mediana dessa distribuição será algum valor entre 48 kg e 52 kg.

Medida de massa de um grupo de pessoas



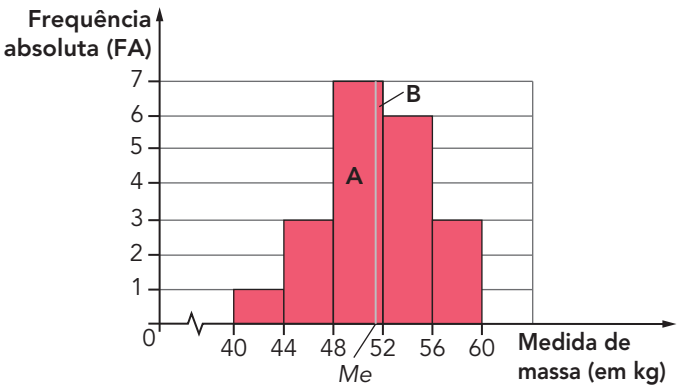
Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

A barra com formato retangular correspondente à classe de 48 kg a 52 kg representa 7 pessoas. Dividindo essa barra na abscissa correspondente à mediana, a medida de área da barra **A** representa 6 pessoas e a medida de área da barra **B** representa 1 pessoa, como mostra o 2º gráfico. Como as barras têm a mesma medida de altura, a medida de área delas é proporcional à medida de comprimento das bases. Logo, a medida de comprimento da base da barra **A** deve ser proporcional a 6 e a medida de comprimento da base da barra **B** deve ser proporcional a 1. Temos:

$$\frac{Me - 48}{6} = \frac{52 - Me}{1} \Rightarrow Me = \frac{360}{7} \simeq 51{,}4$$

Medida de massa de um grupo de pessoas



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Desse modo, conclui-se que a mediana é aproximadamente 51,4 kg.

Atividades

Não escreva no livro

1. De segunda-feira a sexta-feira, os gastos com o almoço de uma pessoa que não trabalha em casa foram 41, 35, 25, 39 e 42 reais. Determine a média (*MA*) de gasto com o almoço e a mediana (*Me*). *MA* = 36,40 reais e *Me* = 39 reais.

2. Considerando os números 126, 130, 126 e 102, no caderno, faça o que se pede.

a) Calcule a média aritmética (*MA*). 121

b) Calcule a média aritmética ponderada (*MP*) desses números, com pesos 2, 3, 1 e 2, respectivamente. 121,5

c) Calcule a mediana (*Me*). 126

d) Calcule a moda (*Mo*). 126

3. No caderno, elabore um problema que aborde as medidas de tendência central que você estudou: média aritmética, moda e mediana e o proponha para a turma.

4. Determine a *MA*, a *Mo* e a *Me* de acordo com as tabelas de frequência apresentadas.

MA = 14,3 anos; *Mo* = 15 anos; *Me* = 14,5 anos.

a) **Idade em um grupo de 10 pessoas**

Idade (em anos)	13	14	15	16
FA	3	2	4	1

Dados elaborados para fins didáticos.

3. Exemplo de problema: Paula precisa comprar um fone de ouvido e resolveu fazer uma pesquisa de preço. Ela foi a 4 lojas diferentes, e os preços eram, respectivamente, R$ 126,00, R$ 130,00, R$ 126,00 e R$ 102,00. Ao voltar para casa, viu o mesmo fone em promoção em uma loja *on-line*, de R$ 130,00 por R$ 99,00. Determine a média, a moda e a mediana desses 5 valores.

5. A média aritmética ponderada das notas do estudante é dada por:

$MP = \frac{2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 5}{2 + 3 + 1 + 2} = \frac{16 + 21 + 9 + 10}{8} = \frac{56}{8} = 7$

Logo, a média é 7,0.

b)

Medida de altura em um grupo de 21 pessoas

FA	Medida de altura (em m)
3	1,61 ⊢ 1,65
6	1,65 ⊢ 1,69
5	1,69 ⊢ 1,73
4	1,73 ⊢ 1,77
3	1,77 ⊢ 1,81

Dados elaborados para fins didáticos.

MA = 1,71 m; classe modal (em m) é 1,65 ⊢ 1,69 e *Me* ≃ 1,70 m.

5. Calcule a média aritmética ponderada de um estudante que obteve, no 1º bimestre letivo, 8,0 na prova (peso 2), 7,0 na pesquisa (peso 3), 9,0 no debate (peso 1) e 5,0 no trabalho em grupo (peso 2).

6. Em 7 jogos do mesmo campeonato, um time marcou, respectivamente, 3, 2, 1, 1, 4, 3 e 2 gols. Determine a média de gols por partida (*MA*) e a mediana (*Me*).

7. **(Enem)** Os alunos de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete, enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos alunos mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol. A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos alunos da turma.

Média	Mediana	Moda
1,65	1,67	1,70

Os alunos *P*, *J*, *F* e *M* medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais a de nenhum outro colega da sala.

Segundo essas informações, argumenta-se que os alunos *P*, *J*, *F* e *M* jogaram, respectivamente,

Alternativa **c**.

a) basquete, basquete, basquete, basquete.

b) futebol, basquete, basquete, basquete.

c) futebol, futebol, basquete, basquete.

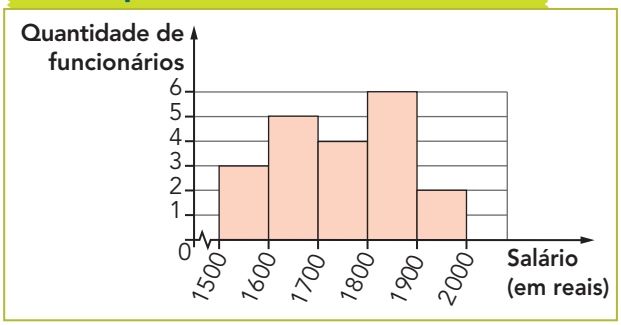
d) futebol, futebol, futebol, basquete.

e) futebol, futebol, futebol, futebol.

8. Usando os valores médios dos intervalos, construa o polígono de frequência e, depois, calcule a *MA*, a *Mo* e a *Me*.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Distribuição salarial dos funcionários de uma empresa



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

9. A média das idades dos 11 funcionários de uma empresa era de 40 anos. Um dos funcionários se aposentou com 60 anos, saindo da empresa. A média de idade dos 10 funcionários restantes passou a ser: Alternativa **d**.

a) 40 anos.

b) 39,8 anos.

c) 38,9 anos.

d) 38 anos.

e) 37,8 anos.

6. A média aritmética é dada por:

$MA = \frac{1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4}{7} = \frac{16}{7} \simeq 2{,}3$

Organizando os dados em ordem crescente, temos: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4.

Como temos uma quantidade ímpar de dados (7), a mediana é o 4º valor. Assim, *Me* = 2.

10. **(Enem)** O preparador físico de um time de basquete dispõe de um **plantel** de 20 jogadores, com média de altura igual a 1,80 m. No último treino antes da estreia em um campeonato, um dos jogadores desfalcou o time em razão de uma séria contusão, forçando o técnico a contratar outro jogador para recompor o grupo.

Se o novo jogador é 0,20 m mais baixo que o anterior, qual é a média de altura, em metro, do novo grupo?

a) 1,60

b) 1,78

c) 1,79

d) 1,98

e) 1,82

Seja x a soma das medidas de altura inicialmente, temos:

$\frac{x}{20} = 1{,}8 \Rightarrow x = 36$

Assim, a média das medidas de altura do novo grupo é dada por:

$\frac{36 - 0{,}2}{20} = 1{,}79$

Portanto, a média é 1,79 m. Alternativa **c**.

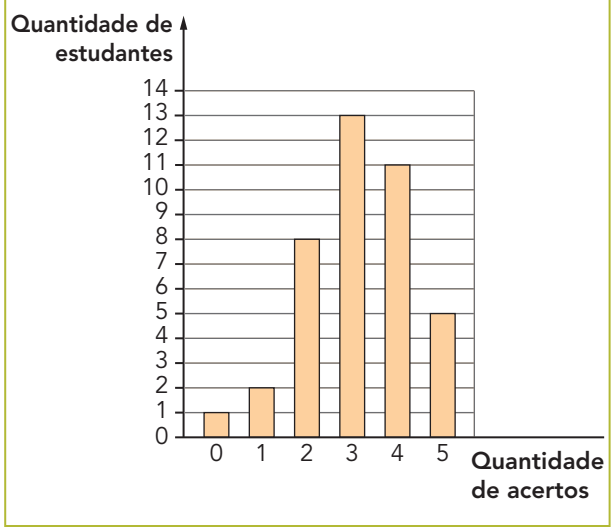
plantel: conjunto de profissionais ou atletas disponíveis para se escalar um time.

12. A média da quantidade de pães vendidos é dada por: $\frac{250 + 208 + 215 + 251 + 187 + 187 + 186}{7} = \frac{1\,484}{7} = 212$
Portanto, a quantidade de pães vendidos mais próxima da média é 215, que ocorreu na terça-feira.
Alternativa **c**.

Não escreva no livro

11. Uma prova com 5 questões foi aplicada em uma turma. O levantamento estatístico dos acertos foi registrado no gráfico a seguir.

Desempenho de uma turma em uma prova



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

De acordo com o gráfico, determine:

a) a quantidade de estudantes da turma; 40

b) a porcentagem da turma que acertou as 5 questões; 12,5%

c) a porcentagem da turma que acertou 3 ou mais questões; 72,5%

d) a média, a moda e a mediana de acertos por pessoa. $MA = 3{,}15$ acertos; $Mo = 3$ acertos; $Me = 3$ acertos.

12. **(Enem)** O quadro apresenta a quantidade de um tipo de pão vendido em uma semana em uma padaria.

Dia da semana	Número de pães vendidos
Domingo	250
Segunda-feira	208
Terça-feira	215
Quarta-feira	251
Quinta-feira	187
Sexta-feira	187
Sábado	186

O dono da padaria decidiu que, na semana seguinte, a produção diária desse tipo de pão seria igual ao número de pães vendidos no dia da semana em que tal quantidade foi a mais próxima da média das quantidades vendidas na semana.

O dia da semana utilizado como referência para a quantidade de pães a serem produzidos diariamente foi:

a) domingo.
b) segunda-feira.
c) terça-feira.
d) quarta-feira.
e) sábado.

13. **(Enem)** Em uma fábrica de refrigerantes, é necessário que se faça periodicamente o controle no processo de engarrafamento para evitar que sejam envasadas garrafas fora da especificação do volume escrito no rótulo.

Diariamente, durante 60 dias, foram anotadas as quantidades de garrafas fora dessas especificações. O resultado está apresentado no quadro.

Quantidade de garrafas fora das especificações por dia	Quantidade de dias
0	52
1	5
2	2
3	1

A média diária de garrafas fora das especificações no período considerado é:

a) 0,1.
b) 0,2.
c) 1,5.
d) 2,0.
e) 3,0.

14. **(Enem)** A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários. Essa pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho.

13. Para determinar a média de garrafas fora das especificações, precisamos calcular a média ponderada. Assim, de acordo com os dados apresentados no quadro, temos:
$MP = \frac{52 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{52 + 5 + 2 + 1} = \frac{12}{60} = 0{,}2$
Portanto, a média diária é 0,2 garrafa. Alternativa **b**.

14. A média da quantidade de acidentes é dada pela média ponderada. Assim, temos:
$MP = \frac{50 \cdot 0 + 17 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{50 + 17 + 15 + 10 + 6 + 2} = \frac{111}{100} = 1{,}11$
Portanto, a média é 1,11 acidente. Alternativa **d**.

Os resultados obtidos estão no quadro.

Número de acidentes sofridos	Número de trabalhadores
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

A média do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa é:

a) 0,15.
b) 0,30.
c) 0,50.
d) 1,11.
e) 2,22.

15. O valor do dólar comercial é um dos mais pesquisados na internet, e o preço dele é usado em transações internacionais. Acompanhe a cotação do dólar durante os primeiros dias de 2023 na tabela a seguir.

Valor do dólar

Data	Dólar comercial (venda)	Variação percentual
02/01/2023	R$ 5,3633	+1,46%
03/01/2023	R$ 5,4797	+2,17%
04/01/2023	R$ 5,4312	–0,89%
05/01/2023	R$ 5,3509	–1,48%
06/01/2023	R$ 5,2254	–2,35%
09/01/2023	R$ 5,2546	+0,56%
10/01/2023	R$ 5,1997	–1,04%
11/01/2023	R$ 5,1600	–0,76%
12/01/2023	R$ 5,1082	–1,00%

Fonte dos dados: USD/BRL: dados históricos. *Investing.com*, [*s. l.*], 2023. Disponível em: https://tedit.net/nryc71. Acesso em: 23 fev. 2023.

Qual foi a mediana do valor do dólar comercial, em reais, no período de 9 dias descritos na tabela?

a) R$ 5,2254
b) R$ 5,4797
c) R$ 5,2546
d) R$ 5,3509
e) R$ 5,2859

16. (Enem) Um país decide investir recursos na educação em suas cidades que tenham um alto nível de analfabetismo. Os recursos serão divididos de acordo com a idade média da população que é analfabeta, conforme apresentado no quadro.

Recurso	Idade média da população analfabeta (M)
I	$M \leqslant 22$
II	$22 < M \leqslant 27$
III	$27 < M \leqslant 32$
IV	$32 < M \leqslant 37$
V	$M > 37$

Uma cidade desse país possui $\frac{60}{100}$ do total de analfabetos de sua população composto por mulheres. A média de idade das mulheres analfabetas é de 30 anos, e a média de idade dos homens analfabetos é de 35 anos.

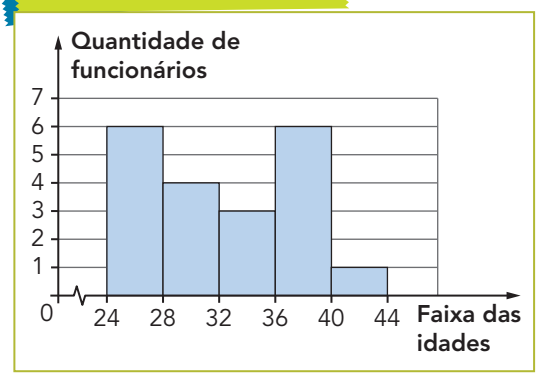
Considerando a média de idade da população analfabeta dessa cidade, ela receberá o recurso: Alternativa **c**.

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

Texto para a próxima atividade.

O diretor de uma empresa soube por uma pesquisa que a média de idade entre os empregados do segmento em que ele trabalhava era 38 anos. Para verificar se essa realidade se aplicava ao quadro de funcionários dele, o diretor decidiu fazer uma pesquisa com eles. Os dados obtidos estão apresentados no histograma a seguir.

Idade dos funcionários



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

15. Como a quantidade é ímpar (9 valores), para determinar a mediana bastar dispor os valores em ordem crescente (ou decrescente) e verificar o termo central da distribuição:
R$ 5,1082; R$ 5,1600; R$ 5,1997; R$ 5,2254; R$ 5,2546; R$ 5,3509; R$ 5,3633; R$ 5,4312; R$ 5,4797.
Logo, a mediana é R$ 5,2546. Alternativa **c**.

18. b) O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Não escreva no livro

17. De acordo com a média obtida, é correto afirmar que: Alternativa **c**.

a) A média obtida pelo diretor é igual à média obtida pela pesquisa.

b) A média obtida pelo diretor é aproximadamente 6 anos superior à média obtida pela pesquisa.

c) A média obtida pelo diretor é aproximadamente 6 anos inferior à média obtida pela pesquisa.

d) A média obtida pelo diretor é mais de 10 anos superior à média obtida pela pesquisa

e) A média obtida pelo diretor é mais de 10 anos inferior à média obtida pela pesquisa.

Texto para a próxima atividade.

> O Brasil registrou 1463 casos de mulheres que foram vítimas de feminicídio [em 2023] – ou seja, cerca de 1 caso a cada 6 horas. Esse é o maior número registrado desde que a lei contra feminicídio foi criada, em 2015.
>
> O número também é 1,6% maior que o de 2022, segundo o relatório publicado pelo Fórum Brasileiro de Segurança Pública (FBSP) nesta quinta-feira (7). A pesquisa apontou que 18 estados apresentaram uma taxa de feminicídio acima da média nacional[...].

NICOCELI, Artur. Brasil registra 1.463 feminicídios em 2023, alta de 1,6% em relação a 2022. *G1*, 7 mar. 2024. Disponível em: https://tedit.net/bh1sc2. Acesso em: 15 ago. 2024.

18. Faça os registros no caderno.

a) Sabendo que, segundo o Censo Demográfico de 2022 do IBGE, há cerca de 104,5 milhões de mulheres brasileiras, determine a média nacional de mortes por feminicídio para cada 100 mil mulheres em 2023. 1,4

b) Pesquise a definição de feminicídio segundo a Lei nº 13.104 de 9 de março de 2015 e explique qual é a importância da Estatística para o desenvolvimento de políticas nacionais de combate à violência contra a mulher.

Texto para a próxima atividade.

Para facilitar o cálculo da média aritmética das notas dos estudantes, um professor resolveu criar um programa de computador.

Esse algoritmo calcula a média aritmética de 2 notas, fornecidas pelo usuário. Acompanhe a seguir o passo a passo de execução desse algoritmo quando o usuário digita os números 7,5 e 6.

Código do algoritmo	Descrição
1. Considere o 1º número digitado pelo usuário e o nomeie como n_1. **2**. Considere o 2º número digitado pelo usuário e o nomeie como n_2.	Nesse algoritmo, n_1, n_2 e m são as variáveis. As variáveis n_1 e n_2 correspondem aos números fornecidos pelo usuário, que são os valores de entrada.
3. Considere a variável m de modo que $m = (n_1 + n_2) \div 2$.	A variável m recebe o valor do cálculo indicado: a adição dos números fornecidos e a divisão desse resultado por 2.
4. Retorne o valor da variável m como saída.	O valor de saída é o valor da variável m.

Fique atento

Algoritmo é um dos pilares do pensamento computacional e tem o objetivo de apresentar uma sequência de passos que levam até a resolução de uma tarefa.

Quando o usuário fornece os números 7,5 e 6 como valor de entrada nesse programa de computador, o algoritmo é acionado, de maneira que:

$$n_1 = 7{,}5$$
$$n_2 = 6$$
$$m = (7{,}5 + 6) \div 2 = 6{,}75$$

Assim, o computador exibe o valor de saída 6,75.

19. Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o utilizando o algoritmo para calcular o valor de saída quando o usuário fornece os números indicados como valores de entrada.

Entrada		Saída
4 e 7	5,5	
8,5 e 9	8,75	
5,8 e 9,1	7,45	

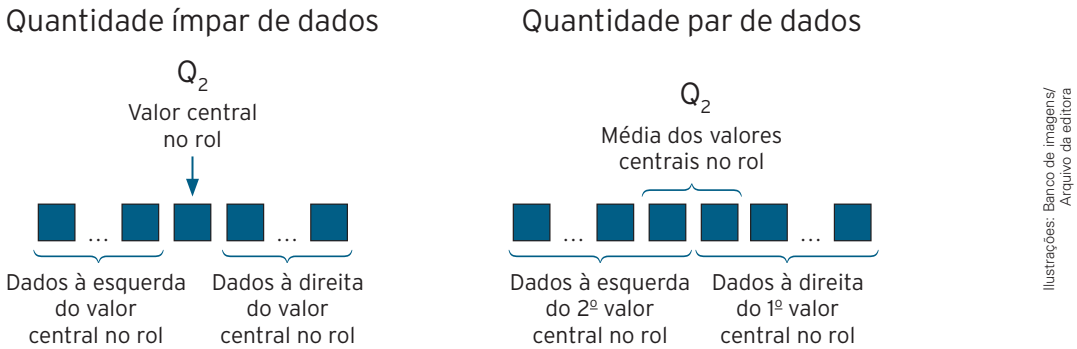
20. Considere o mesmo programa da atividade **19** e escreva no caderno um algoritmo para calcular a média aritmética de 3 notas de um estudante.

20. 1º) Considere o 1º número digitado pelo usuário e o nomeie como n_1; **2º)** Considere o 2º número digitado pelo usuário e o nomeie como n_2; **3º)** Considere o 3º número digitado pelo usuário e o nomeie como n_3; **4º)** Considere a variável m de modo que $m = (n_1 + n_2 + n_3) \div 3$; **5º)** Retorne o valor da variável m como saída.

Diagrama de caixa (*box-plot*)

O **diagrama de caixa** (***box-plot***) é um tipo de representação gráfica que permite analisar, por exemplo, a variabilidade dos dados e a ocorrência de valores atípicos. Ele exibe um resumo de um conjunto de dados numéricos de acordo com 5 valores desse conjunto: limite inferior, 1º quartil, 2º quartil, 3º quartil e limite superior. Leia a seguir como determiná-los em uma ordem conveniente.

- **2º quartil (Q_2)**: é a mediana dos dados no rol. Quando a quantidade de elementos no conjunto de dados é ímpar, a mediana é o elemento central da distribuição. Caso a quantidade de elementos seja par, então a mediana é a média dos 2 elementos centrais.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

- **1º quartil (Q_1)**: se a quantidade de dados é ímpar, Q_1 é a mediana dos valores à esquerda do valor central no rol. Se a quantidade de dados é par, Q_1 é a mediana dos dados à esquerda do 2º valor central no rol.
- **3º quartil (Q_3)**: se a quantidade de dados é ímpar, Q_3 é a mediana dos valores à direita do valor central no rol. Se a quantidade de dados é par, Q_3 é a mediana dos dados à direita do 1º valor central no rol.
- **Limite inferior do diagrama**: é o 1º valor do rol que não é atípico.

> Um valor é considerado **atípico** quando é menor do que $Q_1 - 1{,}5(Q_3 - Q_1)$ ou maior do que $Q_3 + 1{,}5(Q_3 - Q_1)$.

- **Limite superior do diagrama**: é o último valor do rol que não é atípico.

Considere a seguinte distribuição das idades de um grupo de pessoas, já ordenadas: 10, 11, 12, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 30 e 40. Vamos construir um diagrama de caixa para representar essa distribuição de valores. Acompanhe:

1º) Como os valores já se encontram em ordem crescente, para determinar o 2º quartil, precisaremos determinar o elemento central da distribuição. Como são 13 elementos, o elemento central é o 7º elemento, ou seja, o número **19**.

O 1º quartil é a mediana dos valores à esquerda de 19 no rol, ou seja, é dado por $\frac{12 + 15}{2} = 13{,}5$. Já o 3º quartil, que é a mediana dos valores à direita de 19 no rol, é dado por $\frac{23 + 25}{2} = 24$.

$$\underbrace{10 - 11 - 12 - 15 - 16 - 17}_{Md_1 = 13{,}5} - \underbrace{19}_{Q_2} - \underbrace{20 - 22 - 23 - 25 - 30 - 40}_{Md_2 = 24}$$

$Md_1 = 13{,}5$ ↑ Q_1 ; Q_2 ; $Md_2 = 24$ ↑ Q_3

2º) Vamos determinar se há valores atípicos no conjunto de dados fornecidos que são muito discrepantes em relação aos demais. Esses valores costumam ser chamados de *outliers* e são representados por asteriscos no diagrama de caixa.

No exemplo, temos:

$$Q_1 - 1{,}5(Q_3 - Q_1) = 13{,}5 - 1{,}5(24 - 13{,}5) = -2{,}25$$

$$Q_3 + 1{,}5(Q_3 - Q_1) = 24 + 1{,}5(24 - 13{,}5) = 39{,}75$$

Sendo assim, temos um valor atípico nesse conjunto de dados, o número 40, pois 40 é maior do que 39,75. O valor 40 recebe o nome de *outlier*.

3º) Agora, vamos determinar os limites inferior e superior do diagrama.

Nesse exemplo, 10 e 40 são, respectivamente, o menor e o maior valores da distribuição.

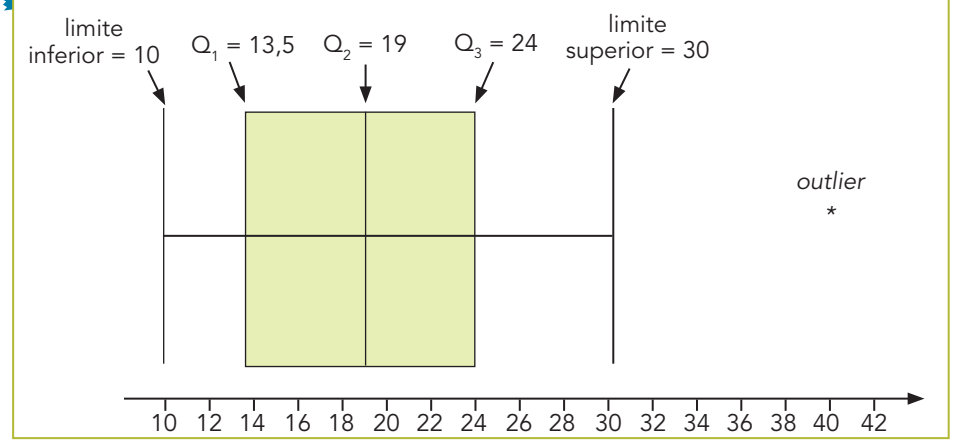
No entanto, como sabemos, 40 é um valor atípico (*outlier*) e, nesse caso, 30, que é o maior valor da distribuição menor do que (ou igual a) 39,5, é considerado o limite superior do diagrama.

Portanto, os limites inferior e superior do diagrama são, respectivamente, 10 e 30.

4º) Construímos uma linha horizontal (ou vertical) para representar toda a amplitude dos dados. Depois, construímos uma "caixa" que tem formato retangular cujo comprimento é dado por $Q_3 - Q_1$ e, em seguida, representamos um segmento de reta no interior dela para representar Q_2.

Por fim, representamos um segmento de reta com extremidades em Q_1 e no limite inferior e outro segmento de reta com extremidades em Q_3 e no limite superior. E usamos um asterisco para representar o *outlier*.

Idades de um grupo de pessoas



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Por meio do diagrama, é possível notar que o intervalo entre o limite inferior e Q_1 tem amplitude igual a 3,5 (pois 13,5 − 10 = 3,5). De modo análogo, os intervalos entre Q_1 e Q_2, Q_2 e Q_3, e Q_3 e o limite superior têm amplitudes, respectivamente, iguais a 5,5; 5 e 6.

Assim, podemos dizer que no intervalo entre o limite inferior e Q_1, por exemplo, os dados estão mais concentrados do que nos demais intervalos.

21. Todo mês, quando uma mulher em fase reprodutiva não engravida, ocorre uma queda na produção de progesterona e estrogênio (hormônios sexuais), promovendo a degeneração e a eliminação parcial do revestimento uterino (fluxo menstrual).

Uma garota analisou por 9 meses seguidos o ciclo menstrual dela e anotou o 1º dia da menstruação em cada mês, conforme apresentado na tabela a seguir.

1º dia da menstruação

Mês	Dia da menstruação
Janeiro	14
Fevereiro	11
Março	13
Abril	8
Maio	11
Junho	12
Julho	11
Agosto	11
Setembro	9

Dados elaborados para fins didáticos.

Com esses dados, monte no caderno um diagrama de caixa. O diagrama encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

22. Uma operadora de *telemarketing* registrou, em determinado dia, a quantidade de ligações de 40 dos funcionários e obteve os seguintes números: Os diagramas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

108	126	134	145	99
45	122	110	103	116
100	149	151	134	145
101	128	133	105	149
155	107	134	126	150
144	141	133	114	129
132	129	111	147	135
152	120	126	130	140

Faça, no caderno, um diagrama de ramos e folhas e um diagrama de caixa. Depois, indique em qual dos gráficos é mais fácil identificar:

a) a mediana; Diagrama de caixa.

b) a quantidade de ligações que mais se repetiu entre os funcionários; Diagrama de ramos e folhas.

c) o valor tal que 75% dos dados ordenados estão abaixo dele e 25% acima; Diagrama de caixa.

d) quantos funcionários receberam entre 120 e 130 ligações. Diagrama de ramos e folhas.

23. Miguel fez uma pesquisa escolar com algumas pessoas do bairro onde mora e decidiu usar um diagrama para representar os dados obtidos para a variável "idade". No entanto, ele não sabia qual escolher e fez um diagrama de ramos e folhas e outro de caixas.

Idade dos entrevistados

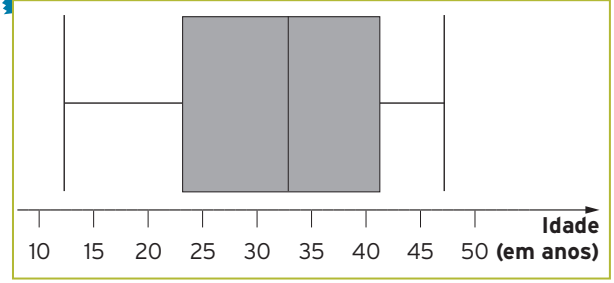
1	2 3 5 8 9
2	1 3 3 3 4 6 8 9
3	1 2 2 3 5 6 6 7 7 7 9
4	0 0 1 1 1 2 3 6 6 6 7 7

Legenda: 3 | 1 significa 31 anos

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Idade dos entrevistados



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Quantas pessoas foram entrevistadas? Quantas tinham 46 anos?

b) Sabendo que Miguel precisa de um diagrama que permita visualizar de modo prático o número de pessoas entrevistadas e que ele entrevistou mais de uma pessoa com a mesma idade, qual diagrama ele deve escolher?
A representação gráfica que permite visualizar os elementos de que Miguel precisa é o digrama de ramos e folhas.

23. a) De acordo com o digrama de ramos e folhas, 36 pessoas foram entrevistadas e 3 pessoas tinham 46 anos.

Tecnologias digitais

Não escreva no livro

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Construção do diagrama de caixa

Vamos utilizar agora um *software* de Geometria dinâmica para construir um diagrama de caixa para representar os dados apresentados na 1ª seção *Tecnologias digitais* desta Unidade. Para isso, sugerimos selecionar um *software on-line* ou instalar um aplicativo que permita a construção de gráficos diagramas de caixas. A seguir, apresentamos alguns passos básicos que são comuns a vários *softwares* desse tipo.

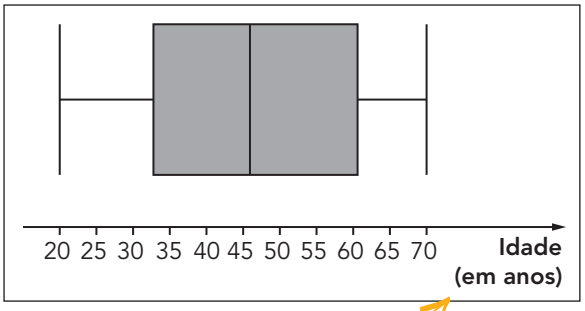
1º passo: Se você construiu e salvou as representações gráficas propostas na seção *Tecnologias digitais* do 1º capítulo, e selecionou o mesmo *software* para essa tarefa, abra o arquivo anterior e o edite. Caso não tenha salvado ou tenha optado pelo uso de outro *software* nesta tarefa, no programa selecionado, crie e preencha uma planilha com as idades apresentadas anteriormente.

2º passo: Selecione as células da planilha com as idades. Em seguida, localize e selecione a opção que gera um histograma com os dados da planilha.

3º passo: Localize as configurações do histograma e selecione a opção que gera um diagrama de caixa (ou *blox-plot*). O *software* deverá exibir o respectivo diagrama de caixa para o conjunto de dados.

Depois, salve o diagrama de caixa que criou.

Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de *box-plot*, no *software* de Geometria dinâmica, após o 3º passo.

Professor, geralmente é possível exibir os valores de Q_1, Q_2, Q_3, entre outros, que o programa considerou para construir o diagrama. Em alguns *softwares*, é possível acessar esses dados clicando em um botão com o símbolo $\sum x$.

1. Analise novamente o *box-plot* gerado pelo *software* e determine o valor aproximado do limite inferior, do 1º quartil, da mediana, do 3º quartil e do limite superior. Exemplo de resposta: Limite inferior: 20; 1º quartil: 32,5; mediana: 46; 3º quartil: 60,5; limite superior: 70.

2. Junte-se a um colega e façam uma pesquisa estatística com 30 colegas da escola para descobrir quantos livros eles leram no último ano. Depois, utilizem um *software* de Geometria dinâmica para construir um diagrama de caixa (*box-plot*) para representar os dados da pesquisa. Por fim, determinem a média, a moda e a mediana desses dados. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

3. Agora, utilizando o diagrama, analisem o resultado da pesquisa e elaborem uma apresentação, do modo que preferirem, para mostrar esse resultado aos demais colegas. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

4. Elaborem algumas iniciativas que poderiam ser implementadas na escola para incentivar a leitura. Resposta pessoal. Os estudantes podem citar, por exemplo, leitura de cordel, sarau e clube do livro.

Medidas de dispersão

Já estudamos as medidas de tendência central mais usadas, como a média aritmética, a moda e a mediana. Elas têm como objetivo resumir um conjunto de dados em um único elemento.

Considere o seguinte exemplo: O critério de aprovação em um concurso estabelece que o candidato deve realizar 3 provas e obter, com as notas, média maior do que ou igual a 6,0. Nesse caso, a informação de que o candidato obteve média 7,5 é suficiente para concluir que ele está aprovado.

Contudo, existem casos em que as informações de média, mediana e moda não são suficientes para caracterizar um conjunto de dados. Vamos explorar uma situação que tenha essa característica.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

1. Determine no caderno a média das idades de cada um dos grupos a seguir.

a) Grupo **A**: 20 anos; 20 anos; 20 anos; 20 anos; 20 anos; 20 anos.

b) Grupo **B**: 22 anos; 23 anos; 17 anos; 20 anos; 20 anos; 18 anos.

c) Grupo **C**: 41 anos; 34 anos; 20 anos; 4 anos; 20 anos; 1 ano.

2. Na sua opinião, a média aritmética é suficiente para caracterizar bem um conjunto de dados?

Resposta pessoal.

Reflita

No caderno, determine a mediana e a moda dos grupos **A**, **B** e **C** e responda se é possível caracterizá-los apenas com as medidas de tendência central que estudamos.

A média aritmética, a mediana ($Md = 20$) e a moda ($Mo = 20$) são as mesmas para os 3 grupos, portanto não é possível notar diferenças entre eles utilizando apenas essas medidas.

1. a) $MA = \frac{20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20}{6} = 20$; logo, 20 anos.

b) $MA = \frac{22 + 23 + 17 + 20 + 20 + 18}{6} = 20$; logo, 20 anos.

c) $MA = \frac{41 + 34 + 20 + 4 + 20 + 1}{6} = 20$; logo, 20 anos.

Como a média aritmética não foi suficiente para representar o grupo **C**, é conveniente utilizar medidas que expressem o grau de dispersão de um conjunto de dados. As mais usadas são a **amplitude**, a **variância** e o **desvio padrão**. Uma interpretação possível para as medidas de dispersão é que medem a **homogeneidade** de um conjunto de valores; isso quer dizer que quanto menor a medida de dispersão, mais homogêneo é o conjunto.

homogeneidade: característica do que é homogêneo, isto é, que tem a mesma natureza ou é do mesmo gênero que outro objeto; idêntico, igual, análogo.

Amplitude (A)

A amplitude de um conjunto de valores numéricos mostra a faixa de variação entre os elementos desse conjunto. Para determiná-la, devemos calcular a diferença entre o maior, $x_{máx}$, e o menor, $x_{mín}$, valor desse conjunto:

$$A = x_{máx} - x_{mín}$$

$A_A = 20 - 20 = 0$,
$A_B = 23 - 17 = 6$ e
$A_C = 41 - 1 = 40$. Como a amplitude é muito maior no grupo **C**, podemos afirmar que ele é o mais heterogêneo em relação aos demais no quesito faixa etária.

Reflita

Determine a amplitude dos grupos **A**, **B** e **C** do *Explore para descobrir*. O que você pode concluir analisando essa medida?

Variância (V)

Vídeo

A variância é uma medida de dispersão na qual se avaliam as diferenças entre os valores x_i e a média aritmética ($x_i - MA$), que podem ser chamados de **desvios**. A variância (V) é definida como a média dos quadrados dos desvios:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - MA)^2}{n}$$

Fique atento

O símbolo $\sum_{i=1}^{n} x_i$ representa o somatório dos números x_i, com i variando de 1 a n.

Por exemplo, vamos calcular a variância nos grupos **A**, **B** e **C** citados no *Explore para descobrir*.

- Grupo **A**: 20; 20; 20; 20; 20; 20.

$$MA = 20$$

Desvios: $20 - 20 = 0$; todos iguais a 0.

$$V = 0$$

Quando todos os valores são iguais, dizemos que não houve dispersão e, por isso, a variância é 0.

- Grupo **B**: 22; 23; 17; 20; 20; 18.

$$MA = 20$$

$$V = \frac{(22-20)^2 + (23-20)^2 + (17-20)^2 + (20-20)^2 + (20-20)^2 + (18-20)^2}{6} =$$

$$= \frac{4+9+9+0+0+4}{6} = \frac{26}{6} \simeq 4{,}3$$

- Grupo **C**: 41; 34; 20; 4; 20; 1.

$$MA = 20$$

$$V = \frac{(41-20)^2 + (34-20)^2 + (20-20)^2 + (4-20)^2 + (20-20)^2 + (1-20)^2}{6} =$$

$$= \frac{441+196+0+256+0+361}{6} = \frac{1254}{6} = 209$$

Podemos concluir que:

- no grupo **A** não houve dispersão;
- a dispersão no grupo **B** é menor do que no grupo **C**;
- o grupo **B** é mais homogêneo do que o **C** ou que o grupo **C** é mais **heterogêneo** do que o **B**.

heterogêneo: que é de natureza desigual ou revela diferenças, ao comparar-se uma coisa com outra.

A variância é suficiente para diferenciar a dispersão dos grupos: o grupo **A** não tem dispersão (pois $V = 0$), e o grupo **C** tem uma dispersão maior do que a do grupo **B** (pois $209 > 4{,}3$).

Para algumas análises faz mais sentido que a medida de dispersão esteja na mesma unidade dos valores da variável. A variância não tem essa característica, uma vez que os desvios são elevados ao quadrado. Então, definiu-se a medida de dispersão chamada **desvio padrão**.

Desvio padrão (*DP*)

O desvio padrão (*DP*) é a raiz quadrada da variância. Ele facilita a interpretação dos dados em algumas análises, pois é expresso na mesma unidade dos valores analisados (do conjunto de dados).

$$DP = \sqrt{V}$$

Considerando os dados do *Explore para descobrir*, temos:

- Grupo **A**: $DP = \sqrt{0} = 0$; logo, o desvio padrão do grupo **A** é 0 ano.
- Grupo **B**: $DP = \sqrt{4{,}3} \simeq 2{,}1$; logo, o desvio padrão do grupo **B** é aproximadamente 2,1 anos.
- Grupo **C**: $DP = \sqrt{209} \simeq 14{,}5$; logo, o desvio padrão do grupo **C** é aproximadamente 14,5 anos.

Observações:

1ª) Quando todos os valores da variável são iguais, o desvio padrão é 0.

2ª) Quanto mais próximo de 0 é o desvio padrão, mais homogênea é a distribuição dos valores da variável.

3ª) O desvio padrão é expresso na mesma unidade da variável.

Não escreva no livro

Reflita

Por que o desvio padrão é expresso na mesma unidade dos dados analisados?

Como no cálculo da variância elevamos cada desvio ao quadrado, a variância é expressa no quadrado dos dados, dessa maneira, ao extrair-se a raiz quadrada da variância volta-se à unidade dos dados analisados.

Fique atento

A amplitude, a variância e o desvio padrão são números positivos ou nulos.

Atividades resolvidas

2. Em um treinamento de salto em altura, os atletas realizaram 4 saltos cada um. Analise as marcas obtidas por 3 atletas:

- atleta **A**: 148 cm, 170 cm, 155 cm e 131 cm;
- atleta **B**: 145 cm, 151 cm, 150 cm e 152 cm;
- atleta **C**: 146 cm, 151 cm, 143 cm e 160 cm.

a) Qual deles obteve a melhor média?

b) Qual deles foi o mais regular?

Resolução

a) Calculamos a média de cada atleta:

Atleta **A**: $MA = \frac{148 + 170 + 155 + 131}{4} = \frac{604}{4} = 151$.

Atleta **B**: $MA = \frac{145 + 151 + 150 + 152}{4} = \frac{598}{4} = 149{,}5$.

Atleta **C**: $MA = \frac{146 + 151 + 143 + 160}{4} = \frac{600}{4} = 150$.

Logo, o atleta **A** obteve a maior média, 151 cm.

Reflita: Se a variância for 0 ou 1, o desvio padrão também será, respectivamente, 0 ou 1. E, se a variância pertencer ao intervalo]0; 1[, então o desvio padrão será maior do que a variância.

b) A maior regularidade pode ser verificada pelo desvio padrão. Assim, temos:

Atleta **A**: $V = \frac{(148-151)^2 + (170-151)^2 + (155-151)^2 + (131-151)^2}{4} = \frac{786}{4} = 196{,}5$

$DP = \sqrt{196{,}5} \simeq 14$

Atleta **B**: $V = \frac{(145-149{,}5)^2 + (151-149{,}5)^2 + (150-149{,}5)^2 + (152-149{,}5)^2}{4} = \frac{29}{4} = 7{,}25$

$DP = \sqrt{7{,}25} \simeq 2{,}7$

Atleta **C**: $V = \frac{(146-150)^2 + (151-150)^2 + (143-150)^2 + (160-150)^2}{4} = \frac{166}{4} = 41{,}5$

$DP = \sqrt{41{,}5} \simeq 6{,}4$

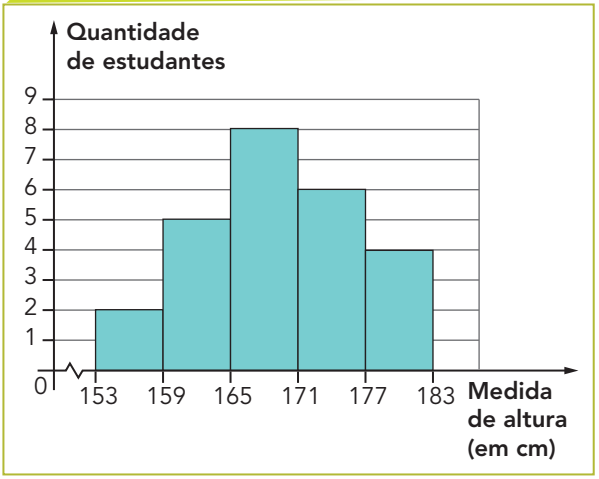
Logo, o atleta **B** foi o mais regular, pois o desvio padrão dele é o menor: aproximadamente 2,7 cm.

Reflita

O desvio padrão pode ser igual à variância? E maior do que a variância?

3. O histograma mostra o resultado de uma pesquisa sobre a medida de altura (em centímetros) dos estudantes de uma turma. Calcule o desvio padrão dessa variável.

Distribuição da medida de altura dos estudantes de uma turma



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Resolução

No histograma, os valores da variável são intervalos e, por isso, vamos usar os respectivos pontos médios:

153 ⊢ 159: 156, frequência 2

159 ⊢ 165: 162, frequência 5

165 ⊢ 171: 168, frequência 8

171 ⊢ 177: 174, frequência 6

177 ⊢ 183: 180, frequência 4

$MA = \frac{2 \cdot 156 + 5 \cdot 162 + 8 \cdot 168 + 6 \cdot 174 + 4 \cdot 180}{2 + 5 + 8 + 6 + 4} = \frac{4\,230}{25} = 169{,}2$

$V = \frac{2 \cdot (-13{,}2)^2 + 5 \cdot (-7{,}2)^2 + 8 \cdot (-1{,}2)^2 + 6 \cdot (4{,}8)^2 + 4 \cdot (10{,}8)^2}{25} = \frac{1\,224}{25} = 48{,}96$

Perceba que, no cálculo da variância, foram usadas as frequências. Logo, temos:

$DP = \sqrt{48{,}96} \simeq 7$

Assim, o desvio padrão é, aproximadamente, 7 cm.

Atividades

Não escreva no livro

24. Um concurso utiliza como nota a média e o desvio padrão de 3 provas. Junte-se a um colega e calculem a média e o desvio padrão de um candidato que nas provas obteve, respectivamente, 63 pontos, 56 pontos e 64 pontos. Média: 61 pontos; desvio padrão: aproximadamente 3,56 pontos.

25. b) Menor, uma vez que, como os novos salários são iguais à média aritmética, eles não aumentam a soma do total dos quadrados dos desvios no cálculo da variância, mas aumentam o valor do denominador, que representa a quantidade de salários. Assim, o valor da variância diminuirá.

25. Junte-se a um colega e analisem a tabela a seguir.

Salários de uma empresa

Salário (em R$)	Quantidade de funcionários
2.000,00	10
2.500,00	5
3.000,00	1
3.500,00	10
6.500,00	4
12.000,00	1
Total	**31**

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Qual é a média e qual é a mediana dos salários dessa empresa?

MA = R$ 3.500,00 e *Me* = R$ 3.000,00.

b) Suponham que sejam contratados 2 novos funcionários com salário de R$ 3.500,00 cada um. A variância da nova distribuição de salários ficará menor, igual ou maior do que a anterior?

c) No caderno, elaborem um problema como o anterior abordando as medidas estatísticas que você estudou: desvio padrão, variância e amplitude.

26. (AFA-SP) Desde 2003, o campeonato brasileiro de futebol passou a ser disputado no formato de pontos corridos em que:

- todas as equipes jogam entre si em duas partidas;
- uma partida acontece no estádio determinado por um dos times, ou seja, esse é o mandante; e
- a outra partida, como visitante, acontece no estádio em que o adversário determina.

Um levantamento de 2003 até 2019 mostrou que o Santos é o melhor mandante da competição, com 67,6% de aproveitamento dos pontos; porém, por estádio, o clube de melhor desempenho é o Corinthians, que obteve 71,3% de aproveitamento em seu estádio. [A seguir], encontra-se a tabela que relaciona o aproveitamento como mandante dos 20 primeiros times do *ranking* da Confederação Brasileira de Futebol (CBF).

Quantidade de times	Aproveitamento como mandante em %
3	54 ⊢ 58
6	58 ⊢ 62
2	62 ⊢ 66
8	66 ⊢ 70
1	70 ⊢ 74

Fonte: <<futebolemnumeros.com.br>> (Adaptado. Acesso em 11/04/2022)

Com base nos dados da tabela, o desvio padrão mede, aproximadamente: Alternativa **d**.

a) 1,9.

b) 2,9.

c) 3,9.

d) 4,9.

27. (Enem) Um fiscal de certa empresa de ônibus registra o tempo, em minuto, que um motorista novato gasta para completar certo percurso. No Quadro 1 figuram os tempos gastos pelo motorista ao realizar o mesmo percurso sete vezes. O Quadro 2 apresenta uma classificação para a variabilidade do tempo, segundo o valor do desvio padrão.

Quadro 1

Tempos (em minuto)	48	54	50	46	44	52	49

Quadro 2

Variabilidade	Desvio padrão do tempo (min)
Extremamente baixa	$0 < \sigma \leqslant 2$
Baixa	$2 < \sigma \leqslant 4$
Moderada	$4 < \sigma \leqslant 6$
Alta	$6 < \sigma \leqslant 8$
Extremamente alta	$\sigma > 8$

Com base nas informações apresentadas nos quadros, a variabilidade do tempo é: Alternativa **b**.

a) extremamente baixa.

b) baixa.

c) moderada.

d) alta.

e) extremamente alta.

25. c) Exemplo de problema: Em uma loja de sapatos um vendedor, que trabalha de segunda-feira a sábado, consegue vender, respectivamente, 5, 6, 8, 7, 10 e 12 pares de sapato. Qual é o valor da amplitude, da variância e do desvio padrão?

Conexões

IDH

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.
Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação em Direitos Humanos* e *Vida Familiar e Social*. Sugerimos que ela seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

IDH: O QUE É?

As imagens não estão representadas em proporção.

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma métrica cujo objetivo é fornecer uma visão ampla do desenvolvimento de uma região, considerando, além dos aspectos econômicos, fatores sociais como saúde e educação. O índice é revisado todos os anos pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD), que divulga relatórios detalhados sobre o desenvolvimento humano em nível global.

O IDH apresenta 3 componentes básicos: saúde, educação e renda.

Hector Gómez/Arquivo da editora

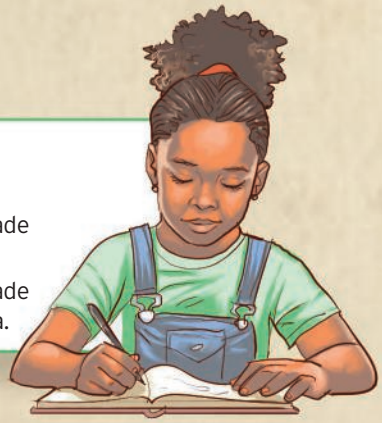
Saúde

Medida pela expectativa de vida ao nascer, reflete o nível de serviços de saúde, nutrição e bem-estar da população.

Educação

Avaliada por 2 subindicadores:

- média da quantidade de anos de escolaridade para adultos com 25 anos ou mais;
- quantidade de anos esperada de escolaridade para crianças em idade de iniciar a escola.



Renda

Medida pelo Produto Interno Bruto (PIB) *per capita*, ajustado pela paridade do poder de compra (PPC), que reflete o padrão de vida médio da população.

Não escreva no livro

O IDH varia de 0 a 1, sendo que valores mais próximos de 1 indicam níveis mais altos de desenvolvimento humano e os mais próximos de 0 indicam níveis mais baixos. Os países e territórios são classificados em quatro categorias.

Segundo o Relatório de Desenvolvimento Humano 2023/2024, do PNUD, o Brasil apresentou um IDH de 0,760 nesse período, classificando-se na categoria de desenvolvimento humano elevado e ocupando a 89ª posição entre 193 países e territórios.

Ainda segundo o relatório do PNUD, os 5 países mais bem classificados quanto ao IDH foram, respectivamente:
Suíça (0,967)
Noruega (0,966)
Islândia (0,959)
Hong Kong (RAE) (0,956)
Dinamarca (0,952)

Hector Gómez/Arquivo da editora

Fontes dos dados: UNDP. *Desenvolvimento humano*. Relatório 2023/2024. Visão geral, 2024. Disponível em: https://tedit.net/ryxf16. TERRA. ENTENDA o cálculo do IDH e seus indicadores. *Terra*, 30 ago. 2017. Disponível em: https://tedit.net/10m438. Acesso em: 15 ago. 2024.

Conecte com o texto

1. Na sua opinião, o PIB *per capita* é uma boa maneira de representar a renda da população? Por quê? Respostas pessoais.
2. Qual outra medida de tendência central ou de dispersão você escolheria para melhor representar a renda de uma população? Justifique sua resposta. Resposta pessoal.

Pesquise e debata

3. Pesquise o IDH do município onde você mora e responda: Ele é maior ou menor do que o do Brasil? A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.
4. Com um colega, pesquisem políticas públicas implementadas pelos 5 países de maior IDH que podem ter contribuído para essa classificação e, depois, conversem sobre a possibilidade de implementação de políticas parecidas no Brasil. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Fazendo uma pesquisa estatística

Em geral, o objetivo de uma pesquisa estatística é obter informações precisas, confiáveis e relevantes sobre determinado contexto. A pesquisa estatística é uma técnica utilizada para coletar, organizar, analisar e interpretar dados, com o objetivo de descrever e explicar as características ou comportamentos da população em estudo.

Vamos analisar um exemplo de pesquisa. De acordo com a pesquisa TIC Kids Online Brasil, em 2019, 89% das crianças e adolescentes com idade entre 9 e 17 anos eram usuários de internet e 72% dessa população utilizava a internet para pesquisas escolares. Essa mesma pesquisa apontou que, em 2020, 94% das crianças e adolescentes dessa faixa etária tinham acesso à internet, e 89% utilizavam a internet para pesquisas escolares.

Fonte dos dados: NÚCLEO de Informação e Coordenação do Ponto BR. *TIC Kids Online Brasil 2020*: pesquisa sobre o uso da internet por crianças e adolescentes no Brasil. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2021. Disponível em https://tedit.net/xjuu1j. Acesso em: 2 ago. 2024.

Prostock-studio/Adobe Stock

Atualmente a internet faz parte da vida de crianças e de adolescentes.

Com esses dados é possível, por exemplo, identificar qual população participou da pesquisa e perceber que houve um aumento percentual de crianças e adolescentes com acesso à internet.

Para a realização de uma pesquisa estatística, o pesquisador pode utilizar 2 tipos de dados, primários ou secundários, dependendo do objetivo da pesquisa e da viabilidade da coleta de dados.

Dados primários são dados coletados pela 1ª vez a partir de fontes originais, por meio de técnicas de coleta de dados, como questionários, entrevistas, observações, experimentos, entre outras.

Dados secundários são dados já existentes, coletados por outras fontes, como órgãos governamentais, instituições de pesquisa, empresas, entre outras.

Fique atento

Os dados secundários podem ser úteis para a pesquisa estatística, mas é importante avaliar sua qualidade e adequação para o propósito da pesquisa.

Atividades

Professor, na atividade **28**, caso os estudantes optem por disponibilizar o questionário *on-line* para parte do público-alvo, auxilie-os a pesquisar plataformas gratuitas para criar o questionário. Além disso, ressalte que o *link* do questionário deve ser divulgado apenas para o público que foi previamente definido.

Não escreva no livro

28. Junte-se a 3 ou 4 colegas e façam uma pesquisa com os estudantes da escola que frequentam sobre os hábitos de uso da internet. Para a realização da pesquisa, sigam as instruções a seguir.

- Definam a população a ser pesquisada. Por exemplo, serão pesquisados todos os estudantes da escola ou apenas os que estão cursando o Ensino Médio?

Fique atento

O trabalho colaborativo requer o compartilhamento de ideias e a parceria entre os integrantes do grupo em todo o processo de pesquisa. Lembre-se de que os colegas de grupo e você têm um objetivo em comum.

- Verifiquem se será possível consultar toda a população e, caso não seja viável, selecionem uma amostra.
- Identifiquem os dados que desejam obter com essa pesquisa, inclusive a quantidade de estudantes que têm acesso à internet e para qual finalidade eles mais costumam utilizá-la.
- Elaborem o questionário da pesquisa. Lembre-se de que as perguntas devem possibilitar uma única interpretação e ter linguagem adequada ao público-alvo. É preciso prever perguntas para perfis diferentes de entrevistado, como os que têm acesso à internet e os que não têm. Analise a seguir alguns exemplos de pergunta.

  1. Qual é sua idade?

  2. Você tem acesso à internet? (Se o entrevistado responder NÃO, encerre a pesquisa).

  2.1. Você é usuário de internet? (Se o entrevistado responder NÃO, pule para a questão 3 deste questionário.)

  2.2. Para qual finalidade você utiliza a internet no seu dia a dia?

  (//) Acessar as redes sociais e aplicativos de mensagens.

  (//) Assistir a vídeos, inclusive séries, filmes ou programas.

  (//) Fazer pesquisas.

  (//) Jogar *on-line*.

  (//) Outros.

  2.3. Quantas horas por semana você utiliza a internet?

  3. Por quais motivos não utiliza a internet?

  (//) Falta de conhecimento para o uso.

  (//) Falta de dispositivos para o uso.

  (//) Falta de interesse.

  (//) Proibição ou restrição de uso pelos responsáveis.

  (//) Outros.

- Decidam como será a aplicação do questionário, lembrando-se de que ao menos parte da pesquisa deve ser feita por meios que não dependam do acesso à internet, pois, caso contrário, as pessoas sem esse acesso não serão consideradas.
- Com o auxílio do professor, decidam quando será realizada a pesquisa. Resposta pessoal.

Texto para a próxima atividade.

Para determinar as medidas de tendência central e de dispersão para a variável de uma pesquisa, é possível utilizar alguns *softwares*. Acompanhe um exemplo de como fazer isso utilizando o LibreOffice.

Para calcular a média de um conjunto de dados, bastar digitar **=MÉDIA(** em uma célula vazia; em seguida, selecionar os dados e apertar a tecla "Enter".

Para determinar as demais medidas, basta prosseguir de modo análogo substituindo **=MÉDIA(** por:

- **=MODOÚNICO(** para obter a moda;
- **=MED(** para obter a mediana;
- **=VAR.P(** para obter a variância;
- **=DESVPAD.P(** para obter o desvio padrão.

No caso da amplitude, basta calcular a diferença entre o maior e o menor valor do conjunto de dados.

29. Considerem os dados que vocês obtiveram na atividade anterior e façam o que se pede em cada item. As respostas dependem da pesquisa realizada pelos estudantes.

a) Determinem as medidas de tendência central e de dispersão para a variável idade e para outras variáveis que julgarem relevantes. Essas medidas podem ser obtidas utilizando *softwares* de Geometria dinâmica ou planilhas como o LibreOffice.

b) Qual é a porcentagem de estudantes da escola que não têm acesso à internet? E qual é a porcentagem de estudantes que são usuários de internet?

c) Para qual finalidade os estudantes da escola que têm acesso à internet costumam utilizá-la?

d) Quais conclusões foram obtidas de acordo com os dados dessa pesquisa? Escrevam, no caderno, um texto com as principais conclusões.

e) Elaborem uma apresentação para compartilhar com os demais colegas e com a comunidade escolar os resultados da pesquisa. Usem tabelas ou gráficos para apresentar os dados.

Professor, oriente os estudantes a escolher o tipo de representação gráfica mais adequado para apresentar os dados obtidos.

Além da sala de aula

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação em Direitos Humanos*. Sugerimos que ela seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

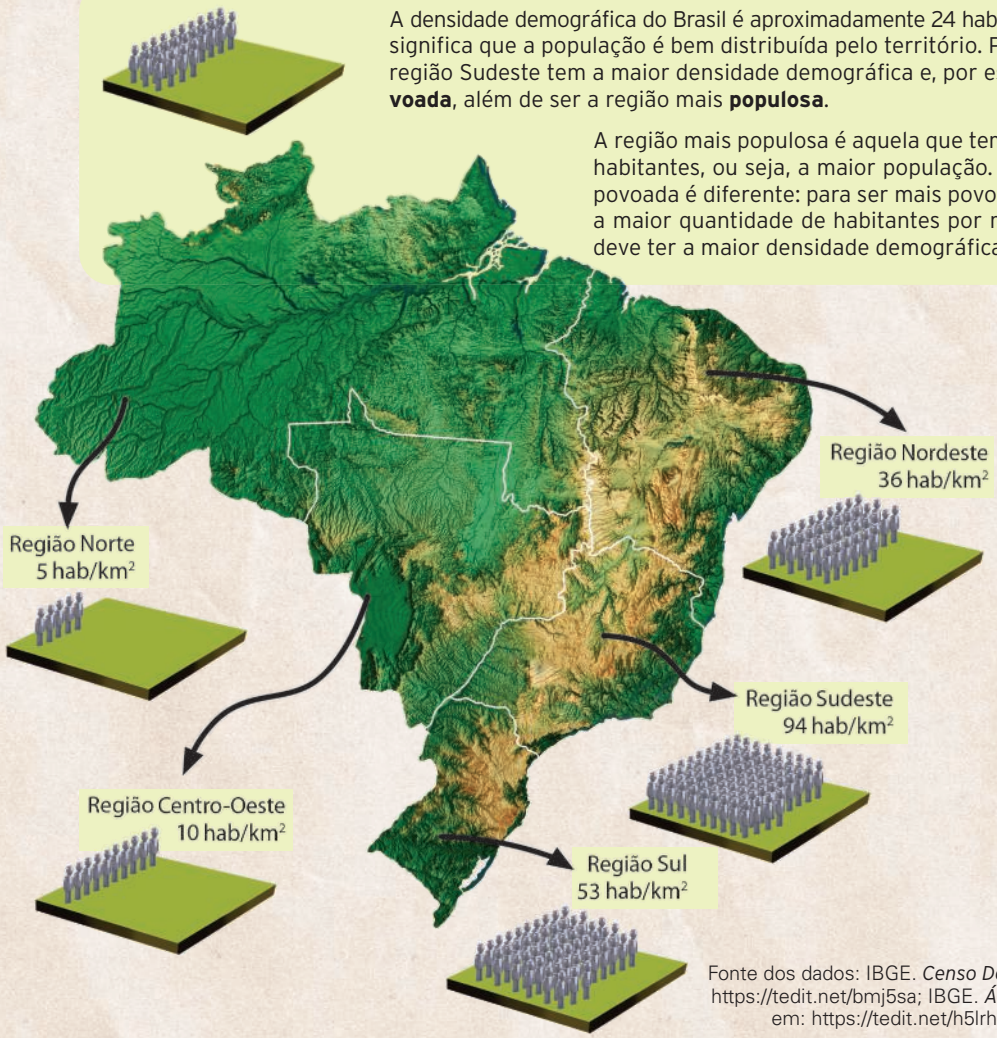
Densidade demográfica no Brasil

A **densidade demográfica** é um índice calculado por meio da divisão da quantidade de habitantes de uma região pela medida de área dessa região. Também podemos chamar esse índice de **densidade populacional** ou de **população relativa**.

Analise os dados apresentados a seguir referentes à densidade demográfica brasileira em 2022.

A densidade demográfica do Brasil é aproximadamente 24 hab./km^2. Contudo, isso não significa que a população é bem distribuída pelo território. Podemos perceber que a região Sudeste tem a maior densidade demográfica e, por esse motivo, é a mais **povoada**, além de ser a região mais **populosa**.

A região mais populosa é aquela que tem a maior quantidade de habitantes, ou seja, a maior população. Já o conceito de região povoada é diferente: para ser mais povoada, a região precisa ter a maior quantidade de habitantes por medida de área, ou seja, deve ter a maior densidade demográfica.



Luis Moura/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Censo Demográfico*. Disponível em: https://tedit.net/bmj5sa; IBGE. *Áreas territoriais*. Disponível em: https://tedit.net/h5lrh3. Acesso em: 2 ago. 2024.

Atualmente, os dados de densidade demográfica do Brasil são obtidos por meio do Censo Demográfico, organizado pelo IBGE. Os agentes censitários fazem entrevistas presenciais, aplicando um questionário a todas as pessoas residentes no Brasil.

Conhecer a densidade demográfica é fundamental para a definição de políticas públicas e a tomada de decisões de investimentos em nível nacional, estadual e municipal.

Indo além: O Censo Demográfico e as políticas públicas

O último Censo Demográfico brasileiro aconteceu em 2022. Sobre esta temática, leia as manchetes de notícias veiculadas pela impressa:

Censo Demográfico auxilia o governo na formulação de políticas públicas

CENSO Demográfico auxilia o governo na formulação de políticas públicas. *Agência Gov*. Disponível em: https://tedit.net/vll4bw. Acesso em: 2 ago. 2024.

Segundo o Censo 2022, 111,28 milhões de pessoas moram próximo ao mar

ABDALA, Vitor. Mais da metade da população brasileira vive no litoral. *Agência Brasil*. Disponível em: https://tedit.net/g6rs84. Acesso em: 2 ago. 2024.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Que tal pesquisar e debater com os colegas sobre a densidade demográfica do bairro em que a escola de vocês está localizada? A população é distribuída de maneira uniforme no município? Quais são os possíveis motivos para que haja variação da concentração populacional entre os bairros? De que maneira a densidade demográfica do município impacta na criação de políticas públicas?

Etapas

Vídeo

1. Organização

Reúna-se em grupos de 3 a 5 estudantes.

2. Pesquisa

Analisem novamente o infográfico e leiam as manchetes. Avaliem a distribuição da população do município e reflitam sobre as questões propostas.

3. Desenvolvimento

- Coleta de dados: Coletem dados complementares sobre a distribuição da população. Para tanto, utilizem fontes de pesquisa confiáveis como o *site* do IBGE ou da prefeitura municipal. Certifiquem-se de estar usando dados atualizados. Pesquisem em fontes históricas a qual fato histórico se pode atribuir um maior povoamento de determinadas regiões do município. Pesquisem também os impactos das informações coletadas na criação de políticas públicas.
- Análise de dados: Organizem os dados coletados, separando as informações de modo que consigam responder às seguintes perguntas: "A população é distribuída de maneira uniforme dentro do território considerado?"; "Quais são os possíveis motivos para que a maior concentração populacional esteja em regiões específicas?" e "De que maneira a densidade demográfica impacta na criação de políticas públicas?".
- Conclusão e fechamento: Considerando os estudos e as análises realizadas, respondam às questões propostas.

4. Produto final

Opção 1: Seminário.

Produção de um seminário, que deve ser dividido nas seguintes etapas: introdução, desenvolvimento (que deve conter a resposta das questões propostas) e conclusões.

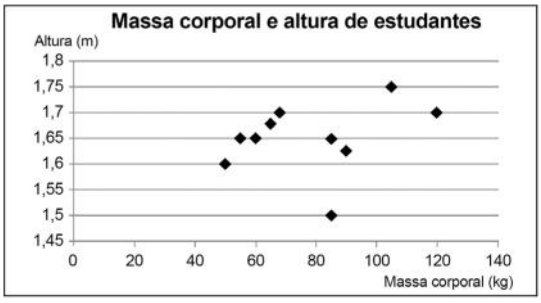
Opção 2: Apresentação de pôster.

Os grupos devem se organizar para elaborar um pôster que deve conter as perguntas explicitadas, além das referências utilizadas para a produção do texto.

Enem e vestibulares

1. Pelo gráfico, é possível identificar que, dos 10 estudantes, 2 deles têm, ao mesmo tempo, medida de massa menor do que 80 kg e medida de altura maior do que 1,65 m, o que corresponde a 20%. Alternativa **b**.

1. (Enem) Um professor, para promover a aprendizagem dos estudantes em estatística, propôs uma atividade. O objetivo era verificar o percentual de estudantes com massa corporal abaixo da média e altura acima da média de um grupo de estudantes. Para isso, usando uma balança e uma fita métrica, avaliou uma amostra de dez estudantes, anotando as medidas observadas. O gráfico apresenta a massa corporal, em quilograma, e a altura, em metro, obtidas na atividade.



Reprodução/Enem, 2023.

Após a coleta dos dados, os estudantes calcularam a média dos valores obtidos, referentes à massa corporal e à altura, obtendo, respectivamente, 80 kg e 1,65 m. Qual é o percentual de estudantes dessa amostra com massa corporal abaixo da média e altura acima da média?

a) 10 **c)** 30 **e)** 70

b) 20 **d)** 50

2. (Unicamp-SP) O gráfico a seguir compara, por região, o percentual do número de internações com duração superior a 24 horas, realizadas na rede privada e no SUS (Sistema Único de Saúde) em 2019.

Comvest/Unicamp-SP, 2023.

(Adaptado de https://revistapesquisa.fapesp.br/sistema-em-construcao/. Acesso em 14/12/22.)

Segundo esse gráfico, é correto afirmar que: Alternativa **a**.

a) mais da metade destas internações em todo o Brasil foram realizadas pelo SUS.

b) na região Sudeste, a maioria dessas internações foram realizadas fora do SUS.

c) nas regiões Norte e Nordeste, a quantidade destas internações realizadas fora do SUS foi superior a 30%.

d) mais de 70% dessas internações em cada uma das regiões (Sudeste, Sul e Centro-Oeste) foram realizadas pelo SUS.

3. (Ficsae-SP) Em 2022 o cantor e compositor Gilberto Gil completou 80 anos de vida. O infográfico a seguir mostra as palavras mais mencionadas em suas canções, sendo a extensão de cada palavra diretamente proporcional à sua frequência nas canções.

Reprodução/FICSAE, 2023.

(https://nexojornal.com.br. Adaptado.)

Admitindo-se que a palavra "azul" esteja presente de 1,5% das canções de Gilberto Gil, então, a frequência da palavra "mundo" em suas canções é de: Alternativa **d**.

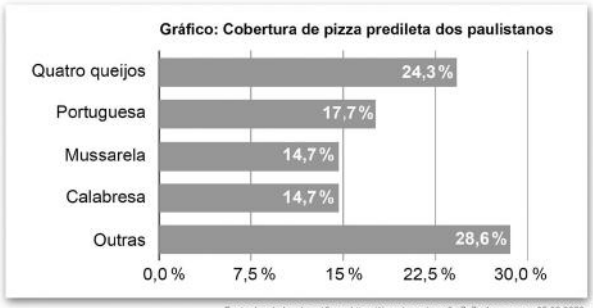
a) 5,25%. **d)** 6,75%.

b) 2,75%. **e)** 3,00%.

c) 7,00%.

4. **(Fatec-SP)** Segundo estudiosos, pode ter sido em São Paulo que a *pizza* assumiu a cara de um prato familiar que pode servir mais de uma pessoa, sendo caracterizado, normalmente, como um disco de 35 cm de diâmetro; ao contrário da *pizza* de Nápoles, sua ancestral, que é um prato individual feito com um diâmetro médio de 28,5 cm.

O gráfico mostra as preferências dos paulistanos em relação à *pizza*.



Reprodução/Fatec-SP, 2023.

Ao analisar os dados numéricos do gráfico, é correto afirmar, sobre eles, que a: Alternativa **a**.

a) média é maior que a moda.

b) moda é igual a 17,7%.

c) moda é maior que a mediana.

d) mediana é igual a 14,7%.

e) mediana é maior que a média.

5. **(Enem)** Um tipo de semente necessita de bastante água nos dois primeiros meses após o plantio. Um produtor pretende estabelecer o melhor momento para o plantio desse tipo de semente, nos meses de outubro a março. Após consultar a previsão do índice mensal de precipitação de chuva (ImPC) da região onde ocorrerá o plantio, para o período chuvoso de 2020-2021, ele obteve os seguintes dados:

- outubro/2020: ImPC = 250 mm;
- novembro/2020: ImPC = 150 mm;
- dezembro/2020: ImPC = 200 mm;
- janeiro/2021: ImPC = 450 mm;
- fevereiro/2021: ImPC = 100 mm;
- março/2021: ImPC = 200 mm.

Com base nessas previsões, ele precisa escolher dois meses consecutivos em que a média mensal de precipitação seja a maior possível.

No início de qual desses meses o produtor deverá plantar esse tipo de semente?

Alternativa **c**.

a) Outubro.

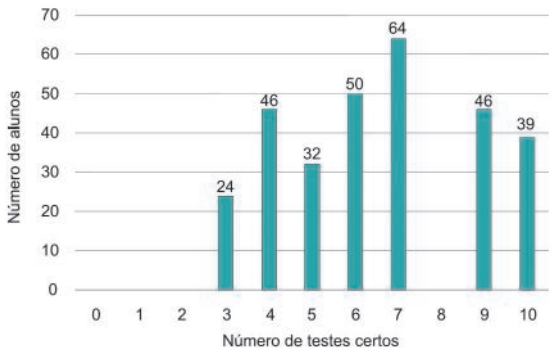
b) Novembro.

c) Dezembro.

d) Janeiro.

e) Fevereiro.

6. **(UEA-AM)** Uma prova com 10 testes foi aplicada para os 301 alunos de uma escola. Nessa prova, os alunos acertaram pelo menos 3 testes e ninguém acertou exatamente 8 testes. Considere o gráfico que indica o número de alunos por número de testes certos.



Reprodução/UEA-AM, 2023.

De acordo com os dados apresentados, a mediana e a moda dos números de testes certos nessa prova foram, respectivamente:

Alternativa **c**.

a) 4 e 9.

b) 5 e 7.

c) 6 e 7.

d) 6,5 e 7.

e) 7 e 6,5.

7. **(FMC-RJ)** Os números 4 (quatro), 5 (cinco), 7 (sete) e 8 (oito) representam as notas de quatro alunos em um teste.

O desvio padrão desse conjunto de notas é um número que pertence ao intervalo:

Alternativa **b**.

a) (0, 1).

b) (1, 2).

c) (2, 3).

d) (3, 4).

e) (4, 5).

8. **(UPE)** Um professor aplicou uma prova para 315 estudantes de uma escola. A coordenação da escola deseja saber se o índice de aprovação (percentual de estudantes aprovados) foi igual ou superior a 50%. Dada à alta quantidade de notas a analisar, o professor

decidiu utilizar um programa de computador para obter essa resposta de forma mais rápida e prática, pois já possui todos esses dados em uma planilha. Ele deve escolher uma medida estatística, cujo valor numérico seja capaz de indicar, por si só, a resposta para o questionamento.

Qual medida estatística deve ser escolhida pelo professor? Alternativa **b**.

a) Média
b) Mediana
c) Moda
d) Variância
e) Desvio padrão

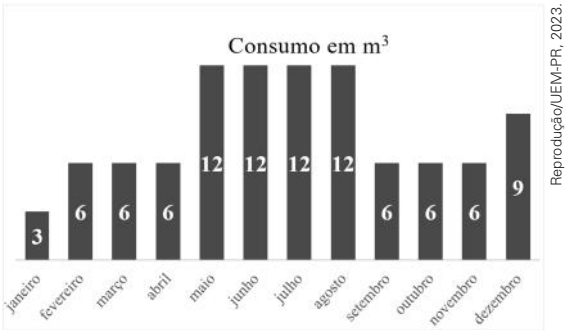
9. **(Unicap-PE)** Considere uma amostra das notas da disciplina de cálculo I no curso de matemática, a qual está representada no rol [a seguir]:

2,0 – 3,5 – 5,0 – 5,0 – 6,0 – 6,5 – 7,0 – 7,0 – 7,0 – 8,5 – 8,5 – 9,0 – 10,0 – 10,0 – 10,0.

Podemos afirmar que: Alternativa **e**.

a) A média amostral é 5,0.
b) A amplitude é 15.
c) As medidas centrais média e mediana possuem valores diferentes.
d) Subtraindo 1,0 ponto em cada nota, a média não se altera.
e) Subtraindo 1,0 ponto em cada nota, a variância não se altera.

10. **(UEM-PR)** Considere o gráfico de barras do consumo de água de um pequeno edifício:



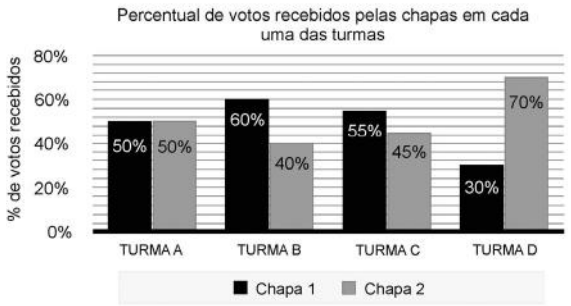
Reprodução/UEM-PR, 2023.

Com base nesse gráfico, [indique no caderno a soma das alternativas corretas].

Soma: 04 + 08 = 12.

01) O consumo médio semestral é de 45 m³.
02) A frequência relativa do maior consumo é de 30%.
04) A moda do consumo mensal é 6 m³.
08) A variância do consumo é de 9,5 m³.
16) A média de consumo é 9 m³.

11. **(Unicamp-SP)** Uma escola tem 4 turmas: **A**, **B**, **C** e **D**. As turmas **B** e **C** têm, cada uma delas, uma quantidade x de alunos, e as turmas **A** e **D** têm, cada uma delas, uma quantidade $3x$ de alunos. Em determinado momento do ano, foi realizada uma eleição para o Grêmio Estudantil, e havia duas candidaturas: a da Chapa **1** e a da Chapa **2**. O gráfico [a seguir] mostra o resultado da votação, em percentual, em cada uma das turmas. Sabe-se que todos os alunos da escola votaram, e não houve nenhum voto branco ou nulo.



Comvest/Unicamp-SP, 2024.

Há duas propostas sobre como definir a chapa vencedora da eleição:

- Proposta **1**: vence a eleição a chapa que receber a maior quantidade de votos, considerando o total de votos da escola.
- Proposta **2**: vence a eleição a chapa que ficar em primeiro lugar (isto é, a que receber mais votos) no maior número de salas.

a) Qual chapa seria a vencedora se fosse adotada a Proposta **1**? Haverá alguma mudança se a Proposta **2** for adotada? Justifique suas respostas. Chapa **2**. Sim, a Chapa **1** seria vitoriosa.

b) Sabendo que a escola tem 160 alunos, [copie e preencha no caderno a tabela a seguir, informando] quantos alunos cada uma das turmas tem, e justifique sua resposta.

	Turma A	Turma B	Turma C	Turma D
Quantidade de alunos	60	20	20	60

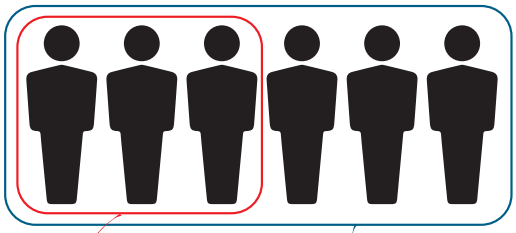
A justificativa de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Conteúdos e aprendizagens

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Estatística

Rawpixel.com/Shutterstock



Amostra

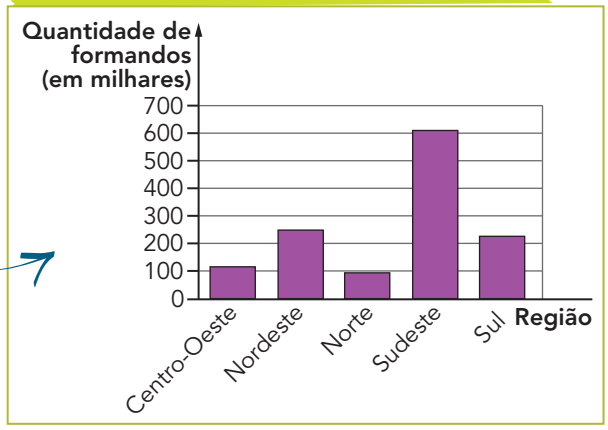
População

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Analisando uma amostra da população brasileira, foram obtidos os seguintes dados em relação à quantidade de formandos brasileiros no Ensino Superior presencial e a distância.

Média aritmética: $MA = 257\,427{,}2$.
Mediana: $Me = 222\,021$.
Moda: Mo, neste caso, não existe.
Amplitude: $A = 514\,499$.
Variância: $V = 34\,346\,685\,335{,}76$.
Desvio padrão: $DP = 185\,328{,}59$.

Quantidade de formandos brasileiros no Ensino Superior presencial e a distância



Fonte dos dados da ilustração e do gráfico: INSTITUTO SEMESP. *Mapa do Ensino Superior*. 14. ed. São Paulo: Instituto Semesp. Disponível em: https://tedit.net/monyjo. Acesso em: 15 ago. 2024.

- Conheço os passos para fazer uma pesquisa estatística?
- Sei ler diferentes tipos de gráficos e consigo diferenciar qual é o melhor em determinada situação?
- Sei calcular e interpretar os resultados das medidas de tendência central e das medidas de dispersão? Respostas pessoais.

UNIDADE 5

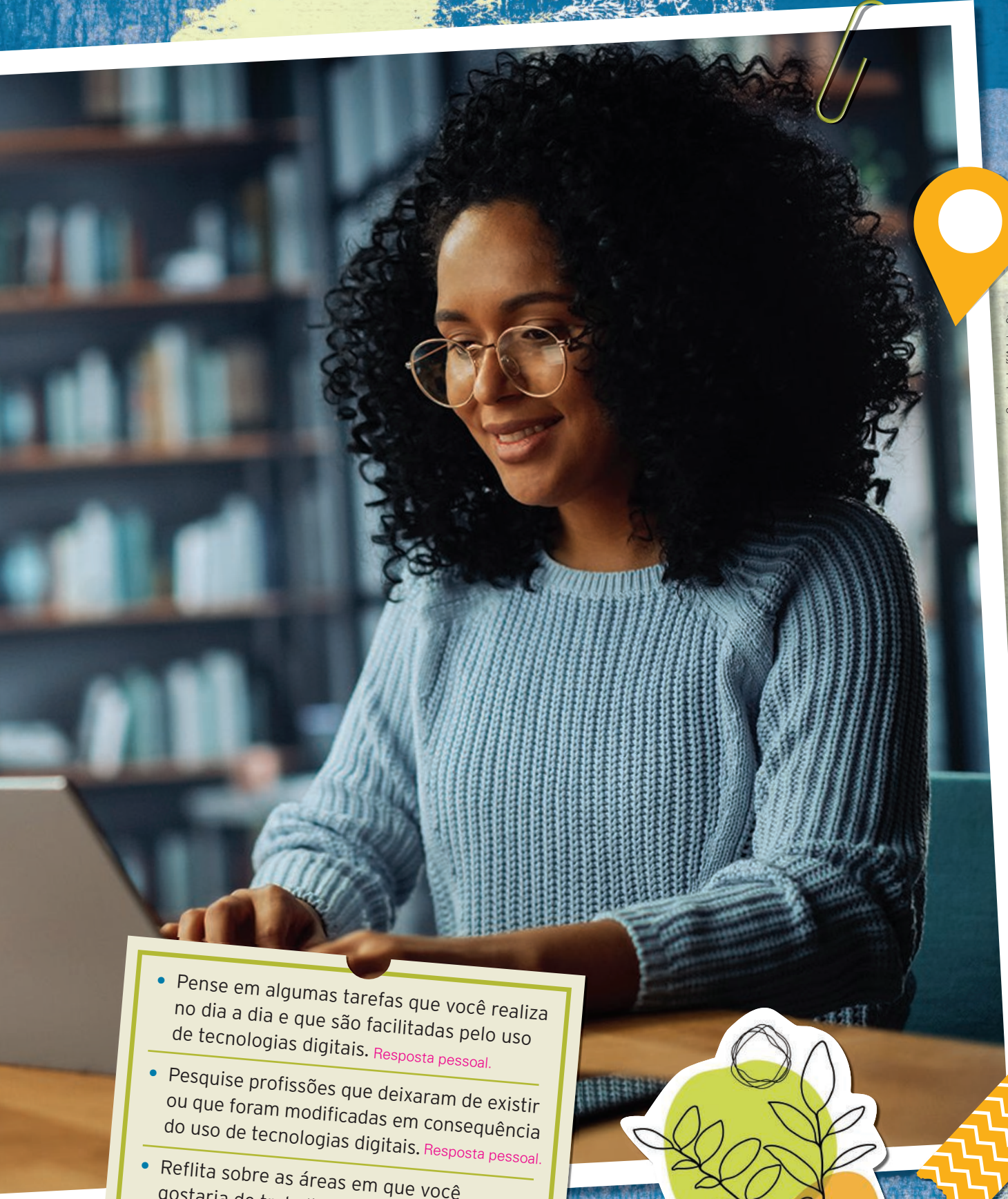
Computação

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta abertura encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Ao longo do tempo, a humanidade evoluiu, desenvolvendo ferramentas e métodos para facilitar, realizar ou otimizar as tarefas do cotidiano, aumentando a produtividade e a qualidade do trabalho, bem como diminuindo o custo de produção. A computação foi uma invenção da humanidade que permitiu realizar, de modo rápido e eficiente, tarefas que poderiam demorar semanas ou anos para serem concluídas.

O computador é uma tecnologia fruto de diversas pesquisas científicas. Ele foi criado em razão da necessidade, principalmente de engenheiros, de efetuar cálculos de maneira rápida e exata.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Por exemplo, a pesquisa pode ser realizada em duplas ou grupos de modo a promover a inclusão e a participação de todos na realização da atividade e na conversa sobre o tema.



Gorodenkoff/Adobe Stock

- Pense em algumas tarefas que você realiza no dia a dia e que são facilitadas pelo uso de tecnologias digitais. Resposta pessoal.
- Pesquise profissões que deixaram de existir ou que foram modificadas em consequência do uso de tecnologias digitais. Resposta pessoal.
- Reflita sobre as áreas em que você gostaria de trabalhar ou sobre as quais gostaria de continuar estudando no futuro e pesquise o papel da tecnologia, se houver, nessas áreas. Quais são as principais tecnologias utilizadas nelas? Resposta pessoal.

CAPÍTULO 1

Um pouco da história

Não escreva no livro

Situação-problema

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Potencial dos computadores

Andrew Angelov/Shutterstock

A tecnologia desenvolvida até 2024 permitia que um cartão de memória armazenasse até 2 TB de dados.

A invenção dos computadores abriu muitas oportunidades para a resolução de problemas cotidianos e que existiram por muito tempo. Imagine como seria mais fácil para o escritor brasileiro Machado de Assis (1839-1908) utilizar um *software* de edição de textos para escrever a obra *Dom Casmurro*. Atualmente, os computadores fazem parte de tantos aspectos da vida cotidiana que é difícil imaginar executar certas tarefas diárias sem utilizá-los. Por exemplo, não é preciso ir até os Correios para enviar uma carta a um amigo: é mais prático e rápido fazer uma videoconferência, enviar um *e-mail* ou mandar uma mensagem de texto por algum aplicativo de mensagens ou rede social.

O computador também é capaz de armazenar uma quantidade de dados muito grande. Dados que, antigamente, tinham de ser registrados em papéis e arquivos que tomavam muito espaço, podem hoje ser armazenados em um cartão de memória que cabe na palma da mão.

Vamos fazer uma atividade para perceber qual é a diferença de medida de intervalo de tempo entre executar uma tarefa com e sem o uso de um computador. Para isso, reúna-se com um colega e, juntos, façam o que é pedido a seguir.

a) No caderno, elaborem uma lista de 5 números naturais positivos aleatórios entre 1 e 99. Resposta pessoal.

b) No caderno, calculem a soma desses 5 números e, com o auxílio de um relógio ou cronômetro, registrem a medida de intervalo de tempo necessária para fazer esse cálculo. Resposta pessoal.

c) Utilizem esse resultado para estimar a medida de intervalo de tempo necessária para calcular a soma de 100 números naturais positivos não necessariamente distintos entre 1 e 99. Resposta pessoal.

d) Com o auxílio de uma planilha eletrônica, criem uma lista de 100 números aleatórios, digitando-os na planilha, e verifiquem a medida de intervalo de tempo que ela leva para calcular a soma deles. Resposta pessoal.

e) Comparem as medidas de intervalo de tempo obtidas e respondam: Quanto mais rápido foi o cálculo utilizando o computador em comparação com o cálculo feito "à mão"? Resposta pessoal.

Fique atento

Para calcular a soma de 100 números utilizando um computador, é possível utilizar o LibreOffice Calc, disponível em: https://tedit.net/9hmyro (acesso em: 16 ago. 2024).

Para calcular a soma de uma lista de números nesse *software*, basta utilizar a função **SOMA** e selecionar a lista de números.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Por exemplo, a pesquisa pode ser realizada em duplas ou grupos de modo a promover a inclusão e a participação de todos na realização da atividade e na conversa sobre o tema.

A origem da computação

Quando procuramos compreender a origem dos computadores e da computação, percebemos que entre os primeiros fatos mencionados pela maioria dos pesquisadores está a criação do ábaco.

O ábaco foi a 1ª calculadora da humanidade – acredita-se que o 1º modelo tenha sido criado há mais de 5 000 anos. Essa ferramenta era utilizada para facilitar os cálculos em diversas situações e foi adaptada de acordo com as necessidades de cada uma das civilizações que a utilizou, mantendo a base original. Com o desenvolvimento das civilizações, a complexidade dos cálculos aumentou. Isso gerou a necessidade de desenvolver outros mecanismos que agilizassem os cálculos complexos, principalmente em relação às construções de casas, prédios, pontes, etc.

Fique atento

Um computador é uma tecnologia formada por um conjunto de componentes eletrônicos que pode tratar diversas informações de maneira automática.

Por isso, cientistas passaram a construir máquinas que possibilitassem a realização desses cálculos. A 1ª delas foi desenvolvida em 1642, pelo matemático francês Blaise Pascal (1623-1662).

SSPL/Getty Images

Réplica moderna de um ábaco romano, o *Calculus*.

Pascal inventou uma máquina de calcular que recebeu o nome de pascalina. A máquina efetuava operações fundamentais de adição e de subtração com números naturais e com decimais positivos.

Ele fabricou alguns exemplares da pascalina que eram acompanhados de um livreto explicativo sobre como operá-la. Ainda que pudesse ter inúmeras aplicações no comércio e na indústria da época, o invento fracassou comercialmente devido ao alto custo de produção. Muitos estudiosos acreditam que a pascalina foi a precursora das calculadoras e até mesmo dos computadores.

As imagens não estão representadas em proporção.

akg-images/Album/Fotoarena

Máquina pascalina, inventada por Blaise Pascal por volta de 1650. Feita de latão (medidas das dimensões: 44,7 cm × 14,7 cm × 10 cm).

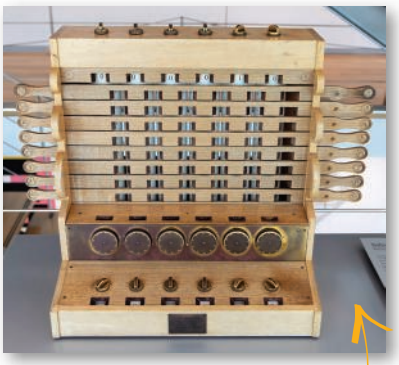
Sobre o assunto

Para saber mais sobre a história e outras realizações de Blaise Pascal, assista ao filme *Blaise Pascal*, lançado em 1972. O filme retrata a trajetória de Pascal desde os 17 anos, mostrando alguns dos feitos dele, como a criação da pascalina.

Blaise Pascal. Direção: Roberto Rossellini. Produção: Renzo Rossellini. Elenco: Pierre Arditi, Rita Forzano, Giuseppe Addobbati e outros. Roteiro: Marcella Mariani, Renzo Rossellini, Roberto Rossellini e outros. Itália e França: Orizzonte 2000, RAI Radiotelevisione Italiana, Office de Radiodiffusion Télévision Française (ORTF), 1972. 129 min.

A pascalina foi considerada a 1ª máquina de calcular; no entanto, um registro do ano de 1623, do professor alemão Wilhelm Schickard (1592-1635), aponta que ele teria construído uma máquina de calcular capaz de efetuar adições, subtrações, multiplicações e divisões de números naturais de até 6 dígitos. Dessa maneira, Schickard passou a ser considerado o criador da 1ª calculadora.

Em 1672, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) criou a calculadora universal. Ele aprimorou a máquina de Pascal, de maneira que a nova invenção possibilitava efetuar, além da adição e da subtração, a multiplicação, a divisão e a extração da raiz quadrada com números naturais e decimais positivos.

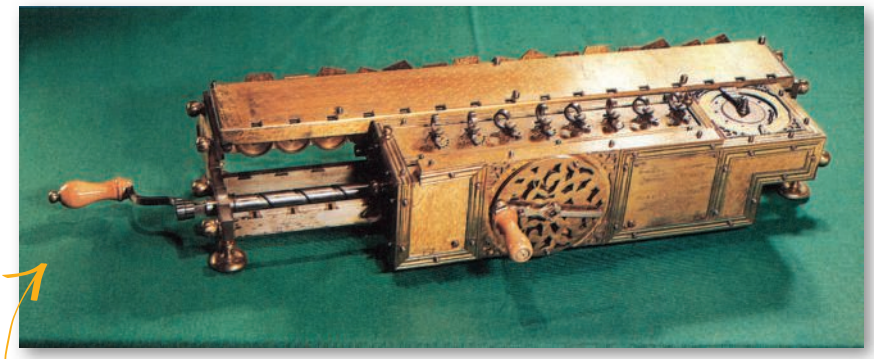


U. Baumgarten/Getty Images

Réplica da máquina de calcular de Wilhelm Schickard que faz parte do acervo do instituto de pesquisa de Matemática discreta The Arithmeum, em Bonn, Alemanha. Foto de 2022.

Fontes dos dados: FERNANDEZ, M. P.; CORTÉS, M. I. *Introdução à computação*. 3. ed. Fortaleza: Eduece, 2015; UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Instituto de Matemática e Estatística. Departamento de Ciência da Computação. *Projeto MAC Multimídia*: história do computador. São Paulo: USP, 2005. Disponível em: https://tedit.net/62plhh; FONSECA FILHO, C. *História da computação*: o caminho do pensamento e da tecnologia. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2007; MARCOLIN, N. Máquina de calcular. *Pesquisa Fapesp*, 75. ed., maio 2002. Disponível em: https://tedit.net/bshvz9. Acesso em: 23 jul 2024.

As imagens não estão representadas em proporção.



NYC./Alamy/Fotoarena

Réplica da máquina de cálculo universal de Leibniz.

Atividades

Não escreva no livro

1. Reúna-se com um colega.

a) Busquem na internet diferentes tipos de ábaco. Escolham um dos tipos e pesquisem o funcionamento dele. Pesquisem também como efetuar nele operações de adição e de subtração com números naturais de até 3 algarismos. Registrem no caderno os dados pesquisados. Não se esqueçam de utilizar fontes confiáveis de pesquisa e indicá-las com os registros.

Resposta pessoal.

b) Como o mecanismo do ábaco que vocês escolheram usa a decomposição dos números naturais para efetuar as operações de adição e de subtração?

Resposta esperada: As hastes representam as unidades, as dezenas, as centenas, etc. do número. É preciso decompor o número nessas ordens para efetuar as operações.

c) Elaborem uma apresentação para a turma mostrando a construção e o funcionamento do ábaco escolhido. Incluam exemplos de como usar o ábaco para realizar operações de adição e de subtração. Resposta pessoal.

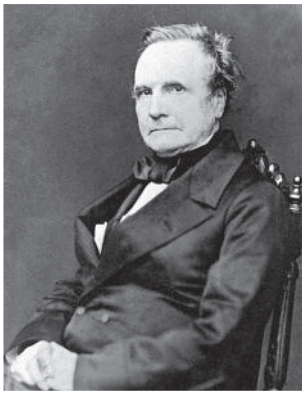
2. Reúna-se com um colega e, juntos, pesquisem o funcionamento da pascalina. Depois comparem o mecanismo dessa máquina com o do ábaco pesquisado na atividade **1**. Quais são as principais diferenças? A pascalina utiliza alguma maneira de decompor os números?

Exemplos de resposta: A pascalina tem um mecanismo similar ao do ábaco, mas, em vez de hastes, usa engrenagens que indicam as unidades, as dezenas, as centenas, etc. do número e que giram conforme a máquina funciona.

A computação moderna

Quase 2 séculos após a criação das primeiras calculadoras mecânicas, em 1823 uma máquina nova foi construída pelo matemático inglês Charles Babbage (1791-1871). A máquina que ele criou foi o 1º computador de uso geral. Essa máquina também foi a inspiração para os computadores que conhecemos atualmente.

Babbage não conseguiu finalizar a invenção dele, mas sabia que, para efetuar cálculos utilizando instruções, seria necessário criar uma nova linguagem. As observações que ele deixou inspiraram a matemática e escritora inglesa Ada Augusta Byron (1815-1852), também conhecida como Condessa de Lovelace ou Ada Lovelace, a criar o 1º algoritmo de programação.



Wikipedia/Wikimedia Commons

Foto de Charles Babbage tirada na década de 1860.

As imagens não estão representadas em proporção.

A criação da programação

Programa (ou **código**) é um conjunto de comandos escritos em linguagens de programação, para serem interpretados por máquinas, e que indicam passo a passo como a máquina deve se comportar dada determinada ação inicial.

Fique atento

O conceito de algoritmo será trabalhado adiante, nesta Unidade.

Ada Lovelace trabalhou com Charles Babbage para criar um programa para a máquina que ele inventou. Ada não apenas se interessou pela máquina, mas também compreendeu o funcionamento dela e foi responsável pela escrita do mais completo relato sobre o processo. Antes mesmo de a máquina ser construída, Ada já tinha escrito programas capazes de serem executados por ela. Esses programas utilizavam conceitos que ainda são utilizados na programação.

O programa que Ada criou é considerado o 1º *software* da história; por isso, ela foi tão importante para o desenvolvimento da programação. Devido à importância do trabalho dela, comemora-se, na segunda terça-feira de outubro, o Ada Lovelace Day, data criada para celebrar conquistas das mulheres na ciência e incentivar outras a seguirem carreira na área.

Fontes dos dados: ADA LOVELACE: British mathematician. *Encyclopaedia Britannica*, 2024. Disponível em: https://tedit.net/27dfup; FERNANDEZ, M. P.; CORTÉS, M. I. *Introdução à computação*. 3. ed. Fortaleza: Eduece, 2015; UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Instituto de Matemática e Estatística. Departamento de Ciência da Computação. *Projeto MAC Multimídia*: história do computador. São Paulo: USP, 2005. Disponível em: https://tedit.net/62plhh; FONSECA FILHO, C. *História da computação*: o caminho do pensamento e da tecnologia. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2007. Acesso em: 16 ago. 2024.

Retrato de Ada, condessa de Lovelace, de Alfred Edward Chalon, 1840. Aquarela sobre papel, 25 cm × 18,3 cm.

SSPL/Getty Images

Sobre o assunto

Assim como diversas outras mulheres nas ciências, Ada Lovelace encontrou dificuldades e sofreu preconceito por trabalhar em uma área que era compreendida, na época, como preferencialmente masculina. Para saber mais sobre ela e outras mulheres que enfrentaram preconceitos e contribuíram para as ciências, sugerimos a leitura do livro *As cientistas: 50 mulheres que mudaram o mundo*, de Rachel Ignotofsky, publicado em 2017 pela editora Blucher.

IGNOTOFSKY, Rachel. *As cientistas*: 50 mulheres que mudaram o mundo. Tradução de Sonia Augusto. São Paulo: Blucher, 2017. 128 p.

Máquina de Turing

Pictorial Press Ltd/Alamy/Fotoarena

Alan Turing no formulário de registro na Universidade de Princeton. Foto de 1936.

Na década de 1940, o matemático, criptoanalista e cientista da computação britânico Alan Mathison Turing (1912-1954) projetou uma máquina abstrata que seria capaz de solucionar qualquer cálculo que fosse apresentado como um algoritmo. Essa foi uma máquina abstrata porque ela só existia no campo das ideias. Nessa máquina, o cálculo seria decomposto de maneira que, ao realizar determinada série de instruções, poderia ser resolvido. Essa máquina ficou conhecida como máquina universal, ou máquina de Turing.

Essa invenção contribuiu para o desenvolvimento de um campo muito importante da computação, o da inteligência artificial (IA ou AI, sigla da expressão em inglês *artificial intelligence*).

Turing também ficou conhecido por criar a máquina Bomb, responsável por decodificar a máquina Enigma, durante a Segunda Guerra Mundial (1939-1945). A Enigma pertencia aos alemães e era utilizada para codificar mensagens que indicavam os próximos locais de ataque, de modo que não fossem compreensíveis caso fossem interceptadas por tropas inimigas.

A máquina Bomb foi precursora do computador Colossus, criado pelo engenheiro inglês Tommy Flowers (1905-1998) entre os anos 1943 e 1945. Durante a Segunda Guerra Mundial, a Inglaterra financiou um centro de estudos que ficou conhecido como Bletchley Park, onde foi desenvolvido o Colossus, que pode ser considerado o 1º computador eletrônico programável.

Por todos esses motivos, podemos considerar que Alan Turing e a equipe dele deram um grande passo para que fossem desenvolvidos os computadores que usamos atualmente. Além disso, esse trabalho ajudou a encurtar a guerra, salvando muitas vidas. Infelizmente, isso não livrou Turing, nos anos que seguiram à guerra, de uma intensa perseguição, inclusive governamental, por ser homossexual. Esses fatos corroboraram para a morte dele em 1954, aos 41 anos. Em 2009, o primeiro-ministro britânico Gordon Brown (1951-) pediu desculpas postumamente, em nome do governo inglês, e, em 24 de dezembro de 2013, a rainha Elizabeth II (1926-2022) perdoou Turing pelas condenações aplicadas a ele na época.

Fontes dos dados: FERNANDEZ, M. P.; CORTÉS, M. I. *Introdução à computação*. 3. ed. Fortaleza: Eduece, 2015; FONSECA FILHO, C. *História da computação*: o caminho do pensamento e da tecnologia. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2007; O COMPUTADOR Colossus Mark I de 1943. *Museu Capixaba do Computador*, 2 dez. 2022. Disponível em: https://tedit.net/k9tfu6. Acesso em: 16 ago. 2024.

Infográfico clicável

Não escreva no livro

Reflita

No Reino Unido, até a 2ª metade do século XX, existiam diversas leis que criminalizavam relações homossexuais e a perseguição a Turing foi alicerçada nelas. Somente na 2ª metade do século XX elas começaram a ser revogadas ou modificadas, mediante a atuação de diversos grupos sociais.

Na sua opinião, por que a atuação desses movimentos sociais é tão importante para diminuir preconceitos na sociedade?

Resposta pessoal.

Sobre o assunto

Para saber mais sobre a história de Alan Turing, assista ao filme *O jogo da imitação*, lançado em 2014 e inspirado no livro biográfico *Alan Turing: the Enigma*, de Andrew Hodges.

O JOGO da imitação. Direção: Mortem Tyldum. Produção: Nora Grossman, Ido Ostrowsky, Teddy Schwarzman. Elenco: Benedict Cumberbatch, Keira Knightley, Matthew Goode e outros. Estados Unidos, Reino Unido: Black Bear Pictures, FilmNation Entertainment, Bristol Automotive, 2014. 114 min.

A criação dos computadores

Carrossel de imagens

Os computadores mais parecidos com as estruturas que utilizamos no cotidiano passaram por 4 fases.

1ª geração de computadores – 1930 a 1950

Foi nesse período que foram criados os primeiros computadores: Mark I (1944), Bomb e Colossus (1945) e Eniac (1946). Esses computadores eram muito diferentes dos que utilizamos atualmente; por exemplo, as máquinas podiam ocupar cômodos inteiros. O Mark I, construído pela equipe do engenheiro estadunidense Howard Aiken (1900-1973), pesava 5 toneladas.

O Eniac (*Electronic Numerical Integrator and Computer*) foi o 1º computador digital eletrônico a ser construído com interesses além da esfera militar. Ele foi inventado pelo engenheiro elétrico e pioneiro em computadores estadunidense John Eckert (1919-1995) e pelo físico estadunidense John Mauchly (1907-1980) e ocupava uma medida de área igual a 180 m^2 e pesava 30 toneladas.

2ª geração de computadores – 1955 a 1965

A 2ª geração de computadores foi marcada pela invenção do transistor, um componente de circuito elétrico considerado uma das maiores criações da história. Até esse momento, os computadores eram construídos utilizando válvulas, de maneira que a criação do transistor permitiu a redução do tamanho das máquinas, bem como dos custos de produção, armazenamento e transporte.

3ª geração de computadores – 1965 a 1980

A partir de 1965, pesquisadores da área de computação desenvolveram computadores de menor tamanho, capazes de processar e analisar dados de maneira mais rápida. O físico estadunidense Robert Noyce (1927-1990), por exemplo, utilizando o silício como matéria-prima, desenvolveu circuitos integrados (os *chips*), capazes de integrar dezenas de transistores.

Não escreva no livro

Reflita

Antigamente, os computadores não eram utilizados em larga escala ou para afazeres domésticos. Apenas grandes empresas tinham o espaço e o dinheiro para manter uma máquina desse porte. Além disso, somente pesquisadores e cientistas de áreas relacionadas à computação sabiam como utilizar esses equipamentos.

Reflita sobre quais características foram responsáveis pela popularização do computador.

Exemplos de resposta: Interface amigável ao usuário, menor tamanho, mais leveza, existência de tela e *mouse*, etc.

vlabo/Adobe Stock

Transistor (1º objeto) e válvula (2º objeto).

4ª geração de computadores – 1980 até os dias atuais

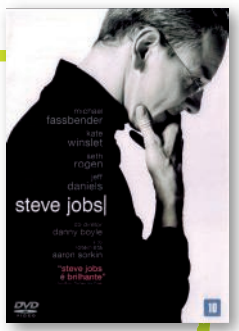
Na 4ª geração, o tamanho dos computadores foi reduzido a ponto de gerar a produção em larga escala e popularizar as máquinas, e houve um aumento da capacidade de processamento.

Talvez essa tenha sido uma das mais importantes gerações para a evolução dos computadores de uso pessoal, pois, além da redução do tamanho, houve uma significativa redução do custo deles. Foi nessa época que outras pessoas se destacaram na área, como os estadunidenses Sthephen Gary Wozniak (1950-), Steve Jobs (1955-2011) e Bill Gates (1955-), que fundaram as maiores empresas de *softwares* e computadores do mundo.

Sobre o assunto

Para saber mais da vida de Steve Jobs e de algumas das criações dele, assista ao filme biográfico *Steve Jobs*, lançado em 2015.

STEVE JOBS. Direção: Danny Boyle. Produção: Danny Boyle, Guymon Casady, Christian Colson e outros. Elenco: Michael Fassbender, Kate Winslet, Seth Rogen e outros. Roteiro: Aaron Sorkin. Reino Unido, Estados Unidos: Universal Pictures, Legendary Entertainment, Scott Rudin Productions, 2015. 122 min.



Reprodução/Universal Pictures UK

Com o passar do tempo, o foco das empresas desse mercado passou a ser o desenvolvimento de sistemas operacionais voltados para simplificar o uso doméstico dos computadores e, até 2022, as empresas de Jobs e Gates ainda eram 2 das maiores concorrentes mundiais nesse mercado.

Fontes dos dados: FERNANDEZ, M. P.; CORTÉS, M. I. *Introdução à computação*. 3. ed. Fortaleza: Eduece, 2015; FONSECA FILHO, C. *História da computação*: o caminho do pensamento e da tecnologia. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2007.

Atividades

Não escreva no livro

3. Reúna-se com um colega. Juntos, escolham uma das personalidades apresentadas neste capítulo e façam o que é pedido em cada item.

a) Pesquisem na internet a biografia da pessoa que vocês escolheram: onde ela nasceu e quais foram os principais marcos da vida dela. Pesquisem também o que essa pessoa criou ou ajudou a desenvolver e como essa invenção auxiliou a sociedade na época.

Não se esqueçam de escolher fontes confiáveis de pesquisa e indicá-las nos registros.

A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

b) Reúnam todas as informações obtidas no item **a** e preparem uma apresentação para a turma e a comunidade escolar utilizando um meio digital. Para isso, vocês podem conversar e debater entre si quais são os pontos mais importantes da biografia da pessoa escolhida para apresentar ao público.

A apresentação pode ser feita por meio de postagens em um *blog*, vídeos para um *vlog* ou mesmo um *podcast*, entre outras opções. Usem a criatividade.

Resposta pessoal.

Funcionamento de um computador

Agora que você já sabe alguns fatos que levaram ao desenvolvimento e à evolução histórica dos computadores, vamos entender melhor como eles funcionam. Podemos comparar o computador ao corpo humano, separando-o em cabeça, tronco e membros.

Podemos afirmar que a **cabeça** de um computador é composta de um processador e de memórias digitais. O processador é o responsável por realizar os cálculos utilizando uma linguagem própria, que apresentaremos a seguir; as memórias digitais são responsáveis por armazenar dados, temporariamente, nas memórias RAM e ROM e, permanentemente, no HD (*hard drive*) e no SSD (*solid-state drive*).

Já o **tronco** do computador seria a placa-mãe, isto é, o local onde todos os dados são trocados, por meio de ligações e transistores. É também por onde a energia passa para alimentar todos os componentes que fazem o computador funcionar.

Os **membros** seriam os acessórios, como o teclado, o *mouse*, os fones de ouvido, a impressora. Dessa maneira, os dados trafegam através da placa-mãe até o processador e as memórias externas.

Processamento de dados

O computador compreende as instruções por meio de uma linguagem própria. Para isso, são utilizados valores binários com dados sequenciais de 0 (zero) ou 1 (um), de maneira que esses valores podem ser usados para representar diferentes tipos de dado, como letras, símbolos, números, entre outros. Cada valor binário 0 ou 1 é um *bit*, que é a menor unidade computacional existente. Usando esse sistema de base binária, os computadores conseguem realizar as operações definidas por algoritmos de modo eficiente e rápido.

Analise um exemplo de decodificação de uma palavra na língua portuguesa para a linguagem da máquina.

c	á	l	c	u	l	o
01100011	11100001	01101100	01100011	01110101	01101100	01101111

Nesse contexto, cada sequência de números é formada por 8 *bits*, o que corresponde a 1 *byte* (1 B). Essa é a unidade de armazenamento de dados utilizada pelos computadores.

Também é possível representar números da base decimal utilizando a base binária, conforme apresentado no quadro.

Número na base decimal	Número na base binária
0	00000000
1	00000001
2	00000010
3	00000011
4	00000100
5	00000101

Armazenamento de dados

No Sistema Internacional de Unidades (SI), as grandezas e as respectivas unidades de medida são organizadas em potências de 10; por exemplo, 1 quilograma (kg) equivale a 1000 ou 10^3 gramas. As grandezas relacionadas ao armazenamento de dados também foram organizadas, de acordo com o SI, em uma escala decimal de maneira que 1 *kilobyte* (1 kB), por exemplo, corresponde a 1000 ou 10^3 *bytes*.

Contudo, a Comissão Eletrotécnica Internacional (IEC) organizou as grandezas relacionadas ao armazenamento de dados em uma escala de potências de 2, também chamada de escala binária. De acordo com essa escala, 1 *kilobyte* corresponde a 1024 ou 2^{10} *bytes*.

Note os nomes das unidades e as diferenças no quadro a seguir.

Unidades de armazenamento e quantidade de *bytes*

Escala decimal (Sistema Internacional de Unidades – SI)			Escala binária (Comissão Eletrotécnica Internacional – IEC)		
Nome	**Símbolo**	**Valor**	**Nome**	**Símbolo**	**Valor**
Byte	B	$10^0 = 1$	*Byte*	B	$2^0 = 1024^0 = 1$
Kilobyte	kB	10^3	*Kibibyte*	KiB	$2^{10} = 1024^1$
Megabyte	MB	10^6	*Mebibyte*	MiB	$2^{20} = 1024^2$
Gigabyte	GB	10^9	*Gibibyte*	GiB	$2^{30} = 1024^3$
Terabyte	TB	10^{12}	*Tebibyte*	TiB	$2^{40} = 1024^4$
Petabyte	PB	10^{15}	*Pebibyte*	PiB	$2^{50} = 1024^5$
Exabyte	EB	10^{18}	*Exbibyte*	EiB	$2^{60} = 1024^6$
Zettabyte	ZB	10^{21}	*Zebibyte*	ZiB	$2^{70} = 1024^7$
Yottabyte	YB	10^{24}	*Yobibyte*	YiB	$2^{80} = 1024^8$

Fonte dos dados: UNITS of Measurement for Storage Data. *IBM*, 13 mar. 2023. Disponível em: https://tedit.net/mhr82j. Acesso em: 16 ago. 2024.

Fique atento

Para diferenciar essas escalas, foi criada uma distinção nos nomes e nos símbolos das unidades de armazenamento, como é mostrado no quadro. Contudo, a nomenclatura da escala binária é pouco utilizada.

Essas nomenclaturas são as mais usadas, mas também existem versões em português, como baite e quilobaite.

Atividades

4. b) O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Não escreva no livro

4. Nem sempre está claro para o consumidor, ao contratar, por exemplo, uma franquia de internet de 1 GB em planos de telefonia celular, a quantos MB essa franquia corresponde, já que as empresas podem estar seguindo a escala decimal do SI ou a escala binária da IEC.

a) Qual é a razão entre 1 GB na escala binária da IEC e 1 GB na escala decimal do SI?

Aproximadamente 1,074.

b) Você acha que é justo para o consumidor as empresas não informarem qual tipo de escala elas usam nas franquias de celular?

Texto para a próxima atividade.

Depois de tirar uma foto, onde você guarda a imagem? Há quem ainda use o armazenamento físico, como as memórias de *smartphones*, computadores e *drives* externos. No entanto, uma alternativa bem interessante e cada vez mais popular é o armazenamento em "nuvem".

[...]

Uma [das vantagens da nuvem] é a redundância: em geral, arquivos não ficam guardados em um único disco de um único servidor.

[...]

Há um número estimado para [a capacidade de armazenamento da nuvem]: 2 mil *exabytes* ou 2 *zettabytes*. O que esse número significa? Bem, cada *exabyte* corresponde a pouco mais de um bilhão de *gigabytes*. Sendo assim, falamos aqui de pouco mais de 2 trilhões de *gigabytes*.

5. a) Exemplo de resposta: Salvar arquivos importantes em mais de um dispositivo; fazer *backup* dos dispositivos móveis, etc.

[...]

LARA, R. Como funciona armazenamento em nuvem? Não é no céu, mas dados "voam" por aí. *UOL*, 5 mar. 2020. Disponível em: https://tedit.net/5mjriv. Acesso em: 23 jul. 2024.

5. Reúna-se com um colega para resolver esta atividade.

a) Pesquisem outras maneiras de armazenar dados e evitar a perda de dados armazenados.

b) Pensem no quão grande é a capacidade de uma nuvem, respondendo à questão: considerando que TB e ZB estão na escala decimal, quantas pessoas com 1 TB de dados poderiam utilizar a mesma nuvem com armazenamento igual a 2 ZB?

Usando a escala decimal, temos que $1\ TB = 1 \cdot 10^3\ GB$ e $2\ ZB = 2 \cdot 10^{12}\ GB$.
$(2 \cdot 10^{12}) \div (1 \cdot 10^3) = 2 \cdot 10^9$
São 2 bilhões de pessoas.

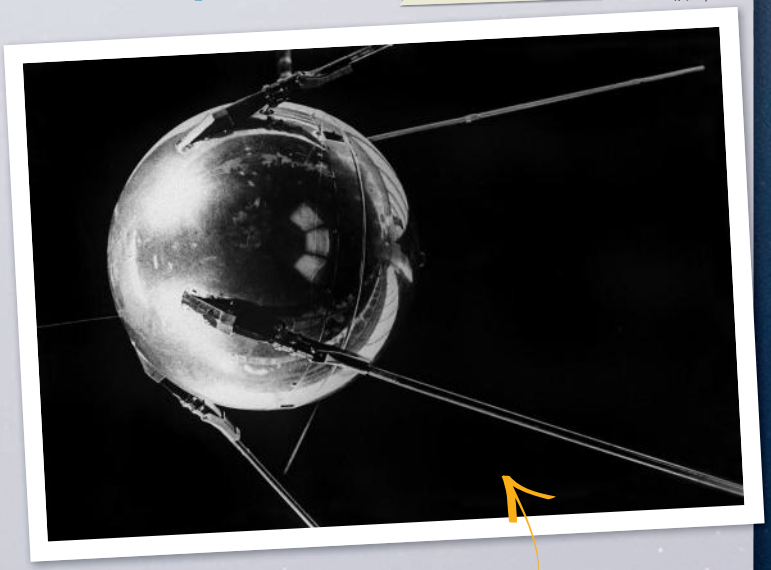
Conexões

rsvmffn/Shutterstock

As matemáticas da corrida espacial

As imagens não estão representadas em proporção.

TASS/AFP



Primeiro satélite espacial Sputnik I. Foto de 1957.

No período entre 1947 e 1991 ocorreu a Guerra Fria, processo histórico caracterizado por conflitos econômicos, ideológicos e tecnológicos entre 2 blocos antagônicos que se estabeleceram após a Segunda Guerra Mundial: o bloco capitalista, liderado pelos Estados Unidos, e o bloco socialista, liderado pela extinta União Soviética.

Em razão do alto investimento em tecnologia de ambos os blocos durante esses conflitos, teve início a corrida espacial. Os soviéticos saíram na frente: em 1957, lançaram o satélite artificial Sputnik. Depois, em 1961, eles conseguiram enviar ao espaço o cosmonauta e piloto soviético Yuri Alexeievitch Gagarin (1934-1968), em um voo que durou quase 2 horas. Em 1958, os Estados Unidos fundaram a *National Aeronautics and Space Administration* (Nasa), que substituiu a *National Advisory Committee for Aeronautics* (Naca).

No início da década de 1960, a sociedade estadunidense lidava com a segregação racial entre brancos e negros, situação que afetava todas as esferas do país, até mesmo a Naca e a Nasa, onde funcionárias negras trabalhavam em condições inferiores em relação aos colegas brancos.

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Entre essas funcionárias estavam as matemáticas Katherine Johnson (1918-2020), Mary Jackson (1921-2005) e Dorothy Vaughan (1910-2008), que atuavam na Naca com outros funcionários (majoritariamente mulheres negras) como "computadores humanos": elas realizaram longos e complicados cálculos matemáticos para as missões da Naca até a introdução dos computadores, quando as funções de trabalho foram adaptadas às novas tecnologias disponíveis.

Posteriormente, na Nasa, a equipe de Johnson foi responsável pelo cálculo das trajetórias de voo de diversas aeronaves estadunidenses, entre elas a da missão Apollo 11, que, em 1969, levou à Lua o engenheiro aeroespacial, aviador naval e astronauta estadunidense Neil Armstrong (1930-2012).

Reprodução/NASA

Katherine Johnson. Foto de 1983.

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Ciência e Tecnologia* e *Educação em Direitos Humanos*.

Quando a Nasa começou a usar computadores para a missão em que John Glenn orbitou a Terra pela primeira vez (1962), Katherine foi consultada para verificar os cálculos da máquina. "Se ela diz que são bons, então estou pronto para ir", disse o astronauta, segundo lembrou a própria Katherine.

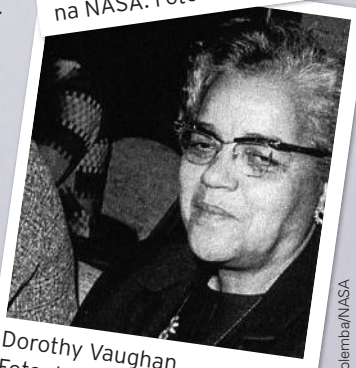
De fato, a Nasa reconhece no *site* dela que "não teria sido possível fazer essas coisas sem Katherine Johnson e seu amor pela matemática".

[...] **1.** Exemplo de resposta: Se não houvesse o preconceito de gênero e de raça, mais pessoas teriam tido acesso ao estudo e a equipamentos tecnológicos, aumentando a quantidade de trabalhadores capacitados a contribuir com avanços da Ciência.

KATHERINE Johnson, matemática negra que ajudou a Nasa a ir para a Lua, morre aos 101 anos. *G1*, 24 fev. 2020. Disponível em: https://tedit.net/r64475. Acesso em: 23 jul. 2024.

Reprodução/NASA

Mary Jackson trabalhando na NASA. Foto de 1977.



Beverly Golemba/NASA

Dorothy Vaughan. Foto de 1950.

A atuação desse grupo de mulheres em um dos processos históricos mais significativos do século XX, a corrida espacial, foi um tema pouco explorado por muito tempo. Só nas últimas décadas começou a ganhar o destaque devido, como quando o então presidente dos Estados Unidos Barack Obama homenageou Katherine Johnson com a Medalha Presidencial da Liberdade, em 2015.

Fontes dos dados: KATHERINE Johnson, matemática negra que ajudou a Nasa a ir para a Lua, morre aos 101 anos. *G1*, 24 fev. 2020. Disponível em: https://tedit.net/r64475; SILVA, Lucas Henrique dos Santos. Chegada do homem à Lua. *Infoescola*, 2011. Disponível em: https://tedit.net/ldbf7p; SOARES, Jessica. A história das mulheres negras fundamentais para a viagem à Lua. *Superinteressante*, 15 set. 2016. Disponível em: https://tedit.net/l8h2b6. Acesso em: 19 out. 2024.

Conecte com o texto

As imagens não estão representadas em proporção.

1. Na sua opinião, preconceitos e práticas segregacionistas, como as mencionadas no texto, podem ter contribuído para um atraso no desenvolvimento tecnológico mundial? Justifique.

2. Vocês acreditam que ainda hoje há preconceito? Se sim, vocês acham que ele pode impedir ou dificultar os desenvolvimentos humano e tecnológico? Argumentem defendendo suas opiniões e citem alguns exemplos.

3. Você já presenciou ações ou comentários preconceituosos contra mulheres ou pessoas negras? Reúna-se com os colegas e reflitam sobre como lidar com essas situações e conscientizar as pessoas sobre a importância do respeito à diversidade.

Resposta pessoal.

Pesquise e debata

4. Reúna-se com um colega e, juntos, pesquisem na internet características da segregação racial que ocorreu nos Estados Unidos, em especial nos séculos XIX e XX. Depois, comparem os dados levantados com o que ocorreu com os negros no Brasil. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

5. Reúna-se com um colega e, juntos, pesquisem na internet exemplos de contribuições de mulheres negras brasileiras para a ciência e a tecnologia. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Sobre o assunto

2. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Para saber mais sobre a vida das matemáticas Katherine Johnson, Mary Jackson e Dorothy Vaughan, assista ao filme *Estrelas além do tempo*, lançado em 2016 e inspirado no livro de mesmo nome escrito por Margot Lee Shetterly. O filme retrata, em detalhes, algumas das dificuldades que elas enfrentaram, bem como a importância delas na corrida espacial.

ESTRELAS além do tempo. Direção: Theodore Melfi. Produção: Donna Gigliotti, Peter Chernin, Jenno Topping e outros. Elenco: Octavia Spencer, Taraji P. Henson, Janelle Monáe e outros. Estados Unidos: Fox 2000 Pictures, Chernin Entertainment, Levantine Films, 2016. 127 min.

rsvmffn/Shutterstock

CAPÍTULO 2

Algoritmos e fluxogramas

Não escreva no livro

Situação-problema

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Algoritmos no cotidiano

Dewald Kirsten/Shutterstock

Para fazer um bolo, costumamos realizar passos específicos indicados na receita dele.

Muitas ações do nosso dia a dia são procedimentais, isto é, costumam ser realizadas por meio de uma sequência de ações menores e mais simples. Ir à escola, por exemplo, envolve ações menores, como "tomar banho", "colocar o uniforme escolar", "se alimentar", "sair de casa" e "utilizar um meio de transporte para ir à escola". Além de a ação "ir à escola" ser decomposta em etapas menores, essas etapas têm ou podem ter uma ordem bem definida – tomar banho, por exemplo, é algo que deve ser feito antes de colocar o uniforme.

Pode parecer estranho organizar essas ações em etapas menores e mais simples porque elas são tão rotineiras que as executamos sem pensar. Entretanto, entender essa subdivisão auxilia a compreensão de uma lógica parecida, que é usada na programação e no funcionamento de computadores, equipamentos eletrônicos, jogos, programas e da própria internet. Uma das maneiras de registrar procedimentos é utilizando algoritmos.

A Matemática é uma área do conhecimento na qual o uso de algoritmos é comum. Por exemplo, para calcular a medida de área de um trapézio, conhecendo algumas medidas de comprimento, podemos utilizar a seguinte sequência de ações: identificar as medidas de comprimento da base maior, da base menor e da altura do trapézio; efetuar a adição das medidas de comprimento das bases; multiplicar esse resultado pela medida de comprimento da altura; e, por fim, calcular a metade desse resultado.

Essa sequência de ações está implícita na fórmula $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$.

a) Pense nos passos que você realiza quando precisa fazer um bolo e responda: Quais similaridades você percebe entre essa ação e os algoritmos?

b) Converse com um colega e, juntos, escolham uma prática rotineira na Matemática para criar um algoritmo (uma sequência de ações) utilizado nela. Resposta pessoal.

a) Exemplo de resposta: Assim como nos algoritmos, a técnica de fazer um bolo envolve uma receita, que é composta de uma sequência de passos que devem ser seguidos na ordem estabelecida.

Explorando o conceito de algoritmo

Algoritmo é uma palavra de uso muito comum em diversos contextos: quando queremos chegar a algum lugar e fazemos uso de um aplicativo de navegação por satélite, dizemos que "o algoritmo nos fornecerá o melhor ou o caminho mais rápido a ser percorrido"; em redes sociais, sabemos que há um algoritmo indicando sugestões de novas amizades; em plataformas de *streaming* de vídeos, novos filmes, séries e documentários são sugeridos utilizando algoritmos que consideram os conteúdos acessados anteriormente; ao realizar uma busca por determinado produto em um *site*, algoritmos farão com que você receba ofertas relacionadas a esse produto nas páginas que acessar.

Algoritmos também estão presentes em aplicativos de transporte, de música, nos mais diversos *sites* e em várias outras tecnologias. Mas, afinal, o que é um algoritmo?

Uma das principais características de um algoritmo é o fato de que as instruções dele são **ordenadas** e, para isso, é preciso que a ordem das etapas esteja evidente para quem vai interpretá-las. Além disso, ao aplicar um mesmo algoritmo, com os mesmos dados iniciais, devemos sempre obter o mesmo resultado. Vamos verificar, a seguir, como a ordem das ações pode afetar o resultado de um algoritmo.

5. As etapas 2 e 3. Elas podem ter a ordem invertida sem alterar o resultado, pois não há diferença no resultado final ao trocar antes a 1ª e a 3ª letras e depois trocar a 2ª e a 4ª letras, e trocar antes a 2ª e a 4ª letras e depois trocar a 1ª e a 3ª letras.

Explore para descobrir

Não escreva no livro

O algoritmo a seguir indica uma sequência de passos a serem realizados para obter um dos **anagramas** possíveis para a palavra AMOR.

1. Posicione a 3ª letra no início da palavra.
2. Troque de posição a 1ª e a 3ª letras da nova palavra.
3. Troque de posição a 2ª e a 4ª letras da palavra.
4. Inverta a ordem das letras na palavra.
5. Troque de posição a 1ª e a 4ª letras da palavra.

anagramas: palavras formadas pela mudança de ordem das letras da palavra original. Em Matemática, consideramos todas as possibilidades de anagramas, mesmo que a palavra não tenha sentido ou não seja dicionarizada.

1. Ao aplicar esse algoritmo na palavra AMOR, qual é o resultado obtido? AMOR → OAMR → MAOR → MROA → AORM → MORA. Resultado: MORA.

2. Se esse algoritmo fosse aplicado na palavra MORA, qual seria o resultado obtido? MORA → RMOA → OMRA → OARM → MRAO → ORAM. Resultado: ORAM.

3. Considere as respostas aos itens anteriores e descreva no caderno um algoritmo com apenas 1 passo que seja equivalente ao algoritmo dado no enunciado (isto é, que, dada a mesma palavra inicial de 4 letras, forneça o mesmo resultado que o algoritmo original). Posicione a 1ª letra no fim da palavra.

4. Mantendo como palavra inicial AMOR, se, em vez de seguir os passos do algoritmo na ordem apresentada, for seguida a ordem 1 → 4 → 2 → 5 → 3, qual será o resultado obtido? Esse resultado foi igual àquele obtido com a mesma palavra inicial e seguindo a ordem apresentada no enunciado? AMOR → OAMR → RMAO → AMRO → OMRA → OARM. Resultado: OARM. O resultado não foi igual.

5. No algoritmo original, há 2 etapas que podem ter a ordem invertida sem alterar o resultado, dada a mesma palavra inicial de 4 letras. Identifique essas 2 etapas e justifique sua resposta.

6. Analise o algoritmo apresentado no enunciado e escreva no caderno um algoritmo para obter um anagrama da palavra ANAGRAMA. Em seguida, indique o resultado desse algoritmo.

Resposta pessoal.

Formalizando o conceito de algoritmo

Em poucas palavras, podemos definir um algoritmo da seguinte maneira.

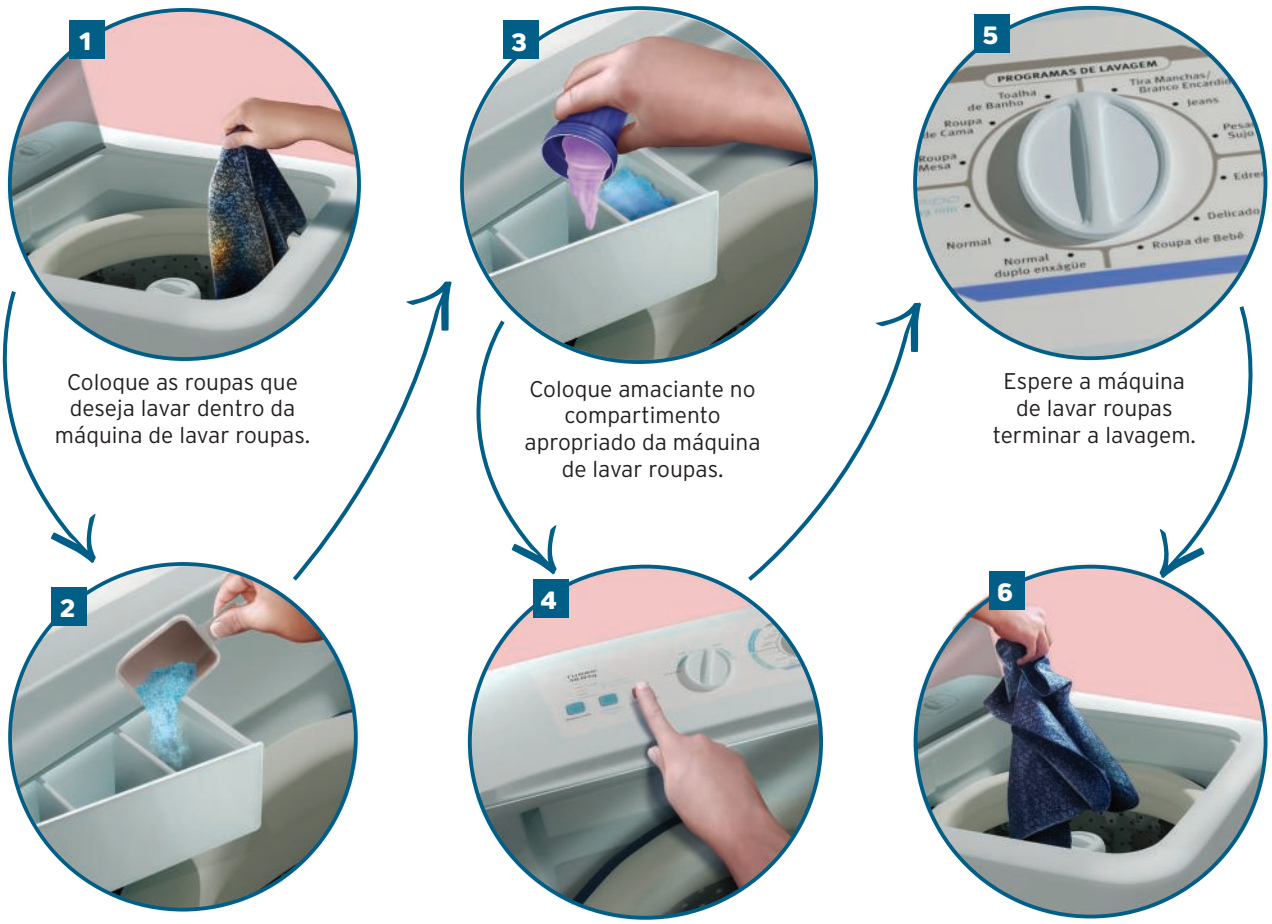
Algoritmo é uma sequência finita e ordenada de ações que permite a execução de determinada tarefa ou a resolução de um problema, de modo único.

Dessa maneira, o algoritmo está presente na Matemática e na computação, mas também está associado às atividades do nosso cotidiano. Por exemplo, para você ir à escola, você seguiu uma sequência de ações e tomou decisões que possibilitaram a sua chegada ao local em segurança.

Um algoritmo deve apresentar algumas características fundamentais:

- deve ser finalizado após uma quantidade finita de etapas (ou passos);
- cada etapa deve ser bem definida, evitando ambiguidades;
- as ações devem ser suficientemente simples para que a tarefa possa ser executada.

A seguir, é apresentado um exemplo simples de algoritmo com uma possível sequência de ações para lavar roupa usando uma máquina de lavar roupas.



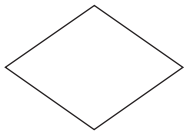
Lápis 13B Ilustrações/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Fluxogramas

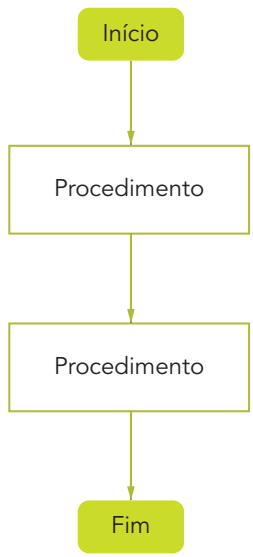
Os **fluxogramas** são um tipo de representação gráfica e de fácil entendimento para a compreensão de um algoritmo, muito utilizados na computação e em outras áreas.

Conheça alguns símbolos comumente utilizados em fluxogramas.

Símbolo				
Significado	Início ou fim do fluxograma.	Procedimento.	Tomada de decisão.	Sentido de leitura do fluxograma.

Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora

Os fluxogramas a seguir ilustram o uso dos símbolos apresentados.



Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora

Exemplos de algoritmos e de fluxogramas

Vamos considerar mais alguns exemplos de algoritmos, agora relacionados a problemas de raciocínio lógico e à Matemática, e os respectivos fluxogramas.

Algoritmos em problemas de raciocínio lógico

Problemas de raciocínio lógico que envolvem travessias de rios existem há muitos séculos e fazem parte da cultura popular de diversos países. Eles motivam e auxiliam no desenvolvimento da percepção e da criatividade.

Acompanhe, a seguir, um problema desse tipo e a resolução dele usando um algoritmo.

Atividades resolvidas

1. Três jovens, cujas massas medem 50 kg, 70 kg e 80 kg, desejam atravessar um rio de uma margem para outra. No entanto, o rudimentar barco que usarão consegue suportar, no máximo, 120 kg. Apresente um algoritmo que pode ser seguido pelos jovens para atravessar o rio.

Resolução

Algoritmo	Justificativa
1. O jovem de 50 kg e o de 70 kg atravessam juntos o rio.	Só é possível que a primeira travessia seja feita pelos jovens de 50 kg e de 70 kg, pois, se só 1 pessoa atravessar, não há como o barco retornar à margem inicial. Uma vez que não há como o jovem de 80 kg ir acompanhado no barco, os outros 2 jovens devem ir.
2. O jovem de 70 kg fica na margem oposta e o de 50 kg retorna à margem inicial.	Necessariamente 1 dos 2 jovens que atravessaram o rio deve voltar com o barco à margem inicial, para que o jovem que ainda está nela possa atravessar o rio. É indiferente qual dos 2 jovens (o de 70 kg ou o de 50 kg) voltará. Neste algoritmo criado, foi escolhido o jovem de 50 kg.
3. O jovem de 50 kg fica na margem inicial e o de 80 kg vai sozinho para a margem oposta.	A única opção é o jovem de 50 kg ficar na margem inicial e o de 80 kg atravessar; caso contrário, a situação volta ao estado anterior.
4. O jovem de 80 kg fica na margem oposta e o de 70 kg volta à margem inicial.	A única opção é o jovem de 80 kg ficar na margem oposta e o de 70 kg atravessar para a margem inicial; caso contrário, a situação volta ao estado anterior.
5. O jovem de 50 kg e o de 70 kg atravessam juntos o rio.	Finaliza-se a solução com os 2 jovens atravessando para a margem oposta.

Professor, para a atividade **2**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Atividades

Não escreva no livro

1. No caderno, crie um algoritmo que descreva sua rotina do momento em que chega em casa, após a escola, até o momento em que começa a almoçar ou jantar. Em seguida, represente essas etapas em um fluxograma.

Resposta pessoal.

2. No caderno, represente em um fluxograma o algoritmo da resolução da atividade resolvida **1**.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

3. Um fazendeiro deseja atravessar um rio, de uma margem para a outra, levando um lobo, um bode e um pé de couve. No entanto, há os seguintes empecilhos:

- se o fazendeiro deixar o lobo e o bode juntos (no barco ou em uma das margens), o lobo comerá o bode;
- se o fazendeiro deixar o bode e o pé de couve juntos (no barco ou em uma das margens), o bode comerá o pé de couve.

Como todos podem atravessar o rio sem que o lobo coma o bode e sem que o bode coma o pé de couve? Com um colega, escreva no caderno um algoritmo que resolva esse problema e o fluxograma correspondente.

O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Texto para a próxima atividade.

Analise o trecho a seguir sobre o funcionamento de um *chat* de inteligência artificial generativa, que utiliza uma tecnologia chamada **redes neurais** para criar qualquer texto de acordo com as solicitações dos usuários.

> A ideia por trás é algo semelhante ao que nós humanos fazemos desde crianças. Lembram dos exercícios de preencher as lacunas de uma frase [dadas] as palavras ao seu redor?

> Os modelos de redes neurais mimetizam esse mecanismo: dado o contexto, qual seria a próxima palavra mais provável? [...].
>
> O QUE é inteligência artificial generativa? *Forbes*, [*S. l.*], 5 maio 2023. Disponível em: https://tedit.net/skdbns. Acesso em: 17 ago. 2024.

O seguinte problema foi apresentado a um *chat* de inteligência artificial:

"Três jovens, cuja massa mede 50 kg, 70 kg e 80 kg, desejam atravessar um rio de uma margem para outra. No entanto, o rudimentar barco que usarão consegue suportar, no máximo, 250 kg. Apresente um algoritmo que pode ser seguido pelos jovens para atravessar o rio."

Analise a resposta do *chat*.

Vamos indicar os jovens por **A** (50 kg), **B** (70 kg) e **C** (80 kg). Aqui está um algoritmo passo a passo:

1. **A** e **B** atravessam o rio juntos.
2. **A** retorna com o barco.
3. **A** e **C** atravessam o rio juntos.
4. **B** retorna com o barco.
5. **A** e **B** atravessam o rio juntos novamente.

4. Responda aos itens a seguir no caderno.

a) O algoritmo criado pelo *chat* resolveu o problema? Justifique.

b) O que pode ter levado o programa a responder dessa maneira?

c) Explique por que é importante verificar respostas fornecidas por esse tipo de *software*.

As respostas encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Algoritmos em problemas de Matemática

Diversos algoritmos são usados em Matemática, inclusive de maneira implícita. Um exemplo são os critérios de divisibilidade estudados no Ensino Fundamental. Por exemplo, ao aplicar o critério de divisibilidade por 2, verificamos se o algarismo das unidades de determinado número natural não nulo é 0, 2, 4, 6 ou 8. Em caso positivo, o número é divisível por 2.

Atividades resolvidas

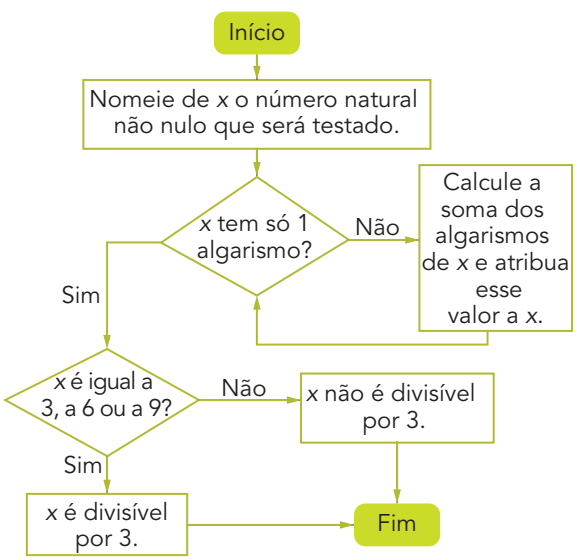
2. O critério de divisibilidade por 3 estabelece que um número natural não nulo é divisível por 3 se, e somente se, a soma de todos os algarismos dele for divisível por 3.

Por exemplo, para saber se o número 728167 é divisível por 3, primeiro adicionamos os algarismos dele: $7 + 2 + 8 + 1 + 6 + 7 = 31$. Sabemos que 31 não é divisível por 3, mas, se quisermos, podemos repetir esse procedimento até obter um número de 1 algarismo: $3 + 1 = 4$, que não é divisível por 3. Portanto, 728167 não é divisível por 3.

No caderno, escreva um fluxograma que represente esse método para identificar se um número é divisível por 3, repetindo a etapa de adicionar os algarismos até obter um número de 1 algarismo.

Resolução

Analise um exemplo de fluxograma.



WYM Design/Arquivo da editora

6. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

7. c) 1, 1, 2, 3, 5, 8 e 11. Cada termo da sequência de Fibonacci, a partir do 3º, é determinado pela soma dos 2 termos imediatamente anteriores.

Não escreva no livro

Atividades

5. Com um colega, relembrem e, se necessário, pesquisem os critérios de divisibilidade indicados em cada um dos itens a seguir. Em seguida, escrevam no caderno um algoritmo e o fluxograma correspondente a cada um deles.

a) Divisibilidade por 4.

b) Divisibilidade por 5.

c) Divisibilidade por 8.

Os exemplos de resposta encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

6. Relembre e, se necessário, pesquise o critério de divisibilidade por 9 e, no caderno, crie um fluxograma correspondente a esse critério. Dica: utilize como referência o fluxograma para o critério de divisibilidade por 3.

Texto para a próxima atividade.

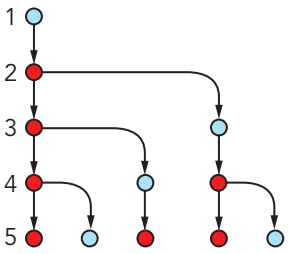
Leonardo de Pisa (*c.* 1170-*c.* 1240), mais conhecido como Fibonacci, foi o matemático italiano autor da obra *Liber abaci* (em português, *Livro do ábaco*). Um dos mais famosos problemas dessa obra pode ser expresso, atualmente, da seguinte maneira.

Suponha que em um viveiro, no mês 1, há 1 casal de coelhos jovens, e sabe-se que:

- um casal de coelhos jovens leva 1 mês para amadurecer e se tornar um casal de coelhos adultos;
- em cada mês, 1 casal de coelhos adultos dá à luz 1 casal de coelhos jovens.

Fonte dos dados: LUCHETTA, V. O. J. Leonardo de Pisa (Fibonacci). *Imática*, [*S. l.*], 29 jan. 2003. Disponível em: https://tedit.net/0r0be0. Acesso em: 23 jul. 2024.

Pergunta-se, então, quantos **casais de coelhos** vão existir no viveiro nos próximos meses. O diagrama a seguir representa esse problema até o 5º mês.



WYM Design/Arquivo da editora

Neste diagrama, os casais de coelhos são representados por círculos: azul, se for um casal de coelhos jovens; vermelho, se for um casal de coelhos adultos.

7. Considere a situação descrita no texto.

a) Qual é a quantidade de casais de coelhos em cada um dos 5 primeiros meses?
1 casal; 1 casal; 2 casais; 3 casais; 5 casais.

b) Qual é a quantidade de casais de coelhos no 6º mês? E no 7º mês? 8 casais; 13 casais.

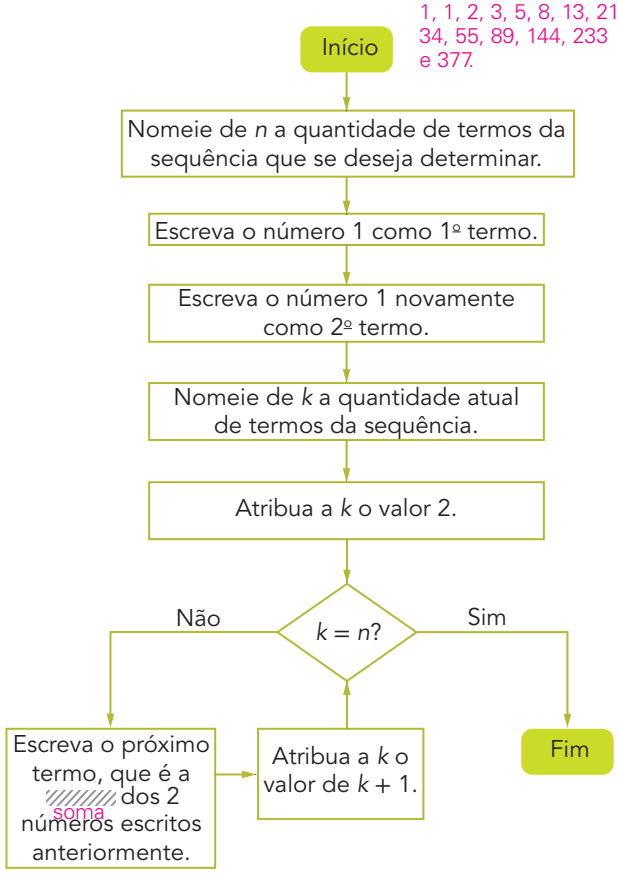
c) A sequência numérica conhecida como **sequência de Fibonacci** é formada pela quantidade de casais de coelhos a cada mês. Nela, cada termo, a partir do 3º, é determinado por um padrão relacionado aos 2 termos anteriores.

Considerando as respostas que você identificou nos itens **a** e **b** desta atividade, escreva no caderno os 7 primeiros termos dessa sequência e identifique esse padrão.

d) O fluxograma a seguir apresenta um algoritmo para identificar os n primeiros termos da sequência de Fibonacci. No caderno, copie esse fluxograma, substituindo a parte hachurada pela palavra que torna o algoritmo correto.

Em seguida, utilize-o para escrever os 14 primeiros termos dessa sequência.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 e 377.



WYM Design/Arquivo da editora

Além da sala de aula

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Saúde* e *Vida Familiar e Social*. Sugerimos que ela seja trabalhada em conjunto com o professor de Língua Portuguesa, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

Algoritmos nas redes sociais

Você já ouviu algum influenciador ou celebridade falar sobre o algoritmo de uma rede social e como ele influencia a entrega de conteúdo aos usuários da rede? E você sabe o que é esse algoritmo nessa situação?

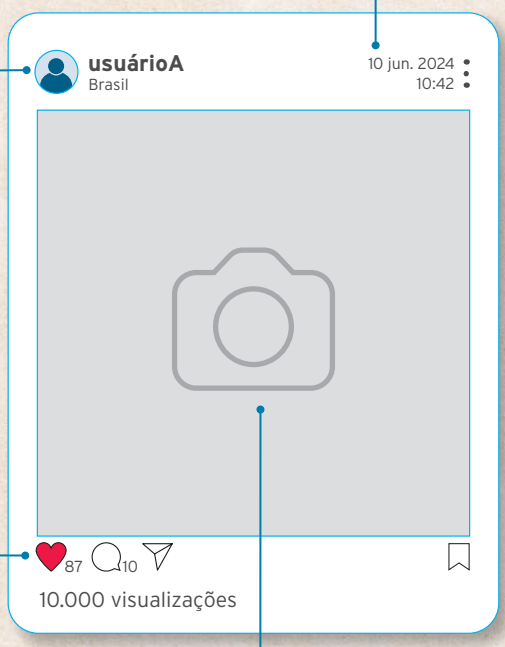
Nesse contexto, são regras definidas pelos desenvolvedores das redes sociais para determinar quais publicações serão recomendadas e em que ordem elas devem aparecer para cada usuário. Cada tipo de rede social tem autonomia para definir qual deve ser esse conjunto de regras e, para isso, elas levam em consideração dados pessoais do usuário e os comportamentos dele na rede social.

Por exemplo, em uma rede social de vídeos, se uma pessoa costuma assistir a vídeos ao vivo (*lives*) de jogos de raciocínio lógico, a plataforma passará a lhe indicar publicações de outros vídeos similares, com o objetivo de fazer com que esse usuário passe mais tempo conectado à rede social, consumindo uma quantidade maior de publicações e anúncios.

Atualmente, grande parte das redes sociais leva em consideração, principalmente, os 4 aspectos relacionados a seguir.

O **relacionamento** do usuário com essa conta, por meio do qual se avalia se é uma conta de preferência do usuário ou não.

A **temporalidade** da publicação, ou seja, quando ela foi realizada.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O **engajamento** com a publicação, representado pela quantidade de interações de outros usuários com ela.

O **conteúdo**, que deve estar de acordo com os parâmetros da rede social, sendo isento de violência e notícias falsas, por exemplo.

De acordo com Stuart Russel, professor da Universidade da Califórnia, em Berkeley, as redes sociais podem ser nocivas em diversos níveis.

> As redes sociais criam vício, depressão, disfunção social, talvez extremismo, polarização da sociedade, talvez contribuam para espalhar desinformação. E está claro que seus algoritmos estão projetados para otimizar um objetivo: que as pessoas cliquem, que passem mais tempo engajadas com o conteúdo.
>
> IDOETA, P. A. Por que algoritmos das redes sociais estão cada vez mais perigosos, na visão de pioneiro da Inteligência Artificial. *BBC News*, São Paulo, 10 de out. 2021. Disponível em: https://tedit.net/609y3l. Acesso em: 14 out. 2024.

Banco de imagem/Arquivo da editora

Fontes dos dados: CHAVES para entender os algoritmos das principais redes sociais e obter mais alcance. *Associação Nacional de Jornais*, Brasília, DF, 21 nov. 2022. Disponível em: https://tedit.net/bl69or; COMO os algoritmos sociais funcionam? [*S. l.*: *s. n.*], 2018. 1 vídeo (2 min 44 s). Publicado pelo canal DW Brasil. Disponível em: https://tedit.net/qvikob. Acesso em: 17 ago. 2024.

Indo além: Todos contra o *cyberbullying*

As redes sociais têm uma influência significativa na maneira como interagimos na atualidade, mas também podem afetar negativamente o bem-estar emocional e a autoestima. Em meios digitais, é comum que ocorram ações que se enquadram no conceito de *cyberbullying*, que é o comportamento agressivo e a prática de intimidações no ambiente virtual. Que tal promover uma campanha de conscientização contra o *cyberbullying* na comunidade escolar?

Etapas

1. Organização

Reúna-se em grupos de 3 a 5 estudantes.

2. Pesquisa

Pesquisem atitudes que se caracterizam como *cyberbullying*. Lembrem-se de utilizar fontes confiáveis na coleta dessas informações.

3. Desenvolvimento

- Coleta de dados: anotem as informações pesquisadas relacionadas ao *cyberbullying*. Durante a etapa de coleta de dados, direcionem a pesquisa para responder a algumas perguntas, como "O que é *cyberbullying*?" e "Como acolher uma vítima de *cyberbullying*?".
- Análise de dados: organizem os dados coletados. Procurem responder às perguntas apresentadas na etapa "Coleta de dados".
- Conclusão e fechamento: considerando os estudos e as análises realizadas, escolham uma das perguntas e a respectiva resposta coletada nas etapas anteriores. Elas serão utilizadas para compor a proposta que será apresentada à comunidade escolar.

4. Produto final

Opção 1: *Podcast* ou *videocast*

- Estabeleçam um tema central, um conceito e um formato bem definidos. Essas características vão orientar a conexão entre o programa e os ouvintes.
- Criem os roteiros, que devem considerar as etapas de apresentação, desenvolvimento e conclusão.
- Depois que o roteiro estiver pronto, escolham os colegas que ficarão responsáveis pela produção e aqueles que farão a gravação do *podcast* ou *videocast*.
- Façam o planejamento da apresentação ou divulgação das produções para a comunidade escolar.

Opção 2: Apresentação de seminários e rodas de conversa na comunidade escolar.

- Organizem a apresentação de um seminário ou uma roda de conversa.
- Caso optem por um seminário, escolham um formato atrativo. O evento não deve ser muito extenso, mas precisa enfatizar os principais aspectos relacionados ao tema escolhido.
- No caso da roda de conversa, organizem os interessados em pequenos grupos e proponham um debate dirigido sobre o tema escolhido. Promovam uma escuta ativa e respeitosa durante o bate-papo.

CAPÍTULO 3

Conceitos iniciais de programação

Não escreva no livro

Situação-problema

Professor, as sugestões para o desenvolvimento deste capítulo encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Transações bancárias

Atualmente é comum as pessoas não irem ao banco ou ao caixa eletrônico para realizar transações bancárias. É possível fazer transferências, pagamento de contas e muitas outras operações acessando o *site* do banco ou utilizando o aplicativo bancário no *smartphone* ou no computador.

No Brasil, em 2022, o Pix passou a ser o método mais utilizado para realizar pagamentos, uma vez que é um método instantâneo com o qual é possível realizar transferências a qualquer hora do dia. Ele foi desenvolvido pelo Banco Central do Brasil em 2020.

PeopleImages.com - Yuri A/Shutterstock

Segundo a Federação Brasileira de Bancos (Febraban), o *smartphone* é atualmente o meio preferido dos brasileiros para fazer transações bancárias.

Considere que um cliente tem um saldo de R$ 1.200,00 na conta-corrente e paga via Pix uma compra no valor de R$ 240,00. Em poucos segundos o valor é descontado da conta bancária, e ela passa a ter o saldo final de R$ 960,00.

Fonte dos dados: HISTÓRIA Hoje: há 37 anos era oferecido o primeiro serviço bancário por computador. *Rádio Agência Nacional – Empresa Brasil de Comunicação (EBC)*, Brasília, DF, 7 nov. 2017. Disponível em: https://tedit.net/0t86ob. O QUE é Pix? *Banco Central do Brasil*, [*s. l.*]: [*s. d.*]. Disponível em: https://tedit.net/9j9jo1. Acesso em: 19 ago. 2024.

a) Exemplo de resposta: Identificar o saldo da conta-corrente, identificar o valor da compra e subtrair esse valor do saldo da conta-corrente.

a) Sabendo que as linguagens de programação são utilizadas como maneiras de traduzir os passos de tarefas lógicas em comandos que possam ser entendidos por computadores, responda: Quais podem ser os passos lógicos necessários na implementação, ou seja, na execução de um algoritmo responsável pela atualização do saldo da conta-corrente após uma compra?

b) Converse com um colega sobre outros exemplos de algoritmos usados para facilitar as tarefas do dia a dia. Exemplo de resposta: Aplicativos de GPS utilizam algoritmos que ajudam a encontrar o melhor caminho para chegar a determinado local considerando diversos fatores, como os meios de transporte disponíveis e as condições de trânsito.

Linguagens de programação

Orian Lev Ari/Shutterstock

A implementação de programas para serem interpretados por computadores e em aplicativos de *smartphone* é feita utilizando-se linguagens de programação.

Diversas tecnologias com as quais interagimos diariamente são implementadas utilizando códigos que não ficam visíveis para o usuário, mas são alicerces para o funcionamento delas.

Ao contrário dos seres humanos, os computadores não contam com uma inteligência própria e, para que funcionem, dependem de algoritmos desenvolvidos por programadores que indicam para o computador como realizar atividades complexas.

Atualmente, com o desenvolvimento da inteligência artificial (IA), máquinas como os computadores são capazes de aprender com as próprias tarefas, por meio de estímulos positivos e negativos. Um exemplo do uso de IA é a sugestão de filmes e séries em uma plataforma de *streaming*. A IA começa fazendo algumas sugestões, e, à medida que o usuário aceita ou recusa, a máquina "aprende" e se aprimora. Contudo, mesmo esse aprendizado é construído a partir de algoritmos fornecidos pelo ser humano às máquinas.

Os códigos desses algoritmos são escritos usando **linguagens de programação** que foram desenvolvidas para atender à necessidade de transformar ações em instruções lógicas, descritas pelos programadores na forma de comandos que são compreensíveis aos sistemas, para então serem executados pelo computador.

Neste capítulo, vamos estudar algumas estruturas das linguagens de programação e aplicá-las na escrita de algoritmos em linguagem natural, ou seja, da maneira que falamos usualmente.

Entrada e saída

Uma característica comum das linguagens de programação é a possibilidade de o algoritmo ter **entrada** e **saída** de dados: a entrada é o conjunto de dados fornecidos ao computador, enquanto a saída é o conjunto de dados que o computador devolve ao usuário após a execução do algoritmo.

Por exemplo, no caso de um algoritmo cujo objetivo é obter o resultado da adição de 2 números inteiros, a entrada poderá ser os 2 números, e a saída, a soma dos 2 números. Acompanhe no quadro uma relação de entrada e saída de dados para um algoritmo como esse.

Entrada (x e y)	Saída ($x + y$)
1 e 1	2
–10 e 35	25
0,75 e 0,05	0,80
0 e 100	100

Variáveis

Cada um dos dados representados no algoritmo de um programa precisa ser armazenado de alguma maneira para que possa ser manipulado pelo computador. As responsáveis por isso são as **variáveis**, que são espaços reservados na memória do computador para o armazenamento de dados, permitindo que eles possam ser alterados quando houver necessidade.

Pensemos novamente em um algoritmo que calcula a soma de 2 números inteiros fornecidos pelo usuário. Os 2 dados iniciais desse algoritmo são, então, esses 2 números, e, para que possamos trabalhar livremente com eles, precisaremos armazená-los em algum lugar da memória do computador. Precisaremos de 2 variáveis, uma para cada um dos números; podemos chamar essas variáveis de "Num1" e "Num2". Além disso, é preciso criar uma variável para conter a soma desses números, que podemos chamar simplesmente de "Soma".

Fique atento

- Atribuir um valor a uma variável corresponde a indicar ao computador qual é o valor dela. Por exemplo, atribuir o valor 5 à variável "Num1" de um algoritmo corresponde a definir, na memória do computador, que Num1 = 5.
- Em um mesmo algoritmo não podemos utilizar o mesmo nome para variáveis diferentes. No entanto, é possível atribuir a uma variável um novo valor. Por exemplo, podemos atribuir inicialmente o valor 5 à variável "Num1" em determinado passo do algoritmo e, depois, em outro passo, atribuir um novo valor –10 a essa mesma variável.
- Precisamos usar os caracteres * e / para representar a multiplicação e a divisão, respectivamente, na escrita de um código em algumas linguagens de programação.

Código do algoritmo	Descrição
Início	Comando que indica o começo do código.
Crie a variável Num1 Atribua o 1º número de entrada à variável Num1 Crie a variável Num2 Atribua o 2º número de entrada à variável Num2 Crie a variável Soma	Esses comandos abrem espaço na memória do computador para as variáveis "Num1", "Num2" e "Soma" e atribuem para "Num1" e "Num2" os números inteiros fornecidos pelo usuário.
Atribua o resultado de Num1 + Num2 à variável Soma	O computador calcula o resultado da adição dos valores das variáveis "Num1" e "Num2" e atribui esse resultado à variável "Soma".
Retorne o valor da variável Soma como saída	Esse comando faz o computador dar ao usuário o valor atribuído à variável "Soma" como saída.
Fim	Comando que indica o fim do código.

Atividades

Não escreva no livro

1. Reúna-se com um colega e, juntos, escrevam no caderno o código de um algoritmo com o objetivo dado em cada item a seguir. Os exemplos de resposta encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

a) Adicionar 3 números fornecidos pelo usuário.

b) Dados 2 números fornecidos pelo usuário, subtrair o 1º número do 2º.

c) Adicionar 2 números fornecidos pelo usuário e dividir o resultado por 3.

Estruturas condicionais

Na programação, também podemos criar **estruturas condicionais** no algoritmo, de modo a estabelecer possibilidades de caminhos que serão percorridos dependendo das condições dadas. Com essas estruturas, o computador executa os passos do algoritmo e interpreta as condições para decidir quais comandos serão executados e quais não serão, dependendo das condições.

Para criar essas estruturas, utilizamos os desvios condicionais **se** e **senão**.

Acompanhe a seguir um exemplo de algoritmo que instrui o computador a fazer uma comparação entre as notas de atividades. Suponha que, em um componente curricular, o professor considera apenas a maior nota obtida pelo estudante, entre 2 atividades, para calcular a média do trimestre.

Código do algoritmo	Descrição
Início	Comando que indica o começo do código.
Crie a variável NotaAtiv1 Atribua o 1º número de entrada à variável NotaAtiv1 Crie a variável NotaAtiv2 Atribua o 2º número de entrada à variável NotaAtiv2	Esses comandos criam as variáveis e atribuem a "NotaAtiv1" e a "NotaAtiv2", respectivamente, que correspondem ao 1º valor e ao 2º valor numérico fornecidos pelo usuário.
Se NotaAtiv1 > NotaAtiv2, então Retorne o texto "A nota da 1ª atividade deve ser usada para o cálculo da média."	O 1º comando testa a condição: se o 1º valor fornecido pelo usuário é maior do que o 2º valor. Se a condição for verdadeira, então o computador executa o comando do bloco do condicional **se**, apresentando a mensagem indicada.
Senão Retorne o texto "A nota da 2ª atividade deve ser usada para o cálculo da média."	Se a condição for falsa, então o computador não executará o comando dentro do bloco condicional **se** e, no lugar, executará o comando do bloco **senão**, apresentando a mensagem indicada.
Fim	Comando que indica o fim do código.

Fique atento

- Ao comparar as variáveis NotaAtiv1 e NotaAtiv2, podemos obter apenas 1 dos seguintes resultados:

  NotaAtiv1 > NotaAtiv2 NotaAtiv1 < NotaAtiv2 NotaAtiv1 = NotaAtiv2

  Considerando o 1º resultado, caímos no bloco "Se" do algoritmo e, nos demais, caímos no bloco "Senão".
- No algoritmo apresentado, a linha que começa com "Se" estabelece uma condição, e, embaixo dela, há linhas **indentadas** (isto é, que apresentam recuo "para dentro" em relação às outras linhas). Caso a condição seja verdadeira, o computador deve proceder para o comando do algoritmo que está indentado abaixo da linha que começa com "Se". Caso a condição seja falsa, o computador deve proceder para o comando indentado abaixo da linha que começa com "Senão".

É importante notar que, mesmo usando estruturas condicionais, o caminho percorrido no algoritmo pelo computador é único de acordo com as variáveis e as condições estabelecidas. Por exemplo, diferentes variáveis "NotaAtiv1" e "NotaAtiv2" dadas pelo usuário no algoritmo mostrado podem levar a um ou outro bloco condicional, porém, para cada "NotaAtiv1" e "NotaAtiv2" fornecidos, há apenas um caminho possível a ser percorrido.

Além disso, podemos usar quantos precisarmos e até mesmo usar um indentado dentro do outro, caso seja necessário.

Atividades resolvidas

1. Analise o exemplo anterior e escreva um algoritmo que receba 2 números inteiros e indique qual dos 2 números é maior ou se os 2 números são iguais.

Resolução

Código do algoritmo	Descrição
Início	Comando que indica o começo do código.
Crie a variável Num1 Atribua o 1º número de entrada à variável Num1 Crie a variável Num2 Atribua o 2º número de entrada à variável Num2	Esses comandos criam as variáveis e atribuem a "Num1" e a "Num2", respectivamente, o 1º valor e o 2º valor numérico fornecidos pelo usuário.
Se Num1 = Num2, então Retorne o texto "O 1º número é igual ao 2º número."	O primeiro comando testa a condição: se o 1º valor fornecido pelo usuário é igual ao 2º valor. Se a condição for verdadeira, então o computador executa o comando do bloco do condicional **se**, apresentando a mensagem indicada.
Senão	Se a condição for falsa, então o computador não executará o comando dentro do bloco condicional **se** e, no lugar, executará o bloco **senão**.

Se Num1 > Num2, então
  Retorne o texto "O 1º número é maior do que o 2º número."
Senão
  Retorne o texto "O 2º número é maior do que o 1º número."
	Dentro do bloco condicional **senão**, há uma nova estrutura condicional.
	Nela, se o 1º valor fornecido pelo usuário é maior do que o 2º valor, então o computador retorna a mensagem "O 1º número é maior do que o 2º número.".
	Caso contrário, o computador retorna a mensagem "O 2º número é maior do que o 1º número.".

Fim	Comando que indica o fim do código.

Conectivos lógicos

Os **conectivos lógicos** (também chamados de operadores lógicos) são usados para testar 2 ou mais condições, com valores verdadeiros ou falsos, dentro de uma mesma estrutura condicional. Vamos conhecer os detalhes de 2 conectivos lógicos: **e** e **ou**.

Estudantes realizando avaliação escolar.

Xavier Lorenzo/Adobe Stock

Conectivo lógico e

Todas as condições indicadas no algoritmo utilizando o conectivo lógico **e** devem ser verdadeiras para que a condição final seja verdadeira.

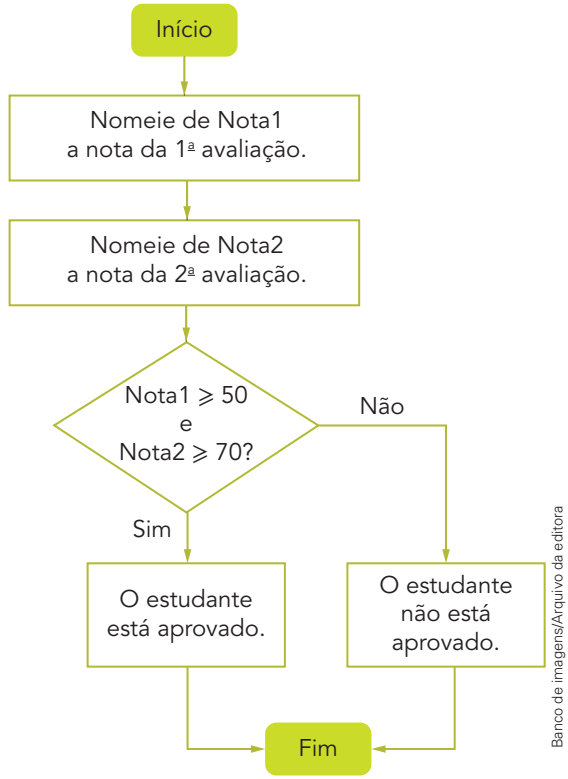
Vamos usar o conectivo **e** em um exemplo cotidiano: Em um componente curricular com 2 avaliações, um estudante, para ser aprovado, precisa ter nota maior do que ou igual a 50 na 1ª avaliação e nota maior do que ou igual a 70 na 2ª avaliação.

O caminho lógico desse algoritmo pode ser representado pelo fluxograma apresentado.

Na etapa de decisão desse fluxograma, há a condição final **Nota1 ⩾ 50 e Nota2 ⩾ 70**, que depende de 2 condições.

- A condição **Nota1 ⩾ 50** é verdadeira?
- A condição **Nota2 ⩾ 70** é verdadeira?

Somente se ambas forem verdadeiras, a condição final **Nota1 ⩾ 50 e Nota2 ⩾ 70** será verdadeira. Por exemplo, no caso em que "Nota1" tem valor 60 e "Nota2", valor 75, ambas são verdadeiras (já que 60 ⩾ 50 e 75 ⩾ 70); logo, a condição **Nota1 ⩾ 50 e Nota2 ⩾ 70** é verdadeira também, por isso a etapa de decisão levará para o caminho "Sim", que afirma que "O estudante está aprovado".



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fique atento

Perceba que, nos fluxogramas, estruturas condicionais são representadas utilizando o símbolo de tomada de decisão.

A seguir são indicados alguns exemplos de valores para "Nota1" e "Nota2". Esse tipo de representação utilizada para avaliar conectivos lógicos é conhecida como tabela-verdade. Nela, cada uma das condições na 1ª linha da tabela é avaliada como verdadeira ou falsa, dependendo dos valores atribuídos a "Nota1" e "Nota2" na 1ª coluna.

	Nota1 ⩾ 50	Nota2 ⩾ 70	Nota1 ⩾ 50 e Nota2 ⩾ 70
Nota1 = 60 Nota2 = 50	Verdadeira	Falsa	Falsa
Nota1 = 40 Nota2 = 50	Falsa	Falsa	Falsa
Nota1 = 40 Nota2 = 80	Falsa	Verdadeira	Falsa
Nota1 = 70 Nota2 = 90	Verdadeira	Verdadeira	Verdadeira

Agora, acompanhe outro exemplo de uso do conectivo lógico **e**: Temos 2 números inteiros diferentes e queremos que o computador exiba uma mensagem apenas se ambos forem maiores do que 0.

O código de um algoritmo que poderia ser usado nessa situação, para indicar se os números são maiores do que 0, é o seguinte.

```
Início
  Crie a variável Num1
  Atribua o 1º número de entrada à variável Num1
  Crie a variável Num2
  Atribua o 2º número de entrada à variável Num2
  Se Num1 > 0 e Num2 > 0, então
      Retorne o texto "Os números são maiores do que 0."
Fim
```

Reflita

Não escreva no livro

No caderno, escreva o código desse algoritmo sem utilizar o conectivo lógico **e**. Em seguida, responda: Qual benefício o uso do conectivo **e** trouxe para esse algoritmo? O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Fique atento

Perceba que, nessa situação, não basta que apenas uma das condições seja atendida; por exemplo, se o 1º número for igual a 2, portanto maior do que 0, mas o 2º número for −3, a mensagem não será enviada. Por isso, o conectivo lógico **e** é utilizado nesse exemplo.

Conectivo lógico ou

Para que uma condição que é formada por uma sequência de condições indicadas pelo conectivo **ou** seja verdadeira, pelo menos uma das condições deve ser verdadeira.

Acompanhe um exemplo de uso do conectivo lógico **ou** na seguinte situação: Para entrar em um parque de diversões, uma pessoa precisa ter pelo menos 16 anos ou estar acompanhada de um responsável legal.

Por isso, se a pessoa tiver menos que 16 anos e estiver sozinha, não poderá entrar no parque, mas, se estiver acompanhada de um responsável legal, poderá entrar. Se a pessoa tiver pelo menos 16 anos, ela poderá entrar no parque com ou sem o acompanhamento de um responsável legal.

Se um algoritmo fosse utilizado para conferir e permitir ou não a entrada das pessoas no parque, ele poderia ter um código como o mostrado a seguir.

```
Início
  Crie a variável Idade
  Atribua a idade da pessoa à variável Idade
  Crie a variável EstáAcompanhada
  Atribua a indicação de se a criança está acompanhada
  à variável EstáAcompanhada
  Se Idade > 16 ou EstáAcompanhada for verdadeiro, então
      Retorne o texto "Pode entrar no parque."
  Senão
      Retorne o texto "Não pode entrar no parque."
Fim
```

Considere agora o exemplo em que, dados 2 números inteiros diferentes, queremos que o computador exiba uma mensagem se o 1º número for maior do que 0 ou se o 2º número for maior do que 0.

Fique atento

- "EstáAcompanhada" é uma variável lógica. Isso significa que ela não recebe valores numéricos, e sim uma identificação de verdadeiro ou falso. Nesse exemplo, se a criança estiver acompanhada, então a variável terá o valor verdadeiro; se ela não estiver acompanhada, terá o valor falso.
- Perceba que, diferentemente do conectivo **e**, quando usamos o conectivo **ou**, basta que uma das condições seja verdadeira para que a condição final seja verdadeira.

Professor, para a atividade **2**, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Na tabela-verdade a seguir, são indicados alguns exemplos de valores para "Num1" e "Num2". Nela, cada uma das condições na 1ª linha da tabela é avaliada como verdadeira ou falsa, dependendo dos valores atribuídos a "Num1" e "Num2" na 1ª coluna.

	Num1 > 0	**Num2 > 0**	**Num1 > 0 ou Num2 > 0**
Num1 = 3 Num2 = −2	Verdadeira	Falsa	Verdadeira
Num1 = −5 Num2 = −8	Falsa	Falsa	Falsa
Num1 = 0 Num2 = 7	Falsa	Verdadeira	Verdadeira
Num1 = 7 Num2 = 8	Verdadeira	Verdadeira	Verdadeira

Atividades

Não escreva no livro

2. Analise os blocos de texto e copie-os no caderno de modo que formem o código de um algoritmo que tenha o objetivo de identificar se o número indicado é positivo ou não. Lembre-se de indicar a ordem e a indentação em que os comandos devem aparecer no algoritmo.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Início	Fim	Crie a variável Div
Retorne o texto "O número é positivo."	Divida o resultado por 2	Atribua o número de entrada à variável Num
Senão	Crie a variável Num	Se Num > 1, então
Se Num > 0, então	Crie a variável Soma	Retorne o texto "O número não é positivo."

3. Reúna-se a um colega e, juntos, escrevam no caderno o código de um algoritmo com o objetivo descrito em cada item a seguir. Os exemplos de resposta encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

a) Quando o usuário fornece 3 números inteiros, se todos eles forem maiores do que 0, o computador retorna a mensagem "Todos os números são positivos", senão retorna o texto "Pelo menos um dos números é menor do que ou igual a 0".

b) Quando o usuário fornece 3 números reais, se qualquer um deles for maior do que 0, o computador retorna o texto "Pelo menos um dos números é positivo", senão retorna "Nenhum dos números é positivo".

4. Escreva no caderno o código de um algoritmo que tenha o seguinte objetivo: Ao ser fornecida a quantidade de animais de 3 tipos diferentes (cavalos, porcos e ovelhas) existentes em uma fazenda, o computador calcula e retorna a quantidade total de animais. Em seguida, para cada tipo de animal, o computador retorna a razão entre a quantidade de animais daquele tipo e a quantidade total de animais. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Estruturas de repetição

As **estruturas de repetição** (também chamadas de laços de repetição ou *loops*) são recursos dentro da lógica computacional utilizados para requisitar que determinados comandos sejam repetidos enquanto uma condição não estiver finalizada. Estudaremos com mais detalhes o comando **enquanto**.

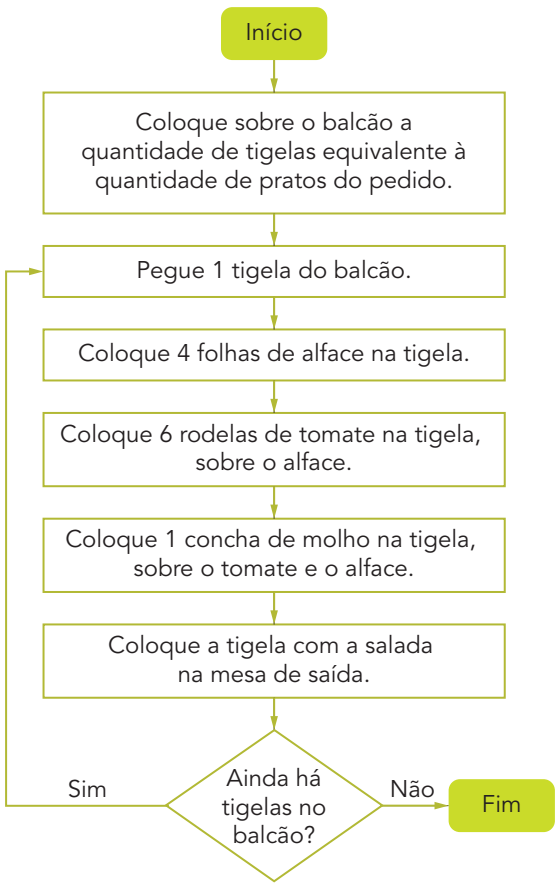
Acompanhe uma maneira de usar essa estrutura em um exemplo cotidiano: Um restaurante vende saladas que são montadas de maneira automatizada, por máquinas. A equipe responsável criou uma sequência de passos para padronizar como deve ser realizado o preparo de um dos pratos do cardápio.

joebarthez/Shutterstock

Restaurante do tipo *fast-food* que vende saladas.

O caminho lógico desse algoritmo pode ser representado por um fluxograma ou por um texto. Analise ambas as representações a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora




```
Início
  Coloque sobre o balcão a quantidade de
  tigelas equivalente à quantidade de
  pratos do pedido
  Enquanto houver tigelas no balcão
      Pegue 1 tigela do balcão
      Coloque 4 folhas de alface na tigela
      Coloque 6 rodelas de tomate na tigela,
      sobre o alface
      Coloque 1 concha de molho na tigela,
      sobre o tomate e o alface
      Coloque a tigela com a salada na mesa
      de saída
Fim
```

Em sequências de passos como essa, é comum precisar repetir parte dos passos uma ou mais vezes. Quando isso ocorre em um algoritmo, utilizamos estruturas como o **enquanto**, que permite a criação de um *loop* que só se encerra mediante uma condição. Nesse exemplo, o *loop* se encerra quando não há mais tigelas no balcão.

Outro exemplo de uso da estrutura **enquanto** é a busca pelo menor número quadrado perfeito que seja maior do que ou igual a determinado número natural positivo fornecido pelo usuário. Por exemplo, se o usuário fornecer o número 4, o computador deve retornar o 4, pois ele é quadrado perfeito e igual a 4; se o usuário fornecer o número 7, o computador deve retornar o número 9, que é o menor número quadrado perfeito maior do que o número de entrada.

Acompanhe o código do algoritmo a seguir.

Código do algoritmo	Descrição
Início	Comando que indica o começo do código.
Crie a variável Limite Atribua o 1º número de entrada à variável Limite	Esses comandos criam a variável "Limite" e atribuem a ela o valor numérico fornecido pelo usuário. Nesse algoritmo, o computador buscará o menor número quadrado perfeito maior do que ou igual a esse valor.
Crie a variável K Atribua o valor 1 à variável K	Esses comandos criam a variável "K" e atribuem a ela o valor numérico 1. Essa variável será usada para guardar a raiz quadrada dos números que o computador vai testar ao implementar o algoritmo.
Enquanto $K^2 \leqslant$ Limite Atribua o valor K + 1 à variável K	A estrutura de repetição **enquanto** indica o teste se $\mathbf{K^2}$ é menor do que o número dado. Inicialmente o teste é feito com o número 1^2. Se a condição for verdadeira, o próximo comando é executado (no qual a variável "K" é incrementada em 1 unidade). Depois de executar esse comando, volta-se para a linha do comando **enquanto** para um novo *loop*. Se a condição for falsa, o bloco de repetição é encerrado.
Retorne o valor de K^2 como saída	Esse comando faz o computador dar ao usuário o valor de $\mathbf{K^2}$ como saída.
Fim	Comando que indica o fim do código.

Fique atento

Na programação, chamamos de **incremento** a operação de adicionar determinado valor a uma variável. Quando atribuímos o valor **K + 1** à variável "K", dentro da estrutura **enquanto**, essa variável sofre um incremento de 1 unidade a cada passo dentro do *loop* causado pela estrutura.

Atividades

Não escreva no livro

5. Considere um jogo de cartas em que, a cada rodada, cada um dos jogadores precisa descartar uma carta que tenha a mesma cor ou o mesmo número da carta descartada anteriormente. Caso o jogador não tenha nenhuma carta com as características necessárias, deve pegar uma do monte de cartas sobressalentes até que encontre uma que possa jogar. Os blocos de comando apresentados podem ser utilizados para formar parte do código de um algoritmo desse jogo.

Compre 1 carta do monte

Descarte 1 carta que tem a cor ou o número igual ao da última carta descartada

Descarte 1 carta que tem a cor ou o número igual ao da última carta descartada

Senão

Fim

Enquanto nenhuma das cartas da sua mão tem a cor ou o número igual ao da última carta descartada

Aguarde a sua vez de jogar

Finalize sua jogada

Se alguma das cartas da sua mão tem a cor ou o número igual ao da última carta descartada, então

Início

Copie os blocos no caderno colocando-os indentados e na ordem correta, de maneira que o código corresponda à jogada de cada jogador.

A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

6. Usando a estrutura de repetição **enquanto**, escreva no caderno o código de um algoritmo em que, quando o usuário fornece uma quantidade dada de números inteiros, o computador calcula a soma de todos eles.

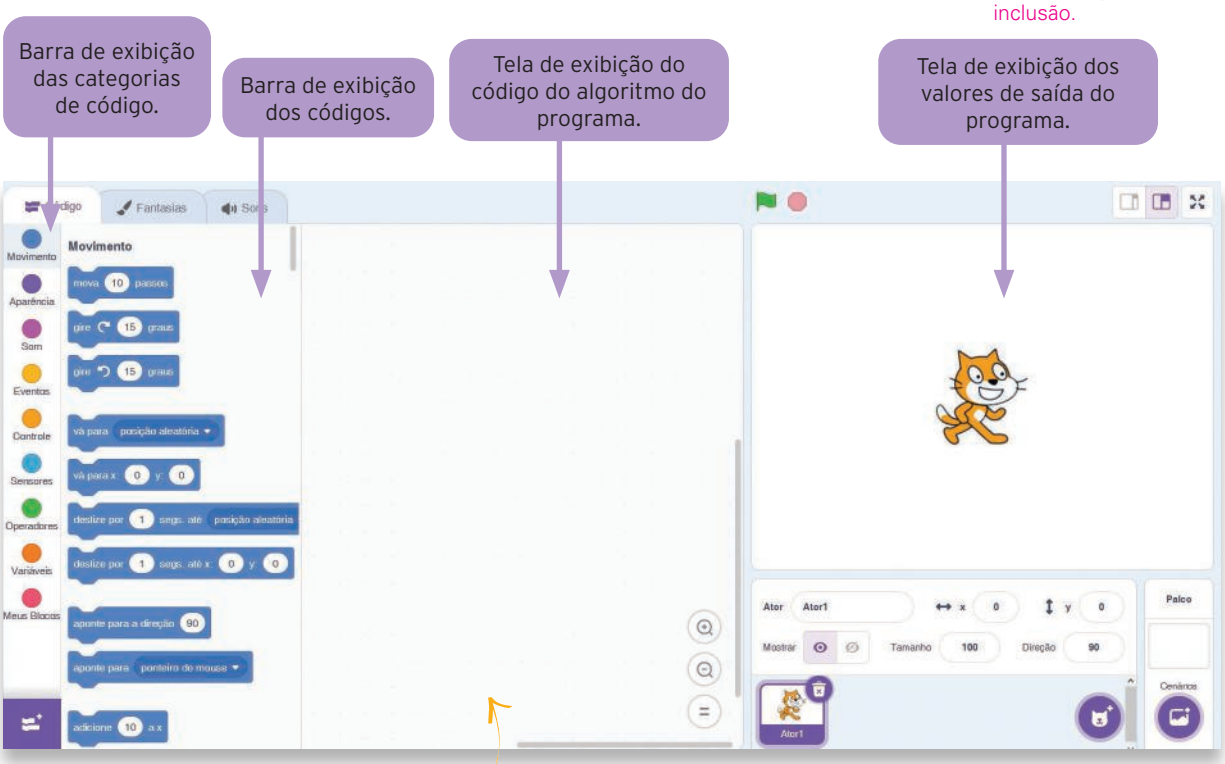
O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Algoritmos no Scratch

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

O Scratch é um *software* gratuito desenvolvido no Laboratório MIT Media, pela Scratch Foundation. MIT é a sigla do Instituto de Tecnologia de Massachusetts, uma instituição de ensino e pesquisa localizada em Boston, nos Estados Unidos. Esse *software* permite a criação de programas utilizando linguagem natural e blocos de comandos que podem ser arrastados e aglutinados para formar o código do algoritmo.



Reprodução/resources.scratch.mit.edu

Tela de abertura de um projeto no Scratch.

O *software* está disponível *on-line* em https://tedit.net/yadhfb (acesso em: 23 set. 2024), sem a necessidade de instalação. Acesse o *site* e siga as instruções a seguir para criar o programa para uma situação de aumento salarial.

Aumento salarial

Professor, oriente os estudantes a alterar o idioma do Scratch para "português brasileiro" no ícone de Configurações que aparece na parte superior do *site*. Durante a criação do programa, para excluir algum comando inserido na tela de exibição, basta clicar com o botão direito do *mouse* e selecionar "Apagar bloco".

Em uma empresa, ocorrerá um aumento salarial para todos os funcionários, de acordo com a faixa salarial:

- 15% de aumento para funcionários com salário menor do que R$ 3.000,00;
- 10% de aumento para funcionários com salário maior do que ou igual a R$ 3.000,00.

No *site* do Scratch, clique na opção "Arquivo", abra um novo arquivo e siga o passo a passo para criar o código do algoritmo de um programa que indique a porcentagem de reajuste salarial e o novo salário de um funcionário, fornecido o salário dessa pessoa, em reais.

1º passo: Clique em

e em "Criar uma variável". Na tela que abrir, digite **Salário**, deixe marcada a opção "Para todos os atores" e clique em "OK". A variável "Salário" será criada.

2º passo: Clique em

e arraste o comando

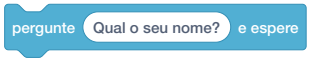
para a parte superior da tela de exibição do código.

3º passo: Clique em

e arraste o comando

para a tela de exibição do código. Selecione a variável "Salário" e mantenha o valor 0 indicado. Na tela de exibição do código, encaixe um bloco embaixo do outro.

4º passo: Clique em

e arraste o comando 

e o bloco

para a tela de exibição do código. Apague a pergunta já indicada no bloco e digite a nova pergunta: **Qual é o salário do funcionário, em reais?**

Em seguida, clique em

e arraste o comando

para a tela de exibição do código. Selecione a variável "Salário" e arraste o bloco

deslocando-o para a lacuna onde está o 0. Encaixe esses blocos embaixo dos blocos já indicados, primeiro o bloco azul, depois o laranja.

5º passo: Clique em

e arraste o comando

para a tela de exibição do código, encaixando esse bloco embaixo do restante do código. Clique em

e arraste o comando

para a lacuna do comando amarelo inserido neste passo.

Arraste a caixinha da variável "Salário", localizada em

, para a 1ª lacuna do comando verde e digite 3000 na 2ª lacuna, no lugar do valor 50.

6º passo: Clique em

e arraste o comando

para a tela de exibição do código. Clique em

e arraste o comando

para a tela de exibição do código, encaixando embaixo do código roxo.

Digite a frase **Reajuste de 15%** na 1ª lacuna e **3** na 2ª lacuna do comando roxo.

No comando laranja, escolha a variável "Salário" e indique a operação **Salário * 1.15** na lacuna. Faça isso utilizando, no lugar do valor 0, a operação que está em

e arrastando o bloco da variável "Salário".

Repita esse passo para indicar o **Reajuste de 10%**, em que a operação deve ser **Salário * 1.10**.

Fique atento

Cada variável criada aparece na tela de exibição, à direta da tela do *software*. Se preferir, você pode desmarcar a caixinha ao lado do nome da variável para que ela não apareça na tela de exibição.

Fotos: Reprodução/resources.scratch.mit.edu

7º passo: Arraste o primeiro bloco roxo e o primeiro bloco laranja, já encaixados nessa ordem, para o primeiro espaço do bloco amarelo

. Depois arraste o segundo bloco roxo e o segundo bloco laranja, já encaixados nessa ordem, para o segundo espaço do bloco amarelo.

8º passo: Clique em Aparência e arraste os comandos

e

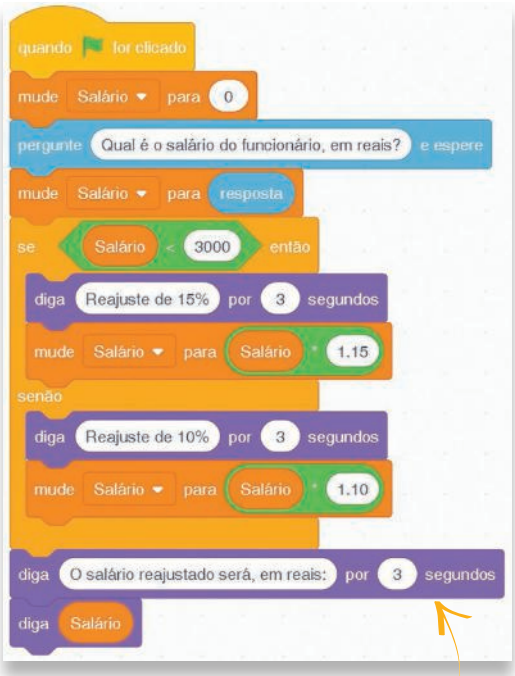
para a tela de exibição do código. Encaixe os comandos, nessa ordem, no final do bloco de código.

Na 1ª lacuna do primeiro comando roxo, digite o texto **O salário reajustado será, em reais:**. Na 2ª lacuna desse mesmo comando, digite o valor **3**.

Clique em Variáveis e arraste a caixinha da variável "Salário" para a lacuna do segundo comando roxo.

9º passo: Para testar o programa, basta clicar em

para iniciar e, em seguida, digitar os valores indicados pelo personagem.



Fotos: Reprodução/resources.scratch.mit.edu

Código do algoritmo do programa que calcula o reajuste de salário de um funcionário, no Scratch.

Fique atento

Você pode digitar os dados no campo que aparece abaixo do personagem, na tela de exibição dos valores da saída do programa. A cada valor é necessário teclar "Enter".

Fique atento

No Scratch, precisamos usar o ponto para indicar números que tenham parte decimal. Por exemplo, para escrever o número 1,3 no Scratch, digitamos **1.3**.

1. Os itens a seguir apresentam os salários de alguns funcionários. Para cada um desses casos, use o programa que você criou e escreva, no caderno, a porcentagem de reajuste e o novo salário informados pelo personagem do Scratch.

   a) R$ 1.500,00 Reajuste de 15%. O novo salário é R$ 1.725,00.

   b) R$ 3.375,00 Reajuste de 10%. O novo salário é R$ 3.712,50.

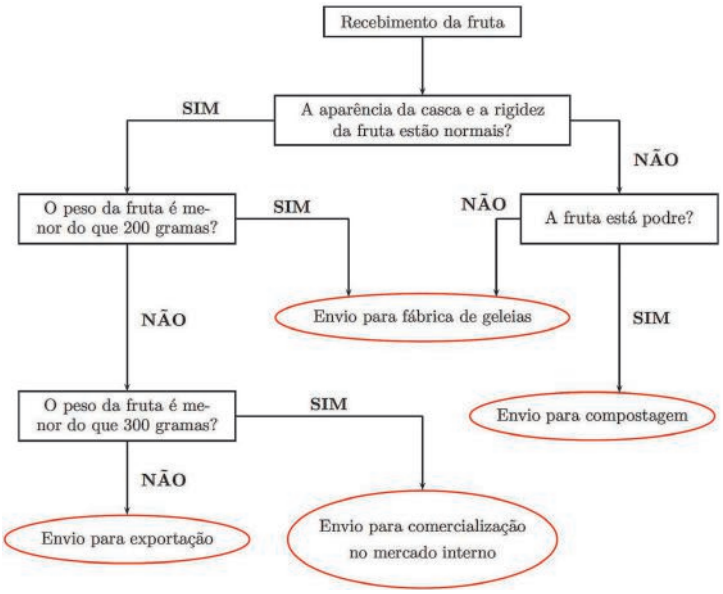
2. Suponha que, em vez do reajuste indicado anteriormente, outro tipo de reajuste salarial tenha ocorrido nessa empresa, de acordo com os seguintes critérios:

   - 33% de aumento para funcionários com salário menor do que R$ 2.500,00;
   - 20% de aumento para funcionários com salário maior do que ou igual a R$ 2.500,00.

   Utilize o Scratch para construir o código do algoritmo de um programa que indique a porcentagem de reajuste salarial e o novo salário do funcionário nessa nova situação. O exemplo de resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

Enem e vestibulares

1. **(Insper-SP)** [Esta imagem] mostra o fluxograma do processo que é utilizado em uma cooperativa agrícola para definir o destino das frutas enviadas a ela pelos produtores da região.



Reprodução/Insper, 2014.

De acordo com o fluxograma, se o peso de uma fruta recebida pela cooperativa é 320 gramas, então essa fruta, necessariamente: Alternativa **c**.

a) será enviada para exportação.
b) será enviada para a fábrica de geleias.
c) não será enviada para comercialização no mercado interno.
d) não será enviada para compostagem.
e) não será enviada para a fábrica de geleias.

2. **(CMRJ)** Criptografia é a prática de codificar e decodificar dados. Quando os dados são criptografados, é aplicado um algoritmo para codificá-los de modo que eles não tenham mais o formato original e, portanto, não possam ser lidos. Os dados só podem ser decodificados no formato original com o uso de uma chave de decriptografia específica.

Disponível em: <<https://www.kaspersky.com.br/resource-center/definitions/encryption>>. Acesso em 05/08/2019.

Um código simples de criptografia consiste em calcular a raiz quadrada dos algarismos formadores de um número e dispor os 2 primeiros algarismos das raízes de forma ordenada e sequencial. Por exemplo:

$$444\,991 = 202\,020\,303\,010, \text{ pois: } \begin{cases} \sqrt{4} = 2,0 \\ \sqrt{9} = 3,0 \\ \sqrt{1} = 1,0 \end{cases}$$

[...] São descritas cinco senhas criptografadas. [Indique no caderno] a única cuja construção está de acordo com a regra apresentada no texto [...]. Alternativa **c**.

a) $345\,672 = 172\,021\,242\,710$
b) $125\,677 = 101\,424\,232\,626$
c) $456\,899 = 202\,224\,283\,030$
d) $876\,901 = 302\,624\,300\,010$
e) $149\,087 = 102\,030\,002\,827$

3. **(Enem)** Os computadores operam com dados em formato binário (com dois valores possíveis apenas para cada dígito), utilizando potências de 2 para representar quantidades. Assim, tem-se, por exemplo: 1 kB = 2^{10} *bytes*, 1 MB = 2^{10} kB e 1 GB = 2^{10} MB, sendo que $2^{10} = 1\,024$. Nesse caso, tem-se que kB significa *quilobyte*, MB significa *megabyte* e GB significa *gigabyte*. Entretanto, a maioria dos fabricantes de discos rígidos, *pendrives* ou similares adotam preferencialmente o significado usual desses prefixos, em base 10. Assim, nos produtos desses fabricantes, 1 GB = 10^3 MB = $= 10^6$ kB = 10^9 *bytes*. Como a maioria dos programas de computadores utilizam as unidades baseadas em potências de 2, um disco informado pelo fabricante como sendo de 80 GB aparecerá aos usuários como possuindo, aproximadamente, 75 GB.

Um disco rígido está sendo vendido como possuindo 500 *gigabytes*, considerando unidades em potências de 10.

Qual dos valores está mais próximo do valor informado por um programa que utilize medidas baseadas em potências de 2? Alternativa **a**.

a) 468 GB

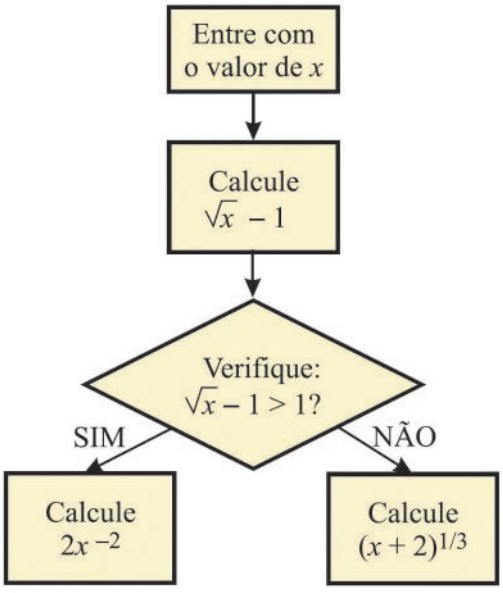
b) 476 GB

c) 488 GB

d) 500 GB

e) 533 GB

4. **(UFRJ)** Considere o programa representado pelo seguinte fluxograma:



Reprodução/UFRJ, 2011.

a) Determine os valores reais de x para os quais é possível executar esse programa. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

b) Aplique o programa para $x = 0$, $x = 4$ e $x = 9$. $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{6}$; $\frac{2}{81}$.

Fique atento

- No conjunto dos números reais, é possível calcular a **raiz cúbica** de qualquer número real, mas não existe **raiz quadrada** de números reais negativos.
- Para todo x real diferente de 0, temos $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ e $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$.

Conteúdos e aprendizagens

Não escreva no livro

Gorodenkoff/Adobe Stock

- Estruturas e conectivos
  - Estruturas condicionais
  - Conectivos lógicos
  - Estruturas de repetição

Algoritmo

pode ser representado por

Professor, as sugestões para o desenvolvimento desta seção encontram-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

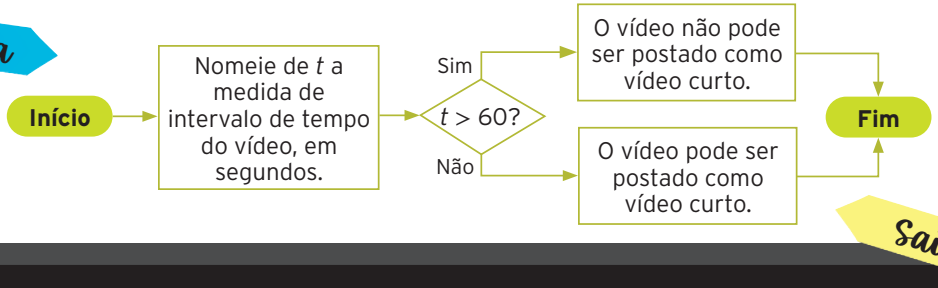
Código | **Fluxograma**

Algoritmo1...

```
Início
  Crie a variável Tempo
  Atribua o número de entrada, em segundos, à variável Tempo
  Se Tempo > 60, então
     Retorne o texto "O vídeo pode ser postado como vídeo curto."
  Senão
     Retorne o texto "O vídeo não pode ser postado como vídeo curto."
Fim
```

Variáveis

Algoritmo2...



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Compreendo a relação entre algoritmo, fluxograma e o código do algoritmo?
- Identifico os valores de entrada e de saída e as variáveis em um algoritmo?
- Diferencio os usos dos conectivos lógicos **e** e **ou**?
- Utilizo corretamente as estruturas condicionais **se** e **senão**?
- Utilizo corretamente a estrutura de repetição **enquanto**? Respostas pessoais.

Respostas

Unidade 1

Abertura

- Resposta pessoal.
- Sim, pois nele é possível determinar as coordenadas de um ponto, por exemplo.

Capítulo 1

Situação-problema

a) casas; 4 casas.
b) 26 casas

Atividades

1. a) $\sqrt{13}$
b) 6
c) $\sqrt{29}$
d) $\sqrt{5}$
e) $6\sqrt{2}$
f) 5

2. $\pm 2\sqrt{2}$

3. $P(3, 0)$

4. -2 ou 8.

5. a) Resposta pessoal. $P = 2\sqrt{58} + 6$.
b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

6. a) $M(2, -6)$
b) $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$
c) $M(-3, -3)$

7. $B(8, -2)$

8. a) Não.
b) Sim.

9. $x \neq -1$

10. $P\left(0, -\frac{6}{5}\right)$

11. $P\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$

12. a) $\frac{1}{2}$
b) -1
c) Não há.
d) 0
e) $\frac{5}{7}$
f) $-\frac{1}{5}$

13.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
m	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Não existe.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

14. a) $4x - y - 11 = 0$
b) $x - y - 3 = 0$
c) $y = -5$
d) $x = -3$
e) $3x + 8y - 17 = 0$
f) $x + 2y + 4 = 0$
g) $y = -7$
h) $y = x$
i) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

15. a) $3x + y - 3 = 0$
b) $9x - 4y + 41 = 0$
c) $2x - 3y - 10 = 0$
d) $4x - y - 9 = 0$

16. $P \notin \overleftrightarrow{AB}$

17. $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$

18. a) $y = -\frac{2x}{3} + 2$
b) $x - 2y + 16 = 0$

19. a) $y = x$ ou $x - y = 0$.
b) $y = -x$ ou $x + y = 0$.
c) $y = 0$
d) $x = 0$

20. $-\frac{3}{4}$

21. $y = -2x - 3$

22. $\frac{9}{2}$

23. Paralela.

24. -4 ou 1.

25. a) $y = -4x + 6$ ou $4x + y - 6 = 0$.
b) $y = 2$ ou $y - 2 = 0$.
c) $y = \frac{2x}{5} + \frac{17}{5}$ ou $2x - 5y + 17 = 0$.

26. $y = 5$

27. a) $x + 2y - 14 = 0$
b) $4x - 3y + 18 = 0$
c) $x = 3$

28. $N(10, -4)$

29. $4x + 5y - 10 = 0$

30. a) 2
b) $\frac{21}{5}$
c) $2\sqrt{5}$
d) 2

31. a) $\frac{18}{5}$
b) $\frac{7\sqrt{13}}{13}$
c) 0 (então, $P \in r$)
d) 4
e) 4
f) $\frac{10\sqrt{29}}{29}$

32. 4 ou $-\frac{8}{3}$.

33. a) 15,5 unidades de medida de área.
b) $\frac{31\sqrt{41}}{41}$ unidades de medida de comprimento.

34. a) $C(5, 4)$ e $r = 1$.
b) $C(-2, -6)$ e $r = \sqrt{5}$.
c) $C(2, 0)$ e $r = 2$.

d) $C(-3, 1)$ e $r = 4$.

e) $C(0, 4)$ e $r = 1$.

f) $C(0, 0)$ e $r = \sqrt{10}$.

35. a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$

b) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 2$

c) $x^2 + (y + 2)^2 = 16$

d) $(x - 4)^2 + y^2 = 25$

36. a) $r = 4$ e $C(2, -3)$.

b) $r = 4$ e $C(3, 1)$.

c) $r = 2$ e $C(2, 4)$.

d) $r = 7$ e $C(-6, 2)$.

e) $r = \sqrt{5}$ e $C(-4, 0)$.

f) $r = \sqrt{20}$ e $C(3, -4)$.

g) $r = 2$ e $C(0, 2)$.

h) $r = \sqrt{2}$ e $C(1, 1)$.

37. Alternativas **a** e **d**.

38. $C(-1, -1)$ e $r = 2$.

39. Resposta pessoal.

40. $\{k \in \mathbb{R} \mid k < 2\}$

41. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 17)

1. $d(A, C) = 3$; $d(B, C) = 2$.

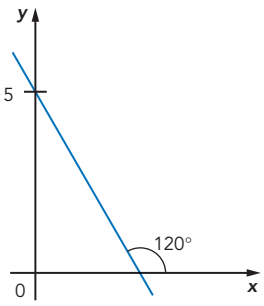
2. $AB = \sqrt{13}$

3. $AB = \sqrt{13}$

Explore para descobrir (p. 20)

- No quilômetro 22.

Reflita (p. 26)



Banco de imagens/Arquivo da editora

Reflita (p. 34)

$P \in r$

Reflita (p. 35)

Resposta pessoal.

Conexões (p. 39)

1. 835 805,25 m²

2. Resposta pessoal.

Capítulo 2

Situação-problema

Exemplos de resposta:

a) Simetria de reflexão.

b) Simetria de rotação.

c) Simetria de translação.

d) Sim, por exemplo, rotação e translação.

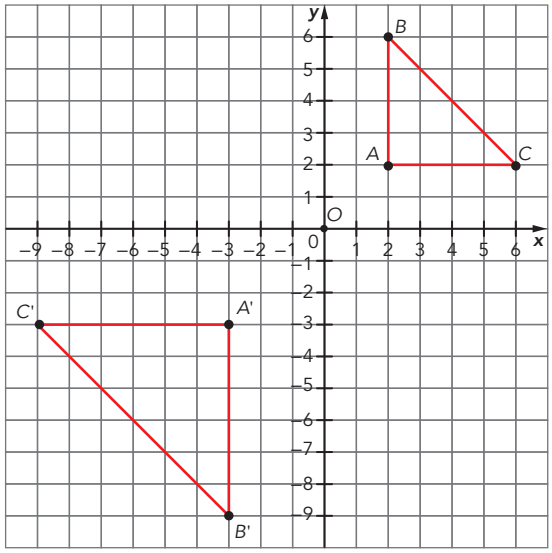
Atividades

1. Respostas pessoais.

2. Resposta pessoal.

3. a) $A(1, 1)$, $B(1, 3)$ e $C(3, 1)$.

b)



WYM Design/Arquivo da editora

4. Alternativa **c**.

5. a) Figura inicial: (3, 3), (4, 1), (5, 3) e (4, 5). Figura final: (5, 3), (6, 1), (7, 3) e (5, 5).

b) Sim; uma translação em 2 unidades para a direita.

6. $MN = 6{,}6$ cm, $NO = 3$ cm, $OP = 6$ cm, $PQ = 6$ cm, $QR = 9$ cm e $MR = 6{,}6$ cm.

7. 2,25 cm

8. Alternativa **d**.

Explore para descobrir (p. 42)

1. A onda do mar. Resposta pessoal.

2. Rotação e translação.

Reflita (p. 43)

$A'(6, 0)$; $B'(9, 2)$ e $C'(8, 3)$.

Reflita (p. 43)

As abscissas dos vértices do polígono M' equivalem às abscissas dos vértices correspondentes do polígono M adicionadas em 8 unidades. As ordenadas dos vértices do polígono M' correspondem às ordenadas dos vértices correspondentes do polígono M subtraídas de 2 unidades.

Reflita (p. 44)

$A'(3, -1)$; $B'(6, -3)$ e $C'(5, -4)$.

Reflita (p. 44)

As abscissas dos vértices correspondentes dos polígonos M e M' têm o mesmo valor absoluto, com sinais opostos. As ordenadas dos vértices correspondentes dos polígonos M e M' são iguais.

Reflita (p. 45)

As abscissas dos vértices correspondentes dos polígonos M e M'' são iguais e as ordenadas dos vértices correspondentes dos polígonos M e M'' têm o mesmo valor absoluto, com sinais opostos.

Reflita (p. 45)

Sim, pois os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes também são congruentes.

Reflita (p. 46)

Tanto as abscissas quanto as ordenadas dos vértices correspondentes dos polígonos M e M' têm o mesmo valor absoluto com sinais opostos. No sentido horário, o resultado seria o mesmo, uma vez que o giro é de meia-volta.

Explore para descobrir (p. 51)

1. As folhas da babosa. Resposta pessoal.

2. As estruturas da concha. Resposta pessoal.

Reflita (p. 53)

Respostas pessoais.

Reflita (p. 53)

Sim, pois os ângulos correspondentes são congruentes e as medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais (a razão entre as medidas de comprimento dos lados correspondentes é a razão da homotetia).

Tecnologias digitais (p. 47)

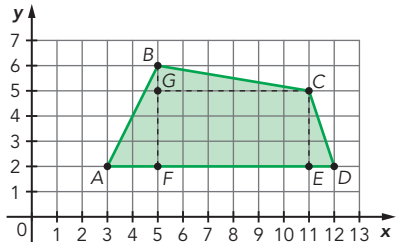
1. a) Translação de 3 unidades para a direita e 1 unidade para cima.
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.
d) Resposta pessoal.
2. $a = -6$ e $b = 0$.
3. a) Eixo x.
b) Eixo y.
4. Resposta pessoal.
5. Resposta pessoal.
6. Resposta pessoal.

Tecnologias digitais (p. 54)

1. a) Razão 2.
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.
d) Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

Enem e vestibulares

1. Alternativa **b**.
2. Alternativa **d**.
3. Alternativa **d**.
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **b**.
6. Alternativa **d**.
7. Alternativa **d**.
8. Alternativa **b**.
9. Alternativa **b**.
10. a)



Ericson Guilherme Luciano/ Arquivo da editora

b) 26,5 unidades de área.
11. $y = -2x + 13$
12. a) $M(2m + 1, 1)$
b) $-\frac{1}{2}$
13. a) $y = 2x$
b) $k = 3$

Unidade 2

Abertura

Respostas pessoais.

Capítulo 1

Situação-problema

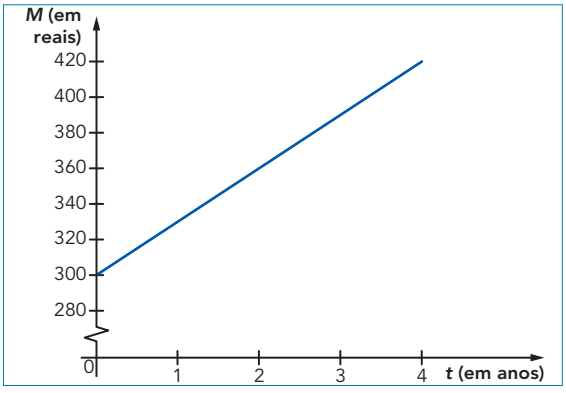
a) Como são 3 peças, será 30% de desconto.
b) $0{,}3 \cdot 200 = 60$; $200 - 60 = 140$. Portanto, o cliente pagará R$ 140,00 e vai economizar R$ 60,00.

Atividades

1. a) 57
b) 80%
c) 40
d) R$ 22,75
e) R$ 376,00
f) 57%
g) Menor.
2. $\frac{3}{4}x + 6{,}75$
3. 25%
4. Entre 705 mL e 1 410 mL.
5. Aproximadamente 1,5%.
6. R$ 2.750,00
7. a) 0,5% ao mês.
b) Aproximadamente 0,47% ao mês.
c) Resposta pessoal.
8. a) A oferta mais vantajosa depende da quantidade de peças desejada.
b) Na oferta **1**.
9. Alternativa **b**.
10. Alternativa **e**.
11. Alternativa **e**.
12. Alternativa **d**.
13. 58%
14. Alternativa **c**.
15. Alternativa **c**.
16. Alternativa **a**.
17. Alternativa **d**.
18. Luís: R$ 750,00; Marta: R$ 600,00; e Sérgio: R$ 540,00.
19. a) $f = 1{,}03$
b) $f = 0{,}97$
c) $f = 1{,}15$
d) $f = 0{,}85$
e) $f = 3{,}3$
f) $f = 31$
20. a) Aumento de 13%.
b) Desconto de 30%.
c) Aumento de 100%.
d) Desconto de 5%.
e) Aumento de 2 900%.
21. 5 900%
22. Aproximadamente 20%.
23. a) Aumento de 8,15%.
b) Desconto de 12%.
c) Aumento de 33,1%.
d) Desconto de 0,6%.
24. 4%
25. 18%
26. 15%
27. Não. Após o aumento ela custará R$ 84,00 e, após o desconto que se sucedeu, ela custará R$ 79,80.
28. A oferta da 1ª loja.
29. Aproximadamente 104 854,2 pontos.
30. R$ 75,00
31. Aproximadamente R$ 2,39.
32. Resposta pessoal.
33. Alternativa **d**.
34. Alternativa **c**.
35. Aproximadamente 0,95%.
36. 31%
37. 21,828 m
38. Alternativa **c**.
39. Alternativa **b**.
40. 170%; diminui, pois os produtos ficam mais caros.
41. 200%; 4%.
42. a) Significa que houve ganho no poder de compra, ou seja, o trabalhador pode consumir mais do que consumia no ano anterior.
b) R$ 68,00
43. Renderá R$ 225,00 de juros.

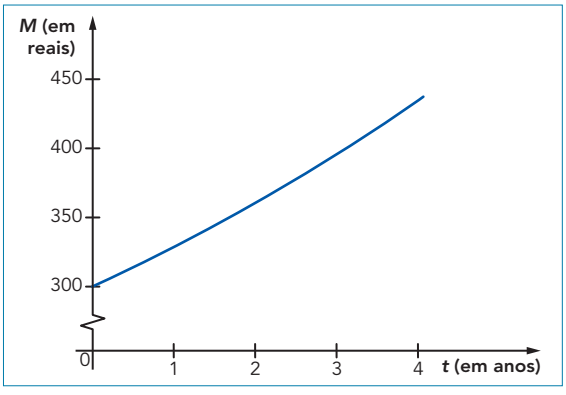
44. 5 meses.
45. 1%
46. R$ 220,00
47. R$ 20,00
48. Aproximadamente R$ 7.092,60.
49. a) 39,24%
b) R$ 353,16
50. R$ 6.580,00
51. a) Aproximadamente R$ 757,70.
b) Aproximadamente 8,24%.
52. Aproximadamente R$ 1.144,61.
53. Aproximadamente R$ 2.130,05.
54. a) **=B1*(1+0,04*D1)**
b) 50 meses; 50 meses.
c) 50 meses.
d) 29 meses; 29 meses.
e) 29 meses.
f) Porque o regime de juros compostos faz com que o montante aumente mais em determinado prazo em comparação com o regime de juros simples.
55. a) Resposta pessoal.
b) Sim, em janeiro, porque para $t = 1$, temos $500(1 + 0{,}09 \cdot t) = 500(1{,}09)^t$.
c) O sistema de juros compostos.
56. 4 meses.
57. R$ 1.200,00
58. Alternativa **e**.
59. Alternativa **c**.
60. Alternativa **c**.
61. Alternativa **b**.
62. Alternativa **a**.
63. Não é possível calcular o montante final da aplicação, pois não é possível prever qual será o IPCA ao longo dos 15 anos.
64. Juros simples; R$ 16.320,00.
65. a)

Sistema de juros simples



Dados elaborados para fins didáticos.

Sistema de juros compostos



Dados elaborados para fins didáticos.

Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora

b) Juros simples: R$ 360,00; juros compostos: R$ 363,00.
c) R$ 19,23

Explore para descobrir (p. 65)

1. R$ 8,97
2. Pagamento em 2 parcelas, pois, pagando à vista, a pessoa vai gastar R$ 1.800,00 e, pagando em 2 parcelas, vai gastar R$ 6,00 a mais no pagamento (pois $2 \cdot 908 = 1806$), mas vai obter R$ 8,97 com a aplicação no fundo de investimento, ou seja, sobra uma quantia de R$ 2,97 após o pagamento de todas as parcelas.

Reflita (p. 65)

$100\% = \frac{100}{100} = 1$. Analogamente, $200\% = 2$ e $300\% = 3$.

Reflita (p. 67)

Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 74)

1. R$ 1.020,00.
2. Aproximadamente R$ 1.267,57.
3. Resposta pessoal.
4. Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 76)

1. R$ 1.020,00
2. R$ 1.122,00
3. Resposta pessoal.
4. R$ 1.065,90
5. Resposta pessoal.
6. $1{,}02 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}95 \cdot 1000 = 1065{,}9$ ou $(1 + 0{,}02) \cdot (1 + 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}05) \cdot 1000 = 1065{,}9$.

Explore para descobrir (p. 82)

1.

Período	Juros (em reais)	Montante (em reais)
Após 1 mês	$0{,}01 \cdot 1 \cdot 1000 = 10$	$1000 + 10 = 1010$
Após 2 meses	$0{,}01 \cdot 2 \cdot 1000 = 20$	$1000 + 20 = 1020$
Após 3 meses	$0{,}01 \cdot 3 \cdot 1000 = 30$	$1000 + 30 = 1030$
Após 4 meses	$0{,}01 \cdot 4 \cdot 1000 = 40$	$1000 + 40 = 1040$
Após 5 meses	$0{,}01 \cdot 5 \cdot 1000 = 50$	$1000 + 50 = 1050$

2. R$ 1.120,00
3. R$ 360,00 e R$ 1.360,00.
4. Resposta pessoal.

Reflita (p. 83)

- Depois de 2 meses a dívida será R$ 1.210,00.
- 21%

Ampliando a atividade (p. 86)

a) Não; faltarão R$ 244,32.
b) Resposta pessoal.

Reflita (p. 87)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 93)

Para $t = 0$, temos $M = 10\,000$, que representa o valor inicial da dívida.

Reflita (p. 93)

Juros simples: R$ 12.000,00; juros compostos: aproximadamente R$ 11.832,16.

Conexões (p. 72)

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

Conexões (p. 95)

1. Resposta pessoal.
2. Respostas pessoais.

Capítulo 2

Situação-problema

a) R$ 2.100,00

b)

Mês	Total no início do mês (em reais)	Acréscimo de 0,6% (em reais)	Total no fim do mês (em reais) (acréscimo e depósito mensal)
1	1500	9	$1500 + 9 + 150 = 1659$
2	1659	9,95	$1659 + 9{,}95 + 150 = 1818{,}95$
3	1818,95	$0{,}006 \cdot 1818{,}95 \simeq 10{,}91$	$1818{,}95 + 10{,}91 + 150 = 1979{,}86$
4	1979,86	$0{,}006 \cdot 1979{,}86 \simeq 11{,}88$	$1979{,}86 + 11{,}88 + 150 = 2141{,}74$

c) R$ 41,75

Atividades

1. R$ 1.051,58
2. R$ 5.750,00
3. R$ 3.630,00
4. R$ 51.000,00
5. **a)** 8%
   b) Resposta pessoal.
6. R$ 95.850,00
7.

Data	Valor de amortização (em reais)	Juros j (em reais)	Parcela p (em reais)	Saldo devedor (em reais)
0	-	-	-	60 000
1	$p - j$	1200	20 805,28	40 394,72
2	19 997,39	807,89	20 805,28	20 397,33
3	20 397,33	407,95	20 805,28	0

8. R$ 350,00
9. 1200 milhas.
10. R$ 1.800,00
11. R$ 3,50
12. R$ 2.332,80
13. R$ 34,20
14. Alternativa **b**.
15. Resposta pessoal.
16. Resposta pessoal.
17. Resposta pessoal.

Reflita (p. 97)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 98)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 105)

R$ 1.300.000,00

Conexões (p. 107)

Respostas pessoais.

Enem e vestibulares

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **b**.
3. Alternativa **a**.
4. Alternativa **d**.
5. Alternativa **b**.
6. Alternativa **b**.
7. Alternativa **a**.
8. Alternativa **b**.
9. Alternativa **c**.
10. Alternativa **b**.
11. Alternativa **a**.
12. Alternativa **d**.
13. R$ 1.800,00

Unidade 3

Abertura

- 6 senhas diferentes.
- Resposta pessoal.

Capítulo 1

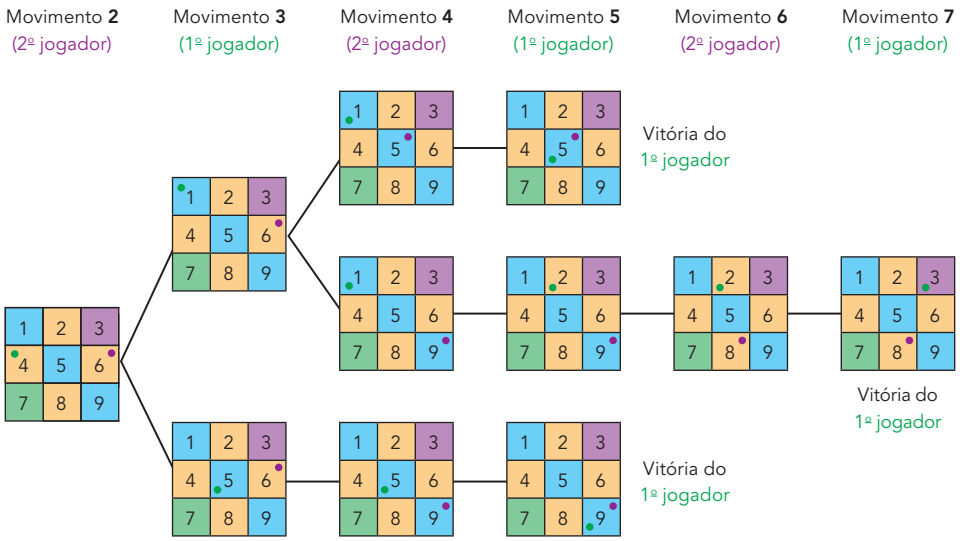
Situações-problema

1. a) 56 possibilidades diferentes.
b) 60 possibilidades diferentes.
c) 6 possibilidades diferentes.
d) 20160 possibilidades diferentes.

2. a) 6 duplas diferentes: AB, AC, AD, BC, BD e CD.
b) São 15 duplas diferentes: AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF e EF.

Atividades

1. 6 maneiras distintas.
2. 60 maneiras distintas.
3. Resposta pessoal.
4. 128 maneiras distintas.
5. 63 maneiras distintas.
6. 5^{90} maneiras distintas.
7. 7 maneiras diferentes.
8. 456 976 palavras.
9. 32 possibilidades diferentes.
10. Alternativa **a**.
11. 21 maneiras diferentes.
12. O 1º jogador sempre vence nesse cenário.



WYM Design/Arquivo da editora

13. 6 palavras diferentes: ALI, AIL, LAI, LIA, IAL, ILA.
14. 24 anagramas.
15. 24 números com algarismos distintos.
16. a) 120 configurações diferentes.
b) 48 configurações diferentes.
c) Resposta pessoal.
17. 6 números.
18. a) 720 anagramas.
b) 6 anagramas.
c) 24 anagramas.
d) 144 anagramas.
e) 4 anagramas.
19. Resposta pessoal.
20. a) AGIMO
b) AGIOM
c) GAIMO
d) OMIAG
e) IGAMO

21. 69! maneiras diferentes.
22. 144 modos diferentes.
23. Alternativa **c**.
24. **a)** 6 anagramas.
b) BBEE, EEBB, EBEB, EBBE, BEEB e BEBE.
25. **a)** 34 650 anagramas.
b) 5 040 anagramas.
c) 630 anagramas.
d) 10 080 anagramas.
e) 1120 anagramas.
26. $P_{30}^{12, 10, 8} = \frac{30!}{12! \cdot 10! \cdot 8!}$
27. 6 maneiras diferentes.
28. 120 modos diferentes.
29. **a)** 5 trajetos diferentes.
b) 84 trajetos diferentes.
c) 81 trajetos diferentes.
d) $\frac{(n+m)!}{n! \cdot m!}$
30. Resposta pessoal.
31. **a)** 2
b) 120
c) 24
d) 5
e) 1
f) 1
32. **a)** $x^2 - x$
b) $x^2 - 7x + 12$
c) $8x^3 - 2x$
33. 5 040 maneiras diferentes.
34. 360 maneiras diferentes.
35. 132 maneiras diferentes.
36. 360 maneiras diferentes.
37. Resposta pessoal.
38. 210 maneiras diferentes.
39. 6 840 maneiras diferentes.
40. Alternativa **a**.
41. **a)** 120 números.
b) 48 números.
42. **a)** 1716 modos diferentes.
b) 1212 modos diferentes.
43. 45 maneiras diferentes.
44. 142 506 modos diferentes.
45. 270 725 maneiras diferentes.
46. **a)** 56 comissões diferentes.
b) 56 comissões diferentes.
c) 140 comissões diferentes.
47. Resposta pessoal.
48. 120 maneiras diferentes.
49. **a)** 30 maneiras diferentes.
b) 150 maneiras diferentes.
c) 330 maneiras diferentes.
50. Resposta pessoal.
51. **a)** 16 380 modos diferentes.
b) 42 504 modos diferentes.
c) 140 modos diferentes.
52. **a)** 60 maneiras diferentes.
b) 65 maneiras diferentes.
c) 115 maneiras diferentes.
53. 96 modos diferentes.
54. **a)** 90 modos diferentes.
b) Custo mínimo: R$ 16,00. Custo máximo: R$ 20,50.
c) Resposta pessoal.
55. **a)** 180 possibilidades para o pacote **A** e 240 para o pacote **B**.
b) O pacote **A** custa R$ 840,00 e o pacote **B** custa R$ 910,00.
c) O pacote **A** é a opção mais vantajosa do ponto de vista financeiro; contudo, para escolher a melhor opção neste caso, é preciso considerar outros aspectos, como desejos pessoais e custo-benefício.
56. 144 placas com códigos diferentes.
57. 220 maneiras diferentes.
58. 720 maneiras diferentes.
59. 20 maneiras diferentes.
60. 720 maneiras diferentes.
61. 151200 anagramas.
62. 15 quadriláteros.
63. 9 amigos.
64. **a)** 720 anagramas.
b) 120 anagramas.
c) 24 anagramas.
d) 144 anagramas.
e) 216 anagramas.
f) 24 anagramas.
g) 144 anagramas.
65. 300 números.
66. 28 maneiras diferentes.
67. 930 240 modos diferentes.

Reflita (p. 125)

1ª etapa: parque-mercado; 2ª etapa: mercado-farmácia. Porque a escolha em uma etapa não influencia a escolha da outra etapa.

Reflita (p. 127)

Se tivermos o zero nas centenas, significa que não há centenas nesse número. Por exemplo: $\underline{0}\,\underline{4}\,\underline{5} = 45$.

Explore para descobrir (p. 135)

1. **a)**

B_1, B_2, A, V	B_2, B_1, A, V	A, V, B_1, B_2	V, A, B_1, B_2
B_1, B_2, V, A	B_2, B_1, V, A	A, V, B_2, B_1	V, A, B_2, B_1
B_1, A, B_2, V	B_2, A, B_1, V	A, B_1, V, B_2	V, B_1, A, B_2
B_1, A, V, B_2	B_2, A, V, B_1	A, B_1, B_2, V	V, B_1, B_2, A
B_1, V, B_2, A	B_2, V, B_1, A	A, B_2, B_1, V	V, B_2, B_1, A
B_1, V, A, B_2	B_2, V, A, B_1	A, B_2, V, B_1	V, B_2, A, B_1

b) 24 possibilidades.

2. **a)**

B, B, A, V	B, B, A, V	A, V, B, B	V, A, B, B
B, B, V, A	B, B, V, A	A, V, B, B	V, A, B, B
B, A, B, V	B, A, B, V	A, B, V, B	V, B, A, B
B, A, V, B	B, A, V, B	A, B, B, V	V, B, B, A
B, V, B, A	B, V, B, A	A, B, B, V	V, B, B, A
B, V, A, B	B, V, A, B	A, B, V, B	V, B, A, B

b) 2 vezes.
c) 12 possibilidades.

3. **a)**

B_1, B_2, A, B_3	B_2, B_1, A, B_3	A, B_3, B_1, B_2	B_3, A, B_1, B_2
B_1, B_2, B_3, A	B_2, B_1, B_3, A	A, B_3, B_2, B_1	B_3, A, B_2, B_1
B_1, A, B_2, B_3	B_2, A, B_1, B_3	A, B_1, B_3, B_2	B_3, B_1, A, B_2
B_1, B_3, B_2, A	B_2, B_3, B_1, A	A, B_1, B_2, B_3	B_3, B_1, B_2, A
B_1, A, B_3, B_2	B_2, A, B_3, B_1	A, B_2, B_1, B_3	B_3, B_2, B_1, A
B_1, B_3, A, B_2	B_2, B_3, A, B_1	A, B_2, B_3, B_1	B_3, B_2, A, B_1

b)

B, B, A, B	B, B, A, B	A, B, B, B	B, A, B, B
B, B, B, A	B, B, B, A	A, B, B, B	B, A, B, B
B, A, B, B	B, A, B, B	A, B, B, B	B, B, A, B
B, B, B, A	B, B, B, A	A, B, B, B	B, B, B, A
B, A, B, B	B, A, B, B	A, B, B, B	B, B, B, A
B, B, A, B	B, B, A, B	A, B, B, B	B, B, A, B

c) 6 vezes.

d) 4 organizações.

4. Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 142)

1. a) Os estudantes podem ser escolhidos de 12 maneiras diferentes: ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd e dc.

b) Cada uma das possibilidades se repete 2 vezes.

c) Há 6 maneiras diferentes de escolher as duplas.

2. a) São 24 maneiras diferentes de escolher os estudantes: abc, abd, acb, acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd, bda, bdc, cab, cad, cba, cbd, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca e dcb.

b) Cada uma das possibilidades se repete 6 vezes.

c) Há 4 maneiras diferentes de escolher os trios.

3. Resposta pessoal.

Reflita (p. 145)

$C_{n,n} = 1$

Tecnologias digitais (p. 148)

1. É possível formar 3 628 800 números.

2. É possível formar 62 990 928 000 palavras.

3. De 18 053 528 883 775 maneiras diferentes.

Conexões (p. 152)

1. a) 36 afinações.

b) Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

Capítulo 2

Situações-problema

1. a) 30%

b) 20%

c) 50%

2. a) 10%

b) 75%

Atividades

1. a) Não, todos os métodos têm uma probabilidade de falha.

b) Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

4. Denotamos "cara" por C e "coroa" por K. Espaço amostral: $\Omega = \{C, K\}$; evento A: "ocorrer cara" $\rightarrow A = \{C\}$.

5. Espaço amostral: $\Omega = \{AO, 2O, \ldots, 10O, JO, QO, KO, AC, 2C, \ldots, 10C, JC, QC, KC, AE, 2E, \ldots, 10E, JE, QE, KE, AP, 2P, \ldots, 10P, JP, QP, KP\}$. Evento: $A = \{AO, AC, AE, AP\}$.

6. Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; evento A: "ocorrer um número múltiplo de 3" $\rightarrow A = \{3, 6\}$.

7. Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$; evento A: "sortear um número primo" $\rightarrow A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$.

8. a) Resposta pessoal.

b) Espaço amostral: Ω = {Beatriz, Júlio, Luciana, Pedro}; evento A: "sortear uma mulher em cargo de liderança na empresa" $\rightarrow$ $\rightarrow A$ = {Beatriz, Luciana}.

9. Resposta pessoal.

10. a) Espaço amostral: $\Omega = \{C, K\}$. Evento A: "ocorrer cara" $\rightarrow A = \{C\}$. Evento B: "ocorrer coroa" $\rightarrow B = \{K\}$.

b) Os eventos A e B são mutuamente exclusivos e complementares, pois $A \cap B = \{C\} \cap \{K\} = \varnothing$ e $A \cup B = \{C\} \cup \{K\} = \{C, K\} = \Omega$.

11. a) Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, evento C: "ocorrer um número maior do que 6" $\rightarrow C = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

b) Evento D: "ocorrer um número menor ou igual a 6" $\rightarrow D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

12. a) Evento certo.

b) Evento impossível.

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

13. a) $\Omega = \{1, 2, 3\}$; $A = \{2\}$; $B = \{1, 3\}$.

b) $p(B) = 70\%$

14. a) 50%

b) 50%

c) Aproximadamente 16,7%.

d) Aproximadamente 33,3%.

e) 0%

f) 100%

15. a) 40%

b) 60%

16. a) O medicamento **A**.

b) A partir de 5 comorbidades.

17. a) 16,7%

b) 50%

c) 33,3%

d) 33,3%

e) 83,3%

18. a) 46,2%

b) 30,8%

c) 46,2%

d) 38,5%

e) 69,2%

f) 30,8%

g) 23,1%

19. a) 16,7%

b) 50%

c) 41,7%

d) 30,6%

e) 25%

f) 16,7%

g) 38,9%

20. a) V

b) F

c) F

d) V

e) F

f) V

g) F

21. Resposta pessoal.

22. a) 60%

b) 12%

23. a) 21,25%

b) 8,75%

c) 8,75%

d) 23,75%

e) 33,75%

24. a) 1326 maneiras diferentes.

b) 78 maneiras diferentes.

c) $\frac{1}{17}$

25. 10%

26. a) $\frac{1}{9}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{5}{9}$

27. **a)** $\frac{13}{204}$

b) $\frac{15}{34}$

28. **a)** $\frac{8}{17}$

b) $\frac{7}{17}$

c) $\frac{14}{17}$

d) $\frac{1}{17}$

e) $\frac{3}{17}$

f) $\frac{7}{17}$

g) $\frac{6}{17}$

29. $\frac{29}{57}$

30. $\frac{13}{18}$

31. **a)** $\frac{666}{780}$

b) $\frac{3}{780}$

c) $\frac{114}{780}$

32. Opção **2**.

33. $\frac{1}{13}$

34. $\frac{1}{4}$

35. $\frac{1}{6}$

36. Resposta pessoal.

37. **a)** Resposta pessoal.

b) $\frac{1}{2}$ ou 50%.

38. $\frac{1}{11}$

39. 3%

40. **a)** Resposta pessoal.

b) 76%

41. **a)** 40%

b) 70%

42. O piloto deve trocar os pneus.

43. Resposta pessoal.

44. Se o participante não mudar a porta, a possibilidade de ele ganhar o carro é 1 em 3 situações. Se o participante mudar a porta, a possibilidade de ele ganhar o carro é 2 em 3 situações.

Reflita (p. 156)

Uma "moeda perfeita" é a moeda em que os 2 lados têm a mesma probabilidade de ocorrer. O "dado não viciado" é um dado em que cada uma das faces tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Explore para descobrir (p. 156)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 162)

1. É mais provável que seja vermelha, pois há mais bolinhas vermelhas do que rosa na caixa.

2. É mais provável que seja azul, pois há mais bolinhas azuis na caixa.

3. Não. Resposta pessoal.

4. Não. Resposta pessoal.

Reflita (p. 164)

Quando se diz "pelo menos 2", admite-se que aconteçam 2 ou mais situações. Quando se diz "exatamente 2", há somente 2 situações.

Explore para descobrir (p. 169)

1. **a)** $\Omega = [0, 10]$

b) Ω é um conjunto com elementos não enumeráveis.

c) $A = [0, 2]$

d) Resposta pessoal.

e) 20%

2. **a)** 2 m^2

b) 1 m^2

c) Resposta pessoal.

d) 50%

Explore para descobrir (p. 170)

1. **a)** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $n(\Omega) = 6$

2. **a)** $A = \{2, 4, 6\}$; $n(A) = 3$; $p(A) = 50\%$.

b) $B = \{1, 3, 5\}$; $n(B) = 3$; $p(B) = 50\%$.

c) Sim, os eventos A e B são mutuamente exclusivos.

d) 0; 0%.

e) $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $n(D) = 6$; $p(D) = 100\%$.

f) O evento C é a intersecção dos eventos A e B. O evento D é a união dos eventos A e B.

Reflita (p. 171)

Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 175)

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(\Omega) = 6$.

2. 50%

3. $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $n(B) = 5$.

4. $C = \{1, 3, 5\}$ e $n(C) = 3$.

5. 60%

Conexões (p. 182)

1. O genótipo *AA* ocorre apenas se o gameta masculino for *A*, evento que tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de ocorrer, e se o gameta feminino for *A*, evento com probabilidade $\frac{1}{2}$ também. Portanto, a probabilidade de ocorrer *AA* é dada por $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$. De modo análogo, o genótipo *aa* tem probabilidade de ocorrer igual a $\frac{1}{4}$. Já o genótipo *Aa* ocorre se o gameta masculino for *A* e o gameta feminino for *a*; portanto, a probabilidade é dada por $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$, ou se o gameta masculino for *a* e o gameta feminino for *A*, cuja probabilidade é dada por $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} =$ $= 25\%$. Portanto, a probabilidade de ocorrência do genótipo *Aa* é $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

2. **a)** Ambos os pais são *Aa*. Resposta pessoal.

b) $\frac{1}{16}$ ou 6,25%.

c) $\frac{9}{16}$ ou 56,25%.

3. Resposta pessoal.

Enem e vestibulares

1. Alternativa **e**.

2. Alternativa **c**.

3. Alternativa **c**.

4. Alternativa **b**.

5. Alternativa **a**.

6. Alternativa **d**.

7. Alternativa **b**.

8. Alternativa **e**.
9. Alternativa **d**.
10. Alternativa **a**.
11. Alternativa **b**.
12. Alternativa **e**.
13. Alternativa **d**.
14. **a)** Maior.
    b) $\frac{6}{13}$

Unidade 4

Abertura

- Resposta pessoal.
- Resposta pessoal.

Capítulo 1

Situações-problema

1. **a)**

Navegador	Quantidade de usuários	Porcentagem de usuários
A	100	50%
B	30	15%
C	70	35%
Total	**200**	**100%**

b) O navegador **A**. Recebeu 50% das indicações.

2. **a)** O roteiro "grandes cidades".
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.
d) Resposta pessoal.

Atividades

1. **a)** Quantitativa discreta.
b) Quantitativa contínua.
c) Qualitativa nominal.
d) Quantitativa discreta.
e) Qualitativa nominal.
f) Qualitativa ordinal.
2. População: 500 pessoas; amostra: 50 pessoas.
3. Nome; qualitativa.
4. 1602 respostas.
5. **a)** Variável quantitativa contínua.
b) Divulgar que o registro da área devastada foi no mês de fevereiro considerando o mês completo, não especificando que o registro era apenas entre 1º e 17 de fevereiro.
6.

Gênero musical	FA	FR
Sertanejo	15	0,30
MPB	12	0,24
Rock	16	0,32
Clássico	7	0,14

7. **a)** Medida de altura, cor dos olhos, cor do cabelo e tipo sanguíneo.
b) Medida de altura: quantitativa contínua; cor dos olhos: qualitativa nominal; cor do cabelo: qualitativa nominal; tipo sanguíneo: qualitativa nominal.
c) Amostra, pois a população é composta de 200 estudantes.
d) FA = 14; FR = 28%.
e) FA = 2; FR = 4%.
f) 0,06 m
g) 60%; 16%.
8. **a)** $A = 1600$; $B = 1690$; $C = 1690$; $D = 1780$; $E = 1780$; $F = 1870$; $G = 1870$; $H = 1960$; $I = 6$; $J = 3$; $K = 60$; $L = 25$; $M = 10$; $N = 5$; $O = 100$.
b) Não é possível responder, pois os dados estão organizados em classes.
9. **a)**

Estado de origem dos presidentes do Brasil (de 1889 a 1964)

Estado de origem	FA	FR
Minas Gerais	6	$\frac{6}{22}$
São Paulo	4	$\frac{4}{22}$
Rio Grande do Sul	3	$\frac{3}{22}$
Alagoas	2	$\frac{2}{22}$
Rio de Janeiro	2	$\frac{2}{22}$
Rio Grande do Norte	1	$\frac{1}{22}$
Paraíba	1	$\frac{1}{22}$
Santa Catarina	1	$\frac{1}{22}$
Mato Grosso	1	$\frac{1}{22}$
Mato Grosso do Sul	1	$\frac{1}{22}$
Total	**22**	**1,00**

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Minas Gerais.
10. **a)** $x = 9$; $y = 25\%$; $z = 15\%$.
b) 65%
c) 15%
11. **a)** Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.
12. **a)** 2023
b) Crescimento: 2014 a 2017, 2019 a 2023; decrescimento: 2012 a 2014, 2017 a 2019.
c) Em 2013 e 2014.
d) 23,6 bilhões de dólares.
e) Resposta pessoal.
13. **a)** 2020
b) Apresenta decrescimento.
c) Resposta pessoal.
d) 40 bilhões de reais.
e) Resposta pessoal.
14. **a)** 12 votos.
b) 5 estudantes.
c) 40 estudantes; 19 estudantes com 15 anos de idade e 21 estudantes com 16 anos de idade.
d) 50%
15. Alternativa **c**.
16. Resposta pessoal.
17. **a)** 1557
b) Aproximadamente 14%.
c) Apenas em 2016.
d) 2021
e) 2014
f) Aproximadamente 21,6%; aproximadamente 3%.
18. Alternativa **e**.
19. **a)** Região Sudeste.
b) Aproximadamente 56,7 milhões.
20. Alternativa **c**.
21. Alternativa **c**.

22. a) Resposta pessoal.
b) 26 estudantes.
c) 8 estudantes.
d) 15%

23. Alternativa **c**.

24. a) 65 anos de idade ou mais; 5 pontos percentuais.
b) 0 a 14 anos de idade; 9,8 pontos percentuais.

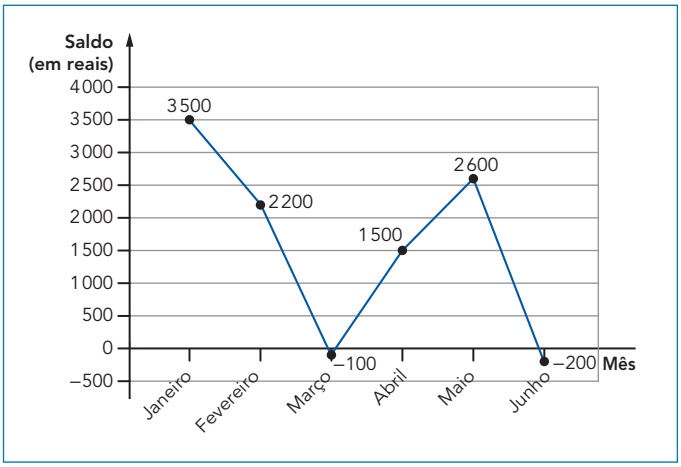
25. Alternativa **b**.

26. Alternativa **d**.

27. Alternativa **d**.

28. a)

Saldo bancário – 1º semestre



WYM Design/Arquivo da editora

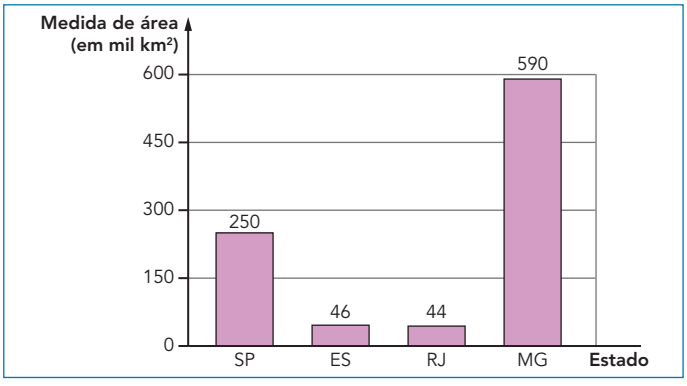
Dados elaborados para fins didáticos.

b) Deverá pagar R$ 214,00.

c) Porque, como a taxa de juros é mensal, a cada mês a dívida aumenta, podendo atingir valores muito maiores do que o valor original da compra.

29.

Medidas de área dos estados da região Sudeste



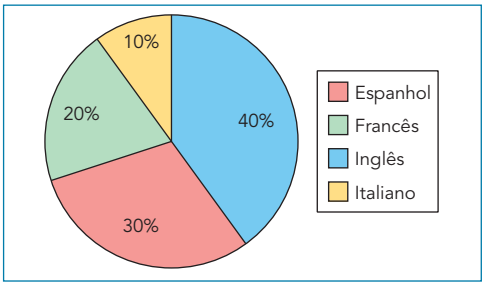
WYM Design/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Área territorial* – Brasil, Grandes Regiões, Unidades da Federação e Municípios. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. Disponível em: https://tedit.net/yop4uk. Acesso em: 24 jul. 2024.

30. Resposta pessoal.

31.

Porcentagem de estudantes por idioma escolhido



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

32. a) Sim. Resposta pessoal.

b) A afirmação do patrão é falsa, pois o ajuste não repõe as perdas causadas pela inflação do período.

c) Resposta pessoal.

33. Resposta pessoal.

34. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Havia um empate técnico na pesquisa realizada em 17-18 de março.

35. Respostas pessoais.

36. a)

Face	Quantidade de ocorrências	Frequência relativa (em %)
1	157	15,7
2	171	17,1
3	160	16,0
4	166	16,6
5	171	17,1
6	175	17,5

b) Resposta pessoal.

37. a) Habitação.

b) 15%

c) De 34 anos a 48 anos.

d) R$ 338,67

e) Resposta pessoal.

Reflita (p. 193)

Quando todos os elementos do universo são pesquisados, isto é, quando a pesquisa é censitária.

Reflita (p. 197)

Sim. Se iniciássemos a 1ª classe em 48 kg, a 7ª classe conteria valores até 83 kg (pois 48 + 35 = 83); portanto, como a maior medida de massa observada é igual a 82,9 kg, todos os valores estariam contemplados pelos intervalos considerados. No entanto, não seria possível iniciar em 47 kg, pois 47 + 35 = 82 e 82 < 82,9.

Reflita (p. 212)

48,5 ⊢ 55,5: 52; 55,5 ⊢ 62,5: 59; 62,5 ⊢ 69,5: 66; 69,5 ⊢ 76,5: 73; 76,5 ⊢ 83,5: 80.

Conexões (p. 201)

1. Resposta pessoal.

2. Toda a população, isto é, os 20 000 eleitores.

3. Aproximadamente 641 pessoas.

4. Resposta pessoal.

Tecnologias digitais (p. 220)

1. Classe: 60 ⊢⊣ 70.

2. O valor mínimo é 20 anos de idade e o máximo, 70 anos de idade.

3. Resposta pessoal.

Conexões (p. 223)

Respostas pessoais.

Capítulo 2

Situação-problema

a) 22 pontos.

b) 3 × 2, com 2 ocorrências.

c) Turquia (57 pontos).

d) 95,5 pontos.

e) 54 pontos.

Atividades

1. *MA* = 36,40 reais e *Me* = 39 reais.

2. a) 121

b) 121,5

c) 126

d) 126

3. Resposta pessoal.

4. a) *MA* = 14,3 anos; *Mo* = 15 anos; *Me* = 14,5 anos.

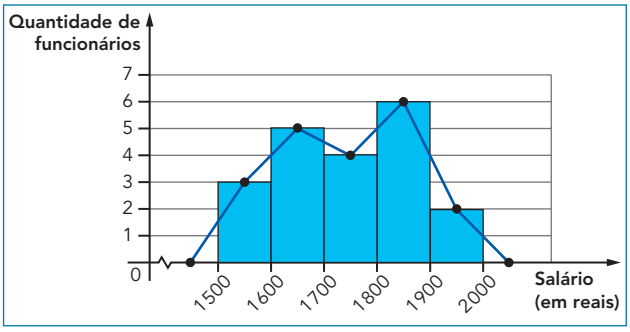
b) *MA* = 1,71 m; classe modal 1,65 ⊢ 1,69; *Me* ≃ 1,70 m.

5. 7,0 gols.

6. *MA* ≃ 2,3 gols e *Me* = 2 gols.

7. Alternativa **c**.

8. **Distribuição salarial dos funcionários de uma empresa**



WYM Design/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

MA = 1745; *Mo* = 1800 ⊢ 1900; *Me* = R$ 1.750,00.

9. Alternativa **d**.

10. Alternativa **c**.

11. a) 40 estudantes.

b) 12,5%

c) 72,5%

d) *MA* = 3,15 acertos; *Mo* = 3 acertos; *Me* = 3 acertos.

12. Alternativa **c**.

13. Alternativa **b**.

14. Alternativa **d**.

15. Alternativa **c**.

16. Alternativa **c**.

17. Alternativa **c**.

18. a) 1,4 mortes.

b) Resposta pessoal.

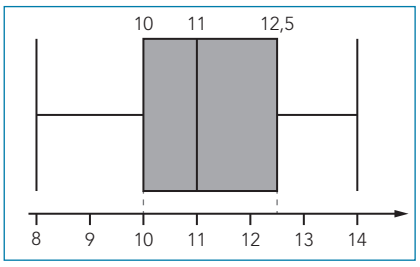
19.

Entrada	Saída
4 e 7	5,5
8,5 e 9	8,75
5,8 e 9,1	7,45

20. Resposta pessoal.

21.

Primeiro dia da menstruação no período de janeiro a setembro



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

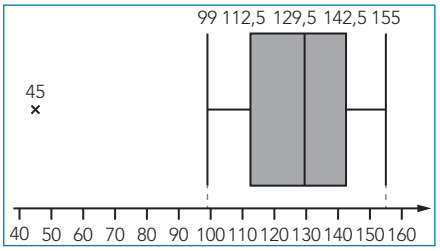
Dados elaborados para fins didáticos.

22. **Quantidade de ligações recebidas por 40 funcionários em determinado dia**

4	5
9	9
10	0 1 3 5 7 8
11	0 1 4 6
12	0 2 6 6 6 8 9 9
13	0 2 3 3 4 4 4 5
14	0 1 4 5 5 7 9 9
15	0 1 2 5

Dados elaborados para fins didáticos.

Quantidade de ligações recebidas por 40 funcionários em determinado dia



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Diagrama de caixa.

b) Diagrama de ramos e folhas.

c) Diagrama de caixa.

d) Diagrama de ramos e folhas.

23. **a)** 36 pessoas; 3 pessoas.

b) A representação gráfica que permite visualizar os elementos de que Miguel precisa é o digrama de ramos e folhas.

24. Média: 61 pontos; desvio padrão: aproximadamente 3,56 pontos.

25. **a)** MA = R$ 3.500,00 e Me = R$ 3.000,00.

b) Menor.

c) Resposta pessoal.

26. Alternativa **b**.

27. Alternativa **d**.

28. Resposta pessoal.

29. Respostas pessoais.

Ampliando a atividade (p. 234)

a) 3, 2 e 1, respectivamente.

b) Resposta pessoal.

Reflita (p. 235)

O esperado é que pelo menos 50% dos valores sejam menores do que ou iguais à mediana e, da mesma maneira, pelo menos 50% dos valores sejam maiores do que ou iguais a ela.

Reflita (p. 236)

Resposta pessoal.

Explore para descobrir (p. 247)

1. **a)** MA = 20 anos.

b) MA = 20 anos.

c) MA = 20 anos.

2. Resposta pessoal.

Reflita (p. 247)

A média aritmética, a mediana (Md = 20) e a moda (Mo = 20) são as mesmas para os 3 grupos, portanto não é possível notar diferenças entre eles utilizando apenas essas medidas.

Reflita (p. 247)

$A_A = 0$, $A_B = 6$ e $A_C = 40$. Como a amplitude é muito maior no grupo **C**, podemos afirmar que ele é o mais heterogêneo em relação aos demais no quesito faixa etária.

Reflita (p. 249)

Como no cálculo da variância elevamos cada desvio ao quadrado, a variância é expressa no quadrado dos dados; dessa maneira, ao extrair-se a raiz quadrada da variância, volta-se à unidade dos dados analisados.

Reflita (p. 250)

Se a variância for 0 ou 1, o desvio padrão também será, respectivamente, 0 ou 1. E, se a variância pertencer ao intervalo]0; 1[, então o desvio padrão será maior do que a variância.

Tecnologias digitais (p. 246)

Respostas pessoais.

Conexões (p. 252)

Respostas pessoais.

Enem e vestibulares

1. Alternativa **b**.

2. Alternativa **a**.

3. Alternativa **d**.

4. Alternativa **a**.

5. Alternativa **c**.

6. Alternativa **c**.

7. Alternativa **b**.

8. Alternativa **b**.

9. Alternativa **e**.

10. Soma: 04 + 08 = 12.

11. **a)** Chapa **2**. Sim, a Chapa **1** seria vitoriosa.

b) Para um total de 160 estudantes, temos:

$3x + x + x + 3x = 160 \Rightarrow x = 20$

Turma **A**: $3x = 60$; turma **B**: $x = 20$; turma **C**: $x = 20$; turma **D**: $3x = 60$. Assim:

	Turma A	Turma B	Turma C	Turma D
Quantidade de estudantes	60	20	20	60

Unidade 5

Abertura

Respostas pessoais.

Capítulo 1

Situação-problema

Respostas pessoais.

Atividades

1. Respostas pessoais.

2. Resposta pessoal.

3. Respostas pessoais.

4. **a)** Aproximadamente 1,074.

b) Resposta pessoal.

5. **a)** Resposta pessoal.

b) 2 bilhões de pessoas.

Reflita (p. 268)

Resposta pessoal.

Reflita (p. 269)

Resposta pessoal.

Conexões (p. 273)

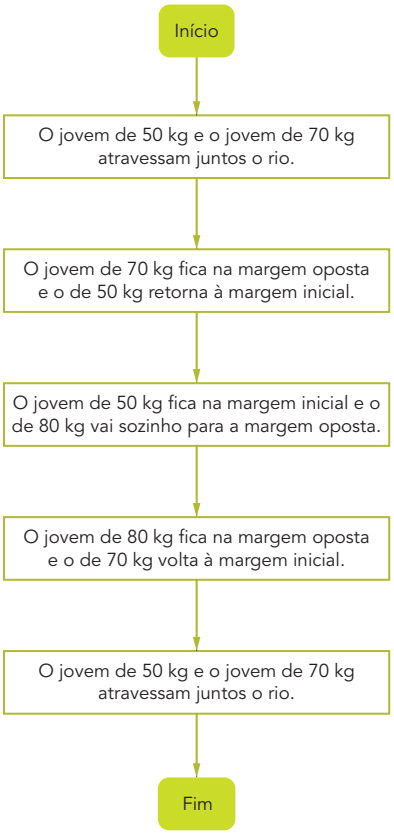
Respostas pessoais.

Capítulo 2

Situação-problema

Respostas pessoais.

Atividades

1. Resposta pessoal.
2. 

Banco de imagens/Arquivo da editora
3. Resposta pessoal.
4. **a)** Não. Primeiramente, a soma das medidas de massa dos 3 jovens é menor do que a que o barco suporta, então eles poderiam ter atravessado de uma só vez. Além disso, o passo **5** não seria possível, porque, depois do passo **4**, os jovens **A** e **B** estavam em lados opostos do rio, não podendo atravessar juntos.
   b) A frase "Porém o rudimentar barco que usarão consegue suportar, no máximo, 250 kg" dá a entender que o barco suporta uma medida de massa menor do que a dos 3 jovens juntos, então o programa não analisou corretamente os valores fornecidos.
   c) Resposta pessoal.
5. **a)** Resposta pessoal.
   b) Resposta pessoal.
   c) Resposta pessoal.
6. Resposta pessoal.
7. **a)** 1 casal; 1 casal; 2 casais; 3 casais; 5 casais.
   b) 8 casais; 13 casais.
   c) 1, 1, 2, 3, 5, 8 e 11. Cada termo da sequência de Fibonacci, a partir do 3º, é determinado pela soma dos 2 termos imediatamente anteriores.
   d) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 e 377.

Explore para descobrir (p. 276)

1. AMOR → OAMR → MAOR → MROA → AORM → MORA. Resultado: MORA.
2. MORA → RMOA → OMRA → OARM → MRAO → ORAM. Resultado: ORAM.
3. Posicione a 1ª letra no fim da palavra.
4. AMOR → OAMR → RMAO → AMRO → OMRA → OARM. Resultado: OARM. O resultado não foi igual.
5. As etapas 2 e 3. Elas podem ter a ordem invertida sem alterar o resultado, pois não há diferença entre trocar antes a 1ª e a 3ª letras e depois trocar a 2ª e a 4ª letras e trocar antes a 2ª e a 4ª letras e depois trocar a 1ª e a 3ª letras.
6. Resposta pessoal.

Capítulo 3

Situação-problema

Respostas pessoais.

Atividades

1. Respostas pessoais.
2. Utilizando os blocos indicados, o código do algoritmo pedido pode ser escrito como mostrado a seguir.

```
Início
  Crie a variável Num
  Atribua o número de entrada à variável Num
  Se Num > 0, então
    Retorne o texto "O número é positivo."
  Senão
    Retorne o texto "O número não é positivo."
Fim
```

3. Respostas pessoais.
4. Resposta pessoal.
5.

```
Início
  Aguarde a sua vez de jogar
  Se alguma das cartas da sua mão tem a cor ou o número igual ao da última carta descartada, então
    Descarte 1 carta que tem a cor ou o número igual ao da última carta descartada
  Senão
    Enquanto nenhuma das cartas da sua mão tem a cor ou o número igual ao da última carta descartada
    Compre 1 carta do monte
    Descarte 1 carta que tem a cor ou o número igual ao da última carta descartada
  Finalize sua jogada
Fim
```

6. Resposta pessoal.

Reflita (p. 290)

Resposta pessoal.

Tecnologias digitais (p. 294)

1. **a)** Reajuste de 15%. O novo salário é R$ 1.725,00.
   b) Reajuste de 10%. O novo salário é R$ 3.712,50.
2. Resposta pessoal.

Enem e vestibulares

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **c**.
3. Alternativa **a**.
4. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
   b) $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{6}$; $\frac{2}{81}$.

Lista de siglas

AFA-SP: Academia da Força Aérea (São Paulo)
CMRJ: Colégio Militar do Rio de Janeiro
EEAR-SP: Escola de Especialistas de Aeronáutica
Enem: Exame Nacional do Ensino Médio
ESA-MG: Escola de Sargentos das Armas (Minas Gerais)
Epcar-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar (Minas Gerais)
Famema-SP: Faculdade de Medicina de Marília
Famerp-SP: Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto (São Paulo)
Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia (São Paulo)
Fempar-PR: Fundação Escola do Ministério Público do Estado do Paraná
FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
Ficsae-SP: Faculdade Israelita de Ciências da Saúde Albert Einstein (São Paulo)
FMC: Faculdade de Medicina de Campos
IFG-GO: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Insper-SP: Instituto de Ensino e Pesquisa (São Paulo)
UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas
UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina (Paraná)
UEM-PR: Universidade Estadual de Maringá (Paraná)
Uema: Universidade Estadual do Maranhão
Uerj: Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFGD-MS: Universidade Federal da Grande Dourados (Mato Grosso do Sul)
UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora (Minas Gerais)
UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria (Rio Grande do Sul)
UFU-MG: Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)
Uncisal: Universidade Estadual de Ciências da Saúde de Alagoas
Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (São Paulo)
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
Unicap-PE: Universidade Católica de Pernambuco
Unifor-CE: Fundação Edson Queiroz Universidade de Fortaleza (Ceará)
Unisc-RS: Universidade de Santa Cruz do Sul (Rio Grande do Sul)
Unisinos-RS: Universidade do Vale do Rio dos Sinos (Rio Grande do Sul)
UPE: Universidade de Pernambuco

Referências bibliográficas comentadas

Para a concepção desta coleção, diversos livros, artigos científicos, documentos oficiais do governo, revistas científicas, dissertações e *sites* foram consultados com o intuito de trazer materiais atualizados e que visam dar suporte às aprendizagens previstas para o Ensino Médio. Conheça as principais referências bibliográficas deste Volume.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

O autor apresenta e explica aspectos da História da Matemática, considerando a ordem cronológica e o local dos acontecimentos, desde a origem do conceito de número até os desenvolvimentos matemáticos do século XX. No decorrer dos capítulos, são apresentadas definições matemáticas importantes e as pessoas que trabalharam nelas. Esse livro foi utilizado como referência para dados históricos apresentados neste Volume.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://tedit.net/pot336. Acesso em: 23 ago. 2024.

Este documento, conhecido como BNCC, determina as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem adquirir no decorrer de todos os anos da Educação Básica. Essas aprendizagens estão organizadas em competências e habilidades para estudantes de todo o país. De maneira geral, todos os Volumes desta coleção foram concebidos de acordo com as orientações da BNCC.

BRASIL. Ministério da Educação. *Computação*: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://tedit.net/93oura. Acesso em: 23 ago. 2024.

Em 2022, a BNCC foi complementada com diretrizes específicas para incluir o ensino de Computação no currículo escolar brasileiro. Esse documento, que visa promover nos estudantes o desenvolvimento de habilidades associadas ao pensamento computacional e à cultura digital, foi utilizado para a elaboração de algumas das seções e atividades presentes neste Volume.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica*. Brasília, DF: MEC, 2013. Disponível em: https://tedit.net/enrd4x. Acesso em: 23 ago. 2024.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica (DCN) são um conjunto de definições de princípios, fundamentos e procedimentos da Educação Básica elaborado com o objetivo de orientar e assistir escolas e redes no desenvolvimento do projeto pedagógico. Essas diretrizes também fornecem subsídios para a elaboração de materiais didáticos e, por isso, foram consultadas e consideradas na elaboração desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019a. Disponível em: https://tedit.net/qhta9z. Acesso em: 23 ago. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019b. Disponível em: https://tedit.net/50cftq. Acesso em: 23 ago. 2024.

De acordo com a BNCC, os Temas Contemporâneos Transversais devem ser incorporados aos currículos e às propostas pedagógicas escolares, de preferência de maneira transversal e integradora. Após a homologação da BNCC, visando esclarecer a inserção desses temas, esses 2 documentos foram elaborados pelo Ministério da Educação, passando a servir de referencial para a concepção desta coleção.

COSTA, A. C. G. da. *Protagonismo juvenil*: adolescência, educação e participação democrática. Salvador: Fundação Odebrecht, 2000.

O autor apresenta a história do conceito de protagonismo juvenil, além de depoimentos de estudantes e de outros pesquisadores da área. No livro, ele propõe que o processo educativo seja organizado com o jovem como núcleo central – perspectiva que faz parte do projeto didático de todos os Volumes desta coleção.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 1).

O autor traz uma análise da relação entre Matemática e Etnomatemática, ressaltando a importância da Etnomatemática no ensino ocidental, além de apresentar resultados de pesquisas do mundo todo na área. Esse livro foi utilizado como referencial teórico para a concepção desta coleção.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 5. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011.

Este livro oferece uma visão abrangente da evolução dos conceitos matemáticos no decorrer dos séculos. Destacando o desenvolvimento histórico de funções e sequências, o livro traça um panorama sobre como conceitos fundamentais se consolidaram na Matemática moderna. Além disso, o autor explora as contribuições matemáticas de diversas culturas ao longo da História. As informações apresentadas nesse livro encontram-se de maneira transversal em toda a coleção didática.

FAZENDA, I. C. A (org.). *Didática e interdisciplinaridade*. 13. ed. Campinas: Papirus, 2008.

Esse livro explora a interdisciplinaridade não apenas como a integração de disciplinas, mas na perspectiva de buscar novos conhecimentos. É precisamente esse viés que permite utilizar a interdisciplinaridade como base na linha de formação de professores. O livro apresenta uma análise desde a década de 1970, explicitando o histórico dos estudos de interdisciplinaridade e o desenvolvimento das teorias desse campo de pesquisa até os dias atuais. A organizadora, renomada por suas contribuições no campo da educação, discute como a interdisciplinaridade pode enriquecer a prática pedagógica, facilitando a construção de conhecimentos mais significativos e contextualizados; além disso, faz um paralelo de como isso pode se refletir na formação e na prática pedagógica.

FERNANDEZ, M. P.; CORTÉS, M. I. *Introdução à computação*. 3. ed. Fortaleza. EdUECE, 2015.

Os autores trazem, no início, a história e a evolução dos computadores, passando pelas quatro gerações de desenvolvimento deles. Na sequência, discorrem sobre as tecnologias de informação que foram criadas com os computadores, como as linguagens de programação. O livro serviu de referencial para o desenvolvimento da Unidade 5 deste Volume.

FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. *Curso de Estatística*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

Obra de importante caráter didático, que apresenta detalhada abordagem dos principais tópicos de Estatística estudados na Educação Básica, como as medidas de tendência central, de dispersão e a leitura e criação de gráficos e de tabelas, que são apresentados com o rigor e a precisão necessários. A obra também apresenta grande diversidade de atividades que colaboram para o aprendizado do leitor e foram utilizadas de referência para as propostas de atividades da Unidade 4 deste Volume.

HAZZAN, S.; POMPEO, J. N. *Matemática financeira*. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

Nessa obra, os autores Samuel Hazzan e José Nicolau Pompeo descrevem e ensinam diversos conceitos relacionados à Matemática financeira, como juros simples, juros compostos e taxa de juros em financiamento com parcelas iguais. A obra também apresenta uma grande diversidade de atividades encadeadas com a teoria, de modo a facilitar o aprendizado. Ela serviu de referência para a teoria e as atividades do capítulo 1 da Unidade 2 deste Volume.

KARLSON, P. A *magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.

Neste livro são apresentados diversos problemas, curiosidades e aspectos históricos. Assim como o livro *História da matemática*, de Carl Boyer, é uma ótima referência histórica.

LIMA, E. L. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

Nesse livro, o autor compartilha uma série de ensaios que abordam temas fundamentais da Matemática de maneira simples, clara e agradável. Ele trata de questões básicas, como a natureza dos números e o conceito de igualdade. Esse livro é uma leitura enriquecedora tanto para professores quanto para estudantes e contém diversas reflexões filosóficas e históricas que permearam a escrita desta coleção.

LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1.

O principal foco dessa obra é a resolução de problemas, considerando como público-alvo os estudantes do Ensino Médio. A importância da precisão em definições, enunciados e resoluções de atividades é evidenciada pelos autores em diversos momentos, assim como a contextualização de conceitos matemáticos, de maneira a promover interdisciplinaridade no estudo de análise combinatória e probabilidade. Esse livro foi consultado na elaboração deste Volume, principalmente como inspiração para a criação dos contextos apresentados.

LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2.

Essa obra apresenta um capítulo destinado à Matemática financeira, que se ocupa da relação entre a progressão geométrica e os juros compostos, assim como da necessidade do estudo e entendimento da Matemática financeira para fazer melhores escolhas na vida pessoal, como a decisão entre compra à vista ou a prazo e da melhor opção de financiamento. Os problemas apresentados nessa obra inspiraram a elaboração das atividades deste Volume.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. *Noções de Probabilidade e Estatística*. 7. ed. São Paulo: Edusp, 2010.

Esse livro oferece uma introdução à Estatística, no geral, e à análise de dados. Trabalha com conceitos como variáveis qualitativas e quantitativas, população e amostra, medidas de tendência central e dispersão, *box-plot*, entre outros. Essa obra foi utilizada como referencial teórico para a Unidade 4 deste Volume.

MATTHEWS, R. *As leis do acaso*: como a probabilidade pode nos ajudar a compreender a incerteza. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2017.

Nessa obra a abordagem da probabilidade é simples, sem o uso demasiado de fórmulas, e é feita de maneira intuitiva. O autor apresenta situações do cotidiano, como previsão do tempo, exames médicos e até resultados de eleição, para fazer a análise probabilística. Essa abordagem foi considerada na elaboração de contextos e atividades deste Volume.

MLODINOW, L. *O andar do bêbado*: como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

A obra, aclamada pela crítica nacional e internacional, apresenta de modo informal e intuitivo a influência da probabilidade nas mais diversas situações do cotidiano. O livro também traz detalhes de um dos mais famosos paradoxos matemáticos: o paradoxo de Monty Hall, abordado no capítulo 2 da Unidade 3 deste Volume. Stephen Hawking descreveu essa obra como "Um guia maravilhoso e acessível sobre como o aleatório afeta nossas vidas".

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. *Estatística básica*. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

Essa obra traz um grande referencial teórico sobre temas importantes da Estatística, incluindo um trabalho introdutório sobre variáveis quantitativa e qualitativas e sobre os tipos de

gráfico e diagramas que podem ser usados para representá-las, como os gráficos de barra e de setores e o diagrama de ramos e folhas. A Unidade 4 deste Volume foi elaborada utilizando como um de seus referenciais o trabalho introdutório de Estatística dessa obra.

NETO, A. S. *Matemática financeira e suas aplicações*. 12. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

Essa obra contempla diversos aspectos da Matemática financeira. Os seguintes capítulos dela serviram de referência para a elaboração da estrutura teórica do conteúdo sobre Matemática financeira deste Volume: "Conceitos gerais e juros simples", "Juros compostos", "Descontos" e "Matemática financeira e inflação".

PASSOS, G. S. *Análise combinatória*: teoria e aplicações para o ensino básico. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Ufam, Manaus, 2018.

Essa dissertação apresenta quatro capítulos destinados à análise combinatória. Na introdução, é apresentado o contexto histórico desse assunto; em seguida, são abordados conceitos matemáticos relacionados à análise combinatória, como o princípio fundamental da contagem, fatorial, permutações, arranjos e combinações. Os problemas utilizados para abordar esses conteúdos serviram de inspiração para novos problemas apresentados na Unidade 3 deste Volume.

PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

A obra traz diversas estratégias e ferramentas fundamentais para a resolução de problemas, apresentando as 4 fases de resolução: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. O autor inicia o livro afirmando que: "Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema". Esse livro serviu de inspiração para a elaboração de situações, problemas e propostas de soluções que compõem este Volume.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo: SBM, v. 85, 2014.

O artigo dessa revista intitulado "Medidas estatísticas de posição com dados agrupados", do professor Márcio Andrade Monteiro, discute, define e exemplifica as principais medidas de tendência central: média, moda e mediana. Esse artigo serviu de referência para a proposta de trabalho com as medidas de tendência central neste Volume.

ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

A autora apresenta, em ordem cronológica, fatos da história da Matemática de um olhar crítico, analisando mitos e lendas perpetuados por muito tempo. O livro começa abordando conceitos matemáticos desenvolvidos na Mesopotâmia, passando por Egito, Grécia, França e Alemanha.

SALOMÃO, M. S. *Estudo e generalizações do paradoxo de Monty Hall na Educação Básica*. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, UFJF, Juiz de Fora, 2014.

O autor apresenta, inicialmente, a importância do estudo da probabilidade, seguida de uma revisão detalhada do assunto. Além disso, detalha historicamente o paradoxo de Monty Hall, para depois desenvolver a solução que leva a uma generalização do problema, por meio de atividades concretas com estudantes da Educação Básica. O problema em questão também foi trabalhado, neste Volume.

SOUSA, N. G. *Estatística e Probabilidade no Ensino Médio*. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2018.

A autora aborda nessa dissertação um pouco da história da Estatística e, na sequência, discorre sobre seus conceitos básicos: gráficos, tabelas, medidas de tendência central e medidas de dispersão. Em especial, há um estudo sobre o que a Base Nacional Comum Curricular e os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem a respeito da Estatística. Essa história da Estatística e o estudo sobre a proposta desses documentos normativos em relação ao ensino e à aprendizagem de Estatística foram utilizados como referência para a Unidade 4 deste Volume.

SOUZA, H. J. C. *Matemática Financeira*: uma aplicação direta no cotidiano. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

Essa dissertação faz uma revisão das progressões aritméticas e geométricas para relacioná-las aos juros simples e composto, respectivamente. Conceitos de capitalização, taxas, descontos, equivalências e amortizações são minuciosamente explicados. Por fim, o autor apresenta a planilha eletrônica para auxiliar na resolução de problemas envolvendo Matemática financeira. Esse trabalho foi utilizado como uma das referências na elaboração da Unidade 2 deste Volume.

WHEELAN, C. *Estatística*: o que é, para que serve, como funciona. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

Esse livro propõe discussões interessantes sobre a Estatística e como utilizá-la para analisar fatos do cotidiano, usando uma linguagem acessível, porém rigorosa. Ele serviu de referência na Unidade 4 deste Volume, na concepção de uma apresentação da Estatística aos estudantes que facilitasse aprendizado.

WING, J. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://tedit.net/g4ji9a. Acesso em: 24 ago. 2024.

Esse artigo apresenta a tradução do trabalho Computational Thinking, da pesquisadora Jeannette Wing. A tradução para o português é de Cleverson Sebastião dos Anjos, professor da área de Informática do Instituto Federal do Paraná. O texto discorre sobre o percurso de ideias relacionadas aos estudos do pensamento computacional, tema atual e que é abordado em seções deste Volume, bem como em atividades no decorrer dos capítulos.

Transcrição de áudios

Podcast 1 – Transformações geométricas e a produção de mosaicos

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre transformações geométricas e a produção de mosaicos.

Que tal entendermos como podemos encontrar transformações geométricas em imagens do nosso dia a dia? Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Você estudou algumas transformações geométricas de figuras planas e recordou os conceitos dos movimentos de translação, reflexão e rotação. [vírgula sonora] Estudou também como identificar e representar cada uma dessas transformações no plano e como fazer uma composição com transformações geométricas. [vírgula sonora]

Mas você já se perguntou onde podemos encontrar essas transformações no cotidiano?

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

As transformações geométricas estão tão presentes em imagens de elementos do nosso dia a dia que, às vezes, nem as notamos. Elas aparecem em imagens da natureza, de obras de arte, de artesanatos e de vitrais, além de estampas e mosaicos. [vírgula sonora]

Aliás, você sabe o que é um mosaico? É uma arte decorativa aplicada em superfícies planas, como tampos de mesas, paredes ou pisos. Neles podemos criar figuras geométricas ou abstratas com materiais diversos, como pedrinhas, partes de azulejos, pastilhas de vidro, conchas, entre outros. [vírgula sonora]

Existe um tipo de mosaico, conhecido como calçada portuguesa ou mosaico português, que é geralmente produzido em calçadas de espaços públicos. Tradicionalmente nas cores preta e branca, as pedras são encaixadas formando padrões decorativos ou mosaicos. [vírgula sonora]

Na cidade de São Paulo, em alguns espaços públicos, a calçada é feita desse tipo de mosaico. O padrão utilizado é uma repetição do mapa estilizado do estado de São Paulo, alternando figuras nas cores branca e preta. Esse padrão nada mais é do que um movimento da figura plana. Uma das transformações geométricas utilizadas para criar esse padrão é a translação. A figura estilizada do mapa do estado de São Paulo é deslocada em relação a um vetor, criando um padrão e obtendo a figura plana simétrica, que é congruente à original. Com a repetição dessa transformação, o mosaico da calçada vai se formando. [vírgula sonora]

Na cidade do Rio de Janeiro, a calçada portuguesa do bairro de Copacabana é famosa pelos traçados curvilíneos. Nas cores preta e branca, a figura plana padrão é replicada utilizando transformações geométricas como a translação, a rotação e a reflexão.

Mas você sabia que os mosaicos podem ser encontrados em muitos outros lugares além das calçadas? Por exemplo, muitos edifícios históricos e igrejas utilizam mosaicos para decorar suas paredes e tetos. Um exemplo famoso é a Basílica de São Marcos, em Veneza, onde os mosaicos bizantinos criam imagens deslumbrantes através da repetição e combinação de pequenas peças coloridas.

Além disso, os mosaicos também são populares em projetos de bricolagem e artesanato. Muitas pessoas criam seus próprios mosaicos em casa, utilizando materiais reciclados como pedaços de cerâmica, vidro quebrado e até mesmo tampinhas de garrafa. Esses projetos não só são uma ótima maneira de reciclar materiais, mas também permitem que as pessoas expressem sua criatividade através da arte geométrica.

Os mosaicos também têm um papel importante na cultura e na história de muitos povos. Por exemplo, os antigos romanos eram mestres na criação de mosaicos, utilizando-os para decorar suas vilas e banhos públicos. Os mosaicos romanos muitas vezes retratavam cenas da mitologia, da vida cotidiana e da natureza, e muitos deles ainda podem ser vistos em sítios arqueológicos ao redor do mundo.

Portanto, ao estudar transformações geométricas e sua aplicação na criação de mosaicos, você não está aprendendo apenas sobre Matemática, mas também sobre arte, história e cultura. Então, da próxima vez que você vir um mosaico, lembre-se das transformações geométricas que o tornaram possível e aprecie a complexidade e a beleza dessa forma de arte.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

Gostou de ouvir sobre como as transformações geométricas e os mosaicos podem estar relacionados?

Espero que não tenha ficado com dúvidas.

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Podcast 2 – Análise combinatória

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre Análise combinatória.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Vivemos num mundo repleto de senhas.

Senhas de *login* para redes sociais, senhas de acesso a aparelhos e programas, senhas de bancos, e daí em diante.

Como sempre, o conhecimento matemático pode ter grande importância para entendermos esse contexto social e, então, lidarmos com ele.

Ao longo de seus anos de estudo, você já conheceu vários tópicos relacionados à Estatística e à Probabilidade. Também já estudou o princípio multiplicativo para calcular o número de possibilidades de diversos eventos. Mas será que você sabe aplicar esses conceitos, por exemplo, em segurança digital para proteger suas contas e senhas?

[VINHETA DE TRANSIÇÃO]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

A cada dia as técnicas para forçar a quebra de senhas se tornam mais eficazes, e isso deixa nossas informações vulneráveis a ações mal-intencionadas. Pensando nisso, a geração de senhas e a gestão de acesso de usuários a serviços digitais estão cada vez mais exigentes, sendo sempre recomendada a criação de senhas fortes. Mas o que define uma senha forte?

Cada caractere [digitação de teclado] é representado por uma sequência de impulsos elétricos entendida apenas pelo computador. Ao todo, são vinte e seis caracteres maiúsculos para as letras de A a Z, [efeito sonoro digital] vinte e seis caracteres minúsculos, [efeito sonoro digital] dez caracteres para os algarismos de zero a nove, [efeito sonoro digital] além de mais trinta e três caracteres especiais, que incluem sinais gráficos, parênteses, pontuações, entre outros. [efeito sonoro digital]

Vamos supor que, para acessar determinada rede social, você utilize uma combinação de quatro caracteres numéricos de zero a nove. Se aplicarmos o princípio multiplicativo, chegaremos a dez mil possibilidades de senhas. Em um ataque de força bruta, um potencial invasor levaria poucas horas para descobrir sua senha. Agora, se você utilizasse caracteres alfanuméricos, letras maiúsculas e letras minúsculas, em conjunto com caracteres especiais, em vez de usar apenas os caracteres numéricos, as possibilidades de senhas saltariam para aproximadamente oitenta e dois milhões, o que tornaria uma invasão à conta oito mil vezes mais difícil. [vírgula sonora]

Ou seja, quanto maior e mais forte for sua senha, mais seguras estarão as suas informações.

A utilização de senhas fracas pode levar a várias consequências graves: um invasor pode usar suas informações pessoais para cometer fraudes ou roubar sua identidade. Contas bancárias e cartões de crédito podem ser acessados, resultando em perdas financeiras significativas. Informações pessoais ou profissionais podem ser expostas, causando danos a sua reputação. Informações confidenciais, como dados de saúde ou informações sigilosas de empresas, podem ser comprometidas.

Para garantir a segurança das suas informações, é essencial seguir algumas boas práticas ao criar senhas. Utilize senhas com no mínimo doze caracteres! [vírgula sonora] Não use informações facilmente associáveis a você, como datas de nascimento, nomes de familiares ou sequências numéricas óbvias. [vírgula sonora] Nunca utilize a mesma senha em diferentes contas, pois, se a senha de uma conta for descoberta, todas as contas que utilizam a mesma senha estarão em risco. [vírgula sonora] Altere suas senhas periodicamente. Isso reduz a chance de um invasor ter acesso prolongado a uma conta caso consiga descobrir a senha. [vírgula sonora]

Para facilitar o gerenciamento de senhas complexas, considere utilizar ferramentas e técnicas específicas, como gerar e armazenar senhas complexas em determinados aplicativos seguros e específicos para esse propósito. Também é recomendável adicionar uma camada extra de segurança utilizando a autenticação de dois fatores. Utilize a autenticação biométrica sempre que possível, como a impressão digital ou o reconhecimento facial. Esses métodos são mais difíceis de ser comprometidos em comparação com senhas tradicionais.

Senhas fortes são a primeira linha de defesa contra invasões e roubos de dados. E, com certeza, o esforço de memorizar uma senha mais complexa será muito menor do que o de arcar com o prejuízo se algo der errado. Pense nisso e adote práticas seguras para a criação e o gerenciamento de senhas. A segurança das suas informações depende de você.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

Você percebeu como conceitos matemáticos relacionados à análise combinatória são interessantíssimos, além de muito úteis na busca de soluções para diversas situações do nosso dia a dia?

Quanto mais você dominar esses conhecimentos, mais fácil vai reconhecer maneiras de colocá-los em prática corretamente.

Portanto, aproveite para levar esse estudo adiante.

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Podcast 3 – Pesquisas, gráficos e dados estatísticos

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre temas da Estatística, como pesquisas, gráficos e dados estatísticos.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Você já está acostumado a interagir com pesquisas estatísticas, não é mesmo?

Afinal, elas estão presentes nas diversas mídias físicas ou digitais com as quais temos contato diariamente, como nas publicações em jornais impressos e *on-line*, nas reportagens exibidas na televisão e em serviços de *streaming*, nos portais de notícias e, também, nas postagens e mensagens que circulam em redes sociais.

Mas, afinal, como podemos avaliar a confiabilidade de gráficos e outros dados estatísticos?

Esse será o tema do nosso episódio de hoje.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

Você já estudou o significado de pesquisa estatística e quais são os principais passos para a elaboração de uma pesquisa desse tipo.

Por isso, sabe que a pesquisa sempre começa com alguma questão que precisa ser resolvida, uma pergunta que precisa ser respondida ou uma hipótese que precisa ser provada ou refutada. Aliás, refutar é um termo muito utilizado no ramo das pesquisas quando queremos contrariar uma hipótese.

Para realizar uma pesquisa estatística, determinam-se critérios como: Qual será a população ou amostra da pesquisa? Como essa pesquisa será realizada? Qual será o processo de coleta de dados? Quem é o público-alvo que vai ter acesso aos resultados? E como os dados coletados serão apresentados para melhor refletir os resultados encontrados? Também pode haver outros tópicos, dependendo do que a pesquisa quer investigar.

[VÍRGULA SONORA]

Compreender os mecanismos por trás do processo de realização de uma pesquisa estatística é importante não apenas para elaborar uma pesquisa, mas também para analisar e entender melhor os resultados de diversas pesquisas que nos são apresentadas em notícias, reportagens, *posts* ou mensagens, por exemplo.

Existem muitas entidades sérias que realizam pesquisas censitárias ou de opinião sobre temas extremamente relevantes e de utilidade pública, e é importante sabermos identificar quando essas informações estão apresentadas pela mídia de modo adequado e quando os títulos das notícias ou mesmo o modo de apresentar os gráficos são elaborados com o objetivo de distorcer as informações, criando narrativas falsas.

Por mais absurdo que possa parecer, infelizmente distorcer informações, resultados ou conclusões é uma prática bastante comum em nossa sociedade.

Por isso, entender a maneira correta de elaborar um gráfico, saber quais são os elementos obrigatórios, prestar atenção na fonte dos dados e verificar se a informação fornecida é verdadeira são práticas essenciais para não acreditarmos em informações falsas – as famosas *fake news* – nem disseminá-las.

[VINHETA DE TRANSIÇÃO]

Uma das maneiras de verificarmos se os dados de uma pesquisa estatística estão apresentados corretamente é procurarmos como eles foram dispostos na fonte citada.

Essa é uma tarefa que pode parecer pouco prática, [vírgula sonora] visto que exige de nós um esforço extra. Mas é preciso pensar que, quando estamos tratando de cidadania e de debates sociais importantes, todo cuidado e comprometimento com a verdade dos fatos é essencial.

Concorda?

Ei, e antes de finalizar, guarde com atenção esta dica: quando não há nenhuma fonte citada, sobram motivos para desconfiar da veracidade das informações.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

E você, já se deparou com alguma informação falsa na divulgação de pesquisas estatísticas?

Se sim, compartilhe com os colegas e o professor e conheça também as experiências que eles já tiveram. Ah, não deixe de descrever para eles em que tipo de mídia foi publicada a informação, como você descobriu que havia distorção dos dados e como se sentiu com isso.

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Manual do Professor

Matemática e suas Tecnologias

Matemática

Apresentação

Olá, professor!

Temos enorme prazer em compartilhar com você esta coleção de Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio! Esperamos que a coleção seja uma ferramenta potente e transformadora no trabalho que você vai realizar com os estudantes. Este Manual pode auxiliá-lo no planejamento e no desenvolvimento da sua prática pedagógica.

É importante relembrar que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) veio para apontar novos caminhos para a educação brasileira, propondo que todos os estudantes tenham acesso às mesmas aprendizagens e que elas sejam desenvolvidas integrando experiências pessoais e experiências sociais aos conhecimentos adquiridos tanto no espaço escolar quanto fora dele. Portanto, é importante que todo o seu trabalho esteja alicerçado na construção colaborativa de significados para variados contextos da vida cotidiana.

É fundamental destacar, também, as recentes transformações nessa etapa da Educação Básica. O Novo Ensino Médio estabelece um modelo de ensino e aprendizagem mais participativo e colaborativo. Assim, você poderá seguir por um caminho de mediador de experiências pautadas nos princípios da interdisciplinaridade e da integração, no qual cada estudante é protagonista das próprias aprendizagens.

A integração das áreas do conhecimento, dos componentes curriculares (as disciplinas) e dos campos de saber permite aos jovens do Ensino Médio ampliar a visão de mundo e, assim, elaborar argumentos mais consistentes para se posicionarem socialmente, com pensamento crítico e criatividade. É preciso praticar e promover a escuta ativa das ideias, opiniões e vivências dos estudantes, tão imersos em uma sociedade tecnológica e dinâmica – eles curtem e compartilham muito, mas precisam aprender a sustentar as próprias opiniões.

Além disso, este é um convite para que você colabore mais com os professores de outras áreas do conhecimento e eles, com você. Todo o corpo docente precisa trocar experiências e compartilhar saberes nesse novo modelo. É tempo de escutar, compartilhar, inspirar e criar juntos.

Como trilhar esses novos caminhos? Para encontrar mais segurança nesse percurso, convidamos você a seguir conosco neste Manual, para que, juntos, possamos construir essa etapa de ensino tão importante para a vida dos jovens, o Ensino Médio!

Abraços,

Os autores.

Sumário

Orientações gerais 324

1. O Novo Ensino Médio 324
1.1. Contexto legislativo 324
1.2. Principais mudanças 325

2. A BNCC e a educação integral 326
2.1. BNCC de Ensino Médio 327
2.1.1. Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias 328
2.1.2. A BNCC nesta coleção 328
2.2. Interdisciplinaridade e Temas Contemporâneos Transversais 329
2.3. Culturas juvenis e estudantes protagonistas das aprendizagens e dos próprios projetos de vida 330
2.4. Reflexões sobre o docente como mediador 331
2.5. Educação digital 332
2.6. Educação inclusiva 333
2.7. Argumentação (oral e escrita) e leitura inferencial 333
2.8. Pluralismo de ideias e produção de análises (críticas, criativas e propositivas) 334
2.9. Pensamento computacional 335
2.10. Resolução e elaboração de problemas 335
2.11. Investigação científica e raciocínios lógico-matemáticos 336
2.12. Etnomatemática 337
2.13. Uso pedagógico de tecnologias digitais 338

3. Avaliações 338
3.1. A avaliação em Matemática 339
3.1.1. Por que avaliar? 339
3.1.2. O que avaliar? 339
3.1.3. Como avaliar? 339
3.2. Os tipos de avaliação 339
3.2.1. Avaliação diagnóstica 339
3.2.2. Avaliação formativa 340
3.2.3. Avaliação comparativa 340
3.2.4. Avaliação ipsativa 340
3.2.5. Avaliação somativa 341
3.3. Trabalhando o Enem em sala de aula: estratégias para melhorar o desempenho dos estudantes 341

4. A coleção da área de Matemática e suas Tecnologias 341
4.1. Abordagem teórico-metodológica e pressupostos da coleção 341
4.2. Estrutura da coleção 342
4.2.1. Objetos educacionais digitais da coleção 343
4.3. Sugestão de cronograma 343

5. Referências complementares para aprofundamento 345
5.1. *Sites* 345
5.2. *Podcasts* e vídeos 345
5.3. Revistas e periódicos de Educação matemática 345
5.4. Publicações sobre História da Matemática 345
5.5. Publicações sobre Educação matemática 346
5.6. Publicações sobre metodologia do ensino de Matemática 346
5.7. Publicações sobre educação 346

Orientações específicas 347

Organização e conteúdos do Volume 347
Unidade 1: Geometria no plano cartesiano 348
Unidade 2: Educação financeira 351
Unidade 3: Análise combinatória e probabilidade 355
Unidade 4: Estatística 361
Unidade 5: Computação 366
Resoluções 370

Referências bibliográficas comentadas 398

Orientações gerais

1. O Novo Ensino Médio

Vivemos uma era de muitas transformações, um período em que as informações circulam muito rapidamente. Além disso, os estudantes que atualmente frequentam as escolas nasceram em um mundo conectado; logo, não dependem somente da escola e dos professores para obter novos conhecimentos; eles dispõem de recursos que lhes colocam as informações ao alcance das mãos com apenas alguns cliques. Há nas escolas uma geração de estudantes que aprendem, produzem, publicam e divulgam ideias próprias em várias plataformas e redes sociais. Todos esses novos padrões de comportamento exigem uma nova postura não somente dos professores, mas também das instituições escolares e dos materiais didáticos. A escola precisa estar preparada para esse novo estudante, que é ativo, ágil e protagonista.

A organização do ensino na Educação Básica fundamenta-se, atualmente, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que estabelece para todas as etapas – Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio – um conjunto consistente e articulado de aprendizagens essenciais. Assim, a BNCC permite superar a fragmentação das políticas educacionais, servindo de parâmetro para que tenhamos uma educação de qualidade em todas as escolas do país e em todas as etapas da Educação Básica, para todos os estudantes.

Outro ponto fundamental é a proposta do Novo Ensino Médio, instituído com a finalidade de acompanhar esses novos tempos. É essencial que a escola ajude os estudantes a selecionar, ponderar e agir com responsabilidade na sociedade em que vivemos, auxiliando-os na escolha dos próprios caminhos – tanto para aqueles que desejam seguir as trilhas acadêmicas, como o ingresso no Ensino Superior, quanto para aqueles que pretendem partir direto para o campo profissional, por meio de cursos técnicos e com a inserção no mercado de trabalho.

O Novo Ensino Médio foi oficializado com a promulgação da Lei nº 13.415, em 16 de fevereiro de 2017. Essa lei alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e estabeleceu uma série de mudanças na estrutura do Ensino Médio brasileiro. Em julho de 2024, foi sancionada a Política Nacional de Ensino Médio, estabelecendo outras novas modificações, como é o caso da mudança na carga horária, que passou para 3 000 horas, sendo 2 400 horas para o ensino dos componentes curriculares e 600 horas para os itinerários formativos.

O protagonismo juvenil é incentivado nos estudantes, principalmente pela escolha de alguns percursos formativos mais específicos – os itinerários formativos –, que visam orientá-los na construção do projeto de vida deles.

Home-stock/Adobe Stock

A intenção do Novo Ensino Médio é manter os jovens mais conectados ao futuro profissional e acadêmico que os espera, permitindo maior autonomia na construção do projeto de vida e de habilidades socioemocionais fundamentais no mundo contemporâneo.

1.1. Contexto legislativo

A determinação de uma formação básica comum alicerçada em conteúdos mínimos, conforme institui a BNCC, já havia sido vislumbrada na Constituição Federal de 1988 (artigo 210) e na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei nº 9.394/1996, artigo 9º, inciso IV). A LDB (Lei nº 9.394/1996, artigo 9º, inciso I) também previa a elaboração do Plano Nacional de Educação (PNE), estabelecendo com clareza e objetividade metas a serem atingidas – o PNE ainda está em tramitação no Congresso para o período de 2024 a 2034.

Os *sites* indicados a seguir podem ser consultados para mais informações (acesso em: 25 ago. 2024).

Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/1996).
Disponível em: https://tedit.net/g057tn.

Plano Nacional de Educação.
Disponível em: https://tedit.net/dkfgp7.

Constituição da República Federativa do Brasil de 1988.
Disponível em: https://tedit.net/qchy5g.

Esse ordenamento legal estabelece as regras a partir das quais o ensino deve ser organizado no Brasil, tanto em termos de princípios a serem seguidos quanto no que se refere às questões práticas do funcionamento das escolas e, ainda, às determinações curriculares.

No que se refere especificamente ao Ensino Médio, a Lei nº 13.415/2017, que cria o Novo Ensino Médio, alterou a LDB e outras leis e trouxe importantes mudanças. No artigo 35, a LDB estabelece que a etapa do Ensino Médio deve ter como objetivos:

I. a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II. a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III. o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV. a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. *Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional*. Constituição da República Federativa do Brasil de 1988. Brasília, DF: Presidência da República, 1996. Disponível em: https://tedit.net/ie2n21. Acesso em: 28 ago. 2024.

Analise no diagrama a seguir como se deu a evolução das propostas para o Ensino Médio.

Governo Federal/Ministério da Educação

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM), estava previsto que a implementação completa ocorresse até 2022. O governo lançou, em 2023, o projeto de Lei nº 5.230, que visava reformar o Novo Ensino Médio. O texto foi sancionado em agosto de 2024 pela Lei nº 14.945/2024.

1.2. Principais mudanças

A reforma do Novo Ensino Médio prevê que todas as escolas do país – públicas ou privadas – adotem mudanças, que vão desde a carga horária até a oferta dos componentes curriculares (as disciplinas) para a etapa final da Educação Básica. A aplicação de todas as mudanças deve ocorrer a partir de 2025, no caso de estudantes ingressantes no Ensino Médio, enquanto os que já estiverem com a etapa em curso terão um período de transição.

A essência do projeto do governo federal, que era ampliar a parcela de conteúdos da formação básica curricular, foi mantida nessa versão da Lei nº 14.945/2024. Assim os componentes curriculares tradicionais (como Língua Portuguesa, Língua Inglesa, Arte, Educação Física, Matemática, Biologia, Física, Química, Filosofia, Geografia, História e Sociologia) ficam contemplados com destaque, conforme delineado pela BNCC. E todos os componentes curriculares passam a ser obrigatórios em todos os anos do Ensino Médio; Língua Espanhola será opcional.

Pelo texto aprovado, a carga horária da formação geral básica nos 3 anos de Ensino Médio volta a ser de 2 400 horas, e outras 600 horas obrigatórias devem ser preenchidas com disciplinas dos itinerários formativos. A carga horária total será, então, de 3 000 horas, sendo 1 000 horas para cada ano, divididas em 200 dias letivos de 5 horas cada um.

Os itinerários formativos são um conjunto de disciplinas, projetos, oficinas, núcleos de estudo, entre outras situações de trabalho, que os estudantes podem escolher no Ensino Médio a fim de aprofundar os estudos de uma área do conhecimento (Matemática e suas Tecnologias, Linguagens e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias ou Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e da Formação Técnica e Profissional (FTP) ou mesmo nos conhecimentos de 2 ou mais áreas e da FTP. Cada escola deve ofertar pelo menos 2 itinerários formativos, com exceção das escolas que oferecem Ensino Técnico. As redes de ensino têm autonomia para definir quais itinerários formativos vão ofertar, considerando um processo que envolva a participação de toda a comunidade escolar.

Jose Calsina/Adobe Stock

No Novo Ensino Médio, o protagonismo juvenil é incentivado nos estudantes principalmente pelo estímulo e pela orientação para a construção de projeto de vida.

Outra opção de escolha para os estudantes é o Ensino Técnico, sendo previstas, nesse caso, 2100 horas para os componentes curriculares obrigatórios, com 300 horas podendo ser destinadas a conteúdos da BNCC relacionados à formação técnica, e até 1200 horas para o Ensino Técnico (itinerários formativos técnicos).

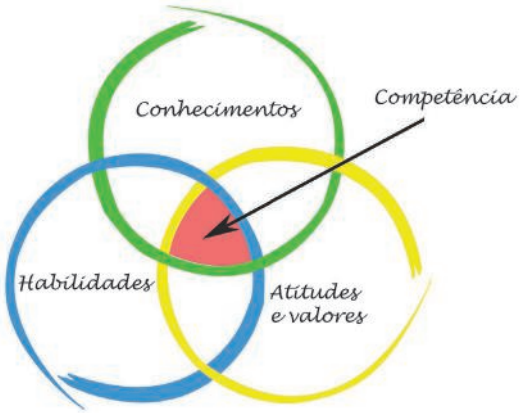
O texto da Lei estabelece que a carga horária da formação geral básica dos estudantes deve ser oferecida presencialmente. Porém, há uma proposta de ensino à distância e outra de ensino noturno, estipulada no texto, que obriga os estados a manterem, em todas as cidades, ao menos uma escola da rede pública com Ensino Médio no período noturno, se houver demanda comprovada para isso.

2. A BNCC e a educação integral

A BNCC estabelece o que cada estudante precisa aprender em cada etapa da Educação Básica, ano a ano ou a cada bloco de anos, estipulando, assim, um patamar de qualidade na educação em todo o país. A intenção é proporcionar um alinhamento de todo o sistema educacional em torno de um texto curricular de base capaz de gerar ações coordenadas para a formação e a capacitação dos professores, a troca de experiências bem-sucedidas entre docentes, escolas e redes, a produção de materiais didáticos e a elaboração de avaliações padronizadas que meçam os avanços educacionais.

Pretendendo promover uma educação de qualidade com equidade, a BNCC foi construída a partir de critérios em torno de competências e habilidades de que os estudantes necessitam para o pleno desenvolvimento na sociedade do século XXI.

A educação por competências preconiza a visão integrada do conhecimento, em que se combinam conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para o desenvolvimento integral do estudante no processo de ensino e de aprendizagem: o conhecimento ("saber") precisa estar vinculado às habilidades ("saber fazer"), às atitudes e aos valores ("saber ser").



Dmitry/Adobe Stock

A BNCC define competências como:

> [...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 2018a, p. 8).

Portanto, o desenvolvimento de uma competência possibilita ao estudante mobilizar múltiplos recursos pessoais (conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, emoções, entre outros) para obter respostas satisfatórias a diferentes problemas.

E qual é a diferença entre as competências e as habilidades apresentadas na BNCC? De maneira simples, consideramos que a Educação Básica deve assegurar o desenvolvimento de competências gerais, que transpassam as áreas do conhecimento e confluem para a formação cidadã. Para que isso aconteça, cada área do conhecimento contribui com competências específicas, relacionadas à aplicação de cada área na resolução de problemas da vida cotidiana e na compreensão e atuação no mundo. Essas competências específicas podem ser desenvolvidas por meio do trabalho com as habilidades (sempre iniciadas com um verbo que indica a ação do estudante na aprendizagem) que estão diretamente relacionadas aos objetos do conhecimento considerados essenciais na construção do aprendizado.

Desse modo, as competências específicas e as habilidades, de maneira integrada entre as áreas do conhecimento e com os Temas Contemporâneos Transversais, contribuem para o desenvolvimento das competências gerais, que visam à formação integral dos estudantes.

2.1. BNCC de Ensino Médio

A BNCC – Etapa Ensino Médio é parte integrante da BNCC e apresenta um conjunto de orientações que deve nortear os currículos das escolas públicas e das escolas privadas de Ensino Médio de todo o Brasil. O documento tem como pretensão promover a elevação da qualidade do ensino no país, por meio de uma referência comum obrigatória para todas as escolas de Educação Básica, respeitando a autonomia assegurada pela Constituição aos entes federados e às escolas.

O texto legal enfatiza os principais objetivos para o Ensino Médio.

> Garantir a **consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos** no Ensino Fundamental é essencial nessa etapa final da Educação Básica. Além de possibilitar o prosseguimento dos estudos a todos aqueles que assim o desejarem, o Ensino Médio deve atender às necessidades de formação geral indispensáveis ao exercício da cidadania e construir "aprendizagens sintonizadas com as **necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes** e, também, com os **desafios da sociedade contemporânea**", como definido na Introdução desta BNCC (p. 14; ênfases adicionadas) (Brasil, 2018a, p. 464-465).

Para que essa finalidade seja alcançada, a BNCC ressalta que é preciso que a escola acolha as juventudes. Faz parte desse acolhimento à diversidade:

> [...] favorecer a atribuição de sentido às aprendizagens, por sua vinculação aos desafios da realidade e pela explicitação dos contextos de produção e circulação dos conhecimentos. (Brasil, 2018a, p. 465).

E para que se possa construir conhecimentos relevantes de maneira sólida, é fundamental considerar a contextualização dos objetos do conhecimento, com respeito às realidades e à história de produção deles.

Além das 10 competências gerais da Educação Básica, a BNCC – Etapa Ensino Médio está organizada por áreas do conhecimento, com a finalidade de integrar 2 ou mais componentes curriculares (disciplinas), de modo a permitir aos estudantes melhor compreender e transformar uma realidade complexa.

> Cada área do conhecimento estabelece competências específicas de área, cujo desenvolvimento deve ser promovido ao longo dessa etapa, tanto no âmbito da BNCC como dos itinerários formativos das diferentes áreas. Essas competências explicitam como as competências gerais da Educação Básica se expressam nas áreas. Elas estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes do Ensino Médio (Brasil, 2018a, p. 33).

Assim, as áreas do conhecimento e os respectivos componentes curriculares destacados são:

- Linguagens e suas Tecnologias: Arte, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa;
- Matemática e suas Tecnologias: Matemática;
- Ciências da Natureza: Biologia, Física e Química;
- Ciências Humanas e Sociais Aplicadas: História, Geografia, Sociologia e Filosofia.

É interessante ressaltar que:

> [...] essa estrutura adota a **flexibilidade** como princípio de **organização curricular**, o que permite a construção de currículos e propostas pedagógicas que atendam mais adequadamente às especificidades locais e à multiplicidade de interesses dos estudantes, estimulando o exercício do **protagonismo juvenil** e fortalecendo o desenvolvimento de seus projetos de vida (Brasil, 2018a, p. 468).

Assim, a organização do trabalho em sala de aula, pela combinação da perspectiva da competência específica com o ponto de vista da habilidade, é fator primordial para que os estudantes consigam desenvolver os objetivos de aprendizagem esperados.

A partir dessa normativa válida para todo o Brasil, cada estado pode construir o próprio documento curricular. Em diálogo com as redes de ensino públicas e as redes de ensino privadas, os currículos estaduais visam contemplar aspectos das demandas e especificidades sociais, econômicas, regionais, culturais e históricas das próprias regiões.

Assim, é oportuno e recomendável considerar adaptações dos materiais didáticos ao planejamento pedagógico, considerando sua autonomia como professor, bem como o currículo estadual instituído, o Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola e as necessidades e vontades específicas dos estudantes.

Mais sobre o assunto

O material *Dimensões e Desenvolvimento das Competências Gerais da BNCC* foi elaborado pelo Movimento pela Base, grupo não governamental e apartidário de pessoas, organizações e entidades que se empenham na implementação da BNCC e do Novo Ensino Médio. Recomendamos a leitura desse material, que apresenta a descrição de cada uma das competências gerais, bem como das dimensões e das subdimensões delas. Disponível em: https://tedit.net/b6nai8. Acesso em: 24 ago. 2020.

2.1.1. Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias

A área de Matemática e suas Tecnologias na BNCC – Etapa Ensino Médio tem por objetivo contribuir para que os estudantes adquiram um entendimento de como a Matemática, como área do conhecimento e como componente curricular, se aplica nas situações cotidianas – tanto isoladamente quanto interligada a outras áreas do conhecimento e a outros componentes curriculares. Para isso, a proposta é que eles ampliem e consolidem os conhecimentos trabalhados nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

São apresentadas 5 competências específicas.

Ilustrações: GIGISTOCK/Shutterstock

A **competência específica 1** (**CEMAT01**) apresenta a Matemática como uma área do conhecimento que favorece a compreensão de elementos e acontecimentos em variados contextos. De modo simples, podemos dizer que utilizamos conhecimentos, estratégias, procedimentos e ferramentas matemáticas para auxiliar na interpretação de contextos que a vida cotidiana apresenta. É a aplicação dos conceitos de Matemática.

A **competência específica 2** (**CEMAT02**) trata primordialmente do envolvimento dos estudantes na proposição de soluções para problemas sociais. Essa competência se relaciona ao entendimento do estudante como membro da sociedade, seja atuando na comunidade escolar, seja em uma atuação mais abrangente. Ela também se relaciona com o projeto de vida nos âmbitos pessoal, social e profissional.

A **competência específica 3** (**CEMAT03**) está vinculada de modo primordial à resolução e à elaboração de problemas. Essa competência e as habilidades associadas a ela deixam claro que conhecimentos, conceitos e procedimentos matemáticos ganham significado ao serem aplicados em situações reais, na resolução de problemas que façam sentido para os estudantes. Também é por meio dessa competência que se relaciona a modelagem matemática, com a qual é possível fazer diferentes representações matemáticas de uma situação e utilizar procedimentos, abstração e generalização com o propósito de construir e resolver situações similares.

A **competência específica 4** (**CEMAT04**) explora os diferentes tipos de registro de representação matemática (registro algébrico, geométrico, estatístico, computacional, entre outros). Por meio dessa exploração, os estudantes adquirem a capacidade de transitar entre esses tipos de registro e, mais do que isso, escolhem qual ou quais deles são mais pertinentes para representar e resolver cada situação ou problema.

Por fim, a **competência específica 5** (**CEMAT05**) tem como objetivo principal que os estudantes investiguem matematicamente, bem como formulem hipóteses e busquem validá-las, utilizando raciocínios lógicos ou deduções obtidas por meio dessas investigações.

Cabe notar que:

> [...] para assegurar o desenvolvimento das competências específicas de área, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas no âmbito da BNCC a todos os estudantes do Ensino Médio. Elas são descritas de acordo com a mesma estrutura adotada no Ensino Fundamental (Brasil, 2018a, p. 33).

Para a etapa do Ensino Médio, a BNCC não indica o trabalho por seriação e não é apresentada a organização das habilidades referentes aos conteúdos em quadros dispostos para cada ano de estudo, como ocorre para o Ensino Fundamental (Anos Iniciais e Anos Finais). As habilidades de Matemática e suas Tecnologias do Ensino Médio estão agrupadas subordinadas às 5 competências específicas, de modo que possam ser trabalhadas em diferentes momentos ao longo dos 3 anos da etapa. Isso contribui para que competências específicas e habilidades possam ser investigadas e reinvestigadas em diferentes momentos, em uma retomada em espiral, sempre que o contexto favorecer essa estrutura.

Mais sobre o assunto

Qual é a diferença entre compreensão e conhecimento? Como é possível verificar se os estudantes estão alcançando os objetivos que permeiam o ensino? Questionamentos como esses e outros mais são abordados no livro *Planejamento para a compreensão*, de Grant Wiggins e Jay McTighe (Porto Alegre: Penso, 2019), de modo combinado com sugestões de estratégias para planejar ações com os estudantes, incentivando-os durante o processo de ensino e aprendizagem.

2.1.2. A BNCC nesta coleção

Esta coleção apresenta conteúdos e modelos didáticos atualizados com os conhecimentos científicos e com as normativas legais da área de educação. Portanto, a abordagem teórico-metodológica, amparada pelo modelo

de ensino proposto pela BNCC, considera a prática de ensino por competências (gerais e específicas das áreas do conhecimento), vinculadas às habilidades de cada área do conhecimento, às atitudes e aos valores, ou seja, levando em conta o desenvolvimento do "saber", do "saber fazer" e do "saber ser".

Para contribuir com a compreensão do modo como competências e habilidades se diferenciam e, ao mesmo tempo, encadeiam-se em diferentes graus de complexidade e de amplitude no decorrer do estudo, apresentamos um exemplo.

Uma das competências gerais da BNCC, que é favorecida com o trabalho proposto no capítulo **2** da Unidade **4** do Volume **1**, é a competência geral **CG02**.

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Essa competência geral permeia diferentes momentos da Unidade citada, nos quais os estudantes pensam nos problemas que lhes são apresentados e mobilizam conhecimentos matemáticos para investigar e desenvolver soluções criativas para solucioná-los. Em toda essa Unidade, as propostas pedagógicas envolvendo esses procedimentos da **CG02** desenvolvem o encadeamento em conjunto com a competência específica **CEMAT03** de Matemática e suas Tecnologias:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Nessa Unidade, os estudantes utilizam conceitos e definições para compreender as características das funções logarítmicas e representá-las graficamente, e aplicam conceitos e procedimentos para identificar a lei de funções logarítmicas que representam situações em diferentes contextos. Em especial, essa competência específica é vinculada, no capítulo **2**, à habilidade **EM13MAT305**:

> Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

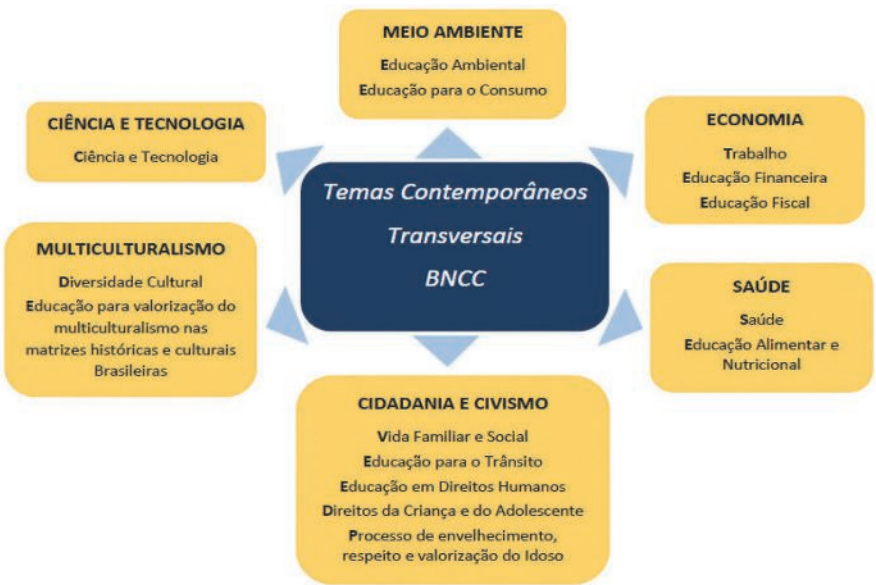
Isso ocorre pois, no referido capítulo, os estudantes exploram o comportamento das funções logarítmicas em problemas que envolvem contextos reais. Também nesse capítulo, para o estudo da poluição sonora, há a proposta de um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

2.2. Interdisciplinaridade e Temas Contemporâneos Transversais

Devemos considerar que os jovens do Ensino Médio estão sendo preparados para o enfrentamento dos desafios do século XXI e para a vida adulta em que poderão vir a exercer profissões, muitas das quais talvez ainda nem existam. Portanto, os desafios com os quais terão de lidar também estão em constante mudança e transformação.

Posteriormente à homologação da BNCC, outros documentos foram elaborados pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) para esclarecer a inserção de temas contemporâneos no ambiente escolar, passando a compor os chamados Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), organizados em 6 macrotemas.

Todos os temas são pautados na legislação brasileira vigente e contemplados em diferentes habilidades dos componentes curriculares, conforme prevê a BNCC, cabendo aos sistemas de ensino e às escolas tratá-los de modo contextualizado, de acordo com as especificidades. Na BNCC, os temas contemporâneos



Disponível em: https://tedit.net/naikz9. Acesso em: 1 set. 2024.

Governo Federal/Ministério da Educação

são indicados como temas "[...] que afetam a vida humana em escala local, regional e global" (Brasil, 2018a, p. 19). Por isso, devem ser abordados, preferencialmente, de maneira transversal e integradora, o que pode ser verificado em diversas propostas feitas nesta coleção.

Esses TCTs abrangem vários conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, e, portanto, favorecem o trabalho alicerçado na educação por competências. Se for considerada a articulação por áreas do conhecimento, a fim de que a interdisciplinaridade possa ser concretizada de modo contextualizado, os TCTs constituem uma oportunidade potente para esse trabalho.

Sendo assim, as competências específicas e as habilidades, de maneira integrada entre as áreas do conhecimento e com os TCTs, contribuem para o desenvolvimento das competências gerais, que visam à formação integral dos estudantes. Percebe-se que a interdisciplinaridade é apontada como uma maneira privilegiada de promover o desenvolvimento de competências visando à compreensão e à atuação no mundo. Na interdisciplinaridade escolar, as noções, finalidades, habilidades e técnicas visam favorecer, sobretudo, o processo de aprendizagem, respeitando os saberes dos estudantes e a integração entre eles (Fazenda, 2008, p. 21). É importante destacar que a realidade não é disciplinar; ela é complexa, relacional, múltipla e rica, bem como o são os saberes e desafios que os estudantes enfrentam e enfrentarão dentro e fora da escola.

2.3. Culturas juvenis e estudantes protagonistas das aprendizagens e dos próprios projetos de vida

Conforme já mencionado, a etapa do Ensino Médio tem por foco a proposição e a organização dos componentes curriculares e, também, de itinerários formativos. Para isso, os sistemas de ensino e as escolas devem construir os próprios currículos e propostas pedagógicas, considerando as características da região, as culturas locais, as necessidades de formação e as demandas e aspirações dos estudantes.

> Os itinerários formativos - estratégicos para a flexibilização da organização curricular do Ensino Médio, pois possibilitam opções de escolha aos estudantes - podem ser estruturados com foco em uma área do conhecimento, na formação técnica e profissional ou, também, na mobilização de competências e habilidades de diferentes áreas, compondo itinerários integrados [...] Assim, a oferta de diferentes itinerários formativos pelas escolas deve considerar a realidade local, os anseios da comunidade escolar e os recursos físicos, materiais e humanos das redes e instituições escolares de forma a propiciar aos estudantes possibilidades efetivas para construir e desenvolver seus projetos de vida e se integrar de forma consciente e autônoma na vida cidadã e no mundo do trabalho. (Brasil, 2018a, p. 477-478).

Qualquer que seja a opção feita, é preciso:

> [...] romper com a centralidade das disciplinas nos currículos e substituí-las por aspectos mais globalizadores e que abranjam a complexidade das relações existentes entre os ramos da ciência no mundo real. Para tanto, podem ser criadas situações de trabalho mais colaborativas, que se organizem com base nos interesses dos estudantes e favoreçam seu protagonismo. Algumas das possibilidades de articulação entre as áreas do conhecimento são: laboratórios, oficinas, clubes, observatórios, incubadoras, núcleos de estudos e núcleos de educação artística (Brasil, 2013, p. 183).

Considerando a necessidade de assumir o protagonismo de sua formação, o estudante é e deve ser o centro de todo o processo educacional, o autor da própria aprendizagem. Objetivando esse protagonismo, sugerimos a proposição constante de metodologias ativas – conforme explicitaremos mais detalhadamente a seguir –, de modo que cada estudante, tendo um papel ativo no processo, possa aprender mais e de maneira mais significativa.

DragonImages/Adobe Stock

Espera-se que o estudante possa construir autonomia em seu processo de aprendizagem, sendo também o protagonista de seu percurso formativo, de maneira que, aprendendo a aprender, possa continuar o processo mesmo depois de ter concluído a Educação Básica.

A BNCC traz um leque mais amplo de competências gerais, que devem ser foco em todas as etapas da Educação Básica e orientar o trabalho pedagógico em todos os componentes curriculares. É o caso, por exemplo, das competências gerais **CG03**, **CG04**, **CG05** e **CG06**, apresentadas a seguir.

> **3.** Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

> **4.** Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

Esse conjunto de competências, como as demais que constam na BNCC, aponta para uma percepção realista acerca das necessidades da juventude atual. Portanto, devem-se levar em conta as expectativas desses jovens e trabalhar com os temas curriculares a partir das realidades que eles vivenciam.

Nesse sentido, importa ressaltar que a juventude não é igual em toda parte; há uma variedade de culturas juvenis que coexistem nas escolas brasileiras. Assim, em sala de aula, é preciso levar em conta a pluralidade de perfis dos estudantes, o que implica considerar múltiplas dimensões: realidades socioeconômicas; personalidades; diferentes interesses; desníveis de aprendizagem e de desenvolvimento psicológico e cognitivo; entre outros.

Contribuir para a construção do projeto de vida desses jovens, como uma das atribuições da escola, implica articular os componentes curriculares, os conhecimentos específicos e as habilidades de cada área com atitudes de respeito ao outro e que combatam comportamentos capacitistas, posturas racistas, o *bullying*, etc.

2.4. Reflexões sobre o docente como mediador

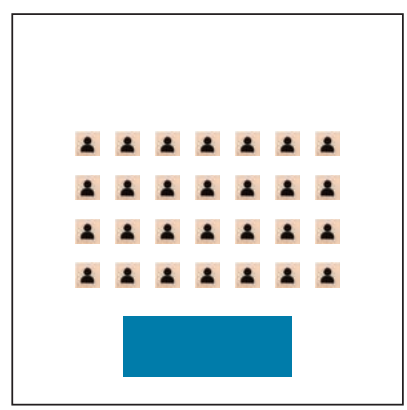
A adoção da prática educacional considerando as metodologias ativas nos leva a repensar a concepção de educação escolar, o papel do professor e a organização dos espaços pedagógicos. Nessa nova perspectiva, cabe a você, professor, a função de organizador, mediador, orientador e promotor da aprendizagem. Isso porque, assumindo que cada estudante deve ser protagonista da própria aprendizagem, ao professor cabe a responsabilidade de planejar, analisar, promover e acompanhar esses percursos. Os professores deixam de ser transmissores do conhecimento para se tornarem promotores e mediadores do conhecimento. Isso não significa que o papel do professor perde importância. Pelo contrário, é preciso que o corpo docente siga atento à pluralidade cultural e às mudanças constantes em nossa sociedade para ser capaz de se manter em diálogo com os estudantes.

De acordo com Demo (2001), existem algumas características e práticas que podem favorecer a formação e a atuação dos professores nessa nova perspectiva. É imprescindível que o professor se dedique à pesquisa, tenha atitude autoral, considere teoria e prática conjuntamente, mantenha-se atualizado constantemente, inclua diferentes recursos tecnológicos em sua prática, imponha abordagem interdisciplinar aos temas trabalhados e tenha como foco a aprendizagem dos estudantes.

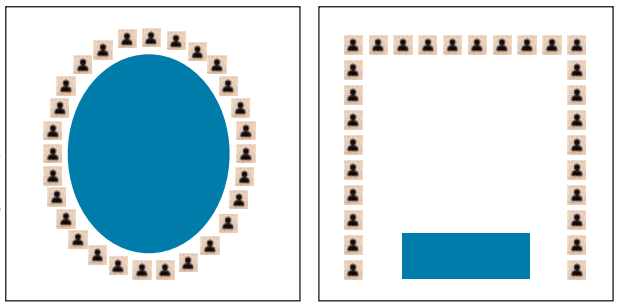
Paralelamente, deve considerar que o aprendizado ocorre de maneira dialógica, ou seja, o professor deixa de ser o detentor do conhecimento para assumir o papel de investigador e aprendiz em conjunto com os estudantes. Passa, então, a olhar para o grupo com o intuito de identificar as particularidades, potencialidades e necessidades de cada estudante, sendo essa a razão de ser da atividade docente.

As metodologias ativas são um meio de alcançar esses objetivos. Elas são um conjunto de estratégias de ensino que têm o objetivo de conduzir o estudante à ação para que ele aprenda de maneira participativa e autônoma. Existem várias estratégias para trabalhar com metodologias ativas, e cabe ao professor perceber quais delas são as mais interessantes e adequadas e quais promovem maior engajamento e atuação de cada turma em cada momento, considerando os objetivos traçados. Existem diversas opções interessantes, como a aprendizagem baseada em problemas, a aprendizagem em equipe, a sala de aula invertida e a rotação por estações.

Além disso, para que esse deslocamento de perspectiva na sala de aula seja possível, é importante considerar a variedade de possibilidades estratégicas didáticas. É interessante, portanto, combinar a disposição dos estudantes na sala de aula com as propostas pedagógicas, dependendo do objetivo de cada proposta.

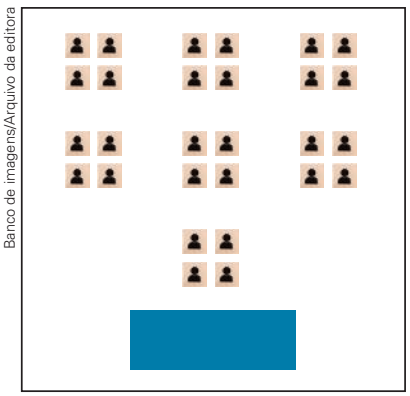

Banco de imagens/Arquivo da editora

A sala de aula que conhecemos como tradicional, com as carteiras enfileiradas, favorece o trabalho individual, especialmente para atividades relacionadas à reflexão. Mas esta é apenas uma – e não a única – possibilidade.



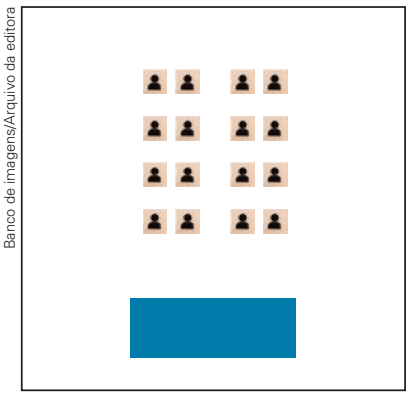
Banco de imagens/Arquivo da editora

Para uma atividade cujo objetivo seja o debate coletivo, a troca de experiências e saberes, bem como a contribuição de cada estudante para com o grupo, a organização das carteiras ao redor do professor ou em U pode ser uma boa opção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

No caso de uma atividade que demande a construção coletiva do significado de um conceito ou a sistematização de uma ideia, pode ser interessante que a turma esteja organizada em grupos de 4 ou 5 estudantes.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A organização em duplas tende a ser uma boa opção, por exemplo, para a resolução de problemas e a realização de atividades, pois a aprendizagem aos pares pode favorecer a troca de saberes.

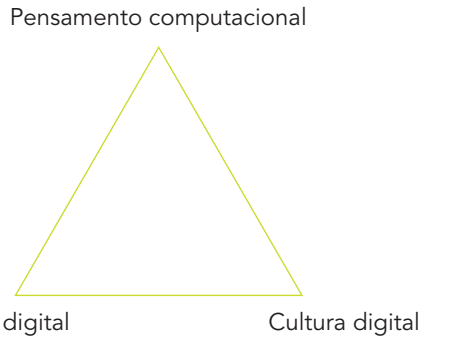
Vale destacar que, para as diferentes configurações, é preciso planejar com antecedência os grupos de trabalho, considerando as necessidades e, também, a diversidade de aspectos étnicos e culturais, bem como as diferentes maneiras de aprender e de se relacionar dos estudantes. A diversidade humana, que naturalmente existe dentro da sala de aula, passa a ser considerada valiosa, pois amplia e enriquece as práticas educacionais.

Mais sobre o assunto

Para conhecer mais sobre a concepção de metodologias ativas, diferentes tipos de metodologia e sugestões de abordagem em sala de aula, indicamos a leitura do livro *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática*, organizado por Lilian Bacich e José Moran (Porto Alegre: Penso, 2018).

2.5. Educação digital

A educação digital é, atualmente, uma necessidade nos mais variados espaços sociais. Diante dessa evidência, o Conselho Nacional de Educação estabeleceu, em 2019, as Normas sobre Computação na Educação Básica – Complemento à BNCC, também conhecida como a BNCC da Computação. Essa normativa foi proposta como um complemento da BNCC que trata do ensino da Computação, um guia que traz habilidades obrigatórias para todas as etapas da Educação Básica. Os conteúdos tratados nesse guia estão divididos em 3 eixos: Pensamento computacional, Mundo digital e Cultura digital.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O eixo de pensamento computacional aborda o raciocínio lógico, considerando a construção de soluções para diversos problemas, com habilidades como descrição de processos, organização e sistematização de informações. O eixo mundo digital trata de habilidades relacionadas ao universo virtual, como funcionamento técnico da internet, das redes e da computação em nuvem. Já o eixo de cultura digital refere-se às discussões políticas, éticas e sociais que envolvem o uso das tecnologias no mundo contemporâneo.

Em 2023, foi promulgada a Lei nº 14.533, que instituiu a Política Nacional de Educação Digital com a finalidade de "potencializar os padrões e incrementar os resultados das políticas públicas relacionadas ao acesso da população brasileira a recursos, ferramentas e práticas digitais, com prioridade para as populações mais vulneráveis". Entre os objetivos, está favorecer o "desenvolvimento de competências dos alunos da Educação Básica para atuação responsável na sociedade conectada e nos ambientes digitais, conforme as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular".

Mais sobre o assunto

O Instituto Ayrton Senna disponibiliza em seu *site* um rico material sobre o assunto: *Educação integral por meio do pensamento computacional – Letramento em programação: relatos de experiências e artigos científicos*, organizado por Amilton Rodrigo de Quadros Martins e Adelmo Antonio da Silva Eloy (1. ed. Curitiba: Appris, 2019). Organizado em seções e capítulos, apresenta artigos sobre tecnologias, programação e ensino de computação e de pensamento computacional na Educação Básica, além de relatos de experiências envolvendo esses e outros temas. Disponível em: https://tedit.net/5nf57z. Acesso em: 8 set. 2024.

2.6. Educação inclusiva

Para incluir estudantes com deficiência, o professor deve favorecer a interação e o respeito à diversidade em sala de aula. A seguir, apresentamos algumas orientações que podem contribuir em sua prática pedagógica.

- Conheça os estudantes, para que cada um seja assistido de modo adequado. Sugerimos uma conversa com eles e as respectivas famílias ou responsáveis, assim é possível compreender o contexto em que esses estudantes estão inseridos e entender as potencialidades e dificuldades desse cenário.
- Pergunte a cada estudante com deficiência qual é a melhor maneira de auxiliá-lo, ao perceber uma dificuldade.
- Caso a família ou responsável faça a entrega de algum documento ou relatório médico, é importante a análise das orientações sobre as adaptações necessárias para o estudante na escola.
- Sempre que possível, planeje as aulas e atividades considerando a acessibilidade, inclusive dos materiais didáticos, o que favorece a inclusão de todos. Por exemplo, ao passar um vídeo em aula, verifique se a resolução e o áudio estão adequados; em alguns casos, é necessário ativar a legenda dos vídeos e apresentá-lo em Libras.
- Valorize as potencialidades dos estudantes e incentive a todos a participar de maneira ativa em sala de aula.
- Seja objetivo ao falar e certifique-se de que cada estudante compreendeu a informação. Incentive-os a participar ativamente do próprio processo de ensino e aprendizagem e pergunte as dificuldades e quais recursos podem ajudá-los.
- Esteja atento a possíveis momentos de preconceito ou *bullying* em sala de aula e na escola, e não permita qualquer ação capacitista ou prática que diminua as potencialidades do estudante com deficiência.
- Estude e se aprofunde sobre os vieses inconscientes do capacitismo – uma opção para isso é buscar a orientação pedagógica da escola, na pessoa de um orientador ou psicólogo.
- Busque conhecer métodos de inclusão e educação especial, mantendo-se sempre atualizado sobre novas metodologias e tecnologias assistivas.

Cabe ressaltar que essas orientações estão articuladas com a Lei nº 13.146/2015, ou Estatuto da Pessoa com Deficiência. Essa legislação é essencial para garantir os direitos das pessoas com deficiência no Brasil. Essa Lei tem como foco ampliar o acesso à educação, ao trabalho, à saúde e à cultura, reforçando o respeito à dignidade e à autonomia das pessoas com deficiência, para que, assim, possamos construir uma sociedade mais justa e com equidade de oportunidades.

Mais sobre o assunto

Para aprimorar ainda mais a prática pedagógica, sugerimos a leitura de algumas dicas valiosas para o tratamento de pessoas com deficiência, seja no dia a dia em sala de aula, seja fora da escola.

ENAP. *Dicas de Atendimento ao Público com Deficiência. Programa de inclusão de pessoas com deficiência*. Disponível em: https://tedit.net/pfjwsz. Acesso em: 8 set. 2024.

Também sugerimos a leitura do artigo indicado a seguir, que visa diferenciar acesso, acessibilidade e inclusão, e apresentar as diferenças epistemológicas, pedagógicas e políticas dessas categorias, que são estruturantes da educação especial na perspectiva da educação inclusiva, projetando a escola como um ecossistema inclusivo.

FREITAS, Marcos Cezar de. Educação inclusiva: diferenças entre acesso, acessibilidade e inclusão. Universidade Federal de São Paulo (Unifesp), Guarulhos. *Scielo Brasil*, 3 jul. 2023. Disponível em: https://tedit.net/d14dnk. Acesso em: 8 set. 2024.

Sugerimos, ainda, a leitura do livro de Mariana Rosa e Karla Garcia Luiz sobre como educar crianças anticapacitistas.

ROSA, Mariana; LUIZ, Karla Garcia. *Como educar crianças anticapacitistas*. Florianópolis, 2023. Disponível em: https://tedit.net/d021mt. Acesso em: 9 set. 2024.

2.7. Argumentação (oral e escrita) e leitura inferencial

No Ensino Médio, intensifica-se o foco da aprendizagem para a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes, que diferem pelas variadas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros.

Diante dessas considerações, a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos

> conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. (Brasil, 2018a, p. 528-529).

Nesse sentido, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas, mobilizando o modo próprio de raciocinar, representar, argumentar e comunicar.

Já no caso das competências diretamente associadas ao ato de representar, a elaboração de registros para evocar um objeto matemático é uma ferramenta potente, pois, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação dos resultados de uma atividade ou de um raciocínio. Em continuidade, a competência de comunicar ganha importância no processo de apresentar e justificar resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. A argumentação e o desenvolvimento dessa competência pressupõem a formulação de conjecturas, bem como a etapa de testá-las e comprová-las, com a apresentação de justificativas, em conjunto com as competências mencionadas anteriormente.

Rawpixel.com/Shutterstock

As atividades de debate, escuta e validação conjuntas proporcionam aos estudantes o aprendizado de conceitos e o desenvolvimento de representações e procedimentos cada vez mais sofisticados e precisos.

No Ensino Médio, torna-se progressivamente mais importante o trabalho em torno do raciocínio dedutivo, ou seja, partir de ao menos uma premissa e chegar a uma conclusão. Nesse sentido, cabe destacar que o trabalho em torno da capacidade de diversificar as formas de raciocínio fica potencializado quando são propostas atividades pedagógicas em que os estudantes podem interagir entre si e, em especial, oralmente. Além disso, a possibilidade de expressar adequadamente um raciocínio por escrito não pode deixar de lado a habilidade correlata de comunicar oralmente esse mesmo raciocínio. Longe de ser algo automático, é preciso aprender e exercitar em sala de aula todas essas possibilidades.

2.8. Pluralismo de ideias e produção de análises (críticas, criativas e propositivas)

Os jovens vivenciam de muitas maneiras a participação na sociedade, inclusive no espaço escolar, em que fortalecem o estreitamento das relações pessoais com o grupo mais próximo, formando, com a participação nesse grupo, uma categoria socialmente produzida. Cada uma dessas categorias particulares adota uma maneira própria de expressar ou reinterpretar as culturas em que estão socialmente inseridas, caracterizando uma cultura juvenil.

Para que possam se desenvolver plenamente e atuar na sociedade, é importante que os estudantes desenvolvam o pensamento crítico e criativo, bem como atitudes propositivas e de respeito ao pluralismo de ideias.

A análise crítica é uma habilidade essencial no mundo contemporâneo. Trata-se de um processo de avaliação cuidadoso e objetivo de informações, ideias ou pontos de vista, o que envolve questionar, examinar e refletir sobre as informações apresentadas.

A atitude propositiva incentiva o indivíduo a buscar soluções e a adotar uma postura construtiva diante das questões. Uma pessoa propositiva concentra-se na elaboração de ideias que representam ganhos para o coletivo e na proposição de soluções e respostas para possíveis dúvidas e problemas. Além disso, é capaz de antecipar obstáculos ou desafios, prever necessidades e propor soluções.

Por sua vez, uma postura criativa diante dos acontecimentos contribui para a participação crítica e cidadã. Nesse sentido, é preciso inspirar os estudantes a pensar em projetos que vão além das fronteiras da sala de aula, envolvendo-os em projetos de pesquisa, atividades sociais e iniciativas comunitárias.

Ao promover, dentro da escola, atitudes e comportamentos de respeito e acolhimento, considerando o pluralismo de ideias e a diversidade inerente à humanidade, podemos contribuir para a cultura de paz, que pode ser entendida como um conjunto de valores, atitudes e comportamentos fundamentais para o respeito à vida, aos direitos humanos e à garantia de liberdades fundamentais do ser humano. É preciso auxiliar os estudantes a compreender que o pluralismo de ideias é algo positivo, e não motivo para violência. O diálogo nutre-se de humildade, confiança e respeito, contribuindo para a compreensão de que é possível viver as diferenças se reconhecermos o direito do outro a ter os próprios pontos de vista.

Mais sobre o assunto

A obra *Práticas educativas e Cultura de Paz: articulando saberes e fazeres*, organizada por Eliana Maria do Sacramento Soares e Lezilda Maria Teixeira (Caxias do Sul, RS: Educs, 2018), é um manual de orientação para professores, com práticas relacionadas à Cultura de Paz. O segundo capítulo destaca práticas na Educação Básica. Disponível em: https://tedit.net/rurj0q. Acesso em: 8 set. 2024.

2.9. Pensamento computacional

O pensamento computacional vem sendo considerado, por alguns autores, tão importante no mundo contemporâneo quanto o desenvolvimento de linguagens, como a língua materna e a Matemática. A origem dessa expressão tem relação com um artigo publicado pela cientista da computação e pesquisadora estadunidense Jeannette Wing (1956-) e com reflexões da psicologia cognitiva, que envolve processos de pensamento que se desenvolvem quando se usam fundamentos da computação.

O conceito de pensamento computacional não se limita aos estudos e aos profissionais da Ciência da Computação, à programação ou ao uso de computadores nem às habilidades de um dos eixos da BNCC da Computação, mas está relacionado às habilidades e aos raciocínios inerentes a eles, que são importantes para todos. Esse conceito envolve resolução de problemas, pensamento recursivo, abstração, algoritmos, fluxogramas, decomposição, análise de erros, planejamento e replanejamento, assim como a criatividade na busca por soluções de problemas.

> Pensamento computacional envolve resolução de problemas, desenvolvimento de sistemas e compreensão do comportamento humano baseando-se nos conceitos fundamentais à ciência da computação. Pensamento computacional inclui uma gama de ferramentas mentais que refletem a abrangência da ciência da computação (Wing, 2006, p. 33, tradução dos autores).

Assim, podemos refletir que o pensamento computacional é um processo de raciocínio que envolve abstração para identificar a principal característica da solução para uma situação, a fim de que essa solução possa se tornar válida para diversos problemas similares. Isso implica que a abstração é algo que não acontece de uma hora para outra, mas somente após decomposições sucessivas do problema em partes menores, menos complexas e mais fáceis de resolver.

Podemos definir 4 pilares para o pensamento computacional:

- **Decomposição**: fragmentar um problema complexo em partes menores e trabalhar uma de cada vez.
- **Abstração**: focar no centro do problema em vez de priorizar os detalhes, analisando-o de maneira mais crítica e sistemática.
- **Pensamento algorítmico**: criar um sequenciamento de passos que, juntos, configuram a resolução do problema.
- **Reconhecimento de padrões**: identificar regularidades que podem favorecer a generalização de uma resolução para problemas similares.

Tanto a BNCC quanto a BNCC da Computação preveem o desenvolvimento do pensamento computacional em todos os anos do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Esse conceito está, de fato, presente quando os estudantes precisam desenvolver uma representação do raciocínio lógico em atividades de todas as áreas do conhecimento. Nesta coleção, ele está presente, por exemplo, em seções, em atividades que envolvem a resolução de problemas, na compreensão do passo a passo de um processo, nos projetos propostos e na elaboração de fluxogramas.

2.10. Resolução e elaboração de problemas

Quando consideramos a importância da resolução de problemas, objetivamos que os estudantes possam identificar o problema e os dados fornecidos, traçar um plano de ação, obter uma possibilidade de resposta e, por fim, validar essa resposta. Apesar de ser muito coerente com a Educação matemática, a resolução de problemas é uma habilidade fundamental para a vida, não sendo restrita a uma área do conhecimento.

O matemático e professor húngaro George Pólya (1887-1985) foi um dos grandes estudiosos da resolução de problemas, e é em muitas das reflexões dele que nos pautamos para a elaboração desta coleção.

Segundo Pólya, no livro *A arte de resolver problemas*, há 4 etapas para a resolução de um problema: a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução desse plano e o retrospecto ou a verificação.

Para compreender um problema, é preciso identificar informações essenciais à resolução: os dados fornecidos, as respostas que precisamos obter e, sobretudo, quais condições ligam esses dados (ou parte deles) às respostas. Nesse momento, é importante promover a reflexão, indagando os estudantes e incentivando-os a criar hipóteses para as quais pode ser útil empregar recursos como desenhos, esquemas, diagramas, entre outros.

Após a compreensão, é preciso elaborar o plano de ação, ou seja, planejar os passos, identificar os recursos e possíveis caminhos para a resolução. De acordo com Pólya (1995, p. 5), "temos um plano quando conhecemos, pelo menos de modo geral, quais as contas, os cálculos

ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita". Nesse momento, é possível perceber que um problema pode ter várias estratégias de resolução, pois, no mundo real, os problemas não aparecem sempre de maneira "fechada" e organizada.

O trabalho em grupos e a elaboração de painéis de solução são estratégias pedagógicas que podem favorecer essa percepção. Para elaborar o plano, incentive os estudantes a se lembrarem de problemas similares que já realizaram, a elaborar desenhos, diagramas e tabelas e a refletir sobre a possibilidade de resolvê-lo por partes. É também no momento do estabelecimento de um plano que deve ocorrer a seleção dos dados fornecidos que serão utilizados (no caso de problemas com excesso de dados) ou de outros dados que não foram expressos no enunciado, mas são necessários para a resolução (problemas com falta de dados).

De acordo com Pólya (1995, p. 8), a execução do plano exige paciência e método porque, tendo sido o plano bem realizado, a prática é basicamente sua aplicação. Após a execução do plano, os estudantes provavelmente chegarão a uma resposta, mas é importante refletir e verificar se ela é coerente. Isso porque podem ter ocorrido erros durante a resolução – e essa percepção é enriquecedora para o processo de aprendizagem. A ação de retrospecto ou verificação pode trazer grandes benefícios quanto à construção e ao aperfeiçoamento das competências e habilidades dos estudantes em resolver problemas.

> Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo (Pólya, 1995, p. V).

Além da resolução de problemas, a BNCC apresenta diversas habilidades com foco na elaboração de problemas, bem como parte do próprio texto da **CG02**: "formular e resolver problemas e criar soluções (até mesmo tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas". O processo de elaboração de problemas é um passo à frente da proposta de resolvê-los, pois exige de cada estudante a plena compreensão não apenas da situação e da pergunta a que se quer responder, mas também de todos os dados que precisam ser fornecidos e dos conceitos que serão utilizados, bem como, é claro, criatividade.

Ground Picture/Shutterstock

Propor um trabalho para ser resolvido inicialmente em duplas ou grupos, seguido de propostas individuais, quando os estudantes se sentirem seguros para isso, também é uma estratégia de aprendizado.

Para atingir o propósito de resolver e elaborar problemas, conforme as diversas propostas didáticas apresentadas nos Volumes desta coleção, diferentes caminhos podem ser seguidos e etapas intermediárias podem ser trilhadas para ampliar o repertório dos estudantes.

Por exemplo, analisar problemas do livro, compreendendo os dados informados, as respostas que precisamos obter e a estrutura do enunciado, permite a elaboração de problemas com estruturas similares ou novas perguntas para o mesmo conjunto de dados. Ainda explorando um problema já formulado, os estudantes também podem refletir e explicar o que ocorreria se algum dado fosse alterado, acrescentado ou retirado. Além disso, a coleta externa de informações para a elaboração de um problema não apenas amplia o repertório dos estudantes e torna a situação significativa para eles como os aproxima de situações às quais eles poderiam ser, de fato, expostos; afinal, no cotidiano estamos constantemente recebendo informações, dados e valores, fazendo cálculos, respondendo a perguntas e tomando decisões.

2.11. Investigação científica e raciocínios lógico-matemáticos

A proposição de problemas e atividades que envolvam o desenvolvimento dos diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático (indução, dedução, abdução e raciocínio por analogia) para analisar e explicar processos de investigação sem dúvida colabora para um ambiente de ensino e de aprendizagem repleto de significados. Nesse sentido, de acordo com as propostas feitas em cada Volume do Livro do Estudante desta coleção, é importante

que os estudantes façam investigações de natureza matemática com cientificismo, pois, desse modo, formalizam os conteúdos enquanto desenvolvem o raciocínio e a lógica.

Se é certo que uma hipótese é um modo de proporcionar uma resposta temporária a uma pergunta, também é certo que o que realmente importa não é que a hipótese esteja correta, mas sim que ela inicie um processo por meio do qual o estudante analise e discuta, compare, avalie, conclua, verifique, valide e demonstre. O raciocínio vai além do ato intelectual em si, transcende-o, estabelece vínculos, formando um processo que exige demonstrações e provas das "verdades" que se estão conhecendo ou investigando. O processo de conhecimento proporcionado pela investigação de acordo com o aspecto científico privilegia novas maneiras de pensar e de o estudante se envolver com a Matemática em ambiente escolar.

Mais sobre o assunto

- No livro *Investigações matemáticas na sala de aula*, de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira (4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. Coleção Tendências em Educação matemática, 7), os autores apresentam desafios e benefícios das práticas de investigação em aulas de Matemática com base em informações coletadas em pesquisas que envolvem professores e estudantes. As análises que surgem das reflexões dessas vivências compõem um rico material para quem deseja implantar investigações matemáticas nas aulas.
- O livro *Iniciação à Filosofia: Ensino Médio*, de Marilena Chaui (3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. único), traz, nas páginas 94 a 97, explicações sobre os tipos de raciocínio por dedução, indução e abdução, mencionados anteriormente.

2.12. Etnomatemática

> Conhecimentos e comportamentos são compartilhados e compatibilizados, possibilitando a continuidade dessas sociedades. Esses conhecimentos e comportamentos são registrados, oral ou graficamente, e difundidos e passados de geração para geração. Nasce, assim, a história de grupos, de famílias, de tribos, de comunidades, de nações (D'Ambrosio, 2019, p. 23).

De acordo com essa citação, da obra *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*, do matemático e professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (1932-2021), um dos pioneiros no estudo da Etnomatemática e, também, precursor e idealizador desse tema, percebe-se que há produção de conhecimento em todas as culturas. Dessas produções, pode-se inferir que algumas são originadas da Matemática, sendo esta subordinada a um contexto social e cultural específico em determinado período histórico. A Matemática surgiu como um dos meios de auxílio para a concretização de necessidades básicas do ser humano, como a construção de moradias, a fabricação de utensílios e a manutenção e contagem dos rebanhos. Desse modo, ao longo da História, tanto a afirmação de identidade dos grupos sociais quanto a história desses mesmos grupos passam pela Matemática.

Stefan Lambauer/Shutterstock

As peças de cestaria do povo Yanomami revelam a presença de conceitos matemáticos, como contagem, simetria e Geometria. Exposição no Museu do Amanhã na cidade do Rio de Janeiro, RJ. Foto de 2022.

De acordo com D'Ambrosio (2019, p. 2), a Etnomatemática busca, dentro de um "ambiente natural, social, cultural e imaginário" (*etno*), "explicar, aprender, conhecer e lidar com" (*matema*) "modos, estilos, artes, técnicas" (*tica*). Nesse sentido, ela aborda as relações interculturais. E o que propõe? O incentivo para que a Matemática venha a ser explicada e entendida dentro de um contexto cultural próprio. De que modo? Explicando os procedimentos de formação, de organização e de transmissão de conhecimentos em sistemas culturais variados. Com qual finalidade? A de conduzir o estudo da Matemática a novas maneiras de relação intercultural.

O ensino e a aprendizagem da Matemática, na perspectiva da Etnomatemática, possibilitam estabelecer uma relação mais construtiva e consistente entre teoria e prática ao considerar experiências cotidianas como um rico material a ser analisado e a respeito do qual se pode refletir.

A Etnomatemática contribui para a decolonização do pensamento. Nas últimas décadas, muitos estudiosos têm destacado que a produção de conhecimento acontece não apenas na Europa e nos Estados Unidos. No entanto, por razões históricas, somos ainda levados a considerar que a ciência válida seria aquela produzida apenas no hemisfério norte.

A decolonialidade do saber nos ajuda a compreender que, mesmo com o fim do período colonial, nós, povos que fomos colonizados, seguimos muitas vezes atribuindo valor apenas ao conhecimento produzido pelos países que foram colonizadores. Portanto, para ampliarmos a

compreensão do mundo em que vivemos, é importante darmos atenção também a outras tradições e a outras produções de saberes, como as latino-americanas e as africanas.

2.13. Uso pedagógico de tecnologias digitais

Ao longo da História, percebemos o desenvolvimento de diferentes tecnologias associadas à inteligência humana. Em um primeiro momento, foi a interação oral que estabeleceu a transmissão das informações e do conhecimento, fazendo-os circular nos diversos grupos sociais. Com a invenção da escrita e, posteriormente, da imprensa, surgiu a possibilidade de divulgar informações em modos de distribuição contínuos e lineares. Já o advento recente da informática tornou possível estabelecer o uso do *hiperlink*, uma ligação que conduz a outras unidades de informação, remetendo a outros documentos.

É fato que a escola está inserida nesse contexto histórico-social, e, por isso, a utilização de tecnologias digitais nas práticas pedagógicas oferece uma enorme contribuição para o processo de ensino e aprendizagem. Ao introduzir e utilizar esses recursos no ambiente escolar, você se propõe a descobrir e experimentar, experimentação que oportuniza um processo de (re)elaboração e (re)adaptação constantes aos conceitos que estão sendo estudados. Exatamente por isso, o uso de tecnologias digitais pelos estudantes jamais deve encontrar ênfase maior no recurso digital em si, em detrimento do papel da aprendizagem.

Assim como a aplicação das metodologias ativas, o uso dos recursos digitais na escola rompe com a transmissão direta de conhecimento do professor – o detentor de todo o conhecimento – para o estudante, que deixa de ter um papel passivo no processo de ensino e aprendizagem. Assim, o uso pedagógico das tecnologias digitais representa um incentivo ao protagonismo dos estudantes.

Para as aulas de Matemática, em especial, diversos recursos e ferramentas tecnológicos podem ser úteis no processo de ensino e aprendizagem, como calculadoras, *softwares* de Geometria dinâmica, planilhas eletrônicas, compiladores de códigos, simuladores e laboratórios virtuais. Para utilizá-los, é importante sempre preparar-se previamente, mapeando os dispositivos que precisarão estar disponíveis e a internet, se for necessário utilizá-la no momento da aula, bem como conhecendo os *softwares* ou aplicativos que serão trabalhados, para que você, professor, possa auxiliar os estudantes sempre que for preciso.

É possível encontrar na internet diversos tutoriais de utilização de diferentes ferramentas tecnológicas para uso em sala de aula, bem como atividades já construídas e que podem proporcionar aos estudantes um momento inicial de conhecimento da plataforma escolhida ou um momento final para ampliação das propostas didáticas apresentadas nesta coleção.

3. Avaliações

A avaliação das aprendizagens é inerente ao processo de aprendizagem, e compreender sua conceituação e aplicação prática é fundamental para promover um ensino de qualidade e o desenvolvimento integral dos estudantes. Aqui buscamos explorar as visões de diferentes educadores de maneira a contribuir para a construção de uma prática avaliativa que vá além da simples aferição de conhecimentos.

Cipriano Luckesi (2002) afirma que a avaliação deve ser contínua e formativa, focada na melhoria do ensino e da aprendizagem. Ela deve servir como ferramenta para a transformação social e promover a reflexão crítica e o desenvolvimento dos estudantes.

Philippe Perrenoud (2001) destaca a importância da avaliação formativa, que busca identificar e superar as dificuldades de aprendizagem ao longo do processo educativo. Ele enfatiza que a avaliação deve ser contextualizada e adaptada às características individuais dos estudantes.

Domingos Fernandes (2009) argumenta que a avaliação deve ser formativa e proporcionar *feedback* constante, auxiliando professores e estudantes a identificarem pontos fortes e aspectos que necessitam de melhoria. De acordo com ele, a prática avaliativa deve ser parte integrante do cotidiano escolar, promovendo a autorregulação e o engajamento dos estudantes.

Jussara Hoffmann[1] (2003) propõe uma avaliação dialógica, em que a interação e a comunicação entre professores e estudantes são fundamentais. Para ela, a avaliação deve ser um ato pedagógico que contribua para a autonomia, a reflexão crítica e o crescimento pessoal dos estudantes.

Ao explorar as concepções de avaliação da aprendizagem desses autores, constrói-se uma visão abrangente e crítica sobre como ela pode ser utilizada de maneira eficaz e justa no contexto educativo, promovendo o desenvolvimento integral dos estudantes e a melhoria contínua do processo de ensino e aprendizagem.

[1] HOFFMANN, Jussara. *Avaliação mediadora*: uma prática em construção da pré-escola à universidade. Porto Alegre: Mediação, 2003.

3.1. A avaliação em Matemática

3.1.1. Por que avaliar?

As avaliações e os resultados delas são úteis para (re)definir a rota, ou seja, é preciso avaliar para planejar a continuidade do trabalho pedagógico. As habilidades matemáticas, especialmente a capacidade de resolver e elaborar problemas, desenvolvem-se ao longo do tempo, como resultado de variadas oportunidades e do confronto com situações do mundo real. Assim, é preciso monitorar esses processos de desenvolvimento das habilidades matemáticas para acompanhar a evolução e a consolidação ao longo do ano letivo.

Além disso, durante as aulas e as avaliações, debatem-se ideias e conceitos matemáticos, partilham-se descobertas, confirmam-se hipóteses e adquirem-se conhecimentos matemáticos pela escrita, pela fala e pela leitura. O próprio ato de comunicar clareia e organiza o pensamento e leva os estudantes a se envolverem na construção do conhecimento de Matemática.

3.1.2. O que avaliar?

Diferentes tipos de avaliação – como os que exemplificaremos a seguir – podem e devem ser aplicados ao longo dos anos letivos da Educação Básica, com distintos propósitos específicos, bem como variados procedimentos e instrumentos de avaliação.

Toda avaliação parte de um planejamento prévio, no qual são estabelecidos os critérios avaliativos que, geralmente, são definidos pelo educador a partir dos objetivos da avaliação e do conjunto de competências e habilidades que se pretendem avaliar.

Assim, é sempre necessário definir o conjunto de habilidades no planejamento da avaliação e, para cada critério/habilidade, compor as atividades e questões que podem auxiliar como ferramenta avaliativa. Nas avaliações em larga escala, como o Enem e o Saeb, são elaboradas matrizes de avaliação nas quais esses critérios são definidos como habilidades descritoras do objeto a ser avaliado.

De modo geral, nas avaliações de Matemática, a depender do tipo de avaliação, é importante mensurar o que os estudantes já sabem, como sabem e como pensam matematicamente, bem como se eles compreenderam os conceitos e os procedimentos e se desenvolveram atitudes positivas em relação à Matemática. A análise da capacidade de mobilizar conhecimentos matemáticos para o desenvolvimento de argumentos, bem como do processo e da criatividade nas soluções dadas pelos estudantes para as situações-problema propostas, também deve ser objeto de avaliação.

3.1.3. Como avaliar?

Definidos os critérios avaliativos, outros procedimentos principais, citados a seguir, são comuns aos diferentes tipos de avaliação.

- Planejamento dos critérios avaliativos (comuns e/ou individuais).
- Elaboração das atividades e questões avaliativas com base nos critérios definidos.
- Aplicação das avaliações.
- Análise e registro dos resultados das avaliações.
- *Feedback* e intervenções educacionais com base nos resultados das avaliações (como seções de revisão e retomada de conteúdos).
- Acompanhamento e monitoramento contínuo.
- Celebração de conquistas.

Na Matemática, especificamente, os diferentes tipos de avaliação devem apresentar situações-problema que envolvam a mobilização de um conjunto de ideias matemáticas, situações abertas que tenham mais de uma solução, propostas de elaboração de problemas envolvendo conteúdos e/ou contextos dados, entre outros tipos de atividades e questões.

O registro dos resultados das avaliações e o acompanhamento de cada estudante durante o ano letivo (ou durante os anos letivos, se possível) são úteis e importantes para melhor condução das aprendizagens individuais e coletivas, monitorando as evoluções e agindo de modo imediato e contínuo para garantir os objetivos educacionais propostos.

Observações sistemáticas feitas em sala de aula, diários de aprendizagem, conversas com os estudantes e coleta de trabalhos para compor portfólios, bem como a criação de registros e relatórios dos resultados das avaliações (em tabelas e/ou gráficos, por exemplo), permitem esse acompanhamento ao longo do tempo, tanto por parte dos professores quanto dos próprios estudantes ou familiares.

A seguir, apresentamos alguns tipos de avaliação e sugestões de instrumentos avaliativos. É importante salientar que, além de escolher estes ou outros tipos de avaliação a serem aplicados no Ensino Médio, você, professor, tem autonomia para selecionar os instrumentos avaliativos e os procedimentos de registro e acompanhamento mais adequados para cada tipo de avaliação, levando em conta o planejamento pedagógico e a realidade dos estudantes.

3.2. Os tipos de avaliação

3.2.1. Avaliação diagnóstica

Luckesi (2002, p. 43) descreve que "para não ser autoritária e conservadora, a avaliação tem a tarefa de ser diagnóstica, ou seja, deverá ser o instrumento dialético do avanço, terá de ser o instrumento da identificação de novos rumos".

Esse tipo de avaliação busca identificar conhecimentos prévios, habilidades, dificuldades e interesses dos estudantes. Permite ao professor planejar e adaptar as estratégias de ensino às necessidades de cada turma, e mesmo de cada estudante, promovendo um processo de ensino e aprendizagem mais personalizado.

Além disso, a avaliação diagnóstica ajuda a detectar possíveis lacunas no conhecimento dos estudantes, possibilitando intervenções pedagógicas precoces para corrigir essas deficiências antes que se tornem obstáculos maiores ao aprendizado.

Como sugestões de instrumentos para avaliação diagnóstica, podem ser úteis: testes diagnósticos, com perguntas objetivas, questões abertas e problemas sobre conhecimentos específicos e habilidades; conversas individuais para explorar percepções, dificuldades e interesses; coleta de trabalhos anteriores dos estudantes para compor um portfólio visando a uma análise mais detalhada do desenvolvimento individual deles ao longo do tempo.

3.2.2. Avaliação formativa

Matui[2] (1995) designa a avaliação em sua concepção formativa como "avaliação dialógica". De acordo com Jorba e Sanmartí:

> a avaliação formativa tem como finalidade fundamental a função ajustadora do processo de ensino-aprendizagem para possibilitar que os meios de formação respondam às características dos alunos. Pretende-se detectar os pontos fracos da aprendizagem, mais do que determinar quais os resultados obtidos com essa aprendizagem.
>
> JORBA, J.; SANMARTÍ, N. A função pedagógica da avaliação. *In*: BALLESTER, M. *et al. Avaliação como apoio à aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2003.

Esse tipo de avaliação visa monitorar o progresso dos estudantes ao longo do processo educativo, identificar dificuldades e reforçar a compreensão dos conteúdos antes que as dificuldades de aprendizagem se tornem maiores. Pode, também, promover a autorregulação dos estudantes, incentivando-os a refletir sobre o próprio aprendizado e a desenvolver habilidades de autoavaliação.

Além da observação sistemática das interações e do comportamento dos estudantes durante as atividades em sala de aula para identificar informações valiosas sobre as habilidades sociais, a motivação e a compreensão dos conteúdos, testes, questionários e *quizzes* (com questões de múltipla escolha, verdadeiro ou falso, perguntas abertas, entre outros) podem ser aplicados regularmente como instrumento para avaliação formativa, pois ajudam a verificar a compreensão dos estudantes sobre tópicos específicos em estudo. O preenchimento de *checklist* de desempenho, como uma lista de verificação, também permite monitorar o cumprimento de etapas específicas ou habilidades durante o desenvolvimento de atividades ou projetos.

3.2.3. Avaliação comparativa

A avaliação comparativa envolve a comparação do desempenho de um estudante com o de outros a partir de critérios preestabelecidos. Tem por objetivo situar o desempenho individual dentro de um contexto maior, identificando tanto os estudantes que se destacam por resultados mais assertivos que a média quanto aqueles que precisam de apoio adicional.

Segundo Fernandes (2009), esse método de avaliação ajuda a identificar padrões de desempenho e diferenças significativas entre grupos de estudantes, fornecendo dados importantes para a tomada de decisões pedagógicas e políticas educacionais. Esse tipo de avaliação é comum durante o Ensino Médio, especialmente em simulados ou em provas oficiais (vestibulares e avaliações como o Enem).

No geral, avaliações comparativas têm o formato de testes padronizados com questões (abertas ou fechadas) que avaliam os mesmos conteúdos e aprendizagens para todos os estudantes e, por isso, permitem uma comparação direta entre diferentes indivíduos ou grupos.

3.2.4. Avaliação ipsativa

A avaliação ipsativa, no contexto educacional, foca no progresso pessoal do estudante ao longo do tempo. Ela permite a cada um perceber as próprias melhorias, identificar áreas de crescimento e estabelecer metas pessoais. Essa abordagem contrasta com as demais avaliações citadas, pois é particularmente motivadora, uma vez que destaca as conquistas individuais e incentiva a autoeficácia e a autoestima, assim como detecta lacunas de aprendizado. Além disso, é especialmente valiosa no Ensino Médio, podendo, inclusive, ser associada às definições de projeto de vida dos estudantes.

Como sugestões de instrumentos avaliativos, podemos citar: autoavaliação, para que os estudantes reflitam sobre as próprias habilidades e os conhecimentos desenvolvidos; diário de aprendizagem, para que eles registrem as próprias experiências de aprendizagem, reflexões, dúvidas e progressos diários ou semanais; contrato de estudo ou plano de estudo, no qual se explicitam os conteúdos, competências ou habilidades que serão trabalhados durante um período para que estes sejam acompanhados.

[2] MATUI, Jiron. *Construtivismo*. São Paulo: Moderna, 1995.

3.2.5. Avaliação somativa

A avaliação somativa é uma abordagem que visa avaliar a aprendizagem dos estudantes ao final de um período, como um semestre ou ano letivo, para determinar se eles alcançaram os objetivos estabelecidos e qual é o nível de competência que demonstram em relação aos conteúdos curriculares previstos.

Esse tipo de avaliação é frequentemente utilizado para atribuir notas e fornecer informações sobre a eficácia do ensino. Por isso, tem função regulatória, subsidiando decisões de recuperação, conselhos de classe e eventuais reprovações, se necessário.

No geral, a avaliação somativa é mensurada com instrumentos como: prova escrita (método tradicional de avaliação, na qual os estudantes respondem a perguntas ou realizam tarefas em período determinado); trabalho escrito (podendo incluir ensaios, relatórios de laboratório, resenhas de livros, pesquisas, entre outros) – usado para aferir a compreensão do conteúdo de modo mais elaborado do que em uma prova escrita; apresentação oral – permite aos estudantes demonstrar os conhecimentos e as habilidades de comunicação ao dissertar sobre um tema específico para o professor ou para a turma.

3.3. Trabalhando o Enem em sala de aula: estratégias para melhorar o desempenho dos estudantes

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), criado em 1998 pelo MEC, avalia a qualidade do Ensino Médio e oferece acesso ao Ensino Superior em universidades públicas e em redes particulares.

Seguem algumas estratégias específicas para trabalhar o Enem em sala de aula, visando melhorar o desempenho dos estudantes nas questões de Matemática e colaborar com o trabalho docente.

- **Revisão dos conceitos fundamentais:** priorize a revisão de tópicos essenciais, como Álgebra, Geometria, Trigonometria e Educação financeira, que são frequentemente abordados nas provas, e aprofunde conceitos básicos e avançados para garantir uma compreensão sólida pelos estudantes.
- **Resolução de problemas contextualizados:** utilize problemas que envolvam situações cotidianas, como cálculos financeiros e análise de gráficos e de dados estatísticos, para demonstrar a aplicação prática da Matemática e ajudar os estudantes a compreenderem a relevância dos conceitos aprendidos.
- **Utilização de simulados e exercícios práticos:** aplique simulados regulares com questões no estilo Enem para familiarizar os estudantes com o formato da prova e melhorar as habilidades de gerenciamento do tempo; após cada simulado, revise as questões e debata com eles estratégias de resolução.
- **Uso de tecnologia educacional:** incorpore ferramentas tecnológicas, como aplicativos de resolução de problemas e plataformas *on-line* de aprendizado, para diversificar o método de ensino e engajar os estudantes.
- **Incorporação de ferramentas tecnológicas:** proponha o uso de aplicativos de resolução de problemas matemáticos e plataformas *on-line* de aprendizado.

4. A coleção da área de Matemática e suas Tecnologias

4.1. Abordagem teórico-metodológica e pressupostos da coleção

A elaboração desta coleção apoia-se em pesquisas em Educação matemática sem perder de vista as orientações oficiais do MEC, de modo especial, a BNCC. Assim, as abordagens teórico-metodológicas que inspiraram esta coleção buscam auxiliar você, professor, a garantir a aprendizagem efetiva dos estudantes e o melhor aproveitamento deles na aquisição de conhecimentos de modo significativo.

Exatamente por isso, nas *Orientações gerais* deste Manual, abordamos aspectos que se entrecruzam na ação pedagógica e na prática educativa que envolvem a resolução e a elaboração de problemas, a argumentação (oral e escrita), a leitura inferencial e as análises (críticas, criativas e propositivas), a investigação científica, as metodologias ativas, o pensamento computacional, o uso pedagógico de tecnologias digitais e a Etnomatemática.

Especialmente sobre o trabalho pedagógico com a resolução e elaboração de problemas, vale destacar que, nesta coleção, procuramos instrumentalizar o estudante para resolver problemas reais. De acordo com a BNCC (Brasil, 2018a, p. 265), espera-se que os estudantes:

> desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações [...].

E isso nos leva a refletir sobre a importância de os problemas explorados em sala de aula serem contextualizados para dar sentido ao aprendizado.

Também pautaram a seleção dessa estrutura: o pluralismo de ideias e o convívio social republicano, a Cultura de Paz, a saúde mental dos estudantes, os TCTs e os princípios de educação integral, de respeito e valorização da diversidade, de relevância, de contemporaneidade e de colaboração. Mas, sem dúvida, o que predominou na seleção desse grupo de enfoques orientadores foi aquilo que eles apresentam e agregam como debates e pontos importantes a fim de que os objetivos de ensino, de aprendizagem e de desenvolvimento discente "ganhem vida" e venham a ser uma realidade possível.

4.2. Estrutura da coleção

Os 3 Volumes do Livro do Estudante desta coleção estão divididos em Unidades, que, por sua vez, são subdivididas em 2 a 4 capítulos cada uma. Cada Unidade apresenta, na **abertura da Unidade**, uma situação referente a algum tema dos capítulos, contendo questões contextualizadas para reflexão que visam preparar os estudantes para os conteúdos que serão abordados nas aulas seguintes.

A **abertura de capítulo** também apresenta situações-problema mais especificamente relacionadas ao conteúdo trabalhado, apresentando questões contextualizadas.

Os capítulos são compostos de tópicos de conteúdo teórico e variadas seções para serem trabalhadas ao longo do estudo.

- ***Atividades***: Essa seção ocorre ao longo do capítulo, intercalada com os tópicos de conteúdo teórico, e têm relação com o respectivo tópico. A seção apresenta atividades e problemas envolvendo contextos cotidianos, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, para o estudante aplicar e aprofundar os conteúdos estudados. Nela também há atividades que visam à elaboração de perguntas e problemas.
- ***Atividades resolvidas***: Nessa seção, há a apresentação da resolução detalhada de atividades e problemas, visando exemplificar estratégias de resolução. Algumas das atividades resolvidas apresentam, também, a resolução passo a passo de um problema, organizada em subtítulos: *Lendo e compreendendo*; *Planejando a solução*; *Executando o que foi planejado*; *Emitindo a resposta*; *Ampliando a atividade* (este é opcional). Perceba que essa seção é organizada de acordo com a perspectiva de resolução de problemas de Pólya.
- ***Tecnologias digitais***: A seção apresenta atividades de investigação, exploração e simulação para serem realizadas utilizando calculadoras, computadores ou *smartphones*, por meio de *softwares* ou aplicativos. Essa prática pode seguir ou preceder um conteúdo específico a ser estudado.
- ***Conexões***: Nessa seção, são propostos textos para leitura e interpretação sobre temas relevantes e atuais que relacionam diferentes áreas do conhecimento e saberes conectados à Matemática com questões para debate e pesquisa para aprofundamento.
- ***Além da sala de aula***: A seção propõe o desenvolvimento passo a passo de projetos interdisciplinares que devem ser executados pelos estudantes e, após o término, apresentados para a comunidade escolar. A ideia de haver mais de um projeto final é que o estudante tenha autonomia para escolher a proposta que faz mais sentido no contexto em que ele está inserido.

Além das seções citadas, os capítulos contêm boxes com diferentes finalidades.

- ***Explore para descobrir***: É um boxe que apresenta teoria e propostas de atividades de exploração, experimentação, verificação e sistematização dos conteúdos apresentados, possibilitando ao estudante formular ideias e criar estratégias.
- ***Sobre o assunto***: A proposta é trazer informações e curiosidades relacionadas aos conteúdos estudados, bem como sugestões de textos, vídeos, simuladores, *sites*, visitas a museus, entre outros, para complementar e aprofundar os estudos ou realizar pesquisas.
- ***Fique atento***: É um boxe que retoma definições ou nomenclaturas, chama a atenção para algo que está sendo estudado no momento e apresenta dicas que podem auxiliar no estudo.
- ***Reflita***: Esse boxe traz questionamentos e reflexões sobre o conteúdo apresentado.

Ao fim de cada Unidade, após o último capítulo, há ainda 2 seções específicas.

- ***Enem e vestibulares***: Essa seção contém sugestões de questões retiradas de provas recentes do Enem e de vestibulares de todas as regiões do Brasil, ela também pode ser utilizada como avaliação de processo e/ou como avaliação de resultado.
- ***Conteúdos e aprendizagens***: Essa seção apresenta um resumo esquemático dos principais pontos dos conteúdos estudados na Unidade. São também sugeridas questões para que o estudante faça uma autorreflexão sobre o próprio aprendizado, como propõe a avaliação ipsativa.

4.2.1. Objetos educacionais digitais da coleção

Cada Volume desta coleção também contém objetos educacionais digitais cujo objetivo é apresentar, retomar, aprofundar e complementar temáticas e conteúdos em estudo.

Para esses objetos, foram cuidadosamente elaborados carrosséis de imagens, vídeos, *podcasts*, infográficos e mapas clicáveis que, juntos, compõem com o livro uma gama de recursos pedagógicos que visam ampliar as oportunidades para a construção do conhecimento por meio da exploração de diferentes linguagens e tipos de mídia, auxiliando a aprendizagem dos estudantes com diferentes conhecimentos prévios e perfis de aprendizagens.

Os objetos educacionais digitais estão indicados no sumário do Livro do Estudante e nas páginas sugeridas para o trabalho. Você encontrará os seguintes ícones indicando a sugestão de um objeto educacional digital:

4.3. Sugestão de cronograma

Na proposta de organização de cronograma em semanas apresentada a seguir, consideramos um calendário escolar anual com previsão de 40 semanas letivas, que podem ser organizadas em bimestres, trimestres ou semestres, de acordo com a quantidade de aulas semanais, com as propostas curriculares estaduais e com o projeto político pedagógico da escola.

Essa distribuição das semanas letivas foi pensada considerando os conteúdos, as atividades e as seções presentes em cada Unidade e capítulo. Ressaltamos, contudo, a importância de também considerar a realidade dos estudantes e da escola e de ajustar o tempo previsto para os blocos pedagógicos, sempre que necessário, bem como alterar a ordem de conteúdos e seções ou ampliar o tempo de estudo dos tópicos, caso seja possível desenvolver mais propostas de pesquisas e de apresentações, metodologias ativas ou ações envolvendo a comunidade escolar.

Também é importante ponderar replanejamentos ao longo do ano letivo, de acordo com os conhecimentos prévios dos estudantes, a necessidade de recuperação de aprendizagens e os resultados dos diferentes tipos de avaliação aplicados no decorrer do ano letivo.

<table>
<tr><th colspan="5">Volume 1</th></tr>
<tr><th>Unidade e capítulo</th><th colspan="4">Sugestão de cronograma</th></tr>
<tr><td>Unidade 1: Conjuntos e função afim
Capítulo 1: Conjuntos</td><td>Semanas 1 a 3</td><td rowspan="3">1º bimestre</td><td rowspan="3">1º trimestre</td><td rowspan="5">1º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: A ideia de função</td><td>Semanas 4 e 5</td></tr>
<tr><td>Capítulo 3: A função afim</td><td>Semanas 6 a 11</td></tr>
<tr><td>Capítulo 4: Funções definidas por mais de uma sentença</td><td>Semanas 12 e 13</td><td rowspan="3">2º bimestre</td></tr>
<tr><td>Unidade 2: Função quadrática
Capítulo 1: A função quadrática</td><td>Semanas 14 a 16</td><td rowspan="3">2º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Análises algébrica e gráfica da função quadrática</td><td>Semanas 17 a 21</td></tr>
<tr><td>Unidade 3: Função exponencial
Capítulo 1: Potenciação e radiciação</td><td>Semanas 22 a 24</td><td rowspan="3">3º bimestre</td><td rowspan="6">2º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: A função exponencial</td><td>Semanas 25 a 28</td></tr>
<tr><td>Unidade 4: Função logarítmica
Capítulo 1: Logaritmo</td><td>Semanas 29 e 30</td><td rowspan="4">3º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: A função logarítmica</td><td>Semanas 31 a 34</td><td rowspan="3">4º bimestre</td></tr>
<tr><td>Unidade 5: Sequências e progressões
Capítulo 1: Sequências</td><td>Semana 35</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Progressão aritmética</td><td>Semanas 36 e 37</td></tr>
<tr><td>Capítulo 3: Progressão geométrica</td><td>Semanas 38 a 40</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Volume 2				
Unidade e capítulo	**Sugestão de cronograma**			
Unidade 1: Regiões planas e área Capítulo 1: Medida de área de regiões planas	Semanas 1 a 5	1º bimestre	1º trimestre	1º semestre
Capítulo 2: Ladrilhamento	Semanas 6 e 7			
Unidade 2: Geometria espacial Capítulo 1: Introdução à Geometria espacial	Semanas 8 a 10			
Capítulo 2: Prisma e cilindro	Semanas 11 a 15	2º bimestre		
Capítulo 3: Pirâmide e cone	Semanas 16 a 18		2º trimestre	
Capítulo 4: Esfera e projeções cartográficas	Semanas 19 a 21			
Unidade 3: Trigonometria Capítulo 1: Semelhança de polígonos	Semanas 22 e 23	3º bimestre		2º semestre
Capítulo 2: Relações trigonométricas	Semanas 24 a 27			
Capítulo 3: Conceitos trigonométricos básicos na circunferência	Semanas 28 a 30		3º trimestre	
Capítulo 4: Funções trigonométricas	Semanas 31 a 33	4º bimestre		
Unidade 4: Matrizes, determinantes e sistemas lineares Capítulo 1: Matrizes e determinantes	Semanas 34 a 36			
Capítulo 2: Sistemas lineares	Semanas 37 a 40			

Volume 3				
Unidade e capítulo	**Sugestão de cronograma**			
Unidade 1: Geometria no plano cartesiano Capítulo 1: Geometria analítica: ponto, reta e circunferência	Semanas 1 a 4	1º bimestre	1º trimestre	1º semestre
Capítulo 2: Transformações geométricas	Semanas 5 a 7			
Unidade 2: Educação financeira Capítulo 1: Fundamentos de Matemática financeira	Semanas 8 a 12			
Capítulo 2: Planejamento e gestão de orçamento pessoal	Semanas 13 a 16	2º bimestre	2º trimestre	
Unidade 3: Análise combinatória e probabilidade Capítulo 1: Análise combinatória: diferentes estratégias de contagem	Semanas 17 a 21			
Capítulo 2: Probabilidade	Semanas 22 a 26	3º bimestre		2º semestre
Unidade 4: Estatística Capítulo 1: Introdução à Estatística	Semanas 27 a 32		3º trimestre	
Capítulo 2: Medidas de tendência central e medidas de dispersão	Semanas 33 a 36	4º bimestre		
Unidade 5: Computação Capítulo 1: Um pouco da história	Semanas 37 e 38			
Capítulo 2: Algoritmos e fluxogramas Capítulo 3: Conceitos iniciais de programação	Semanas 39 e 40			

Para conduzir as aulas com esta coleção, a formação disciplinar do professor deve ser prioritariamente de Matemática.

Para as aulas conjuntas com professores de outras áreas do conhecimento ou outros componentes curriculares, conforme exemplos comentados nas *Orientações específicas* deste Manual, bem como nas orientações que constam nas páginas do Livro do Estudante, planeje antecipadamente o cronograma com os professores envolvidos, como serão ministradas as dinâmicas das aulas e, principalmente, o tempo e o período de duração das propostas.

5. Referências complementares para aprofundamento

Todos os *sites* foram acessados em 8 set. 2024.

5.1. *Sites*

- Canal Futura. Disponível em: https://tedit.net/u2s8rj.
  O Canal Futura, em conjunto com iniciativas privadas, disponibiliza um portal com vários artigos e vídeos (inclusive videoaulas).
- Instituto Ayrton Senna. Disponível em: https://tedit.net/99y0m2.
  O Instituto Ayrton Senna disponibiliza vários cursos gratuitos para a formação continuada do professor.
- Movimento pela Base. Disponível em: https://tedit.net/xxd3dh.
  O portal, mantido por um grupo de apoiadores da BNCC e da educação, disponibiliza uma série de artigos, vídeos e cursos sobre educação.
- Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: https://tedit.net/9ulmhg.
  Nesse *site*, você pode obter informações, provas e gabaritos da competição que é dirigida a estudantes de todo o país, a partir do 6º ano.
- Portal do professor. Disponível em: https://tedit.net/8cvkhm.
  Espaço para acessar sugestões de planos de aula, mídias de apoio, notícias sobre educação e iniciativas do MEC. Nele, você também pode compartilhar planos de aula, participar de debates ou fazer cursos.
- Portal IBGE Educa. Disponível em: https://tedit.net/xlct5g.
  Nesse portal oficial do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), há disponibilização de vários dados de pesquisas estatísticas sobre a população brasileira.
- Projecto Pólya. Disponível em: https://tedit.net/cwgjxf.
  Site do Centro de Matemática da Universidade do Porto (Portugal) especializado na resolução de problemas matemáticos.

5.2. *Podcasts* e vídeos

- Lógica, Matemática e linguagem cotidiana. Disponível em: https://tedit.net/iixbnb.
  Esse vídeo, apresentado pelo professor titular da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE-USP), Nílson José Machado, mostra algumas explicações a respeito dos conceitos de lógica.
- Matemática Humanista. Disponível em: https://tedit.net/geu59c.
  Podcast mantido pelo educador e matemático brasileiro Carlos Eduardo Mathias Motta (1968-) até o ano de 2020, com debates principalmente sobre o ensino de Matemática, com temas como Etnomatemática, dimensões éticas das práticas matemáticas, avaliação, uso pedagógico da calculadora, entre outros.
- Minuto IBGE. Disponível em: https://tedit.net/f4k52s.
  Podcasts curtos, em torno de 1 minuto cada um, trazendo dados e curiosidades obtidos pelo IBGE. Novos áudios são lançados semanalmente e disponibilizados gratuitamente para todas as emissoras de rádio brasileiras.
- Nada Sei. Disponível em: https://tedit.net/7fuxmb.
  Podcasts mantidos pelo Instituto Ayrton Senna que tratam de aspectos distintos da educação no Brasil.
- O homem que viu o infinito
  O filme é baseado na história real do matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920), que fez importantes contribuições para a Teoria dos números e frações contínuas.
- Portal Domínio Público. Disponível em: https://tedit.net/vijv2q.
  Nesse *site* são disponibilizados vídeos que auxiliam o professor no trabalho em sala de aula.
- Quebrando a banca
  Filme baseado em fatos reais que conta a história de um estudante do Instituto de Tecnologia de Massachusetts que, junto de colegas, criou um método para ter vantagem em um famoso jogo de cartas.
- TV Escola. Disponível em: https://tedit.net/mo5scz.
  O portal do TV Escola disponibiliza vídeos com variadas aplicações de conteúdos em situações simples do dia a dia.

5.3. Revistas e periódicos de Educação matemática

- *Bolema*. Disponível em: https://tedit.net/xanusm.
  Boletim de Educação matemática (Bolema) publicado pelo Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp), *campus* de Rio Claro (SP).
- Publicações da Sbem. Disponível em: https://tedit.net/jx6muo.
  Publicações de periódicos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem) sobre Educação matemática.
- *Revista Brasileira de História da Matemática*. Disponível em: https://tedit.net/9n5t42.
  Site com as publicações da *Revista Brasileira de História da Matemática*, da Sociedade Brasileira de História da Matemática
- *Revista EMP*. Disponível em: https://tedit.net/5lat9i.
  A revista *Educação Matemática Pesquisa (EMP)*, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, faz quadrimestralmente divulgações científicas da área, em âmbito internacional.

5.4. Publicações sobre História da Matemática

- BERLINGHOFF, W. P. *A Matemática através dos tempos*: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.
  Nesse livro, o autor apresenta um panorama de pessoas e eventos importantes na história e na construção da Matemática atual.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher: Edusp, 1974.
  Uma grande referência em História da Matemática, esse livro apresenta a evolução da Matemática desde a origem do conceito dos números até as descobertas matemáticas do século XX.
- CARVALHO, D. L. de; MIGUEL, A.; MENDES, I. A.; BRITO, A. de J. *História da Matemática em atividades didáticas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

Nesse livro, o ensino da Matemática é abordado por meio de atividades nas quais a História da Matemática exerce papel central.

- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

  Um grande referencial da História da Matemática, esse livro apresenta narrativas históricas desde a Antiguidade, contextualizadas em panoramas culturais da época abordada.

5.5. Publicações sobre Educação matemática

- BORBA, M. de C. *Tendências internacionais em formação de professores de Matemática*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

  O livro apresenta a experiência de alguns trabalhos de Educação matemática desenvolvidos internacionalmente, relacionando-os com a realidade do ensino brasileiro.

- D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação*: reflexões sobre educação e Matemática. São Paulo/Campinas: Summus/Unicamp, 1986.

  Nesse livro, o autor apresenta um enfoque crítico do que se faz na Educação matemática em diferentes sistemas educacionais, refletindo sobre o relacionamento entre Matemática e bem-estar social.

- NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (org.). *A formação do professor que ensina Matemática*: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

  Nesse livro, os autores demonstram a preocupação com a formação do professor, apresentando perspectivas e resultados de pesquisa de formação docente no campo da Educação matemática.

- PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

  Apresentando práticas de investigação que podem ser levadas para as aulas de Matemática, como a criação de conjecturas, a reflexão e a formalização do conhecimento, esse livro traz resultados de pesquisas sobre as vantagens e as dificuldades de se trabalhar com tal perspectiva em Educação matemática.

- POWELL, A.; BAIRRAL, M. *A escrita e o pensamento matemático*: interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.

  O livro exemplifica e disserta sobre como diferentes tipos de tarefas escritas podem auxiliar os estudantes no aprendizado matemático e no ensino e desenvolvimento profissional, tanto em sala de aula como em aulas à distância.

- POZO, J. I. *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998.

  De acordo com o que o autor propõe nesse livro, ensinar a resolver problemas em cada área do conhecimento significa enfatizar o ensino dos procedimentos e o papel fundamental do professor no incentivo da criação de estratégias por parte dos estudantes.

5.6. Publicações sobre metodologia do ensino de Matemática

- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2006.

  Partindo da conceituação informal da modelagem matemática até chegar à aplicação em problemas complexos e sofisticados, o autor demonstra como a modelagem pode ser aplicada às mais diversas situações, com distintos graus de dificuldade e precisão.

- BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

  Livro concebido com o propósito de auxiliar os professores brasileiros a introduzir nas escolas a aprendizagem baseada em projetos.

- PAIS, L. C. *Ensinar e aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

  O autor propõe nesse livro uma reflexão sobre os aspectos metodológicos do ensino da Matemática, atento à subjetividade do processo cognitivo e à relação entre o saber matemático e os desafios inerentes às ações integradas ao ensino e à aprendizagem escolar.

5.7. Publicações sobre educação

- COLL, C. *et al*. *Psicologia da educação virtual*: aprender e ensinar com as tecnologias da informação e da comunicação. São Paulo: Penso, 2010.

  Esse livro apresenta uma reflexão a respeito do impacto das tecnologias da informação e comunicação nos processos de ensino e aprendizagem.

- FREIRE, P.; SHOR, I. *Medo e ousadia*: o cotidiano do professor. São Paulo: Paz e Terra, 2014.

  Nesse livro, os autores destacam a necessidade da visão colaborativa na construção do conhecimento.

- MORIN, E. *A cabeça bem-feita*: repensar a reforma, reformar o pensamento. Lisboa (Portugal): Bertrand, 2009.

  Nesse livro, o autor defende as razões pelas quais o ensino transdisciplinar é essencial para a formação de cidadãos capazes de lidar com o mundo atual.

- PERRENOUD, P. *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed, 1999.

  Esse livro apresenta perspectivas e limitações na prática em sala de aula para a construção de competências e a transposição didática.

- SARMENTO, M. *et al*. *O futuro alcançou a escola?* O aluno digital, a BNCC e o uso de metodologias ativas de aprendizagem. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

  Nesse livro, vários artigos abordam os novos rumos da educação no Brasil, em um sentido de aproximação com as dinâmicas de sala de aula.

- VALENTE, J. A. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador. *In*: *Tecnologia, currículo e projetos*. Disponível em: https://tedit.net/ruh47I.

  Nesse capítulo do livro, o autor apresenta uma coleção de artigos referentes às novas maneiras de ensinar e desenvolver o currículo ao integrar tecnologias digitais à prática pedagógica voltada à aprendizagem significativa dos estudantes.

- ZABALA, A. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

  O autor propõe, nesse livro, pautas e orientações sobre a ação educativa a partir de uma perspectiva de análise e reflexão.

Orientações específicas

Organização e conteúdos do Volume

Conforme descrevemos nas *Orientações gerais* deste Manual, na concepção desta coleção estão intrínsecas as habilidades e competências específicas da Matemática e suas Tecnologias descritas para o Ensino Médio na BNCC, bem como as competências gerais da Educação Básica e os Temas Contemporâneos Transversais. Isso é percebido em cada Unidade e capítulo de todos os Volumes da coleção, tanto no Livro do Estudante quanto nas orientações apresentadas neste Manual do Professor.

O Livro do Estudante deste Volume **3** tem 5 Unidades, cada uma delas organizada em 2 a 3 capítulos.

Na Unidade **1**, Geometria no plano cartesiano, são abordadas as definições formais dos conceitos de ponto, reta e circunferência no plano cartesiano, bem como suas propriedades. Estudam-se as representações algébricas e as geométricas desses elementos, também são exploradas as transformações geométricas isométricas e homotéticas, com exemplos ilustrativos e aplicações que destacam a importância de manipular formas e tamanhos sem distorções, o que facilita a análise de formas geométricas e contribui para aplicações práticas.

Na Unidade **2**, Educação Financeira, exploramos temas essenciais para a compreensão e a gestão consciente do dinheiro no dia a dia. O conteúdo se inicia com o conceito de porcentagem, seguido de uma breve história do dinheiro, aumentos e descontos sucessivos, e o fator de atualização. A formalização de termos fundamentais da Matemática Financeira, como inflação, juros simples e juros compostos, e a relação entre juros e funções, é abordada de maneira prática e aplicada. Também discutimos a importância das moedas sociais e da economia social, assim como estratégias de poupança e gestão do orçamento familiar. Exploramos algumas formas de financiamentos, e temas atuais como empreendedorismo, uso do cartão de crédito e o impacto de novas tecnologias de pagamento, como o PIX.

Na Unidade **3**, Análise combinatória e Probabilidade, são abordados os conceitos relacionados às técnicas de contar, organizar e combinar elementos de um conjunto, assim como as noções fundamentais de probabilidade. Além das principais definições, como conceitos de permutação, combinação, arranjo, evento, probabilidade e suas fórmulas, são apresentados exemplos práticos para ilustrar os conteúdos envolvidos.

Na Unidade **4**, Estatística, os estudantes são introduzidos a esta área da Matemática responsável pela coleta, organização, análise e interpretação de dados. Os conteúdos abordam o reconhecimento de variáveis estatísticas e a classificação dessas variáveis. Os estudantes aprendem a construir tabelas de frequências e representações gráficas, bem como a selecionar o tipo de gráfico mais adequado para cada análise. Também são explorados conceitos de medidas de tendência central (como média, mediana e moda) e de dispersão (como amplitude e desvio-padrão), utilizados para resumir dados. A Unidade inclui a construção de gráficos e tabelas com apoio de tecnologias digitais e o planejamento e execução de pesquisas amostrais, finalizando com a apresentação dos resultados à comunidade escolar.

Na Unidade **5**, Computação, é abordada a história da criação de computadores, bem como os estudiosos que contribuíram nesse processo; são exploradas as contribuições da programação para a vida atual. Estudam-se as medidas de capacidade de armazenamento de computadores, algoritmos, fluxogramas e conceitos iniciais de linguagem de programação.

Avaliação de aprendizagem

Tendo em vista que a avaliação deve ser formativa e contínua, conforme explicitamos nas *Orientações gerais* deste Manual, sugerimos que você organize previamente momentos avaliativos no início de cada bloco pedagógico (Unidade ou capítulo, por exemplo), no decorrer dos blocos e ao término do desenvolvimento deles. Esses momentos, combinados com as avaliações contínuas e com os registros de acompanhamento das avaliações, darão conta dos múltiplos aspectos do processo avaliativo.

Por exemplo, no início de cada capítulo, mensure os conhecimentos prévios dos estudantes para diagnosticar as aprendizagens já efetivadas e aquelas que ainda precisam ser retomadas ou recuperadas para possibilitar o melhor desenvolvimento das aprendizagens do capítulo. Após o estudo de determinado tópico ou capítulo, cada estudante, individual ou coletivamente, e mediado por você, pode mensurar a própria compreensão dos objetos do conhecimento e dos conteúdos mobilizados, bem como pode verificar como está desenvolvendo as habilidades relacionadas. Com esse tipo de avaliação qualitativa sistemática, também se torna possível que você faça ajustes nos percursos e metodologias de ensino, ao longo do bloco pedagógico, levando em conta as aprendizagens já desenvolvidas pelos estudantes.

Ainda pensando nos processos de avaliação, visto que uma mesma questão de exames de larga escala pode mobilizar diversos conteúdos estudados, ela também pode constituir a avaliação formativa de uma rede de aprendizagens e habilidades. Assim, avalie a pertinência de sugerir as atividades da seção *Enem e vestibulares* ao término da Unidade ou no decorrer do estudo dela.

Unidade 1: Geometria no plano cartesiano

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01; CG02; CG06.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT105.
- Temas Contemporâneos Transversais: *Ciência e Tecnologia*; *Educação para o Trânsito*.

Objetivos pedagógicos

- Explorar e formalizar o conceito de distância entre dois pontos.
- Compreender a definição de ponto médio e condição de alinhamento de três pontos.
- Compreender a definição de reta e suas diferentes representações.
- Reconhecer as diferentes posições entre duas retas.
- Estudar o método de completar quadrados.
- Identificar e resolver problemas que envolvam noções de circunferência.
- Reconhecer em diferentes contextos as transformações de translação, reflexão e rotação.
- Explorar as noções de transformações geométricas isométricas com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica.
- Reconhecer em diferentes contextos as transformações geométricas homotéticas.

Sugestões para o desenvolvimento das aulas

Neste tópico, apresentamos mais sugestões de abordagens, específicas para a Unidade, pensando nas propostas pedagógicas que motivaram a elaboração dos conteúdos, das atividades e das seções do capítulo.

Abertura da Unidade

O estudo da Geometria em um sistema cartesiano ortogonal tem implicações que extrapolam a análise de pontos, retas, circunferências e outros entes geométricos que podem ser representados no plano cartesiano. Historicamente, o tema é relevante pois integra alguns conceitos de Álgebra e de Geometria, facilitando o estudo das funções e possibilitando um grande desenvolvimento na Matemática.

Foi a partir de conceitos da Geometria analítica que se desenvolveram os dispositivos de localização global (GPS), muito usados em logística, na Engenharia e na criação de novas rotas na aviação civil, entre outras aplicações.

O objetivo da imagem de abertura da Unidade é fornecer um exemplo da aplicação espacial da Geometria, contexto que faz referência ao Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia*. Neste caso, os conhecimentos de Geometria foram aplicados para a exploração espacial, pois ela fornece ferramentas para determinar o posicionamento e as trajetórias de objetos no espaço.

Como uma maneira de incentivar a busca vocacional, peça aos estudantes que pesquisem áreas de atuação profissional em que a Geometria é aplicada e, ao final do estudo da Unidade, proponha uma roda de conversa para que compartilhem suas descobertas.

Capítulo 1

A situação-problema apresentada na abertura favorece o desenvolvimento da **CEMAT01** e do Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia* e pode ser realizada em duplas. Note que, antes de tentar encontrar a medida de distância que Carolina vai percorrer, primeiramente deve-se determinar os caminhos que Carolina irá seguir. Peça aos estudantes que apresentem os caminhos que selecionaram para debaterem e compararem se têm a mesma medida ou medidas de comprimento diferentes.

No tópico "Introdução à Geometria analítica", aproveite a discussão proposta para apresentar o sistema cartesiano ortogonal, com o qual a maioria dos estudantes já deve ter alguma familiaridade. Aproveite para fazer uma revisão e apresentar o conceito de coordenadas usando exemplos simples de pontos localizados em diferentes quadrantes.

Para o tópico "Explorando a medida de distância entre 2 pontos" podemos fazer uma atividade lúdica usando a quadra de esportes (ou a própria sala de aula), um aparelho de medição (trena, por exemplo) e 2 objetos (ou estudantes). Coloque os 2 objetos ou estudantes em posições distintas no espaço escolhido para a atividade, e determine rotas diferentes para se deslocar de uma posição à outra. Peça aos estudantes (em duplas ou grupos) que determinem a medida de distância percorrida em cada rota. Ao final das medições, discuta qual trajeto foi mais eficaz (aproveite para discutir situações de logística) e qual apresentou o menor percurso.

Em seguida, solicite a eles que representem a situação discutida em um plano cartesiano, colocando referências de localização e as coordenadas dos pontos escolhidos, bem como de suas rotas. Aproveite para revisar o teorema de Pitágoras e apresentar o cálculo da medida de distância entre 2 pontos, usando os exemplos apresentados. Para complementar o estudo, proponha aos estudantes a atividade do *Explore para descobrir* (p. 17).

No tópico "Explorando o conceito de coordenadas do ponto médio de um segmento de reta", pode-se usar como exemplo inicial a localização do ponto médio de um segmento de reta com extremos sendo 2 pontos do primeiro quadrante. Ao deduzir a fórmula das coordenadas do ponto médio de um segmento de reta, complemente com exemplos do cálculo do ponto médio de segmentos de reta com extremos em quadrantes diferentes.

Antes de abordar o tópico "Condição de alinhamento de 3 pontos", é necessário revisar o cálculo de determinante

de uma matriz. Use alguns exemplos simples de determinantes de ordem 3 e finalize a revisão com um exemplo algébrico, substituindo alguns valores em uma das matrizes anteriores por incógnitas.

Discuta com os estudantes a condição de alinhamento, e aproveite para ressaltar que, no caso dos pontos fora do alinhamento, a figura formada será um triângulo. Resolva com os estudantes as atividades **6** a **8** para fixação, e as atividades **9** a **11** podem ser usadas como questões de aprofundamento e avaliação em dupla.

Antes de estudar o tópico "Equação da reta", sugerimos que solicite aos estudantes que pesquisem em jornais e revistas e tragam artigos com gráficos que tenham retas. Peça que comentem os artigos e escolha alguns gráficos para analisarem.

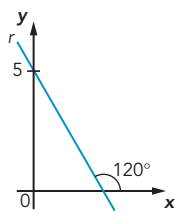
No tópico "Inclinação de uma reta", peça que analisem as diferentes apresentações, aproveitando para relacionar a inclinação com o crescimento, decrescimento ou constância do gráfico. Introduza então o tópico "Coeficiente angular de uma reta", apresentando alguns exemplos de retas com diferentes coeficientes angulares.

Resolva com os estudantes a atividade **12** e aproveite a atividade **13** para uma breve revisão, lembrando como é feito o cálculo da tangente de um ângulo e seus valores para os ângulos notáveis.

No *Reflita* (p. 26) temos como solução:

Se o coeficiente angular é $-\sqrt{3}$, então:

$$\tan \alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 120°$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

No tópico "Equação fundamental da reta", recorde os estudantes de que esse assunto já foi estudado anteriormente em funções e que é possível escrever de diversos modos a equação da reta. Podemos começar usando algum exercício para descrever a forma reduzida da equação da reta, com destaque para os coeficientes linear e angular, e fazendo a correlação com as funções lineares mencionadas no início da discussão sobre o assunto. É importante destacar que a mesma reta pode ser representada de várias formas, principalmente ao usarmos a equação geral. Faça com os estudantes a atividade resolvida **4**. As atividades **14** a **20** podem ser usadas para fixação, já as atividades **21** e **22** apresentam um maior nível de dificuldade e podem ser realizadas em dupla ou em grupos.

No tópico "Posições relativas de 2 retas no plano" para determinar e avaliar as posições relativas de 2 retas distintas no plano, discuta com os estudantes e instigue a pensarem sobre quais posições elas podem assumir, que são, nesse caso, paralelas ou concorrentes.

Após apresentar a noção de retas paralelas, ao iniciar o tópico "Retas concorrentes", apresente um exemplo para os estudantes perceberem que, neste caso, o coeficiente angular das retas é obrigatoriamente diferente.

Uma situação particular de retas concorrentes são retas perpendiculares. Para analisar esse caso, apresente aos estudantes o gráfico de 2 retas perpendiculares, por exemplo, a reta que contém os pontos (0, 0) e (4, 2), cuja equação pode ser representada por $y = \frac{x}{2}$, e a reta que contém os pontos (2, 0) e (0, 4), cuja equação pode ser representada por $y = -2x + 4$. Determine o coeficiente angular das retas e mostre que um é o oposto do inverso do outro.

Discuta também o resultado avaliando os ângulos e as respectivas tangentes. Resolva com os estudantes a atividade **27** como fixação, a atividade **28** como aprofundamento e proponha aos estudantes que façam a atividade **29** em duplas, pois apresenta um grau mais alto de dificuldade.

Apresente o tópico "Fórmula da medida de distância de um ponto a uma reta", fazendo a atividade resolvida **5** das *Atividades resolvidas* (p. 34). Solicite que façam as atividades **30** e **31** como fixação e discuta as atividades **32** e **33** como aprofundamento e revisão.

Na aula anterior ao tópico "Definição e equação da circunferência", solicite aos estudantes que tragam um compasso ou um pedaço de barbante e régua. Inicie conversando com eles a respeito da figura que será estudada. Peça que citem objetos ou situações que envolvam o uso da circunferência e que descrevam as principais características. Pergunte aos estudantes o que é o raio da circunferência e reforce que a circunferência é gerada a partir de pontos que possuem a mesma medida de distância em relação ao centro.

Propomos uma atividade que pode ser feita em dupla ou individualmente: solicite aos estudantes que representem os eixos do sistema cartesiano e, usando a régua como escala, usem o espaço para delimitar uma circunferência qualquer, determinando o centro e o raio com o auxílio da régua. Apresente então aos estudantes a definição, solicitando que escolham 2 pontos pertencentes à circunferência para verificar a veracidade. Posteriormente, apresente o tópico "Equação geral da circunferência".

As atividades **34** a **37** podem ser usadas como exercícios de fixação e avaliação, e a atividade **38** como aprofundamento. Resolva com os estudantes a atividade **39**, pois apresenta maior grau de dificuldade. Já as atividades **40** e **41** podem ser feitas em dupla.

Conexões (p. 39)

No final do capítulo é apresentada a seção *Conexões*, que apresenta uma breve ilustração sobre triangulação no GPS, cenário em que estão presentes os Temas Contemporâneos Transversais *Ciência e Tecnologia* e *Educação para o Trânsito*.

Aproveite a oportunidade para comentar sobre a matemática e cientista da computação estadunidense Gladys Mae West, conhecida pelo trabalho pioneiro no desenvolvimento do sistema de posicionamento global (GPS). Durante sua carreira no Naval Surface Warfare

Center, West desempenhou um papel crucial no processamento de dados para modelos matemáticos que descrevem a forma da Terra (geóide), trabalho essencial para o funcionamento do GPS moderno. Em 2018, ela foi incluída no *Hall* da Fama da Força Aérea dos EUA em reconhecimento às suas contribuições significativas à tecnologia.

Além de sua contribuição para o GPS, West trabalhou com satélites que ajudaram a medir a gravidade da Terra com mais precisão, impactando várias áreas, desde a navegação até previsões meteorológicas. Sua carreira notável abriu portas para muitas mulheres e minorias na ciência e na engenharia, tornando-a uma inspiração para futuras gerações de cientistas. Abordar a história da cientista da computação Gladys Mae West e suas contribuições para esse segmento contribui para promover positivamente a imagem de afrodescedentes e da mulher.

Converse com os estudantes sobre a história do Sistema de Posicionamento Global, conhecido como GPS, que começou a ser experimentado em meados da década de 1960 pela Marinha dos Estados Unidos para fins militares. No início de 1970, o Departamento de Defesa dos Estados Unidos começou a fazer alguns estudos com o objetivo de ter um sistema de navegação por satélite mais estável e robusto. O primeiro satélite de sistema de navegação com cronometragem e alcance foi lançado em 1978, mas somente em 1993 esse sistema se tornou totalmente operacional.

Capítulo 2

Proponha aos estudantes a situação-problema da abertura do capítulo (p. 41) que apresenta 2 obras do artista holandês Maurits Cornelis Escher. As perguntas associadas contribuem para identificar as características de simetria em figuras e pensar em outras situações que recordem de terem visto figuras com tais propriedades, mobilizando o desenvolvimento da **CG01**.

Para esta abertura, é possível desenvolver aulas em conjunto com professores de Arte, explorando as transformações geométricas isométricas, que são usadas para criar obras artísticas com padrões repetitivos e simétricos, mobilizando assim a **EM13MAT105**. Um uso comum de tais transformações é em mosaicos e padrões de ladrilhos, onde uma figura é repetida usando translações, rotações e reflexões para cobrir uma superfície sem sobreposições ou lacunas. Converse com um professor de Arte sobre obras de arte que possuem tais transformações e apresente-as aos estudantes, para que identifiquem as transformações contidas em cada obra.

No tópico "Explorando as transformações geométricas isométricas", ao apresentar a definição desse conceito, chame a atenção para as 2 imagens exploradas anteriormente, para que os estudantes as visualizem e identifiquem características que indicam essas transformações.

Ao abordar a translação, indique exemplos do dia a dia para ilustrar o conceito aos estudantes, como mover um livro sobre uma mesa ou deslizar uma peça de um tabuleiro de xadrez. Mostre imagens ou animações que demonstrem claramente o movimento de uma figura de uma posição para outra.

Ao estudar a noção de reflexão, ressalte aos estudantes a importância da determinação do eixo de simetria para então aplicar a reflexão de uma figura. A reflexão está diretamente relacionada à simetria, um conceito essencial na Arte, *Design*, Arquitetura e até na natureza. Estudar reflexão permite entender como a simetria funciona, o que é crucial para criar padrões estéticos e harmônicos. Reforce também que trabalhar com reflexões ajuda a melhorar as habilidades de visualização e manipulação de figuras no espaço, o que é particularmente útil na Óptica (reflexão da luz), Física (espelhos e reflexão de ondas) e na informática (manipulação de imagens e gráficos).

Ao abordar rotação, esclareça aos estudantes que rotação é uma transformação geométrica em que uma figura gira em torno de um ponto fixo, chamado de centro de rotação, mantendo seu tamanho e forma. Use exemplos como o movimento dos ponteiros de um relógio, a rotação de uma porta em suas dobradiças, ou o giro de uma roda para ilustrar o conceito. Explique que o ponto ao redor do qual a figura gira pode estar dentro, fora ou sobre a própria figura. Discuta o sentido horário e anti-horário da rotação e como isso afeta a posição final da figura.

Para abordar o tópico "Explorando as transformações geométricas homotéticas" e propiciar o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT105**, peça aos estudantes que analisem a foto da suculenta e da concha e respondam às perguntas propostas do *Explore para descobrir* (p. 51). Peça que deem exemplos em que existam padrões parecidos aos identificados nas fotos da atividade. Na sequência, explique que uma homotetia é uma transformação geométrica que altera o tamanho de uma figura, mantendo sua forma e proporções. Em uma homotetia, todas as distâncias de uma figura em relação a um ponto fixo (chamado de centro de homotetia) são multiplicadas por um mesmo fator, chamado de razão de homotetia. Chame a atenção novamente para as fotos da atividade, para que os estudantes visualizem e identifiquem características que indicam esse tipo de transformação. Use exemplos do cotidiano, como aumentar ou reduzir uma imagem em uma fotocopiadora ou em um editor de fotos, para ilustrar o conceito. As atividades ao final podem ser propostas como fechamento do conteúdo de transformações geométricas. Resolva com os estudantes as atividades **1** a **4**, comentando o *Sobre o assunto* (p. 56), a respeito da série *Metamorphose*, do artista Escher, e proponha que realizem em grupos as atividades **5** a **8**.

Tecnologias digitais (p. 47)

O objetivo dessa seção é propor aos estudantes que façam construções em um *software* de Geometria dinâmica e ilustrem as transformações de translação, reflexão e rotação em diferentes direções, eixos de simetria, centros e ângulos de rotação. Se possível, leve os estudantes ao laboratório de informática e peça que formem duplas para fazerem as construções propostas na seção e anotarem suas observações no caderno.

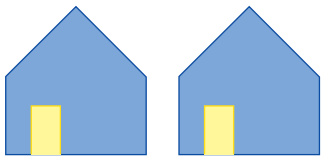
Tecnologias digitais (p. 54)

Nesta seção, assim como anteriormente, o objetivo é propor aos estudantes que construam figuras, utilizando *softwares*, para mostrar de forma dinâmica como elas se transformam com diferentes centros e razões de homotetia.

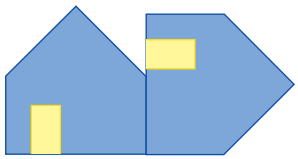
Mais atividades

1. Em cada item, classifique a transformação da figura da casa da direita em relação à da esquerda.

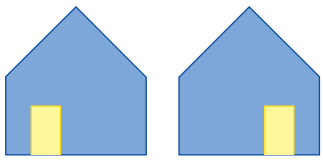
a)



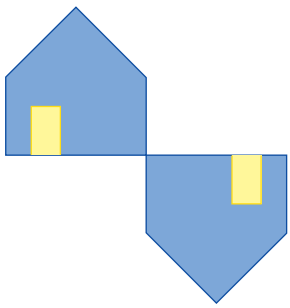
b)



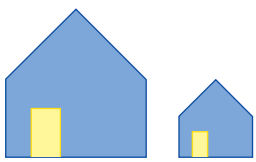
c)



d)



e)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Resolução:

a) Transformação isométrica de translação à direita.

b) Transformação isométrica de rotação de 90° em sentido horário em torno do extremo direito inferior da casa.

c) Transformação isométrica de reflexão em relação a um eixo vertical.

d) Transformação isométrica de rotação de 180° em sentido horário em torno do extremo direito inferior da casa ou reflexão em torno de um eixo diagonal.

e) Transformação homotética.

Unidade 2: Educação financeira

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01; CG06; CG07; CG10.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01; CEMAT02; CEMAT03.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT101; EM13MAT104; EM13MAT203; EM13MAT303.
- Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13CHS104; EM13CHS201; EM13CHS401.
- Temas Contemporâneos Transversais: *Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Financeira*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Saúde*; *Trabalho*; *Vida Familiar e Social*.

Objetivos pedagógicos

- Resolver problemas envolvendo o cálculo de porcentagem.
- Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade.
- Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo juros para tomar decisões.
- Resolver problemas envolvendo o cálculo de juros simples ou compostos.
- Analisar e interpretar o cálculo envolvido em diferentes sistemas de amortização de financiamento para avaliar qual deles é o mais vantajoso.
- Reconhecer as funções de uma moeda oficial na sociedade.
- Analisar a importância das moedas sociais em algumas comunidades e a sua funcionalidade.
- Comparar situações que envolvem juros simples com situações que envolvem juros compostos, por meio de análise de tabelas e de interpretação gráfica.

Abertura da Unidade

Na abertura da Unidade são propostas questões para explorar o conhecimento prévio dos estudantes em relação ao planejamento financeiro e aos conceitos de Educação e Matemática financeira. Em particular, os questionamentos dessa abertura favorecem, além do Tema Contemporâneo Transversal *Educação Financeira*, a **CEMAT01**.

Capítulo 1

A situação-problema apresenta promoções de roupas que variam conforme a quantidade de peças compradas. A porcentagem serve para determinar o valor do desconto. É importante fornecer alguns exemplos de falsas promoções, como ocorre em campanhas publicitárias em que, dias antes de anunciar o preço, o aumentam, dando a falsa impressão de uma taxa maior de desconto. Nesses

casos, a propaganda induz o consumidor a pensar que estão sendo dados grandes descontos que não existem.

O tópico "Explorando o conceito de porcentagem" aborda o uso da porcentagem em contextos financeiros, especialmente no cálculo de valores relacionados a compras e investimentos. Ele apresenta um exemplo prático em que uma pessoa deve decidir entre pagar uma compra à vista ou em 2 parcelas iguais, considerando o rendimento mensal de um fundo de investimento. Por meio desse exemplo, os estudantes podem analisar qual opção de pagamento é mais vantajosa do ponto de vista financeiro.

O tópico "Formalizando o conceito de porcentagem" revisa o conceito de porcentagem, explicando como ela representa uma fração de denominador 100 e como se relaciona a outras formas de representação numérica, como frações e decimais. Além disso, o objetivo é desenvolver o raciocínio lógico-matemático dos estudantes por meio de analogias, conectando esses conceitos a situações práticas. Após este tópico, apresenta-se a seção de atividades para que os estudantes possam aplicar e fortalecer esses conhecimentos em contextos financeiros.

As atividades desse tópico apresentam situações que envolvem porcentagem relacionadas a diferentes temáticas e contextos. Podemos citar a atividade **5**, que se relaciona ao Tema Contemporâneo Transversal *Saúde*, e a atividade **7**, que envolve investimentos e poupança.

Além dos Temas Contemporâneos Transversais relacionados aos conteúdos de Matemática financeira, identificamos o favorecimento parcial das habilidades **EM13MAT104** e **EM13MAT203**.

O tópico "Aumentos, descontos e fator de atualização" mostra como aplicar cálculos de porcentagem em contextos financeiros reais. Os estudantes devem explorar o impacto da taxa Selic em investimentos ao longo dos anos e aprender a calcular variações de preço, tanto em casos de aumento quanto de desconto, utilizando fatores de atualização. Esse tópico ajudará a consolidar o entendimento sobre a relação entre porcentagem e variações de valores ao longo do tempo.

No tópico "Formalizando alguns conceitos de Matemática financeira", a situação mostra como a aplicação do dinheiro na poupança gera um rendimento relativamente pequeno, mas é melhor do que simplesmente só guardar o dinheiro. Comente sobre outros tipos de investimentos financeiros e solicite aos estudantes que pesquisem as diferentes taxas de rendimento que existem e qual o risco embutido nelas. Segundo teóricos da área de Economia, quanto maior o risco, maior deve ser o retorno de um investimento.

São definidos termos-chave da Matemática financeira: capital, período/tempo, empréstimos, juros, taxa de juros, montante. Adiante, explica-se o que é inflação, o que é índice IPCA, e como são definidos. Esse é um bom momento para recordar que o Brasil passou por períodos de alta inflação e, assim, por mudanças de moeda e conversões, que nem sempre eram simples de fazer e que influem, por exemplo, em ações de devolução de valores corrigidos devidos pelo Estado. Essas ações favorecem a habilidade **EM13MAT104**, principalmente quando se destaca como é calculada a inflação oficial, quais itens a compõem e os pesos atribuídos a cada um deles.

Mais sobre o assunto

Se julgar pertinente, proponha aos estudantes o filme baseado em fatos reais *A Grande Aposta*, que mostra como diferentes personagens ligados a grandes investidores do mercado financeiro descobriram a crise do mercado imobiliário estadunidense e lidaram com ela, crise que afetou a economia daquele país em 2008, levando a crises generalizadas em todo o mundo.

A GRANDE aposta. Direção: Adam McKay. Elenco: Christian Bale, Steve Carell, Ryan Gosling, Brad Pitt e outros. Roteiro: Charles Randolph e Adam McKay (baseado no livro de Michael Lewis). Estados Unidos: Paramount Pictures, 2015. 130 min.

As atividades propostas nos tópicos "Juros simples" e "Juros compostos" favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT303**, pois tratam da comparação entre o crescimento linear e o crescimento exponencial. Incentive os estudantes a usar planilhas para desenvolver os algoritmos de cálculo de cada tipo de montante e, a partir dos dados gerados, a representar os gráficos referentes a cada um.

O tópico "Relação entre juros e funções" aborda a relação entre estes, comparando como os juros simples e compostos afetam o crescimento de uma dívida ao longo do tempo. Os estudantes devem identificar a diferença entre crescimento linear e exponencial e como isso se reflete em gráficos matemáticos.

Incentive-os a analisar criticamente textos que envolvem cálculos de juros, verificando se os dados apresentados são suficientes e confiáveis. Em textos com falta de dados ou com informações não confiáveis, proponha a eles que identifiquem e superem as fragilidades argumentativas, destacando a importância de embasar argumentos com dados precisos e corretos ao discutir questões financeiras. Isso não só reforça o conteúdo matemático, mas também desenvolve habilidades críticas e argumentativas.

Conexões (p. 72)

A seção aborda o Tema Contemporâneo Transversal *Diversidade Cultural* ao mostrar como diferentes culturas e civilizações, ao longo do tempo, desenvolveram as próprias moedas e regras de comércio. Isso permite que os estudantes compreendam a diversidade cultural nas práticas econômicas, destacando a riqueza de experiências e inovações que cada cultura trouxe para a evolução do dinheiro. Ao explorar essas variações culturais, os estudantes podem desenvolver respeito e valorização pela diversidade, alinhando-se com a **CG01** da BNCC, que incentiva o conhecimento de si e do outro e o respeito à diversidade.

Em termos de habilidades específicas da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, a habilidade **EM13CHS104** propõe que os estudantes analisem criticamente as transformações econômicas ao longo da

história. Ao estudar essa seção, os estudantes podem identificar essas transformações, desde o escambo até as moedas digitais, e compreender os fatores culturais, políticos e econômicos que influenciaram essas mudanças.

Já a habilidade **EM13CHS201** envolve a análise da interação entre processos históricos e dinâmicas culturais, econômicas e políticas. A seção permite que os estudantes reflitam sobre como a evolução do dinheiro não foi apenas uma questão econômica, mas também cultural e política, reconhecendo as relações de poder e a estruturação das sociedades ao longo do tempo.

A possibilidade de interdisciplinaridade com a História é evidente, pois a análise da evolução do dinheiro oferece uma perspectiva histórica das sociedades humanas, permitindo aos estudantes que conectem o estudo econômico à evolução social e política. Eles podem explorar como eventos históricos, por exemplo, guerras, colonização e globalização, impactaram as práticas econômicas e o uso do dinheiro, enriquecendo a compreensão tanto da História quanto das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Conexões (p. 95)

O trabalho com esta seção permite a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Ao explorar a temática das moedas sociais, os estudantes têm a oportunidade de reconhecê-las como um instrumento de construção econômico-social em comunidades brasileiras.

O conteúdo apresentado faz com que os estudantes compreendam como a circulação da moeda social contribui para a configuração de uma economia local, favorecendo o desenvolvimento dos Temas Contemporâneos Transversais *Educação Financeira* e *Educação para o Consumo*. Além disso, o Tema Contemporâneo Transversal *Vida Familiar e Social* é explorado quando os estudantes reconhecem que os bancos comunitários de desenvolvimento social oportunizam para as comunidades experiências baseadas em laços sociais e relações de confiança.

Ao apresentar o mecanismo de circulação das moedas sociais em comunidades mais vulneráveis ou com economia baseada em coleta ou pesca – como comunidades indígenas ou quilombolas – os Temas Contemporâneos Transversais *Diversidade cultural* e *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras* também são desenvolvidos.

Abordar a temática da economia solidária, da organização social e das relações de trabalho permite o desenvolvimento da **CE13CHS201** e da **CE13CHS401**, possibilitando um trabalho interdisciplinar com o professor de Sociologia, da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Além de reconhecer a importância das moedas sociais como instrumento de construção econômico-social, é fundamental valorizar as práticas e saberes tradicionais das comunidades quilombolas. A Etnomatemática, que estuda como diferentes grupos culturais entendem e utilizam conceitos matemáticos, oferece uma perspectiva enriquecedora para compreender como essas comunidades desenvolvem formas únicas de organização econômica e social. Ao integrar a Etnomatemática ao estudo das moedas sociais, os estudantes não apenas exploram as práticas econômicas dessas comunidades, mas também reconhecem e valorizam suas contribuições para o patrimônio cultural e histórico brasileiro.

Mais sobre o assunto

Sugerimos, a seguir, algumas leituras para complementar esse estudo.

- *Bancos Comunitários e Moedas Sociais Digitais como Mecanismos de Inclusão Financeira e Economia Solidária: uma revisão sistemática da literatura*. Disponível em: https://tedit.net/2s3c7i. Acesso em: 26 set. 2024.
  Esse artigo mostra como os Bancos Comunitários de Desenvolvimento, por meio das moedas sociais, proporcionam a inclusão financeira de pessoas que não têm acesso aos serviços bancários tradicionais.
- *Moedas Sociais e Suas Contribuições em Comunidades Economicamente Precarizadas*. Disponível em: https://tedit.net/2pl2sy. Acesso em: 26 set. 2024.
  Esse estudo mostra os efeitos e contribuições promovidos pela utilização de moedas sociais em comunidades marcadas pela condição de precariedade socioeconômica.
- *Utilização da moeda social como meio de desenvolvimento sustentável: estudo de caso da inovação social ocorrida em Maricá/RJ*. Disponível em: https://tedit.net/pzjxyg. Acesso em: 26 set. 2024.
  O artigo faz uma análise da implementação de um projeto de utilização de moeda social em Maricá-RJ.

Capítulo 2

A situação de abertura deste capítulo traz uma simulação do rendimento de uma poupança e propõe encontrar valores do rendimento ao longo do tempo. Já o tópico "Orçamento pessoal" aborda o conceito de orçamento pessoal, enfatizando a importância da Educação financeira na gestão eficaz do dinheiro. Os estudantes devem estudar sobre como estabelecer metas financeiras, elaborar planilhas de controle de gastos e receitas, e acompanhar e ajustar periodicamente o orçamento para atingir os próprios objetivos. Incentive os estudantes a praticar a criação dos próprios orçamentos pessoais, aplicando as etapas discutidas no texto. Isso não só reforça o conteúdo aprendido, mas também os prepara para tomar decisões financeiras mais informadas e conscientes.

O tópico "Poupança e outros investimentos" explora alguns tipos de investimentos, oferecendo uma visão geral sobre a poupança como uma opção segura e simples, e introduzindo alternativas como títulos públicos, títulos privados e o mercado de ações. São apresentadas as características, rentabilidade e riscos associados a cada tipo de investimento. Proponha aos estudantes que comparem a poupança com outros tipos de investimento utilizando simulações práticas. Incentive-os a avaliar qual modalidade melhor se alinha com os objetivos financeiros e perfil de risco de cada um, promovendo um entendimento mais profundo das opções disponíveis e ajudando-os a tomar decisões financeiras.

O objetivo do tópico "Financiamento" é abordar esse conceito, detalhando como funciona o parcelamento de compras e a aplicação de juros sobre o saldo devedor. O texto explora os sistemas de amortização SAC (Sistema de Amortização Constante) e Price, comparando suas características e cálculos com exemplos práticos. Proponha atividades práticas em que os estudantes simulem financiamentos usando ambos os sistemas de amortização, comparando o impacto dos juros sobre o custo total e o valor das parcelas. Isso ajudará os estudantes a entenderem melhor as implicações financeiras dos diferentes métodos e a importância do planejamento e da análise na escolha de um financiamento.

O tópico "Dívidas e créditos" aborda o uso de cartões de crédito e do sistema de pagamentos instantâneos Pix. O cartão de crédito permite realizar compras parceladas, mas com altos juros se o saldo não for quitado integralmente. A gestão cuidadosa do crédito é crucial para evitar dívidas crescentes. O Pix, por outro lado, oferece uma alternativa rápida e econômica para transações financeiras, com a vantagem de ser gratuito para pessoas físicas e disponível 24 horas por dia. O texto também inclui dicas para evitar problemas financeiros associados ao uso do cartão de crédito e orientações sobre a segurança no uso do Pix.

Conexões (p. 107)

O Tema Contemporâneo Transversal *Trabalho* pode ser desenvolvido pelo estudante ao realizar as atividades desta seção, pois explora como o empreendedorismo se relaciona diretamente com as transformações no mundo do trabalho. Através de exemplos práticos e conceitos fundamentais, os estudantes podem refletir sobre como as inovações e a identificação de oportunidades no mercado estão ligadas ao desenvolvimento econômico e à criação de novos negócios. Isso permite uma compreensão mais ampla das motivações e desafios do empreendedorismo, conectando teoria e prática ao contexto atual do mercado de trabalho.

A atividade **2** promove a **CG06** e a **CG07** da BNCC ao incentivar os estudantes a planejar e resolver problemas de forma crítica e criativa, ao imaginar um empreendimento inovador para seu bairro. Além disso, ao explicar a viabilidade e a inovação do negócio, os estudantes desenvolvem a capacidade de argumentar de acordo com dados e informações confiáveis, articulando as ideias de maneira clara e persuasiva. Isso contribui para o desenvolvimento de habilidades essenciais tanto no campo acadêmico quanto no mercado de trabalho.

Além da sala de aula (p. 113)

O conteúdo apresentado contribui para que os estudantes compreendam o funcionamento dos financiamentos bancários, com ênfase nos sistemas de amortização SAC e Price, favorecendo o desenvolvimento dos Temas Contemporâneos Transversais *Educação Financeira* e *Ciência e Tecnologia*. Além disso, o Tema Contemporâneo Transversal *Vida Familiar e Social* é explorado à medida que os estudantes reconhecem o direito à moradia como um direito humano.

É apresentado um passo a passo para que os estudantes utilizem um *software* para a simulação de financiamento.

Nessa seção é retomado um conceito do pensamento computacional, o algoritmo, em que o estudante precisa sintetizar todas as ideias já estudadas. O algoritmo trabalhado no pensamento computacional possibilita que outros conceitos também sejam absorvidos, visto que os 4 pilares do pensamento computacional (decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmo) são abordados de maneira linear.

Portanto, por mais que a atividade envolva diretamente apenas o algoritmo, o estudante precisa utilizar: a decomposição para analisar o problema, por exemplo, e decidir o que será necessário ou não para o que ele precisa; o reconhecimento de padrões para perceber as diferenças de um sistema de amortização para o outro; e a abstração para conseguir sintetizar tudo de maneira geral e transformar em um algoritmo.

No tópico *Indo além*, é proposto o desenvolvimento de um evento comunitário em que os estudantes irão tirar dúvidas da comunidade acerca dos sistemas de financiamento, bem como realizar ações que promoverão a Educação financeira.

Durante a realização da pesquisa proposta na etapa **2**, ressalte a importância de buscar informações sobre a comunidade local e sobre os critérios de elegibilidade para que se consiga um financiamento. Além disso, verifique se não restam dúvidas sobre os sistemas de amortização. Em seguida, promova um momento de compartilhamento de informações entre os grupos.

Na etapa **3**, os estudantes devem desenvolver a proposta. Verifique se eles se sentem seguros para apresentar o projeto à comunidade. Ao abrir a escola para a comunidade e compartilhar informações, os estudantes desenvolvem com maior ênfase a **CG10**.

Na etapa **4**, os estudantes devem promover um evento para tirar dúvidas da comunidade acerca dos sistemas de amortização. Combine previamente, com as pessoas competentes, a possibilidade de organização do evento. Se possível, verifique a possibilidade de utilização dos laboratórios de informática, caso a escola tenha, para fazer as simulações. Caso optem pela utilização de salas de aula, sugira aos estudantes que as tornem temáticas, com dicas de Educação financeira, por exemplo.

Espera-se que, ao longo do desenvolvimento desse projeto, os estudantes exercitem a empatia e o diálogo ao analisar os problemas da comunidade local.

Mais sobre o assunto

Sugerimos a leitura das cartilhas indicadas a seguir:

- *Cartilhas e materiais didáticos*. Disponível em: https://tedit.net/15in8v. Acesso em: 26 set. 2024.
  Nessa cartilha, é possível encontrar materiais que visam divulgar o direito à moradia adequada. Os materiais têm linguagem acessível para o público em geral e podem ser baixados gratuitamente.
- Cartilha do Procon-SP com dicas de Educação financeira. *Educação financeira: um guia para ajudar a administrar sua vida financeira*. Disponível em: https://tedit.net/ucz5r8. Acesso em: 26 set. 2024.
- *Sistema de amortização*. O *site* traz um apanhado geral sobre os sistemas de amortização existentes. Disponível em: https://tedit.net/4r0s8v. Acesso em: 26 set. 2024.

Mais atividades

1. Converse com os estudantes a respeito das perspectivas deles para o futuro. Para isso, sugerimos uma prospecção, mesmo que idealizada e imprecisa, para os próximos 12 anos. Conduza a conversa de maneira que se sintam confortáveis para falar e ouvir. Essa escuta tem de ser atenta e livre de preconceito.
Uma dinâmica possível para dar início a essa atividade é formar uma roda com os estudantes e, com um carretel de barbante ou fitilho de cetim, segurar a ponta do barbante (ou fitilho) e responder às perguntas:
- Onde eu me vejo daqui a 12 anos? (Objetivo de longo prazo.)
- O que eu posso fazer nos próximos 12 meses para estar mais perto desse objetivo de longo prazo? (Planejamento de médio prazo.)
- O que eu posso fazer nos próximos 12 dias para cumprir meu planejamento de médio prazo? (Planejamento de curto prazo.)

Depois de responder a esses 3 questionamentos, sem soltar a ponta do barbante, o estudante desenrola parte do barbante e joga o carretel para um colega. O colega pega o barbante, segura parte dele, responde às perguntas e joga o barbante para o seguinte, que repete esse processo até que todos os estudantes tenham respondido.
Depois de responderem, chame a atenção dos estudantes para o emaranhado de fios que se formou e faça uma analogia com os diferentes percursos que potencialmente cada um deles narrou para alcançar (ou ao menos perseguir) os objetivos de longo prazo. Também é possível citar diferentes origens (familiares, sociais e econômicas) dos estudantes e como isso pode favorecer ou não o alcance de seus objetivos.
Valorize nesse diálogo o pluralismo de ideias, os diferentes projetos de vida ali expostos e a empatia entre os estudantes. Mitigue qualquer tipo de preconceito por origem ou por escolhas desses jovens, não dê espaço para *bullying* ou comentários violentos ou depreciativos de qualquer natureza.

Resolução:

Respostas pessoais.

Unidade 3: Análise combinatória e probabilidade

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01; CG02; CG03; CG08.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01; CEMAT03; CEMAT05.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT106; EM13MAT310; EM13MAT311; EM13MAT312; EM13MAT315; EM13MAT511.
- Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13CNT205; EM13LGG601; EM13CHS101; EM13CO02; EM13CO14.
- Temas Contemporâneos Transversais: *Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Financeira*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Saúde*.

Objetivos pedagógicos

- Explorar situações que envolvem contagem de possibilidades e utilizar registros como esquema, listagem, diagrama de árvore, tabela, desenho, fluxograma e diagrama para representar situações e resolver problemas de contagem.
- Resolver e elaborar problemas utilizando o princípio aditivo e o princípio multiplicativo (princípio fundamental da contagem).
- Resolver e elaborar problemas que envolvem permutações, arranjos e combinações.
- Reconhecer e analisar experimentos da vida cotidiana que envolvem o cálculo de probabilidades.
- Descrever o espaço amostral de um experimento e os resultados prováveis de um evento como conjuntos.
- Resolver e elaborar problemas usando o cálculo de probabilidades em espaços discretos ou não.
- Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidades de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
- Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.
- Utilizar a probabilidade da união de dois eventos para calcular outras probabilidades.
- Utilizar a probabilidade condicional para calcular a probabilidade de ocorrerem eventos dependentes.
- Reconhecer e diferenciar eventos dependentes e independentes.
- Fazer escolhas da vida cotidiana, de acordo com as probabilidades relacionadas aos eventos em questão.

Abertura da Unidade

A imagem de abertura dessa Unidade apresenta uma situação prática e familiar para os estudantes: a criação de senhas em meios digitais. Pergunte aos estudantes sobre as situações em que eles já precisaram criar senhas para usar algum aparelho ou acessar determinados *sites*. Apresente o exemplo da abertura, em que é necessário criar uma senha com algumas letras disponíveis, e aproveite a oportunidade para conversar com os estudantes sobre a importância de criar senhas seguras e adotar boas práticas de segurança cibernética para proteger a identidade da pessoa e as informações pessoais.

Capítulo 1

A situação-problema **1**, aborda as possibilidades de montar uma sobremesa em uma sorveteria *self-service*. Comente que a ordem de escolha dentro de cada categoria (sorvete, calda e fruta) importa. Para o desenvolvimento desta situação, sugerimos usar diferentes estratégias para que o estudante possa visualizar as possibilidades e obter um resultado. Algumas das possíveis estratégias são: fazer listas de possibilidades, organizar as opções com objetos e utilizar desenhos e esquemas. Depois que o estudante compreender todas as possibilidades, sugerimos o cálculo das possibilidades de maneira intuitiva. Esse problema explora o conceito do princípio fundamental da contagem.

A situação-problema **2** apresenta um cenário de formação de grupos. Em problemas como esses, é preciso considerar que a ordem de escolha dos elementos em cada grupo não importa. Por exemplo, a dupla Michele e João é a mesma dupla que João e Michele. A estratégia que utilizamos para contar as possibilidades em problemas como este é a combinação. Oriente os estudantes a pensar nessas particularidades quando estiverem organizando as possibilidades.

Na sequência, aborde o tópico "Explorando o princípio fundamental da contagem"; para cada situação são apresentadas algumas maneiras de interpretação para investigar a solução de um problema: desenho, diagrama, esquema, lista, tabela e árvore de possibilidades, desenvolvendo assim parte da habilidade **EM13MAT315**.

No *Reflita* (p. 125), apresentamos uma reflexão a respeito de escolhas independentes, por meio do exemplo das possibilidades de caminhos do parque à farmácia, passando pelo mercado. Essa situação tem 2 etapas que não influenciam uma à outra. Levar esse aspecto em consideração é fundamental na contagem de possibilidades e no uso do princípio fundamental da contagem.

No tópico "Formalizando o princípio fundamental da contagem" verifique se os estudantes percebem que, ao resolver problemas de contagem com restrições, é interessante começar pensando na maior restrição. Por exemplo, se pretendemos descobrir a quantidade de números pares de 3 algarismos que é possível formar com os algarismos 1, 2 e 3, é importante começar fixando o 2 como algarismo das unidades para depois contar as possibilidades referentes às dezenas e centenas.

Além disso, é interessante ressaltar que, em problemas de contagem, podemos decompor o problema em etapas, para facilitar a resolução. Por exemplo, se queremos determinar a quantidade de números de 3 algarismos que tem pelo menos um algarismo igual a 2, organizamos em 3 situações: números que têm exatamente 1 algarismo igual a 2, números que têm exatamente 2 algarismos iguais a 2 e números que têm exatamente 3 algarismos iguais a 2. Essa estratégia de decomposição é um dos pilares do pensamento computacional.

Faça com os estudantes as atividades **1** e **2**, que apresentam situações em que as escolhas são independentes em cada etapa e, portanto, se pode utilizar o princípio fundamental da contagem. Na atividade **3**, além das propostas indicadas no enunciado, os estudantes podem buscar em aplicativos de entrega de alimentos os cardápios para realizar a atividade.

A atividade **5** tem uma condição a mais, devido à expressão "pelo menos", que também aparece na atividade **7**. Em situações como essas, podemos separar o problema em partes e contar as possibilidades de cada uma delas, ou então, quando as partes forem muitas, é possível subtrair do total de possibilidades apenas aquela que não contempla o enunciado. Por exemplo, na atividade **5**, podemos contar todas as possibilidades para as 6 janelas, considerando-as abertas ou fechadas, e desse número, subtraímos a situação em que todas as janelas estão fechadas.

Na atividade **8**, se julgar pertinente, proponha uma pesquisa de palavras que não têm mais uso, de palavras que se modificaram com o tempo e de palavras que são criadas todos os dias, contemplando assim a **CG02**. Essa é uma maneira de os estudantes perceberem que é realmente muito difícil quantificar todas as palavras. Contudo, por meio de cálculos de análise combinatória, é possível calcular a quantidade de palavras que podem existir dada uma determinada quantidade de letras; só não podemos afirmar que elas existem, pois muitas delas podem não ser dicionarizadas.

O principal raciocínio utilizado neste tópico é o da decomposição, que é a organização de um problema em etapas menores e mais simples, de maneira a facilitar a resolução, podendo contribuir assim para o desenvolvimento da **EM13MAT315** e da **EM13CO02**. Esse recurso é um dos pilares do pensamento computacional.

Mais sobre o assunto

O uso de jogos para o ensino de Matemática é uma estratégia muito interessante. Para ler mais sobre o assunto, sugerimos o livro *Jogos de Matemática de 1º a 3º ano*, de Kátia Smole, Maria Ignez Diniz, Neide Pessoa e Cristiane Ishihara (Série Cadernos do Mathema, v. 3. Porto Alegre: Artmed, 2008).

No tópico "Explorando as permutações simples", apresentamos inicialmente uma situação cotidiana de troca de pessoas em um banco para que os estudantes compreendam a situação de maneira intuitiva. Na sequência, apresentamos a fórmula de permutação simples e o conceito

de fatorial. As manipulações e possíveis estratégias em problemas de permutação simples são apresentadas na seção *Atividades resolvidas* (p. 132).

A atividade **14** pede para calcular a quantidade de anagramas de uma palavra, enquanto a atividade **13** incentiva o estudante a calcular e enumerar os possíveis anagramas das letras dadas, relacionando o recurso algébrico da contagem com o trabalho de escrever as possibilidades de palavras. Já na atividade **15** podemos ver que nem sempre é prático listar todas as possibilidades, já que elas podem ser muitas. Em casos como esse, é melhor utilizar as estratégias de contagem.

As atividades **16** a **19** utilizam o mesmo raciocínio, em que há troca de posição de todos os elementos e depois há restrições em que pessoas, algarismos ou letras devem estar juntas ou em posições específicas.

A atividade **23** pode ser resolvida subtraindo, do número total de possibilidades, aquelas que não se deseja considerar, em vez de contar todos os casos de interesse. Verifique quais estratégias os estudantes desenvolvem na resolução desta atividade e, se necessário, peça a eles que analisem as respostas para obter a dica da resolução usando a subtração.

No tópico "Explorando as permutações com repetição", são apresentadas as permutações com repetições. No *Explore para descobrir* (p. 135), os estudantes são incentivados a listar as possibilidades de organização das canecas, considerando primeiro que são todas diferentes, para depois considerar que as duas canecas brancas são iguais, portanto, representam uma repetição.

As respostas desse boxe são:

1. a) B_1, B_2, A, V B_2, B_1, A, V A, V, B_1, B_2 V, A, B_1, B_2
B_1, B_2, V, A B_2, B_1, V, A A, V, B_2, B_1 V, A, B_2, B_1
B_1, A, B_2, V B_2, A, B_1, V A, B_1, V, B_2 V, B_1, A, B_2
B_1, A, V, B_2 B_2, A, V, B_1 A, B_1, B_2, V V, B_1, B_2, A
B_1, V, B_2, A B_2, V, B_1, A A, B_2, B_1, V V, B_2, B_1, A
B_1, V, A, B_2 B_2, V, A, B_1 A, B_2, V, B_1 V, B_2, A, B_1

2. a) B, B, A, V B, B, A, V A, V, B, B V, A, B, B
B, B, V, A B, B, V, A A, V, B, B V, A, B, B
B, A, B, V B, A, B, V A, B, V, B V, B, A, B
B, A, V, B B, A, V, B A, B, B, V V, B, B, A
B, V, B, A B, V, B, A A, B, B, V V, B, B, A
B, V, A, B B, V, A, B A, B, V, B V, B, A, B

3. a) B_1, B_2, A, B_3 B_2, B_1, A, B_3 A, B_3, B_1, B_2 B_3, A, B_1, B_2
B_1, B_2, B_3, A B_2, B_1, B_3, A A, B_3, B_2, B_1 B_3, A, B_2, B_1
B_1, A, B_2, B_3 B_2, A, B_1, B_3 A, B_1, B_3, B_2 B_3, B_1, A, B_2
B_1, B_3, B_2, A B_2, B_3, B_1, A A, B_1, B_2, B_3 B_3, B_1, B_2, A
B_1, A, B_3, B_2 B_2, A, B_3, B_1 A, B_2, B_1, B_3 B_3, B_2, B_1, A
B_1, B_3, A, B_2 B_2, B_3, A, B_1 A, B_2, B_3, B_1 B_3, B_2, A, B_1

b) B, B, A, B B, B, A, B A, B, B, B B, A, B, B
B, B, B, A B, B, B, A A, B, B, B B, A, B, B
B, A, B, B B, A, B, B A, B, B, B B, B, A, B
B, B, B, A B, B, B, A A, B, B, B B, B, B, A
B, A, B, B B, A, B, B A, B, B, B B, B, B, A
B, B, A, B B, B, A, B A, B, B, B B, B, A, B

Na atividade **29**, os estudantes precisam perceber que a repetição é das direções para a direita e para cima. Como não são permitidos movimentos para baixo ou para a esquerda, a quantidade de movimentos necessários de um ponto a outro é a mesma, independentemente do caminho percorrido.

O tópico "Explorando os arranjos simples" é apresentado por meio de um diagrama de árvore. Sugerimos que proponha outros exemplos similares para que os estudantes façam a mesma representação em um diagrama de árvore e percebam a diferença entre a permutação e o arranjo.

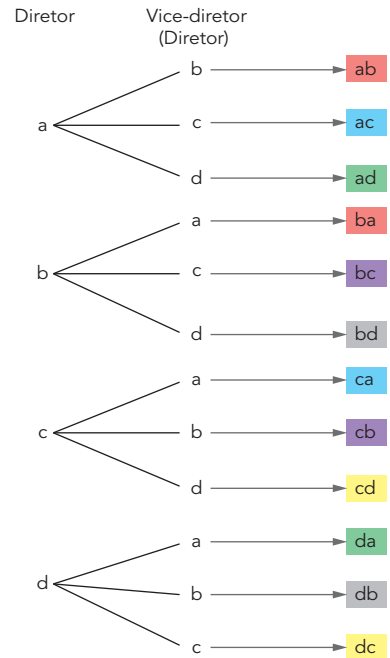
Em seguida, a partir do princípio fundamental da contagem, apresentamos a fórmula para o cálculo de arranjos simples. Contudo, é importante ressaltar sempre que o estudante pode resolver os problemas de maneira intuitiva e utilizando a fórmula do princípio fundamental da contagem, como é abordado no *Fique atento* (p. 140).

Na seção *Atividades resolvidas* (p. 140), apresentamos algumas estratégias que podem ser úteis nas resoluções de problemas que envolvem arranjos simples. Sugerimos que organize a turma em grupos de 3 ou 4 estudantes e peça a eles que analisem as estratégias utilizadas em cada atividade, indicando diferenças e similaridades. É interessante que eles proponham modificações das resoluções ou novas estratégias de solução para os problemas apresentados.

No *Explore para descobrir* (p. 142), é proposta uma situação em que inicialmente é preciso considerar agrupamentos em que a ordem importa, isso ocorre quando há diferenciação entre os cargos. Depois há uma mudança na condição e a ordem deixa de importar, neste caso, isso ocorre quando os cargos passam a ser equivalentes, assim, é preciso calcular a quantidade de combinações dos elementos.

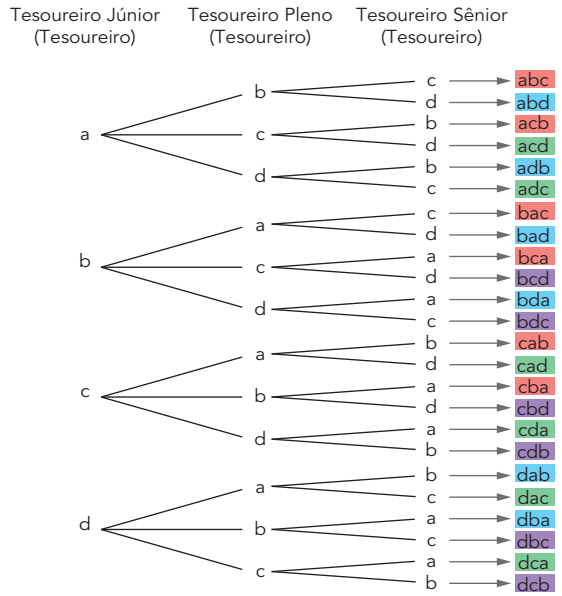
As respostas para esse boxe são:

1. Considere que os estudantes são indicados por a, b, c e d e que, na indicação das duplas, a primeira letra refere-se ao diretor e a segunda, ao vice-diretor.



WYM Design/Arquivo da editora

2. Considere que os estudantes são indicados por a, b, c e d e que, nos trios, a primeira letra refere-se ao tesoureiro júnior, a segunda, ao tesoureiro pleno e a terceira, ao tesoureiro sênior.



WYM Design/Arquivo da editora

3. Resposta pessoal. Em relação ao item **c** da atividade **1**, espera-se que os estudantes expliquem que é preciso calcular a quantidade de possibilidades de escolher 2 entre 4 pessoas (arranjo) considerando que a ordem importa ($4 \cdot 3 = 12$) e, depois, dividir o resultado pelo número de permutações que estão sendo consideradas em duplicidade ($12 \div 2! = 12 \div 2 = 6$). Em relação ao item **c** da atividade **2**, espera-se que os estudantes expliquem que é preciso calcular o número de possibilidades de escolher 3 entre 4 pessoas (arranjo) considerando que a ordem importa ($4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$) e, depois, dividir o resultado pelo número de permutações que estão sendo consideradas em duplicidade ($24 \div 3! = 24 \div 6 = 4$).

Nas *Atividades resolvidas* (p. 145), mostramos como resolver diversos problemas usando a fórmula do cálculo de combinações e usando o princípio fundamental da contagem, com uma análise mais intuitiva. Sugerimos que organize a turma em grupos para que os estudantes analisem as estratégias propostas. O objetivo é que eles compreendam o motivo do uso de cada estratégia, fazendo sugestões de mudanças que sejam condizentes com o próprio raciocínio lógico.

Para as atividades que envolvem pontos em polígonos, retome os conceitos sobre Geometria plana estudados nos Anos Finais do Ensino Fundamental. É importante que os estudantes se recordem da quantidade de pontos necessária para formar cada polígono.

As atividades **49** a **54** apresentam situações de combinações que envolvem mais restrições, de maneira que o estudante precisa retomar algumas das estratégias que ele estudou, ou criar outras. Ressalte que, além de recorrer a uma análise mais intuitiva, em muitos casos é interessante decompor os problemas em situações menores e mais fáceis de resolver. Se julgar oportuno, organize a turma em duplas para que discutam a resolução de cada problema proposto.

No tópico "Problemas que envolvem os vários tipos de agrupamento", são apresentados problemas que envolvem todos os tipos de estratégia de contagem estudados até aqui. É importante que, a cada atividade, os estudantes leiam o enunciado, analisem os dados indicados, utilizem desenhos, esquemas e diagramas para interpretar o problema, para depois fazer a resolução.

As atividades **55** a **67** estão dispostas por ordem de complexidade, de maneira que os tipos de estratégia que podem ser usados estão misturados. Essas atividades podem servir como uma revisão e aprofundamento dos conteúdos estudados neste capítulo, além de serem importantes para verificar se os estudantes conseguem distinguir agrupamentos ordenáveis ou não.

Tecnologias digitais (p. 148)

Nesta seção os estudantes precisam explorar as ferramentas do *software* LibreOffice para resolver problemas que envolvem permutação, arranjo e combinação.

Alguns problemas podem exigir cálculos difíceis ou demorados, mas que podem ser efetuados facilmente utilizando uma planilha eletrônica ou uma calculadora. O objetivo desta seção é que os estudantes aprendam as funcionalidades da planilha eletrônica que facilitam e agilizam os cálculos em análise combinatória.

Conexões (p. 152)

Nesta seção apresentamos um instrumento que foi criado em Portugal, mas é fundamental na harmonia de um ritmo muito brasileiro, o samba. Nesta seção, é favorecido o trabalho com a **CG01** e a **CG03** e com a habilidade **EM13LGG601**, uma vez que é valorizado o conhecimento musical construído no Brasil e em Portugal, bem como as manifestações artísticas que decorrem disso, de maneira que os estudantes possam conhecer e se apropriar da própria história.

Além disso, os Temas Contemporâneos Transversais *Diversidade Cultural* e *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras* podem ser trabalhados com ênfase na cultura musical brasileira, que, no caso do samba, se originou como um estilo musical no Rio de Janeiro e sofreu preconceito racial, antes de se tornar um patrimônio oral e imaterial da humanidade pela Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e a Cultura (Unesco) em 2005.

Essa narrativa reflete a necessidade de uma abordagem decolonial, que valorize e reconheça as contribuições culturais e históricas de afrodescendentes e repense as narrativas hegemônicas que muitas vezes subestimam, ignoram ou invisibilizam essas influências. Além disso, o texto explora o conceito de Etnomatemática ao discutir

as diferentes afinações do cavaquinho e sua adaptação a costumes etnográficos regionais. Esse enfoque revela como o conhecimento matemático — como proporções e tensões das cordas — está intrinsecamente ligado às práticas culturais locais, demonstrando um pluralismo de ideias em que o conhecimento tradicional e o científico se encontram e se complementam.

O texto também ressalta a contribuição de músicos afrodescendentes e destaca a importância de reconhecer e celebrar a diversidade cultural e as formas únicas de expressão artística que emergem dessa diversidade. Isso reforça a importância de promover uma educação inclusiva, que reconheça e valorize as múltiplas heranças culturais que formam a identidade brasileira.

Sugerimos que os estudantes pesquisem se na própria comunidade existem afinações e estilos musicais que fazem parte da cultura local; essa é uma maneira de os estudantes perceberem a diversidade cultural que existe no mundo. Se julgar interessante, organize um sarau em que os estudantes e membros da comunidade escolar possam apresentar a música que faz parte da cultura local. Se possível, incentive-os a criar afinações que possam contribuir para a criação de ritmos musicais.

Mais sobre o assunto

Para saber mais sobre a história do samba e como ele faz parte da cultura brasileira, sugerimos a leitura do artigo O SAMBA: cantando a história do Brasil. Disponível em: https://tedit.net/atjeip. Acesso em: 19 ago. 2024.

Capítulo 2

A situação-problema **1** da abertura do capítulo aborda o contexto de desenvolvimento de medicamentos, contemplando o Tema Contemporâneo Transversal *Saúde*, além de propiciar o trabalho com a **EM13CNT205**. Para que seja aprovada a comercialização e o uso de um medicamento, ele precisa passar por vários processos, que garantem que apenas medicamentos que demonstraram ser seguros e eficazes, de acordo com rigorosos critérios científicos, sejam disponibilizados para o uso na população. Conforme os estudantes forem apresentando respostas, comente sobre as diferentes representações para indicar uma probabilidade, por exemplo, no item **a**, a resposta pode ser 30%, 0,3 ou $\frac{30}{100}$.

A situação-problema **2** apresenta um contexto próximo dos jovens. Atualmente é muito comum encontrar esse tipo de sorteio nas redes sociais, e é importante que os estudantes saibam analisar essa situação para compreender como a probabilidade está envolvida. Ressalte que esses sorteios só podem ser realizados por empresas ou lojas, isto é, pessoas jurídicas. Sorteios realizados por pessoas físicas é crime! Oriente os estudantes a perceberem esse aspecto, pois pode se tratar de um golpe digital. Nesse contexto, contempla-se assim a **EM13CO14**. Além disso, nessa situação usamos o recurso da tabela, trabalhado no capítulo anterior, para organizar os dados do problema. Incentive os estudantes a utilizarem recursos como esse e outros para organizar e interpretar o enunciado corretamente.

No tópico "Formalizando o conceito de probabilidade" no *Reflita* (p. 156), questione os estudantes se eles sabem o que significa moeda perfeita e dado não viciado. Depois, pergunte qual é a importância de ter uma moeda perfeita ou um dado não viciado em fenômenos aleatórios e equiprováveis. É importante que percebam que, se a moeda não for perfeita, a probabilidade de ocorrer uma das faces será diferente da probabilidade de ocorrer a outra face (podemos fazer o raciocínio análogo para as faces do dado).

No *Explore para descobrir* (p. 156), os estudantes precisam avaliar se a pontuação proposta é justa ou não, para criar uma possibilidade de jogada. Para trabalhar a **CG02**, incentive os estudantes a construírem uma roleta igual à ilustrada e a jogar algumas rodadas, de maneira a investigar e compreender as regras do jogo. Depois, eles podem realizar a análise das regras e propor a criação de novas categorias.

As atividades **1** e **2** favorecem o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal *Saúde* e com a **CG08**. Na atividade **1**, sugerimos que os estudantes pesquisem mais sobre métodos contraceptivos, avaliando os prós e contras de cada um deles, dentro da própria realidade. Se julgar conveniente, utilize a metodologia ativa de sala de aula invertida e peça aos estudantes que pesquisem previamente métodos contraceptivos e, depois, organize uma conversa com toda a turma para que eles compartilhem as descobertas.

Na atividade **2**, é importante que os estudantes percebam que todos os medicamentos têm algum efeito adverso, contudo, a probabilidade de ocorrer algum efeito adverso muito grave é pequena em comparação à probabilidade de piora da doença quando não tratada. Se julgar conveniente, oriente os estudantes a pesquisar em bulas de remédios os efeitos adversos para ter essa constatação.

Essas situações são exemplos cotidianos em que a probabilidade está diretamente ligada com a saúde e o bem-estar das pessoas, mostrando que a Matemática faz parte de muitos aspectos das nossas vidas e que entendê-la é essencial para a tomada de decisão crítica e consciente.

A atividade **3** contempla as habilidades **EM13CO14** e **EM13CHS101**, uma vez que aborda a disseminação de *fake news*, um tema relevante e contemporâneo. As *fake news*, ou notícias falsas, têm um impacto significativo na sociedade moderna, pois afetam diretamente a maneira como as pessoas percebem a realidade. Comente com os estudantes que a verificação de informações ajuda a distinguir entre o que é verdadeiro e o que é falso, protegendo-nos de sermos enganados e de espalhar desinformação. A rápida disseminação de informações falsas pode influenciar opiniões, comportamentos e até decisões políticas e sociais, criando divisões, alimentando preconceitos e minando a confiança

em instituições e na mídia tradicional. Além disso, as *fake news* exploram emoções, como medo e indignação, para aumentar sua propagação e alcance. Compreender e combater a propagação de *fake news* é essencial para preservar a integridade da informação.

No tópico "Espaço amostral e evento", o trabalho com a habilidade **EM13MAT511** é favorecido por meio do estudo e do reconhecimento dos espaços amostrais discretos ou não.

Os espaços discretos têm uma quantidade de elementos que é possível contar utilizando os números naturais; podemos dizer, mais formalmente, que eles são enumeráveis. Já nos espaços amostrais não discretos, não é possível contar os elementos usando números naturais, geralmente os conjuntos são intervalos reais ou união de intervalos.

Depois de analisar os exemplos propostos, liste mais alguns exemplos de espaços amostrais que sejam ou não discretos e peça aos estudantes que diferenciem os espaços, justificando a resposta.

Na atividade **8** os estudantes são incentivados a reconhecer a importância da presença feminina em cargos de liderança, além de identificar as desigualdades que ainda persistem nesse contexto. O objetivo é estimular reflexões sobre as causas dessas disparidades e, por meio dessas discussões, contribuir para a valorização da imagem da mulher.

No tópico "Explorando o cálculo de probabilidades" é apresentada a definição de probabilidade como a razão entre o número de elementos de um evento e o número de elementos do espaço amostral referente ao evento. Essa fórmula também é conhecida como razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

Em seguida, apresentamos conclusões referentes ao cálculo de probabilidade para eventos certos e impossíveis. Se os estudantes ficarem com dúvidas sobre o motivo da probabilidade de eventos certos ser 1 e a probabilidade de eventos impossíveis ser 0, apresente alguns exemplos com contextos reais para facilitar a compreensão.

Nas *Atividades resolvidas* (p. 163), sugerimos que organize a turma em duplas ou trios e os oriente a analisar cada problema e resolução apresentados. No *Reflita* (p. 164), ressalte a diferença que a expressão "pelo menos" representa em situações de contagem de possibilidades. Se necessário, retome o assunto do capítulo anterior.

O tópico "Um pouco da história da Probabilidade" apresenta um texto que aborda o desenvolvimento histórico da teoria da probabilidade, destacando suas origens nos séculos XV e XVI, com matemáticos italianos como Luca Pacioli e Girolamo Cardano, e seu progresso através de debates matemáticos entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat no século XVII. Ele menciona o impacto dos jogos de azar na formulação inicial de conceitos probabilísticos e como matemáticos como Christian Huygens, Jakob Bernoulli, Abraham de Moivre, Leonhard Euler, Jean-Baptiste D'Alembert e Pierre de Laplace contribuíram para expandir e aplicar esses conceitos em diferentes áreas, como Economia, Ciências Sociais, Estatística e cálculos de seguros.

Mais sobre o assunto

Apresente aos estudantes o vídeo a seguir, que aborda um exemplo do "Problema do jogo interrompido", que ilustra uma situação fictícia em que Fermat e Pascal se encontram para um jogo de cara ou coroa. No vídeo, eles iniciam uma discussão sobre como dividir o prêmio quando o jogo é interrompido. Disponível em: https://tedit.net/qv5kz7. Acesso em: 26 set. 2024.

No tópico "Cálculo de probabilidades com espaço amostral não discreto", a **EM13MAT511** é trabalhada no estudo de como calcular as probabilidades de eventos quando o espaço amostral não é discreto, isto é, quando não podemos contar os elementos dele utilizando os números naturais.

No tópico "Explorando a definição teórica de probabilidade e consequências" há um *Explore para descobrir* (p. 170), que tem como objetivo fazer com que os estudantes explorem as relações de união e de intersecção dos eventos. Se necessário, retome os assuntos de união e intersecção de conjuntos. Sugerimos que você organize a turma em duplas para que eles realizem essas atividades. Essa é uma maneira de eles compartilharem o raciocínio e o pensamento dedutivo.

Na sequência, apresentamos a definição teórica de probabilidade, que envolve 3 propriedades que são abordadas. Essas propriedades são utilizadas para demonstrar um resultado importante: sejam A e B eventos de um espaço amostral Ω, então a probabilidade da união dos eventos A e B é a probabilidade de A, mais a probabilidade de B, menos a probabilidade da intersecção dos eventos A e B.

No tópico "Explorando o conceito de probabilidade condicional", a **EM13MAT511** é trabalhada, uma vez que vão utilizar os conceitos de evento e de espaço amostral que estudaram, para analisar a probabilidade condicional e eventos independentes. No *Explore para descobrir* (p. 175), é apresentada uma situação que envolve uma probabilidade condicional, para que os estudantes analisem o problema de maneira intuitiva. Na sequência, há a exploração de uma situação cotidiana para explicar como identificar uma probabilidade condicional. Sugerimos que você mostre os diagramas de Venn à medida que lê a situação do amigo secreto. Eles são importantes para que os estudantes possam visualizar mais facilmente a intersecção entre os conjuntos citados.

É importante ressaltar que, na probabilidade condicional, a condição apresentada no problema é que determina qual será o espaço amostral considerado no cálculo da probabilidade. Verifique se os estudantes conseguiram perceber de maneira intuitiva.

As atividades **33** a **44** trabalham a **EM13MAT511** e a **EM13MAT315**. A atividade **42** apresenta uma atividade

prática, que relaciona automobilismo e meteorologia, para avaliar se deve haver ou não troca de pneus. Essa é uma situação relacionada com tomada de decisões, de maneira que é muito importante ter uma margem de confiabilidade. Outras áreas como aviação e navegação fazem uso desse recurso.

Conexões (p. 182)

Nesta seção abordamos as relações entre a probabilidade e a Genética, em que o trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais *Ciência e Tecnologia* e *Saúde* são favorecidos.

Se julgar necessário, peça ao professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias que explique em detalhes alguns dos termos como cromossomos, alelos e zigoto. Outra possibilidade é pedir aos estudantes que pesquisem o assunto antes de ler a seção, para compartilhar com a turma as próprias descobertas. Essa metodologia ativa é a sala de aula invertida, explicada nas *Orientações gerais* deste Manual.

É importante que os estudantes entendam que são os tipos de genótipos que determinam as probabilidades.

Mais sobre o assunto

A minipalestra TED-ed Como as ervilhas de Mendel nos auxiliaram a entender a genética, por Hortensia Jiménez Díaz, apresenta mais informações sobre fatores genéticos hereditários. Habilite a função de legendas, caso necessário. Disponível em: https://tedit.net/66bu21. Acesso em: 7 set. 2024.

Mais atividades

1. De quantos modos diferentes é possível formar uma equipe de 3 astronautas em um grupo de 20 astronautas?

Resolução:

Neste caso, a ordem não importa, então podemos usar a fórmula para calcular a combinação de 20 astronautas, tomados 3 a 3.

$$C_{20,3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{\overset{10}{\cancel{20}} \cdot 19 \cdot \overset{6}{\cancel{18}}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 1140$$

Logo, é possível formar uma equipe de 1140 modos diferentes.

2. Considere todos os anagramas da palavra ROMA. Escolhendo um deles ao acaso, qual é a probabilidade de ocorrer "AMOR"?

Resolução:

O espaço amostral é formado por todos os anagramas da palavra ROMA. Podemos calcular a permutação das 4 letras, sem repetição.

$$n(\Omega) = P_4 = 4! = 24$$

Seja o evento A: "ocorrer a palavra AMOR", o número de elementos desse evento é 1.

$$n(A) = 1$$

Como os eventos são equiprováveis, podemos calcular a probabilidade.

$$p(A) = \frac{1}{24}$$

A probabilidade é $\frac{1}{24}$.

Unidade 4: Estatística

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01; CG02; CG04; CG05; CG07; CG08; CG09; CG10.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01; CEMAT02; CEMAT03; CEMAT04.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT102; EM13MAT104; EM13MAT202; EM13MAT203; EM13MAT312; EM13MAT314; EM13MAT316; EM13MAT405; EM13MAT406; EM13MAT407.
- Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13CHS103; EM13CHS402; EM13CNT101; EM13CNT301.
- Temas Contemporâneos Transversais: *Educação Alimentar e Nutricional*; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação Financeira*; *Educação para o Consumo*; *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso*; *Saúde*; *Vida Familiar e Social*.

Objetivos pedagógicos

- Identificar e classificar variáveis estatísticas.
- Construir tabelas de frequências.
- Identificar e construir representações gráficas, decidindo qual(is) é(são) a(s) mais efetiva(s) para cada análise.
- Interpretar e comparar conjuntos de dados por meio de tabelas e gráficos.
- Resolver e elaborar problemas nos quais é necessário calcular e interpretar diferentes medidas de tendência central e de dispersão.
- Utilizar medidas estatísticas para resumir um conjunto de dados.
- Construir tabelas e representações gráficas e calcular medidas estatísticas utilizando recursos tecnológicos.
- Planejar e executar pesquisa amostral.
- Resumir os dados de uma pesquisa amostral por meio das medidas de tendência central e de dispersão e apresentá-los à comunidade escolar.

Abertura da Unidade

A Estatística é crucial para a análise e compreensão de dados, influenciando decisões em áreas como Educação, Economia e Saúde. Por exemplo, o Mapa do Ensino Superior, criado pelo Instituto Semesp, usa dados estatísticos para orientar políticas públicas. Para introduzir o tema, sugere-se começar com perguntas sobre pesquisas conhecidas, como o Censo Demográfico, e discutir os passos para

realizar uma pesquisa estruturada. Isso ajuda a contextualizar a importância da Estatística e estimula a curiosidade dos estudantes sobre a aplicação prática dos conceitos.

Mais sobre o assunto

Assista ao filme baseado em fatos reais *O Homem que Mudou o Jogo*, que mostra como um executivo do *baseball* utilizou o histórico estatístico de desempenho dos atletas para montar o plantel que se destacou mesmo com poucos recursos financeiros.

O HOMEM que Mudou o Jogo. Direção: Bennett Miller. Elenco: Brad Pitt, Jonah Hill, Philip Seymour Hoffman e outros. Roteiro: Steven Zaillian e Aaron Sorkin (baseado no livro de Michael Lewis). Estados Unidos: Sony Pictures, 2011. 133 min.

Capítulo 1

Na situação-problema **1** da abertura de capítulo, é apresentada uma tabela de preferência por navegadores de internet, de maneira que os estudantes precisem completar dados ausentes utilizando informações fornecidas, tanto em valores absolutos quanto relativos.

Já na situação-problema **2**, há a apresentação de uma pesquisa de mercado e a análise de representações gráficas dos dados, desenvolvendo a **EM13MAT406**. Nesta situação, os estudantes discutem diferentes maneiras de apresentar dados, bem como as vantagens e desvantagens de cada representação, além de modos de tornar as informações comunicáveis. Essas discussões permitem aplicar metodologias de resolução de casos em equipes e avaliar conhecimentos prévios sobre representações gráficas, conforme previsto pela BNCC.

No item **c**, espera-se que os estudantes percebam os seguintes problemas no gráfico: a escala vertical para as colunas está incorreta, pois as medidas de comprimento das dimensões da última coluna estão desproporcionais em relação às medidas de comprimento das outras colunas; não está indicado o que representa cada eixo; a indicação de 40% está incorreta, pois 40 dos 110 clientes escolheram o roteiro grandes cidades, o que corresponde aproximadamente a 36%; as linhas da escala vertical não chegam até a última coluna.

No item **d**, espera-se que os estudantes respondam que se pode verificar a fonte dos dados e consultá-la a fim de checá-los; verificar se os valores informados nos rótulos são proporcionais aos tamanhos das barras (ou às medidas de abertura dos ângulos, no caso de gráficos de setores); caso haja uma tabela de dados ou de registro das informações, confrontá-la com as informações obtidas no gráfico.

O tópico "População e amostra" explora os conceitos de população e amostra na Estatística, destacando como uma pesquisa pode envolver toda a população ou uma amostra representativa dela. Aborda a escolha adequada da amostra para garantir resultados confiáveis, além dos tipos de amostras, como aleatória simples, sistemática e estratificada, e os usos em diferentes pesquisas.

No tópico "Variável" são discutidas as variáveis em estudos estatísticos, que são características investigadas e podem ser classificadas como qualitativas (nominais e ordinais) ou quantitativas (discretas e contínuas). Exemplos práticos, como idade e tipo de sabonete, ajudam a entender como essas variáveis são usadas na pesquisa e a importância das classificações para a análise de dados.

As atividades desses tópicos visam desenvolver parte da **EM13MAT102**, focando na análise crítica de tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas divulgadas pela mídia. Os estudantes serão incentivados a identificar erros, como escalas inadequadas ou amostras não representativas, promovendo uma interpretação mais precisa dos dados.

No tópico "Pesquisa estatística", exploramos a pesquisa estatística como ferramenta em diversas áreas, abordando as etapas fundamentais: definição da população e da amostra, coleta, organização e análise de dados, e apresentação dos resultados com gráficos e tabelas.

Já no tópico "Frequência absoluta e frequência relativa", são trabalhadas parcialmente a **EM13MAT316**, a **EM13MAT405** e a **EM13MAT104**, de maneira que os estudantes serão levados a calcular e interpretar medidas de tendência central e medidas de dispersão, aplicar conceitos de programação na implementação de algoritmos e interpretar taxas socioeconômicas, analisando criticamente os processos de cálculo.

No item **b** da atividade **8**, são apresentados dados incompletos, pois isso contribui para desenvolver habilidades críticas, preparando os estudantes para selecionar e interpretar informações relevantes que permitam tomar decisões informadas em contextos reais.

No tópico "Representações gráficas", a **EM13MAT102**, a **EM13MAT405** e a **EM13MAT407** são desenvolvidas à medida que os estudantes aprendem a analisar criticamente tabelas, gráficos e amostras, detectando possíveis inadequações que podem induzir a erros de interpretação. Eles também são incentivados a interpretar representações gráficas em diferentes contextos, fortalecendo a capacidade de tomar decisões informadas de acordo com dados.

Além disso, os Temas Contemporâneos Transversais *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso* e *Educação Financeira* são integrados ao tópico. Ao trabalhar com gráficos que tratam de questões econômicas ou sociais, como a balança comercial ou estatísticas demográficas, os estudantes aprendem a valorizar a diversidade etária e a importância do planejamento financeiro, temas cruciais para a formação cidadã e o entendimento das dinâmicas sociais e econômicas em um mundo em constante transformação.

Na atividade **13**, comente com os estudantes que, para planejar melhor os recursos necessários, os órgãos governamentais podem utilizar gráficos e tabelas para visualizar dados demográficos. Isso pode facilitar a compreensão das mudanças na estrutura populacional ao longo do tempo, ajudando os órgãos governamentais a

priorizar investimentos em certas políticas em detrimento de outras de acordo com esses dados.

É importante que haja implementação de políticas que reconheçam e promovam a contribuição contínua dos idosos para a sociedade, além do acesso dessa população aos seus direitos, visto que ela representa uma parcela cada vez maior da população geral brasileira.

A **EM13MAT102** e a **EM13MAT406** são desenvolvidas no tópico "Exemplos de construção de gráficos", pois os estudantes serão capazes de analisar e interpretar tabelas e gráficos, identificar padrões e tendências, e escolher a melhor maneira de representação gráfica para diferentes conjuntos de dados. Essa prática não só aprimora as habilidades matemáticas, mas também a capacidade crítica de avaliar informações apresentadas graficamente.

A atividade **28** propicia o trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais *Educação para o Consumo* e *Educação Financeira*. Ao construir e interpretar gráficos relacionados a hábitos de consumo, os estudantes desenvolvem uma compreensão mais profunda das implicações econômicas e financeiras das próprias escolhas, o que é crucial para a formação de cidadãos conscientes e responsáveis em um mundo onde a visualização e a análise de dados desempenham um papel cada vez mais importante.

No tópico "Probabilidade e Estatística", os estudantes aprendem como a frequência relativa de eventos pode ser usada para estimar probabilidades teóricas e como a quantidade de dados melhora essa estimativa. A **EM13MAT312** é desenvolvida ao observar como a frequência relativa se aproxima da probabilidade teórica com mais experimentos, enquanto a **EM13MAT406** é aplicada na interpretação de dados para calcular probabilidades e resolver problemas, como estimar a porcentagem da população de uma região e a quantidade de bolinhas de cores diferentes em uma urna.

Conexões (p. 201)

Nesta seção há a exploração de como realizar e interpretar pesquisas estatísticas, com ênfase na seleção de amostras e na aplicação de margens de erro e níveis de confiança. A **EM13CHS103** é desenvolvida à medida que os estudantes aprendem a refletir criticamente sobre os dados coletados, questionando as inferências feitas a partir de amostras e entendendo as implicações dessas conclusões para a sociedade.

Na atividade **4**, os estudantes refletem sobre a seleção de amostras em pesquisas eleitorais, margens de erro e níveis de confiança, desenvolvendo a habilidade **EM13CHS103**. Os estudantes aprendem a avaliar criticamente a confiabilidade dos dados e como esses influenciam decisões políticas e sociais, essenciais para a interpretação e tomada de decisões informadas.

Tecnologias digitais (p. 220)

Os estudantes desenvolvem habilidades importantes ao usar *softwares* de Geometria dinâmica para criar gráficos. Com relação à **EM13MAT406**, os estudantes aprimoram a capacidade de interpretar e analisar dados representados graficamente, ajustando e personalizando gráficos para uma análise precisa. Já a **EM13MAT407** é desenvolvida ao explorar como diferentes gráficos representam dados e destacam padrões e tendências.

Conexões (p. 223)

Essa seção aborda o impacto e a prevenção da poliomielite, desenvolvendo a **EM13MAT202** ao analisar dados sobre vacinação e prevalência da doença. O Tema Contemporâneo Transversal *Saúde* será explorado, destacando a importância da imunização. Os estudantes devem realizar uma pesquisa sobre a doença, utilizando o DataSus para obter dados e promover uma campanha com gráficos e tabelas para comunicar os resultados.

Além da sala de aula (p. 229)

Nessa seção os estudantes refletem criticamente sobre a produção e distribuição mundial de alimentos, utilizando dados textuais e gráficos para argumentar sobre um veredicto apresentado. As atividades fomentam a leitura inferencial, o uso crítico de tecnologias e o debate de argumentos, alinhando-se à **CG05** e à **CG07**. O debate integra conhecimentos em Estatística com os Temas Contemporâneos Transversais *Educação para o Consumo* e *Saúde*, abordando a produção e o consumo sustentável. O projeto de pesquisa envolve mapear o consumo de carnes e explorar substituições por proteínas vegetais, visando a saúde da comunidade escolar e o autocuidado.

O tópico *Indo além* promove o trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais *Educação Alimentar e Nutricional* e *Saúde*, bem como a **CG08** e a **CG10**.

Incentive os estudantes a conversar sobre os hábitos alimentares da comunidade (qual a fonte de proteína mais comum), e maneiras de evitar desperdícios nas residências e na própria escola.

Ao comparar produção calórica de diferentes fontes de proteínas, considerando os impactos socioambientais, com intuito de melhorar as condições de vida em âmbito local, regional e global, essa seção desenvolve a **CECNT01**, bem como a habilidade **EM13CNT101**.

Capítulo 2

A situação-problema apresentada explora o cenário do campeonato mundial de voleibol. A partir de uma tabela com resultados, os estudantes são solicitados a responder questões que envolvem conceitos estatísticos e vocabulário específico, envolvendo a **EM13MAT102** e a **EM13MAT316**.

No tópico "Medidas de tendência central", o conceito de média aritmética é apresentado com exemplos para ilustrar os usos cotidianos, embora a notação com somatórios para a fórmula geral possa não ser familiar para todos os estudantes. A média ponderada também é aplicada em situações do dia a dia, como na composição das notas finais escolares. Ao longo dos exemplos apresentados serão trabalhadas paralelamente a **EM13MAT102** e a **EM13MAT316**.

Acompanhe alguns pontos que podem ser debatidos no item **b** do "Ampliando a atividade" da seção *Atividades resolvidas* (p. 234).

- É justo avaliar um estudante por sua nota?

  Sugestão de resposta: A avaliação por notas tem pontos positivos e negativos. Embora ofereça vantagens como objetividade e clareza, também pode falhar em reconhecer a complexidade do aprendizado e as diferenças individuais.

- O que esse método tem de positivo e de negativo?

  Sugestão de resposta: As notas oferecem uma métrica objetiva para comparar o desempenho dos estudantes. A padronização facilita a comparação entre estudantes de diferentes turmas, escolas e regiões. Por outro lado, a avaliação por notas pode simplificar excessivamente o aprendizado, ignorando habilidades e competências práticas, criativas e sociais. Pode gerar altos níveis de estresse entre os estudantes. Além disso, esse tipo de avaliação não considera diferenças individuais e contextos socioeconômicos.

- Levantem hipóteses dos métodos de avaliação que poderiam ser mais eficazes.

  Sugestão de resposta: A avaliação contínua, que consiste em avaliar o estudante continuamente ao longo do período escolar por meio de projetos, participações, apresentações e tarefas, pode fornecer um panorama mais completo e dinâmico do progresso do estudante, incentivando o desenvolvimento contínuo. Projetos interdisciplinares também podem ser um bom método de avaliação por integrar conhecimentos e habilidades e promover a aplicação prática do conhecimento e incentivar a criatividade e a inovação.

A atividade **18** aborda o Tema Contemporâneo Transversal *Vida Familiar e Social* ao tratar do feminicídio e o impacto dele na sociedade brasileira. Ao solicitar cálculos e pesquisas sobre o feminicídio, a atividade promove uma compreensão crítica da realidade social e sensibiliza para a gravidade da violência de gênero. Explorar a definição de feminicídio e a importância da Estatística para políticas públicas contribui para a promoção da imagem da mulher e destaca a necessidade de ações baseadas em dados para proteção e igualdade de gênero. Este enfoque educa sobre questões críticas e encoraja um compromisso ativo com a justiça social e a equidade.

A atividade **21** explora o Tema Contemporâneo Transversal *Saúde*, analisando o ciclo menstrual. Ao pedir aos estudantes que construam um diagrama de caixa com os dados fornecidos, a atividade reforça a compreensão dos aspectos fisiológicos da saúde feminina e promove a alfabetização estatística. Isso ajuda os estudantes a visualizar e interpretar variações no ciclo menstrual, além de entender como essas variações podem influenciar a saúde. Assim, a atividade oferece uma educação integrada sobre a saúde reprodutiva feminina.

As atividades **22** e **23** abordam a **EM13MAT407** da BNCC ao focar na análise e interpretação de dados estatísticos. A atividade **22** incentiva a construção de diagramas de ramos e folhas e de caixa, facilitando a compreensão da mediana, moda, quartis e intervalos de dados. Ambas as atividades promovem o desenvolvimento de habilidades analíticas essenciais para a BNCC.

No tópico "Medidas de dispersão" a amplitude é apresentada como uma medida de dispersão, cuja noção já foi trabalhada em momentos anteriores, inclusive nos Anos Finais do Ensino Fundamental. A ideia da variância é medir quão distante da média estão os valores do conjunto considerado. Como desdobramento da variância, pode ser interessante utilizar a mesma unidade tanto para a medida de dispersão quanto para o conjunto de dados. A variância não tem essa característica; para tanto, define-se o desvio padrão como a raiz quadrada da variância.

No tópico "Fazendo uma pesquisa estatística", as atividades propostas desenvolvem a **EM13MAT202** e a **EM13MAT316** da BNCC, ao incentivar os estudantes a pesquisarem o uso da internet na escola, coletando e analisando dados com medidas de tendência central e dispersão, utilizando recursos como o LibreOffice. Além disso, promovem o trabalho colaborativo e o uso de tecnologias digitais, desenvolvendo a **CG02** e a **CG04**, relacionadas à argumentação crítica, ao pensamento lógico e à comunicação eficaz, tanto na análise estatística quanto na apresentação dos resultados à comunidade escolar.

Tecnologias digitais (p. 246)

Essa seção aborda a **CG04** e a **CG09**, além da **EF13MAT316**. A **CG04** é trabalhada por meio do uso de um *software* de Geometria dinâmica para construir e analisar diagramas de caixa, promovendo a integração de tecnologias digitais na representação de dados. A **CG09** é contemplada ao analisar e resolver problemas reais, como a coleta de dados sobre leitura e a elaboração de estratégias para incentivar a leitura. A habilidade **EF13MAT316** é desenvolvida com a construção e interpretação de diagramas de caixa, facilitando a compreensão e aplicação dos conceitos estatísticos.

Conexões (p. 252)

Para esta seção, é possível desenvolver aulas em conjunto com professores de Geografia, sobre o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) para trabalhar a **EM13CHS402**, que envolve a análise e compreensão de indicadores de desenvolvimento.

A seção também aborda a **CG01**, a **CG02** e a **CG07** ao promover a análise crítica e a interpretação de dados, a reflexão sobre diferentes maneiras de medir o desenvolvimento e o debate sobre políticas públicas. A **EM13MAT316** é trabalhada por meio da construção e interpretação de gráficos e tabelas relacionados ao IDH,

enquanto a **EM13MAT104** é desenvolvida ao comparar e analisar dados estatísticos. Além disso, os Temas Contemporâneos Transversais *Vida Familiar e Social* e *Educação em Direitos Humanos* são abordados ao refletir sobre como o IDH influencia o bem-estar das populações e discutir políticas públicas que promovam melhorias na qualidade de vida.

Os estudantes podem responder à atividade **1** dizendo que o PIB *per capita* mede a renda média da população ao dividir o PIB total pela quantidade de habitantes, mas não reflete a realidade econômica de todos. Em países com alta desigualdade, como o Brasil, um PIB *per capita* elevado não indica que a maioria da população tenha um padrão de vida alto, já que a renda de muitos pode estar abaixo da média. Na atividade **2**, a mediana é apresentada como uma medida mais representativa em contextos de desigualdade, pois não é distorcida por valores extremos, refletindo melhor a realidade econômica da maioria da população.

Além da sala de aula (p. 256)

Esta seção permite a realização de um trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Ao explorar a temática da densidade demográfica no território brasileiro, os estudantes terão a oportunidade de avaliar os processos de ocupação do espaço.

Peça aos estudantes que leiam coletivamente o infográfico e analisem as características da distribuição populacional, diferenciando os conceitos de populoso e povoado. Esse conteúdo ajuda a entender como a densidade demográfica influencia as políticas públicas, promovendo o Tema Contemporâneo Transversal *Educação em Direitos Humanos*. No tópico *Indo além*, proponha um seminário ou pôster sobre a distribuição demográfica e suas implicações políticas, e faça uma pesquisa histórica sobre a concentração populacional nas regiões litorâneas do Brasil, de acordo com o Censo Demográfico 2022.

Organize os estudantes em grupos para a pesquisa, orientando-os nas etapas seguintes. Na etapa **2**, incentive debates e a definição de estratégias de coleta de dados, destacando a importância de fontes confiáveis. Na etapa **3**, auxilie na coleta e análise dos dados, assegurando que as pesquisas e respostas sejam baseadas em argumentos sólidos.

Cabe destacar que, ao responder às perguntas destacadas na etapa **3** do projeto, os estudantes desenvolverão, prioritariamente, a **CG02** e a **CG07** da BNCC. Além disso, ao abordar a temática da distribuição da população no território e das políticas públicas que devem ser desenvolvidas a partir desta distribuição, a **CECHS02** é trabalhada.

Na etapa **4**, os estudantes podem escolher entre 2 produtos finais: um seminário ou um pôster. No seminário, os estudantes apresentam oralmente os resultados da pesquisa e podem usar materiais de apoio; o professor deve ajudar na organização e divisão de tarefas. No pôster, é possível organizar um evento escolar para exibir o trabalho, podendo envolver a comunidade local. A atividade está ligada à **EM13MAT314** ao abordar a densidade demográfica, e à **EM13MAT104** ao interpretar gráficos e tabelas relacionados a esses dados, promovendo uma leitura crítica das informações estatísticas.

Mais sobre o assunto

Sugerimos os seguintes materiais para embasar o trabalho com essa seção. Os *sites* indicados a seguir apresentam dados relativos à população brasileira e à densidade demográfica.

- *Desafios das políticas públicas no cenário de transição demográfica e mudanças sociais no Brasil*. Disponível em: https://tedit.net/djs6ac. Acesso em: 26 set. 2024.

  O artigo analisa de que maneira as mudanças ocorridas nas características demográficas e sociais do país influenciam no desenvolvimento de políticas públicas.
- Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos. Disponível em: https://tedit.net/hxc5l7. Acesso em: 2 ago. 2024.
- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: https://tedit.net/wp1w09. Acesso em: 2 ago. 2024.

Mais atividades

1. Apesar de as regras usuais do desporto tiro com arco definirem a pontuação de cada região do alvo, pode-se levantar uma nova possibilidade de aferimento baseando-se em quão próximas estão as flechas umas das outras. Nesse sentido, pode ser proposto:

Determine uma regra que classifique os jogadores de modo que aquele que tenha agrupado mais flechas tenha uma pontuação melhor do que aquele que as tenha espalhado.

Resolução:

Exemplo de resposta: Uma regra possível para determinar quais flechas estão menos espalhadas pelo alvo seria contorná-las com um barbante, formando uma linha fechada que contenha todas as flechas no seu interior. Desse modo, o jogador que tiver a menor medida de comprimento de barbante necessário para contornar suas flechas seria o mais bem posicionado. Nessa regra, cada flecha fora do alvo também deve corresponder a uma punição, pois, se o jogador errar 9 flechas e acertar apenas 1, terá medida de comprimento de barbante praticamente igual a zero, mas, de fato, não teria uma mira melhor do que aquele que atingiu o alvo mais vezes. Uma punição possível seria adicionar, a cada flecha que não atingiu o alvo, uma medida de comprimento da circunferência do alvo, por exemplo.

Unidade 5: Computação

A BNCC nesta Unidade

- Competências gerais da Educação Básica: CG01; CG04; CG05; CG07; CG08; CG09.
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: CEMAT01; CEMAT03; CEMAT04.
- Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias: EM13MAT103; EM13MAT315; EM13MAT405.
- Habilidades de outras áreas do conhecimento: EM13LGG701; EM13CHS103; EM13CHS106.
- Temas Contemporâneos Transversais: *Ciência e Tecnologia*; *Educação em Direitos Humanos*; *Saúde*; *Vida Familiar e Social*.

Objetivos pedagógicos

- Conhecer a história da criação e do desenvolvimento de computadores e de alguns dos indivíduos que contribuíram para esse desenvolvimento.
- Reconhecer e identificar as contribuições que a Computação e a programação trouxeram à humanidade.
- Conhecer aspectos básicos da estrutura e do funcionamento de computadores modernos.
- Compreender e interpretar medidas de capacidade de armazenamento de computadores.
- Reconhecer algoritmos envolvidos em práticas cotidianas.
- Investigar e analisar algoritmos e fluxogramas relacionados a situações e problemas da Matemática e do cotidiano.
- Utilizar algoritmos e fluxogramas para registrar soluções de problemas da Matemática e do cotidiano.
- Conhecer conceitos iniciais de linguagens de programação.
- Utilizar conceitos iniciais de linguagens de programação para implementar algoritmos escritos em linguagem corrente e em linguagem de programação.

Abertura da Unidade

A Unidade se inicia com uma discussão sobre como os avanços tecnológicos (em especial, os computadores) modificaram os modos como os indivíduos vivem, trabalham e se socializam. Aproveite essa abertura para incentivar os estudantes a exporem as próprias vivências como jovens do século XXI. Afinal, os computadores e os *smartphones* são atualmente parte de destaque na vivência de uma grande parcela dos jovens do Brasil e do mundo. Com esses aparelhos, os jovens têm, na "palma da mão", acesso a vários métodos de comunicação com amigos e familiares, incluindo as famosas redes sociais digitais, além de acesso a um volume de informações muito além do que os jovens há um século tinham, implicando um novo modo de se comunicar e de consumir informações.

Outro fator de destaque na relação dos jovens com a tecnologia é a facilidade na produção de conteúdo: a internet oferece os mais variados recursos para a criação e manutenção de *blogs*, *vlogs*, *podcasts*, entre outros.

Capítulo 1

A situação-problema inicial explora como os computadores facilitaram a resolução de problemas e a realização de tarefas cotidianas, como a edição de textos e a comunicação. A atividade compara o tempo necessário para cálculos feitos manualmente com o realizado por um computador, evidenciando a eficiência tecnológica. Isso se relaciona com o Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia*, ao mostrar a importância da tecnologia na melhoria da eficiência e precisão nas atividades diárias. A **CG01** é desenvolvida ao mostrar como os computadores melhoram tarefas diárias e solucionam problemas, refletindo a evolução das tecnologias digitais. A **CG05** é abordada ao explorar o uso de *softwares* para otimizar cálculos e organizar informações, promovendo o protagonismo e a autoria crítica dos estudantes.

O tópico "A origem da computação" desenvolve a **EM13MAT103** ao explorar dispositivos de cálculo como o ábaco e a pascalina. Os estudantes interpretam textos científicos, comparando mecanismos de cálculo e as respectivas unidades de medida, conectando essas ideias aos avanços tecnológicos. A **CG01** é destacada ao apresentar o avanço histórico das calculadoras, refletindo o desenvolvimento do conhecimento matemático e tecnológico. A **CG05** é abordada ao explorar a inovação nas ferramentas de cálculo, promovendo o uso crítico e reflexivo de tecnologias digitais para resolver problemas matemáticos.

O tópico "A computação moderna" desenvolve a **EM13MAT103** ao explorar a evolução das máquinas, algoritmos e linguagens de programação, e ao comparar unidades e capacidades dos computadores com avanços históricos. O Tema Contemporâneo Transversal *Ciência e Tecnologia* é integrado ao discutir o impacto da tecnologia na sociedade.

Além disso, o texto valoriza o papel da mulher ao destacar Ada Lovelace, pioneira da programação, ressaltando a importância feminina na ciência e incentivando a igualdade de gênero em áreas tecnológicas.

O texto aborda o tema da inteligência artificial ao destacar a contribuição de Alan Turing para o desenvolvimento desse campo por meio da criação da máquina de Turing, uma base teórica para a computação moderna e IA. Além disso, o texto explora o preconceito enfrentado por Turing, que, apesar das conquistas na decodificação durante a Segunda Guerra Mundial e no avanço da computação, sofreu perseguição governamental pela orientação sexual, levando à sua morte prematura. O perdão póstumo concedido por Elizabeth II e as desculpas públicas do governo britânico ressaltam a injustiça que ele enfrentou, essa abordagem favorece o trabalho com a necropolítica.

Também é abordada a evolução dos computadores e o impacto cultural das inovações tecnológicas, destacando figuras como Steve Jobs e Bill Gates. Utilizando linguagem verbal e visual, aborda a importância histórica dos avanços na tecnologia de computadores conforme indica a **CG01** e a redução de custos e popularização dos microcomputadores, conforme a **CG05**. O foco é no conhecimento sobre microcomputadores e como isso contribui para uma sociedade mais informada e crítica em relação às tecnologias digitais conforme a **CG04**. O texto ainda aborda como a inovação tecnológica, exemplificada pelos microcomputadores e figuras como Steve Jobs e Bill Gates, reflete o uso ético e criativo das tecnologias digitais conforme a **EM13LGG701**. Além disso, permite elaborar hipóteses e analisar evidências sobre o impacto cultural e tecnológico desses avanços, incentivando a criação de conteúdos digitais para a comunidade escolar conforme a **EM13CHS103**.

O tópico "Funcionamento de um computador" desenvolve a **EM13MAT103** ao expor os estudantes a conceitos de armazenamento de dados e conversões entre sistemas de unidades, como o binário e o Sistema Internacional (SI). Ao entender o papel de *bits*, *bytes* e as diferentes escalas de medida, os estudantes interpretam informações científicas ligadas ao avanço tecnológico, exercitando a comparação de grandezas e as conversões entre as unidades de medida.

Conexões (p. 273)

Essa seção, ao explorar o exemplo da corrida espacial, destaca a importância das contribuições de mulheres e afrodescendentes nos avanços científicos e suas implicações na sociedade. O Tema Contemporâneo Transversal *Educação em Direitos Humanos* é integrado ao abordar como preconceitos como o sexismo e o racismo afetam não só indivíduos, mas a estrutura da sociedade como um todo. Espera-se que os estudantes reflitam sobre como a ciência e a tecnologia evoluem através da colaboração de grupos diversos, que oferecem perspectivas únicas para a resolução de problemas. As atividades abordam a **CG09** e a **CG07**, com análises individuais e debates coletivos sobre o impacto do preconceito na tecnologia.

O texto aborda a contribuição essencial de Katherine Johnson, Mary Jackson e Dorothy Vaughan, mulheres negras que, superando a segregação racial e o preconceito de gênero, desempenharam papéis cruciais nas missões da NASA durante a corrida espacial. Seu trabalho, antes pouco reconhecido, hoje simboliza a importância das afrodescendentes e das mulheres na ciência e na tecnologia, promovendo igualdade de gênero e de raça.

O texto aborda a **EM13CHS103** ao destacar a importância de Katherine Johnson na corrida espacial e a influência negativa das práticas segregacionistas no desenvolvimento tecnológico. Ele explora como preconceitos impactaram a participação e o reconhecimento de contribuições significativas, usando evidências históricas e dados para argumentar sobre o efeito das desigualdades na ciência e na tecnologia.

Com as atividades **1** a **4**, é possível promover uma discussão significativa e consciente entre os estudantes, incentivando-os a analisar tanto os impactos históricos quanto os atuais do preconceito, além de encorajá-los a pensar em estratégias de como lidar com o preconceito e promover o respeito à diversidade.

A atividade **5** destaca contribuições de mulheres negras na ciência e na tecnologia no Brasil, como Enedina Alves Marques, Jaqueline Goes de Jesus e Sonia Guimarães.

Capítulo 2

Na situação-problema apresentada, são discutidos momentos do cotidiano que, por serem procedimentais, podem ser associados a algoritmos, utilizando como exemplos a rotina de ir à escola e as receitas de bolo; peça aos estudantes que conversem entre si sobre a relação entre algoritmos e outras práticas cotidianas que podem ser interpretadas como algoritmos, destacando as similaridades entre elas. Essa discussão permite fazer uma retomada dos algoritmos, em especial sobre sua caracterização procedimental.

A **EM13MAT315** está sendo desenvolvida de maneira clara no tópico "Explorando o conceito de algoritmo", pois os estudantes são incentivados a investigar e registrar algoritmos para resolver problemas, como o anagrama da palavra "AMOR". Ao seguirem e alterarem sequências de passos para analisar os diferentes resultados, os estudantes trabalham com a estruturação lógica de um algoritmo e compreendem a importância da ordem das etapas. A criação de novos algoritmos e a comparação de resultados reforçam a habilidade de construir fluxogramas e solucionar problemas complexos por meio de passos ordenados.

Um algoritmo é definido como uma sequência finita e ordenada de ações para realizar uma tarefa ou resolver um problema. As etapas de um algoritmo devem ser bem definidas, simples e levar a um resultado final. Um exemplo cotidiano é dado pelo processo de lavar roupas em uma máquina de lavar, ilustrando como algoritmos são usados tanto em atividades diárias quanto em Matemática e Computação.

O tópico "Fluxogramas" apresenta uma forma gráfica de representar algoritmos, facilitando sua compreensão. São explicados símbolos comuns, como os que indicam início/fim, procedimentos, tomadas de decisão e direcionamento de leitura. O exemplo de fluxograma mostra como esses símbolos são usados para organizar processos de forma clara e visual.

No tópico "Exemplos de algoritmos e de fluxogramas", a **EM13MAT315** está sendo desenvolvida ao apresentar problemas de raciocínio lógico que os estudantes devem resolver criando algoritmos e representando-os por meio de fluxogramas. O exemplo prático da travessia de rio das *Atividades resolvidas* (p. 279) permite que os estudantes explorem etapas lógicas e sistemáticas, favorecendo a criação e análise de um algoritmo, enquanto o uso do fluxograma facilita a visualização do processo.

A atividade **4** aborda o uso da inteligência artificial e propõe que os estudantes interpretem e analisem uma tarefa resolvida por meio de um *chat* dessa ferramenta. Essa atividade contribui para um pensamento mais crítico em relação à inteligência artificial.

Além da sala de aula (p. 282)

O trabalho com esta seção permite a realização de um trabalho interdisciplinar com Língua Portuguesa. Oriente os estudantes a realizar a leitura do texto e do infográfico coletivamente e peça que analisem as 4 principais características de um algoritmo de rede social. É possível desenvolver os Temas Contemporâneos Transversais *Saúde* e *Vida Familiar e Social* ao explorar a temática do *cyberbullying*.

Durante a realização da pesquisa proposta na etapa **2**, promova um momento de debate entre os estudantes. Peça a eles que reflitam sobre as questões propostas e que definam estratégias para fazer a coleta de dados. Ressalte a importância de buscar informações em fontes confiáveis, como *sites* governamentais e de entidades de classe referenciadas.

Na etapa **3**, os estudantes devem coletar os dados e sistematizá-los. Apresente aos estudantes as questões norteadoras:

I. Qual é a definição de *cyberbullying*?

II. Que comportamentos podem ser classificados como *cyberbullying*?

III. Como combater o *cyberbullying*?

IV. Como acolher pessoas vítimas do *cyberbullying*?

Auxilie os estudantes na coleta e, se necessário, na análise dos dados que fundamentarão a elaboração do produto final. Neste momento, certifique-se de que eles estão fazendo pesquisas, coletando informações e elaborando as respostas utilizando argumentos sólidos. Cabe destacar que ao responder às questões destacadas na etapa **3** do projeto, os estudantes estarão desenvolvendo, prioritariamente, a **CG05** e a **CG08** da BNCC.

Na etapa **4**, são sugeridas 2 opções de produto final: produção de um *podcast* ou *videocast* e apresentação de um seminário ou roda de conversa na comunidade escolar. A ideia é que os estudantes tenham liberdade para elaborar o produto final que seja mais adequado para a realidade da comunidade escolar em que estão inseridos.

No caso do *podcast* ou *videocast*, oriente os estudantes para que utilizem plataformas ou aplicativos gratuitos. Na elaboração do roteiro, ressalte que o texto deve seguir a seguinte estrutura: **apresentação** (momento em que é feita a contextualização do tema e é destacada a importância dele, sobretudo para os jovens da comunidade escolar); **desenvolvimento** (momento em que são apresentados os aspectos mais relevantes que os levaram a escolher esta temática, em uma linguagem atrativa para o público) e conclusões (devem ser apresentados uma reflexão e um fechamento sobre o tema).

Para os seminários e rodas de conversa, os auxilie na elaboração de cartazes ou panfletos chamativos para a divulgação do projeto na comunidade escolar.

A ideia é que os estudantes exponham oralmente o resultado do trabalho de pesquisa realizado. Eles podem utilizar algum material físico como suporte. Auxilie os estudantes na elaboração do seminário enfatizando a importância da organização do projeto em partes e da divisão de tarefas. Para a roda de conversa, é possível organizar um evento na escola, com pequenos grupos. Neste momento, é importante que você, professor, participe como mediador das conversas.

Mais sobre o assunto

A seguir propomos materiais que devem auxiliá-lo na condução das propostas dessa seção.

- "Os algoritmos das redes sociais" no *podcast* "O assunto é". Disponível em: https://tedit.net/qi4vfk. Acesso em: 17 ago. 2024.

  Para compreender melhor como funcionam os algoritmos nas redes sociais, ouça esse episódio em que o professor Tiago Zaidan conversa com Hemilis Rocha e Damires Souza.

- DILEMA das redes, O. Direção: Jeff Orlowski. Produção: Exposure Labs, Agent Pictures, The Space Program, Argent Pictures. Estados Unidos: Netflix, 2020 (94 min).

  Para saber mais sobre os efeitos dos algoritmos nas redes sociais, assista a esse documentário, dirigido por Jeff Orlowski.

- *Cyberbullying*: O que é e como pará-lo. Disponível em: https://tedit.net/a3ywrz. Acesso em: 26 set. 2024.

  O texto traz perguntas e respostas sobre *cyberbullying* direcionadas ao público adolescente.

- *Entenda o que é o algoritmo, e como ele te influencia no mundo digital*. Disponível em: https://tedit.net/v51yph. Acesso em: 26 set. 2024.

  O áudio e texto informam, de maneira simplificada, como funcionam os algoritmos nas redes sociais.

- *Podcast Chão de Escola* - #25 *Bullying* e *Cyberbullying*. Disponível em: https://tedit.net/mn9keh. Acesso em: 26 set. 2024.

  Neste episódio, debate-se a respeito de *bullying* e de *cyberbullying*. Também é feita uma reflexão sobre a necessidade de que professores, gestores escolares e famílias estejam atentos a essa forma de violência.

Capítulo 3

Nesse capítulo, o trabalho com algoritmos e fluxogramas feito no tópico anterior será direcionado para a análise e elaboração de algoritmos escritos em linguagem materna, de modo a favorecer a **EM13MAT405** na utilização de conceitos iniciais de linguagem de programação, e a **EM13MAT315** na investigação e registro de algoritmos que resolvem determinados problemas.

O tópico "Linguagens de programação" explica como as linguagens de programação são fundamentais para o funcionamento de tecnologias e aplicativos, transformando algoritmos em instruções compreensíveis pelos computadores. Destaque a importância dos algoritmos e o papel das linguagens na programação, inclusive no desenvolvimento de inteligência artificial.

O tópico "Entrada e saída" aborda como as linguagens de programação permitem a entrada e saída de dados em algoritmos. Ele exemplifica com um algoritmo simples de adição, mostrando como os dados de entrada (números) resultam em uma saída (soma). Essa característica é essencial para a interação entre o usuário e o computador.

O tópico "Estruturas condicionais" aborda como as estruturas condicionais em algoritmos permitem a execução de diferentes comandos de acordo com condições específicas.

Utilizando os comandos **se** e **senão**, um algoritmo pode avaliar condições e determinar quais ações realizar. O exemplo mostra como comparar 2 notas e decidir qual delas usar para o cálculo da média, ilustrando a utilização de condições e fluxos alternativos no algoritmo.

No tópico "Conectivos lógicos", com o *Reflita* (p. 290), é possível escrever o código do algoritmo apresentado sem utilizar o conectivo lógico **e** utilizando uma estrutura composta da estrutura **se** e **então**, encadeada. Acompanhe a seguir um exemplo de resposta.

```
Início
   Crie a variável Num1
   Atribua o 1º número de entrada à variável
   Num1
   Crie a variável Num2
   Atribua o 2º número de entrada à variável
   Num2
   Se Num1 > 0, então
      Se Num2 > 0, então
         Retorne o texto "Os números são
         maiores do que 0."
Fim
```

O comando **e** permite a escrita de um algoritmo com menor quantidade de linhas e mais simples do que o algoritmo sem o uso desse conectivo lógico.

O tópico "Estruturas de repetição" explica as estruturas de repetição, como o comando **enquanto**, que permitem executar um conjunto de instruções enquanto uma condição específica é verdadeira. O exemplo dado ilustra a aplicação do comando **enquanto** em um restaurante para automatizar a montagem de saladas, repetindo o processo até que todas as tigelas sejam usadas. Outro exemplo mostra como usar a estrutura para encontrar o menor número quadrado perfeito maior ou igual a um valor fornecido pelo usuário.

Tecnologias digitais (p. 294)

A **EM13MAT405** está sendo desenvolvida ao usar o Scratch para criar um algoritmo que lida com uma função definida por sentenças que descreve reajustes salariais. No Scratch, os estudantes devem representar essas funções algebricamente, ajustando variáveis e operações para obter resultados precisos, identificando domínios e realizando conversões entre representações. A atividade inclui criar e manipular variáveis, usar operadores e estruturas condicionais, e converter representações algébricas em códigos visuais, alinhando-se às habilidades exigidas pela BNCC.

Mais atividades

1. Escreva no caderno um código que receba um valor x e exiba a tabuada desse valor, indo de 1x até 10x.

Resolução:

Exemplo de resposta:

```
Início
   Crie a variável Num
   Atribua o número de entrada à variável
   Num
   Crie a variável K
   Atribua o valor 1 à variável K
   Enquanto K < 11
     Retorne o valor K · Num
     Atribua o valor K + 1 à variável K
Fim
```

2. Uma competição entre estudantes de uma escola será separada em 2 categorias de idade. Escreva, no caderno, um programa com código que receba uma idade informada pelo usuário e nos diga em qual categoria o estudante poderá participar, de acordo com a seguinte classificação:

- De 6 a 10 anos: Categoria **A**.
- De 11 anos para cima: Categoria **B**.

Resolução:

Exemplo de resposta:

```
Início
   Crie a variável Id
   Atribua o número de entrada à variável
   Id
   Se Id ⩾ 6 e Id < 11
     Retorne o texto "Categoria A."
   Senão
     Se Id ⩾ 11
        Retorne o texto "Categoria B."
     Senão
        Retorne o texto "Fora da faixa
        etária da competição"
Fim
```

Resoluções

Junto das atividades e questões presentes no Livro do Estudante, apresentamos no Manual do Professor as respostas e orientações das respostas esperadas. Nas próximas páginas, complementando as respostas já presentes página a página, apresentamos as resoluções das atividades.

Unidade 1

Capítulo 1

Atividades

3. Se P pertence ao eixo das abscissas, então as coordenadas dele são a e 0.
Como $P(a, 0)$ é equidistante de A e B, devemos ter $d(P, A) = d(P, B)$. Assim:
$\sqrt{(a+1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (0-4)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 + 2a + 1 + 4 = a^2 - 2a + 1 + 16 \Rightarrow a = 3$
Logo, tem coordenadas 3 e 0.

4. $d(P, Q) = \sqrt{74} \Rightarrow \sqrt{(1+6)^2 + (3-a)^2} = \sqrt{74} \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 - 6a - 16 = 0 \Rightarrow a' = 8$ e $a'' = -2$
Portanto, a ordenada do ponto P é -2 ou 8.

5. **a)** Exemplo de resposta: Um triângulo é isósceles se 2 dos lados dele têm medidas de comprimento iguais. Vamos calcular as medidas de comprimento dos lados.

$d(A, B) = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{58}$

$d(A, C) = \sqrt{(-3-0)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{58}$

$d(B, C) = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2+2)^2} = 6$

Como os lados AB e AC têm medidas de comprimento iguais, o triângulo ABC é isósceles. A medida de perímetro P do triângulo ABC é a soma das medidas de comprimento dos 3 lados. Assim:

$P = AB + AC + BC = \sqrt{58} + \sqrt{58} + 6 = 2\sqrt{58} + 6$

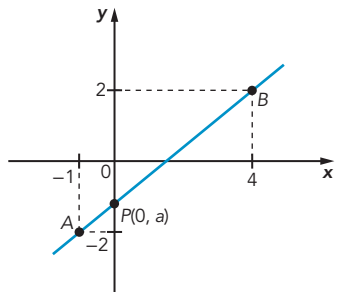
b) $\sqrt{(2-x)^2 + (3-y)^2} = 3 \Rightarrow (2-x)^2 + (3-y)^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

8. **a)** Se os pontos estiverem alinhados, devemos ter:
$\frac{-3-0}{4-0} = \frac{1-2}{5-2} \Rightarrow -\frac{3}{4} \neq -\frac{1}{3}$
Logo, os pontos não estão alinhados.

b) Se $A(-1, 3)$, $B(2, 4)$ e $C(-4, 10)$ forem vértices de um mesmo triângulo, eles não estarão alinhados.
$\frac{2-(-1)}{-4-(-1)} \neq \frac{4-3}{10-3} \Rightarrow -\frac{3}{3} \neq -\frac{1}{7}$
Logo, A, B e C são vértices de um mesmo triângulo.

9. Para que $A(3, 5)$, $B(1, 3)$ e $C(x, 1)$ sejam vértices de um triângulo, eles não podem estar alinhados. Logo:
$\frac{1-3}{x-3} \neq \frac{3-5}{1-5} \Rightarrow \frac{-2}{x-3} \neq \frac{2}{4} \Rightarrow 2(x-3) \neq -8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 3 \neq -4 \Rightarrow x \neq -1$

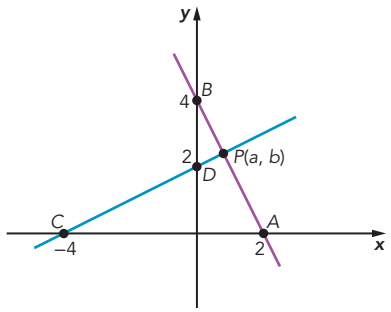
10. Podemos representar a situação descrita no enunciado da seguinte maneira:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Se P pertence ao eixo y, então as coordenadas desse ponto são $P(0, a)$.
Como A, B e P pertencem à mesma reta, podemos dizer que eles estão alinhados.
$\frac{4-(-1)}{0-(-1)} = \frac{2-(-2)}{a-(-2)} \Rightarrow 5a + 10 = 4 \Rightarrow a = -\frac{6}{5}$
Devemos ter $P\left(0, -\frac{6}{5}\right)$.

11. Podemos representar a situação descrita no enunciado da seguinte maneira:



Banco de imagens/Arquivo da editora

O ponto $P(a, b)$ pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$, portanto é alinhado com A e B. Logo:
$\frac{0-2}{a-2} = \frac{4-0}{b-0} \Rightarrow 2a + b = 4 \Rightarrow b = -2a + 4$ **(I)**
O ponto $P(a, b)$ também pertence à reta $\overleftrightarrow{CD}$, portanto é alinhado com C e D. Logo:
$\frac{0-(-4)}{a-(-4)} = \frac{2-0}{b-0} \Rightarrow a - 2b = -4$ **(II)**
Substituindo **(I)** em **(II)**, temos:
$a - 2(-2a + 4) = -4 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$
Então, $b = -2 \cdot \frac{4}{5} + 4 \Rightarrow b = \frac{12}{5}$.
Logo, $P\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

14. **a)** Para $m = 4$, temos: $y + 3 = 4(x - 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow y + 3 = 4x - 8 \Rightarrow 4x - y - 11 = 0$

b) Para $m = \tan 45° = 1$, temos: $y - 1 = 1(x - 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow x - y - 3 = 0$

c) Se $m = 0$, então a reta é paralela ao eixo x. Logo, a equação é $y = -5$.

d) Considerando que $m = \frac{4-1}{-5-3} = -\frac{3}{8}$, temos:
$y - 1 = -\frac{3}{8}(x - 3) \Rightarrow 3x + 8y - 17 = 0$

e) Se a reta é paralela ao eixo y, então a equação dela é $x = -3$.

f) Para $m = -\frac{1}{2}$, e sabendo que $A(2, -3)$ é ponto da reta, temos:

$y + 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x + 2y + 4 = 0$

g) Se a reta é paralela ao eixo x, então a equação dela é $y = -7$.

h) Se $m = \frac{-2-1}{-2-1} = 1$, temos: $y - 1 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x$

i) Na equação $y - y_1 = m(x - x_1)$, temos $m = \tan 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, e $(0, 0)$ pertence à reta. Logo:

$y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

15. **a)** Cálculo do m (coeficiente angular):

$m = \frac{-3-6}{2-(-1)} = \frac{-9}{3} = -3$

Substituindo as coordenadas do ponto $A(-1, 6)$, por exemplo, temos:

$y - 6 = -3(x + 1) \Rightarrow 3x + y - 3 = 0$

b) Cálculo do m (coeficiente angular):

$m = \frac{-1-8}{-5-(-1)} = \frac{9}{4}$

Substituindo as coordenadas do ponto $A(-1, 8)$, por exemplo, temos:

$y - 8 = \frac{9}{4}(x + 1) \Rightarrow 9x - 4y + 41 = 0$

c) Cálculo do m (coeficiente angular):

$m = \frac{-4-0}{-1-5} = \frac{2}{3}$

Substituindo as coordenadas do ponto $B(-1, -4)$, por exemplo, temos:

$y + 4 = \frac{2}{3}(x + 1) \Rightarrow 2x - 3y - 10 = 0$

d) Cálculo do m (coeficiente angular):

$m = \frac{-5-3}{1-3} = 4$

Substituindo as coordenadas do ponto $B(1, -5)$, por exemplo, temos:

$y + 5 = 4(x - 1) \Rightarrow 4x - y - 9 = 0$

16. A equação da reta que contém os pontos $A(1, 1)$ e $B(0, -3)$:

$m = \frac{-3-1}{0-1} = 4$

$y - 1 = 4(x - 1) \Rightarrow y - 4x + 3 = 0$

Para que o ponto $P(2, 3)$ pertença à reta $\overleftrightarrow{AB}$, devemos ter:

$y_P - 4x_P + 3 = 0 \Rightarrow 3 - 4 \cdot 2 + 3 = 3 - 8 + 3 = -2 \neq 0$

Logo, $P \notin \overleftrightarrow{AB}$.

17. A equação reduzida é:

$y = \frac{1}{2}x + n$

Como $P(-1, -5)$ pertence à reta, então:

$-5 = \frac{1}{2}(-1) + n \Rightarrow 2n = -9 \Rightarrow n = -\frac{9}{2}$

Ou seja, $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$.

18. **a)** $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow 2x + 3y = 6 \Rightarrow y = -\frac{2x}{3} + 2$

b) $y - 6 = \frac{1}{2}(x + 4) \Rightarrow 2y - 12 = x + 4 \Rightarrow x - 2y + 16 = 0$

19. **a)** A equação da bissetriz dos quadrantes ímpares é $y = x$ ou $x - y = 0$.

b) A equação da bissetriz dos quadrantes pares é $y = -x$ ou $x + y = 0$.

c) O eixo x tem equação $y = 0$, pois, para qualquer valor de x, o valor de y é sempre 0.

d) O eixo y tem equação $x = 0$, pois, para qualquer valor de y, o valor de x é sempre 0.

20. $3x + 4y = 7 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$. O coeficiente angular é $m = -\frac{3}{4}$ (m também expressa a declividade da reta).

21. $y + 3 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x - 3$

22. Coeficiente angular da reta que contém os pontos $A(3, 5)$ e $B(-3, 8)$. Então, temos: $m = \frac{8-5}{-3-3} = -\frac{1}{2}$.

Temos: $a - 5 = -\frac{1}{2}(4 - 3) \Rightarrow 2a - 10 = -1 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$.

23. $15x + 10y - 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{15x}{10} + \frac{3}{10} \Rightarrow y = -\frac{3x}{2} + \frac{3}{10}$

Então, $m_1 = -\frac{3}{2}$.

$9x + 6y - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{9x}{6} + \frac{1}{6} \Rightarrow y = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{6}$

Logo, $m_2 = -\frac{3}{2}$.

Como $m_1 = m_2$, temos que r e s são paralelas.

24. Cálculo do coeficiente angular das retas:

$(a + 3)x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{(a+3)x}{4} + \frac{5}{4}$

Então, $m_1 = \frac{-a-3}{4}$.

$x + ay + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{a}$

Logo, $m_2 = -\frac{1}{a}$, com $a \neq 0$.

Como $m_1 = m_2$, temos:

$\frac{-a-3}{4} = -\frac{1}{a} \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow a' = -4$ e $a'' = 1$

Portanto, o valor de a é -4 ou 1.

25. **a)** $8x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = -4x + \frac{1}{2}$

Então, $m = -4$.

De acordo com o enunciado, a reta procurada contém o ponto $P(1, 2)$ e é paralela à reta dada. Portanto, o coeficiente angular de ambas as retas é $m = -4$. Logo, a equação dela é:

$y - 2 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 6$

Temos: $y = -4x + 6$ ou $4x + y - 6 = 0$.

b) A reta $y - 2 = 0$ é paralela ao eixo x, pois $m = 0$.

A reta procurada contém o ponto $P(-4, 2)$ e é paralela à reta dada. Logo, são coincidentes.

Portanto, a equação procurada é $y = 2$ ou $y - 2 = 0$.

c) $2x - 5y + 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{2x}{5} + \frac{7}{5}$

Então, $m = \frac{2}{5}$.

De acordo com o enunciado, a reta procurada contém o ponto $P(-1, 3)$ e é paralela à reta dada. Portanto, o coeficiente angular de ambas as retas é $m = \frac{2}{5}$. Logo, a equação dela é:

$$y - 3 = \frac{2}{5}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{2x}{5} + \frac{17}{5}$$

Temos: $y = \frac{2x}{5} + \frac{17}{5}$ ou $2x - 5y + 17 = 0$.

27. **a)** $2x - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 2x + 3$

Então, $m_1 = 2$.

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

Equação da reta s que contém o ponto $P(2, 6)$:

$$y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x + 2y - 14 = 0$$

b) $3x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow 4y = -3x + 4 \Rightarrow y = -\frac{3x}{4} + 1$

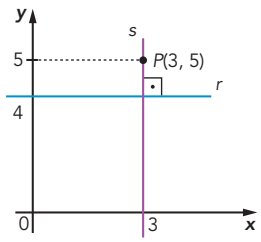
Então, $m_1 = -\frac{3}{4}$.

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Equação de s que contém o ponto $P(-3, 2)$:

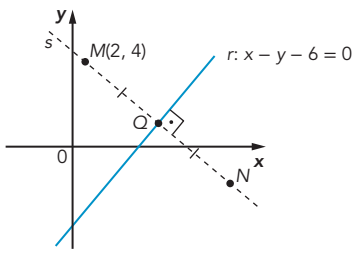
$$y - 2 = \frac{4}{3}(x + 3) \Rightarrow 4x - 3y + 18 = 0$$

c) A reta r: $y - 4 = 0$ é paralela ao eixo x, conforme o gráfico a seguir. Logo, a reta s é paralela ao eixo y e tem equação $x = 3$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

28.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$Q \in r$ é ponto médio do segmento de reta MN.

A reta s contém o ponto $M(2, 4)$ e é perpendicular a r: $x - y - 6 = 0$.

$x - y - 6 = 0 \Rightarrow y = x - 6$ **(I)**

Então, $m_1 = 1$.

- Cálculo do coeficiente angular m_2 de s (com $s \perp r$):

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{1} = -1$$

- Equação de s que contém o ponto $M(2, 4)$:

$y - 4 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 6$ **(II)**

- Cálculo das coordenadas de Q (intersecção de r e s):

Pelas equações **I** e **II**, temos:

$x - 6 = -x + 6 \Rightarrow x = 6$

Substituindo $x = 6$ na equação **I**, por exemplo, temos:

$y = 6 - 6 \Rightarrow y = 0$

Logo, $Q(6, 0)$.

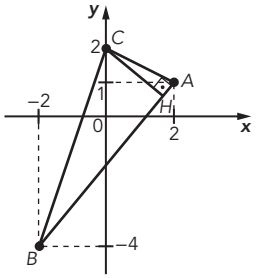
- Q é o ponto médio de $\overline{MN}$, então:

$$6 = \frac{2 + x_N}{2} \Rightarrow x_N = 10$$

$$0 = \frac{4 + y_N}{2} \Rightarrow 4 + y_N = 0 \Rightarrow y_N = -4$$

Logo, o simétrico de M em relação à reta r é $N(10, -4)$.

29.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Os vértices do triângulo ABC são $A(2, 1)$, $B(-2, -4)$ e $C(0, 2)$. A reta suporte da altura CH contém o ponto C e é perpendicular à reta suporte de $\overline{AB}$.

- Coeficiente angular m_1 da reta suporte de $\overline{AB}$:

$$m_1 = \frac{-4 - 1}{-2 - 2} = \frac{5}{4}$$

- Coeficiente angular m_2 da reta suporte de $\overline{CH}$:

$$m_2 = -\frac{1}{\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}$$

- A reta procurada contém o ponto $C(0, 2)$. Logo, a equação geral dela é:

$$y - 2 = -\frac{4}{5}(x - 0) \Rightarrow 4x + 5y - 10 = 0$$

30. **a)** $d = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$

b) $d = \frac{|3 \cdot 1 - 4(-5) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{21}{5}$

c) $d = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

d) $d = \frac{|0 \cdot 6 + 4 - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 2$

31. **a)** $P(3, 2)$; r: $3x + 4y + 1 = 0$.

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{18}{5}$$

b) $P(3, 2)$; r: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

c) $P(3, 2)$; r: $y = 2x - 4 \Rightarrow y - 2x + 4 = 0$ ou $-2x + y + 4 = 0$.

$$d = \frac{|-2 \cdot 3 + 2 + 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$$

Assim, $P \in r$.

d) $P(3, 2)$; r: $y = 6 \Rightarrow y - 6 = 0$ ou $0x + y - 6 = 0$.

$$d = \frac{|0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 4$$

e) $P(3, 2)$; r: $x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0$ ou $x + 0y + 1 = 0$.

Aplicando a fórmula, temos:

$$d = \frac{|1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 4$$

f) $P(3, 2)$; r: $y - 4 = \frac{2}{5}(x - 3)$.

$y - 4 = \frac{2}{5}(x - 3) \Rightarrow 5y - 2x - 14 = 0$

ou $-2x + 5y - 14 = 0$

$$d = \frac{|-2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 14|}{\sqrt{(-2)^2 + 5^2}} = \frac{10}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \frac{10\sqrt{29}}{29}$$

32. O ponto $P(0, p)$ dista 2 unidades de r: $4x + 3y - 2 = 0$.

$$d = \frac{|4 \cdot 0 + 3p - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Rightarrow |3p - 2| = 10$$

A equação $|x| = a$, com $a \geqslant 0$, tem 2 soluções: $\pm a$; ou seja, $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$, com $a \geqslant 0$. Logo, $|3p - 2| = 10 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3p - 2 = 10$ ou $\Rightarrow 3p - 2 = -10$.

Para $3p - 2 = 10$, temos: $3p - 2 = 10 \Rightarrow p = 4$.

Para $3p - 2 = -10$, temos: $3p - 2 = -10 \Rightarrow p = -\frac{8}{3}$.

33. **a)** $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -1 - (-5) + 15 - (-6) + 4 - (-2) = 31$

$S = \frac{1}{2}|D| = \frac{31}{2} = 15{,}5$

b) A medida de comprimento da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é igual à medida de distância entre o ponto A e a reta que contém os pontos B e C.

$m = \frac{-5 + 1}{2 + 3} = -\frac{4}{5}$

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 1 = -\frac{4}{5}(x + 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x + 5y + 17 = 0$

Cálculo da medida de comprimento da altura:

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{31}{\sqrt{41}} \cdot \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \frac{31\sqrt{41}}{41}$$

36. **a)** Na equação $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 6 = 0$, os coeficientes de x^2 e de y^2 não são o 1, então vamos dividir toda a equação por 2:

$2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

Pelo método de completar quadrados:

$x^2 - 4x + ___ + y^2 + 6y + ___ = 3 + ___ + ___$

$\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} + \underbrace{y^2 + 6y + 9}_{(x+3)^2} = \underbrace{3 + 4 + 9}_{4^2}$

A equação $2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 6 = 0$ representa uma circunferência de centro $(-2, 3)$ e raio com medida de comprimento 4.

Método da comparação:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) =$

$= x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3$

$-2a = -4 \Rightarrow a = 2$

$-2b = 6 \Rightarrow b = -3$

$a^2 + b^2 - r^2 = -3 \Rightarrow 2^2 + (-3)^2 - r^2 = -3 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 4$ (não existe medida de comprimento do raio negativa)

Logo, o centro da circunferência é $(-2, 3)$, e a medida de comprimento do raio é 4.

b) Pelo método de completar quadrados:

$x^2 - 6x + ___ + y^2 - 2y + ___ = 6 + ___ + ___$

$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} + \underbrace{y^2 - 2y + 1}_{(x-1)^2} = \underbrace{6 + 9 + 1}_{4^2}$

A equação $x^2 - 6x + y^2 - 2y - 6 = 0$ representa uma circunferência de centro $(3, 1)$, e a medida de comprimento do raio é 4.

Método da comparação:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) =$

$= x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6$

$-2a = -6 \Rightarrow a = 3$

$-2b = -2 \Rightarrow b = 1$

$a^2 + b^2 - r^2 = -6 \Rightarrow 3^2 + 1^2 - r^2 = -6 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 4$ (não existe medida de comprimento do raio negativa)

Logo, o centro da circunferência é $(3, 1)$, e a medida de comprimento do raio é 4.

c) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y +$ $+ 16 = -16 + 4 + 16 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$

Logo, o centro é $C(2, 4)$, e a medida de comprimento do raio é 2.

d) $x^2 + y^2 + 12x - 4y - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 - 4y +$ $+ 4 = 9 + 36 + 4 \Rightarrow (x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 49$

Logo, o centro é $C(-6, 2)$, e a medida de comprimento do raio é 7.

e) $x^2 + y^2 + 8x + 11 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 = -11 + 16 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 0)^2 = 5$

Logo, o centro é $C(-4, 0)$, e a medida de comprimento do raio é $\sqrt{5}$.

f) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y +$ $+ 16 = -5 + 9 + 16 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 20$

Logo, o centro é $C(3, -4)$, e a medida de comprimento do raio é $\sqrt{20}$.

g) $x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Logo, o centro é $C(0, 2)$, e a medida de comprimento do raio é 2.

h) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1 + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

Logo, o centro é $C(1, 1)$, e a medida de comprimento do raio é $\sqrt{2}$.

37. **a)** $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 =$ $= -1 + 16 + 9 = (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 24$

Como $24 > 0$, a equação representa uma circunferência de centro $(4, -3)$, e medida de comprimento do raio $2\sqrt{6}$.

b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2$

Não há termo em xy. Logo, a equação indicada não representa uma circunferência.

c) $2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x + y^2 - 2y = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x^2 + 2x) + y^2 - 2y = -1 \Rightarrow 2(x^2 + 2x + 1) +$ $+ y^2 - 2y + 1 = -1 + 2 + 1 \Rightarrow 2(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

Como o coeficiente de $(x + 1)^2$ é 2, o coeficiente de $(y - 1)^2$ é 1 e $1 \neq 2$, a equação não representa uma circunferência.

Note que os coeficientes de x^2 e y^2 devem ser iguais (não necessariamente iguais a 1, como acontece no item **d** desta atividade).

d) Dividindo toda a equação por 3, temos:

$x^2 + y^2 - 4x - 5y - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 5y = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = 2 + 4 + \frac{25}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

Logo, é uma equação de circunferência de centro $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ e tem medida de comprimento do raio $\frac{7}{2}$.

e) $4x^2 - 4y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0$

Logo, não é uma equação de circunferência porque, por exemplo, os coeficientes de x^2 e de y^2 não são iguais.

Note que:

$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x + y)(x - y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x + y = 0}_{\substack{\text{equação da reta bissetriz dos} \\ \text{quadrantes pares}}}$ ou $\underbrace{x - y = 0}_{\substack{\text{equação da reta} \\ \text{bissetriz dos} \\ \text{quadrantes ímpares}}}$

f) Como o segundo membro da equação é negativo, a equação não representa uma circunferência; na verdade, não há ponto (x, y) tal que $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = -5$.

39. Exemplo de resposta: O centro $C(a, b)$ de uma circunferência é o ponto médio do diâmetro dela, então C é o ponto médio de $\overline{AB}$.

$C\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right) = C\left(\frac{4 + 2}{2}, \frac{-2 + 0}{2}\right) = C(3, -1)$

A medida de comprimento do raio é igual à metade da medida de comprimento do diâmetro. Cálculo da medida de comprimento do diâmetro $\overline{AB}$:

$d(A, B) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-2 - 0)^2} = 2\sqrt{2}$

$r = \frac{d(A, B)}{2} = \sqrt{2}$

Equação da circunferência de centro $C(3, -1)$ e medida de comprimento do raio $\sqrt{2}$:

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$

40. $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 13k = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 10y = -13k \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 10y + 25 = -13k + 1 + 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 5)^2 = -13k + 26$

Logo, o centro é $C(1, -5)$, e a medida de comprimento do raio é $\sqrt{-13k + 26}$.

Como $r > 0$, temos:

$\sqrt{-13k + 26} > 0 \Rightarrow -13k + 26 > 0 \Rightarrow -13k > -26 \Rightarrow$

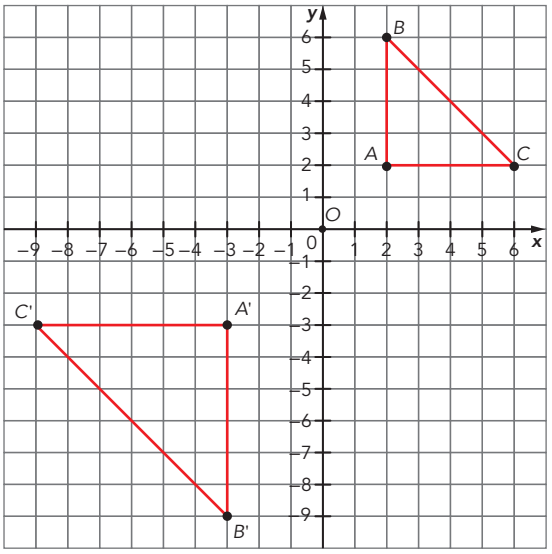
$\Rightarrow 13k < 26 \Rightarrow k < 2$

Assim, a solução é $\{k \in \mathbb{R} \mid k < 2\}$.

Capítulo 2

Atividades

3. b)



WYM Design/Arquivo da editora

6. $\frac{MN}{AB} = \frac{NO}{BC} = \frac{OP}{CD} = \frac{PQ}{DE} = \frac{QR}{EF} = \frac{RM}{FA} = k$

$\frac{MN}{2,2} = \frac{NO}{1} = \frac{OP}{2} = \frac{PQ}{2} = \frac{QR}{3} = \frac{RM}{2,2} = 3$

$MN = 6,6$ cm, $NO = 3$ cm, $OP = 6$ cm, $PQ = 6$ cm, $QR = 9$ cm e $MR = 6,6$ cm.

7. Sendo k a razão de homotetia, H a medida de altura da miniatura maior e h a medida de altura da miniatura menor, temos:

$\frac{H}{h} = k \Rightarrow \frac{6,3}{h} = 2,8 \Rightarrow h = 2,25$

A medida de altura da miniatura menor é 2,25 cm.

Enem e vestibulares (p. 58)

1. As coordenadas de M são dadas por $\left(\frac{-4 + 1}{2}, \frac{-2 + 3}{2}\right) =$

$= \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Logo, $a + b = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$.

Alternativa **b**.

2. O ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$ (considerando que os pontos A e B estão sobre a reta real) será dado por:

$\frac{\frac{8}{15} + \frac{4}{55}}{2} = \frac{2}{3}$

Alternativa **d**.

3. A equação reduzida da reta que contém os pontos A e B é do tipo $D = m \cdot C + n$, em que $n = 150$ (que é o coeficiente linear) e $m = \frac{0 - 150}{100 - 0} = -\frac{3}{2}$ (que é o coeficiente angular).

Logo, $D = -\frac{3}{2} \cdot C + 150 \Rightarrow 2D + 3C = 300$.

Alternativa **d**.

4. Escrevendo as equações das retas na forma reduzida, temos r: $y = \frac{2}{3}x - 3 \Rightarrow m_r = \frac{2}{3}$; s: $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{12} \Rightarrow m_s = \frac{2}{3}$; e t: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_t = -\frac{3}{2}$.

Logo, r e s são retas paralelas distintas e ambas são perpendiculares à reta t.

Alternativa **c**.

5. O coeficiente angular da reta r é $m_r = -3$; logo, o coeficiente da reta perpendicular a r que contém o ponto P e a origem do plano cartesiano é dado por $m_{OP} = \frac{1}{3}$, ou seja, a equação dessa reta é $y = \frac{1}{3}x$. Igualando as equações das 2 retas, temos $\frac{1}{3}x = 5 - 3x \Rightarrow x = 1{,}5$.

Alternativa **b**.

6. Reta da oferta:

$m = \frac{1{,}8 - 1{,}2}{800 - 500} = 0{,}002$

$y - 1{,}2 = 0{,}002(x - 500) \Rightarrow x - 500y + 100 = 0$

Reta da demanda:

$m = \frac{1{,}8 - 1{,}2}{500 - 700} = -0{,}003$

$y - 1{,}2 = -0{,}003(x - 700) \Rightarrow 3x + 1000y - 3300 = 0$

O preço do ponto de equilíbrio será obtido a partir da intersecção das retas:

$$\begin{cases} x = 500y - 100 \\ x = -\frac{1000y}{3} + 1100 \end{cases}$$

$500y - 100 = -\frac{1000y}{3} + 1100 \Rightarrow y = 1{,}44$

Alternativa **d**.

7. Completando-se os quadrados, temos:

$x^2 + y^2 = 2x + 2y - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = -1 + 1 + 1 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, que representa uma circunferência de centro $C(1, 1)$ e medida de comprimento do raio igual a 1.

Alternativa **d**.

8. Equação da reta s: $y - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow 2y - 5 = x$.

Coordenadas do ponto P:

$$\begin{cases} 16y = 3x + 80 \\ 2y - 5 = x \end{cases}$$

$16y = 3(2y - 5) + 80 \Rightarrow y = \frac{13}{2}$

$x = 2 \cdot \frac{13}{2} - 5 \Rightarrow x = 8$

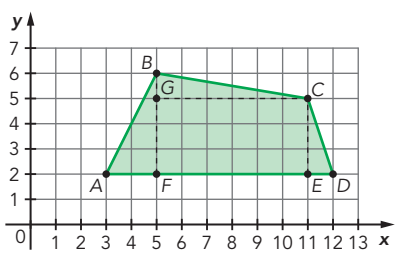
$P = \left(8, \frac{13}{2}\right)$

Alternativa **b**.

9. Devemos girar a tela 45° no sentido horário para alinhar com a linha do horizonte e mais 90° no sentido horário para colocá-la na posição original. Logo, devemos girar a tela 135° no sentido horário.

Alternativa **b**.

10. **a)**



Ericson Guilherme Luciano/ Arquivo da editora

b) Podemos calcular a medida de área da região limitada pelo quadrilátero $ABCD$ por composição de figuras geométricas.

Medida de área da região limitada pelo $\triangle ABF$: $\frac{2 \cdot 4}{2} = 4$.

Medida de área da região limitada pelo $\triangle BCG$: $\frac{6 \cdot 1}{2} = 3$.

Medida de área da região limitada pelo $\triangle CDE$: $\frac{1 \cdot 3}{2} = 1{,}5$.

Medida de área da região limitada pelo retângulo $CEFG$: $6 \cdot 3 = 18$.

Medida de área total: $4 + 3 + 1{,}5 + 18 = 26{,}5$.

11. Escrevendo a equação da circunferência C_1 na forma equação reduzida:

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 0 + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

Centro da circunferência C_1 são os pontos $(3, 2)$ e da circunferência C_2, $(7, 4)$; assim, as coordenadas do ponto médio são $(x_M, y_M) = \left(\frac{3 + 7}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) = (5, 3)$.

Coeficiente angular da reta que contém os centros das circunferências:

$m_1 = \frac{4 - 2}{7 - 3} = \frac{1}{2}$

Coeficiente da reta perpendicular que contém o ponto médio é $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -2$.

Portanto, a equação da reta que passa perpendicularmente pelo ponto médio do segmento de reta cujos extremos são os centros das circunferências é dada por:

$y - 3 = -2(x - 5) \Rightarrow y - 3 = -2x + 10 \Rightarrow y = -2x + 13$

12. **a)** Considerando $O(0, 0)$, $A(2, 2)$ e $B(4m, 0)$, a reta $y = mx$ divide o triângulo OAB em 2 regiões triangulares de mesma medida de área se a reta passar pelo ponto médio M do segmento de reta $\overline{AB}$. Assim, temos:

$M\left(\frac{4m + 2}{2}, \frac{0 + 2}{2}\right) = M(2m + 1, 1)$

b) Como o ponto M pertence à reta $y = mx$, temos:

$1 = m(2m + 1) \Rightarrow m' = -1$ e $m'' = \frac{1}{2}$

$-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Portanto, a soma de todos os valores possíveis de m é $-\frac{1}{2}$.

13. **a)** Como $-\sqrt{5}$ está compreendido entre -1 e -3, é possível identificar que o ponto B tem como coordenadas $B(-1, -2)$. Logo, a equação da reta que passa pelos pontos A e B será dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

b) $A = (k, 2k)$

O ponto D tem coordenadas $D(k, 0)$, e a medida de área da região limitada pelo triângulo é igual a 9; portanto:

$\frac{k \cdot 2k}{2} = 9 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$

Unidade 2

Capítulo 1

Atividades

10. Indicando por x a população brasileira adulta, em milhões, temos:

$\frac{4}{10} \cdot x = 60 \Rightarrow x = 150$

Do enunciado: $0{,}11 \cdot 150 = 16{,}5$.

Portanto, 16,5 milhões de pessoas. Alternativa **e**.

11. $\frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$

O custo com transporte corresponde a 20% do valor total do objeto.

$100\% - 20\% = 80\%$

Portanto, ela deverá ofertar uma recompensa correspondente a 80% do valor total do objeto. Alternativa **e**.

12. Considerando um homem de 61 anos, temos:

Frequência cardíaca máxima: $220 - 61 = 159$.

$0{,}65 \cdot 159 = 103{,}35$

$0{,}85 \cdot 159 = 135{,}15$

Portanto, a frequência cardíaca ideal para queimar gordura e emagrecer durante um treino para um homem de 61 anos varia de 103,35 bpm a 135,15 bpm. Sendo assim, os trechos do percurso nos quais esse ciclista se mantém dentro da faixa aeróbica ideal dele são o forte no plano e a subida moderada. Alternativa **d**.

14. Analisando os atendimentos da manhã, temos: $300 + x = 700 \Rightarrow x = 400$.

Considerando que 1300 pessoas foram atendidas, temos:

- atendimento de pessoas com 0 a 17 anos:

$y = \frac{300 + 250}{1\,300} \simeq 0{,}423 = 42{,}3\%$

- atendimento de pessoas com 18 anos ou mais:

$z = \frac{400 + 350}{1\,300} \simeq 0{,}577 = 57{,}7\%$

Alternativa **c**.

15. A troca de cada lâmpada corresponde a uma economia de 45 watts (pois 60 − 15 = 45). Isso corresponde a uma economia de 75%, dado que $\frac{45}{60} = 0{,}75 = 75\%$.

Logo, haverá uma economia de 75% em relação ao consumo total mensal correspondente ao uso das lâmpadas incandescentes (40%). Assim:

$0{,}4 \cdot 0{,}75 = 0{,}3$

Portanto, o consumo mensal diminuirá em 30%.

Alternativa **c**.

17. Pessoas em grupos de risco: $4{,}5 + 2 + 2{,}5 + 0{,}5 + 20{,}5 = 30$.

Pessoas em grupos de risco e que já foram vacinadas:

$0{,}9 + 1 + 1{,}5 + 0{,}4 + 8{,}2 = 12$

$\frac{12}{30} = 0{,}4 = 40\%$

Alternativa **d**.

18. Indicando por x a quantia que Luís recebeu, sabemos que Marta recebeu $0{,}8 \cdot x$ e que Sérgio recebeu $0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot x$. Assim:

$x + 0{,}8 \cdot x + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot x = 1890 \Rightarrow x = \frac{1\,890}{2{,}52} = 750$

$0{,}8 \cdot 750 = 600$

$0{,}9 \cdot 600 = 540$

Portanto, Luís recebeu R$ 750,00; Marta, R$ 600,00; e Sérgio, R$ 540,00.

23. **a)** $f_{acumulado} = 1{,}03 \cdot 1{,}05 = 1{,}0815 > 1$; logo, $f = 1 + i \Rightarrow i = 0{,}0815 = 8{,}15\%$. Portanto, aumento de 8,15%.

b) $f_{acumulado} = 1{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}88 < 1$; logo, $f = 1 - i \Rightarrow i = 0{,}12 = 12\%$. Portanto, desconto de 12%.

c) $f_{acumulado} = 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}331 > 1$; logo, $f = 1 + i \Rightarrow i = 0{,}331 = 33{,}1\%$. Portanto, aumento de 33,1%.

d) $f_{acumulado} = 1{,}06 \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}96 \simeq 0{,}994 < 1$; logo, $f = 1 - i \Rightarrow i = 0{,}006 = 0{,}6\%$. Portanto, desconto de 0,6%.

24. $f = \frac{\text{valor novo}}{\text{valor anterior}} = \frac{11\,440}{11\,000} = 1{,}04$; logo, $f = 1 + i \Rightarrow i = 0{,}04 = 4\%$. Portanto, o rendimento percentual foi de 4%.

25. $f = \frac{\text{valor novo}}{\text{valor anterior}} = \frac{59}{50} = 1{,}18$; logo, $f = 1 + i \Rightarrow i = 0{,}18 = 18\%$. Portanto, o aumento percentual foi de 18%.

26. $70 + 10{,}5 = 80{,}5$; logo, $\frac{\text{valor novo}}{\text{valor anterior}} = \frac{80{,}5}{70} = 1{,}15$.

Então, $f = 1 + i \Rightarrow i = 0{,}15 = 15\%$. Portanto, o aumento foi de 15%.

28. Considerando a 1ª loja, temos: $0{,}92 \cdot 800 = 736$.

Portanto, o valor final do fogão na 1ª loja é R$ 736,00.

Considerando a 2ª loja, temos:

$0{,}9 \cdot 820 = 738$

Portanto, o valor final do fogão na 2ª loja é R$ 738,00.

Logo, a oferta da 1ª loja é a mais conveniente para o cliente.

36. Considerando apenas a variação da medida de comprimento da distância entre os 2 corpos, temos:

$$\frac{\frac{G \cdot M \cdot n}{d^2}}{\frac{G \cdot M \cdot n}{(1{,}2d)^2}} = \frac{1}{1{,}44} \simeq 0{,}69$$

Assim, sabemos que a medida de comprimento da distância inicial corresponde a aproximadamente 69% do valor da nova medida de comprimento da distância, o que significa que a nova medida de distância é aproximadamente 31% maior, causando uma redução de aproximadamente 31% na medida de força de atração.

38. $\frac{57{,}5}{50} = \frac{66{,}125}{57{,}5} = 1{,}15$

$i = 1{,}15 - 1 = 0{,}15 = 15\%$

Logo, a taxa de crescimento foi 15% a cada 6 anos. Supondo o mesmo crescimento para os próximos 18 anos ($2\,042 - 2\,024 = 18$), temos:

$f_{acumulado} = (1{,}15)^3 = 1{,}520875$

$1{,}520875 \cdot 66{,}125 \simeq 100{,}57$

Portanto, o valor aproximado seria R$ 100,57.

Alternativa **c**.

39. $f_{acumulado} = 0{,}7 \cdot 1{,}2 = 0{,}84$

Alternativa **b**.

41. Considerando P como o preço anterior, então $3P$ corresponde ao novo preço. Assim, temos:

$$f = \frac{\text{preço novo}}{\text{preço anterior}} = \frac{3P}{P} = 3$$

Logo, $f > 1$ e, então, temos: $i = f - 1 = 3 - 1 = 2 = 200\%$.

Portanto, o aumento percentual do preço do feijão foi de 200%. Considerando que o feijão tem um peso de 2% no cálculo da inflação e que todos os outros itens se mantiveram estáveis, então a variação da inflação foi de $2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04 = 4\%$.

42. **a)** Significa que houve um ganho no poder de compra, ou seja, o trabalhador pode consumir mais do que consumia no ano anterior.

b) Salário atualizado pela inflação: $1{,}046 \cdot 2\,000 = 2\,092$.
Novo salário: $1{,}08 \cdot 2\,000 = 2\,160$.
$2\,160 - 2\,092 = 68$
Haverá um ganho real de R$ 68,00.

46. $110 = C \cdot 0{,}25 \cdot 2 \Rightarrow C = \frac{110}{0{,}5} = 220$

O capital aplicado foi R$ 220,00.

50. $11\,317{,}60 = C(1 + 0{,}04 \cdot 18) \Rightarrow C = \frac{11\,317{,}6}{1 + 0{,}72} = 6\,580$

O capital aplicado foi R$ 6.580,00.

54. **a)** O montante M, dado um capital C aplicado à taxa de juros de 4% ao mês no período t, em regime de juros simples, é dado por $M = C(1 + i \cdot t)$. Como o capital será inserido na célula B1 e o prazo será inserido na célula D1, a fórmula pedida é **=B1*(1+0,04*D1)**.

b) Para $C = 100$ e $M = 300$, temos:
$300 = 100(1 + 0{,}04 \cdot t) \Rightarrow t = 50$
Para $C = 200$ e $M = 600$, temos:
$600 = 200(1 + 0{,}04 \cdot t) \Rightarrow t = 50$
Ambos os capitais triplicarão no prazo de 50 meses.

c) $3C = C(1 + 0{,}04 \cdot t) \Rightarrow 3 = 1 + 0{,}04t \Rightarrow t = 50$

d) O montante M, dado um capital C aplicado à taxa de juros de 4% ao mês no período t, em regime de juros compostos, é dado por $M = C(1 + i)^t$. Como o capital será inserido na célula B1 e o prazo será inserido na célula D1, a fórmula pedida é **=B1*(1+0,04)^D1**.

Para $C = 100$ e $M = 300$, temos:
$300 = 100(1 + 0{,}04)^t \Rightarrow 3 = (1{,}04)^t \Rightarrow t \simeq 28$
Para $C = 200$ e $M = 600$, temos:
$600 = 200(1 + 0{,}04)^t \Rightarrow 3 = (1{,}04)^t \Rightarrow t \simeq 28$
Como 28 meses não resultam no montante triplicado, vamos considerar que são necessários 29 meses para que o montante seja triplicado.

e) Precisamos determinar t tal que $3C = C(1{,}04)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow (1{,}04)^t = 3$. Temos:
$3C = C(1 + 0{,}04)^t \Rightarrow 3 = (1{,}04)^t \Rightarrow t \simeq 28$
Como 28 meses não resultam no montante triplicado, vamos considerar que são necessários 29 meses para que o montante seja triplicado.

f) Porque o regime de juros compostos faz com que o montante aumente mais em determinado prazo em comparação com o regime de juros simples.

55. **a)** Para construir a tabela, preenchemos na 1ª linha os nomes das colunas: "Prazo (em meses)", "Montante a juros simples" e "Montante a juros compostos". Nas primeiras 12 linhas da coluna "Prazo (em meses)", digitamos os números 1 a 12.

Para a fórmula de juros simples, na célula B2, digitamos **=500*(1+0,09*A2)**. Depois, clicamos e selecionamos a alça de autopreenchimento até a célula B13, e devemos ter os montantes em cada mês.
Para a fórmula de juros compostos, na célula C2 digitamos **=500*(1,09)^A2** e utilizamos novamente a alça de autopreenchimento para completar as próximas linhas da tabela. Depois disso, devemos ter uma tabela como a apresentada a seguir.

Prazo (em meses)	Montante a juros simples	Montante a juros compostos
1	R$ 545,00	R$ 545,00
2	R$ 590,00	R$ 594,05
3	R$ 635,00	R$ 647,51
4	R$ 680,00	R$ 705,79
5	R$ 725,00	R$ 769,31
6	R$ 770,00	R$ 838,55
7	R$ 815,00	R$ 914,02
8	R$ 860,00	R$ 996,28
9	R$ 905,00	R$ 1.085,95
10	R$ 950,00	R$ 1.183,68
11	R$ 995,00	R$ 1.290,21
12	R$ 1.040,00	R$ 1.406,33

Reprodução/LibreOffice

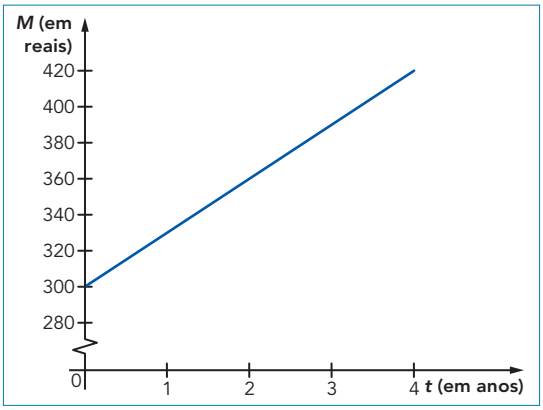
61.
- W W W W: $60\,000 \cdot (1 + 0{,}275) \cdot (1 - 0{,}12) = 67\,320$.
- BBBT: $60\,000 \cdot (1 + 0{,}247) \cdot (1 - 0{,}15) = 63\,597$.
- BGT Capital: $60\,000 \cdot (1 + 0{,}295) \cdot (1 - 0{,}13) = 67\,599$.
- JGPF: $60\,000 \cdot (1 + 0{,}259) \cdot (1 - 0{,}14) = 64\,964{,}4$.
- IKPQ: $60\,000 \cdot (1 + 0{,}239) \cdot (1 - 0{,}11) = 66\,162{,}6$.

Portanto, a BGT Capital é a melhor aplicação dentre as opções, pois apresenta maior rendimento em comparação às outras.

Alternativa **b**.

65. **a)**

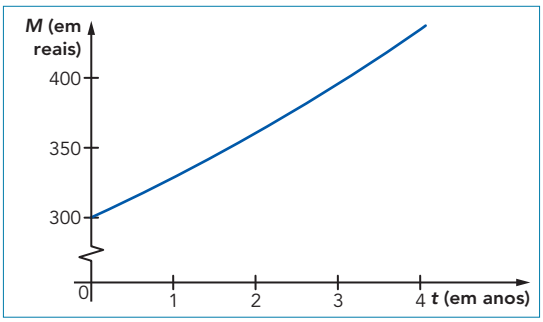
Sistema de juros simples



Ilustrações: WYM Design/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Sistema de juros compostos



Dados elaborados para fins didáticos.

b) Juros simples: $M = C(1 + i \cdot t) = 300(1 + 0{,}1 \cdot 2) = 360$.
Juros compostos: $M = C(1 + i)^t = 300(1 + 0{,}1)^2 = 363$.

O montante obtido considerando o sistema de juros simples é R$ 360,00 e o obtido considerando o sistema de juros compostos é R$ 363,00.

c) Juros simples: $M = 300(1 + 0{,}1 \cdot 4) = 420$.

Juros compostos: $M = 300(1 + 0{,}1)^4 = 439{,}23$.

$439{,}23 - 420{,}00 = 19{,}23$

Portanto, a diferença entre os montantes é R$ 19,23.

Capítulo 2

Atividades

6.

Data	Valor de amortização (em reais)	Juros (em reais)	Parcela (em reais)	Saldo devedor (em reais)
0	–	–	–	90 000
1	7 500	900	8 400	82 500
2	7 500	825	8 325	75 000
3	7 500	750	8 250	67 500
4	7 500	675	8 175	60 000
5	7 500	600	8 100	52 500
6	7 500	525	8 025	45 000
7	7 500	450	7 950	37 500
8	7 500	375	7 875	30 000
9	7 500	300	7 800	22 500
10	7 500	225	7 725	15 000
11	7 500	150	7 650	7 500
12	7 500	75	7 575	0

Assim, adicionando os valores de todas as parcelas, obtemos R$ 95.850,00.

7. $60\,000 - p - j = 40\,394{,}72 \Rightarrow 60\,000 - (p - 1200) = 40\,394{,}72 \Rightarrow p = 20\,805{,}28$

No 2º mês, temos $p - j = 20\,805{,}28 - 807{,}89 = 19\,997{,}39$.

No 3º mês, temos $p - j = 20\,805{,}28 - 407{,}95 = 20\,397{,}33$.

Data	Valor de amortização (em reais)	Juros j (em reais)	Parcela p (em reais)	Saldo devedor (em reais)
0	–	–	–	60 000
1	$p - j$	1200	20 805,28	40 394,72
2	19 997,39	807,89	20 805,28	20 397,33
3	20 397,33	407,95	20 805,28	0

Enem e vestibulares (p. 116)

1. Blusas: $100 \cdot 45 = 4\,500$, ou seja, R$ 4.500,00.
Calças: $50 \cdot 80 = 4\,000$, ou seja, R$ 4.000,00.
Vestidos: $60 \cdot 60 = 3\,600$, ou seja, R$ 3.600,00.
Total arrecadado: $4\,500 + 4\,000 + 3\,600 = 12\,100$.
Alternativa **c**.

3. $T \cdot (1 - 0{,}15) = 68 \Rightarrow T = 80$
Quantidade de questões erradas: $0{,}15 \cdot 80 = 12$.
Quantidade de erros por distração: $0{,}25 \cdot 12 = 3$.
Se ele não tivesse cometido os erros por distração, a porcentagem de acerto seria: $\frac{68 + 3}{80} = 0{,}8875 = 88{,}75\%$.
Alternativa **a**.

4. Valor pago: $x + 0{,}5x + 0{,}3x = 1{,}8x$.
Valor sem desconto: $3x$.
Desconto obtido: $3x - 1{,}8x = 1{,}2x$.
$\frac{1{,}2x}{3x} = 0{,}4x$, ou seja, 40% do preço normal total.
Alternativa **d**.

5. Quantidade de nomes na lista de espera deste ano:
$400 + 0{,}1 \cdot 400 = 440$
Quantidade de nomes após redução de 25%:
$440 - 0{,}25 \cdot 440 = 330$
Devem atender a 110 novos estudantes.
Para que isso ocorra, o número mínimo de salas que deverão ser construídas é 11 (pois $110 \div 10 = 11$).
Alternativa **b**.

6. Valor de venda, em reais, de cada aparelho no primeiro semestre do ano (x):
$5 \cdot (30\,000x - 45\,000\,000) = 30\,000\,000 \Rightarrow x = 1700$
Desejando que o lucro seja 10% maior, para determinar o valor de venda (y), em reais, de um aparelho no segundo semestre do ano, devemos ter:
$5 \cdot (30\,000y - 45\,000\,000) = 1{,}1 \cdot 30\,000\,000 \Rightarrow y = 1720$
Alternativa **b**.

7. Considerando os aumentos sucessivos no valor da coxinha, temos:
$f_1 = 1 + 0{,}3 = 1{,}3$
$f_2 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$
$f_{\text{acumulado}} = 1{,}3 \cdot 1{,}1 = 1{,}43$
Portanto, o preço da coxinha após os 2 aumentos é $1{,}43P$.
Alternativa **a**.

8. Indicando por S o salário mínimo, em reais, no início do período de 15 anos e considerando um aumento nominal de 300%, temos:
$(1 + 3) \cdot S = 4S$
No entanto, uma inflação de 100% no período significa que uma quantia T no final do período corresponde a uma quantia $\frac{T}{2}$ no início do período.
$\frac{4S}{2} = 2S = (1 + 1)S$
Após o aumento e a inflação, o valor do salário mínimo corresponde a 2 vezes o valor original, ou seja, houve aumento de 100% no período.
Alternativa **b**.

9. O fator de atualização de desconto para o 2º *pack* é $f = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Assim, o valor unitário na compra de 2 *packs* é:
$\frac{21{,}60 + 0{,}6 \cdot 21{,}60}{2 \cdot 12} = 1{,}44$
Portanto, o valor está correto na loja **III**.
Alternativa **c**.

10. Aplicando os valores na fórmula de juros simples, temos:
$1350 = 1250 \cdot (1 + 0{,}01 \cdot t) \Rightarrow t = 8$
Alternativa **b**.

11. Saldo devedor, após 1 mês: $1{,}1 \cdot 1000 - 300 = 800$.
Saldo devedor, após 2 meses: $1{,}1 \cdot 800 - 500 = 380$.
Último pagamento: $1{,}1 \cdot 380 = 418$.
Alternativa **a**.

12. Saldo após o 1º depósito: R$ 1.000,00.
Saldo, após o 2º depósito: $1{,}1 \cdot 1000 + 1000 = 2100$.
Saldo, após o 3º depósito: $1{,}1 \cdot 2100 = 2\,310$.
Saldo, após o 4º depósito: $1{,}1 \cdot 2\,310 + 1000 = 3\,541$.
Saldo, 1 ano após o 4º depósito: $1{,}1 \cdot 3\,541 = 3\,895{,}1$.
Alternativa **d**.

13. Analisando o montante obtido na aplicação Alfa (M_A), teremos:
$M_A = 2\,000 + 2\,000 \cdot 0{,}12 \cdot 5 = 3\,200$
A partir dos juros obtidos na aplicação Beta (J_B), teremos:
$J_B = (C_0 + x) \cdot (1 + i)^t - (C_0 + x) \Rightarrow 1\,050 = (3\,200 + x) \cdot (1{,}1)^2 - (3\,200 + x) \Rightarrow 378 = 0{,}21x \Rightarrow x = 1\,800$
Logo, foi acrescentado R$ 1.800,00 ao montante.

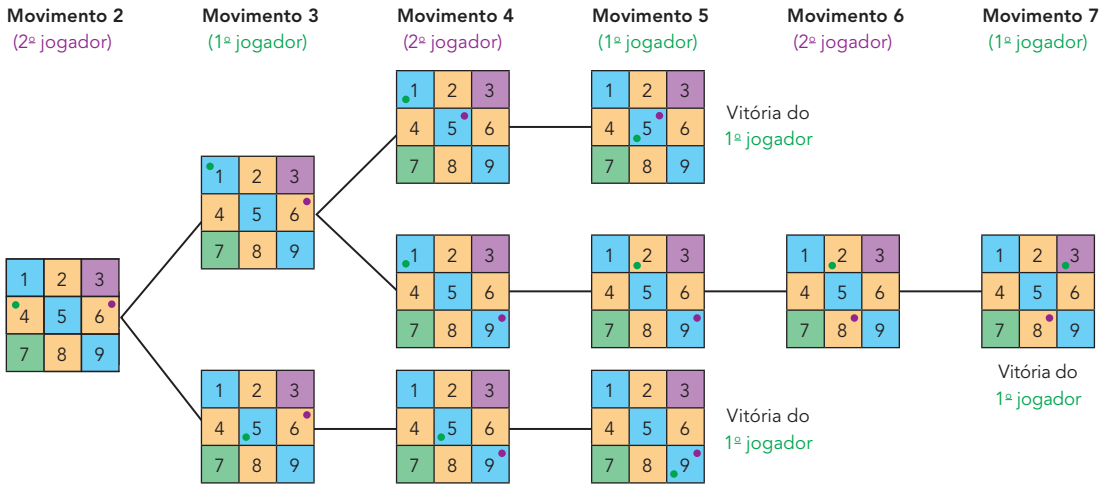
Unidade 3

Capítulo 1

Atividades

7. Vamos listar as possibilidades diferentes em que o candidato pode ser aprovado e a quantidade de maneiras em cada uma delas. Os 3 jurados estão representados pelas letras A, B e C.
Se for aprovado por apenas 1 jurado: 3 maneiras (A, B ou C).
Se for aprovado por 2 dos 3 jurados: 3 maneiras (AB, AC ou BC), já que AB e BA correspondem à mesma maneira.
Se for aprovado pelos 3 jurados: 1 maneira (ABC), já que ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA correspondem à mesma maneira.
O total de maneiras é: 3 + 3 + 1 = 7.
Portanto, há 7 maneiras diferentes.

12. O primeiro jogador sempre vence nesse cenário.



WYM Design/Arquivo da editora

16. **c)** Exemplo de problema: Quantas são as configurações diferentes em que um grupo de 6 pessoas pode se sentar em um banco retilíneo de 6 lugares sabendo que 2 delas sempre vão se sentar cada uma em uma ponta?

20. **a)** Colocando as letras na ordem alfabética, a primeira palavra é AGIMO.
b) Colocando as letras na ordem alfabética e invertendo as 2 últimas, temos: AGIOM.
c) A _ _ _ _ → $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
Sabemos que 24 palavras iniciam com A, então a próxima palavra inicia em G. Seguindo a ordem alfabética, concluímos que GAIMO é a 25ª palavra.
d) Seguindo a ordem alfabética, a última palavra é OMIGA. Logo, a penúltima palavra é OMIAG.
e) A _ _ _ _ → $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
G _ _ _ _ → $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
I A _ _ _ → $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
Como 24 + 24 + 6 = 54, podemos verificar qual é a próxima palavra considerando a ordem alfabética.
I G A M O → 1
24 + 24 + 6 + 1 = 55
Logo, a 55ª palavra é IGAMO.

25. **a)** $P_{11}^{4,4,2} = \dfrac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34\,650$; logo, 34 650 anagramas.
b) $P_{10}^{5,3} = \dfrac{10!}{5! \cdot 3!} = 5\,040$; logo, 5 040 anagramas.
c) $P_7^{2,2,2} = \dfrac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 630$; logo, 630 anagramas.
d) $P_8^{2,2} = \dfrac{8!}{2! \cdot 2!} = 10\,080$; logo, 10 080 anagramas.
e) $P_8^{3,3} = \dfrac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$; logo, 1120 anagramas.

29. **a)** $P_5^4 = \dfrac{5!}{4!} = 5$
b) $P_9^{6,3} = \dfrac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$
c) 84 − 5 = 81
d) $P_{m+n}^{m,n} = \dfrac{(n+m)!}{n! \cdot m!}$

32. **a)** $A_{x,2} = \frac{x!}{(x-2)!} = x^2 - x$

b) $A_{x-3,2} = \frac{(x-3)!}{(x-3-2)!} = x^2 - 7x + 12$

c) $A_{2x+1,3} = \frac{(2x+1)!}{(2x+1-3)!} = 2x \cdot (2x+1) \cdot (2x-1) =$
$= 8x^3 - 2x$

33. 1ª maneira: sem fórmula.
$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$
2ª maneira: com fórmula.
$A_{10,4} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$

36. $A_{6,4} = \frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

38. $A_{15,2} = \frac{15!}{13!} = 15 \cdot 14 = 210$

39. $A_{20,3} = \frac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6\,840$

41. **a)** $A_{5,4} = \frac{5!}{1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

b) Para um número ser ímpar, o último algarismo dele também precisa ser ímpar. Nesse caso, temos apenas 2 opções, 5 ou 7.

$__ __ __ \underline{5 \text{ ou } 7}$

Temos: $2 \cdot A_{4,3} = 2 \cdot \frac{4!}{1!} = 48$.

42. **a)** $A_{13,3} = \frac{13!}{10!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$

b) $A_{9,3} = \frac{9!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

$1716 - 504 = 1212$

45. $C_{52,4} = \frac{52!}{4! \cdot 48!} = 270\,725$

46. **a)** $C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

b) $C_{8,5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$

c) $2 \cdot C_{8,4} = 2 \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 140$

47. Exemplo de problema: Lúcia faz parte de um grupo com 12 pessoas. Quantas comissões diferentes com 6 pessoas podemos formar em que Lúcia sempre esteja presente?

48. $C_{6,3} \cdot C_{4,2} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 120$

49. **a)** $C_{5,1} \cdot C_{6,1} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot \frac{6!}{1! \cdot 5!} = 30$

b) $C_{5,2} \cdot C_{6,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 150$

c) $C_{11,4} = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = 330$

51. **a)** $C_{14,3} \cdot C_{10,2} = \frac{14!}{3! \cdot 11!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 16\,380$

b) $C_{24,5} = \frac{24!}{5! \cdot 19!} = 42\,504$

c) $C_{14,1} \cdot C_{10,1} = \frac{14!}{1! \cdot 13!} \cdot \frac{10!}{1! \cdot 9!} = 140$

52. **a)** $C_{5,3} \cdot C_{6,1} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{1! \cdot 5!} = 60$

b) $C_{5,3} \cdot C_{6,1} + C_{5,4} = 60 + \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 65$

c) $C_{5,1} \cdot C_{6,3} + C_{6,4} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} + \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 115$

53. $C_{10,3} - C_{6,3} - C_{4,3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} - \frac{6!}{3! \cdot 3!} - \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 96$

54. **a)** Para a escolha dos salgados, temos $C_{5,2}$ possibilidades; para as bebidas, $C_{3,2}$ possibilidades; e, para as sobremesas, temos $C_{3,2}$ possibilidades.

$N = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 90$

b) Mínimo: Marco deve escolher uma esfirra, um quibe, uma água, um suco, uma fruta e um bolo, cujo custo total C, em reais, será:
$C = 3{,}00 + 3{,}00 + 2{,}50 + 3{,}00 + 2{,}00 + 2{,}50 = 16{,}00$

Máximo : Marco deve escolher uma empada, um pastel, um refrigerante, um suco, um sorvete e um bolo, cujo custo total C', em reais, será:
$C' = 4{,}50 + 4{,}00 + 3{,}50 + 3{,}00 + 3{,}00 + 2{,}50 = 20{,}50$

57. $C_{12,3} = \frac{12!}{3! \cdot (12-3)!} = 220$

58. $A_{10,3} = \frac{10!}{7!} = 720$

59. $A_{5,2} = \frac{5!}{3!} = 20$

60. $A_{10,3} = \frac{10!}{7!} = 720$

61. $P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151\,200$

62. $C_{6,4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$

63. $C_{n,2} = 36 \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 36 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow$
$\Rightarrow (n+8)(n-9) = 0 \Rightarrow n = 9$ ou $n = -8$ (não convém)
Estavam reunidos 9 amigos.

64. **a)** $P_6 = 6! = 720$
b) $P_5 = 5! = 120$
c) $P_4 = 4! = 24$
d) $A_{3,2} \cdot P_4 = \frac{3!}{1!} \cdot 4! = 144$
e) $3^2 \cdot P_4 = 9 \cdot 4! = 216$
f) $P_4 = 4! = 24$
g) $P_3 \cdot P_4 = 3! \cdot 4! = 144$

65. $5 \cdot A_{5,3} = 5 \cdot \frac{5!}{2!} = 300$

66. $C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$

67. $A_{20,3} = \frac{20!}{17!} = 6\,840$
$C_{17,2} = \frac{17!}{2! \cdot 15!} = 136$
$6\,840 \cdot 136 = 930\,240$

Capítulo 2

Atividades

5. Há 4 cartas ás em um baralho.
Considerando que A representa as cartas ás, J representa as cartas valete, Q representa as cartas dama, K representa as cartas rei, O representa o naipe ouros, C representa o naipe copas, E representa o naipe espadas e P representa o naipe paus, temos o espaço amostral:
Ω = {AO, 2O, ..., 10O, JO, QO, KO, AC, 2C, ..., 10C, JC, QC, KC, AE, 2E, ..., 10E, JE, QE, KE, AP, 2P, ..., 10P, JP, QP, KP}.
O evento é A = {AO, AC, AE, AP}.

12. **c)** Exemplo de resposta: Evento *M*: "retirar uma bolinha vermelha"; evento *N*: "retirar uma bolinha verde, amarela ou azul". Os eventos são complementares, pois são mutuamente exclusivos e a união deles é igual ao espaço amostral.

14. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) Seja *A*: "ocorrer número par", então $A = \{2, 4, 6\}$.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = 50\%$$

b) Seja *B*: "ocorrer número primo", então $B = \{2, 3, 5\}$.

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2} = 50\%$$

c) Seja *C*: "ocorrer o número 3", então $C = \{3\}$.

$$p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} \simeq 16{,}7\%$$

d) Seja *D*: "ocorrer número menor do que 3", então $D = \{1, 2\}$.

$$p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} \simeq 33{,}3\%$$

e) Seja *E*: "ocorrer número menor do que 1", então $E = \{\ \} = \varnothing$.

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0\%$$

f) Seja *F*: "ocorrer número menor do que 7", então $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

$$p(F) = \frac{n(F)}{n(\Omega)} = \frac{6}{6} = 100\%$$

15. Considerando B as bolas brancas e V as bolas vermelhas, temos: $\Omega = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, V_1, V_2, V_3, V_4\} \Rightarrow$ $\Rightarrow n(\Omega) = 10$.

a) Seja o evento *A*: "ocorrer uma bola vermelha", então $A = \{V_1, V_2, V_3, V_4\} \Rightarrow n(A) = 4$.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\%$$

b) Seja o evento *C*: "ocorrer uma bola branca", então $C = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\} \Rightarrow n(C) = 6$.

$$p(C) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{10} = 0{,}6 = 60\%$$

16. **a)** Como são 2 comorbidades, precisamos calcular: $2 \cdot 5\% = 10\%$

$80\% - 10\% = 70\%$

Como $70\% > 60\%$, temos que o paciente deve tomar o medicamento **A**.

b) $80\% - x \cdot 5\% > 60\% \Rightarrow 20\% > 5\%x \Rightarrow x < 4$

A partir de 5 comorbidades.

17. $\Omega = \{4O, 4E, 5E, 8O, 6C, 10P\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

a) $A = \{6C\} \Rightarrow n(A) = 1$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} \simeq 0{,}167 = 16{,}7\%$$

b) $B = \{4O, 8O, 6C\} \Rightarrow n(B) = 3$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%$$

c) $C = \{4E, 5E\} \Rightarrow n(C) = 2$

$$p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} \simeq 0{,}333 = 33{,}3\%$$

d) $D = \{4O, 4E\} \Rightarrow n(D) = 2$

$$p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} \simeq 0{,}333 = 33{,}3\%$$

e) $E = \{4O, 4E, 8O, 6C, 10P\} \Rightarrow n(E) = 5$

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{5}{6} \simeq 0{,}833 = 83{,}3\%$$

18. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \Rightarrow n(\Omega) = 13$

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \Rightarrow n(A) = 6$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{13} \simeq 0{,}462 = 46{,}2\%$$

b) $B = \{3, 6, 9, 12\} \Rightarrow n(B) = 4$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{13} \simeq 0{,}308 = 30{,}8\%$$

c) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \Rightarrow n(C) = 6$

$$p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{6}{13} \simeq 0{,}462 = 46{,}2\%$$

d) $D = \{9, 10, 11, 12, 13\} \Rightarrow n(D) = 5$

$$p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{5}{13} \simeq 0{,}385 = 38{,}5\%$$

e) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow n(E) = 9$

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{9}{13} \simeq 0{,}692 = 69{,}2\%$$

f) $F = \{6, 7, 8, 9\} \Rightarrow n(F) = 4$

$$p(F) = \frac{n(F)}{n(\Omega)} = \frac{4}{13} \simeq 0{,}308 = 30{,}8\%$$

g) $G = \{4, 8, 12\} \Rightarrow n(G) = 3$

$$p(G) = \frac{n(G)}{n(\Omega)} = \frac{3}{13} \simeq 0{,}231 = 23{,}1\%$$

19. $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow n(\Omega) = 36$

a) $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \Rightarrow n(A) = 6$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} \simeq 0{,}167 = 16{,}7\%$$

b) $B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\} \Rightarrow n(B) = 18$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{18}{36} = 0{,}5 = 50\%$$

c) $C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\} \Rightarrow n(C) = 15$

$$p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{15}{36} \simeq 0{,}417 = 41{,}7\%$$

d) $D = \{(1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (6, 1)\} \Rightarrow n(D) = 11$

$$p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{11}{36} \simeq 0{,}306 = 30{,}6\%$$

e) $E = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\} \Rightarrow n(E) = 9$

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{9}{36} = 0{,}25 = 25\%$$

f) $F = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \Rightarrow n(F) = 6$

$$p(F) = \frac{n(F)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} \simeq 0{,}167 = 16{,}7\%$$

g) $G = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \Rightarrow n(G) = 14$

$$p(G) = \frac{n(G)}{n(\Omega)} = \frac{14}{36} \simeq 0{,}389 = 38{,}9\%$$

20. Consideramos que o espaço amostral é formado de todas as peças do dominó, $n(\Omega) = 28$.

a) $A = \{(6, 6)\} \Rightarrow n(A) = 1$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{28}$$

A probabilidade é igual a $\frac{1}{28}$. A sentença é verdadeira.

b) $B = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1)\} \Rightarrow n(B) = 4$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

A probabilidade é igual a $\frac{1}{7}$. A sentença é falsa.

c) $C = \{(0, 4), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow n(C) = 7$

$$p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

A probabilidade é igual a $\frac{1}{4}$. A sentença é falsa.

d) $D = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow n(D) = 7$

$$p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

A probabilidade é igual a $\frac{1}{4}$. A sentença é verdadeira.

e) $E = \{(0, 2), (0, 4), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\} \Rightarrow n(E) = 13$

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{13}{28}$$

A probabilidade é igual a $\frac{13}{28}$. A sentença é falsa.

f) $F = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\} \Rightarrow n(F) = 4$

$$p(F) = \frac{n(F)}{n(\Omega)} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

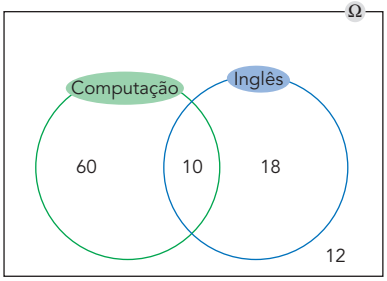
A probabilidade é igual a $\frac{1}{7}$. A sentença é verdadeira.

g) $G = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow n(G) = 7$

$$p(G) = \frac{n(G)}{n(\Omega)} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

A probabilidade é igual a $\frac{1}{4}$. A sentença é falsa.

22. Podemos representar um diagrama de Venn para a situação descrita.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O espaço amostral: $n(\Omega) = 100$.

a) Seja o evento A: "ocorrer estudantes que frequentem apenas o curso de Computação". Assim:
$70 - 10 = 60$
Concluímos que 60 estudantes frequentam apenas o curso de Computação; logo, $n(A) = 60$.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{60}{100} = 60\%$$

A probabilidade é 60%.

b) Seja o evento B: "ocorrer estudantes que não frequentem nenhum dos 2 cursos". Então:

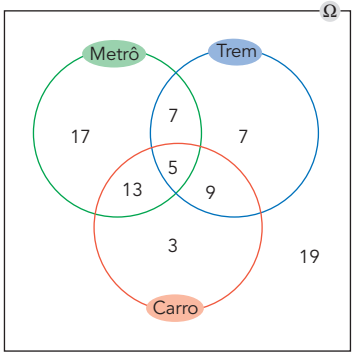
$100 - 18 - 10 - 60 = 12$

Concluímos que 12 estudantes não frequentam nenhum curso; logo, $n(B) = 12$.

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{12}{100} = 12\%$$

A probabilidade é 12%.

23. Podemos representar um diagrama de Venn para a situação de acordo com os dados indicados.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O espaço amostral é formado por todas as pessoas entrevistadas, isto é, $n(\Omega) = 80$.

a) $n(A) = 17$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{17}{80} = 21{,}25\%$$

b) $n(B) = 7$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{7}{80} = 8{,}75\%$$

c) $n(C) = 7$

$$p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{7}{80} = 8{,}75\%$$

d) $n(D) = 80 - 17 - 7 - 3 - 13 - 7 - 9 - 5 = 19$

$$p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{19}{80} = 23{,}75\%$$

e) $n(E) = 17 + 7 + 3 = 27$

$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{27}{80} = 33{,}75\%$

24. **a)** $C_{52,2} = \frac{52!}{2! \cdot 50!} = \frac{52 \cdot 51}{2 \cdot 1} = 1326$

De 1326 maneiras diferentes.

b) $C_{13,2} = \frac{13!}{2! \cdot 11!} = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 78$

De 78 maneiras diferentes.

c) $n(\Omega) = C_{52,2} = 1326$

$n(A) = C_{13,2} = 78$

$p(A) = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$

A probabilidade é $\frac{1}{17}$.

26. A medida de área da superfície do alvo é $\pi \cdot 6^2$ dm^2 = $= 36\pi$ dm^2.

a) $2^2 \cdot \pi = 4\pi$

$p(A) = \frac{4\pi}{36\pi} = \frac{1}{9}$

A probabilidade é $\frac{1}{9}$.

b) $4^2 \cdot \pi - 4\pi = 16\pi - 4\pi = 12\pi$

$p(B) = \frac{12\pi}{36\pi} = \frac{1}{3}$

A probabilidade é $\frac{1}{3}$.

c) $6^2 \cdot \pi - 12\pi - 4\pi = 36\pi - 16\pi = 20\pi$

$p(C) = \frac{20\pi}{36\pi} = \frac{5}{9}$

A probabilidade é $\frac{5}{9}$.

27. O espaço amostral é formado pela combinação das 52 cartas do baralho tomadas 2 a 2.

$n(\Omega) = C_{52,2} = \frac{52!}{2! \cdot 50!} = 1326$

a) $n(B) = \frac{13 \cdot 13}{2} = \frac{169}{2}$

$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{\frac{169}{2}}{1326} = \frac{13}{204} \simeq 6{,}4\%$

A probabilidade é $\frac{13}{204}$.

b) $n(\overline{C}) = C_{39,2} = \frac{39!}{37! \cdot 2!} = 741$

$p(\overline{C}) = \frac{n(\overline{C})}{n(\Omega)} = \frac{741}{1326} = \frac{19}{34}$

$p(C) = 1 - \frac{19}{34} = \frac{15}{34} \simeq 44{,}1\%$

A probabilidade é $\frac{15}{34}$.

28. **a)** $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$.

$n(A) = 8$

$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{17}$

A probabilidade é $\frac{8}{17}$.

b) $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

$n(B) = 7$

$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{7}{17}$

A probabilidade é $\frac{7}{17}$.

c) $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17\}$

$n(C) = 14$

$p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{14}{17}$

A probabilidade é $\frac{14}{17}$.

d) $D = \{2\}$

$n(D) = 1$

$p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{1}{17}$

A probabilidade é $\frac{1}{17}$.

e) $1 - p(C) = 1 - \frac{14}{17} = \frac{3}{17}$

A probabilidade é $\frac{3}{17}$.

f) $p(F) = p(A) - p(D) = \frac{8}{17} - \frac{1}{17} = \frac{7}{17}$

A probabilidade é $\frac{7}{17}$.

g) $p(G) = p(B) - p(D) = \frac{7}{17} - \frac{1}{17} = \frac{6}{17}$

A probabilidade é $\frac{6}{17}$.

29. $n(A) = 112$; $n(\Omega) = 228$.

$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{112}{228} = \frac{29}{57}$

30. $n(\Omega) = 36$; $n(A) = 16$ e $p(A) = \frac{16}{36}$; $n(B) = \frac{16}{2} + \frac{20}{2} = 18$ e $p(B) = \frac{18}{36}$.

Seja o evento $(A \cap B)$: "ter 15 anos de idade e cabelo castanho", então $n(A \cap B) = \frac{16}{2} = 8$ e $p(A \cap B) = \frac{8}{36}$.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{16}{36} + \frac{18}{36} - \frac{8}{36} =$

$= \frac{13}{18} \simeq 72{,}2\%$

A probabilidade é $\frac{13}{18}$.

31. Espaço amostral: "grupos de 2 peças tomadas de um grupo de 40 peças".

$n(\Omega) = C_{40,2} = \frac{40!}{2! \cdot 38!} = 780$

a) $n(A) = C_{37,2} = \frac{37!}{2! \cdot 35!} = 666$

$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{666}{780} \simeq 85{,}4\%$

A probabilidade é $\frac{666}{780}$.

b) $n(B) = C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$

$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{780} \simeq 0{,}4\%$

A probabilidade é $\frac{3}{780}$.

c) $p(C) = 1 - p(A) \Rightarrow p(C) = 1 - \frac{666}{780} \Rightarrow$

$\Rightarrow p(C) = \frac{114}{780} \simeq 14{,}6\%$

A probabilidade é $\frac{114}{780}$.

32. Na **opção 1**: $\frac{2}{8} = 25\%$ de achar uma bomba.

Na **opção 2**: $\frac{1}{8} = 12{,}5\%$ de achar uma bomba.

Na **opção 3** temos 7 bombas restantes ($10 - 2 - 1 = 7$) espalhadas em 46 quadradinhos ($64 - 9 - 9 = 46$), de modo que a probabilidade de achar uma bomba é $\frac{7}{46} \simeq 15{,}2\%$.

Assim, na próxima jogada, é preferível escolher algum dos 8 quadradinhos que cercam o número 1 já revelado, como na **opção 2**.

33. $n(\Omega) = 52$; $n(A) = 2$; $n(B) = 13$.

Seja o evento $A \cap B$: "retirar 1 ás vermelho de copas", então $n(A \cap B) = 1$.

$p(A|B) = \frac{1}{13}$

34. O nascimento de filhos é considerado um evento equiprovável. Assim, "sexo masculino" e "sexo feminino" têm a mesma probabilidade de ocorrer.

$\Omega = \{(M_1, M_2, M_3), (M_1, M_2, F_3), (M_1, F_2, F_3), (F_1, F_2, F_3), (F_1, F_2, M_3), (F_1, M_2, M_3), (M_1, F_2, M_3), (F_1, M_2, F_3)\} \Rightarrow n(\Omega) = 8$

Evento A: "nascer 3 filhos do sexo masculino" $\Rightarrow$

$\Rightarrow A = \{(M_1, M_2, M_3)\} \Rightarrow n(A) = 1$

Evento B: "a 1ª criança é do sexo feminino" $\Rightarrow$

$\Rightarrow B = \{(M_1, M_2, M_3), (M_1, M_2, F_3), (M_1, F_2, M_3), (M_1, F_2, F_3)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow n(B) = 4$

$A \cap B = \{(M_1, M_2, M_3)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$

$p(A|B) = \frac{1}{4}$

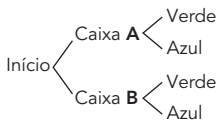
35. $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

$B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\} \Rightarrow n(B) = 6$

$A \cap B = \{(3, 5)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$

$p(A|B) = \frac{1}{6}$

37. **a)** Exemplo de resposta:



b) Probabilidade total de retirar uma bola azul:

Caixa **A**: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Caixa **B**: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

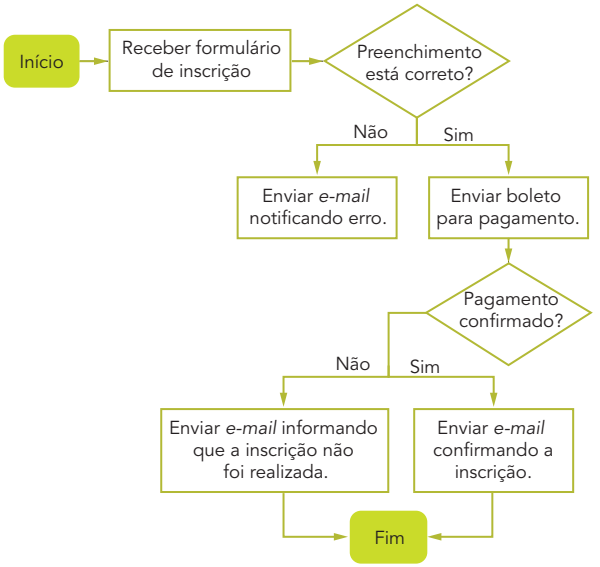
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Portanto, $\frac{1}{2}$ ou 50%.

39. Considerando os eventos A: "ter deficiência de certa vitamina" e B: "ter determinada doença", sabemos que:

$p(A \cap B) = 30\% \cdot 10\% = 3\%$

40. **a)** Exemplo de resposta:



Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Considerando os eventos A: "receber boleto para pagamento" e B: "receber *e-mail* de confirmação de inscrição", temos:

$p(A \cap B) = 95\% \cdot 80\% = 76\%$

41. **a)** $\frac{60}{100} \cdot \frac{20}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{70}{100} = \frac{12}{100} + \frac{28}{100} = \frac{40}{100} = 40\%$

b) $\frac{\frac{40}{100} \cdot \frac{70}{100}}{\frac{60}{100} \cdot \frac{20}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{70}{100}} = \frac{\frac{28}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{7}{10} = 70\%$

42. Considere os eventos:

A: "chover" e $\overline{A}$: "não chover" $\Rightarrow p(A) = 90\%$ e $p(\overline{A}) = 10\%$.

B: "vencer sem trocar os pneus" $\Rightarrow p(B|A) = 80\%$ e $p(B|\overline{A}) = 30\%$.

C: "vencer trocando os pneus" $\Rightarrow p(C|A) = 70\%$.

Probabilidade de chover e vencer sem trocar os pneus:

$p(B \cap A) = p(B|A) \cdot p(A) \Rightarrow p(B \cap A) = 30\% \cdot 90\% = 27\%$

Probabilidade de não chover e vencer sem trocar os pneus:

$p(B \cap \overline{A}) = p(B|\overline{A}) \cdot p(\overline{A}) \Rightarrow p(B \cap \overline{A}) = 30\% \cdot 10\% = 3\%$

Probabilidade de chover e vencer trocando os pneus:

$p(C \cap A) = p(C|A) \cdot p(A) \Rightarrow p(C \cap A) = 70\% \cdot 90\% = 63\%$

Portanto, a maior probabilidade de vencer é trocando os pneus.

44. Considerando que o participante escolha primeiro a porta **2**, temos

Situações	Porta 1	Porta 2	Porta 3	Não mudando a porta	Mudando a porta
1	Carro	Bode	Bode	Ganha o bode	Ganha o carro
2	Bode	Carro	Bode	Ganha o carro	Ganha o bode
3	Bode	Bode	Carro	Ganha o bode	Ganha o carro

Analisando as possíveis situações, se o participante não mudar a porta, a possibilidade de ele ganhar o carro é 1 em 3 situações. Se o participante mudar a porta, a possibilidade de ele ganhar o carro é 2 em 3 situações.

Conexões (p. 182)

1. O genótipo *AA* ocorre apenas se o gameta masculino for *A*, evento que tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de ocorrer, e se o gameta feminino for *A*, evento com probabilidade $\frac{1}{2}$ também. Portanto, a probabilidade de ocorrer *AA* é dada por $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$. De modo análogo, o genótipo *aa* tem probabilidade de ocorrer igual a $\frac{1}{4}$.

Já o genótipo *Aa* ocorre se o gameta masculino é *A* e o gameta feminino é *a*, portanto, a probabilidade é dada por $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$, ou se o gameta masculino é *a* e o gameta feminino é *A*, cuja probabilidade é dada por $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$. Portanto, a probabilidade de ocorrência do genótipo *Aa* é $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Enem e vestibulares (p. 184)

3. $C_{8,6} = \frac{8!}{6! \cdot (8-6)!} = 28$

Alternativa **c**.

4. $C_{10,3} = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = 120$

Alternativa **b**.

5. $C_{6,2} \cdot C_{15,5} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{15!}{10! \cdot 5!}$

Alternativa **a**.

6. $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 72$

Alternativa **d**.

7. Lembrando que os 2 últimos dígitos da senha são distintos, existem 90 possibilidades (pois $10 \cdot 9 = 90$), das quais apenas 1 está correta, logo, $p(A) = \frac{1}{90}$.

Alternativa **b**.

8. Total de cartões de estudantes do primeiro ano: 200.

Total de cartões de estudantes do segundo ano: $150 \cdot 2 = 300$.

Total de cartões de estudantes do terceiro ano: $100 \cdot 3 = 300$.

Quantidade total de cartões depositados: $200 + 300 + 300 + 300 = 800$.

A probabilidade de o vencedor do sorteio ser um estudante de terceiro ano será:

$p(A) = \frac{300}{800} = \frac{3}{8}$

Alternativa **e**.

9. $P(A) = \frac{10}{15 + 10} \cdot 100\% = 40\%$

Alternativa **d**.

10. $p_1 = \frac{1}{68 \cdot 67 \cdot 66 \cdot 65}$

$p_2 = \frac{1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 6}$

$p_3 = \frac{1}{52 \cdot 51 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5}$

Logo, $p_1 < p_2 < p_3$.

Alternativa **a**.

11. $p = \frac{608\,000}{608\,000 + 474\,000} \simeq 0{,}56$

Alternativa **b**.

12. Considerando as ordens de nascimento com o distúrbio congênito, são 3 possibilidades, sendo 2 com distúrbio (D) e 1 sem o distúrbio (S), ou seja, DSS, SDS e SSD. Para cada um desses casos, sabemos que a probabilidade de ter o distúrbio é $\frac{1}{4}$ e a probabilidade de não ter o distúrbio $(\overline{D})$ é $p(\overline{D}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Portanto, sendo o evento *A*: "ter exatamente dois dos 3 filhos com distúrbio", $p(A) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$.

Alternativa **e**.

13. Considerando dois participantes, haverá $3 \cdot 3$ resultados possíveis, dos quais 3 são empates e 6 possuem um vencedor.

A probabilidade de não haver empate em uma partida será $p = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

A probabilidade de haver pelo menos um empate em 3 partidas será: $p' = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$.

Alternativa **d**.

14. **a)** $M = \frac{19 + 29 + 30 \cdot 2 + 31 + 32 \cdot 4 + 33 \cdot 2 + 35 \cdot 2}{13} = 31$

Logo, essa medida de temperatura é maior do que a média histórica.

b) A quantidade de dias em que a medida de temperatura é maior do que 17 graus é 6. Como são 13 dias, teremos: $p = \frac{6}{13}$.

Unidade 4

Capítulo 1

Atividades

9. **a)**

Estado de origem dos presidentes do Brasil (de 1889 a 1964)

Estado de origem	FA	FR
Minas Gerais	6	$\frac{6}{22}$
São Paulo	4	$\frac{4}{22}$
Rio Grande do Sul	3	$\frac{3}{22}$
Alagoas	2	$\frac{2}{22}$
Rio de Janeiro	2	$\frac{2}{22}$
Rio Grande do Norte	1	$\frac{1}{22}$
Paraíba	1	$\frac{1}{22}$
Santa Catarina	1	$\frac{1}{22}$
Mato Grosso	1	$\frac{1}{22}$
Mato Grosso do Sul	1	$\frac{1}{22}$
Total	**22**	**1,00**

Dados elaborados para fins didáticos.

13. **a)** Em 2020.

b) Em 2050, a projeção é superior a 230 milhões de habitantes; em 2060, é inferior a esse valor; portanto, apresenta decrescimento de 2050 a 2060.

d) $E = \frac{1000\,000\,000\,000}{25} = 40\,000\,000\,000$

Ou seja, 40 bilhões de reais.

e) Exemplo de resposta: O aumento da população idosa pode impactar os sistemas de aposentadoria de várias maneiras, por exemplo, a proporção de trabalhadores ativos para aposentados diminuirá.

15. Quantidade de gatos adotados: $100 + 30 + 60 = 190$.

Quantidade de cachorros adotados: $80 + 60 + 120 = 260$.

Diferença durante o período: $260 - 190 = 70$.

Alternativa **c**.

17. **a)** Quantidade de acidentes que ocorreram no período de 2014 a 2023:

$175 + 172 + 164 + 146 + 167 + 150 + 149 + 141 + 137 + 156 = 1557$

b) O decréscimo percentual é dado por:

$175 \cdot x = 150 \Rightarrow x = \frac{150}{175} \Rightarrow x \simeq 0{,}86$

$1{,}00 - 0{,}86 = 0{,}14 = 14\%$

Portanto, aproximadamente 14%.

c) Apenas em 2016.

d) Em 2021 ocorreu a menor quantidade de acidentes fatais.

e) Diferença entre o total de acidentes e a quantidade de acidentes fatais em cada ano: 2014: $175 - 38 = 137$; 2015: $172 - 47 = 125$; 2016: $164 - 45 = 119$; 2017: $146 - 30 = 116$; 2018: $167 - 39 = 128$; 2019: $150 - 35 = 115$; 2020: $149 - 38 = 111$; 2021: $141 - 26 = 115$; 2022: $137 - 36 = 101$; 2023: $156 - 29 = 127$.

Portanto, a maior diferença foi registrada em 2014.

f) A partir do gráfico, obtemos a média de acidentes fatais de 2014 a 2022:

$$MA = \frac{38 + 47 + 45 + 30 + 39 + 35 + 38 + 26 + 36}{9} \simeq 37$$

Utilizando a regra de 3 simples, temos:

$100\% \longrightarrow 37$

$x\% \longrightarrow 29$

$$x = \frac{100 \cdot 29}{37} \simeq 78{,}4$$

Sabemos que: $100\% - 78{,}4\% = 21{,}6\%$.

Portanto, a quantidade de acidentes fatais diminuiu aproximadamente 21,6%.

A partir do gráfico, obtemos a média de fatalidades de 2014 a 2022:

$$MA = \frac{83 + 79 + 104 + 54 + 81 + 66 + 55 + 58 + 49}{9} \simeq 69{,}9$$

Utilizando a regra de 3 simples, temos:

$100\% \longrightarrow 69{,}9$

$x\% \longrightarrow 72$

$$x = \frac{100 \cdot 72}{69{,}9} \simeq 103$$

Sabemos que: $103\% - 100\% = 3\%$.

Portanto, a quantidade de fatalidades aumentou aproximadamente 3%.

18. Analisando cada item, temos:

I. De 2019 a 2020:

$40 - 30 = 10$

$\frac{10}{30} \simeq 0{,}33 = 33\%$; logo, maior do que 20%.

II. De 2017 a 2019:

$30 - 14 = 16$

$\frac{16}{14} \simeq 1{,}14 = 114\%$; logo, maior do que 100%.

III. De 2012 a 2016:

$11 - 3 = 8$

$\frac{8}{3} \simeq 2{,}67 = 267\%$

De 2016 a 2019:

$30 - 11 = 19$

$\frac{19}{11} \simeq 1{,}73 = 173\%$

Portanto, o aumento de 2012 a 2016 foi maior do que o de 2016 a 2019.

Alternativa **e**.

20. No cartão de 16 GB, o espaço ocupado por aplicativos, vídeos e fotos é:

$25\% + 13\% + 22\% = 60\%$

Assim, temos: 60% de 16 GB $= 0{,}6 \cdot 16 = 9{,}6$.

Então, esses dados ocupavam 9,6 GB do cartão de 16 GB.

Logo, o espaço disponível no novo cartão será:

$32 - 9{,}6 = 22{,}4$

$\frac{22{,}4}{32} = 0{,}7 = 70\%$

Portanto, o espaço disponível no novo cartão corresponde a 70%.

Alternativa **c**.

22. **a)** Primeiro, vamos construir uma tabela de frequências para representar esses valores. Temos:

Amplitude total: $10 - 2 = 8$.

Quantidade de classes: 6.

Amplitude de cada classe: $9 \div 6 = 1{,}5$.

Assim, obtemos a seguinte tabela de frequências:

Notas bimestrais de Matemática

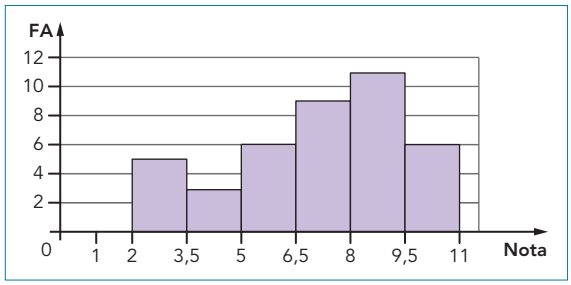
Nota	FA
2,0 ⊢ 3,5	5
3,5 ⊢ 5,0	3
5,0 ⊢ 6,5	6
6,5 ⊢ 8,0	9
8,0 ⊢ 9,5	11
9,5 ⊢ 11	6
Total	**40**

Dados elaborados para fins didáticos.

A partir da tabela de frequências, podemos construir o seguinte histograma:

Notas bimestrais de Matemática

WYM Design/Arquivo da editora



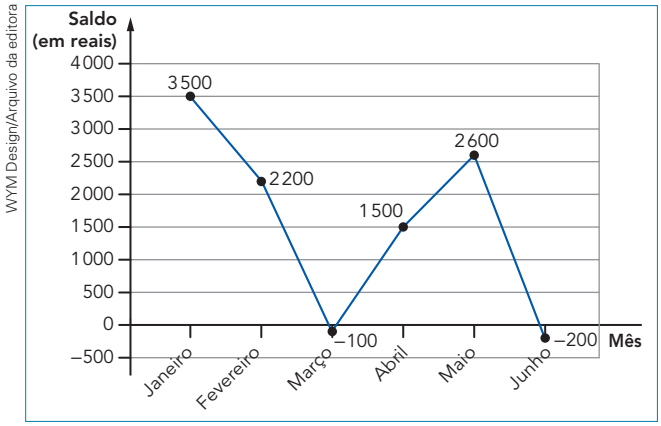
Dados elaborados para fins didáticos.

Essa representação é um exemplo de resposta que pode variar dependendo da quantidade de classes escolhida e do número utilizado para determinar a amplitude das classes.

28. **a)**

Saldo bancário – 1º semestre

WYM Design/Arquivo da editora



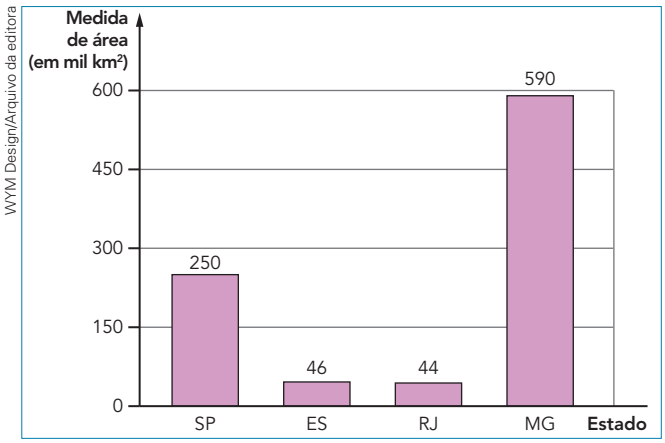
Dados elaborados para fins didáticos.

Exemplo de resposta: De janeiro a março o saldo bancário da conta diminuiu. Depois de março, o saldo da conta voltou a subir e se manteve positivo até maio, e a partir de junho o saldo passou a ser negativo.

29.

Medidas de área dos estados da região Sudeste

WYM Design/Arquivo da editora



Fonte dos dados: IBGE. *Área territorial* – Brasil, Grandes Regiões, Unidades da Federação e Municípios. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. Disponível em: https://tedit.net/yop4uk. Acesso em: 24 jul. 2024.

30. Vamos construir uma tabela de frequências.
Amplitude total: 34 − 26 = 8.
Quantidade de classes: 5.
Amplitude de cada classe: 10 ÷ 5 = 2.

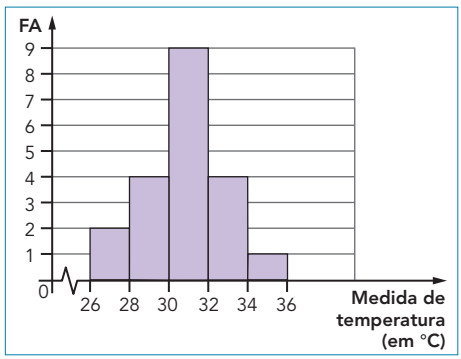
Medidas de temperatura máxima

Medida de temperatura máxima (em °C)	FA	FR (em %)
26 ⊢ 28	2	10
28 ⊢ 30	4	20
30 ⊢ 32	9	45
32 ⊢ 34	4	20
34 ⊢ 36	1	5
Total	**20**	**100**

Dados elaborados para fins didáticos.

Medidas de temperatura máxima

Banco de imagens/Arquivo da editora

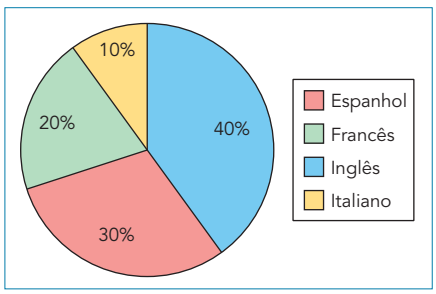


Dados elaborados para fins didáticos.

31. Para construir o gráfico de setores, primeiro vamos determinar a medida de abertura do ângulo do setor correspondente a cada idioma. Assim, temos:
Espanhol: 30% de 360° = 108°.
Francês: 20% de 360° = 72°.
Inglês: 40% de 360° = 144°.
Italiano: 10% de 360° = 36°.
Com esses dados, podemos construir o seguinte gráfico de setores:

Escolha de idiomas

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora



Dados elaborados para fins didáticos.

32. **a)** Sim. Espera-se que os estudantes identifiquem que a escala do eixo *y* (vertical) está errada, não está iniciando no 0, fazendo com que, por exemplo, o dado correspondente a 2019 pareça bem acima do "controle de meta". Além disso, a barra correspondente

a 2019, que indica 4,31%, está maior do que a barra correspondente a 2020, que indica 4,52%.

b) A inflação acumulada no período é dada por:

$1{,}0375 \cdot 1{,}0431 \cdot 1{,}0452 \cdot 1{,}1006 \cdot 1{,}0579 - 1 \simeq$

$\simeq 1{,}3170 - 1 \simeq 0{,}3170$

Ou seja, aproximadamente 31,7%.

Como essa porcentagem é maior do que a do aumento de salário, a afirmação do patrão é falsa, pois o ajuste não repõe as perdas causadas pela inflação do período.

c) Exemplo de resposta: A inflação é o aumento generalizado e contínuo dos preços de bens e serviços em uma economia ao longo do tempo. Esse fenômeno faz com que o poder de compra da moeda diminua, ou seja, com o mesmo valor em dinheiro, é possível comprar menos produtos e serviços do que anteriormente.

36. **a)**

Quantidade de vezes que cada face foi obtida em 1000 lançamentos de um dado

Face	Quantidade de ocorrências	Frequência relativa (em %)
1	157	15,7
2	171	17,1
3	160	16,0
4	166	16,6
5	171	17,1
6	175	17,5

Dados elaborados para fins didáticos.

37. **c)** Para saber a faixa etária, vamos descobrir qual é o gasto dessa pessoa com o plano de saúde.

Renda total (4 salários mínimos): $4 \cdot$ R$ 1.302,00 = = R$ 5.208,00.

Gasto com plano de saúde: 15% de R$ 5.208,00 = = 0,15 · R$ 5.208,00 = R$ 781,20.

De acordo com a tabela, quem gasta R$ 781,20 no plano de saúde tem de 34 a 48 anos.

Capítulo 2

Atividades

1. A média diária de gastos é dada por:

$$MA = \frac{41 + 35 + 25 + 39 + 42}{5} = \frac{182}{5} = 36{,}40$$

Para obter a mediana, ordenamos os valores em ordem crescente: 25, 35, 39, 41, 42.

Como há 5 elementos, a mediana é o termo que está no meio da sequência, portanto é o número 39.

Logo, a média aritmética dos gastos é R$ 36,40 por dia e a mediana é R$ 39,00.

2. **a)** Média aritmética:

$$MA = \frac{126 + 130 + 126 + 102}{4} = \frac{484}{4} = 121$$

Logo, a média aritmética é 121.

b) Média ponderada:

$$MP = \frac{2 \cdot 126 + 3 \cdot 130 + 1 \cdot 126 + 2 \cdot 102}{2 + 3 + 1 + 2} =$$

$$= \frac{252 + 390 + 126 + 204}{8} = \frac{972}{8} = 121{,}5$$

Logo, a média aritmética ponderada é 121,5.

c) Para obter a mediana, ordenamos a distribuição: 102, 126, 126, 130.

Assim, a mediana é dada pela média aritmética entre os dois termos centrais:

$$Me = \frac{126 + 126}{2} = 126$$

Logo, a mediana é 126.

d) O valor que mais se repete é 126. Logo, $Mo = 126$.

4. **a)** Média aritmética das idades:

$$MA = \frac{3 \cdot 13 + 2 \cdot 14 + 4 \cdot 15 + 1 \cdot 16}{3 + 2 + 4 + 1} =$$

$$= \frac{39 + 28 + 60 + 16}{10} = \frac{143}{10} = 14{,}3$$

Logo, a média aritmética é 14,3 anos.

A maior frequência na tabela é 4, que corresponde a 15 anos. Logo, $Mo = 15$.

Como a distribuição é 13, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, então consideramos a média aritmética entre os 2 termos centrais (5º e o 6º):

$$Me = \frac{14 + 15}{2} = 14{,}5$$

Logo, a mediana é 14,5 anos.

b) A partir da tabela dada, calculamos o *VM* (valor médio) de cada classe:

Medida de altura em um grupo de 21 pessoas

Medida de altura (em m)	FA	*VM*
1,61 ⊢ 1,65	3	1,63
1,65 ⊢ 1,69	6	1,67
1,69 ⊢ 1,73	5	1,71
1,73 ⊢ 1,77	4	1,75
1,77 ⊢ 1,81	3	1,79

Dados elaborados para fins didáticos.

Assim, a média aritmética é dada por:

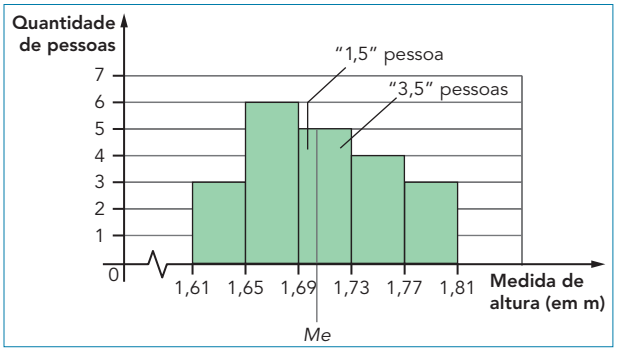
$$MA = \frac{3 \cdot 1{,}63 + 6 + 1{,}67 + 5 \cdot 1{,}71 + 4 \cdot 1{,}75 + 3 \cdot 1{,}79}{3 + 6 + 5 + 4 + 3} =$$

$$= \frac{4{,}89 + 10{,}02 + 8{,}55 + 7{,}00 + 5{,}37}{21} = \frac{35{,}83}{21} \simeq 1{,}71$$

A moda nesse caso é representada pela classe modal: 1,65 ⊢ 1,69.

Para determinar a mediana desta distribuição, precisamos construir o histograma referente a ela.

Medida de altura em um grupo de 21 pessoas



WYM Design/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Perceba que as 2 primeiras classes de frequência contêm 9 das 21 pessoas e, as 2 últimas classes, 7 das 21 pessoas. Desse modo, como a mediana (*Me*) divide o conjunto de dados em 2 partes com a mesma quantidade de observações (nesse caso, em duas partes com "10,5" pessoas), temos de dividir a classe que contém a mediana em retângulos proporcionais a "1,5" pessoa e "3,5" pessoas.

Como as medidas de altura das barras retangulares a ser determinadas têm a mesma medida, basta considerar a proporção entre as bases. Logo, $\frac{Me - 1{,}69}{1{,}5} = \frac{1{,}73 - Me}{3{,}5} \Rightarrow Me = 170{,}2$; isto é, a mediana é 1,70 m.

7. Do enunciado, o grupo de basquete tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol, nenhum estudante está nos 2 grupos e todos os estudantes estão em um dos grupos. Logo, sendo n a quantidade de estudantes no grupo de futebol, a quantidade de estudantes no grupo de basquete é $n + 1$, o que implica que a quantidade de estudantes na turma é $2n + 1$, que necessariamente é um número ímpar.

Como a quantidade de estudantes nessa turma é um número ímpar e somente um estudante (*F*) tem medida de altura igual à mediana (1,67 m), metade dos estudantes restantes é menor do que *F* e a outra metade é maior do que *F*. Sabendo que o grupo de basquete é formado pelos estudantes mais altos da turma, isso implica que o grupo de basquete é formado por *F* e todos os estudantes maiores do que ele. Portanto, *P* e *J* jogaram futebol e *F* e *M* jogaram basquete.

Alternativa **c**.

8. Representamos os dados em uma tabela de frequências.

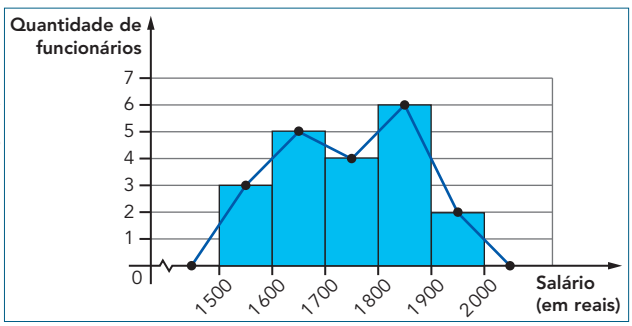
Distribuição salarial dos funcionários de uma empresa

Salário (em reais)	FA	*VM*
1500 ⊢ 1600	3	1550
1600 ⊢ 1700	5	1650
1700 ⊢ 1800	4	1750
1800 ⊢ 1900	6	1850
1900 ⊢ 2000	2	1950

Dados elaborados para fins didáticos.

Considerando a tabela, podemos construir o seguinte polígono de frequência:

Distribuição salarial dos funcionários de uma empresa



WYM Design/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Assim, a média aritmética é dada por:

$$MA = \frac{3 \cdot 1550 + 5 \cdot 1650 + 4 \cdot 1750 + 6 \cdot 1850 + 2 \cdot 1950}{3 + 5 + 4 + 6 + 2} = \frac{34\,900}{20} = 1745$$

A moda nesse caso é representada pela classe modal: 1800 ⊢ 1900.

Como no histograma apresentado as 2 primeiras e as 2 últimas classes de frequência contêm 8 dos 20 funcionários, basta dividir a classe que contém a mediana (*Me*) exatamente no ponto médio.

Portanto, como $\frac{1700 + 1800}{2} = 1750$, a mediana dos salários apresentados é igual a R$ 1.750,00.

9. De acordo com o enunciado, temos:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} + x_{11}}{11} = 40 \Rightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} + x_{11} = 440$$

Trocando x_1 (idade do funcionário aposentado) por 60, temos:

$60 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} + x_{11} = 440 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} + x_{11} = 380$ **(I)**

Logo, a média das idades dos 10 funcionários será:

$$MA = \frac{x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} + x_{11}}{10} \textbf{ (II)}$$

Substituindo **(I)** em **(II)**, temos:

$$MA = \frac{380}{10} = 38$$

Alternativa **d**.

11. **a)** Considerando o gráfico, podemos construir a seguinte tabela de frequências:

Desempenho de uma turma em uma prova

Acertos	FA
0	1
1	2
2	8
3	13
4	11
5	5
Total	**40**

Dados elaborados para fins didáticos.

Logo, a quantidade de estudantes da turma é 40.

b) Como 5 estudantes acertaram 5 questões, então:

$$FR = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$$

c) A quantidade de estudantes que acertaram 3 ou mais questões é:

$13 + 11 + 5 = 29$

Assim, temos:

$$FR = \frac{29}{40} = 72{,}5\%$$

d) A média é dada por:

$$MA = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 13 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{1 + 2 + 8 + 13 + 11 + 5} = \frac{0 + 2 + 16 + 39 + 44 + 25}{40} = \frac{126}{40} = 3{,}15$$

Logo, a média é 3,15 acertos por estudante.

O valor que tem maior frequência é 3 (cuja frequência é 13).

Logo, a moda é 3 acertos por estudante.

A mediana é a média dos termos de posição 20 e 21, pois $\frac{40}{2} = 20$.

Apresentando os dados em ordem crescente e de acordo com as frequências, temos:

$Me = \frac{3+3}{2} = 3$

Logo, a mediana é 3 acertos por estudante.

16. Sabemos que a média M da cidade é dada por:

$M = \frac{60}{100} \cdot 30 + \frac{40}{100} \cdot 35 = 18 + 14 = 32$

Logo, a média de idade da população analfabeta dessa cidade é 32 anos. Como $27 < M \leqslant 32$, a cidade receberá o recurso **III**.

Alternativa **c**.

17. Utilizando os valores médios 26, 30, 34, 38 e 42, respectivamente, para as classes, temos:

$MA = \frac{6 \cdot 26 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 34 + 6 \cdot 38 + 1 \cdot 42}{6+4+3+6+1} =$

$= \frac{648}{20} = 32{,}4$

Diferença entre as médias: $38 - 32{,}4 = 5{,}6$.

Portanto, a média obtida pelo diretor é aproximadamente 6 anos inferior à média obtida pela pesquisa.

Alternativa **c**.

18. **a)** De acordo com o texto, sabemos que, dentre as 104 500 000 mulheres brasileiras, 1463 foram vítimas de feminicídio em 2023. Assim, temos:

$\frac{1463}{104\,500\,000} = \frac{x}{100\,000} \Rightarrow x = 1{,}4$

A média nacional de mortes por feminicídio em 2023 foi de 1,4 para cada 100 000 mulheres.

b) Exemplo de resposta: Segundo a Lei nº 13.104 de 9 de março de 2015, o feminicídio caracteriza-se pelo homicídio de uma mulher quando motivado por violência doméstica e familiar ou por menosprezo ou discriminação à condição de mulher.

Ao coletar e analisar dados estatísticos sobre violência contra a mulher, é possível entender em que escala ela ocorre, assim como possíveis padrões entre os casos, de modo a determinar quais medidas podem ser mais eficazes para o combate a esse tipo de violência.

19. Quando o usuário fornece os números 4 e 7, o algoritmo considera os valores de entrada iguais às variáveis n_1 e n_2, respectivamente; logo, $n_1 = 4$ e $n_2 = 7$. Depois, ele cria m, calcula $m = (4 + 7) \div 2 = 5{,}5$ e retorna o valor de saída 5,5.

Quando o usuário fornece os números 8,5 e 9, o algoritmo considera os valores de entrada iguais às variáveis n_1 e n_2, respectivamente; logo, $n_1 = 8{,}5$ e $n_2 = 9$. Depois, ele cria m, calcula $m = (8{,}5 + 9) \div 2 = 8{,}75$ e retorna o valor de saída 8,75.

Quando o usuário fornece os números 5,8 e 9,1, o algoritmo considera os valores de entrada iguais às variáveis n_1 e n_2, respectivamente; logo, $n_1 = 5{,}8$ e $n_2 = 9{,}1$. Depois, ele cria m, calcula $m = (5{,}8 + 9{,}1) \div 2 = 7{,}45$ e retorna o valor de saída 7,45.

Entrada	Saída
4 e 7	5,5
8,5 e 9	8,75
5,8 e 9,1	7,45

21. Organizando os dados em ordem crescente, temos: 8, 9, 11, 11, 11, 11, 12, 13, 14. O 2º quartil, Q_2, é o valor central dos dados ordenados, isto é, $Q_2 = 11$.

O 1º quartil é a mediana dos dados à esquerda de Q_2. Assim:

$Q_1 = \frac{9+11}{2} = 10$

O 3º quartil é a mediana dos dados à direita de Q_2. Assim:

$Q_3 = \frac{12+13}{2} = 12{,}5$

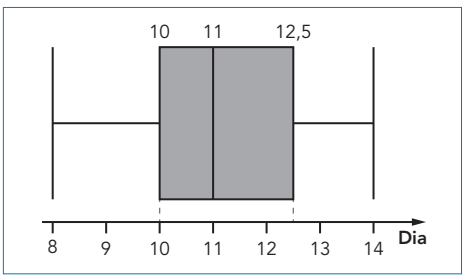
Testando os valores para *outliers*:

$Q_1 - 1{,}5(Q_3 - Q_1) = 10 - 1{,}5(12{,}5 - 10) = 6{,}25$

$Q_3 + 1{,}5(Q_3 - Q_1) = 12{,}5 + 1{,}5(12{,}5 - 10) = 16{,}25$

Logo, como nenhum dos dados tem valor menor do que 6,25 ou maior do que 16,25, os valores mínimo e máximo, respectivamente, são 8 e 14. Sendo assim, constrói-se o diagrama representado a seguir.

Primeiro dia da menstruação no período de janeiro a setembro



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

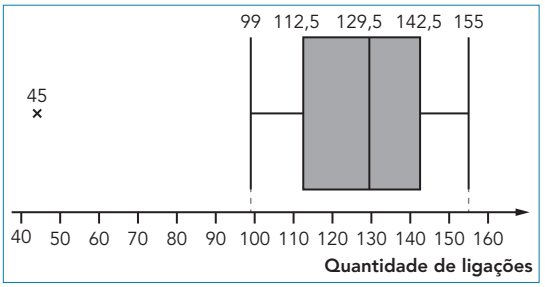
22.

Quantidade de ligações recebidas por 40 funcionários em determinado dia

4	5
9	9
10	0 1 3 5 7 8
11	0 1 4 6
12	0 2 6 6 6 8 9 9
13	0 2 3 3 4 4 4 5
14	0 1 4 5 5 7 9 9
15	0 1 2 5

Dados elaborados para fins didáticos.

Quantidade de ligações recebidas por 40 funcionários em determinado dia



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Diagrama de caixa.

b) Diagrama de ramos e folhas.

c) Diagrama de caixa.

d) Diagrama de ramos e folhas.

24. A média aritmética é dada por:

$MA = \frac{63 + 56 + 64}{3} = \frac{183}{3} = 61$

Assim, a variância é dada por:

$V = \frac{(63 - 61)^2 + (56 - 61)^2 + (64 - 61)^2}{3} = \frac{4 + 25 + 9}{3} = \frac{38}{3} \simeq 12{,}7$

E o desvio padrão é dado por:

$DP = \sqrt{V} \simeq \sqrt{12{,}67} \simeq 3{,}56$

Portanto, a média é 61 e o desvio padrão é, aproximadamente, 3,56.

25. **a)** Média dos salários:

$MA = \frac{10 \cdot 2\,000 + 5 \cdot 2\,500 + 1 \cdot 3\,000 + 10 \cdot 3\,500 + 4 \cdot 6\,500 + 1 \cdot 12\,000}{10 + 5 + 1 + 10 + 4 + 1} = \frac{108\,500}{31} = 3\,500$

Portanto, MA = R$ 3.500,00.

Como a quantidade de termos da distribuição é 31, temos que a mediana será o 16º termo da distribuição, que é 3 000.
Assim, Me = R$ 3.000,00.

26. Podemos calcular a média aritmética dos aproveitamentos, em porcentagem:

$MA = \frac{3 \cdot 56 + 6 \cdot 60 + 2 \cdot 64 + 8 \cdot 68 + 1 \cdot 72}{3 + 6 + 2 + 8 + 1} = \frac{1272}{20} = 63{,}6$

Variância:

$V = \frac{3 \cdot (56 - 63{,}6)^2 + 6 \cdot (60 - 63{,}6)^2 + 2 \cdot (64 - 63{,}6)^2 + 8 \cdot (68 - 63{,}6)^2 + 1 \cdot (72 - 63{,}6)^2}{20} =$

$= \frac{173{,}28 + 77{,}76 + 0{,}32 + 154{,}88 + 70{,}56}{20} = \frac{476{,}8}{20} = 23{,}84$

$DP = \sqrt{23{,}84} \simeq 4{,}9$

Logo, o desvio padrão é aproximadamente 4,9.

Alternativa **d**.

27. Média aritmética:

$MA = \frac{48 + 54 + 50 + 46 + 44 + 52 + 49}{7} = 49$

Variância:

$V = \frac{(48 - 49)^2 + (54 - 49)^2 + (50 - 49)^2 + (46 - 49)^2 + (44 - 49)^2 + (52 - 49)^2 + (49 - 49)^2}{7} =$

$= \frac{1 + 25 + 1 + 9 + 25 + 9}{7} = \frac{70}{7} = 10$

$DP = \sqrt{10} \simeq 3{,}16$

Logo, o desvio padrão é aproximadamente 3,16 min, e como $2 < DP \leqslant 4$, a variabilidade do tempo é baixa.

Alternativa **b**.

Enem e vestibulares (p. 258)

2. Analisando o gráfico, pode-se perceber que, em todas as regiões do país, a maioria das internações foi realizada pelo SUS. Logo, pode-se afirmar que mais da metade dessas internações em todo o Brasil foi realizada pelo SUS. Alternativa **a**.

3. Como a extensão da palavra "mundo" é de 4,5 cm, ou seja, tem 4,5 vezes a frequência da palavra "azul", sabemos que a resposta será 4,5 · 1,5% = 6,75%. Alternativa **d**.

4. De acordo com a análise gráfica, conclui-se:

moda (elemento mais frequente): 14,7%;

mediana (termo central com elementos em rol): 17,7%;

média: $\frac{24{,}3\% + 17{,}7\% + 14{,}7\% + 14{,}7\% + 28{,}6\%}{5} = 20\%$.

Logo, a média é maior do que a moda. Alternativa **a**.

5. Analisando as médias de cada grupo de 2 meses consecutivos, teremos:

$M_{\text{out./2020 e nov./2020}} = \frac{250 + 150}{2} = 200$

$M_{\text{nov./2020 e dez./2020}} = \frac{150 + 200}{2} = 175$

$M_{\text{dez./2020 e jan./2021}} = \frac{200 + 450}{2} = 325$

$M_{\text{jan./2021 e fev./2021}} = \frac{450 + 100}{2} = 275$

$M_{\text{fev./2021 e mar./2021}} = \frac{100 + 200}{2} = 150$

Logo, o produtor deverá plantar as sementes no início de dezembro. Alternativa **c**.

6. Há 301 estudantes; logo, distribuindo as notas em ordem crescente (ou decrescente), a nota do 151º estudante será a mediana. Assim, $Me = 6$.

A moda é a nota que aparece com mais frequência, isto é, $Mo = 7$.

Alternativa **c**.

7. Média aritmética: $MA = \frac{4 + 5 + 7 + 8}{4} = \frac{24}{4} = 6$.

Variância:

$V = \frac{(4 - 6)^2 + (5 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (8 - 6)^2}{4} = \frac{4 + 1 + 1 + 4}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5$.

Desvio padrão: $DP = \sqrt{2{,}5} \simeq 1{,}6$.

Logo, o desvio padrão pertence ao intervalo (1, 2). Alternativa **b**.

8. A mediana é a medida estatística que pode fornecer o percentual de estudantes aprovados, de modo que esse percentual seja igual ou superior a 50%.

Alternativa **b**.

9. Os dados já estão em ordem crescente; assim, $Me = 7{,}0$. A média é dada por:

$MA = \frac{2{,}0 + 3{,}5 + 2 \cdot 5{,}0 + 6{,}0 + 6{,}5 + 3 \cdot 7{,}0 + 2 \cdot 8{,}5 + 9{,}0 + 3 \cdot 10}{15} = 7{,}0$

A amplitude é 8,0 (pois $10{,}0 - 2{,}0 = 8{,}0$).

Ao subtrair 1,0 ponto em cada nota, tem-se a nova média: $MA' = \frac{105 - 15 \cdot 1}{15} = \frac{90}{15} = 6{,}0$.

Quando subtraímos uma constante de cada valor, a variância permanece a mesma porque a variância mede a dispersão relativa ao valor central (média). Alternativa **e**.

10. Afirmativa **01**: incorreta. O consumo médio semestral, em metros cúbicos, é dado por:

$\frac{3 + 6 \cdot 6 + 12 \cdot 4 + 9}{2} = 48$

Afirmativa **02**: incorreta. O maior consumo foi 12 m³. Assim, a frequência relativa é dada por:

$\frac{4}{12} \cdot 100\% \simeq 33\%$

Afirmativa **04**: correta. A moda, isto é, o volume que aparece com maior frequência, é 6 m³.

Afirmativa **08**: correta. A média do consumo, em metros cúbicos, é dada por:

$\frac{3 + 6 \cdot 6 + 12 \cdot 4 + 9}{12} = 8$

Logo, a variância é dada por:

$\frac{(3 - 8)^2 + 6 \cdot (6 - 8)^2 + 4 \cdot (12 - 8)^2 + (9 - 8)^2}{12} = 9{,}5$.

Afirmativa **16**: incorreta. A média de consumo é 8 m³, conforme calculado anteriormente.

Soma: 04 + 08 = 12.

11. **a)** Quantidade de votos de cada uma das chapas:

Chapa **1**: $0{,}5 \cdot 3x + 0{,}60 \cdot x + 0{,}55 \cdot x + 0{,}30 \cdot 3x = 3{,}55x$.

Chapa **2**: $0{,}5 \cdot 3x + 0{,}40 \cdot x + 0{,}45 \cdot x + 0{,}70 \cdot 3x = 4{,}45x$.

Considerando a proposta **1**, a Chapa **2** seria a vitoriosa, pois teria mais votos.

Para a proposta **2**, a Chapa **1** seria a vencedora, pois seria vitoriosa em uma quantidade maior de salas.

b) Para um total de 160 estudantes, temos:

$3x + x + x + 3x = 160 \Rightarrow x = 20$

Turma **A**: $3x = 60$; turma **B**: $x = 20$; turma **C**: $x = 20$; turma **D**: $3x = 60$. Assim:

	Turma A	Turma B	Turma C	Turma D
Quantidade de estudantes	60	20	20	60

Unidade 5

Capítulo 1

Atividades

4. **a)** Na escala binária da IEC:

$1\ GB = 1024^3\ B = 1073741824\ B$

Na escala decimal do SI:

$1\ GB = 1000^3\ B = 1000000000\ B$

$\frac{1073741824}{1000000000} = 1{,}073741824$

Portanto, a razão entre 1 GB na escala binária da IEC e 1 GB na escala decimal do SI é aproximadamente 1,074.

b) Exemplo de resposta: Não, pois, se um consumidor contratar uma franquia de 1 GB na escala decimal achando que ela está na escala binária, ele terá uma franquia significativamente menor do que a esperada.

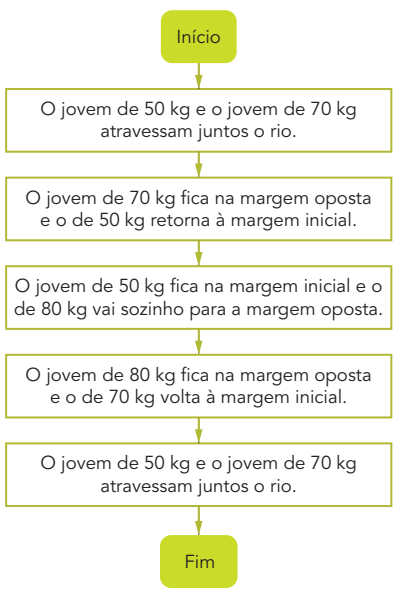
Conexões (p. 273)

2. Exemplo de resposta: Sim, pois, por exemplo, mulheres ainda são menos remuneradas do que homens que exercem uma mesma função, e muitas vezes elas são obrigadas a deixar a carreira para cuidar da casa e dos filhos. Pessoas negras têm o acesso dificultado à educação e a oportunidades em todos os níveis, desde a Educação Básica até o Ensino Superior, o que traz empecilhos para que essa parcela da população consiga atingir a totalidade do potencial intelectual.

Capítulo 2

Atividades

2.



Banco de imagens/Arquivo da editora

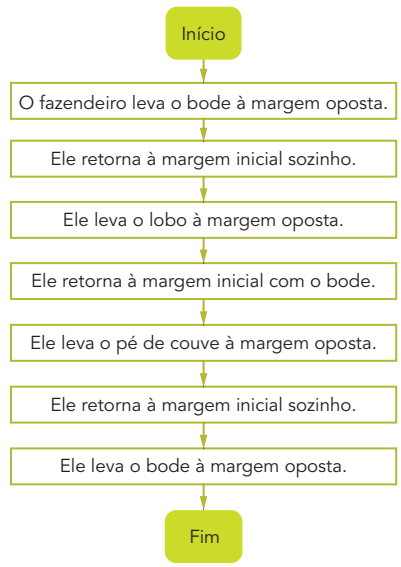
3. Exemplo de resposta: Se o fazendeiro levar primeiro o pé de couve, o lobo e o bode ficarão na mesma margem. Se o fazendeiro levar primeiro o lobo, o bode e o pé de couve ficarão na mesma margem. Logo, o primeiro item a ser levado pelo fazendeiro deve ser o bode.

Em seguida, só resta ao fazendeiro voltar à margem inicial sozinho (pois se ele voltar com o bode, volta-se à situação inicial) e, então, levar ou o pé de couve ou o lobo. Assumindo nesse algoritmo que ele leva o lobo à margem oposta, necessariamente ele deve voltar à margem inicial com o bode (senão o lobo e o bode ficarão na mesma margem).

Ele pode, então, levar o pé de couve à margem oposta e, depois, voltar sozinho à margem inicial para levar o bode.

Assim, temos o seguinte algoritmo.

1. O fazendeiro leva o bode à margem oposta.
2. Ele retorna à margem inicial sozinho.
3. Ele leva o lobo à margem oposta.
4. Ele retorna à margem inicial com o bode.
5. Ele leva o pé de couve à margem oposta.
6. Ele retorna à margem inicial sozinho.
7. Ele leva o bode à margem oposta.



Banco de imagens/Arquivo da editora

4. **a)** Não. Primeiramente, a soma das medidas de massa dos 3 jovens é menor do que a que o barco suporta, então eles poderiam ter atravessado de uma só vez. Além disso, o passo **5** não seria possível, porque, depois do passo **4**, os jovens **A** e **B** estavam em lados opostos do rio, não podendo atravessar juntos.

b) A frase "Porém o rudimentar barco que usarão consegue suportar, no máximo, 250 kg" dá a entender que o barco suporta uma medida de massa menor do que a dos 3 jovens juntos, então o programa não analisou corretamente os valores fornecidos.

c) Exemplo de resposta: Como o algoritmo da inteligência artificial generativa funciona escolhendo as palavras mais prováveis para gerar uma resposta, ela não está necessariamente verificando se os dados são verdadeiros, mas fazendo uma previsão da resposta esperada de acordo com o contexto.

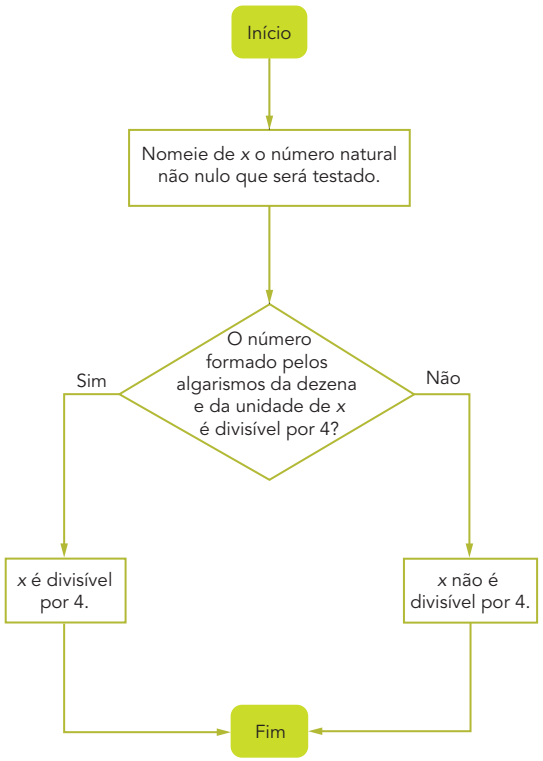
5. Exemplos de resposta: Os algoritmos propostos a seguir podem ser obtidos adaptando-se o algoritmo correspondente ao critério de divisibilidade por 2.

a) Início

1. Nomeie de x o número natural não nulo que será testado.

2. Verifique se o número formado pelos algarismos das dezenas e das unidades de x é divisível por 4.

3. Em caso positivo, x é divisível por 4; em caso negativo, x não é divisível por 4.

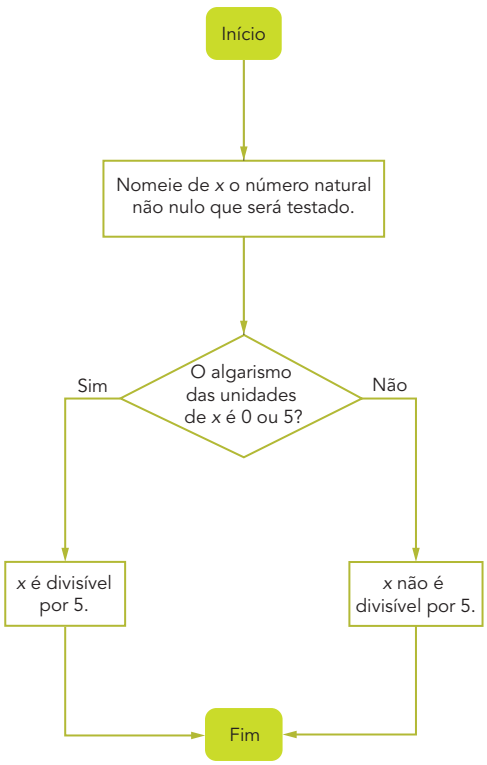


Banco de imagens/Arquivo da editora

b) **1.** Nomeie de x o número natural não nulo que será testado.

2. Verifique se o algarismo das unidades de x é 0 ou 5.

3. Em caso positivo, x é divisível por 5; em caso negativo, x não é divisível por 5.

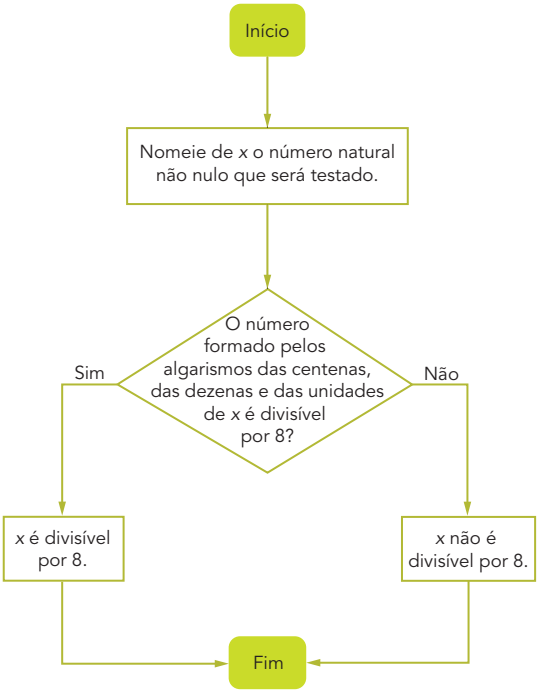


Banco de imagens/Arquivo da editora

c) **1.** Nomeie de x o número natural não nulo que será testado.

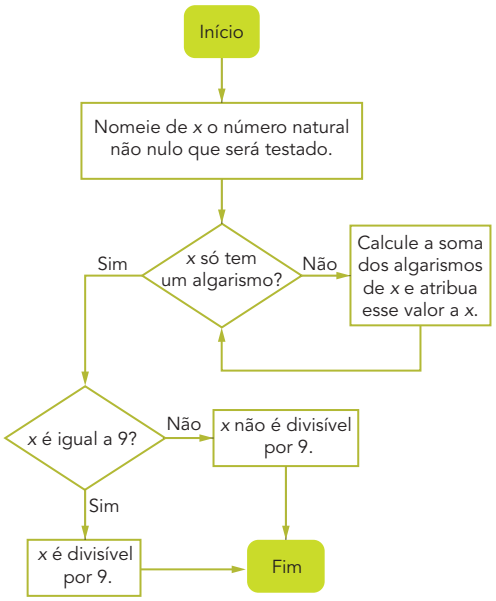
2. Verifique se o número formado pelos algarismos das centenas, das dezenas e das unidades de x é divisível por 8.

3. Em caso positivo, x é divisível por 8; em caso negativo, x não é divisível por 8.



Banco de imagens/Arquivo da editora

6. Exemplo de resposta: Esse algoritmo pode ser obtido adaptando-se o algoritmo correspondente ao critério de divisibilidade por 3 apresentado na atividade resolvida **2**.



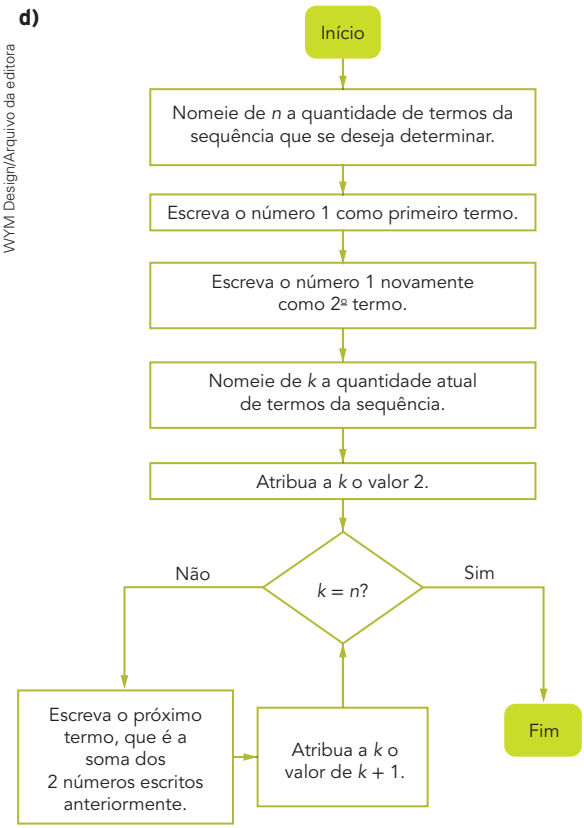
Banco de imagens/Arquivo da editora

7. **b)** Dos 5 casais do 5º mês, 3 casais são de coelhos adultos, que darão à luz 1 casal de coelhos jovens cada um. Os outros 2 casais são de coelhos jovens, que amadurecerão no 6º mês, mas não darão à luz nesse mês. Logo, no 6º mês, haverá 8 casais (5 + 3 = 8).

Utilizando raciocínio análogo, no 7º mês haverá 13 casais (8 + 5 = 13).

d)

WYM Design/Arquivo de editora



Utilizando esse fluxograma, os 14 primeiros termos da sequência pedida são 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 e 377.

Capítulo 3

Atividades

1. Os códigos dos algoritmos podem ser escritos adaptando-se a linguagem do algoritmo apresentado no tópico "Variáveis" desta Unidade.
Exemplos de resposta:

a)

```
Início
    Crie a variável Num1
    Atribua o 1º número de entrada à variável Num1
    Crie a variável Num2
    Atribua o 2º número de entrada à variável Num2
    Crie a variável Num3
    Atribua o 3º número de entrada à variável Num3
    Crie a variável Soma
    Atribua o resultado de Num1 + Num2 + Num3 à variável Soma
    Retorne o valor da variável Soma como saída
Fim
```

b)

```
Início
    Crie a variável Num1
    Atribua o 1º número de entrada à variável Num1
    Crie a variável Num2
    Atribua o 2º número de entrada à variável Num2
    Crie a variável Diferença
    Atribua o resultado de Num2 – Num1 à variável Diferença
    Retorne o valor da variável Diferença como saída
Fim
```

c)

```
Início
    Crie a variável Num1
    Atribua o 1º número de entrada à variável Num1
    Crie a variável Num2
    Atribua o 2º número de entrada à variável Num2
    Crie a variável Soma
    Crie a variável Result
    Atribua o resultado de Num1 + Num2 à variável Soma
    Atribua o resultado de Soma / 3 à variável Result
    Retorne o valor da variável Result como saída
Fim
```

2. Utilizando os blocos indicados, o código do algoritmo pedido pode ser escrito como apresentado a seguir.

```
Início
    Crie a variável Num
    Atribua o número de entrada à variável Num
    Se Num > 0, então
        Retorne o texto "O número é positivo."
    Senão
        Retorne o texto "O número não é positivo."
Fim
```

3. Exemplos de resposta:

a) O código do algoritmo pedido pode ser escrito utilizando-se a estrutura condicional **se** e **senão**, como apresentado a seguir.

```
Início
    Crie a variável Num1
    Atribua o 1º número de entrada à variável Num1
    Crie a variável Num2
    Atribua o 2º número de entrada à variável Num2
```

```
    Crie a variável Num3
    Atribua o 3º número de entrada à variável Num3
    Se Num1 > 0 e Num2 > 0 e Num3 > 0, então
        Retorne o texto "Todos os números são positivos."
    Senão
        Retorne o texto "Pelo menos um dos números é menor do que ou igual a 0."
Fim
```

b) O código do algoritmo pedido pode ser escrito utilizando-se a estrutura condicional **se** e **senão**, como apresentado a seguir.

```
Início
    Crie a variável Num1
    Atribua o 1º número de entrada à variável Num1
    Crie a variável Num2
    Atribua o 2º número de entrada à variável Num2
    Crie a variável Num3
    Atribua o 3º número de entrada à variável Num3
    Se Num1 > 0 ou Num2 > 0 ou Num3 > 0, então
        Retorne o texto "Pelo menos um dos números é positivo."
    Senão
        Retorne o texto "Nenhum dos números é positivo."
Fim
```

4. Exemplo de resposta:

```
Início
    Crie a variável Cav
    Atribua a quantidade de cavalos à variável Cav
    Crie a variável Porc
    Atribua a quantidade de porcos à variável Porc
    Crie a variável Ovel
    Atribua a quantidade de ovelhas à variável Ovel
    Crie a variável Total
    Crie a variável Resultado
    Atribua o resultado de Cav + Porc + Ovel à variável Total
    Retorne o texto "O total de animais é"
    Retorne o valor da variável Total
    Atribua o resultado de Cav / Total à variável Resultado
    Retorne o texto "A razão entre a quantidade de cavalos e o total de animais é"
    Retorne o valor da variável Resultado
    Atribua o resultado de Porc / Total à variável Resultado
    Retorne o texto "A razão entre a quantidade de porcos e o total de animais é"
    Retorne o valor da variável Resultado
    Atribua o resultado de Ovel / Total à variável Resultado
    Retorne o texto "A razão entre a quantidade de ovelhas e o total de animais é"
    Retorne o valor da variável Resultado
Fim
```

5.

```
Início
    Aguarde a sua vez de jogar
    Se alguma das cartas da sua mão tem a cor ou o número igual ao da última carta descartada, então
        Descarte 1 carta que tem a cor ou o número igual ao da última carta descartada
    Senão
        Enquanto nenhuma das cartas da sua mão tem a cor ou o número igual ao da última carta descartada
            Compre 1 carta do monte
        Descarte 1 carta que tem a cor ou o número igual ao da última carta descartada
    Finalize sua jogada
Fim
```

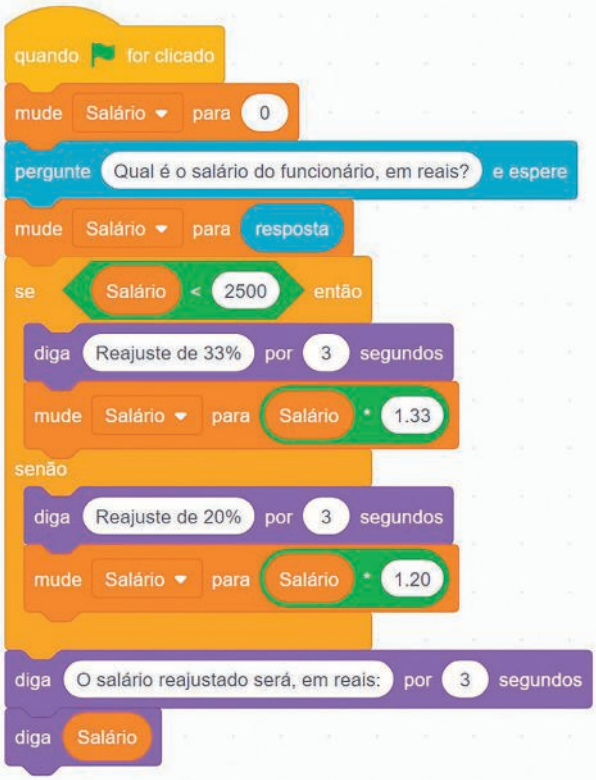
6. O código do algoritmo pedido pode ser obtido adaptando-se a estrutura do algoritmo apresentado na teoria do tópico "Estrutura de repetição **enquanto**" deste capítulo. Exemplo de resposta:

```
Início
    Crie a variável Quant
    Atribua a quantidade de números de entrada à variável Quant
    Crie a variável Num
    Crie a variável Soma
    Atribua o valor 0 à variável Soma
    Crie a variável K
    Atribua o valor 1 à variável K
    Enquanto K < Quant
        Atribua o K-ésimo número de entrada à variável Num
        Atribua o resultado de Soma + Num à variável Soma
        Atribua o resultado de K + 1 à variável K
    Retorne o valor da variável Soma como saída
Fim
```

Tecnologias digitais (p. 294)

2. Exemplo de resposta: O algoritmo pedido pode ser obtido adaptando-se o algoritmo apresentado na seção, com as devidas modificações de faixas salariais e porcentagens de reajuste salarial.

Reprodução/Scratch



Enem e vestibulares (p. 297)

1. Avaliaremos cada item individualmente.

a) "será enviada para exportação."

Falso, pois, se a aparência da casca e a rigidez da fruta não estiverem normais, ela não será enviada para exportação.

b) "será enviada para a fábrica de geleias."

Falso, pois, se a aparência da casca e a rigidez não estiverem normais e ela estiver podre, a fruta não será enviada para a fábrica de geleias.

c) "não será enviada para comercialização no mercado interno."

Verdadeiro, pois a fruta só será enviada para comercialização no mercado interno se: **I**) a aparência da casca e a rigidez estiverem normais; **II**) a medida de massa for maior do que 200 gramas; e **III**) a medida de massa for menor do que 300 gramas. Como a massa da fruta mede 350 gramas, necessariamente ela não será enviada para comercialização no mercado interno.

d) "não será enviada para compostagem."

Falso, pois, se a aparência da casca e a rigidez não estiverem normais e ela estiver podre, a fruta será enviada para compostagem.

e) "não será enviada para a fábrica de geleias."

Falso, pois, se a aparência da casca e a rigidez não estiverem normais e ela não estiver podre, a fruta será enviada para a fábrica de geleias.

Alternativa **c**.

2. A tabela a seguir apresenta os números de 0 a 9 e as respectivas raízes quadradas, arredondadas com 1 casa decimal.

n	$\sqrt{n}$
0	0,0
1	1,0
2	1,4
3	1,7
4	2,0

n	$\sqrt{n}$
5	2,2
6	2,4
7	2,6
8	2,8
9	3,0

Analisando a tabela e comparando-a com os itens, verificamos que a única alternativa correta é a alternativa **c**.

3. O fabricante informou a medida de 500 GB, considerando a base 10. Precisamos, então, calcular qual será o equivalente considerando a base 2.

Sabemos que 80 GB na base 10 equivalem a, aproximadamente, 75 GB na base 2. Assim, podemos fazer o cálculo considerando a proporcionalidade direta das medidas:

$80 \text{ ——— } 75$

$500 \text{ ——— } x$

$x = \frac{500 \cdot 75}{80} = \frac{37\,500}{80} = 468{,}75$

Considerando os itens apresentados, o valor mais próximo é 468 GB.

Alternativa **a**.

4. **a)** Há 3 expressões algébricas nesse fluxograma:

- $\sqrt{x} - 1$: Como só é possível calcular a raiz quadrada de números reais positivos ou nulos, essa expressão só pode ser calculada para $x \in \mathbb{R}$, com $x \geqslant 0$.
- $2x^{-2}$: Temos $2x^{-2} = 2\frac{1}{x^2}$, que não está definida para $x = 0$. No entanto, essa expressão só é calculada quando $\sqrt{x} - 1 > 1$. Como $\sqrt{0} - 1 = -1$ e -1 não é maior do que 1, o programa nunca tentará calcular $2x^{-2}$ para $x = 0$. Portanto, essa expressão algébrica não traz nova restrição aos valores reais de x para os quais é possível executar esse programa.
- $(x + 2)^{\frac{1}{3}}$: Como $(x + 2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x + 2}$, essa expressão algébrica não traz nova restrição aos valores reais de x para os quais é possível executar esse programa.

Então, os valores reais de x para os quais é possível executar esse programa são os números do conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.

b) Para aplicar o funcionamento desse programa para os 3 valores de x dados, podemos montar o seguinte quadro:

Entre com o valor de x	$x = 0$	$x = 4$	$x = 9$
Calcule $\sqrt{x} - 1$	$\sqrt{0} - 1 = -1$	$\sqrt{4} - 1 = 1$	$\sqrt{9} - 1 = 2$
Verifique: $\sqrt{x} - 1 > 1$?	$-1 > 1$ (falso)	$1 > 1$ (falso)	$2 > 0$ (verdadeiro)
Calcule $2x^{-2}$	Não é executado	Não é executado	$2 \cdot 9^{-2} = 2\frac{1}{9^2} = \frac{2}{81}$
Calcule $(x + 2)^{\frac{1}{3}}$	$(0 + 2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$	$(4 + 2)^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$	Não é executado

Portanto, para $x = 0$, o programa dá como saída $\sqrt[3]{2}$; para $x = 4$, dá como saída $\sqrt[3]{6}$; e, para $x = 9$, dá como saída $\frac{2}{81}$.

Referências bibliográficas comentadas

Todos os *sites* foram acessados em 9 set. 2024.

Para a concepção desta coleção, diversos livros, artigos científicos, documentos oficiais do governo, revistas científicas, dissertações e *sites* foram consultados com o intuito de trazer materiais atualizados e que visam dar suporte às aprendizagens previstas para o Ensino Médio. Conheça as principais referências bibliográficas deste Volume.

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem téorico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

Nesse livro, os estudantes são colocados no centro do processo educacional por meio do uso de metodologias ativas que favorecem a aprendizagem. O livro serve de referência para a concepção teórica das metodologias ativas e para as propostas de sua utilização nas práticas pedagógicas adotadas nesta coleção.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

A autora defende, nesse livro, a ideia de que a maneira como um estudante encara os próprios erros pode ser uma poderosa ferramenta no processo de aprendizagem e de ensino. Esses pontos foram levados em consideração durante a elaboração dos textos teóricos sobre avaliação encontrados neste Manual e da proposta didática desta coleção.

BOALER, J. *O que a Matemática tem a ver com isso?* Como professores e pais podem transformar a aprendizagem da Matemática e inspirar sucesso. Porto Alegre: Penso, 2019.

Essa obra apresenta um enfoque interessante sobre a aprendizagem da Matemática. A autora afirma que alguns fatores interferem no melhor entendimento dessa área, como a abordagem baseada em projetos, a avaliação que incentiva a aprendizagem e as estratégias e maneiras fundamentais de trabalhar, o que norteou a elaboração das propostas de avaliação que se encontram neste Manual. Também define o conceito do aprendizado da Matemática e a importância dele.

BORBA, M. de C. *et al*. *Fases das tecnologias digitais em Educação matemática*: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

O livro trata das mudanças ocorridas nas aulas de Matemática em consequência da inserção das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem. Inspirou a elaboração das propostas didáticas que utilizam tecnologias digitais desta coleção.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher: Edusp, 1974.

O autor apresenta e explica aspectos da História da Matemática, considerando a ordem cronológica e o local dos acontecimentos, desde a origem do conceito de número até os desenvolvimentos matemáticos do século XX. Ao longo dos capítulos, são apresentadas definições matemáticas importantes e as pessoas que trabalharam nelas. O livro foi utilizado como referência para dados históricos que se encontram neste Volume.

BRASIL. *Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: Senado Federal, 1996. Disponível em: https://tedit.net/81p5f9.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional é um marco regulatório fundamental que estabelece as diretrizes gerais para a organização e o funcionamento da educação no Brasil. Abrange todos os níveis e modalidades de ensino, desde a Educação Infantil até a Educação Superior, e define princípios como a igualdade de condições para o acesso e a permanência na escola, a liberdade de aprender e ensinar, bem como a valorização dos profissionais da educação brasileira.

BRASIL. *Lei n. 13.005, de 25 de junho de 2014*. Aprova o Plano Nacional de Educação – PNE e dá outras providências. Brasília, DF: MEC, 2014.

O Plano Nacional de Educação (PNE) foi instituído em 2014. O documento define 20 tópicos para garantir o acesso à educação de qualidade no Brasil até 2024, quando devem ser determinadas novas metas para o novo ciclo de anos. As metas e as estratégias específicas do PNE são estabelecidas para todos os níveis e modalidades de ensino no Brasil. Neste Manual, o documento foi utilizado para a elaboração de orientações didáticas.

BRASIL. Lei n. 14.533, de 11 de janeiro de 2023. Institui a Política Nacional de Educação Digital [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, edição extra, ano CLXI, n. 8-B, p. 1, 11 jan. 2023.

Promulgado em 2023, esse documento apresenta a lei que estabelece a criação da Política Nacional de Educação Digital (PNED). Esse documento foi consultado para guiar a elaboração das orientações e das propostas de atividades que envolvem a educação digital nesta coleção.

BRASIL. *Lei n. 14.945, de 31 de julho de 2024*. Altera a Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a fim de definir diretrizes para o Ensino Médio, [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, p. 5, 1º ago. 2024.

Essa lei foi promulgada pelo presidente da República e, até o fechamento desta coleção, era a versão mais atualizada da legislação para o Novo Ensino Médio. O documento foi usado, principalmente, como guia na concepção desta coleção e nas orientações didáticas encontradas neste Manual.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018a. Disponível em: https://tedit.net/pot336.

O texto da BNCC norteou a elaboração dos 3 Volumes desta coleção, seja nos textos destinados aos professores, seja nos propostos aos estudantes, assim como na proposta didática de distribuição dos conteúdos. As páginas introdutórias da BNCC e as dedicadas à etapa do Ensino Médio orientaram especificamente a vinculação entre os tópicos trabalhados nesta coleção em conformidade com as diretrizes desse documento normativo.

BRASIL. Ministério da Educação. *Computação*: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://tedit.net/93oura.

Em 2022, a BNCC foi complementada com diretrizes específicas que incluem o ensino de Computação no currículo escolar brasileiro. O documento, que visa promover o desenvolvimento de habilidades dos estudantes associadas ao pensamento computacional e à cultura digital, foi utilizado para a elaboração de algumas das seções e atividades desta coleção, bem como para as orientações didáticas deste Manual.

BRASIL. Ministério da Educação. *Projeto de vida*: *ser ou existir*. Caderno de práticas. Disponível em: https://tedit.net/nhft2i.

Nesse Caderno de práticas, são apresentadas algumas reflexões sobre o papel da escola no projeto de vida dos estudantes. O material foi utilizado como referência para a elaboração de atividades que envolvem projetos e as respectivas orientações didáticas.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília, DF: MEC, 2013. Disponível em: https://tedit.net/dtxfyz.

As Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCNs) são um conjunto de definições de princípios, fundamentos e procedimentos da Educação Básica elaborado com o objetivo de orientar e de assistir escolas e redes no desenvolvimento do projeto pedagógico. Essas diretrizes também fornecem subsídios para a elaboração de materiais didáticos e, por isso, foram consultadas e consideradas na elaboração desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. *Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva*. Brasília, DF: MEC, 2008. Disponível em: https://tedit.net/evvdwt.

Essa política, em conformidade com o documento disponível no portal do Ministério da Educação (MEC), estabelece as diretrizes fundamentais para a inclusão de estudantes com necessidades educacionais especiais no sistema regular de ensino. Também enfatiza a importância

de garantir o acesso, a participação e a aprendizagem de todos os estudantes, independentemente das condições físicas, sensoriais, intelectuais ou múltiplas. O documento foi utilizado na elaboração das orientações que se encontram neste Manual e nas propostas de adaptação de atividades desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019a. Disponível em: https://tedit.net/gsxbfi.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019b. Disponível em: https://tedit.net/iu2eqx.

De acordo com a BNCC, os Temas Contemporâneos Transversais buscam contextualizar o que é ensinado por meio de temas que interessam aos estudantes, além de serem relevantes para o desenvolvimento deles como cidadãos. Por isso, devem ser incorporados aos currículos e às propostas pedagógicas escolares, de preferência de maneira transversal e integradora. Após a homologação da BNCC, visando esclarecer a inserção desses temas, esses 2 documentos foram elaborados pelo Ministério da Educação e passaram a servir de referencial para a concepção dos textos teóricos deste Manual, bem como de diversas propostas didáticas desta coleção.

BRASIL. Ministério dos Direitos Humanos. *Plano Nacional de Educação em Direitos Humanos*. Brasília, DF: Comitê Nacional de Educação em Direitos Humanos, 2018b. Disponível em: https://tedit.net/xr6rff.

Nessa publicação oficial, são apresentadas reflexões sobre a educação pautada em direitos humanos. Elas foram consideradas na elaboração das orientações didáticas e nas propostas de atividades desta coleção.

CARRAHER, T. N. (org.). *Aprender pensando*: contribuição da psicologia cognitiva para a educação. 19. ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

Essa obra apresenta algumas ideias sobre as contribuições dos estudos da psicologia cognitiva para a educação, oferecendo uma análise sobre como os processos cognitivos influenciam a aprendizagem e o desenvolvimento dos estudantes. Foi considerada na elaboração das propostas didáticas desta coleção.

CARVALHO, D. L. de. *Metodologia do ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 2011.

Esse livro contribui para a reflexão sobre estratégias que favorecem o ensino e a aprendizagem de Matemática, pois aborda diversas metodologias e estratégias de ensino que visam facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos pelos estudantes, promovendo um aprendizado significativo e contextualizado. Em razão dessas abordagens, serviu de referência para a concepção desta coleção.

CHAUI, M. *Iniciação à Filosofia*. Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. único.

Nesse livro didático, a autora apresenta conceitos e reflexões da Filosofia, incluindo os tipos de raciocínio (indução, dedução e abdução). Os conceitos explicados por ela foram utilizados como fio condutor das atividades que envolvem raciocínio lógico matemático nesta coleção.

COLL, C. Atenção à diversidade e qualidade do ensino. *Revista Educação Especial*, Santa Maria, n. 22, 2003. Disponível em: https://tedit.net/c2qv0d.

Nesse artigo, o autor compartilha reflexões sobre as implicações do olhar inclusivo no processo de ensino e aprendizagem e considera a diversidade inerente à condição humana. Essa abordagem norteou a elaboração das orientações didáticas deste Manual.

COSTA, A. C. G. da. *Protagonismo juvenil*: adolescência, educação e participação democrática. Salvador: Fundação Odebrecht, 2000.

A educação é abordada, nessa obra, considerando o jovem o núcleo central do processo educativo, o que condiz com a concepção pedagógica adotada nesta coleção. Para explanar essa realidade, o livro apresenta a descrição de projetos desenvolvidos na prática envolvendo experiências de protagonismo juvenil. Essas propostas foram consideradas na elaboração de algumas seções da coleção e em sugestões deste Manual.

CULTURA de paz: da reflexão à ação. Balanço da Década Internacional da Promoção da Cultura de Paz e Não Violência em Benefício das Crianças do Mundo. Brasília, DF: Unesco; São Paulo: Associação Palas Athena, 2010. Disponível em: https://tedit.net/l01hml.

Essa publicação da Unesco, que trata da cultura de paz, foi consultada para a elaboração deste Manual. A leitura desse texto contribui para a compreensão desse assunto, que compõe também o cotidiano escolar, levando em conta que os estudantes, que são o futuro de nossa sociedade, precisam internalizar a cultura da legitimidade e do respeito entre todos os cidadãos como modo de ser e viver.

D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

A leitura dessa obra favorece o exame crítico das tendências de educação matemática. O autor argumenta que a educação matemática deve ir além das fórmulas e algoritmos, incorporando aspectos históricos, filosóficos e culturais para promover uma compreensão mais profunda e significativa da Matemática. Essa obra forneceu subsídios para a construção das concepções e propostas desta coleção.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 1).

O autor apresenta uma análise da relação entre Matemática e Etnomatemática, ressaltando a importância da Etnomatemática no ensino ocidental, além de apresentar resultados de pesquisas do mundo todo na área. O livro foi utilizado como referencial teórico para a concepção desta coleção.

DEMO, P. *Professor/Conhecimento*. Brasília, DF: Unb, 2001. p. 1-12. Disponível em: https://tedit.net/vlho7e.

Nesse artigo, o autor apresenta reflexões sobre as características necessárias ao professor no mundo contemporâneo, as quais foram consideradas na elaboração das orientações didáticas desta coleção.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*. 2. ed. Campinas: Papirus, 2003.

Nesse artigo, o autor compartilha parte dos resultados das pesquisas que realizou sobre diferentes registros de representações semióticas na aprendizagem de Matemática. Esses resultados foram utilizados na elaboração de propostas didáticas para este Manual.

ELLEMBERG, J. *O poder do pensamento matemático*: a ciência de como não estar errado. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

O autor mostra, nesse livro, a necessidade de haver maior embasamento no pensamento matemático, considerando que existem casos em que a intuição pode falhar. De maneira motivadora, incentiva essa busca por mais conhecimento e leva o leitor a desenvolver o olhar crítico por meio de exemplos reais e instigantes, o que inspirou propostas didáticas utilizadas nesta coleção.

FAZENDA, I. *O que é interdisciplinaridade*. São Paulo: Cortez, 2008.

Esse livro explora a interdisciplinaridade não apenas como integração de disciplinas, mas também sob a perspectiva da busca de novos conhecimentos. A autora debate como a interdisciplinaridade pode enriquecer a prática pedagógica, facilitando a construção de conhecimentos mais significativos e contextualizados, fazendo um paralelo entre como isso pode se refletir na formação e na prática pedagógica. As atividades e seções interdisciplinares desta coleção foram propostas usando esse material como embasamento bibliográfico.

FERNANDES, D. *Avaliar para aprender*: fundamentos, práticas e políticas. São Paulo: Unesp, 2009.

Ao apresentar um panorama completo sobre o que e como avaliar, o autor afirma que a avaliação deve ir além da simples mensuração de resultados, sendo um processo contínuo e formativo que contribui para o desenvolvimento integral dos estudantes. Esses estudos foram considerados na elaboração de atividades e na proposição de avaliações nesta coleção.

FREITAS, M. C. de. Educação inclusiva: diferenças entre acesso, acessibilidade e inclusão. *Cadernos de Pesquisa (Fundação Carlos Chagas)*, São Paulo, v. 53, e10084, 3 jul. 2023. Disponível em: https://tedit.net/8fq46o.

O autor explora as nuances e distinções fundamentais entre os conceitos de acesso, acessibilidade e inclusão no contexto educacional, o que foi considerado nas orientações didáticas deste Manual. Argumenta, ainda, que, embora frequentemente sejam usados de modo intercambiável, esses termos têm significados distintos, que impactam diretamente a eficácia das políticas e práticas educacionais inclusivas.

JULIANELLI, J. R. *et al. Curso de análise combinatória e probabilidade*: aprendendo com a resolução de exercícios. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

O livro apresenta diversas resoluções de problemas e, a partir deles, desenvolve o conteúdo de análise combinatória e probabilidade. As propostas pedagógicas apresentadas no livro foram utilizadas na elaboração de resoluções e propostas deste Manual.

LIMA, E. L. *Matemática e ensino*. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).

O autor apresenta uma visão sobre escolas, professores e estudantes e sugere uma melhor abordagem por parte dos professores sobre os temas matemáticos, o que foi considerado na elaboração das orientações didáticas desta coleção. Ressalta, ainda, que qualquer estudante nas séries iniciais é capaz de aprender Matemática.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*. São Paulo: Cortez, 2002.

Nesse livro, estão compilados estudos sobre a temática de avaliação. A obra alicerçou e corroborou os comentários sobre possíveis procedimentos propostos neste Manual de como avaliar os estudantes favorecendo a educação integral, e não apenas a mensuração quantitativa de notas.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem na escola:* reelaborando conceitos e criando a prática. 2. ed. Salvador: Malabares Comunicações e Eventos, 2005.

O autor propõe uma reavaliação dos métodos e objetivos da avaliação, argumentando que ela deve ser um processo contínuo e formativo, voltado para o desenvolvimento integral dos estudantes, em vez de apenas um mecanismo de classificação e exclusão. A abordagem descrita por esse autor foi considerada na elaboração de atividades e propostas de avaliação nesta coleção.

MANZANO, A. L. G.; MANZANO, M. I. N. G. *Informática básica*. 7. ed. São Paulo: Érica, 2009.

O autor traz aspectos da abordagem educacional que utiliza o desenvolvimento de competências e habilidades. Essa obra foi utilizada como referencial para a concepção das propostas pedagógicas apresentadas neste Volume.

MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M. *Matemática financeira*. 6. ed. Recife: Atlas, 2008.

O livro percorre os tópicos da Matemática financeira, desde o cálculo de juros simples até sistemas de amortizações variáveis. O conteúdo e o modo de expor a teoria e a resolução dos problemas apresentados nesse livro serviram de referência para as escolhas pedagógicas deste Volume.

PACHECO, A. A. H. *Juro que é simples*. Joinville: Clube de Autores, 2020.

O livro explica diversas modalidades de contratos e financiamentos que envolvem prazos, além de abordar conceitos como juros simples, juros compostos, amortização de empréstimos, conversão de financiamentos em capitalização diária, entre outros. Os conceitos, as situações e os problemas apresentados no livro e que envolvem Matemática financeira serviram de inspiração para as escolhas didáticas da Unidade 2 deste Volume.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 17, n. 33, jan./abr. 2006. Disponível em: https://tedit.net/ddvf63.

Esse artigo apresenta considerações sobre a avaliação especificamente em Matemática. As autoras discutem os desafios e as limitações das abordagens tradicionais de avaliação, que muitas vezes se concentram apenas na memorização e na aplicação mecânica de fórmulas. Essa concepção pedagógica faz parte dos pressupostos desta coleção.

PERRENOUD, P. *A avaliação*: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 2001.

O autor afirma que a avaliação tradicionalmente se concentra na certificação, ou seja, na validação de conhecimentos e habilidades adquiridas, muitas vezes resultando em práticas que priorizam a memorização e a padronização. Em contrapartida, ele defende uma lógica de aprendizagem, na qual a avaliação é vista como um processo contínuo e formativo, destinado a apoiar o desenvolvimento dos estudantes e a promover uma compreensão mais profunda e significativa dos conteúdos. Esse livro foi utilizado na concepção das propostas avaliativas desta coleção.

PERRENOUD, P. *As competências para ensinar no século XXI*: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Tradução: Cláudia Schilling e Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002.

A educação por competências com base no desenvolvimento de habilidades e valores não é uma novidade no âmbito educacional, e sim uma perspectiva de ensino já caracterizada como adequada ao século XXI. Esse livro foi utilizado para a elaboração tanto dos textos deste Manual como para embasar a concepção pedagógica desta coleção de ensino por competências.

PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

A metodologia de resolução de problemas descrita nesse livro inspirou o modo de encaminhar o desenvolvimento dos assuntos abordados nesta coleção, bem como as etapas e os passos propostos na resolução de problemas. O livro fornece ferramentas essenciais para professores e estudantes.

PÓLYA, G. *Mathematical discovery on understanding, learning and teaching problem solving*. New York: John Wiley & Sons, 2009. 2 v.

Destinado a estudantes e professores, esse livro indica estratégias, descritas também neste Manual, para a resolução de problemas, além de reforçar a importância da compreensão e do aprendizado durante esse processo. Para alcançar os objetivos, o autor ressalta que é essencial a observação dos dados e das condições, assim como persistência e paciência.

ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Em ordem cronológica, a autora apresenta fatos da história da Matemática sob um olhar crítico, analisando mitos e lendas perpetuados por muito tempo. Inicia com a abordagem de conceitos matemáticos desenvolvidos na Mesopotâmia, passando por Egito, Grécia, França e Alemanha. É o primeiro livro brasileiro a retratar a História da Matemática, sendo utilizado, por exemplo, como referência para o desenvolvimento da fórmula usada para calcular as raízes de uma equação do 2º grau na Unidade 2 deste Volume.

SKOVSMOSE, O. *Educação crítica*: incerteza, matemática, responsabilidade. Tradução: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).

Nesse livro, é descrito, com base em ideias filosóficas e sociológicas, um cenário de questionamentos (de ordem não apenas teórica, como também prática) que envolvem fundamentos da Educação matemática crítica relacionados à ação pedagógica de professores. O livro serviu de referência bibliográfica para a elaboração do projeto didático desta coleção.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, Maria Ignez. *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2000.

As autoras compartilham pesquisas, reflexões e sugestões relacionando a leitura, a escrita e a resolução de problemas, teoria que é o fio condutor desta coleção.

TRIOLA, M. F. *Introdução à Estatística*. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

O livro traz conceitos estatísticos de modo claro e conciso, acompanhados de exemplos contextualizados em situações reais e significativas do dia a dia, o que foi referência para as escolhas didáticas na elaboração da Unidade 4 deste Volume.

WHEELAN, C. *Estatística*: o que é, para que serve, como funciona. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

O autor relata como a correta análise de dados e o adequado uso das ferramentas estatísticas são importantes no cotidiano das pessoas e em diversas áreas de atuação. Essa abordagem da Estatística inspirou escolhas metodológicas e de contextos utilizados na elaboração deste Volume.

WING, J. M. Computational thinking. Tradução: Cleverson Sebastião dos Anjos. *Communications of the ACM*, v. 49, n. 3, p. 33-35, 2006.

Esse artigo apresenta a tradução do trabalho "Computational Thinking", da pesquisadora Jeannette Wing. O texto discorre a respeito do percurso de ideias relacionadas aos estudos dessa pesquisadora sobre o pensamento computacional. Foi referência bibliográfica para a elaboração deste Manual e das propostas didáticas relacionadas ao pensamento computacional nesta coleção.