Gelson **Iezzi** · David **Degenszajn**
Marcio **Tamari** · Guilherme **Pasmanik**

MANUAL DO PROFESSOR

Identidade Saraiva

Ensino Médio

1º ANO

Volume I

PNLD EM 2026 – 2029 – CATEGORIA 1 – MATERIAL DE DIVULGAÇÃO

CÓDIGO DA COLEÇÃO: 0086P26010120214

Matemática

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Editora Saraiva

Identidade Saraiva

Ensino Médio

1º ANO

Volume I

Matemática

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Gelson Iezzi

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP).

Engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP).

Atuou como professor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Atuou como professor do Ensino Médio na rede particular de ensino.

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio.

David Degenszajn

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP).

Professor da rede particular de ensino há mais de 30 anos.

Marcio Tamari

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP).

Mestre em Matemática pela Universidade Federal do ABC (UFABC-SP).

Professor da rede particular de ensino de São Paulo.

Guilherme Pasmanik

Graduado em Engenharia Elétrica com ênfase em Computação pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP).

Licenciado em Matemática pelo Centro Universitário Nove de Julho (Uninove-SP).

Professor da rede particular de ensino de São Paulo.

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição, São Paulo, 2024.

Editora Saraiva

Editora Saraiva

Direção executiva de negócio e editorial: Flavia Alves Bravin

Direção de negócio: Volnei Korzenieski

Direção editorial: Lidiane Vivaldini Olo

Gerência de conteúdo: Alice Ribeiro Silvestre

Edição: Pamela Hellebrekers Seravalli (ger.), Victor Hugo dos Santos Gois, Marianna Capani Dominguez, Gabriela Barbosa da Silva, Heitor Pooli (assist.), Julia Lima Souza, Juliana Aparecida Bomjardim Soares, João Paulo Caixeta e Saulo Augusto Nascimbem

Produção editorial: Renata Galdino

Revisão: Letícia Bento Pieroni (ger.), Carlos Eduardo Sigrist (coord.), Anderson Félix (líder de projeto), Ana Paula C. Malfa, Bruno Freitas, Daniela Lima, Gabriela M. Andrade, Heloísa Schiavo, Luciana B. Azevedo, Luiz Gustavo Bazana e Vanessa P. Santos

Arte: Fernanda Costa da Silva (ger.), Elen Coppini Camioto e Erika Tiemi Yamauchi (coord.), Nilza Shizue Yoshida (ed. arte) e Teclas Editorial (diagramação)

Digital: Daniela Teves Nardi (ger.), Rafael Pereira de Paula Freitas (coord. produção multimídia), Daniella dos Santos Di Nubila (coord. produção digital) e Rogério Fábio Alves (coord. conteúdo digital e publicação)

Ilustrações: Alex Silva, Davi Augusto, Ericson Guilherme Luciano, Graphorama, Raul Aguiar e Zapt

Cartografia: Fernanda Costa da Silva (ger.), Eric Fuzii (coord.) e Alexandre Bueno

Design: Fernanda Costa da Silva (ger.), Erik Taketa (coord.), Luis Vassallo (proj. gráfico) e Gustavo Vanini (capas)

Licenciamentos: Flávio Matuguma

Licenciamento e iconografia: Roberta Bento (ger.), Iron Mantovanello (coord.), Alice Matoso, Claudia Balista, Douglas Cometti, Mariana Valeiro, Paula Squaiella, Roberta Freire, Thaisi Albarracin Lima (pesquisa e licenciamento), Fernanda Crevin (tratamento de imagens), Beatriz Alves dos Santos, Daniel Scucuglia, Ligia Dona, Liliane Rodrigues, Raísa Maris Reina, Sabrina Regina de Marinho e Sueli Ferreira (analista de licenciamento)

Fotos de capa: insta_photos/Adobe Stock, mimagephotos/Adobe Stock, Prostock-studio/Adobe Stock, BlueJeanImages/Shutterstock e m.jrn/Shutterstock

Pré-impressão: Michel Shimamoto (coord.), Alessandro de Oliveira Queiroz, Camilla Félix Cianelli Chaves, Debora Fernandes, Diego Rodrigues de Lima, Fernanda de Oliveira, Lucas Meireles dos Santos e Valmir da Silva Santos

Todos os direitos reservados por Saraiva Educação S.A.

Alameda Santos, 960, 4º andar, setor 3
Cerqueira César – São Paulo – SP – CEP 01418-002
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
saceditorasaraiva@somoseducacao.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Identidade Saraiva : Matemática : área de Matemática e suas Tecnologias : volume 1 : Ensino médio / Gelson Iezzi...[et al]. -- 1. ed. -- São Paulo : Saraiva, 2024.

Outros autores: David Degenszajn, Marcio Tamari, Guilherme Pasmanik
ISBN 978-65-5766-410-0 - aluno
ISBN 978-65-5766-411-7 - professor

1. Matemática (Ensino médio) I. Iezzi, Gelson

24-4409 CDD 510.7

Angélica Ilacqua - Bibliotecária - CRB-8/7057

2024
Código da obra CL 821249
CAE 876639 (AL) / 876648 (PR)
1ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Envidamos nossos melhores esforços para localizar e indicar adequadamente os créditos dos textos e imagens presentes nesta obra didática. Colocamo-nos à disposição para avaliação de eventuais irregularidades ou omissões de créditos e consequente correção nas próximas edições. As imagens e os textos constantes nesta obra que, eventualmente, reproduzam algum tipo de material de publicidade ou propaganda, ou a ele façam alusão, são aplicados para fins didáticos e não representam recomendação ou incentivo ao consumo.

Impressão e acabamento

SOBRE SEU LIVRO

Caros estudantes,

É sempre um grande desafio para um autor definir os conteúdos a serem ministrados no Ensino Médio, distribuindo-os pelos 3 anos de ensino. Por isso, depois de uma leitura cuidadosa da BNCC de Matemática do Ensino Médio e de ouvir a opinião de inúmeros professores e professoras, optamos pelo programa de conteúdos explicado a seguir.

Buscamos iniciar a apresentação dos conteúdos considerando fatos do cotidiano ou situações-problema. Ao longo dos capítulos, sempre que possível, relacionamos a Matemática a práticas sociais e a outras áreas do conhecimento, empregando uma linguagem mais cotidiana. Entretanto, ao formalizar os conceitos em estudo, optamos por garantir um rigor matemático.

Outra estratégia adotada é a ampla utilização de imagens variadas, gráficos, matérias de jornais e revistas, bem como textos científicos e textos não científicos veiculados na internet, para aproximar a Matemática de seu cotidiano juvenil. Essas temáticas despertam a curiosidade e podem dialogar com temas como cidadania, meio ambiente, saúde, população e Educação financeira. Além disso, ao debater alguns assuntos, procuramos apresentar um breve relato histórico do desenvolvimento das descobertas associadas ao tópico em estudo.

As atividades e os problemas estão organizados em ordem crescente de dificuldade. Alguns desafios exigem raciocínio mais elaborado, articulação e criatividade na busca da solução, proporcionando a oportunidade de vivenciar a resolução de problemas. Ao final de cada Unidade, há uma seção com questões do Enem e de vestibulares de todo o país, bem como perguntas para autoavaliação, que auxiliam na verificação da aprendizagem dos conteúdos estudados.

Esperamos que esta coleção colabore não apenas para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, mas também para a ampliação de seu repertório cultural, que é essencial para entender e transformar o mundo à nossa volta. Aproveite ao máximo esta coleção!

Os autores

VOLUME 1

Noções de conjuntos, conjuntos numéricos, noções gerais sobre funções, função afim, função quadrática, semelhança de triângulos, trigonometria no triângulo retângulo, áreas das principais figuras geométricas planas, trigonometria na circunferência, trigonometria em um triângulo qualquer e noções básicas de Estatística.

VOLUME 2

Função exponencial, função logarítmica, matrizes, sistemas lineares, geometria espacial de posição, áreas e volumes dos principais sólidos geométricos, medidas estatísticas e funções trigonométricas.

VOLUME 3

Sequências, progressões, matemática financeira, grandezas e medidas, pensamento computacional, análise combinatória, probabilidades, noções de geometria analítica plana, transformações geométricas no plano e ladrilhamento do plano.

CONHEÇA SEU LIVRO

Cada Volume desta coleção está organizado em Unidades e capítulos. Conheça a seguir um pouco da estrutura de Unidades, capítulos, seções e boxes deste Volume.

ABERTURA DE UNIDADE

A abertura de cada uma das 5 Unidades do Volume, organizada em dupla de páginas, apresenta uma ou mais imagens e textos relacionados a temas interdisciplinares e contemporâneos que vão despertar sua curiosidade.

Unidade 3 SEMELHANÇA E TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Usuário de cadeira de rodas utilizando uma rampa de acessibilidade.

Rampas de acessibilidade

Para que todas as pessoas, com deficiência ou não, possam frequentar os mesmos lugares e usufruir dos mesmos bens e serviços, é necessária a implementação de mecanismos que garantam o acesso de todos aqueles com restrição de mobilidade.

O artigo 5º da Lei n. 10.098, de 19 de dezembro de 2000, estabelece normas gerais e critérios básicos para a promoção da acessibilidade das pessoas com deficiência ou com mobilidade reduzida. Outros decretos municipais também estabelecem padronizações para os passeios públicos (parte da calçada exclusiva para circulação de pedestres), como o artigo 4º do Decreto n. 59671, de agosto de 2020, do município de São Paulo (SP), que regulamenta a organização das calçadas e determina a inclinação máxima para acesso a imóveis em 8,33%. Além disso, existe uma norma da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) que regulamenta a acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos visando **autonomia** (fazer com independência), **conforto** (fazer com baixo esforço físico) e **segurança** (fazer evitando acidentes).

1. Como é a acessibilidade na sua cidade? Você já reparou em rampas e outros dispositivos de acessibilidade disponíveis?
2. Você já pensou no que acontece se a rampa for muito inclinada? Como você imagina que seja calculada a inclinação da rampa de acesso numa calçada, por exemplo?

Dica

Saiba mais de acessibilidade

- ARAUJO, Ana Luisa; OLIVEIRA, Nelson. Território sem dono, calçadas brasileiras revelam negligência com o pedestre. *Senado Notícias*, Brasília, DF, 10 jan. 2020. Disponível em: https://tedi.net/xwd3bu. Acesso em: 27 jun. 2024.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *ABNT NBR 9050*: acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. Rio de Janeiro: ABNT, 2020. Disponível em: https://tedi.net/rhwbsr. Acesso em: 27 jun. 2024.

142

143

Dica

Neste boxe, há sugestões de *sites*, textos, tecnologias digitais, entre outros recursos que podem auxiliá-lo a compreender, ampliar ou aprofundar os estudos ao longo dos capítulos.

Observação

Em momentos oportunos, são apresentadas observações que complementam o estudo com informações adicionais sobre os conteúdos abordados.

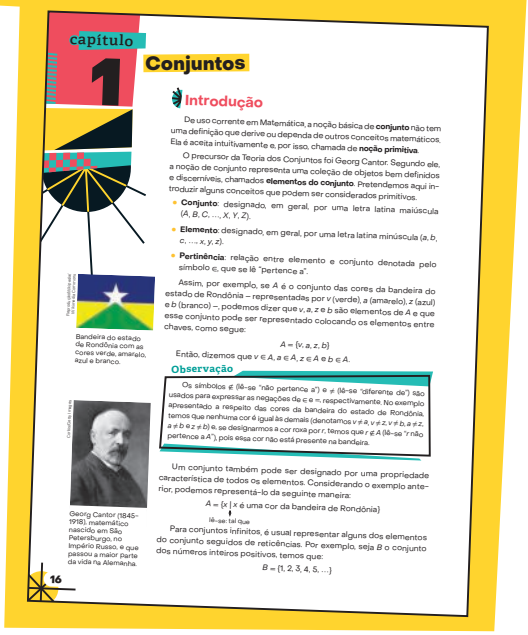
PRODUÇÕES EM FOCO

Vídeos, *podcasts*, infográficos, *blogs* e outros recursos e mídias podem ser muito úteis para a produção e o compartilhamento de conteúdos. Nesta seção, disposta antes da Unidade **1**, há dicas relacionadas a esses e outros tipos de mídia para serem consultadas ao longo de todo o ano letivo.

Em alguns momentos do livro, também indicamos um ícone para relembrá-lo de que pode retomar essas dicas para a produção sugerida na seção.

CAPÍTULO

Dois ou três capítulos estão reunidos em uma mesma Unidade e organizados em assuntos seguidos por blocos de atividades, boxes e seções variadas para o desenvolvimento dos conteúdos propostos.



capítulo 1

Conjuntos

Introdução

De uso corrente em Matemática, a noção básica de **conjunto** não tem uma definição que derive ou dependa de outros conceitos matemáticos. Ela é aceita intuitivamente e, por isso, chamada de **noção primitiva**.

O precursor da Teoria dos Conjuntos foi Georg Cantor. Segundo ele, a noção de conjunto representa uma coleção de objetos bem definidos e discerníveis, chamados **elementos do conjunto**. Pretendemos aqui introduzir alguns conceitos que podem ser considerados primitivos.

- **Conjunto**: designado, em geral, por uma letra latina maiúscula (*A, B, C, ..., X, Y, Z*).
- **Elemento**: designado, em geral, por uma letra latina minúscula (*a, b, c, ..., x, y, z*).
- **Pertinência**: relação entre elemento e conjunto denotada pelo símbolo ∈, que se lê "pertence a".

Assim, por exemplo, se *A* é o conjunto das cores da bandeira do estado de Rondônia – representadas por *r* (verde), *a* (amarelo), *z* (azul) e *b* (branco) –, podemos dizer que *v*, *a*, *z* e *b* são elementos de *A* e que esse conjunto pode ser representado colocando os elementos entre chaves, como segue:

$A = \{v, a, z, b\}$

Então, dizemos que $v \in A$, $a \in A$, $z \in A$ e $b \in A$.

Bandeira do estado de Rondônia com as cores verde, amarelo, azul e branco.

Observação

Os símbolos ∉ (lê-se "não pertence a") e ≠ (lê-se "diferente de") são usados para expressar as negações de ∈ e =, respectivamente. No exemplo apresentado a respeito das cores da bandeira do estado de Rondônia, temos que nenhuma cor é igual às demais (denotamos $v \neq A$, $v \neq z$, $v \neq b$, $a \neq z$, $a \neq b$ e $z \neq b$) e, se designarmos a cor roxa por *r*, temos que $r \notin A$ (lê-se "*r* não pertence a *A*"), pois essa cor não está presente na bandeira.

Georg Cantor (1845-1918), matemático nascido em São Petersburgo, no Império Russo, e que passou a maior parte da vida na Alemanha.

Um conjunto também pode ser designado por uma propriedade característica de todos os elementos. Considerando o exemplo anterior, podemos representá-lo da seguinte maneira:

$A = \{x \mid x \text{ é uma cor da bandeira de Rondônia}\}$

lê-se: tal que

Para conjuntos infinitos, é usual representar alguns dos elementos do conjunto seguidos de reticências. Por exemplo, seja *B* o conjunto dos números inteiros positivos, temos que:

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

16

ATIVIDADES

Nesta seção, presente em todos os capítulos, você encontrará uma grande variedade de atividades e problemas para consolidar os conteúdos e conceitos abordados. Algumas atividades são acompanhadas dos destaques **Experimente**, incentivando o uso de tecnologias digitais, e **Troque ideias**, que sugere a troca de ideias e opiniões em duplas ou grupos.

Atividades resolvidas

Neste boxe, você encontra a resolução detalhada de atividades que ajudam a compreender melhor os conceitos estudados e ampliam seu repertório de técnicas de resolução de problemas.

Pense nisto

Neste boxe há chamadas curtas, intercaladas em meio ao texto, convidando você a refletir sobre algum detalhe, propriedade ou solução de um problema. Além disso, incentivam o levantamento de hipóteses e o uso de estratégias pessoais para responder às perguntas.

EXPERIMENTE

Esta seção propõe o desenvolvimento de atividades com o apoio de tecnologias digitais, como *softwares* de Geometria dinâmica e planilhas eletrônicas.

História da Matemática

Os textos deste boxe põem você em contato com o processo de construção do conhecimento e a criatividade na resolução de problemas enfrentados pela humanidade ao longo da história, situando os acontecimentos na linha do tempo.

Interligando

Esta seção apresenta, por meio de textos, recursos visuais diversificados e atividades, assuntos relevantes da área de Matemática e suas Tecnologias, relacionando-os com outros temas da própria área ou de outras áreas do conhecimento.

Educação financeira

Na seção há textos, imagens, gráficos e tabelas que abordam temas de Educação financeira em situações reais, incentivando a reflexão sobre atitudes que devem ser incorporadas à nossa rotina.

PROJETO

A seção oferece, por meio de questões e situações-problema, a oportunidade de você e os colegas colocarem em prática conhecimentos e habilidades, seguindo um percurso construído coletivamente. Os projetos propostos abordam temas relevantes para os contextos juvenis e sociais, mobilizando o trabalho com diferentes Temas Contemporâneos Transversais e com os Objetivos do Desenvolvimento Sustentável.

PROJETO

Cultivos agrícolas sustentáveis

Leia os textos a seguir sobre a utilização em larga escala de defensores agrícolas na produção de alimentos.

Agrotóxicos: os perigos do uso abusivo ao meio ambiente, animais e seres humanos

Os métodos usados para pulverizar os agrotóxicos nas plantações trazem diversas consequências negativas ao meio ambiente e aos seres humanos, principalmente trabalhadores rurais. Uma das principais técnicas empregadas nas lavouras, a pulverização aérea, consiste na liberação de resíduos químicos por aviões agrícolas. Além de contaminar as plantas, o agrotóxico que é aspergido entra em contato com a água e os alimentos, fazendo com que os seres humanos sejam direta ou indiretamente afetados por esses resíduos.

Os alimentos que recebem os pesticidas são in natura, ou seja, apresentam maior possibilidade de contaminação por não serem cozidos. Ao serem higienizados e mesmo com a retirada das suas cascas, esses pesticidas não são eliminados. Em 2003, a Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa) criou o Programa de Análise de Resíduos de Agrotóxicos em Alimentos (PARA), com o objetivo de avaliar continuamente os níveis destes resíduos nos alimentos de origem vegetal. [...]

BRAZ, N. Agrotóxicos: os perigos do uso abusivo ao meio ambiente, animais e seres humanos. Faculdade de Medicina | UFMG, 3 maio 2018. Disponível em: https://redir.ufmg.br/fafar. Acesso em: 19 jul. 2024.

Prosa Rural – Controle biológico de pragas em cultivos consorciados

Um dos grandes desafios da agricultura, principalmente nos sistemas orgânicos de produção, é combater as pragas e doenças nas lavouras sem utilizar pesticidas. Para tal, o manejo fitossanitário deve basear-se na prevenção, criando condições que desfavoreçam o surgimento de insetos-pragas nas plantas cultivadas. O controle biológico é uma técnica que utiliza inimigos naturais das pragas para mantê-las sob controle e impedir que prejudiquem a produção.

[...]

EMBRAPA. *Prosa Rural – Controle biológico de pragas em cultivos consorciados*, 1º maio 2013. Disponível em: https://bit.ly/3Ae1Ecl. Acesso em: 19 jul. 2024.

O uso de drones na produção agrícola surgiu como um facilitador de processos que antes poderiam dificultar a plantação ou prejudicar trabalhadores, mas a dispersão de defensores agrícolas no ar produzida por esses equipamentos pode trazer consequências para a natureza.

130

Pensando em um projeto

A Organização das Nações Unidas para a Alimentação e a Agricultura (FAO) estima que 20 a 40% da produção agrícola mundial é perdida para pragas, e essa porcentagem poderia ser maior, se não houvesse o uso de defensores agrícolas.

Apesar disso, é inegável a existência de diversos prejuízos provenientes do uso incorreto e indiscriminado dessas substâncias.

Que tal divulgar, em um blog, um modelo de planejamento anual de produção agrícola para a região em que você vive, que use a menor quantidade possível de defensores agrícolas por área? Para isso, você vai buscar conhecimento sobre técnicas naturais para evitar pragas, conhecer as características da região onde você vive, identificar as possibilidades de cultivos e aplicar seus conhecimentos sobre função quadrática para fundamentar o trabalho.

Para começar

- Organizem-se em 7 grupos.
- Planejem o uso de um computador com acesso à internet.

Plano de ação

Etapa 1

Em grupo, pesquisem o tipo de solo e o clima da região em que vocês vivem, a característica de cada um desses elementos e os cultivos mais indicados para essa região em cada época do ano.

Etapa 2

Encontrem informações sobre a quantidade usualmente indicada de cada defensor agrícola, por metro quadrado, na produção dos cultivos que vocês encontraram na etapa 1. Organizem as informações em uma planilha eletrônica.

Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, criem um gráfico para mostrar a quantidade de cada um dos defensores agrícolas por metro quadrado em uma região quadrada.

Comecem encontrando a lei da função que relaciona a quantidade indicada de um tipo de defensor agrícola em função de uma região quadrada de lado medindo *x* metros. Depois, insiram a lei da função no *software*. Repitam para todos os defensores agrícolas pesquisados.

Etapa 3

Pesquisem os principais sistemas agroecológicos que podem ser utilizados para esses cultivos durante 1 ano. Os sistemas agroecológicos se baseiam nos ecossistemas naturais para reproduzir um cultivo o mais parecido possível com o que se encontraria na natureza.

Etapa 4

Elaborem um texto explicativo sobre as melhores maneiras de cultivar os alimentos pesquisados de acordo com algum(ns) sistema(s) agroecológico(s) baseando-se nas teorias estudadas. Adicionem imagens ao texto para facilitar o entendimento. Façam também um parágrafo justificando, com dados, como o modelo gera tanta renda quanto o sistema que utiliza defensores agrícolas.

Esse será o modelo de cultivo de seu grupo.

Etapa 5

Criem a página do *blog* para divulgar as informações que vocês encontraram. Hospedem seu *blog* em um site que ofereça endereço e acesso gratuitos.

Etapa 6

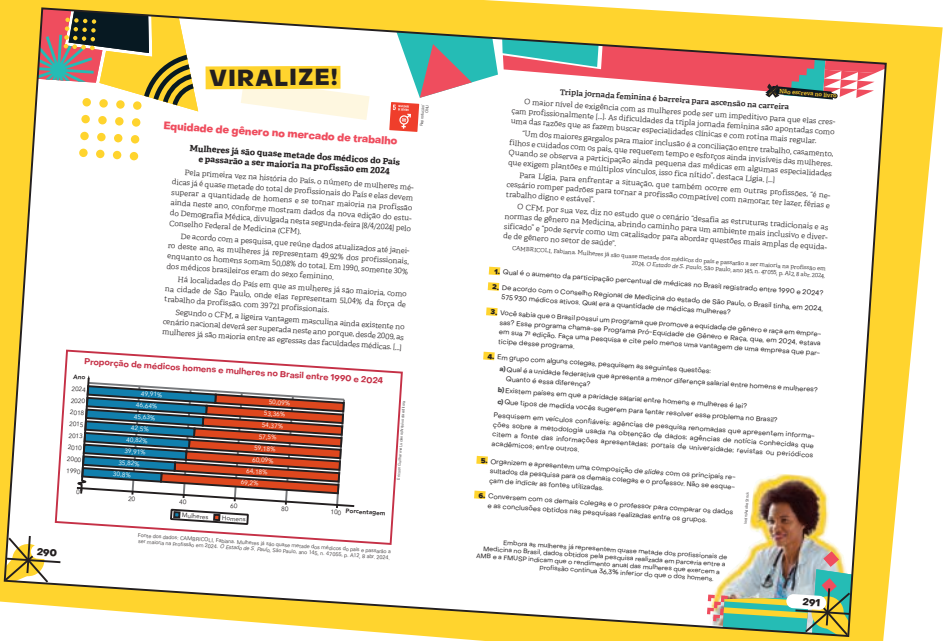
Produto final: montagem e publicação do *blog*.

- Elaborem coletivamente o texto que será inserido no *blog*.
- Publiquem os textos no *blog* e trabalhem para deixar a página atrativa.
- Compartilhem o endereço do *blog* com a comunidade escolar, tentando atingir a maior quantidade de pessoas que possam se beneficiar com essas informações ou fazer uso delas.

131

VIRALIZE!

Nesta seção constam textos de diferentes mídias, envolvendo alguns Temas Contemporâneos Transversais, e questões de interpretação e opinião pessoal com argumentação.



VIRALIZE!

Equidade de gênero no mercado de trabalho

Mulheres já são quase metade dos médicos do País e passarão a ser maioria na profissão em 2024

Pela primeira vez na história do País, o número de mulheres médicas já é quase metade do total de profissionais do País e elas devem superar a quantidade de homens e se tornar maioria na profissão ainda neste ano, conforme mostram dados da nova edição do estudo Demografia Médica, divulgada nesta segunda-feira (8/4/2024) pelo Conselho Federal de Medicina (CFM).

De acordo com a pesquisa, que reúne dados atualizados até janeiro deste ano, as mulheres já representam 49,92% dos profissionais, enquanto os homens somam 50,08% do total. Em 1990, somente 30% dos médicos brasileiros eram do sexo feminino.

Há localidades do País em que as mulheres já são maioria, como na cidade de São Paulo, onde elas representam 51,04% da força de trabalho da profissão com 39 721 profissionais.

Segundo o CFM, a ligeira vantagem masculina ainda existente no cenário nacional deverá ser superada nesta ano porque, desde 2009, as mulheres já são maioria entre as egressas das faculdades médicas. [...]

Proporção de médicos homens e mulheres no Brasil entre 1990 e 2024

Fonte dos dados: CAMBRICOLI, Fabiana. Mulheres já são quase metade dos médicos do país e passarão a ser maioria na profissão em 2024. *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, ano 145, n. 47.055, p. 412, 8 abr. 2024.

290

Tripla jornada feminina é barreira para ascensão na carreira

O maior nível de exigência com as mulheres pode ser um impeditivo para que elas cresçam profissionalmente [...]. As dificuldades da tripla jornada feminina são apontadas como uma das razões que as fazem buscar especialidades clínicas e com rotina mais regular.

"Um dos maiores gargalos para maior inclusão é a conciliação entre trabalho, casamento, filhos e cuidados com os pais, que requerem tempo e esforços ainda invisíveis das mulheres. Quando se observa a participação ainda pequena das médicas em algumas especialidades que exigem plantões e múltiplos vínculos, isso fica nítido", destaca Ligia. [...]

Para Ligia, para enfrentar a situação, que também ocorre em outras profissões, "é necessário romper padrões para tornar a profissão compatível com namorar, ter lazer, férias e trabalho digno e estável".

O CFM, por sua vez, diz no estudo que o cenário "desafia as estruturas tradicionais e as normas de gênero na Medicina, abrindo caminho para um ambiente mais inclusivo e diversificado" e "pode servir como um catalisador para abordar questões mais amplas de equidade de gênero no setor de saúde".

CAMBRICOLI, Fabiana. Mulheres já são quase metade dos médicos do país e passarão a ser maioria na profissão em 2024. *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, ano 145, n. 47.055, p. 412, 8 abr. 2024.

1. Qual é o alimento da participação percentual de médicas no Brasil registrado entre 1990 e 2024?
2. De acordo com o Conselho Regional de Medicina do estado de São Paulo, o Brasil tinha, em 2024, 575 930 médicos ativos. Qual era a quantidade de médicas mulheres?
3. Você sabia que o Brasil possui um programa que promove a equidade de gênero e raça em empresas? Esse programa chama-se Programa Pró-Equidade de Gênero e Raça, que, em 2024, estava em sua 7ª edição. Faça uma pesquisa e cite pelo menos uma vantagem de uma empresa que participe desse programa.
4. Em grupo com alguns colegas, pesquisem as seguintes questões:
   a) Qual é a unidade federativa que apresenta a menor diferença salarial entre homens e mulheres? Quanto é essa diferença?
   b) Existem países em que a paridade salarial entre homens e mulheres é ia?
   c) Que tipos de medida vocês sugerem para tentar resolver esse problema no Brasil?

   Pesquisem em veículos confiáveis: agências de pesquisa renomadas que apresentam informações sobre a metodologia usada na obtenção de dados; agências de notícia confiáveis que citem a fonte das informações apresentadas; portais de universidade; revistas ou periódicos acadêmicos; entre outros.
5. Organizem e apresentem uma composição de *slides* com os principais resultados de pesquisa para os demais colegas e o professor. Não se esqueçam de indicar as fontes utilizadas.
6. Conversem com os demais colegas e o professor para comparar os dados e as conclusões obtidos nas pesquisas realizadas entre os grupos.

Embora as mulheres já representem quase metade dos profissionais de Medicina no Brasil, dados obtidos pela pesquisa realizada em parceria entre a AMB e a FMUSP indicam que o rendimento anual das mulheres que exercem a profissão continua 36,3% inferior do que o dos homens.

291

Para fundamentar saberes

Para finalizar cada Unidade, propomos atividades do Enem e de vestibulares relacionadas aos conteúdos abordados. Em seguida, são propostas perguntas para que você reflita sobre o próprio aprendizado.

SUMÁRIO

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) 11

PRODUÇÕES EM FOCO 12

UNIDADE 1

CONJUNTOS E CONJUNTOS NUMÉRICOS 14

Capítulo 1 – Conjuntos 16
Introdução 16
Igualdade de conjuntos 17
Subconjuntos – relação de inclusão 17
Intersecção de conjuntos e união de conjuntos 18
Número de elementos da união de 2 conjuntos finitos 20
Diferença entre conjuntos 21
Interligando – Classificação espectral das estrelas 24
Projeto – Feira de profissões 25

Capítulo 2 – Conjuntos numéricos 27
O conjunto dos números naturais: $\mathbb{N}$ 27
O conjunto dos números inteiros: $\mathbb{Z}$ 28
Oposto e módulo de um número inteiro 29
O conjunto dos números racionais: $\mathbb{Q}$ 32
Representação decimal e representação fracionária 33
Localização geométrica do conjunto dos números racionais 34
Oposto, módulo e inverso de um número racional 35
O conjunto dos números irracionais: $\mathbb{I}$ 36
O conjunto dos números reais: $\mathbb{R}$ 38
Localização geométrica do conjunto dos números reais 38
O conjunto dos números complexos: $\mathbb{C}$ 39
Intervalos reais 42
Razão e proporção 44
Interligando – Escalas em mapas 45
Porcentagem 46
Educação financeira – O INSS 50
Viralize! – O que é que a mandioca tem? 52
Para fundamentar saberes 54

UNIDADE 2

FUNÇÕES DE 1º E DE 2º GRAU 56

Capítulo 3 – Funções 58
Noção inicial de função 58
Experimente construir representações em uma calculadora gráfica 60
Função como relação entre conjuntos 62
Notação 63
Funções definidas por fórmulas 64
Domínio e contradomínio 66
Determinação do domínio 66
Conjunto imagem 67
Plano cartesiano 68
Representação de pontos em uma reta 68
Representação de pontos em um plano 68
Experimente representar pontos em um *software* 69
Construção de gráficos 70
Taxa média de variação de uma função 72
Interligando – A evolução da população mundial 77

Capítulo 4 – Função afim 78
Função polinomial de 1º grau 78
Gráfico de uma função polinomial de 1º grau 79
Intersecção de retas 81
Função constante 81
Função linear 82
Grandezas diretamente proporcionais 85
Zero de uma função polinomial de 1º grau 88
Taxa média de variação da função afim 88
Interligando – Movimento retilíneo uniforme 92
Crescimento e decrescimento 93
O coeficiente angular 93
O coeficiente linear 95
Experimente investigar gráficos de funções polinomiais de 1º grau com o apoio de um *software* 96
Sinal da função 97
Sinal da função afim 97
Inequações de 1º grau 99
Propriedades das desigualdades 99
Funções definidas por mais de uma sentença 103
Gráfico de funções definidas por mais de uma sentença 105

Capítulo 5 – Função quadrática 108
Função polinomial de 2º grau 108
Gráfico da função polinomial de 2º grau 109
Zeros de uma função quadrática 111
Soma e produto das raízes de uma equação 114
Forma fatorada 114
Interligando – As funções na programação 116
Máximos e mínimos 117
Coordenadas do vértice da parábola 117
O conjunto imagem 118
Educação financeira – Funções custo, receita e lucro 121
Esboço da parábola 123
Sinal da função quadrática 127
$\Delta > 0$ 127
$\Delta = 0$ 127
$\Delta < 0$ 127
Inequações do 2º grau 129
Projeto – Cultivos agrícolas sustentáveis 130
Experimente determinar o melhor tipo de função para representar uma relação entre duas grandezas 132
Grandezas inversamente proporcionais 134
Viralize! – "Cotas, pra que te quero?" 138
Para fundamentar saberes 140

UNIDADE 3

SEMELHANÇA E TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO 142

Capítulo 6 – Semelhança e congruência de figuras planas 144
Razão de semelhança 144
Congruência de triângulos 146
Noção intuitiva 146
Conceito de congruência 147
Critérios (ou casos) de congruência 147
Caso LLL (lado-lado-lado) 148
Caso LAL (lado-ângulo-lado) 148
Caso ALA (ângulo-lado-ângulo) 148
Caso LAAo (lado-ângulo adjacente--ângulo oposto) 148
Semelhança de triângulos 151
Razão de semelhança em triângulos 152
Teorema de Tales 153
Teorema fundamental da semelhança 154
Critérios (ou casos) de semelhança 156
AA (ângulo-ângulo) 156
LAL (lado-ângulo-lado) 156
LLL (lado-lado-lado) 157
Consequências da semelhança de triângulos 160
Razão entre as medidas de área de triângulos semelhantes 160
Base média do triângulo 161
O triângulo retângulo 162
Relações métricas 163
Aplicações notáveis do teorema de Pitágoras 164
Experimente determinar ternos pitagóricos com o auxílio de uma planilha eletrônica 167
Interligando – Arte e Matemática 170

Capítulo 7 – Trigonometria no triângulo retângulo 171
Razões trigonométricas 171
Introdução 172
Tangente de um ângulo agudo 173
Tabela de razões trigonométricas 173
Seno e cosseno de um ângulo agudo 174
Experimente obter seno, cosseno e tangente de ângulos agudos 179
Ângulos notáveis 180
Triângulo equilátero 180
Quadrado 181
Interligando – Acessibilidade 184
Projeto – O triângulo retângulo e a prevenção de deslizamentos de terra 186

Capítulo 8 – Área de figuras planas 188
O que é área? 188
Área do retângulo 190
Área do quadrado 190
Interligando – Cálculo da medida de área em um *software* gráfico 194
Área do paralelogramo 196
Área do triângulo 197
Área do triângulo equilátero 198
Área do losango 201
Área do trapézio 203
Polígonos regulares 205
Elementos notáveis de um polígono regular 205
Lado e apótema de alguns polígonos regulares 206
Área de um polígono regular 208
Razão entre medidas de área de figuras semelhantes 210
Área do círculo e das partes do círculo 212
Área do círculo 212
Área do setor circular 214
Viralize! – Redução de emissão de metano na agropecuária mundial 217
Para fundamentar saberes 218

UNIDADE 4

CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA E LEI DOS SENOS E DOS COSSENOS 220

Capítulo 9 – Circunferência trigonométrica 222
Arcos e ângulos 222
Medida angular e medida linear de arco 223
Unidades de medida angular de arcos 223
Medida de comprimento de um arco 225
Circunferência trigonométrica 228
Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica 228
Simetrias 229
Seno 231
Valores notáveis do seno 232
Cosseno 234
Valores notáveis do cosseno 235
Relações entre seno e cosseno 237
Tangente 239
Valores notáveis da tangente 240
Relação entre tangente, seno e cosseno 241
Interligando – A Matemática por trás do disfarce 243

Capítulo 10 – Trigonometria em triângulos quaisquer 245
Lei dos senos 245
Interligando – Evolução da história da Trigonometria 248
Lei dos cossenos 250
Projeto – Mar sem plástico 254
Viralize! – A matemática no cinema 256
Para fundamentar saberes 258

LIGHTFIELD STUDIOS/Adobe Stock

Pessoas no cinema usando óculos para assistir a filmes em 3-D.

Prostock-studio/Adobe Stock

Pessoa analisando produtos em um supermercado.

UNIDADE 5

ESTATÍSTICA BÁSICA 260

Capítulo 11 – Noções básicas de Estatística 262
O papel da Estatística 262
Pesquisas estatísticas 263
Etapas da pesquisa estatística 264
Amostragem 264
Variável 265
Tabela de frequência 267
Interligando – Os censos demográficos 271
Projeto – Campanha para o uso consciente de água 272

Capítulo 12 – Representações gráficas 274
Introdução 274
Gráfico de barras 274
Histograma 275
Diagrama de ramos e folhas 276
Gráfico de linhas 280
Gráfico de setores 280
Pictograma 281
Interligando – Gráficos enganosos 285
Gráfico de dispersão 287
Experimente construir um gráfico de dispersão na planilha eletrônica 287
Viralize! – Equidade de gênero no mercado de trabalho 290
Para fundamentar saberes 292

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS 294

RESPOSTAS 295

LISTA DE SIGLAS 307

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS 308

TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIOS 310

OBJETOS EDUCACIONAIS DIGITAIS (OEDs)

Alimentos ultraprocessados: como impactam sua saúde 14

As cores do universo 24

Conjuntos numéricos e localização de irracionais na reta numérica 37

Sabores do Brasil: benefícios do consumo de produtos regionais 52

Funções 58

Crescimento populacional e aumento da produção de lixo: uma conexão inescapável 77

Congruência de triângulos 147

A evolução do cinema e suas tecnologias 256

Estatística e Probabilidade 262

Viés de amostragem 264

Prática de pesquisa 272

As queimadas nos biomas brasileiros 285

Transcrição de áudios 310

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

A BNCC é o documento que define as aprendizagens mínimas que o estudante deve desenvolver em cada etapa da Educação Básica, de modo a estabelecer um currículo básico comum a todos os estudantes brasileiros.

Esse documento foi elaborado considerando os conhecimentos e as habilidades essenciais para o desenvolvimento dos estudantes na sociedade do século XXI e visando garantir uma educação de qualidade e com equidade.

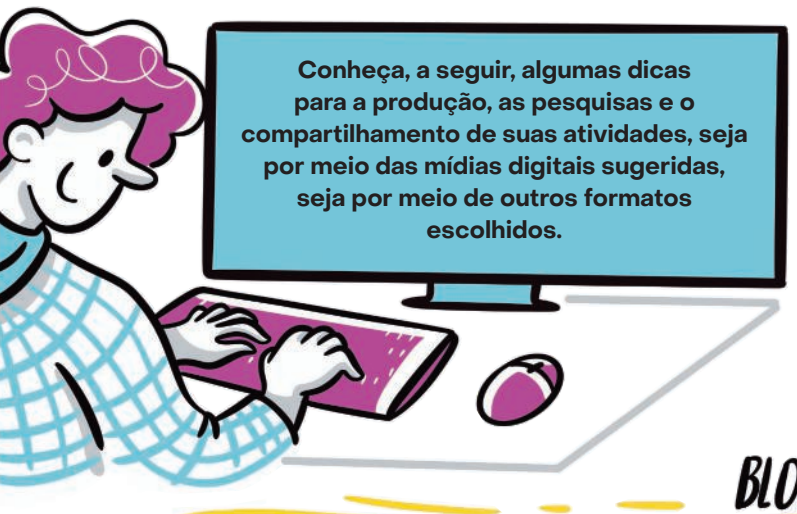
Ao longo dos 3 Volumes desta coleção, todas as competências e as habilidades da BNCC e os Temas Contemporâneos Transversais são trabalhados. A seguir apresentamos aqueles que são trabalhados em cada Unidade deste Volume.

Os textos correspondentes aos códigos indicados podem ser consultados no documento oficial da BNCC. Disponível em: https://tedit.net/0blon1. Acesso em: 4 ago. 2024.

VOLUME 1

Unidade	Competência geral da Educação Básica (CG)	Competência específica de Matemática e suas Tecnologias (CEMAT)	Habilidade de Matemática e suas Tecnologias (EM13MAT)	Tema Contemporâneo Transversal (TCT)
Unidade 1	CG06, CG08, CG09, CG10	–	–	*Ciência e Tecnologia*; *Diversidade Cultural*; *Educação Alimentar e Nutricional*; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso*; *Saúde*; *Trabalho*
Unidade 2	CG05	CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04, CEMAT05	EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT302, EM13MAT314, EM13MAT315, EM13MAT401, EM13MAT402, EM13MAT404, EM13MAT501, EM13MAT502, EM13MAT503, EM13MAT506, EM13MAT510	*Direitos da Criança e do Adolescente*; *Diversidade Cultural*; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação Financeira*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*
Unidade 3	CG01, CG03, CG07, CG09, CG10	CEMAT03	EM13MAT301, EM13MAT307, EM13MAT308	*Diversidade Cultural*; *Educação Ambiental*; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação para o Trânsito*; *Vida Familiar e Social*
Unidade 4	CG01, CG02, CG03, CG07, CG09, CG10	CEMAT02, CEMAT03	EM13MAT202, EM13MAT308, EM13MAT314	*Ciência e Tecnologia*; *Educação Ambiental*
Unidade 5	CG04, CG05, CG07, CG09, CG10	CEMAT01, CEMAT02, CEMAT03	EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT202, EM13MAT406, EM13MAT407	*Educação em Direitos Humanos*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Saúde*; *Trabalho*

PRODUÇÕES EM FOCO



Conheça, a seguir, algumas dicas para a produção, as pesquisas e o compartilhamento de suas atividades, seja por meio das mídias digitais sugeridas, seja por meio de outros formatos escolhidos.

- Escolha a mídia (digital ou não) que será usada e o público-alvo a quem ela se destina.
- Defina o formato da mídia e como o conteúdo deve ser apresentado.
- Em suas pesquisas, só use informações de fontes confiáveis.
- Ao final, revise detalhadamente cada aspecto de seu trabalho (texto, imagens, fontes, etc.).

BLOG

Blog é um *site* que permite postagens de textos, imagens, vídeos, áudios e *links*, possibilitando a interação com o público por meio de comentários.

- Você pode usar qualquer estilo textual (conto, reportagem, crônica, entrevista, poesia, etc.) para abordar o assunto escolhido.
- Hospede o *blog* em um *site* que ofereça endereço e acesso. Há vários *sites* que dispõem gratuitamente desses serviços.

VÍDEO

- Elabore um roteiro com todos os itens que devem ser observados.
- Escolha o local e o cenário para a gravação.
- Use um *smartphone* para gravar os sons e as imagens. Dica! Você pode utilizar outro *smartphone* como microfone ou o microfone de um fone de ouvido.
- Insira legendas da locução.
- Pesquise na internet aplicativos ou *softwares* gratuitos para fazer a edição do vídeo.
- Não esqueça de inserir uma trilha sonora (gratuita) ao vídeo.

INFOGRÁFICO

Trata-se de um recurso visual que combina textos e imagens para transmitir uma mensagem.

- Os textos devem ser curtos e objetivos.
- As imagens (fotografias, ilustrações, gráficos e mapas) e o texto devem ser complementares.
- Para começar, elabore um rascunho do que pretende colocar no infográfico (textos e imagens).
- Junto a cada imagem, identifique o nome do fotógrafo ou do ilustrador.
- Existem aplicativos e programas *on-line* gratuitos que permitem fazer infográficos digitalmente. Escolha um deles e siga as instruções do tutorial.

Gabi Emmerich/Arquivo da editora

PODCAST

Podcasts são arquivos de áudio que podem ser ouvidos tanto *on-line* como *off-line*. Podem ser entrevistas, contos, debates, etc.

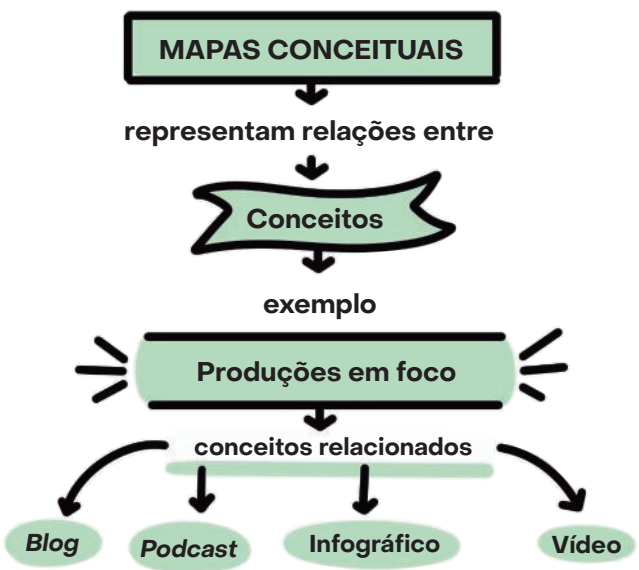
- Seja responsável quanto ao conteúdo que vai publicar, pois qualquer pessoa poderá acessá-lo.
- Prepare o texto e um roteiro sobre o tema escolhido e que possa ser consultado durante a gravação.
- A narração deve ser clara e organizada.
- Procure na internet aplicativos e *softwares* gratuitos para gravar e editar o seu *podcast*.

CITAÇÃO

- Escolha um buscador de *sites* e digite nele as palavras-chave de sua pesquisa. Vai ser apresentada uma lista de *sites*.
- Dê preferência aos *sites* governamentais, de instituições de Ensino Superior e de ONGs, além de revistas e jornais de grande circulação.
- Escolha os *sites* com data de publicação ou de atualização mais recentes.
- Cite os nomes dos *sites* consultados em seu trabalho.
- Na parte final do material produzido (escrito ou oral), cite todas as fontes de onde obteve as informações de suas pesquisas: livro, revista, *site*, jornal, documentário, etc.
- Para citar um *site*, indique o título da matéria, o nome do *site*, o ano de publicação, o endereço do *site* e a data de acesso.

MAPAS CONCEITUAIS

São diagramas que indicam as relações entre conceitos e palavras-chave. O conceito principal deve vir no topo do mapa conceitual. Ele se conecta aos conceitos relacionados por linhas, que trazem os conectivos (palavras ou frases) que explicam a relação entre eles.



Os 4 grupos alimentares: *in natura*, minimamente processados, processados e ultraprocessados

Os alimentos que consumimos podem ser divididos em 4 categorias.

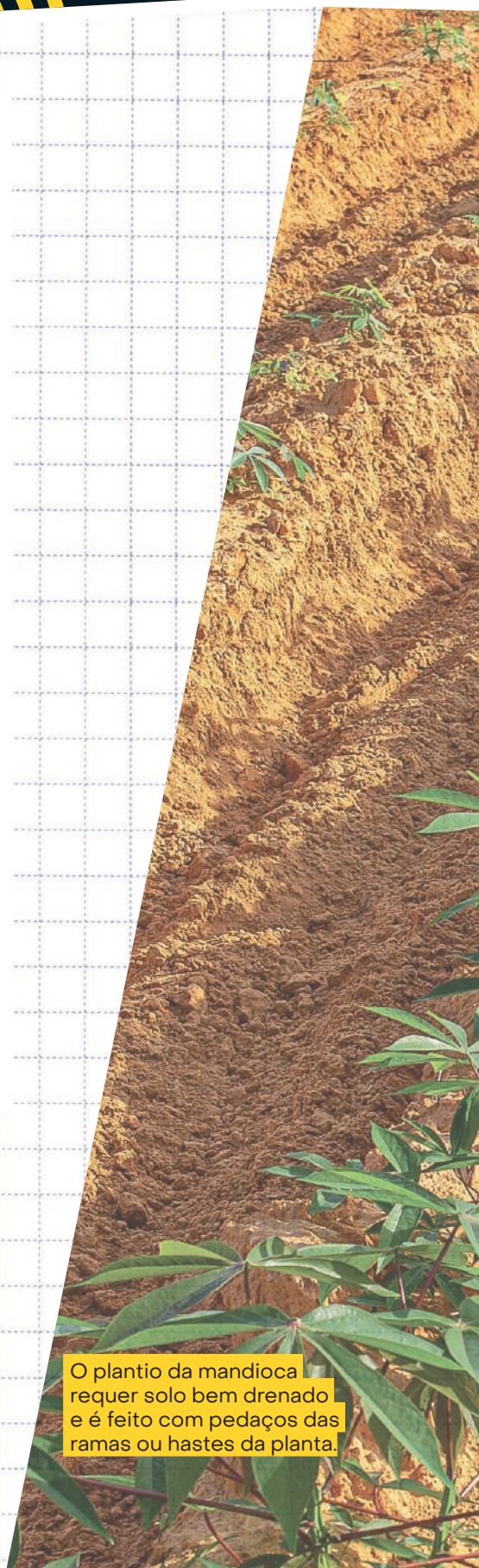
- ***In natura***: são aqueles obtidos diretamente da natureza e consumidos sem que haja alguma alteração industrial. São exemplos frutas, verduras, legumes, carnes e ovos.
- **Minimamente processados**: são alimentos que sofrem algum processo (industrial ou não), como limpeza, moagem, torra ou pasteurização, sem que haja, contudo, adição de outras substâncias, como sal e açúcar. São exemplos grãos em geral (arroz, feijão, lentilha, etc.), frutas secas, castanhas e farinhas.
- **Processados**: são alimentos aos quais a indústria adiciona sal, açúcar ou algum outro elemento para melhorar a conservação ou o sabor. São exemplos conservas em salmoura (como milho e palmito enlatados); queijos; sardinha e atum enlatados; e pães.
- **Ultraprocessados**: são alimentos industrializados que preservam pouca ou nenhuma característica dos ingredientes originais e, por isso, costumam ter pouco valor nutricional. São exemplos biscoitos, refrigerantes, macarrão instantâneo, salsicha e embutidos.

Infográfico clicável

Fonte dos dados: IN NATURA, processados, ultraprocessados: conheça os tipos de alimentos. *FeSaúde Niterói*, Niterói, 2020. Disponível em: https://tedit.net/rlpjoy. Acesso em: 2 jul. 2024.

Não escreva no livro

1. Como é sua alimentação no dia a dia? Das categorias apresentadas, quais estão mais presentes na sua rotina? Você considera sua alimentação saudável?
Respostas pessoais.
2. Esta abertura apresenta 4 maneiras de como a mandioca pode ser consumida. Como cada uma dessas maneiras se classifica em relação às categorias apresentadas?
Raiz da mandioca: *in natura*; farinha de mandioca: minimamente processada; bolo de mandioca: processado; *chips* de mandioca: ultraprocessados.



O plantio da mandioca requer solo bem drenado e é feito com pedaços das ramas ou hastes da planta.

Unidade 1

CONJUNTOS E CONJUNTOS NUMÉRICOS

A mandioca (também conhecida como aipim ou macaxeira) é uma planta nativa da América do Sul que se popularizou em várias regiões do mundo, sendo bastante consumida cozida, assada ou frita.

A farinha de mandioca é um ingrediente tradicional da culinária brasileira.

Bolo caseiro de mandioca, feito com a adição de vários ingredientes, incluindo o açúcar.

Chips de mandioca, comercializados como alternativa às batatas fritas industrializadas.

As imagens não estão representadas em proporção.

banjongseal324/Adobe Stock

capítulo 1

Conjuntos

Sugira aos estudantes a leitura do livro *Cantor*, de Jean-Pierre Belna (v. 25, São Paulo: Estação Liberdade, 2011, coleção Figuras do Saber).

Esse livro conta a história de Georg Cantor, matemático alemão citado, que elaborou a moderna Teoria dos Conjuntos trabalhando de maneira nova a ideia de infinito.

Introdução

De uso corrente em Matemática, a noção básica de **conjunto** não tem uma definição que derive ou dependa de outros conceitos matemáticos. Ela é aceita intuitivamente e, por isso, chamada de **noção primitiva**.

O precursor da Teoria dos Conjuntos foi Georg Cantor. Segundo ele, a noção de conjunto representa uma coleção de objetos bem definidos e discerníveis, chamados **elementos do conjunto**. Pretendemos aqui introduzir alguns conceitos que podem ser considerados primitivos.

- **Conjunto**: designado, em geral, por uma letra latina maiúscula (A, B, C, …, X, Y, Z).
- **Elemento**: designado, em geral, por uma letra latina minúscula (a, b, c, …, x, y, z).
- **Pertinência**: relação entre elemento e conjunto denotada pelo símbolo $\in$, que se lê "pertence a".

Assim, por exemplo, se A é o conjunto das cores da bandeira do estado de Rondônia – representadas por v (verde), a (amarelo), z (azul) e b (branco) –, podemos dizer que v, a, z e b são elementos de A e que esse conjunto pode ser representado colocando os elementos entre chaves, como segue:

$$A = \{v, a, z, b\}$$

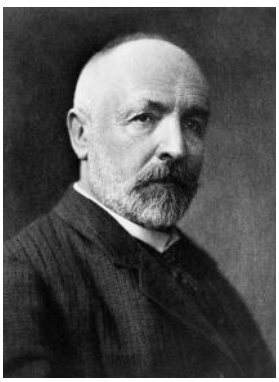
Então, dizemos que $v \in A$, $a \in A$, $z \in A$ e $b \in A$.

Reprodução/Wikipedia/Wikimedia Commons

Bandeira do estado de Rondônia com as cores verde, amarelo, azul e branco.

Observação

Os símbolos $\notin$ (lê-se "não pertence a") e $\neq$ (lê-se "diferente de") são usados para expressar as negações de $\in$ e $=$, respectivamente. No exemplo apresentado a respeito das cores da bandeira do estado de Rondônia, temos que nenhuma cor é igual às demais (denotamos $v \neq a$, $v \neq z$, $v \neq b$, $a \neq z$, $a \neq b$ e $z \neq b$) e, se designarmos a cor roxa por r, temos que $r \notin A$ (lê-se "r não pertence a A"), pois essa cor não está presente na bandeira.



Corbis/Getty Images

Georg Cantor (1845-1918), matemático nascido em São Petersburgo, no Império Russo, e que passou a maior parte da vida na Alemanha.

Um conjunto também pode ser designado por uma propriedade característica de todos os elementos. Considerando o exemplo anterior, podemos representá-lo da seguinte maneira:

$$A = \{x \mid x \text{ é uma cor da bandeira de Rondônia}\}$$

lê-se: tal que

Para conjuntos infinitos, é usual representar alguns dos elementos do conjunto seguidos de reticências. Por exemplo, seja B o conjunto dos números inteiros positivos, temos que:

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos A e B são iguais (ou seja, $A = B$) se todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A.

Assim, por exemplo:

- se $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{7, 5, 3, 1\}$, temos que $A = B$;
- se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, a\}$, temos que $A = B$;
- se $A = \{x \mid x - 2 = 5\}$ e $B = \{7\}$, temos que $A = B$;
- se A é o conjunto das letras da palavra "garra", $A = \{g, a, r, r, a\}$, e B é o conjunto das letras da palavra "agarrar", $B = \{a, g, a, r, r, a, r\}$, temos que $A = B$. Note que, em um mesmo conjunto, não é usual repetir elementos. Apesar de a palavra "garra" ter 5 letras e "agarrar" ter 7, temos $A = B = \{a, g, r\}$;
- há conjuntos que têm um único elemento, chamados **conjuntos unitários**, e há um conjunto que não tem elementos, chamado **conjunto vazio** e indicado por $\{\ \}$ ou $\varnothing$;
- há conjuntos cujos elementos são conjuntos. Por exemplo:

$$F = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Assim: $\varnothing \in F$; $\{a\} \in F$; $\{b\} \in F$; $\{c\} \in F$; $\{a, b\} \in F$; $\{a, c\} \in F$; e $\{a, b, c\} \in F$. Note que $a \notin F$, $b \notin F$ e $c \notin F$, pois a, b e c não são elementos do conjunto F, e sim os conjuntos unitários $\{a\}$, $\{b\}$ e $\{c\}$ são elementos de F.

Observação

Os símbolos $\{\ \}$ e $\varnothing$ representam o conjunto vazio, porém o símbolo $\{\varnothing\}$ representa um conjunto unitário cujo único elemento é o conjunto vazio.

Pense nisto

Qual é a diferença entre os conjuntos $\{a\}$ e $\{\{a\}\}$?

Não escreva no livro

O conjunto $\{a\}$ é um conjunto unitário formado apenas pelo elemento a, já o conjunto $\{\{a\}\}$ é um conjunto cujo único elemento é o conjunto $\{a\}$.

Subconjuntos – relação de inclusão

Vamos considerar os conjuntos $A = \{x \mid x$ é letra da palavra "ralar"$\}$ e $B = \{x \mid x$ é letra da palavra "algazarra"$\}$, ou seja, $A = \{r, a, l\}$ e $B = \{a, l, g, z, r\}$.

Note que todo elemento de A é também elemento de B. Nesse caso, dizemos que A é um **subconjunto** ou uma **parte de** B, o que é indicado por:

$$A \subset B$$

(lê-se: "A está contido em B", "A é um subconjunto de B" ou "A é uma parte de B")

Ou, ainda:

$$B \supset A$$

(lê-se: "B contém A")

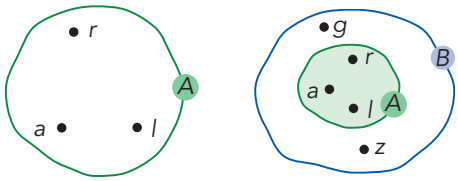
De modo geral, temos:

Dados 2 conjuntos A e B, temos que $A \subset B$ se todo elemento de A também é elemento de B.

O símbolo $\subset$ é chamado **sinal de inclusão** e estabelece uma relação entre 2 conjuntos.

Uma maneira de ilustrar a relação entre conjuntos é por meio do **diagrama de Venn**. John Venn (1834-1923), matemático e lógico inglês, usou uma região plana limitada por uma linha fechada e não entrelaçada para representar, no interior dela, os elementos de um conjunto. Essa representação é conhecida como diagrama de Venn.

As imagens a seguir mostram uma representação do conjunto $A = \{r, a, l\}$ e a relação de inclusão entre 2 conjuntos A e B por meio de diagramas de Venn.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

Os símbolos $\not\subset$ (lê-se: "não está contido em") e $\not\supset$ (lê-se: "não contém") são as negações de $\subset$ e $\supset$, respectivamente. Assim, temos: $A \not\subset B$ (lê-se: "A não está contido em B") se pelo menos um elemento de A não pertencer a B.

Dado um conjunto A, podemos formar um conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A, chamá-lo de **conjunto das partes de *A*** e indicá-lo por $P(A)$. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$, então todos os subconjuntos dele são: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ e $\{1, 2, 3\}$. Logo, o conjunto das partes de A é: $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Note que o conjunto vazio e o próprio conjunto A são sempre subconjuntos de A. Portanto, esses conjuntos são elementos de $P(A)$.

Pense nisto

Não escreva no livro

Um conjunto com 3 elementos apresenta 8 subconjuntos. Determine uma relação entre o número de elementos de um conjunto e o número de subconjuntos que ele tem. Um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos.

Intersecção de conjuntos e união de conjuntos

A partir de 2 conjuntos, podemos construir novos conjuntos cujos elementos devem obedecer a condições preestabelecidas.

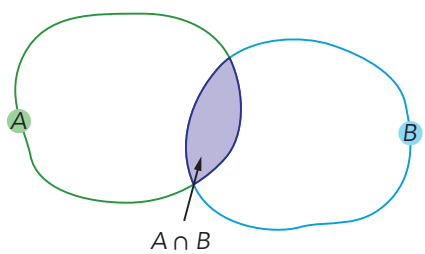
Por exemplo, dados os conjuntos A e B, podemos determinar um conjunto cujos elementos pertencem simultaneamente a A e a B. Esse conjunto é chamado **intersecção** de A e B e indicado por $A \cap B$, que se lê "A intersecção B" ou simplesmente "A inter B". Assim, define-se:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Observação

O conectivo **e**, que na definição é colocado entre as 2 sentenças ($x \in A$ e $x \in B$), indica que as condições apresentadas por ambas as sentenças devem ser obedecidas.

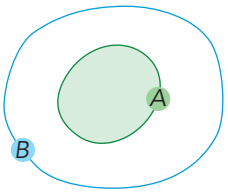
Se julgar oportuno, comente com os estudantes que esse conectivo pode ser substituído pelo símbolo matemático $\wedge$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

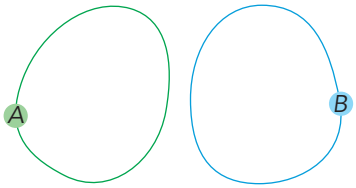
Há 2 casos particulares de intersecção entre os conjuntos A e B.

- $A \subset B$, em que todos os elementos de A também são elementos de B:



$A \cap B = A$

- A e B não têm elementos comuns e, neste caso, recebem o nome de **disjuntos**:



Nesse caso, $A \cap B = \varnothing$ e A e B são disjuntos.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

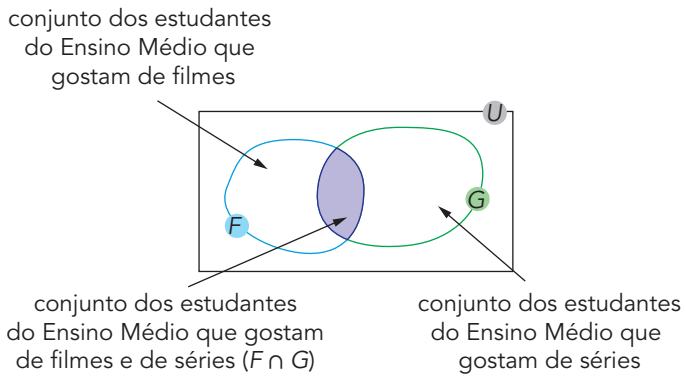
Vamos analisar um exemplo específico.

Sendo F o conjunto das pessoas que gostam de filmes e G o conjunto das pessoas que gostam de séries, podemos considerar que F e G são subconjuntos de um mesmo conjunto U, que inclui todas essas pessoas, além de outras, ou seja, todos os elementos de F e G pertencem a U. Esse conjunto U é chamado **conjunto universo**.

No caso dos conjuntos F e G considerados, U poderia ser, por exemplo, o conjunto de todos os estudantes brasileiros que cursam o Ensino Médio. Então, temos:

$$F = \{x \in U \mid x \text{ gosta de filmes}\} \text{ e } G = \{x \in U \mid x \text{ gosta de séries}\}$$

Uma interpretação do diagrama representativo dos conjuntos considerados é:



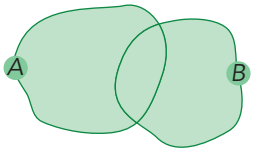
Banco de imagens/Arquivo da editora

Jacob Lund/Adobe Stock

Podemos assistir a filmes e séries em diferentes aparelhos eletrônicos e em diversos lugares. Mas é importante definir um limite de tempo para acesso a conteúdos digitais e manter um equilíbrio com estudos, lazer, descanso, etc.

A partir de 2 conjuntos A e B, também podemos obter um novo conjunto cujos elementos pertençam a pelo menos um dos conjuntos dados, ou seja, ou pertençam somente a A, ou somente a B, ou a ambos ($A \cap B$). O conjunto assim obtido é chamado **união** (ou **reunião**) de A e B e indicado por $A \cup B$, que se lê "A união B" ou "A reunião B". Assim, define-se:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



$A \cup B$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

O conectivo **ou**, que na definição é colocado entre as 2 sentenças ($x \in A$ ou $x \in B$), indica que pelo menos uma delas deve ser verdadeira.

Se julgar oportuno, comente com os estudantes que esse conectivo pode ser substituído pelo símbolo matemático ∨.

Não escreva no livro

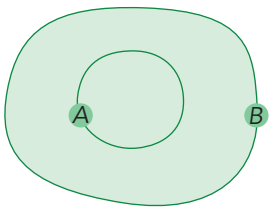
Pense nisto

Se $A \cup B = \varnothing$, é possível dizer que $A = \varnothing$ e $B = \varnothing$?

Sim. É interessante notar que a recíproca também é verdadeira, isto é, se $A = \varnothing$ e $B = \varnothing$, então $A \cup B = \varnothing$.

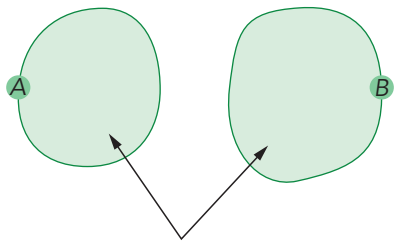
Há 2 casos particulares de união entre os conjuntos A e B.

- Se $A \subset B$:



$A \cup B = B$

- Se $A \cap B = \varnothing$ (A e B disjuntos):



$A \cup B$

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Número de elementos da união de 2 conjuntos finitos

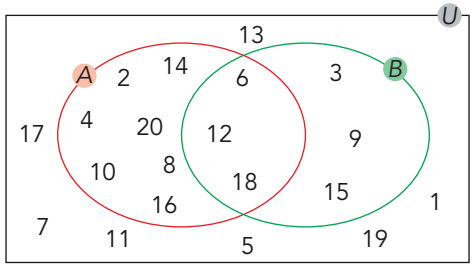
Vamos usar a notação $n(X)$ para representar o número de elementos do conjunto X, sendo X um conjunto finito.

Considere, por exemplo, $U = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ o conjunto dos números naturais de 1 a 20 e os seguintes subconjuntos de U:

$$A = \{x \in U \mid x \text{ é múltiplo de } 2\} \Rightarrow A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$B = \{x \in U \mid x \text{ é múltiplo de } 3\} \Rightarrow B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

Verifique a representação de $A \cup B$ no diagrama a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Se adicionarmos $n(A)$ com $n(B)$, obtemos $10 + 6 = 16$, ou seja, 16 elementos; porém, podemos notar que os elementos 6, 12 e 18 pertencentes a $A \cap B$ foram contados 2 vezes. Assim, para obter $n(A \cup B)$, devemos descontar, desse total parcial, esses 3 elementos, isto é:

$$n(A \cup B) = 16 - 3 = 13$$

Dados quaisquer conjuntos A e B finitos, o raciocínio do exemplo pode ser utilizado para determinar o número de elementos de $A \cup B$:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Pense nisto

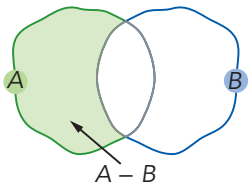
É possível ter $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, sendo A e B conjuntos finitos? Em caso afirmativo, dê um exemplo em que isso ocorra.

Sim, basta que $A \cap B = \varnothing$. Exemplo: sendo A o conjunto dos números ímpares positivos menores do que 10 e B o conjunto dos números pares positivos menores do que 10, temos: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $n(A) = 5$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $n(B) = 4$. Assim, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 5 + 4 = 9$.

Diferença entre conjuntos

Dados os conjuntos A e B, podemos determinar um conjunto cujos elementos pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B. Esse conjunto é chamado **diferença** entre A e B e indicado por $A - B$, que se lê "A menos B". Assim, define-se:

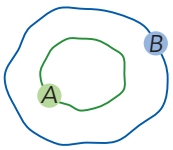
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



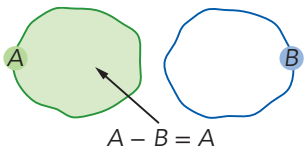
Banco de imagens/Arquivo da editora

Há 3 casos particulares de diferença entre os conjuntos A e B.

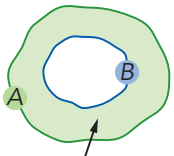
- Se $A \subset B$:



- Se $A \cap B = \varnothing$ (A e B disjuntos):



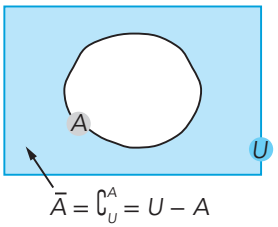
- Se $B \subset A$:



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

- No terceiro caso, em que $B \subset A$, o conjunto $A - B$ é chamado **complementar de B em relação a A**, pois é o conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a B. Indica-se $\complement_A^B = A - B$, se $B \subset A$.
- Sendo A um subconjunto de um conjunto universo U, então $\complement_U^A = U - A$ pode ser representado pelo símbolo $\overline{A}$, que se lê "A barra". Assim, $\overline{A} = \complement_U^A = U - A$.
  Note que, para todo elemento x do conjunto universo U, se $x \in \overline{A}$, então $x \notin A$ e, da mesma maneira, se $x \in A$, então $x \notin \overline{A}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. Dado o conjunto $H = \{-1, 0, 2, 4, 9\}$, reescreva no caderno cada um dos conjuntos a seguir, listando os elementos.

$A = \{x \mid x \in H \text{ e } x < 1\}$

$B = \left\{x \mid x \in H \text{ e } \frac{2x - 1}{3} = 1\right\}$

$C = \{x \mid x \in H \text{ e } x \text{ é um quadrado perfeito}\}$

$D = \{x \mid x \in H \text{ e } x < 0\}$

$E = \{x \mid x \in H \text{ e } 3x + 1 = 10\}$

2. Sendo os conjuntos $A = \{1, 2\}$; $B = \{2, 3\}$; $C = \{1, 3, 4\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$, classifique em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada uma das sentenças a seguir.

a) $B \subset D$ V
b) $A \subset B$ F
c) $A \not\subset C$ V
d) $D \supset A$ V
e) $C \not\supset B$ V
f) $C = D$ F

3. Dado o conjunto $A = \{a, b, c\}$, classifique também cada sentença a seguir em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

a) $c \notin A$ F
b) $\{c\} \in A$ F
c) $\{a, c\} \subset A$ V
d) $\{a, b\} \in A$ F
e) $\{b\} \subset A$ V
f) $\{a, b, c\} \subset A$ V

1. $A = \{-1, 0\}$
Como $\frac{2x - 1}{3} = 1 \Rightarrow x = 2$, temos $B = \{2\}$.
$C = \{0, 4, 9\}$
$D = \{-1\}$
Como $3x + 1 = 10 \Rightarrow x = 3 \notin H$, temos $E = \varnothing$.

Não escreva no livro

4. Dado o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3\}$, classifique em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada uma das seguintes afirmações sobre U. Justifique a resposta.

a) $\varnothing \in U$. F; $\varnothing$ não é elemento de U.

b) $3 \in U$ e $U \supset \{3\}$. V; 3 é elemento de U e $\{3\}$ é subconjunto de U.

c) Existem 4 subconjuntos de U que são unitários.
V; os subconjuntos unitários de U são $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$.

d) O conjunto $P(U)$ tem 8 elementos.
F; $n(U) = 4 \Rightarrow n(P(U)) = 2^4 = 16$.

5. Dado $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e sendo $K = \{x \in U \mid x < 0\}$; $L = \{x \in U \mid -3 < x < 2\}$ e $M = \{x \in U \mid x \geqslant -1\}$, determine:

$K = \{-4, -3, -2, -1\}$
$L = \{-2, -1, 0, 1\}$
$M = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

a) $K \cap L \cap M$ $\{-1\}$

b) $K \cup L \cup M$ U

c) $M \cup (L \cap K)$ $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

d) $(L \cup K) \cap M$ $\{-1, 0, 1\}$

Considere o mapa a seguir e leia o texto para resolver a atividade **6**.

Macrorregiões hidrográficas do Brasil, em 2021

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. Bacias e Divisões Hidrográficas do Brasil | 2021. *Mapa das divisões hidrográficas do Brasil 2021*. Disponível em: https://tedit.net/4e1ozz. Acesso em: 2 jul. 2024.

8. a) Exemplo de problema: "Se alguma das três proteínas faltar no restaurante em que Joana trabalha, qual deverá causar menos impacto nas vendas, considerando as pessoas que comem exclusivamente aquela proteína?".

ANA e IBGE lançam inéditas bases de dados hidrográficos do Brasil

Nesta sexta-feira, 24 de setembro [de 2021], a Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA) e o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) lançam a base de dados geográficos das Bacias Hidrográficas do Brasil (BHB250) e a base da Divisão Hidrográfica Nacional (DHN250). Ambas contêm recortes hidrográficos do Brasil compatíveis com a escala 1 : 250 000, que é mais precisa que as escalas utilizadas até então para a divisão de bacias e mais detalhada que a Divisão Hidrográfica Nacional. [...]

Com as duas novas bases de dados, pesquisadores, estudantes e interessados no tema terão à disposição uma referência sobre delimitação de bacias hidrográficas e sobre a Divisão Hidrográfica Nacional para fins estatísticos e geográficos, podendo manipular os dados em sistemas de informações. [...]

BRASIL. Ministério da Integração e do Desenvolvimento Regional. ANA e IBGE lançam inéditas bases de dados hidrográficos do Brasil. Portal *gov.br*, Brasília, DF, 18 nov. 2022. Disponível em: https://tedit.net/w647bx. Acesso em: 2 jul. 2024.

6. Considere os seguintes conjuntos:

A: conjunto dos estados brasileiros atravessados pela Bacia Hidrográfica Amazônica.

N: conjunto dos estados brasileiros da região Norte.

O: conjunto dos estados brasileiros da região Centro-Oeste.

Classifique cada relação a seguir como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) e justifique a resposta.

a) $A = N$ F; Mato Grosso $\in A$, porém Mato Grosso $\notin N$; além disso, Tocantins $\in N$, porém Tocantins $\notin A$.

b) $A \subset N$ F; Mato Grosso $\in A$, porém Mato Grosso $\notin N$.

c) $O \cap A \neq \emptyset$ V; $O \cap A$ = {Mato Grosso}.

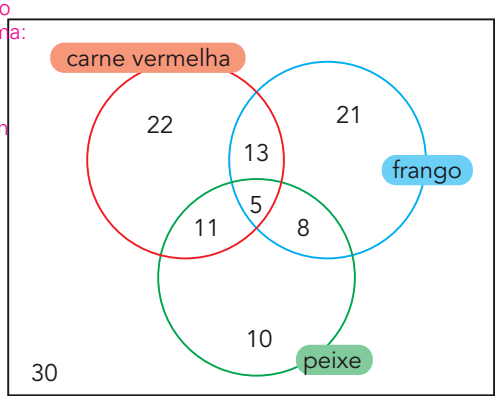
d) $(O \cup N) \supset A$ V; os elementos de A pertencem à região Norte ou Centro-Oeste.

e) {Pará} $= A \cap N$ F; {Pará} $\subset A \cap N$.

7. Dos 36 estudantes de uma turma de Ensino Médio de determinada escola, sabe-se que 16 jogam futebol, 12 jogam vôlei e 5 jogam futebol e vôlei. Quantos estudantes dessa turma não jogam nem futebol, nem vôlei? 13 estudantes.

8. Joana recolheu os dados mostrados a seguir sobre a preferência do consumo de determinadas proteínas no restaurante em que ela trabalha. Ela montou um diagrama de Venn com os dados e representou, em cada região do diagrama, o total de elementos ali contidos. Dos clientes do restaurante em que ela trabalha, 10 comem exclusivamente peixe, enquanto 13 comem carne vermelha ou frango e não comem peixe, por exemplo.

b) Exemplo de problema: "No total, quantas pessoas consomem um único tipo de proteína?".



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Elabore e resolva um problema com os dados do diagrama.

b) Elabore e resolva um problema cuja resposta seja um número maior do que 40.

9. Em uma pequena cidade, há apenas 2 mercados. Um levantamento mostrou que 70% dos moradores compram no mercado **A**, 48% compram no mercado **B** e 4% compram exclusivamente em mercados fora da cidade. Determine o percentual de moradores que compram em exatamente um dos mercados da cidade. 74% dos moradores.

10. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$; $B = \{a, c, d, e\}$; $C = \{c, d\}$ e $D = \{a, d, e\}$, classifique cada uma das sentenças em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

a) $A - B = \{b\}$ V

b) $B - C = \{a, e\}$ V

c) $D - B = \{c\}$ F

d) $A - D = \{d, e\}$ F

e) $\complement_B^{\emptyset} = \{a, c, d, e\}$ V

f) $\complement_B^{D} = \{c\}$ V

g) $(A \cup B) - D = \{a, d, e\}$ F

h) $B - (A \cup C) = \{e\}$ V

i) $\left(\complement_B^{C}\right) \cup \left(\complement_B^{D}\right) = \{a, c, e\}$ V

Não escreva no livro

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Física, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Classificação espectral das estrelas

Os livros em uma biblioteca podem ser organizados de várias maneiras diferentes ou, em outras palavras, em diferentes subconjuntos de livros. Os títulos podem ser dispostos em ordem alfabética; separados por categorias como "literatura clássica", "romance", "infantojuvenil" e "não ficção", entre outras; organizados pela cor da capa; ou dispostos de várias outras maneiras. Ter os livros organizados por tema pode facilitar o momento de realizar uma pesquisa, mas tê-los separados por tamanho pode ser esteticamente mais bonito.

Assim como os livros em uma biblioteca, podemos organizar e agrupar diversos outros elementos.

Para estudar e classificar as estrelas em diferentes subconjuntos, os astrônomos usam uma estratégia chamada **espectro estelar**. Esse espectro é obtido usando um prisma para dividir as diferentes "cores" da radiação que cada estrela emite, em um processo análogo à formação de arco-íris, por gotículas de água na atmosfera terrestre.

A tabela a seguir relaciona o tipo espectral, a cor da superfície da estrela e a medida de temperatura superficial.

Carrossel de imagens

Classificação de Harvard de espectros estelares

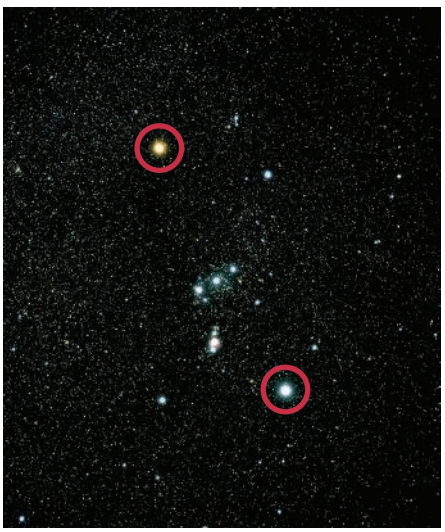
Tipo espectral	O	B	A	F	G	K	M
Cor	azul	azulada	branca	amarelada	amarela	laranja	vermelha
Medida de temperatura superficial (em K)	30 000	20 000	10 000	7 000	6 000	4 000	3 000

Fonte dos dados: GREGORIO-HETEM, Jane; JATENCO-PEREIRA, Vera. Estrelas: classificação espectral. *Observatórios Virtuais. Fundamentos de Astronomia – Notas de Aula*. Disponível em: https://tedit.net/e400fx. Acesso em: 2 jul. 2024.

1. Sabendo que a medida de temperatura superficial aproximada do Sol é 5 778 K, em qual conjunto espectral o Sol é classificado, uma vez que a classificação se dá pelo valor aproximado mais próximo? Tipo espectral **G**.

2. Pesquise quem foi Annie Jump Cannon e a importância do papel das mulheres no desenvolvimento dos trabalhos de classificação estelar da primeira metade do século XX.

Exemplo de resposta: Annie Jump Cannon (1863-1941) foi uma física e astrônoma estadunidense que desenvolveu o sistema de classificação espectral de Harvard. Embora tenham sido pioneiras na área, ela e o grupo de mulheres com o qual ela desenvolvia esse trabalho recebiam muitas críticas por atuar academicamente numa época em que as mulheres ainda viviam sob o estigma de dever apenas cuidar do lar, dos filhos e do marido e recebiam um salário irrisório comparado ao salário dos pesquisadores homens.



Akira Fujii/ESA/Hubble Images and Videos

Imagem terrestre da constelação de Órion, onde se localiza o cinturão conhecido como Três Marias. A estrela em destaque na parte superior esquerda, a Betelgeuse, tem a cor mais avermelhada e é do tipo espectral **M**, enquanto a estrela na parte inferior direita, a Rígel, tem a cor mais azulada e é do tipo espectral **B**.

2. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

Não escreva no livro

PROJETO

Feira de profissões

Esta seção favorece o desenvolvimento da competência geral **10** da BNCC e do TCT *Trabalho*. Também favorece a interdisciplinaridade com as demais áreas do conhecimento do Ensino Médio, ao propor aos estudantes o estudo sobre diferentes profissões relacionadas a essas áreas. Desse modo, a seção pode ser trabalhada em conjunto com os demais professores.

Reprodução/ ONU

É comum ouvirmos que uma pessoa é "mais de humanas", "mais de exatas" ou "mais de biológicas" quando se trata da área do conhecimento com a qual ela tem maior afinidade. E você, tem uma área com a qual se identifica mais?

Existem diversas profissões, e os conhecimentos necessários para exercê-las geralmente pertencem a uma dessas três áreas do conhecimento ou situam-se na intersecção delas. Por exemplo, um fisioterapeuta tipicamente trabalha com conhecimentos da área de biológicas, enquanto um economista trabalha com conhecimentos tanto da área de humanas quanto da área de exatas.

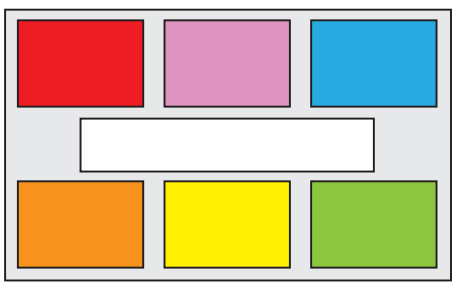
Friends Stock/Adobe Stock

O sucesso profissional e a realização pessoal são fatores relevantes no processo de escolha de uma carreira.

Apesar de as aprendizagens essenciais definidas na BNCC do Ensino Médio serem organizadas em 4 áreas do conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas), em contextos voltados para a escolha de profissões, é comum a generalização do conhecimento em 3 grandes áreas: Ciências exatas, Ciências humanas e Ciências biológicas.

Pensando em um projeto

Muitas vezes, temos afinidade com uma ou mais áreas do conhecimento, mas não conhecemos todas as possibilidades que elas oferecem. Que tal conhecer um pouco mais das profissões associadas a cada uma dessas áreas? Para isso, planeje uma feira de profissões na sua escola. Organize a distribuição dos estandes de cada profissão em setores de acordo com a área do conhecimento a que pertencem. Considere o esquema a seguir.



- Ciências exatas
- Ciências exatas e Ciências humanas
- Ciências humanas
- Ciências exatas, Ciências biológicas e Ciências humanas
- Ciências exatas e Ciências biológicas
- Ciências biológicas
- Ciências humanas e Ciências biológicas
- Espaço escolar

Banco de imagens/Arquivo da editora

Professor, a realização de uma feira de profissões na escola contribui para o ODS **8**, promovendo o crescimento econômico inclusivo e sustentável, ao preparar os estudantes para o mercado de trabalho e incentivar o emprego digno para todos.

Não escreva no livro

Para começar

- Organizem-se em 7 grupos.

Plano de ação

Etapa 1

Em grupo, pesquisem diversas profissões e campos de atuação profissional e as classifiquem por área do conhecimento à qual pertencem: Ciências exatas, Ciências humanas ou Ciências biológicas ou na intersecção de 2 ou mais áreas. Para visualizar melhor a relação entre essas áreas, se necessário, utilizem um diagrama de Venn.

Etapa 2

Na sala de aula, os grupos devem chegar a um consenso sobre a qual(is) área(s) cada profissão pertence.

Etapa 3

Para o planejamento da feira, junto com o professor, definam um espaço na escola para a realização da feira e planejem a distribuição dos estandes em setores de acordo com a área do conhecimento, conforme indicado no esquema anterior. Cada grupo deve definir um setor pelo qual ficará responsável.

Etapa 4

Cada grupo deve realizar uma pesquisa com familiares, conhecidos ou ex-estudantes da escola que atuem nas profissões destacadas na pesquisa realizada na etapa **1** e que estejam classificados em seu setor, verificando quais dessas pessoas estariam dispostas a participar da feira de profissões na escola. Durante a feira, os profissionais convidados deverão permanecer no estande para conversar com os visitantes sobre a profissão deles e esclarecer as atividades exercidas na rotina de trabalho, bem como os conteúdos escolares empregados para realizá-las.

Etapa 5

A turma e o professor devem definir a data e o horário do evento considerando a disponibilidade de todos e dos espaços envolvidos.

Etapa 6

Coletivamente, criem um folheto para divulgar a feira. Cada grupo deve indicar as informações básicas sobre o setor pelo qual é responsável, incluindo a(s) área(s) do conhecimento que está tratando, as profissões e os profissionais que serão apresentados e quaisquer outras informações que julgar necessárias.

Um folheto desse tipo pode assemelhar-se a um infográfico. Para criá-lo, consultem como fazer um infográfico na seção *Produções em foco*. Nesta etapa, produzam também os materiais que serão expostos na feira, como cartazes, painéis, maquetes, *slides* e vídeos.

Etapa 7

Usando o folheto, façam a divulgação da feira para outras turmas da escola e, se possível, convidem também familiares, amigos e outros membros da comunidade.

Etapa 8

Produto final: realização da feira de profissões na escola para a comunidade escolar e/ou da região.

- Os grupos devem preparar os estandes com os materiais produzidos e recepcionar os profissionais convidados.
- Os profissionais devem apresentar a profissão deles aos visitantes, com o apoio do grupo responsável pelo setor, responder a perguntas e esclarecer dúvidas.
- Os estudantes responsáveis pelos demais setores podem visitar os outros estandes e obter informações sobre as diversas áreas de atuação apresentadas.

capítulo

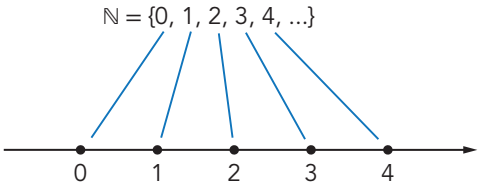
2 Conjuntos numéricos

O conjunto dos números naturais: $\mathbb{N}$

Denominamos **conjuntos numéricos** os conjuntos cujos elementos são números. A criação do conjunto dos números naturais, por exemplo, se deu pela necessidade do ser humano de contar.

O **conjunto dos números naturais** é representado por $\mathbb{N}$ e pode ser escrito como $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$, em que n representa o elemento genérico do conjunto. Ele tem infinitos elementos, e, por isso, é impossível representá-los visualmente, um a um, daí o uso das reticências.

Podemos localizar geometricamente os elementos de $\mathbb{N}$ também na reta numérica, indicando pontos igualmente espaçados para representar números consecutivos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A seguir, vamos conhecer alguns subconjuntos do conjunto dos números naturais.

- Conjunto dos números naturais não nulos:
  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ ou $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.
- Conjunto dos números naturais pares:
  $\mathbb{N}_p = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$, com $n \in \mathbb{N}$.
- Conjunto dos números naturais ímpares:
  $\mathbb{N}_i = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 2n + 1, \ldots\}$, com $n \in \mathbb{N}$.
- Conjunto dos números naturais primos:
  $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$.
- Conjunto dos números naturais maiores do que 30:
  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 30\}$ ou $A = \{31, 32, 33, \ldots\}$.

Não escreva no livro

Pense nisto

Por que $2n$ representa um número natural par qualquer e $(2n + 1)$ representa um número natural ímpar qualquer, sendo $n \in \mathbb{N}$?

Observação

Um conjunto pode ser apresentado escrevendo seus elementos entre chaves e separados por vírgula. Outra maneira de apresentar os elementos do conjunto é pela propriedade característica que os define. Por exemplo, o conjunto dos números naturais maiores do que 30 pode ser representado por {31, 32, 33, ...} ou pela propriedade característica que define os elementos do conjunto como sendo $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 30\}$.

Dica

Filme *O homem que viu o infinito* (2015, direção de Matt Brown)

Filme inspirado na biografia do matemático indiano Srinivāsa Rāmānujan (1887-1920). Mostra um pouco das conquistas e dificuldades de Rāmānujan na Universidade de Cambridge, nos Estados Unidos, a genialidade do trabalho dele e a importância da formalidade matemática no momento da descoberta de leis e fórmulas, expondo o impacto disso na análise de uma possível fórmula que descreve o conjunto dos números primos.

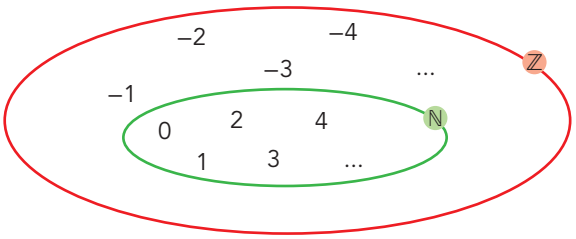
Pense nisto: Um número p é par se, na divisão por 2, o resto é igual a 0. Um número q é ímpar se, na divisão por 2, o resto é igual a 1. Assim, para $n \in \mathbb{N}$, ao dividir qualquer número natural escrito como $2n$ por 2, o resto da divisão será sempre 0 e, ao dividir qualquer número natural escrito como $(2n + 1)$ por 2, o resto da divisão será sempre 1.

O conjunto dos números inteiros: $\mathbb{Z}$

A criação do conjunto dos números inteiros costuma ser associada à época do Renascimento, entre os séculos XIV e XVI, quando a expansão do comércio e da navegação aumentou a circulação de dinheiro, fazendo com que os comerciantes tivessem de lidar com lucros e prejuízos.

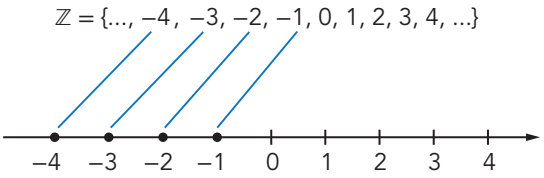
O **conjunto dos números inteiros** é representado por $\mathbb{Z}$ e pode ser escrito como $\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

Todo número natural é também um número inteiro, isto é, $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$ (denotamos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$).



Banco de imagens/Arquivo da editora

A localização geométrica dos elementos de $\mathbb{Z}$ é feita a partir da localização dos elementos de $\mathbb{N}$ na reta numérica, bastando representar os pontos correspondentes aos números inteiros negativos consecutivos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A seguir, vamos conhecer alguns subconjuntos do conjunto dos números inteiros.

- Conjunto dos números inteiros não nulos:
  $\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\}$ ou $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.
- Conjunto dos números inteiros não negativos:
  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.
- Conjunto dos números inteiros (estritamente) positivos:
  $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4...\}$.
- Conjunto dos números inteiros não positivos:
  $\mathbb{Z}_- = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$.
- Conjunto dos números inteiros (estritamente) negativos:
  $\mathbb{Z}_-^* = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$.
- Conjunto dos números inteiros múltiplos de 4:
  $M(4) = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, 12, ...\}$.

Note as seguintes relações: $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$.

Comente com os estudantes que o conjunto dos números inteiros é indicado por $\mathbb{Z}$, pois, com o passar do tempo, optou-se por usar a primeira letra da palavra *zahl*, que em alemão significa "número".

Não escreva no livro

Pense nisto

A sentença "Se x é um número inteiro, então x é um número natural." é verdadeira ou falsa? E a sentença "Se x e um número natural, então x é um número inteiro."? Explique.

A primeira sentença é falsa, pois $-2 \in \mathbb{Z}$, mas $-2 \notin \mathbb{N}$, por exemplo. Assim, nem todo número inteiro é natural. A segunda sentença é verdadeira, pois todo número natural também é um número inteiro ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$).

Pense nisto

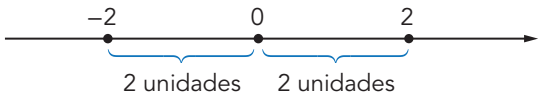
Como você representa, genericamente, um número inteiro múltiplo de 4?

$4m$, em que $m \in \mathbb{Z}$.

Oposto e módulo de um número inteiro

Dois números inteiros são ditos **opostos** (ou **simétricos**) se a soma deles é igual a 0. Geometricamente, eles são localizados na reta numérica por pontos que distam igualmente da origem.

Podemos tomar como exemplo o número 2. O oposto do número 2 é –2, e o oposto de –2 é 2, pois $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

No geral, dizemos que o oposto, ou simétrico, de um número inteiro a é $-a$, e vice-versa.

Pense nisto

Não escreva no livro

Existe algum número inteiro que é igual ao oposto dele? Justifique sua resposta. Sim, o número 0, pois: $x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Dado $x \in \mathbb{Z}$, o **módulo** ou **valor absoluto** de x (indica-se: $|x|$) é definido pelas seguintes relações:

- se $x \geqslant 0$, o módulo de x é igual ao próprio valor de x, isto é, $|x| = x$;
- se $x < 0$, o módulo de x é igual ao oposto de x, isto é, $|x| = -x$.

Pense nisto

O módulo de um número inteiro não nulo é sempre positivo?

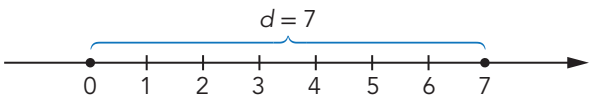
Sim. Pela definição, se um número inteiro é negativo, o módulo dele é igual ao seu oposto, que é positivo.

Acompanhe os exemplos.

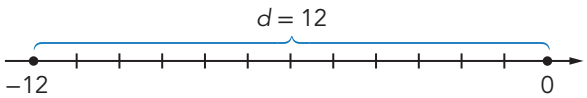
- $|7| = 7$ (positivo)
- $|-12| = -(-12) = 12$ (negativo)
- $|0| = 0$

Geometricamente, em uma reta numérica com alguns números inteiros localizados, sendo x um desses números, o módulo de x é igual à medida de distância d entre x e a origem.

$|7| = 7$



$|-12| = 12$



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

E note também que quaisquer 2 números inteiros opostos têm mesmo módulo.

3. b) Exemplos de resposta: "Quais são os números inteiros cujo módulo é menor do que 4?" ou "Quais são os números inteiros cujo módulo é menor ou igual a 3?".

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. Determine $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$.
$A \cap B = \{5, 6\}$; $A \cup B = \mathbb{N}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant 3\}$.
$A \cap B = B$; $A \cup B = A$.

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 6\}$.
$A \cap B = B$; $A \cup B = A$.

d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leqslant 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leqslant x < 4\}$.
$A \cap B = \{3\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. Calcule.

a) $-5 - 3 \cdot (-2)$
$-5 + 6 = 1$

b) $|-11|$
11

c) $|7 - 4| + |4 - 7|$
$|3| + |-3| = 3 + 3 = 6$

d) $2 + 5 \cdot (-3) - (-4)$
$2 - 15 + 4 = -9$

e) $-11 - 2 \cdot (-3) + 3$
$-11 + 6 + 3 = -2$

f) $-8 + 3 \cdot [2 - (-1)]$
$-8 + 3 \cdot 3 = 1$

g) $|2 + 3 \cdot (-2)| - |3 + 2 \cdot (-3)|$
$|2 - 6| - |3 - 6| = |-4| - |-3| = 4 - 3 = 1$

h) $|5 - 10| - |10 - (-5)| - |-5 - (-5)|$
$|-5| - |15| - |0| = 5 - 15 - 0 = -10$

3. Faça o que é pedido.

a) O valor absoluto de um número inteiro x é igual a 18. Determine os possíveis valores de x. $|x| = 18 \Rightarrow x = -18$ ou $x = 18$

b) Elabore um problema envolvendo o módulo de números inteiros e cuja solução seja -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3.

4. A medida de área territorial do Brasil é de aproximadamente oito milhões, quinhentos e dezesseis mil quilômetros quadrados. Qual seria a medida de área de cada região do Brasil se todas elas tivessem a mesma medida de área? Escreva no caderno a resposta por extenso. Depois, compare o resultado obtido com a medida de área da região em que você vive.
Um milhão, setecentos e três mil e duzentos quilômetros quadrados; resposta pessoal.

5. O saldo de uma conta bancária está devedor em R$ 3.245,00. Qual será o saldo dessa conta após 6 depósitos diários e sucessivos de R$ 385,00? Admita que o banco não cobre juro sobre o saldo devedor durante o período considerado. $-3245 + 6 \cdot 385 = -3245 + 2310 = -935$; logo, $-$R$ 935,00, ou seja, um saldo devedor de R$ 935,00.

6. Sendo $a = |-8|$, $b = -6$ e $c = |5|$, calcule:

a) $a + b$; $8 + (-6) = 2$

b) $b \cdot c$; $-6 \cdot 5 = -30$

c) $c - a$; $5 - 8 = -3$

d) $a \cdot b + c$; $8 \cdot (-6) + 5 = -43$

e) $b - a \cdot c$; $-6 - 8 \cdot 5 = -46$

f) b^2; $(-6)^2 = 36$

g) $|b - c|$; $|-6 - 5| = |-11| = 11$

h) $|a - b|$. $|8 - (-6)| = |14| = 14$

7. Considere um livro que tem todas as páginas numeradas a partir da página 1. Quantos algarismos são utilizados para numerar as primeiras 206 páginas de um livro? 510 algarismos.

8. Classifique cada afirmação seguinte em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) e justifique a resposta.

a) Todo número primo é ímpar.

b) Se 2 números inteiros têm o mesmo módulo, então eles são iguais.

c) O quadrado de um número natural não nulo é sempre maior do que o próprio número.

d) O cubo de um número inteiro não nulo é sempre maior do que o quadrado desse número.

e) Se $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $a > b$, então $a^2 > b^2$.

9. Um fornecedor vende semanalmente 35 caixas de trufas de chocolate ao leite e 25 caixas de trufas de chocolate branco a um supermercado. As trufas são vendidas em caixas com 8 unidades cada uma. O fornecedor pretende substituir as caixas atuais por caixas maiores, todas idênticas.
Considerando que a quantidade de trufas vendidas ao supermercado não se altere, qual é o menor número possível de caixas que o fornecedor poderá usar, de modo que não sobre nenhuma trufa? 12 caixas.

10. Considere o segmento de reta $\overline{AB}$, contido na reta numérica, em que:

- A representa o número $-3\,265$;
- B o número -1741.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) Quantos números inteiros podem ser representados por pontos pertencentes ao segmento de reta $\overline{AB}$? 1 525 números.

b) Qual é o número inteiro pertencente a $\overline{AB}$, representado por um ponto C, distante 268 unidades de B? $-2\,009$

c) Qual é o número inteiro representado pelo ponto médio de $\overline{AB}$? $-2\,503$

8. Exemplos de justificativa de resposta: **a)** Falsa, pois 2 é primo e par. **b)** Falsa, pois 4 e -4 têm o mesmo módulo, mas $-4 \neq 4$, por exemplo. **c)** Falsa, pois $1^2 = 1$. **d)** Falsa, pois $(-2)^3 = -8$; $(-2)^2 = 4$ e $-8 < 4$, por exemplo. **e)** Falsa, pois, tomando $a = 2$ e $b = -5$, por exemplo, $a^2 = 4$, $b^2 = (-5)^2 = 25$ e $25 > 4$.

Observação

Considere que **proposição** é um termo usado na lógica clássica para descrever uma sentença que pode ser verdadeira ou falsa. Sabendo disso, a proposição "Se a e b são números inteiros pares quaisquer, então a soma $a + b$ é um número par." é verdadeira ou falsa?

Um ponto de partida para iniciarmos nossa análise é avaliar alguns casos particulares, como: $8 + 2 = 10$; $(-16) + 48 = 32$; $120 + 122 = 242$; $(-4) + (-8) = -12$; $0 + 6 = 6$; etc.

Contudo, para determinarmos se uma proposição é verdadeira ou falsa, precisamos de mais do que isso.

Do ponto de vista matemático, prevalece o chamado **método dedutivo**, em que uma propriedade matemática só é validada por meio de uma **demonstração**. Uma propriedade (ou um teorema) é uma proposição do tipo "Se p, então q.", em que p é chamado de **hipótese** e q de **tese**. A demonstração é uma sequência (finita) de passos lógicos que permitem, a partir da hipótese (p), concluir que a tese (q) é verdadeira.

Na proposição inicial, a hipótese é "a e b são números inteiros pares quaisquer." e a tese, que queremos demonstrar se é verdadeira, é "A soma $a + b$ é um número par.".

Acompanhe a demonstração dessa propriedade.

Como a é um número inteiro par, podemos escrevê-lo na forma de um múltiplo de 2, ou seja, $a = 2 \cdot k$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

Analogamente, como b também é par, escrevemos $b = 2 \cdot q$, em que $q \in \mathbb{Z}$.

Daí: $a + b = 2 \cdot k + 2 \cdot q = 2 \cdot \underbrace{(k + q)}_{\in \mathbb{Z}}$.

Como k e q são números inteiros, a soma $k + q$ é um número inteiro e, desse modo, $a + b$ é um número par, já que também é múltiplo de 2, como queríamos demonstrar.

Contudo, nem toda proposição matemática é verdadeira. Analise a seguinte: "Se um número a é inteiro e múltiplo de 3, então a é múltiplo de 6.".

Podemos verificar que essa proposição é falsa, pois existem múltiplos de 3 que não são múltiplos de 6, por exemplo, 3, 9, 15, 21, etc. Cada um desses valores corresponde a um **contraexemplo**, que prova que a proposição dada é falsa.

Assim, para verificar se uma proposição é falsa, podemos indicar um contraexemplo. Já para verificar se ela é verdadeira, é necessária uma demonstração.

Pense nisto

Não escreva no livro

A proposição "Se um número inteiro a é múltiplo de 39, então ele também é múltiplo de 13." é verdadeira? Demonstre ou apresente um contraexemplo.

A proposição é verdadeira. Podemos escrever $a = 39n$, com $n \in \mathbb{Z}$; assim, $a = 13 \cdot 3n$ e, portanto, múltiplo de 13.

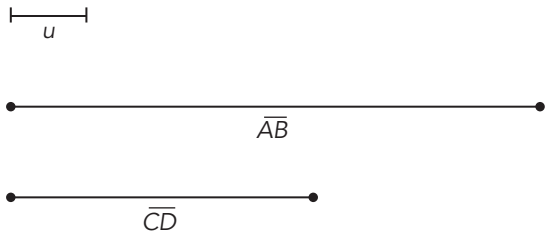
BAIVECTOR/Adobe Stock

O conjunto dos números racionais: $\mathbb{Q}$

O surgimento do conjunto dos números racionais está relacionada ao fato de que, nesse conjunto, a divisão de 2 números inteiros quaisquer (com divisor diferente de 0) não resulta, necessariamente, em um número inteiro, como a divisão $\frac{7}{3}$ ou $-\frac{13}{21}$.

Na civilização grega antiga (2000 a.C.–168 a.C.), esse fato estava relacionado, sobretudo, à comparação de grandezas de mesma espécie (como entre medidas de comprimento, entre medidas de área e entre medidas de volume).

Considere u uma unidade de medida padrão de comprimento e os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

As medidas dos segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são, respectivamente, $7u$ e $4u$, de modo que a razão entre as medidas é igual ao número racional $\frac{7}{4}$.

O **conjunto dos números racionais**, identificado por $\mathbb{Q}$, é inicialmente descrito como o conjunto dos quocientes de 2 números inteiros, em que o divisor é diferente de 0. Por exemplo, são números racionais:

$$0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{5}, \text{etc.}$$

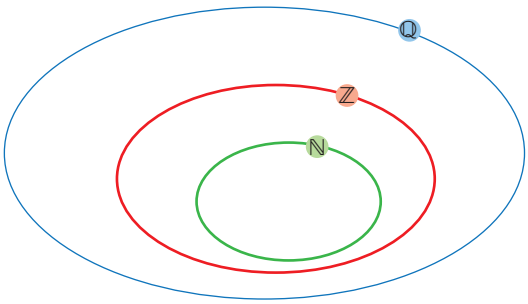
Podemos escrever, de modo mais simplificado:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Dessa maneira, podemos definir o conjunto $\mathbb{Q}$ como o conjunto das frações $\frac{p}{q}$, com q diferente de 0; assim, um número é racional quando pode ser escrito como uma fração $\frac{p}{q}$, com p e q números inteiros e $q \neq 0$.

Quando $q = 1$, temos $\frac{p}{q} = \frac{p}{1} = p \in \mathbb{Z}$, o que mostra que $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$.

Assim, podemos construir o diagrama.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Ressalte aos estudantes que, embora o diagrama seja válido para demonstrar as relações de inclusão dos conjuntos apresentados, não se deve cometer o equívoco de relacionar a representação visual de tamanho dos conjuntos à quantidade de elementos de cada conjunto, já que tanto o conjunto dos números naturais, quanto o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais têm infinitos elementos.

Representação decimal e representação fracionária

Vamos tomar um número racional $\frac{p}{q}$, tal que p não seja múltiplo de q e $q \neq 0$. Para escrevê-lo na forma decimal, basta efetuar a divisão do numerador pelo denominador. Nessa divisão podem ocorrer 2 casos.

1º) O quociente obtido tem, após a vírgula, uma quantidade finita de algarismos, e o resto da divisão é 0. Exemplos:

- $\frac{2}{5} \rightarrow \begin{array}{r|l} 2 & 5 \\ 20 & 0,4 \\ 0 & \end{array} \rightarrow \frac{2}{5} = 0,4$

- $\frac{35}{4} \rightarrow \begin{array}{r|l} 35 & 4 \\ 30 & 8,75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array} \rightarrow \frac{35}{4} = 8,75$

Quando isso ocorre, os decimais obtidos são chamados **decimais exatos**.

Acrescentar uma quantidade finita ou infinita de algarismos iguais a 0, à direita do último algarismo diferente de 0, não altera o quociente obtido. Note, no exemplo, algumas representações possíveis para o número racional $\frac{2}{5}$:

$$\frac{2}{5} = 0,4 = 0,40 = 0,400 = 0,400000\ldots$$

Inversamente, podemos identificar o decimal exato 0,4 com a fração $\frac{4}{10}$, que, simplificada, é reduzida a $\frac{2}{5}$.

Do mesmo modo, $8,75 = \frac{875}{100} = \frac{35}{4}$.

2º) O quociente obtido tem, à direita da vírgula, uma infinidade de algarismos, nem todos iguais a 0, e não é possível obter resto igual a 0 na divisão. Exemplos:

- $\frac{2}{3} \rightarrow \begin{array}{r|l} 2 & 3 \\ 20 & 0,6666\ldots \\ 20 & \\ 20 & \\ 2 & \end{array} \rightarrow \frac{2}{3} = 0,666\ldots = 0,\overline{6}$

- $\frac{167}{66} \rightarrow \begin{array}{r|l} 167 & 66 \\ 350 & 2,53030\ldots \\ 200 & \\ 20 & \\ 200 & \\ 20 & \end{array} \rightarrow \frac{167}{66} = 2,53030\ldots = 2,5\overline{30}$

Nesses casos, ocorre uma repetição de alguns algarismos. Os decimais obtidos são chamados **decimais periódicos** ou **dízimas periódicas**. Em cada um deles, os algarismos que se repetem formam a **parte periódica** ou o **período da dízima**. Para não escrever repetidamente os algarismos de uma dízima, colocamos um traço horizontal sobre o primeiro período dela.

Quando uma fração é igual a uma dízima periódica, é chamada **geratriz** da dízima. Nos exemplos anteriores, $\frac{2}{3}$ é a fração geratriz da dízima periódica $0,\overline{6}$ e $\frac{167}{66}$ é a fração geratriz da dízima periódica $2,5\overline{30}$.

Não escreva no livro

Atividades resolvidas

1. Determine a fração geratriz de $0,\overline{8}$.

Solução:

Seja a dízima periódica $x = 0,888\ldots$ 1

Multiplicamos ambos os membros de 1 por 10:

$$10x = 10 \cdot 0,888\ldots = 8,888\ldots \quad 2$$

Subtraindo membro a membro 1 de 2, temos:

$$10x - x = 8,888\ldots - 0,888\ldots$$

$$9x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{9}$$

A resposta encontra-se na seção *Orientações específicas* deste Manual.

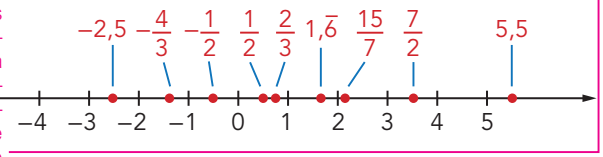
Pense nisto

- Como você faria para determinar a fração geratriz da dízima 2,0454545...?
- As igualdades $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$, $0,\overline{6} = \frac{2}{3}$ e $0,\overline{9} = \frac{3}{3} = 1$ são verdadeiras? Sim.

Localização geométrica do conjunto dos números racionais

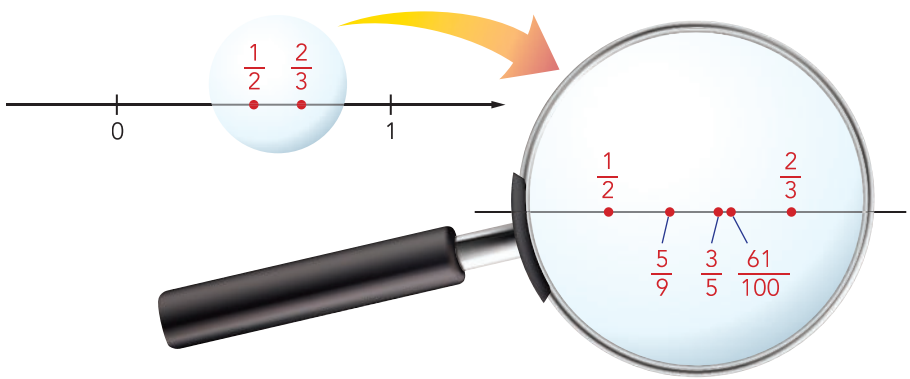
Os elementos de $\mathbb{Q}$ podem ser localizados por pontos na reta numérica. Verifique no exemplo a seguir a representação de alguns números racionais.

Ao mencionar a localização dos números racionais em uma reta numérica, é interessante ressaltar que a precisão com a qual os representamos depende da escala e do instrumento que usamos. Ao representarmos uma reta com espaços de 1 cm entre cada ponto correspondente aos números inteiros, e usando uma régua milimetrada, podemos ter certeza de que estamos representando, por exemplo, um número entre 1,5 e 1,6, mas não conseguimos saber se o número marcado é 1,53 ou 1,55, por exemplo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Diferentemente de quando localizamos números inteiros (ou números naturais) na reta numérica, em que, entre 2 números inteiros consecutivos, não há outro número inteiro, quando localizamos números racionais, temos que entre 2 números racionais quaisquer sempre existem outros infinitos números racionais. Por exemplo, entre os números racionais $\frac{1}{2} = 0,5$ e $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$, temos os números racionais $\frac{5}{9} = 0,\overline{5}$, $\frac{3}{5} = 0,6$ e $\frac{61}{100} = 0,61$, entre outros.

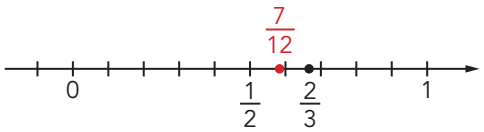


Banco de imagens/Arquivo da editora

Um procedimento comum para identificar um número racional compreendido entre outros 2 números racionais é calcular a **média aritmética** entre eles. No caso, temos:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{3+4}{6}}{2} = \frac{\frac{7}{6}}{2} = \frac{7}{12}$$

As imagens não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

20. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Oposto, módulo e inverso de um número racional

Os conceitos de oposto e módulo, já estudados para os números inteiros, também são válidos para um número racional qualquer.

Assim, por exemplo:

- O oposto de $-\frac{3}{4}$ é $\frac{3}{4}$.
- $\left|-\frac{7}{8}\right| = \left|\frac{7}{8}\right| = \frac{7}{8}$

Dois números racionais são ditos **inversos** um do outro quando o produto deles é igual a 1.

Por exemplo, $\frac{5}{6}$ e $\frac{6}{5}$ são inversos um do outro, 2 é o inverso de $\frac{1}{2}$ e $-\frac{5}{3}$ é o inverso de $-\frac{3}{5}$.

• Sim, pois, ao multiplicar 2 números racionais de sinais diferentes, o resultado é negativo e, portanto, diferente de 1.

• Não, $x = 0 \in \mathbb{Q}$ e não existe inverso de 0.

Pense nisto

- Dois números racionais inversos entre si precisam ter o mesmo sinal?
- Todo número racional admite inverso?

ATIVIDADES

Não escreva no livro

11. Classifique as proposições a seguir como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) e justifique as que forem falsas.

a) $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow (x \in \mathbb{Z}$ ou $x \in \mathbb{N})$ F

b) $-2 \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ V

c) $-\frac{17}{9} \notin \mathbb{Q}$ F

As justificativas de resposta encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

d) Todo número racional é inteiro. F

12. No caderno, represente cada decimal na forma fracionária mais simples.

a) 0,05 $\frac{1}{20}$ **b)** 1,05 $\frac{21}{20}$ **c)** −2,25 $-\frac{9}{4}$

13. No caderno, represente na forma decimal.

a) $\frac{4}{5} + \frac{8}{5}$ 2,4 **b)** $\frac{3}{125}$ 0,024 **c)** $\frac{5}{16} - \frac{16}{5}$ −2,8875

14. Lídia recebeu um bônus de final de ano da empresa em que trabalha. Ela utilizou $\frac{2}{9}$ do bônus para pagar a fatura do cartão de crédito e, da quantia que restou, usou $\frac{11}{14}$ para comprar um presente, ficando então com R$ 90,00. Qual foi o valor do bônus recebido por Lídia?

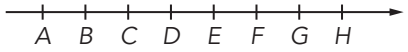
R$ 540,00

15. Usando apenas moedas de 25 e de 50 centavos, determine de quantas maneiras distintas podemos formar R$ 3,00. E R$ 5,00?

7 maneiras; 11 maneiras.

16. A figura mostra parte de uma reta numérica, dividida em 7 partes iguais, em que cada marcação representa um número racional.

Sabendo que os pontos A e H representam, respectivamente, os racionais −14,2 e $-\frac{29}{5}$, determine, nas formas decimal e fracionária, o número racional representado pelo ponto F.



$-8,2 = -\frac{41}{5}$

Banco de imagens/ Arquivo da editora

17. Determine a fração geratriz de cada dízima periódica.

a) $0,\overline{4}$ $\frac{4}{9}$

b) $1,12\overline{3}$ $\frac{337}{300}$

c) $0,0\overline{23}$ $\frac{23}{990}$

18. Existe um número racional cujo inverso é igual ao oposto?

$x \in \mathbb{Q}$; $\frac{1}{x} = -x \Rightarrow x^2 = -1$, ou seja, não existe $x \in \mathbb{Q}$.

19. No caderno, transforme as dízimas periódicas em frações, efetue as operações e escreva os resultados como fração irredutível, ou seja, que não pode ser simplificada.

a) $0,2 \cdot 1,\overline{3} + 0,8$ $\frac{16}{15}$

b) $2,\overline{8} : 1,\overline{6}$ $\frac{26}{15}$

c) $[0,6 : (-0,25) + 2]^2$ $\frac{4}{25}$

20. Construa uma reta numérica no caderno e represente nela os seguintes números racionais: −1; −1,76; $-\frac{5}{4}$; $-\frac{9}{5}$; $-1,2\overline{3}$; $-\frac{3}{2}$; $-\frac{7}{5}$ e −2.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

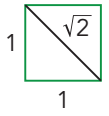
O conjunto dos números irracionais: I

História da Matemática

Segmentos de reta incomensuráveis e os números irracionais

Durante muito tempo, os gregos antigos (2000 a.C.-168 a.C.) acreditaram que os números racionais seriam suficientes para comparar as medidas de quaisquer 2 segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, pois seria sempre possível encontrar um segmento de reta de medida padrão u tal que $AB = m \cdot u$ e $CD = n \cdot u$, com m e n sendo números naturais, de modo que $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$. Nesse caso, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são ditos **segmentos comensuráveis**.

O desenvolvimento da Matemática grega e, de certo modo, o desenvolvimento da Matemática em geral entrou em conflito quando a escola pitagórica (cerca de 450 a.C.-400 a.C.) descobriu que existem **segmentos de reta não comensuráveis** (ou **incomensuráveis**), usando provavelmente como exemplo um quadrado de lado com medida 1, cuja diagonal mede $\sqrt{2}$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

O fato de $\sqrt{2}$ não poder ser escrito como a divisão de 2 números naturais pôs fim à convicção grega de que todos os fenômenos naturais, em áreas como Física, Astronomia e Música, assim como na Geometria, poderiam ser explicados unicamente por números naturais.

Os trabalhos de Eudoxo, discípulo de Platão (428 a.C.-348 a.C.), contribuíram para a superação desse problema entre os gregos antigos: Eudoxo desenvolveu uma teoria de proporções usando apenas números naturais, que poderia comparar segmentos de reta de qualquer medida (racional ou irracional), superando a questão dos incomensuráveis.

No entanto, apenas com os trabalhos do matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916), muitos séculos depois, a questão dos números irracionais foi completamente resolvida.

Fontes de pesquisa: ÁVILA, Geraldo. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. *RPM,* Rio de Janeiro, n. 5. Disponível em: https://tedit.net/fhgxnb. BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2010. CANTÃO, Renato. *Eudoxo de Cnidos. IMECC – Unicamp*, Campinas. Disponível em: https://tedit.net/zmhnou. Acesso em: 4 jul. 2024.

Assim como existem decimais que podem ser escritos como frações com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de 0 – os números racionais, do tópico anterior –, há decimais que não admitem tal representação. Trata-se dos números que têm representação decimal infinita não periódica.

Podemos tomar como exemplo a diagonal de um quadrado cujo lado mede 1 unidade de comprimento. A medida dessa diagonal é $\sqrt{2}$ unidades de comprimento. Não existe número racional cujo quadrado resulte em 2.

É comum aproximar números irracionais por números racionais de modo a operar com decimais finitos e facilitar os cálculos. Por exemplo, o número irracional π pode ser aproximado por números racionais 3,1; 3,14; $\frac{22}{7}$; 3; etc. Representaremos a aproximação pelo símbolo $\simeq$. Assim, por exemplo, escrevemos $\pi \simeq 3{,}14$ (lê-se "pi é aproximadamente igual a 3,14").

Para o número irracional $\sqrt{2}$, são usuais as seguintes aproximações racionais:

- 1,4 é uma aproximação, por falta, de $\sqrt{2}$, pois $(1{,}4)^2 = 1{,}96 < 2$;
- 1,41 é uma aproximação, por falta, de $\sqrt{2}$, pois $(1{,}41)^2 = 1{,}9881 < 2$;
- 1,42 é uma aproximação, por excesso, de $\sqrt{2}$, pois $(1{,}42)^2 = 2{,}0164 > 2$.

Note que $(1{,}41)^2 < 2 < (1{,}42)^2$; desse modo, podemos concluir que $\sqrt{2}$ é um número entre 1,41 e 1,42. Como 1,42 – 1,41 = 0,01, dizemos que, ao usarmos o valor 1,41 (ou 1,42) para $\sqrt{2}$, estamos admitindo um erro inferior a 0,01.

Geralmente, as aproximações de números irracionais por racionais são feitas para facilitar os cálculos na resolução de problemas.

A representação decimal de $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$, ou de qualquer outro número irracional, não garante, por si só, que $\sqrt{2}$ seja irracional. É possível demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Acompanhe essa demonstração como curiosidade.

Vídeo

Não escreva no livro

Pense nisto

Com o auxílio de uma calculadora, e sem utilizar a tecla de raiz quadrada, obtenha aproximações racionais para $\sqrt{2}$, por falta e por excesso, com erro inferior a 0,001.

Pense nisto: Considerando os cálculos anteriores, devemos "testar" valores entre 1,41 e 1,42. Fazendo tentativas com a calculadora, notamos que $(1{,}411)^2$, $(1{,}412)^2$, $(1{,}413)^2$ e $(1{,}414)^2$ são menores do que 2, mas $(1{,}415)^2$ é maior do que 2. Assim, $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ e temos: 1,414 é aproximação por falta e 1,415 é aproximação por excesso, com erro inferior a 0,001.

Demonstração

Usaremos uma técnica de demonstração conhecida como redução ao absurdo. Ela consiste em formular uma premissa supostamente verdadeira e, a partir dela, por meio de encadeamento lógico, chegar a uma proposição contrária a essa premissa. Dessa contradição, deduz-se que a hipótese formulada é falsa.

Vamos considerar, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja um número racional, ou seja, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Nessas condições, teríamos que $\sqrt{2}$ poderia ser escrita como a razão de 2 números inteiros, ou seja, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ **1**, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.

Vamos supor, ainda, que $\frac{p}{q}$ seja uma fração irredutível, isto é, mdc$(p, q) = 1$.

Elevando ao quadrado os 2 membros de **1**, temos:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad \textbf{2}$$

Como q foi definido como um número inteiro diferente de 0, temos que $2q^2$ é necessariamente um número par, por ser múltiplo de 2, logo p^2 é par. Sabemos ainda que, se p^2 é par, p também é par; e, quando um número é par, podemos escrevê-lo na forma de um múltiplo de 2. Vamos escrever p da seguinte maneira:

$$p = 2k, k \in \mathbb{Z} \quad \textbf{3},$$

com k sendo um número inteiro qualquer. Substituindo **3** em **2**:

$$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2 \text{ é par}$$

Professor, observe que, se $p \in \mathbb{Z}$ e p^2 é par, então $p^2 - 1$ é ímpar, isto é, $(p + 1) \cdot (p - 1)$ é ímpar. Desse modo, $p - 1$ e $p + 1$ são ímpares, e, portanto, p é par.

Logo, concluímos que q também é par.

Então, se p e q são pares, ambos são múltiplos de 2, fazendo com que a fração $\frac{p}{q}$ não seja irredutível, o que contraria a hipótese inicial. A contradição veio do fato de termos admitido que $\sqrt{2}$ é um número racional. Assim, $\sqrt{2}$ não pode ser racional.

Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

Não escreva no livro

Pense nisto

A soma (assim como o produto) de 2 números irracionais pode ser um número racional ou irracional. Dê exemplos para validar essa afirmação.

Exemplos de resposta: soma: $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ é irracional; $(1 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 4$ é racional.
Produto: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$ é irracional; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$ é racional.

Conheça outros exemplos de números irracionais:

$\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$; $\sqrt{10} = 3{,}1622776\ldots$; $\sqrt[3]{2} = 1{,}25992104\ldots$; $\pi = 3{,}141592\ldots$; $2\sqrt{5} = 4{,}47213595\ldots$; $\sqrt{4{,}5} = 2{,}1213203\ldots$; $\sqrt{13} = 3{,}605551275\ldots$; $\sqrt{50} = 7{,}071067811\ldots$; $\sqrt[4]{10} = 1{,}77827941\ldots$

Um número cuja representação decimal infinita não é periódica é chamado **número irracional**, e o conjunto desses números é representado por $\mathbb{I}$.

O conjunto dos números reais: $\mathbb{R}$

O conjunto formado pela reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais é chamado **conjunto dos números reais** e é representado por $\mathbb{R}$.

Assim, se um número real é racional, não é irracional, e vice-versa.

Temos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

Note: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, sendo $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$ e $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Além desses subconjuntos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$), vamos conhecer outros subconjuntos do conjunto dos números reais.

- Conjunto dos números reais não nulos:
  $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Conjunto dos números reais não negativos:
  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.
- Conjunto dos números reais positivos:
  $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
- Conjunto dos números reais não positivos:
  $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$.
- Conjunto dos números reais negativos:
  $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

Cada um desses 5 conjuntos contém infinitos números racionais e números irracionais.

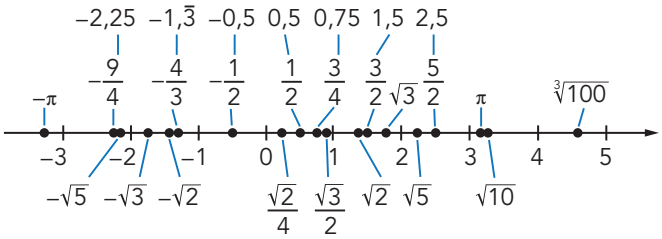
Observação

Os conjuntos numéricos aqui apresentados são amplamente utilizados na Matemática. Ao resolver uma equação, devemos estar atentos ao **conjunto universo** ($\mathbb{U}$) dela, pois ele define os possíveis valores que a incógnita pode assumir. Por exemplo, a equação $2x - 1 = 0$ não apresenta solução se $\mathbb{U} = \mathbb{Z}$; no entanto, se $\mathbb{U} = \mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{U} = \mathbb{R}$), ela apresenta $x = \frac{1}{2}$ como solução.

Localização geométrica do conjunto dos números reais

Vamos retomar a reta numérica, com alguns números racionais (inteiros ou não) já representados, localizando nela alguns números irracionais: para isso é importante ter em mente que, para marcar um ponto correspondente a um número irracional, devem ser utilizadas aproximações racionais dele. Por exemplo, uma aproximação racional de $\sqrt{10}$ é 3,16.

A reta numérica a seguir mostra a localização aproximada de alguns pontos que representam números reais.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Os conceitos de números opostos, números inversos e módulo de um número foram apresentados nos conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Todos se aplicam – do mesmo modo – aos números reais, de maneira geral.

Por exemplo:

- O oposto de $\sqrt{5}$ é $-\sqrt{5}$, pois $\sqrt{5} + \left(-\sqrt{5}\right) = 0$.
- $|-\pi| = |\pi| = \pi$
- O inverso de $\sqrt{2}$ é $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pois $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

O conjunto dos números complexos: $\mathbb{C}$

Quando resolvemos a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$ com a fórmula resolutiva usual, encontramos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Para determinar o valor de x, é preciso calcular a raiz quadrada de -16, o que é impossível em $\mathbb{R}$, pois não existe um número real m tal que $m^2 = -16$. Daí a necessidade de um novo conjunto numérico para obter a solução desse tipo de problema, o **conjunto dos números complexos**, indicado por $\mathbb{C}$.

História da Matemática

Números complexos

Os números complexos foram um grande desafio imposto aos matemáticos. Historicamente, a partir do século XVI, com o movimento renascentista e o desenvolvimento de um método para resolver equações de 3º grau, começou a ganhar força a ideia de que seria possível definir um conjunto ao qual as raízes quadradas de números reais negativos poderiam pertencer. No entanto, os números complexos passaram a ser aceitos e usados amplamente na Matemática apenas depois de quase 3 séculos, com a interpretação geométrica proposta por Carl Friedrich Gauss (1777–1855), e por Jean-Robert Argand (1768–1822) e com a definição de William Rowan Hamilton (1805–1865), que considerou o número complexo um par ordenado de números reais munido de 2 operações.

No século XVIII, o matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707–1783) introduziu a notação i para representar a raiz quadrada de -1, de modo que $i = \sqrt{-1}$ ou $i^2 = -1$, em que i é conhecido como a unidade imaginária dos números complexos.

History and Art Collection/Alamy/Fotoarena

William Rowan Hamilton (1805–1865) foi um matemático, físico e astrônomo irlandês.

Definimos algebricamente o conjunto dos números complexos por:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi, \text{ com } a \text{ e } b \text{ reais e } i = \sqrt{-1}\}$$

Nessa definição, note que, se $b = 0$, então o número complexo se reduz à forma $z = a \in \mathbb{R}$, o que mostra que $\mathbb{R}$ é subconjunto de $\mathbb{C}$.

Dica

Artigo *História dos números complexos*, de Cristina Cerri e Martha S. Monteiro

Para saber um pouco mais da história dos números complexos, além de conhecer e aprofundar alguns conceitos ligados a eles, consulte o artigo disponível em: https://tedit.net/4ic5q9 (acesso em: 4 jul. 2024).

ATIVIDADES

Não escreva no livro

21. Represente uma reta numérica no caderno e indique nela os seguintes números reais:

$$\sqrt{20},\ 4,\ \frac{9}{2},\ \frac{23}{5},\ \frac{\pi^2}{2},\ 5,\ \frac{17}{4}$$

Depois, responda: Quais desses números são irracionais?

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

22. Classifique cada número real a seguir em racional ou irracional.

a) $\sqrt{50}$ Irracional.

b) $\sqrt{7^2}$ Racional.

c) $1 + 2\pi$ Irracional.

d) $(\sqrt{3} + 1)^2$ Irracional.

e) $\sqrt{\frac{20}{80}}$ Racional.

f) $0{,}25 : 0{,}\overline{25}$ Racional.

g) $(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)$ Racional.

h) $(0{,}\overline{3})^2$ Racional.

i) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ Irracional.

j) $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ Irracional.

k) $\sqrt{2 + 7}$ Racional.

23. Seja $x \in \mathbb{R}^*$, classifique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada uma das afirmações a seguir e justifique as falsas. Os exemplos de justificativas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) O oposto de x é sempre negativo. F

b) x^2 é sempre maior do que x. F

c) O dobro de x é sempre menor do que o triplo de x. F

d) O inverso de x pode ser maior do que x. V

e) $x + 2$ pode ser menor do que x. F

24. Classifique cada conjunto a seguir em vazio ou unitário e justifique a resposta.

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^3 = -8\}$ Vazio.

b) $\{x \in \mathbb{R}_- \mid x^4 = 16\}$ Unitário.

c) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid -\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\right\}$ Unitário.

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$ Vazio.

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| = -4\}$ Vazio.

f) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^5 = 0\}$ Unitário.

g) $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{x} = 2\right\}$ Unitário.

h) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 = \frac{1}{8}\right\}$ Vazio.

Os exemplos de justificativas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

25. Sendo $x = \frac{1}{0{,}05}$ e $y = \frac{1}{0{,}1}$, classifique cada número real a seguir em racional ou irracional.

$$A = \sqrt{\frac{x}{y}},\ B = \sqrt{x - \frac{x}{y}},\ C = A \cdot B,\ D = \frac{B}{A},\ E = A + B.$$

A: irracional; B: irracional; C: racional; D: racional; E: irracional.

26. Usando uma calculadora, sem utilizar a tecla de raiz quadrada, obtenha aproximações racionais por falta e por excesso (ao menos 2 de cada) do número irracional $\sqrt{3}$ com erro inferior a:

a) 0,01; 1,73 e 1,74.

b) 0,001. 1,732 e 1,733.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

27. Coloque os números reais a, b, c e d em ordem crescente, tal que:

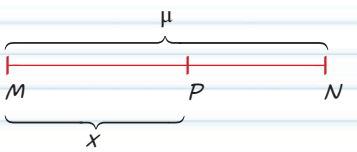
a é o inverso de $-\frac{3}{5}$; b é o oposto de $\frac{4}{3}$; c é o dobro de $-\frac{\sqrt{2}}{3}$; e $d = -|-1|$. $a < b < d < c$

28. Os números 9,48 e 9,49 são aproximações racionais, respectivamente por falta e por excesso, da raiz quadrada de qual número natural? $9{,}48^2 = 89{,}8704$ e $9{,}49^2 = 90{,}0601$. Assim, $9{,}48^2 < 90 < 9{,}49^2$, do que se conclui: $9{,}48 < \sqrt{90} < 9{,}49$. O número natural em questão é 90.

História da Matemática

O número de ouro

Para obter o valor de ϕ, dividimos um segmento de reta $\overline{MN}$ de medida de comprimento μ (lê-se "mi") em 2 partes, de modo que a razão entre as medidas do maior e do menor segmentos de reta obtidos é igual à razão entre as medidas do segmento todo e do maior segmento de reta obtido. Dizemos que o segmento de reta $\overline{MN}$ foi dividido em **média e extrema razão**.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Isso quer dizer que:

$$\frac{MP}{PN} = \frac{MN}{MP} = \phi$$

Para encontrar o valor de ϕ, podemos chamar $MP = x$ e estabelecer a proporção:

$$\frac{x}{\mu - x} = \frac{\mu}{x} \Rightarrow x^2 + x\mu - \mu^2 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau na incógnita x, temos:

$$x = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4(-\mu^2)}}{2} \xRightarrow{x > 0}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\mu(-1 + \sqrt{5})}{2} \Rightarrow \frac{x}{\mu} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi \simeq 1{,}618$$

O **número de ouro** também é conhecido como **número áureo** e está associado aos conceitos de **razão áurea**, **seção áurea** ou **proporção áurea**.

ϕ

Um número irracional bem conhecido pelas inúmeras aplicações e curiosidades dele é o número áureo, na maioria das vezes representado pela letra grega ϕ (lê-se "fi").

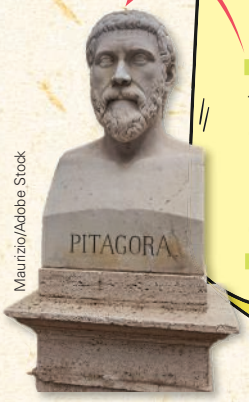
$$\phi = 1{,}61803\ldots$$

Ilustrações: Davi Augusto/Arquivo da editora
Imagem de fundo: Ton Photographer 4289/Shutterstock

Na escola pitagórica grega, era bastante difundida a ideia de dividir um segmento de reta em média e extrema razão e, de tão familiar, os gregos se referiam a ela simplesmente como "seção". O termo "seção áurea" só foi usado dois séculos depois.

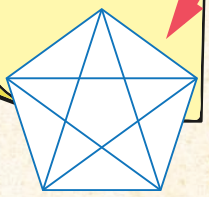
Escola pitagórica

Pitágoras (570 a.C.-497 a.C.) foi o filósofo e matemático grego que fundou a escola pitagórica de pensamento. O símbolo dessa escola era o pentagrama (pentágono entrelaçado).



Maurizio/Adobe Stock

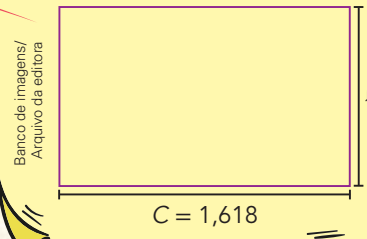
Busto de mármore de Pitágoras. Jardins do Pincio, Roma, Itália. Foto de 2021.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

A razão entre as medidas C e ℓ dos lados do retângulo a seguir é próxima da razão áurea:

$$\frac{C}{\ell} \simeq 1{,}618$$



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Um retângulo áureo é aquele em que a razão entre as medidas do maior e do menor lado dele é $\phi = 1{,}61803\ldots$.

Os gregos usavam essa razão como critério estético. Até hoje é considerada por muitos *designers* e arquitetos, entre outros, a razão numérica mais harmoniosa.

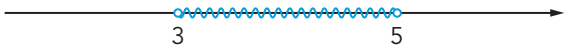
Fonte dos dados: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

Intervalos reais

O conjunto dos números reais também tem subconjuntos denominados **intervalos**, que são determinados por desigualdades. Consideremos os números reais a e b, com $a < b$.

- O intervalo aberto de extremos a e b é o conjunto $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

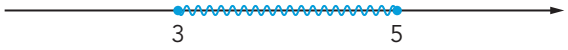
  Exemplo: $]3, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$.



Note as "bolinhas vazias". Elas excluem os valores 3 e 5.

- O intervalo fechado de extremos a e b é o conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

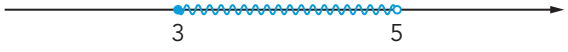
  Exemplo: $[3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$.



Note as "bolinhas cheias". Elas incluem os valores 3 e 5.

- O intervalo aberto à direita e fechado à esquerda de extremos a e b é o conjunto $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$.

  Exemplo: $[3, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x < 5\}$.



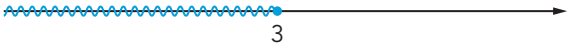
- O intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos a e b é o conjunto $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$.

  Exemplo: $]3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 5\}$.

Existem ainda os intervalos a seguir.

- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$

  Exemplo: $]-\infty, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$.

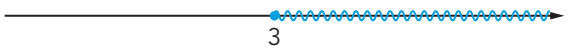


- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

  Exemplo: $]-\infty, 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

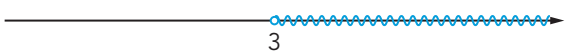
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$

  Exemplo: $[3, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.



- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

  Exemplo: $]3, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.



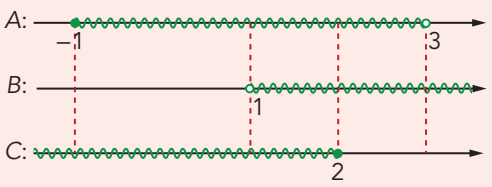
Observação

O símbolo matemático ∞ é utilizado para representar o infinito. Note que, por representar uma ideia matemática, e não um número, um intervalo será sempre representado como aberto em $+\infty$ e $-\infty$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

2. Dados os intervalos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ e $C =]-\infty, 2]$, podemos representá-los como mostrado a seguir.

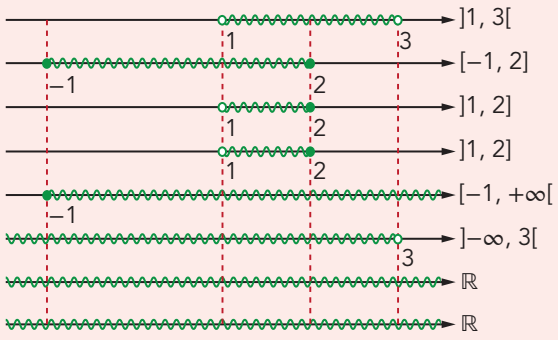


Determine:

a) $A \cap B$;
b) $A \cap C$;
c) $B \cap C$;
d) $A \cap B \cap C$;
e) $A \cup B$;
f) $A \cup C$;
g) $B \cup C$;
h) $A \cup B \cup C$.

Solução:

a) $A \cap B$: $]1, 3[$
b) $A \cap C$: $[-1, 2]$
c) $B \cap C$: $]1, 2]$
d) $A \cap B \cap C$: $]1, 2]$
e) $A \cup B$: $[-1, +\infty[$
f) $A \cup C$: $]-\infty, 3[$
g) $B \cup C$: $\mathbb{R}$
h) $A \cup B \cup C$: $\mathbb{R}$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

ATIVIDADES

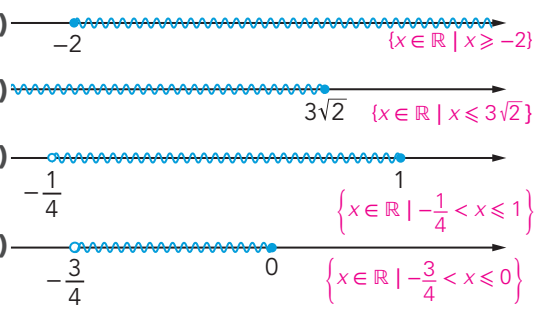
Não escreva no livro

29. No caderno, represente graficamente cada um dos intervalos indicados a seguir.

a) $]-3, 5]$
b) $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$
c) $]0, 2[$
d) $\left[\frac{7}{5}, +\infty\right[$
e) $[-1, 1[$
f) $]\sqrt{2}, 5[$

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

30. No caderno, descreva, por meio de uma propriedade característica, cada um dos conjuntos representados a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

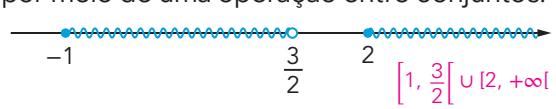
31. Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$ e $B = \left]-3, \frac{4}{3}\right]$, determine:

a) $A \cup B$;
b) $A \cap B$;
c) $A - B$;
d) $B - A$.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

32. Com relação à atividade anterior, determine a quantidade de números inteiros pertencentes ao conjunto $A \cap B$. 3 números inteiros.

33. No caderno, represente os intervalos a seguir por meio de uma operação entre conjuntos.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

34. Sendo $A = [-3, 1]$, $B = \left]\frac{1}{10}, \frac{3}{2}\right]$ e $C = [-1, +\infty[$, represente no caderno cada conjunto a seguir por meio de uma propriedade característica.

a) $A \cap B$ $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10} < x \leqslant 1\right\}$
b) $B \cap C$ $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10} < x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$
c) $A - B$ $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant \frac{1}{10}\right\}$
d) $C - A$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
e) $A \cup B \cup C$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$
f) $A - (B \cup C)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -1\}$
g) $A \cap B \cap C$ $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10} < x \leqslant 1\right\}$
h) $B - C$ $\varnothing$

Razão e proporção

Comente com os estudantes que serão lembrados alguns conceitos fundamentais estudados em anos anteriores.

Dados dois números reais a e b, com $b \neq 0$, chamamos de **razão de a para b** o quociente $\frac{a}{b}$, que também pode ser indicado como $a : b$.

O número a é chamado **antecedente**, e o número b é chamado **consequente**.

Comente com os estudantes que o formato cônico dos morros que formam o complexo do Pão de açúcar lembra os recipientes em que eram colocados blocos de açúcar para exportação durante o ciclo da cana-de-açúcar (entre os séculos XVI e XVIII), daí o nome do morro e do complexo.

Atividades resolvidas

3. Em um grupo de 60 turistas que visitaram o Pão de Açúcar, no Rio de Janeiro, havia 36 brasileiros e 24 estrangeiros. Qual é a razão entre:

a) o número de brasileiros e o número de estrangeiros?

b) o número de brasileiros e o total de turistas?

Solução:

a) A razão é $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$, significando que, para cada 3 brasileiros, há 2 estrangeiros.

b) A razão é $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$, significando que, de cada 5 turistas no grupo, 3 são brasileiros.

Giampaolo/Adobe Stock

O Pão de Açúcar é um complexo formado por 2 morros, o do Pão de Açúcar e o da Urca, e localizado no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2023.

4. Em um concurso público, candidataram-se 24 500 pessoas para concorrer às 20 vagas disponíveis. Qual é o número de candidatos por vaga?

Solução:

A razão $\frac{24\,500}{20} = \frac{1225}{1} = 1225$ representa o número de candidatos por vaga; ou seja, cada vaga é disputada por 1225 candidatos.

Dadas 2 razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, chamamos de **proporção** a igualdade entre elas: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lê-se "a está para b assim como c está para d").

Em uma proporção, os números a e d são chamados **extremos**, e os números b e c são chamados **meios**.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, vale a propriedade:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Para demonstrá-la, basta multiplicar os 2 membros da igualdade por $b \cdot d \neq 0$:

$$b \cdot d \cdot \frac{a}{b} = b \cdot d \cdot \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Dizemos que o produto dos extremos (a e d) é igual ao produto dos meios (b e c).

Por exemplo, na proporção $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, temos $2 \cdot 9 = 6 \cdot 3 = 18$; e, em $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$, temos $1 \cdot 16 = 4 \cdot 4$.

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Escalas em mapas

Um exemplo de razão conhecida e importante é a **escala numérica**, amplamente usada em mapas cartográficos, plantas de imóveis e maquetes.

Um mapa é uma imagem reduzida de determinada superfície. Nele, a proporção real entre as medidas de distância é preservada, isto é, as medidas de distância lineares no mapa são proporcionais às correspondentes medidas de distância lineares reais.

A **escala** de um mapa é a razão entre a medida de um comprimento qualquer no mapa e a real medida do comprimento correspondente.

Analise o mapa político do Brasil. Nele, foi utilizada uma **escala gráfica**: um segmento de reta de medida 1 cm (verifique com a régua) possui os valores 0 e 500 em suas extremidades. Isso significa que 1 cm no mapa corresponde a 500 km na realidade (de maneira análoga, 2 cm no mapa correspondem, na realidade, a 1000 km).

Brasil – divisão política

Banco de imagens/arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 93.

1. Escrevendo as medidas indicadas na escala gráfica em uma mesma unidade de medida de comprimento, obtenha a escala numérica desse mapa e represente no caderno a razão obtida como $a : b$.

2. Qual é, em linha reta, a medida de distância real entre Belo Horizonte e Florianópolis?

3. A medida de distância, em linha reta, de Cuiabá a Teresina é de aproximadamente 1870 km. Qual deve ser a medida, no mapa, do segmento de reta de extremidades nessas capitais? Confira sua resposta com uma régua.

4. Qual é a escala numérica correspondente à seguinte escala gráfica?

0 13 km

5. No caderno, represente a escala 1 : 20 000 por meio de uma escala gráfica.

6. Deseja-se confeccionar um mapa do Brasil no qual ocorra uma redução menor das medidas de distância reais em comparação com o mapa dado. Para isso, qual escala deverá ser escolhida: 1 : 40 000 000 ou 1 : 60 000 000? Explique.

1. Escala: $\frac{1\text{ cm}}{500\text{ km}} = \frac{1\text{ cm}}{50\,000\,000\text{ cm}} = 1 : 50\,000\,000$.

2. No mapa, a medida de distância aproximada entre as 2 capitais é 2 cm. Assim, a medida de distância real, em linha reta, é: $2 \cdot 50\,000\,000\text{ cm} = 100\,000\,000\text{ cm} = 1\,000\text{ km}$.

3. Como cada 1 cm no mapa corresponde a 500 km, a medida de distância entre essas 2 capitais no mapa seria aproximadamente 3,74 cm (1870 : 500 = 3,74). Esse valor aproximado pode ser confirmado por meio de medições com a régua.

4. Escala: $\frac{1\text{ cm}}{13\text{ km}} = \frac{1\text{ cm}}{1\,300\,000\text{ cm}} = 1 : 1\,300\,000$.

5. A medida 1 cm no mapa corresponde a 20 000 cm = 200 m de medida real.

0 200 m

6. Deve ser escolhida a escala 0 400 km, pois, nesse caso, cada centímetro representado no mapa corresponde a 400 km de medida de distância real. No outro caso, cada centímetro no mapa corresponde a 600 km de medida de distância real. As maiores escalas, ou seja, com menor redução, são aquelas que têm menor denominador.

Porcentagem

A tabela a seguir mostra a evolução dos salários, em reais, das irmãs Carina e Marta nos anos de 2023 e 2024.

Evolução de salários

Salário / Pessoa	Salário em 2023	Salário em 2024	Aumento salarial
Carina	R$ 3.600,00	R$ 4.500,00	R$ 900,00
Marta	R$ 2.850,00	R$ 3.705,00	R$ 855,00

Dados elaborados para fins didáticos.

Vamos calcular, para cada irmã, a razão entre o aumento salarial e o salário em 2023:

Carina: $\frac{900}{3600}$. Marta: $\frac{855}{2850}$.

Quem obteve o maior aumento salarial relativo?

Uma das maneiras de comparar essas razões consiste em expressá-las com o mesmo denominador (100, por exemplo):

Carina: $\frac{900}{3600} = \frac{25}{100} = 25\%$. Marta: $\frac{855}{2850} = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$.

Concluímos que Marta obteve maior aumento salarial relativo, tendo como referência o salário em 2023.

As razões de denominador 100 são chamadas **razões centesimais** ou **taxas percentuais**, ou, mais informalmente, **porcentagens**.

As porcentagens podem ser expressas de 2 maneiras: na forma de fração (com denominador 100) ou na forma decimal (dividindo o numerador pelo denominador).

Acompanhe alguns exemplos.

- $18\% = \frac{18}{100} = 0{,}18$
- $27{,}9\% = \frac{27{,}9}{100} = 0{,}279$
- $135\% = \frac{135}{100} = 1{,}35$
- $0{,}5\% = \frac{0{,}5}{100} = 0{,}005$

Não escreva no livro

Pense nisto

É verdade que 100% = 1, 200% = 2, 300% = 3, etc.?

Sim, pois $100\% = \frac{100}{100}$, $200\% = \frac{200}{100}$, e assim por diante.

Atividades resolvidas

5. Em um condomínio residencial com 80 apartamentos, verificou-se que moram inquilinos em 35% das unidades. Em quantas unidades moram inquilinos?

Solução:

Podemos utilizar diferentes estratégias para calcular em quantas unidades moram inquilinos. A taxa de 35% significa que, se o condomínio tivesse 100 unidades, 35 delas seriam ocupadas por inquilinos. Assim, podemos escrever a proporção:

$$\frac{35}{100} = \frac{x}{80} \Rightarrow 100 \cdot x = 35 \cdot 80 \Rightarrow x = 28$$

Logo, há 28 unidades em que moram inquilinos.

A determinação de x poderia ser simplificada calculando diretamente 35% de 80:

$$\frac{35}{100} \cdot 80 = 0{,}35 \cdot 80 = 28$$

Com uma calculadora simples, podemos fazer rapidamente cálculos de porcentagens de certo valor.
Localize a tecla [%].

Para calcular 35% de 80, procedemos da seguinte maneira:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

O cálculo mental também é amplamente usado no cálculo de porcentagens. Acompanhe o raciocínio: como 10% (décima parte) de 80 vale 8, então 5% (metade de 10%) vale 4 e 30% (triplo de 10%) vale $3 \cdot 8 = 24$.
Assim, 35% de 80 corresponde a $4 + 24 = 28$.

6. Dos 240 estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola, 33 são canhotos. Qual é a porcentagem de estudantes canhotos?

Solução:

A razão entre o número de canhotos e o número total de estudantes é $\frac{33}{240}$.

Para calcular a porcentagem de canhotos do 1º ano dessa escola, podemos fazer:

$$\frac{33}{240} = \frac{x}{100} \Rightarrow 240 \cdot x = 33 \cdot 100 \Rightarrow x = 13{,}75, \text{ ou seja, } 13{,}75\%.$$

Podemos também simplesmente dividir 33 por 240:

$$\frac{33}{240} = 0{,}1375 = \frac{1375}{1000} = \frac{13{,}75}{100} = 13{,}75\%$$

38. a) $0{,}2 \cdot 600 = 120$
b) $0{,}15 \cdot 840 = 126$
c) $120 : 2 = 60$
d) $1\,235{,}5 \cdot 0{,}1 = 123{,}55$
e) $0{,}27 \cdot 2500 = 675$
f) $0{,}075 \cdot 400 = 30$
g) $3{,}5 \cdot 75 = 262{,}5$
h) $0{,}154 \cdot 350 = 53{,}9$
i) $0{,}03 \cdot 90 = 2{,}7$
j) $0{,}005 \cdot 2\,100 = 10{,}5$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

35. Determine a razão, na ordem dada, entre:

a) 16 e 5; $\frac{16}{5} = 3{,}2$
b) 40 e 120; $\frac{40}{120} = \frac{1}{3}$
c) 32 e 8; $\frac{32}{8} = 4$
d) 0,4 e 0,02; $\frac{0{,}4}{0{,}02} = 20$
e) $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$; $\frac{6}{3} = 2$
f) 2 km e 400 m;
g) 10 min e 2 h;
h) 8 kg e 500 g.

36. Calcule o valor real de x em cada item.

a) $\frac{x}{3} = \frac{3}{2}$ $x = \frac{9}{2}$
b) $\frac{4x}{5} = \frac{x+1}{3}$ $x = \frac{5}{7}$
c) $\frac{2-x}{x+5} = \frac{3}{4}$ $x = -1$
d) $\frac{x-1}{x-2} = \frac{3}{2}$ $x = 4$

37. A densidade demográfica de uma região (cidade, estado, país, etc.) é definida como a razão entre o número de habitantes e a medida de área da região. Qual é o estado menos densamente povoado entre os citados na tabela a seguir? Se você não mora em nenhum dos estados citados, pesquise as informações apresentadas na tabela para o estado onde mora e compare a densidade demográfica dele com a dos demais.

Tocantins; resposta pessoal.

35. f) $\frac{2\,000 \text{ m}}{400 \text{ m}} = 5$ **g)** $\frac{10 \text{ min}}{120 \text{ min}} = \frac{1}{12}$ **h)** $\frac{8\,000 \text{ g}}{500 \text{ g}} = 16$

Área e habitantes de estados brasileiros (Censo 2022)

Estado	Medida de área (em km²)	População
Tocantins	227424	1511460
Mato Grosso do Sul	357142	2757013
Sergipe	21938	2210004

Fonte dos dados: IBGE. *Cidades e Estados*. Disponível em: https://tedit.net/z29uly. Acesso em: 11 jul. 2024.

38. Calcule (mentalmente, quando possível) e comprove a resposta com uma calculadora.

a) 20% de 600
b) 15% de 840
c) 50% de 120
d) 10% de 1235,5
e) 27% de 2500
f) 7,5% de 400
g) 350% de 75
h) 15,4% de 350
i) 3% de 90
j) 0,5% de 2100

39. $1\,950 + \frac{4}{100} \cdot 10\,000 = 1\,950 + 400 = 2\,350$; ou seja, R$ 2.350,00.

$1\,950 + \frac{4}{100} \cdot 20\,000 = 1\,950 + 800 = 2\,750$; ou seja, R$ 2.750,00.

39. Um vendedor recebe um salário fixo de R$ 1.950,00 mais 4% sobre o total de vendas no mês. Qual será o salário dele se, em certo mês, o total de vendas efetuadas for R$ 10.000,00? E se as vendas dobrarem?

40. Calcule o valor de x em cada caso.

a) 10 é x% de 40. $x = 25$

b) 3,6 é x% de 72. $x = 5$

c) 120 é x% de 150. $x = 80$

d) 136 é x% de 400. $x = 34$

e) 150 é x% de 120. $x = 125$

41. De um grupo de 120 universitários que participam de um congresso, 48 são estudantes do curso de Farmácia, 36 são estudantes do curso de Química e os demais são do curso de Biologia. Determine:

a) a razão entre o número de estudantes que cursam Biologia e o número total de estudantes; $\frac{3}{10}$

b) a razão entre o número de estudantes do curso de Farmácia e o número de estudantes do curso de Química; $\frac{4}{3}$

c) o número de estudantes adicionais do curso de Química que deveriam ter participado do congresso a fim de o percentual de estudantes desse curso passar a ser 40%.

20 estudantes.

42. Uma empresa pretende adquirir certo equipamento eletrônico. Cinco fabricantes participam de um teste para determinar o percentual de peças defeituosas em um lote. Os resultados desse teste são dados a seguir.

Peças de 5 fabricantes

Fabricante	Número de peças analisadas	Número de peças com defeito
A	150	15
B	250	10
C	180	11
D	200	10
E	230	13

Dados elaborados para fins didáticos.

A empresa decidiu recusar as fabricantes cujo percentual de peças boas (não defeituosas) estivesse abaixo de 95%. Quais fabricantes tiveram o lote aprovado? Fabricantes **B** e **D**.

43. No mês de janeiro, o índice de pontualidade dos voos de uma companhia aérea foi de 95% e, no mês seguinte, caiu para 90%. Sabendo que em janeiro a companhia operou 1800 voos e, em fevereiro, 1350, determine o índice de pontualidade dos voos nesse bimestre.

Aproximadamente 92,86%.

44. Em uma pesquisa com os 1200 estudantes de uma universidade, verificou-se que 30% deles concluíram o Ensino Médio em escola particular, entre os quais, 65% fizeram curso preparatório para o vestibular.

a) Determine o número de estudantes dessa universidade que concluíram o Ensino Médio em escola particular, mas não fizeram curso preparatório para o vestibular. Em seguida, determine o percentual representado por esses estudantes em relação ao número total de estudantes pesquisados. 126 estudantes; 10,5%.

b) Caso o enunciado não fornecesse o número total de estudantes pesquisados, seria possível responder aos questionamentos do item anterior?

Não, só seria possível responder ao segundo questionamento.

c) Caso o enunciado informasse que, entre os que concluíram o Ensino Médio em escola pública, a razão entre o número de estudantes que fizeram e o número de estudantes que não fizeram curso preparatório para o vestibular é de $\frac{2}{3}$, eliminasse a informação do número total de estudantes e mantivesse as demais, seria possível determinar os percentuais de cada um desses 2 grupos em relação ao número total de estudantes? Em caso afirmativo, determine esses percentuais.

Sim; 28% e 42%.

45. Uma sala de cinema tem 160 assentos. Foram vendidos apenas 2 tipos de ingresso para certa sessão: inteira e meia-entrada.

Kirill Neiezhmakov/Shutterstock

Sala de cinema.

45. Exemplos de resposta: "Qual é o percentual de ocupação dessa sessão?"; "Quantos ingressos a mais deveriam ter sido vendidos, a fim de que o percentual de ocupação da sessão passasse a ser 95%?".

Sabendo que 25 assentos ficaram vazios e que foram vendidos 90 ingressos de meia-entrada, elabore e resolva 2 questões envolvendo porcentagem e os dados aqui fornecidos.

46. Monique começou a ler um livro em um fim de semana. Conseguiu ler 40% do livro no sábado. Leu mais 76 páginas no domingo e percebeu então que já tinha lido $\frac{2}{3}$ do livro.

a) Quantas páginas tem esse livro? 285 páginas.

b) Quantas páginas Monique leu no sábado? 114 páginas.

47. Em uma liga metálica de 1,2 kg, o teor de ouro é de 48%, enquanto o restante é prata. Quantos gramas de prata devem ser retirados dessa liga a fim de o teor de ouro passar a ser de 60%? 240 g

48. Uma jogadora de basquete arremessou 80 lances livres em um treino, dos quais 65 resultaram em cesta.

Pablo Vera/AFP/Getty Images

A atleta brasileira Vanessa Fausto fazendo bandeja durante partida de basquete entre Colômbia e Brasil, que garantiu medalha de ouro para seleção feminina brasileira de basquete, durante os Jogos Pan-americanos de Santiago em 2023, no Chile.

a) Qual foi o percentual de acerto dessa jogadora no treino? 81,25%

b) Quantos arremessos a mais ela deveria ter feito, acertando a cesta, para o percentual de acerto dela passar a ser 90%? 70 arremessos.

49. Uma sala comercial retangular terá, depois de construída, 12 m × 5 m. Ela foi representada em uma planta com escala de 1 : 250.

a) Qual é, em centímetros quadrados, a medida de área da sala na planta? 9,6 cm^2

b) Pretende-se produzir folhetos promocionais de venda dessa sala que tenham uma escala 20% maior do que a usada na planta. Quais serão as medidas das dimensões da sala nesse folheto? 5,76 cm × 2,4 cm

50. Leia o texto, que cita a Unicamp (Universidade Estadual de Campinas), em São Paulo, uma das melhores universidades do país e da América Latina.

A lei das cotas étnico-raciais (Lei 12.711/12) – que deverá passar por revisão no Congresso no segundo semestre deste ano [de 2022] – alterou drasticamente o perfil demográfico da população acadêmica na Unicamp. [...]

Em 2017, quando a lei foi implementada pelo Conselho Universitário (Consu), a Unicamp registrou a matrícula de 30 264 estudantes nos cursos de Graduação e Pós-Graduação. Destes, 4 484 se autodeclararam pretos, pardos e indígenas – o equivalente a 14,8% do total de matriculados. Em 2022, esse grupo conta com 8 575 alunos – ou 26,5% do total de matriculados.

Já os alunos indígenas compunham 0,22% do total de matriculados na Unicamp em 2017. Este ano esse grupo representa 1,2% dos alunos. [...]

NUNES, Tote. Número de cotistas aumenta 91% em cinco anos na Unicamp. *Jornal da Unicamp*, Campinas, 20 jul. 2022. Disponível em: https://tedit.net/exszbn. Acesso em: 4 jul. 2024.

O texto informa uma grande conquista da sociedade brasileira nos últimos anos: a presença crescente de pretos, pardos e indígenas nas universidades públicas. De acordo com o texto, responda às seguintes questões.

a) Qual é o aumento percentual do número de participantes pretos, pardos e indígenas na Unicamp nos 5 anos, de 2017 a 2022? Aproximadamente 91,23%.

b) Quantos estudantes se matricularam na Unicamp em 2022? 32 358 estudantes.

c) Quantos estudantes indígenas se matricularam na Unicamp em 2022? 388 estudantes.

d) Qual é o acréscimo percentual do número de matrículas gerais da Unicamp de 2017 a 2022? Aproximadamente 6,92%.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

O INSS

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação em Direitos Humanos*, *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso*, *Saúde* e *Trabalho*.

Vamos supor que você exerça alguma atividade por conta própria. Se por acaso ficar doente, quem pagará suas despesas? Se você contribui para a Previdência Social todos os meses, pode solicitar o auxílio-doença e obter um rendimento mensal. No caso das mulheres que precisam pausar o trabalho porque acabaram de dar à luz, o salário-maternidade assegura uma renda mensal durante 120 dias. A Previdência Social também paga outros benefícios, como vários tipos de aposentadoria e pensão por morte.

Todo trabalhador com carteira assinada está automaticamente filiado à Previdência Social. Os trabalhadores autônomos e os empresários são contribuintes individuais. E mesmo quem não tem renda própria – como estudantes maiores de 16 anos, pessoas do lar e desempregados – pode pagar como contribuinte facultativo para ter direito aos benefícios.

A Previdência Social está presente em todo o país por meio das agências do Instituto Nacional do Seguro Social (INSS). É com o INSS que você deve entrar em contato para se inscrever na previdência, contribuir mensalmente com ela ou solicitar benefícios.

Fonte dos dados: BRASIL. Caixa Econômica Federal. *INSS*, Brasília, DF. Disponível em: https://tedit.net/8q8n0g. Acesso em: 4 jul. 2024.

Junte-se com um colega e façam o que se pede a seguir.

1. Pesquisem os principais benefícios da Previdência Social: aposentadoria por idade para trabalhadores urbanos e rurais, aposentadoria de categorias especiais – professores e policiais federais e rodoviários federais –, aposentadoria por invalidez, pensão por morte, auxílio-doença e salário-maternidade. Quais são os requisitos para ter direito a esses benefícios?
   A resposta depende da pesquisa feita pelo estudante e das regras vigentes no momento de realização da pesquisa.
2. Atualmente, os profissionais que trabalham com entregas ou transporte por aplicativos não têm vínculo empregatício com as plataformas para as quais prestam serviço. Nesse caso, esses profissionais têm direito à aposentadoria? Em qual categoria eles se enquadram?
   A resposta depende da pesquisa feita pelo estudante e das regras vigentes no momento de realização da pesquisa.
3. Debata com os colegas sobre a importância do serviço de Previdência Social para todos os trabalhadores. Resposta pessoal.

Fotos: Reprodução/Ministério do Trabalho/Governo Federal

Não esqueça: para ter direito aos benefícios, você precisa estar inscrito no INSS e manter suas contribuições em dia.

A matemática do INSS

A tabela a seguir, vigente em 2024, informa as alíquotas (porcentagem para o cálculo do valor mensal a ser pago) de contribuição ao INSS de acordo com a faixa salarial.

Tabela para empregado, empregado doméstico e trabalhador avulso (2024)

Salário de contribuição	Alíquota
Até R$ 1.412,00	7,5%
De R$ 1.412,01 a R$ 2.666,68	9%
De R$ 2.666,69 até R$ 4.000,03	12%
De R$ 4.000,04 até R$ 7.786,02	14%

Fonte dos dados: BRASIL. Instituto Nacional do Seguro Social – INSS. Confira as alíquotas de contribuição ao INSS com o aumento do salário-mínimo. Portal *gov.br*, 12 jan. 2024. Disponível em: https://tedit.net/wp7jej. Acesso em: 10 jun. 2024.

A partir de 2020, o cálculo da contribuição passou a ser progressivo. Isso significa, na prática, que as alíquotas de cada faixa são aplicadas apenas aos valores excedentes da faixa anterior. Caso o salário de contribuição exceda R$ 7.786,02, o cálculo deverá ser feito tomando esse valor-limite, isto é, há um teto de contribuição mensal ao INSS.

Por exemplo, se um trabalhador recebe R$ 2.300,00, ele paga 7,5% de R$ 1.412,00 mais 9% do que exceder R$ 1.412,00, isto é, 9% de R$ 888,00 (pois $2\,300 - 1412 = 888$). Assim:

$$0{,}075 \cdot 1412 + 0{,}09 \cdot 888 = 105{,}90 + 79{,}92 = 185{,}82$$

Agora, em duplas, façam o que se pede.

4. Calculem o valor da contribuição correspondente a um salário de:

a) R$ 1.400,00;

b) R$ 2.000,00;

c) R$ 7.786,02;

d) R$ 10.000,00.

a) $0{,}075 \cdot 1\,400 = 105$; ou seja, R$ 105,00.

b) $0{,}075 \cdot 1\,412 + 0{,}09(2\,000 - 1\,412) = 105{,}90 + 0{,}09 \cdot 588 = 105{,}90 + 52{,}92 = 158{,}82$; ou seja, R$ 158,82.

c) $0{,}075 \cdot 1\,412 + 0{,}09 \cdot (2\,666{,}68 - 1\,412) + 0{,}12 \cdot (4\,000{,}03 - 2\,666{,}68) + 0{,}14 \cdot (7\,786{,}02 - 4\,000{,}03) = 908{,}8618$; ou seja, aproximadamente R$ 908,86.

d) Segundo o texto, a contribuição de salários acima de R$ 7.786,02 deve ser calculada tomando o valor como limite. Assim, como calculado no item **c**, a contribuição relativa a um salário de R$ 10.000,00 é de R$ 908,86.

inspiring.team/Adobe Stock

VIRALIZE!

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras* e *Diversidade Cultural*.

Infográfico clicável

O que é que a mandioca tem?

A planta de nome científico *Manihot esculenta* é conhecida popularmente no Brasil pelos nomes mandioca, macaxeira e aipim, entre outros. Ela é nativa da América do Sul e já era um ingrediente importante na culinária regional para os povos indígenas, desde antes da colonização europeia.

Piratá Waura/Pulsar Imagens

Indígena da etnia Waurá peneirando massa de mandioca para obter polvilho, no Parque Indígena do Xingu. Foto de 2024.

A mandioca tem glicosídeos cianogênicos em sua composição, que são substâncias químicas tóxicas para o ser humano. A concentração desse componente varia substancialmente nas diferentes espécies da planta. A chamada mandioca mansa tem baixa concentração de cianogênicos e não tem sabor amargo. Esse tipo de mandioca começou a ser cultivada e consumida por populações indígenas há aproximadamente 9 000 anos. Já as chamadas mandiocas bravas têm alta concentração de cianogênicos, sabor amargo e precisam ser processadas antes de serem ingeridas, para não trazerem danos à saúde. Embora povos indígenas também cultivem esse tipo de mandioca e tenham desenvolvido maneiras de processar o vegetal para o consumo seguro, estima-se que esse processo tenha ocorrido bem posteriormente ao da mandioca mansa.

Mantendo-se popular ao longo dos séculos, pratos tradicionais como o tucupi (molho tradicional da região Norte), a maniçoba (prato típico da culinária paraense), a tapioca, o beiju, o polvilho (essencial para o preparo do pão de queijo mineiro), e o pirão, entre outros alimentos, são feitos a partir da mandioca ou dos derivados dela.

Fonte dos dados: MANIHOT esculenta Crantz. *SiBBr. Ficha de espécies*. Disponível em: https://tedit.net/5tjzjt. ZAGO, Bruno Wagner; HOOGERHEIDE, Eulália Soler Sobreira; SILVA, Bruno Rafael da; BARELLI, Marco Antonio Aparecido. Avaliação de acessos de mandioca quanto ao teor de ácido cianídrico em raízes frescas. *IV Congresso Brasileiro de Recursos Genéticos*, nov. 2016. Disponível em: https://tedit.net/hh3q29. Acesso em: 11 jul. 2024.

As imagens não estão representadas em proporção.

lovelyday12/Adobe Stock

Plantação de mandioca.

Não escreva no livro

Iguarias muito tradicionais no Pará, como o tucupi e a farinha, têm algo em comum: os dois vêm da mandioca. A planta natural [da] Amazônia é considerada uma 'árvore da providência', pois todas as suas partes têm algum aproveitamento. [...]

O professor e antropólogo da Universidade Federal do Pará (UFPA) Romero Ximenes explica que a mandioca é uma das principais plantas da Região Amazônica. "Todo o sistema alimentar da Amazônia é calcado nos derivados da mandioca. Existem os diversos tipos de farinhas, as polpas, existem a tapioca, o tucupi, entre outros."

[...]

Rica em nutrientes – Seja acompanhando açaí, peixe frito ou qualquer outro prato, a farinha d'água está sempre presente na alimentação do paraense. E ter farinha na mesa significa ter também vários nutrientes na mesa. Uma pesquisa da UFPA constatou a presença de elementos como ferro, potássio, manganês, sódio, fósforo e zinco nas farinhas produzidas no Pará.

[...]

Potencial energético – Além de oferecer todos esses derivados, a mandioca também pode ser utilizada na geração de energia. É o que constata a pesquisadora Brígida Ramati, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e da Computação da UFPA. De acordo com dados obtidos em diversas regiões do Estado, restos da mandioca, como cascas, entrecasca, cepas, caule e folhas, podem gerar energia para famílias da zona rural.

[...]

"A utilização otimizada da produção da mandioca em uma agroindústria formada para o beneficiamento de produtos, pode promover o bem-estar comunitário, pois, além da satisfação, gera empregos, renda e agrega valor ao produto, já que a prática da agricultura familiar proporciona o desenvolvimento rural sustentável", destaca a professora Brígida.

BITTENCOURT, João Pedro. Dia da Árvore: mandioca é uma das árvores mais importantes para a população da Amazônia. *UFPA* – Universidade Federal do Pará, 20 set. 2017. Disponível em: https://tedit.net/wkrfee. Acesso em: 29 jul. 2024.

Eduardo Zappia/Pulsar Imagens

Prato de maniçoba com arroz.

3. O povo Guarani utiliza o número 5 como base do sistema de contagem por 2 motivos: além de considerarem os 5 dedos da mão, usavam o agrupamento de 5 caroços em um caule de mandioca. Estudos indicam que os símbolos utilizados para representar os números também foram criados considerando os padrões encontrados nos caules da mandioca. Mais informações podem ser obtidas no artigo "Etnomatemática do sistema de contagem Guarani das aldeias Itaty, do Morro dos Cavalos, e M'Biguaçu", escrito por Sérgio Florentino da Silva e Ademir Donizeti Caldeira, disponível em: https://tedit.net/1z85hj (acesso em: 4 jul. 2024).

1. Na região em que você mora, qual é o jeito mais comum de consumir a mandioca?

Resposta pessoal.

2. Considerando a classificação de categorias alimentares mostradas na abertura desta Unidade, de que grupo o alimento mencionado como resposta no item **a** faz parte? Por quê? Respostas pessoais.

3. O sistema de contagem do povo Guarani está ligado à tradição do plantio de mandioca. Reúna-se em grupo com alguns colegas, façam uma pesquisa sobre essa relação e elaborem uma apresentação em *slides* das informações encontradas. Não se esqueçam de checar as fontes utilizadas na pesquisa e indicá-las nos *slides*.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa foi proposta para ser realizada em grupos, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

PARA FUNDAMENTAR SABERES

1. Você já ouviu falar em blocos econômicos? Conheça a seguir os principais blocos econômicos que existem (ou já existiram), cujos membros são, em grande maioria, países da América do Sul.

- Mercosul: Brasil, Argentina, Uruguai, Paraguai e Venezuela (suspensa em 2016).
- Pacto Andino: Bolívia, Colômbia, Equador e Peru.
- Unasul (suspenso em 2018): Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Equador, Guiana, Paraguai, Peru, Suriname, Uruguai e Venezuela.
- Aliança do Pacífico: Peru, México, Colômbia e Chile.

Desconsidere o México, que pertence à América do Norte.

a) Qual é o bloco que poderia representar o conjunto universo dos países sul-americanos?

Unasul, pois contém todos os países da América do Sul.

b) Represente, no caderno, por meio de um diagrama de Venn, as relações de pertinência e inclusão associadas a esses blocos e ao conjunto universo do item **a**.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. **(Ufes)** Em um grupo de 57 pessoas, 3 pessoas gostam de arroz-doce, brigadeiro e cocada; 7 pessoas gostam de brigadeiro e cocada; 8 pessoas gostam de arroz-doce e cocada; 10 pessoas gostam de arroz-doce e brigadeiro. O total de pessoas do grupo que gostam de cocada é 15, de brigadeiro é 25 e de arroz-doce é 30.

Calcule o número de pessoas do grupo que:

a) gostam de pelo menos um dos 3 doces;

48 pessoas.

b) não gostam de nenhum dos 3 doces;

9 pessoas.

c) gostam de arroz-doce, mas não gostam nem de brigadeiro nem de cocada.

15 pessoas.

3. Sendo x um número racional qualquer e y um número irracional qualquer, classifique as afirmações em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

a) $y \cdot \sqrt{3}$ pode ser racional ou irracional. V

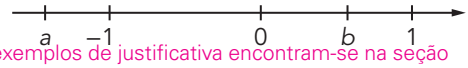
b) $x + y$ é sempre irracional. V

c) $y - x^2$ não pode ser racional. V

d) $x \cdot y$ só é racional se $x = 0$. V

e) $x^3 \cdot y^2$ não pode ser racional. F

4. Os números reais a e b estão localizados na reta numérica a seguir.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Os exemplos de justificativa encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Classifique as afirmações em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) e justifique-as.

a) O número $\frac{a}{b}$ está representado à esquerda de a. V

b) O número b^2 está representado à direita de 1. F

c) O número $a + b$ está representado entre a e 0. V

d) O número a^2 está representado entre b e 1. F

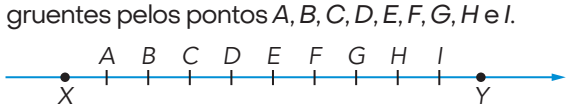
e) O número $b - a$ está representado entre b e 1. F

f) O inverso de b está representado entre b e 1. F

5. Em um colégio, há 456 estudantes matriculados no 1º ano do Ensino Médio distribuídos entre os períodos matutino e o noturno. Para participar de uma competição esportiva, inscreveram-se $\frac{15}{17}$ dos estudantes do matutino e $\frac{7}{23}$ do noturno. Quantos estudantes do noturno não vão participar da competição?

128 estudantes.

6. **(Uerj)** O segmento $\overline{XY}$, indicado na reta numérica abaixo, está dividido em dez segmentos congruentes pelos pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Admita que X e Y representem, respectivamente, os números $\frac{1}{6}$ e $\frac{3}{2}$. O ponto D representa o seguinte número:

a) $\frac{1}{5}$. **b)** $\frac{8}{15}$. **c)** $\frac{17}{30}$. **d)** $\frac{7}{10}$.

Alternativa **d**.

7. **(Enem)** Num mapa com escala 1 : 250 000, a distância entre as cidades **A** e **B** é de 13 cm. Num outro mapa, com escala 1 : 300 000, a distância entre as cidades **A** e **C** é de 10 cm. Em um terceiro mapa, com escala 1 : 500 000, a distância entre as cidades **A** e **D** é de 9 cm. As distâncias reais entre as cidades **A** e as cidades **B**, **C** e **D**, são, respectivamente, iguais a *X*, *Y* e *Z* (na mesma unidade de comprimento). As distâncias *X*, *Y* e *Z*, em ordem crescente, estão dadas em:

a) *X*, *Y*, *Z*.
b) *Y*, *X*, *Z*.
c) *Y*, *Z*, *X*.
d) *Z*, *X*, *Y*.
e) *Z*, *Y*, *X*.

Alternativa **b**.

8. **(Enem)**

Alguns estudos comprovam que os carboidratos fornecem energia ao corpo, preservam as proteínas estruturais dos músculos durante a prática de atividade física e ainda dão força para o cérebro coordenar os movimentos, o que de fato tem impacto positivo no desenvolvimento do praticante. O ideal é consumir 1 grama de carboidrato para cada minuto de caminhada.

CIRINO, C. Boa pergunta: consumir carboidratos antes dos exercícios melhora o desempenho do atleta? *Revista Saúde É Vital*, n. 330, nov. 2010 (adaptado).

Um casal realizará diariamente 30 minutos de caminhada, ingerindo, antes dessa atividade, a quantidade ideal de carboidratos recomendada. Para ter o consumo ideal apenas por meio do consumo de pão de fôrma integral, o casal planeja garantir o suprimento de pães para um período de 30 dias ininterruptos. Sabe-se que cada pacote desse pão vem com 18 fatias, e que cada uma delas tem 15 gramas de carboidratos.

A quantidade mínima de pacotes de pão de fôrma necessários para prover o suprimento a esse casal é:

a) 1.
b) 4.
c) 6.
d) 7. Alternativa **d**.
e) 8.

9. Em uma loja, o preço promocional de uma geladeira é de R$ 1.000,00 para pagamento no PIX. O preço normal, fora da promoção, é 10% maior. Para pagamento com o cartão de crédito da loja, é dado um desconto de 2% sobre o preço normal.
Uma cliente decidiu comprar essa geladeira, optando pelo pagamento com o cartão de crédito da loja. Ela calculou que o valor a ser pago seria o preço promocional acrescido de 8%. No caixa, ao ser informada do valor a pagar, segundo sua opção, percebeu uma diferença entre seu cálculo e o valor apresentado.

O valor apresentado pela loja, comparado ao valor calculado pela cliente, foi:

a) R$ 2,00 menor.
b) R$ 100,00 menor.
c) R$ 200,00 menor.
d) R$ 42,00 maior.
e) R$ 80,00 maior. Alternativa **a**.

Nesta Unidade, estudamos conceitos relacionados aos principais conjuntos numéricos. Esse estudo foi precedido de noções básicas de conjuntos. Respostas pessoais.

1. Consegui revisar e aprofundar conteúdos estudados no Ensino Fundamental? Quais?
2. Consegui me apropriar da linguagem simbólica básica dos conjuntos? E das operações entre conjuntos?
3. Consigo descrever os conjuntos numéricos estudados na Unidade e estabelecer as relações de inclusão (ou não) entre eles?
4. Consigo conceituar e dar exemplos de razão e proporção em contextos diversos?
5. Consigo resolver problemas de porcentagem e reconheço a importância dela no dia a dia?
6. Colaborei com o professor ao longo das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
7. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas, exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

Unidade 2

FUNÇÕES DE 1º GRAU E DE 2º GRAU

Indígenas jogando futebol feminino na abertura dos jogos indígenas do Xingu, na Aldeia Aiha, da etnia Kalapalo, em Querência (MT). Foto de 2022.

Andre Dib/Pulsar Imagens

Dica

Museu das Culturas Indígenas

O Museu das Culturas Indígenas, localizado na rua Dona Germaine Burchard, 451, no bairro Água Branca, em São Paulo (SP), é um projeto da Secretaria de Cultura e Economia Criativa do Estado de São Paulo com gerenciamento da Associação Cultural de Apoio ao Museu Casa de Portinari e em parceria com o Instituto Maracá, uma associação sem fins lucrativos que tem como objetivo a proteção, a difusão e a valorização do patrimônio cultural indígena. Além das exposições físicas, o museu também disponibiliza exposições virtuais, disponíveis em https://tedit.net/x52nu9 (acesso em: 15 jul. 2024).

Jogos dos Povos Indígenas

Em 1996, na cidade de Goiânia (GO), dois líderes indígenas, com o apoio do Ministério do Esporte do Brasil, criaram os Jogos do Povos Indígenas, um evento multiesportivo que tinha por objetivo integrar várias etnias, valorizando a tradição, a sabedoria, as danças e as práticas esportivas dos povos originários. Entre as modalidades esportivas há futebol, voleibol, natação, arco e flecha, arremesso de lança, demonstrações de lutas e corrida de tora. Desde então ocorrem jogos por todo o Brasil, reunindo diferentes etnias.

As atividades esportivas desse tipo exigem um estudo regular sobre os rendimentos dos competidores ou da equipe e, eventualmente, dos adversários. Por existirem diversas modalidades, cada uma delas com o próprio conjunto de regras, é preciso verificar e identificar padrões para, com esse estudo, determinar as melhores técnicas e ferramentas analíticas a serem aplicadas, possibilitando melhores desempenhos.

O arremesso de lança, por exemplo, é uma atividade indígena tradicional praticada na pesca, na caça e na defesa, e durante os Jogos dos Povos Indígenas o objetivo desse esporte é arremessar a lança o mais longe possível.

Nesta Unidade, apresentamos algumas maneiras de modelar matematicamente situações do cotidiano que envolvem relações entre 2 grandezas, permitindo, assim, análises como a da inclinação de uma lança no momento do arremesso para obter o melhor desempenho.

Não escreva no livro

1. Você já conhecia os Jogos dos Povos Indígenas? Pesquise se em sua cidade já ocorreu alguma edição desses jogos. Respostas pessoais.

2. Conhece algum esporte parecido com o arremesso de lança que é disputado nos Jogos Olímpicos de Verão?

3. No nosso dia a dia existem diversas grandezas que dependem de outras para serem determinadas. Por exemplo, o nível das marés depende das forças gravitacionais exercidas pela Lua e pelo Sol sobre a Terra. Dê outros exemplos de grandezas que dependem de outras para serem determinadas.

2. Resposta pessoal. Nos Jogos Olímpicos de Verão, há alguns esportes que envolvem o lançamento de um objeto, como o dardo, martelo e disco, mas o que mais se assemelha ao arremesso de lança é o lançamento de dardo.

3. Exemplo de resposta: Preço da refeição de um restaurante por quilograma e medida de massa da comida no prato, medida de tempo de uma viagem e medida de velocidade durante a viagem, medida de tempo para encher um balde e medida de vazão de água da torneira utilizada, entre outras.

capítulo 3

Funções

Podcast

Transcrição de áudio

As imagens não estão representadas em proporção.

Noção inicial de função

Em diversas situações, desde o estudo científico de fenômenos físicos até situações cotidianas, costuma ser vantajoso começar a analisar a questão a ser resolvida primeiro identificando as grandezas mensuráveis envolvidas e, em seguida, estabelecer as relações existentes entre elas.

Vamos acompanhar alguns exemplos.

Here Asia/Shutterstock

A água de coco hidrata o corpo e repõe eletrólitos e nutrientes que, normalmente, são eliminados na exposição ao Sol e em atividades físicas.

Preço da água de coco

Quantidade de copos	Preço (em R$)
1	7,00
2	14,00
3	21,00
4	28,00
5	35,00
6	42,00
7	49,00
8	56,00

Dados elaborados para fins didáticos.

I. O copo de 300 mL de água de coco em uma barraca de praia custa R$ 7,00. O proprietário da barraca organizou as informações de preço por quantidade de copos na tabela apresentada para facilitar os cálculos.

Nesse exemplo, as duas grandezas envolvidas são a quantidade de copos de água de coco e o preço. Para cada quantidade de copos comprados, há um único preço correspondente. Por isso, dizemos que o preço é **função** da quantidade de copos. A **fórmula**, **lei** ou **regra** que estabelece a relação de interdependência entre preço (y), em reais, e a quantidade de copos de água de coco (x) é: $y = 7 \cdot x$.

mladn61/Getty Images

Segundo o Departamento Estadual de Trânsito de São Paulo (Detran SP), o número de motoristas mulheres de veículos de aplicativos, táxis, ônibus e caminhões, entre outros, cresceu, no estado de São Paulo, 10%, na comparação entre os anos de 2022 e 2024.

II. No fretamento de um ônibus de excursão com 40 lugares, para determinado trecho, paga-se ao todo R$ 1.800,00. Essa despesa deverá ser igualmente repartida entre os participantes.

As grandezas envolvidas nesse outro exemplo são a quantidade de passageiros e o valor que cada um terá que pagar. Para calcular a quantia que cada um deverá desembolsar (y), basta dividir o preço total (R$ 1.800,00) pela quantidade de passageiros (x). A fórmula (ou a lei) que relaciona y e x é: $y = \frac{1800}{x}$.

Verifique na tabela a seguir alguns valores referentes à correspondência entre x e y.

Quantia, em reais, a pagar (y) pela quantidade de passageiros (x)

x	4	12	15	18	20	24	36	40
y (em R$)	450,00	150,00	120,00	100,0	90,00	75,00	50,00	45,00

Dados elaborados para fins didáticos.

III. O salário de um vendedor de roupas consiste em um valor fixo de R$ 2.000,00 acrescido de uma comissão de 5% sobre o valor total das vendas realizadas por ele no mês vigente. Nesse caso, o valor total y do salário depende do valor total x das vendas daquele mês. Para realizar o cálculo, basta adicionar R$ 2.000,00 a 5% de x. Desse modo, temos que a fórmula (ou lei) que relaciona y e x é $y = 2000 + 0{,}05 \cdot x$.

Valor total do salário (y) em função do total do valor de vendas (x) no mês

x (em R$)	0,00	500,00	1.000,00	2.000,00	4.000,00	6.000,00	10.000,00
y (em R$)	2.000,00	2.025,00	2.050,00	2.100,00	2.200,00	2.300,00	2.500,00

Dados elaborados para fins didáticos.

v74/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

Como qualquer outro tipo de objeto, as roupas devem ter um descarte apropriado. Quando uma peça não é mais usada, a primeira opção deve ser encaminhá-la para doação. Caso a peça não esteja mais em boas condições de uso e não possa ser reparada, a segunda opção é encontrar outro uso, dependendo do tecido, como pano de chão ou flanela de tirar de pó. Por fim, os tecidos podem ainda ser encaminhados para postos de reciclagem, mas nunca devem ser descartados no lixo comum.

IV. Uma pista de ciclismo tem marcações a cada 600 m. Um ciclista treina para uma prova de resistência desenvolvendo uma medida de velocidade constante. Enquanto isso, o técnico dele anota, de minuto em minuto, a medida da distância já percorrida pelo ciclista. A tabela a seguir apresenta o resultado anotado pelo técnico.

Dados do ciclista

Medida de tempo (em min)	Medida de distância (em m)
0	0
1	600
2	1200
3	1800
4	2400
5	3000
6	3600
⋮	⋮

Dados elaborados para fins didáticos.

Pierre Teyssot/Shutterstock

Ciclista brasileiro Henrique Avancini competindo pela última vez em sua cidade natal, Petrópolis (RJ), antes de se aposentar. Foto de 2023.

Cada instante x corresponde a uma única medida de distância y. Dizemos, por isso, que a medida de distância é função da medida de intervalo de tempo. A fórmula (ou lei) que relaciona y com x é $y = 600 \cdot x$, com y em metros e x em minutos.

EXPERIMENTE

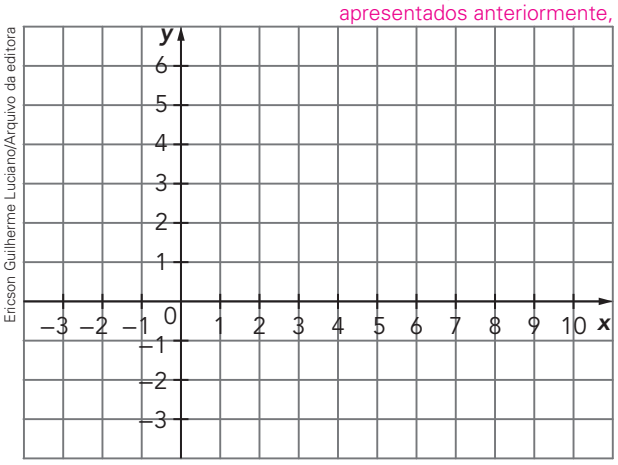
Não escreva no livro

Construir representações em uma calculadora gráfica

Vamos representar graficamente, no plano cartesiano, pontos ou relações algébricas utilizando uma calculadora gráfica. Escolha um *software* que permita esse tipo de construção *on-line* ou baixe um aplicativo no computador.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Esta seção tem por objetivo que os estudantes representem graficamente grandezas que se relacionam, a partir dos exemplos apresentados anteriormente, identificando grandezas que compõem pontos alinhados e que não compõem pontos alinhados no plano cartesiano. Caso os estudantes tenham dificuldades em localizar e representar pontos no plano cartesiano, retome com eles esse conceito já visto nos anos finais do Ensino Fundamental. A representação de pontos no plano cartesiano também será explorada mais adiante neste capítulo.



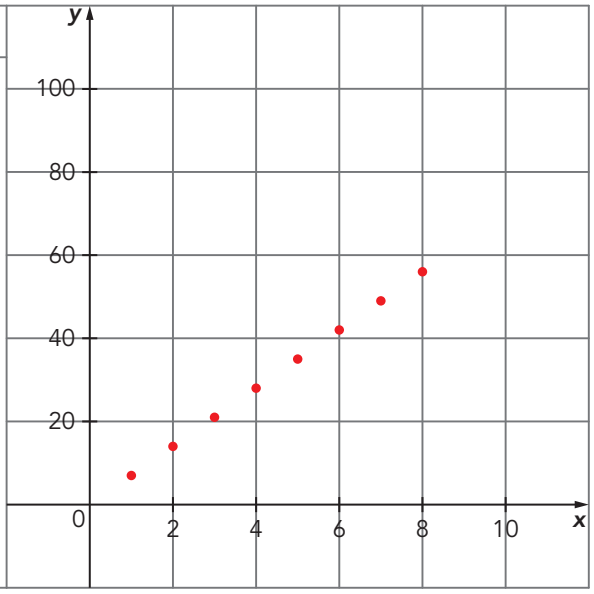
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Representação do plano cartesiano em uma calculadora gráfica.

Em geral, a tela desse tipo de aplicativo exibe um plano cartesiano em branco e algumas ferramentas. Localize a ferramenta de tabela e transcreva os valores da tabela **Preço da água de coco**, do início deste capítulo, como indicado na imagem adiante. Perceba que algumas calculadoras gráficas utilizam o ponto (".") no lugar da vírgula (",") para indicar casas decimais, portanto os dados precisam ser inseridos utilizando esse padrão.

É possível que você não consiga ver todos os 8 pontos no plano por causa da escala padrão utilizada no aplicativo. Para visualizar todos os pontos, ajuste o *zoom*. Então, note que os pontos estão todos alinhados.

x	y
1	7
2	14
3	21
4	28
5	35
6	42
7	49
8	56



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de resposta: No primeiro gráfico, os pontos estão alinhados e em um padrão crescente e, se fossem conectados, formariam uma reta; já no segundo gráfico, os pontos apresentam um comportamento decrescente e, se fossem conectados, não formariam uma reta.

Representação da tela de uma calculadora gráfica com os pontos de coordenadas fornecidos na tabela.

Agora, refaça o processo utilizando os dados da tabela **Quantia, em reais, a pagar (*y*) pela quantidade de passageiros (*x*)**. Quais diferenças você pode notar nos dois casos?

1. a) O valor de 1 m² é $\frac{1\,680}{40} = \frac{2\,520}{60} = \ldots = 42$, ou seja, 42 reais.
Pedido de 100 m²: $100 \cdot 42 = 4\,200$; logo, R$ 4.200,00. Pedido de 250 m²: $250 \cdot 42 = 10\,500$; logo, R$ 10.500,00.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. A tabela mostra os valores finais de determinado tipo de piso de acordo com as medidas de área total da superfície em que será colocado.

Preço do piso laminado

Medida de área (em m²)	Valor (em R$)
40	1.680,00
60	2.520,00
140	5.880,00
180	7.560,00

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Qual será o valor de um pedido de 100 m² desse piso? E de 250 m²?

b) Qual é a lei que relaciona o valor (y), em reais, com a medida de área (x) total do piso, em metros quadrados? $y = 42 \cdot x$

c) Quando a medida de área total do piso adquirido se reduz à metade, o valor do pedido ficará multiplicado por qual número? $\frac{1}{2}$

2. Diz-se que uma aeronave está em velocidade de cruzeiro no período seguinte ao final da subida e anterior ao início da descida, enquanto mantém uma medida de velocidade aproximadamente constante. A medida da velocidade de cruzeiro de determinado tipo de avião é de 900 km/h. Os itens a seguir consideram o período em que o avião permanece em velocidade de cruzeiro.

a) Qual é, em quilômetros, a medida de distância percorrida pelo avião nos intervalos de tempo de 15 minutos, meia hora, 2 horas e 5 horas? Represente os dados em uma tabela, no caderno.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Quanto tempo o avião demora para percorrer 3 600 km? $\frac{3\,600}{900} = 4$; logo, 4 horas.

c) Relacione, por meio de uma lei, a medida de distância percorrida (d), em quilômetros, em relação à medida de tempo (t), em horas. $d = 900 \cdot t$

d) Suponha uma aeronave com medida de velocidade de cruzeiro de 1000 km/h. A medida de tempo necessário para percorrer 3 600 km aumentaria ou diminuiria? Determine essa nova medida de tempo.
Diminuiria; 3 horas e 36 minutos.

3. Um estudante construiu uma sequência de 5 quadrados usando as medidas dos lados apresentadas na tabela a seguir. Depois, calculou as medidas de perímetro e de área de cada um.

Medidas dos quadrados

Medida do lado (em cm)	1	3,5	5	8	10
Medida de perímetro (em cm)	4	14	20	32	40
Medida de área (em cm²)	1	12,25	25	64	100

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Copie e complete a tabela no caderno.

b) Qual é a lei de correspondência entre a medida de perímetro (p) e a medida do lado (ℓ) do quadrado? $p = 4 \cdot \ell$

c) Qual é a lei de correspondência entre a medida de área (A) e a medida do lado (ℓ) do quadrado? $A = \ell \cdot \ell = \ell^2$

d) Dobrando a medida do lado, dobra-se a medida de perímetro? Dobrando a medida do lado, dobra-se a medida de área?
Sim; não.

e) **Experimente** construir, em uma calculadora gráfica, a tabela com os dados que você completou no caderno. Descreva a diferença entre o alinhamento dos pontos relacionados à medida de perímetro e o dos pontos relacionados à medida de área.

4. Duas torneiras idênticas, com a mesma medida de vazão, enchem um reservatório vazio em 20 minutos.

a) Construa, no caderno, uma tabela para representar a medida de tempo (em minutos) gasto para encher esse mesmo reservatório, quando vazio, se forem utilizadas 1, 4, 8 e 10 torneiras, todas idênticas às duas primeiras.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Qual é a lei que relaciona a medida de tempo (t), em minutos, gasto para encher o reservatório de acordo com o número n de torneiras? $t = \frac{40}{n}$

c) Quantas dessas torneiras seriam necessárias para encher o reservatório em 1 minuto e 36 segundos? 25 torneiras.

3. e) Exemplo de resposta: Os pontos do gráfico que relaciona a medida do lado com a medida de perímetro são alinhados, já os pontos do gráfico que relacionam a medida do lado com a medida de área não.

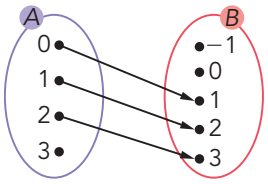
Função como relação entre conjuntos

Iniciaremos o estudo das funções considerando relações entre elementos de 2 conjuntos.

Vamos considerar, por exemplo, os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e algumas relações entre elementos de A e elementos de B.

1ª) Vamos associar a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x + 1$:

Banco de imagens/ Arquivo da editora

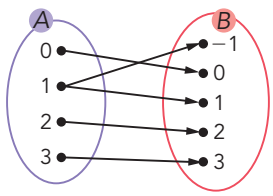


x	$y = x + 1$
0	1
1	2
2	3

Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 3, existe um só elemento $y \in B$ tal que y é o correspondente de x. Para o elemento $3 \in A$, não existe correspondente $y \in B$.

2ª) Vamos associar a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y^2 = x^2$:

Banco de imagens/ Arquivo da editora

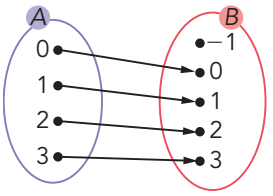


x	$y^2 = x^2$
0	0
1	1 ou –1
2	2
3	3

Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 1, existe um só elemento $y \in B$ tal que y é o correspondente de x. Para o elemento $1 \in A$, existem dois elementos correspondentes em B: 1 e –1.

3ª) Vamos associar, a cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ tal que $y = x$:

Banco de imagens/ Arquivo da editora

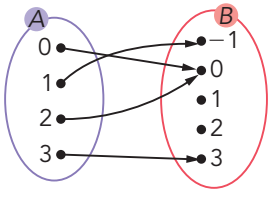


x	$y = x$
0	0
1	1
2	2
3	3

Para todo $x \in A$, sem exceção, existe um único $y \in B$ tal que y é o correspondente de x.

4ª) Vamos associar, a cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ tal que $y = x^2 - 2x$:

Banco de imagens/ Arquivo da editora



x	$y = x^2 - 2x$
0	0
1	–1
2	0
3	3

Para todo $x \in A$, sem exceção, existe um único $y \in B$ tal que y é o correspondente de x.

Observação

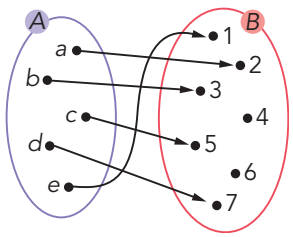
Note que, se x e y são números reais tais que $y^2 = x^2$, então $y = x$ ou $y = -x$; ou seja, se os quadrados de dois números reais são iguais, não obrigatoriamente os dois números são iguais. Por exemplo: $(-3)^2 = 3^2$ e $-3 \neq 3$. Se fizessem parte do conjunto B, –2 e –3 também estariam associados a $x = 2$ e $x = 3$, respectivamente.

Nas 3ª e 4ª relações, ocorre que, para todo $x \in A$, existe um, e só um, $y \in B$ tal que y está associado a x. Por esse motivo, cada uma dessas relações recebe o nome de **função** definida em A com valores em B.

Nas 1ª e 2ª relações, por outro lado, essa condição não se confirma. Na 1ª, porque há um valor $x \in A$ (3) que não está associado a nenhum elemento $y \in B$. Na 2ª, porque há um valor $x \in A$ (1) que está associado a dois elementos de $y \in B$ (–1 e 1). Por conta disso, essas relações não podem ser consideradas funções.

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de **função de *A* em *B***.

Considere, por exemplo, a relação entre os elementos dos conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$x \in A$	$y \in B$
a	2
b	3
c	5
d	7
e	1

Essa relação é uma função porque, a todo elemento de A, corresponde um único elemento de B. Tal relação também poderia ser descrita por uma tabela, em que cada $x \in A$ tem um único correspondente $y \in B$.

A mesma relação poderia, ainda, ser descrita por um conjunto f de pares ordenados do tipo (x, y), em que $x \in A$, $y \in B$ e y é o correspondente de x:

$$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 5), (d, 7), (e, 1)\}$$

Nessa função, dizemos que $x = a$ corresponde a $y = 2$, ou $x = a$ está associado a $y = 2$, ou ainda 2 é a **imagem** de a.

Do mesmo modo, 3 é a imagem de b, 5 é a imagem de c, 7 é a imagem de d e 1 é a imagem de e. Note, mais uma vez, que cada $x \in A$ tem uma única imagem $y \in B$.

Notação

De modo geral, se f é um conjunto de pares ordenados (x, y) que define uma função de A em B, indicamos:

$$f: A \to B \text{ (lê-se “}f\text{ é uma função de }A\text{ em }B\text{”)}$$

Se, nessa função, $y \in B$ é imagem de $x \in A$, indicamos:

$$y = f(x) \text{ (lê-se “}y\text{ é igual a }f\text{ de }x\text{”)}$$

Retomando o exemplo anterior, temos: $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, $f(c) = 5$, $f(d) = 7$, $f(e) = 1$.

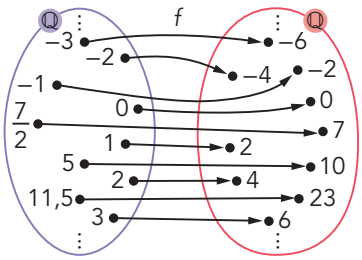
Funções definidas por fórmulas

Vamos verificar alguns exemplos de funções em que y pode ser calculado a partir de x por meio de uma fórmula (ou regra, ou lei).

A lei de correspondência que associa cada número racional x ao número racional y, sendo y o dobro de x, é uma função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida pela fórmula $y = 2x$ ou $f(x) = 2x$.

Nessa função:

- para $x = 5$, temos $y = 2 \cdot 5 = 10$ e escrevemos $f(5) = 10$;
- a imagem de $x = -3$ é -6, pois $f(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$;
- $y = 7$ é a imagem de $x = \frac{7}{2}$, pois $f\left(\frac{7}{2}\right) = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7$.



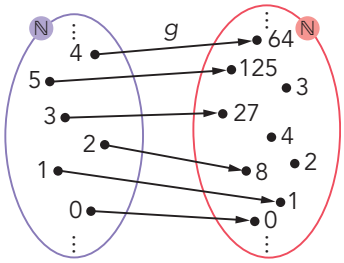
Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que, nessa função, todo número racional é imagem de algum x racional. De fato, dado $y_0 \in \mathbb{Q}$, o elemento x cuja imagem é y_0 é $x_0 = \frac{y_0}{2}$, pois $f(x_0) = 2\frac{y_0}{2} = y_0$. Verifique essa lei de associação entre os conjuntos no esquema anterior.

Já a função g, que associa a cada número natural x o número natural y, sendo y o cubo de x, é uma função $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $y = x^3$ ou $g(x) = x^3$.

Nessa função:

- para $x = 2$, temos $y = 2^3 = 8$ e dizemos que $g(2) = 8$;
- para $x = 5$, temos $y = 5^3 = 125$ e assim $g(5) = 125$;
- $y = 64$ é a imagem de $x = 4$, pois $g(4) = 4^3 = 64$;
- não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $y = 4$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que, nessa função, apenas os cubos perfeitos são imagens de algum x natural. Por exemplo: 0, 1, 8, 27, 64, 125, ...

É importante notar que, se definirmos outra função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^3$, seria possível, por exemplo, calcular $h(-2{,}1) = -9{,}261$. Porém, diferente de g, as imagens de h não são apenas cubos perfeitos de algum x natural.

Atividades resolvidas

1. Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela fórmula $f(x) = -\frac{3x + 8}{5}$.

a) Calcule $f(3)$, $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$ e $f(\sqrt{2})$.

b) Determine o elemento x cuja imagem é 0.

Solução:

a) $f(3) = -\frac{3 \cdot 3 + 8}{5} = -\frac{17}{5}$

$f(-2) = -\frac{3 \cdot (-2) + 8}{5} = -\frac{2}{5}$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3 \cdot \frac{1}{4} + 8}{5} = -\frac{\frac{35}{4}}{5} = -\frac{7}{4}$

$f(\sqrt{2}) = -\frac{3\sqrt{2} + 8}{5}$

b) $f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3x + 8}{5} = 0 \Rightarrow 3x + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{8}{3}$

2. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x + m$, em que m é uma constante real. Calcule m, sabendo que $f(-2) = 5$.

Solução:

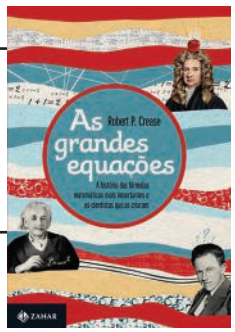
Note que as variáveis relacionadas nesta função estão representadas por x e $f(x)$, enquanto m representa um número real fixo, isto é, m é uma constante.

De $f(-2) = 5$, obtemos $4 \cdot (-2) + m = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow -8 + m = 5 \Rightarrow m = 13$. Portanto, a lei da função é $f(x) = 4x + 13$.

Dica

Livro *As grandes equações*, de Robert P. Crease (Rio de Janeiro: Zahar, 2008)

A obra conta a história da descoberta de algumas das mais importantes fórmulas matemáticas.



Reprodução/Jorge Zahar

5. a) Sim, pois, para cada $x \in A$, há um único $y \in B$ associado a esse x. Exemplo de lei: $y = x$, $y = x^3$ ou $y = x^5$, etc.

b) Não, pois existe um $x \in A$ associado a dois valores de $y \in B$.

c) Sim, pois, para cada $x \in A$, há um único $y \in B$ associado a esse x. Exemplo de lei: $y = 2x$.

d) Não, pois existe um valor de $x \in A$ que não está associado a $y \in B$.

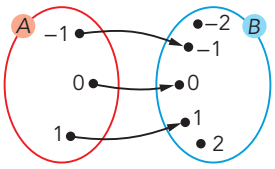
7. Exemplo de problema: Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 4, 9\}$ e a função f: $A \to B$ tal que $f(x) = x^2$. Qual elemento de A está associado ao elemento 1 de B?

ATIVIDADES

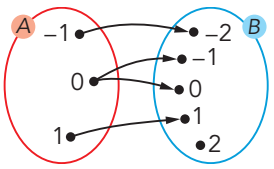
Não escreva no livro

5. Em cada caso, verifique se a relação representada no esquema é uma função de A em B, sendo $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Em caso afirmativo, dê uma possível lei que defina tal função.

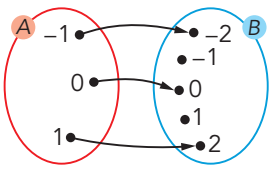
a)



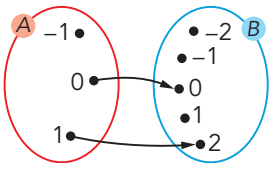
b)



c)



d)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

8. A discussão favorece o desenvolvimento do TCT *Educação para o Consumo* e do ODS **12** ao tratar da desvalorização de produtos eletrônicos, das vantagens do reúso deles e do consumo consciente. Sugerimos que a atividade seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

6. Sendo $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, verifique em cada caso se a lei dada define uma função de A com valores em B.

a) $f(x) = 2x$ $f(-1) = -2$, $-2 \in B$; $f(0) = 0$, $0 \in B$; $f(1) = 2$, $2 \in B$; $f(2) = 4$, $4 \in B$; sim.

b) $f(x) = 2x + 1$ Não, pois, se $x = 2$, $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ e $5 \notin B$.

7. Elabore e resolva no caderno um problema envolvendo uma função de A em B, em que $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e B é um conjunto com até 10 elementos a serem definidos por você.

8. A lei a seguir mostra a relação entre o valor (v), em reais, de certo equipamento eletrônico e o tempo de uso (t), em anos.

Reprodução/ONU

$$v(t) = 1800 \cdot \left(1 - \frac{t}{10}\right), \text{ com } 0 \leqslant t \leqslant 10$$

gabriel12/Shutterstock

De acordo com o Monitor Global de Lixo Eletrônico da Organização das Nações Unidas (ONU), são descartadas mais de 50 toneladas de lixo eletrônico por ano no mundo todo. Esses resíduos contêm substâncias tóxicas, como metais pesados, que, quando descartados de maneira incorreta, contaminam tanto o solo quanto a água.

a) Qual é o valor desse equipamento novo, isto é, sem uso? R$ 1.800,00

b) Qual é a desvalorização, em reais, do equipamento no primeiro ano de uso? R$ 180,00

c) Com quantos anos de uso o aparelho valerá R$ 1.260,00? 3 anos.

d) **Troque ideias** com os colegas sobre as vantagens e as desvantagens de comprar um aparelho eletrônico usado (computador, celular, *videogame*, etc.) e faça uma pesquisa de comparação de preço entre a versão nova e a versão usada.

Resposta pessoal. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções deste Manual*.

Domínio e contradomínio

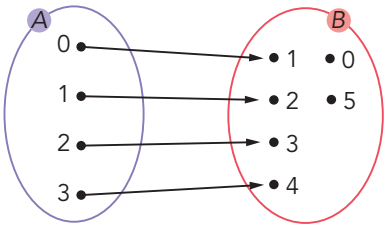
Seja $f: A \to B$ uma função.

O conjunto A é chamado **domínio de *f***, e o conjunto B é chamado **contradomínio de *f***.

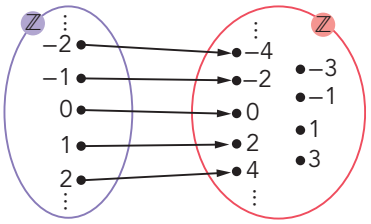
Em geral, a notação para o domínio da função f é $D(f)$ e para o contradomínio de f é $CD(f)$.

Considere os exemplos a seguir.

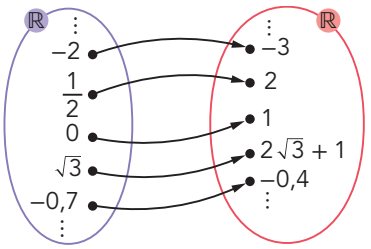
- Sendo $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, a função $f: A \to B$ tal que $f(x) = x + 1$ tem domínio A e contradomínio B.



- Sendo $A = \mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Z}$, a função $f: A \to B$ tal que $f(x) = 2x$ tem domínio $\mathbb{Z}$ e contradomínio $\mathbb{Z}$.



- Sendo $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$, a função $f: A \to B$ definida por $f(x) = 2x + 1$ tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que todo elemento x do domínio tem uma única imagem y no contradomínio, embora possam existir elementos do contradomínio que não sejam imagem de algum x do domínio. No exemplo da função definida por $f(x) = x + 1$, os números 0 e 5 não são imagens de algum $x \in A$. Já no exemplo da função definida por $f(x) = 2x$, os números inteiros ímpares não são imagens de qualquer $x \in \mathbb{Z}$. E no exemplo da função por $f(x) = 2x + 1$, todos os números reais são imagens de algum $x \in \mathbb{R}$ do domínio.

Determinação do domínio

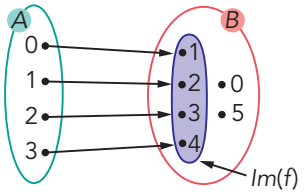
Quando não é dado explicitamente o domínio $D(f)$ de f, deve-se subentender que $D(f)$ é formado por todos os números reais que podem substituir x na lei de correspondência $y = f(x)$ de modo que, efetuados os cálculos, resulte um y real. Considere alguns exemplos.

- O domínio da função f definida pela lei $y = 3x + 4$ é $D(f) = \mathbb{R}$, pois, qualquer que seja o valor real atribuído a x, o número $3x + 4$ também é real.
- O domínio da função h dada por $y = \sqrt{x - 2}$ é $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$, pois $\sqrt{x - 2}$ só é um número real se $x - 2 \geqslant 0$.
- A função i dada por $y = \dfrac{1}{x - 1} + \sqrt{x}$ é definida apenas para $x - 1 \neq 0$ e $x \geqslant 0$; então, o domínio é $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0 \text{ e } x \neq 1\}$.

Conjunto imagem

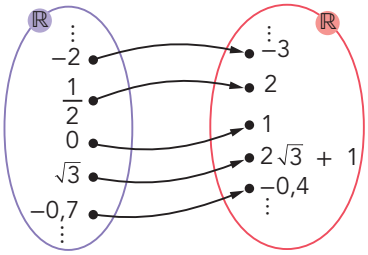
Se $f: A \to B$ é uma função, chama-se **conjunto imagem de *f***, o subconjunto do contradomínio constituído pelos elementos y que são imagens de algum $x \in A$. Em geral, a notação para o conjunto imagem de f é $Im(f)$.

- Para a função $f: A \to B$ definida por $f(x) = x + 1$, tal que $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, o conjunto imagem de f é:



$Im(f) = \{1, 2, 3, 4\}$

- A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ tem seu conjunto imagem dado por:



$Im(f) = \mathbb{R}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesse exemplo, todos os números reais são imagens de algum $x \in \mathbb{R}$ do domínio de f. De fato, dado um número real qualquer a, ele é imagem de $x = \frac{a-1}{2}$:

$f\left(\frac{a-1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{a-1}{2}\right) + 1 = a - 1 + 1 = a, \forall\, a \in \mathbb{R}$ (lê se "para todo a pertencente ao conjunto dos números reais")

O procedimento apresentado não é o único modo de determinar o conjunto imagem de uma função. Muitas vezes, a determinação do conjunto imagem de uma função será feita por meio da leitura do gráfico, como será apresentado adiante.

ATIVIDADES

14. a) Exemplo de resposta: $f(x) = \frac{5}{(x+3)(x-2)}$.

b) Exemplo de resposta: $f(x) = \sqrt{5 - x}$.

Não escreva no livro

9. Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de f.

a) $f: A \to B$ dada por $f(x) = x^2$
$D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{0, 1, 4\}$

b) $f: A \to B$ dada por $f(x) = -x + 1$
$D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

c) $f: A \to B$ dada por $f(x) = |x|$
$D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{0, 1, 2\}$

10. Se $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x \leqslant 5\}$ e $f: A \to B$ é definida pela lei $y = 2x + 1$, quantos são os elementos de B que não pertencem ao conjunto imagem da função?

11. Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = -x$. Qual é o conjunto imagem de f? $Im(f) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leqslant 0\}$

12. Se x e y são números reais e $y = f(x)$, estabeleça o domínio de cada uma das funções dadas pelas leis a seguir. Explique, com suas palavras, como você determinou cada domínio.

a) $y = -4x^2 + 3x - 1$ $\mathbb{R}$; resposta pessoal.

b) $y = \frac{4}{x-1}$ $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; resposta pessoal.

13. Se x e y são números reais e $y = f(x)$, determine o domínio das funções definidas por:

a) $y = \sqrt[3]{4x + 1}$ $\mathbb{R}$

b) $y = \frac{3x+1}{\sqrt{x-3}}$

14. Determine uma possível lei de função cujo domínio seja:

a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3 \text{ e } x \neq 2\}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 5\}$

10. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Im(f) = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$. Os elementos de B que não pertencem a $Im(f)$ são: -5, -4, -2, 0, 2 e 4, num total de 6.

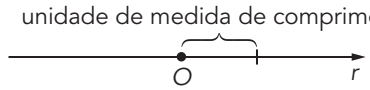
13. b) $x - 3 \geqslant 0$ e $\sqrt{x-3} \neq 0 \Rightarrow x \geqslant 3$ e $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x > 3$; $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

Plano cartesiano

Representação de pontos em uma reta

Vamos agora retomar alguns conceitos sobre a representação geométrica do conjunto dos números reais.

Dada uma reta *r*, podemos associar números reais aos pontos dessa reta. Para isso, escolhemos um ponto *O* (origem), uma unidade de medida de comprimento e um sentido positivo.

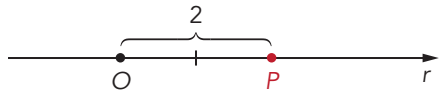


Banco de imagens/ Arquivo da editora

A cada ponto *P* dessa reta, associamos um número real *x* tal que:

- Se *P* está à direita de *O* (sentido de *O* a *P* é positivo), *x* é a medida do segmento $\overline{OP}$ associada a um sinal positivo.

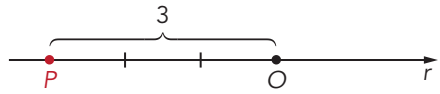
  Exemplo: $x = +2 = 2$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

- Se *P* está à esquerda de *O* (sentido de *O* a *P* é negativo), *x* é a medida do segmento $\overline{OP}$ associada a um sinal negativo.

  Exemplo: $x = -3$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Em ambos os casos, dizemos que *x* é a medida algébrica do segmento $\overline{OP}$ associada a um sinal (positivo ou negativo).

Observação

Se *P* coincide com *O*, então $x = 0$.

Representação de pontos em um plano

Para representar pontos em um plano, vamos proceder da seguinte maneira.

1º) Traçamos 2 retas (eixos) perpendiculares e usamos a intersecção *O* entre elas como origem para cada um desses eixos.

2º) Para cada um dos eixos, escolhemos uma unidade de medida de comprimento e um sentido positivo.

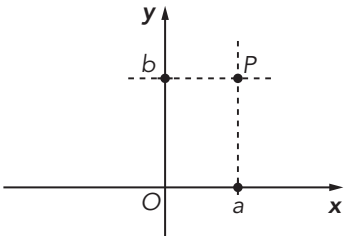
3º) Para cada ponto *P* do plano, traçamos:

- uma reta paralela ao eixo vertical que intersecta o eixo horizontal no ponto *a*;
- uma reta paralela ao eixo horizontal que intersecta o eixo vertical no ponto *b*;
- o ponto *P* é a intersecção dessas duas retas.

4º) O número real *a*, medida algébrica do segmento $\overline{OP_x}$, é a **abscissa** de *P*, e o número real *b*, medida algébrica do segmento $\overline{OP_y}$, é a **ordenada** de *P*.

No estudo dos lances de uma partida de xadrez, é usada uma notação que tem como base coordenadas geométricas. Por exemplo, na imagem, uma das torres brancas está na casa de linha 1 e coluna A.

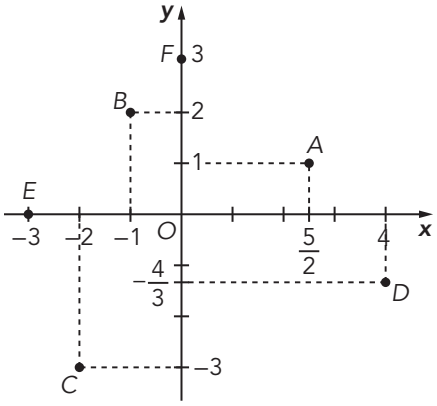
No gráfico, note que a abscissa e a ordenada de P são positivas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

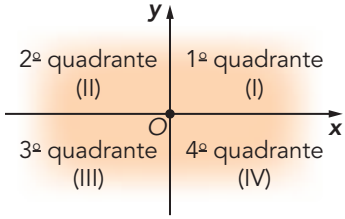
Os números reais a e b são as **coordenadas** de P, que são indicadas por meio do **par ordenado** $P(a, b)$. O plano que contém as 2 retas dadas inicialmente, isto é, os dois eixos, é o **plano cartesiano**. O eixo horizontal (Ox) é o **eixo das abscissas**, e o eixo vertical (Oy) é o **eixo das ordenadas**.

Verifique, no plano cartesiano a seguir, a representação dos pontos $A\left(\frac{5}{2}, 1\right)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, -3)$, $D\left(4, -\frac{4}{3}\right)$, $E(-3, 0)$ e $F(0, 3)$ por meio das coordenadas:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Cada uma das 4 regiões do plano dividido pelos eixos cartesianos chama-se **quadrante**. A numeração dos quadrantes é feita no sentido anti-horário, iniciando a contagem pelo quadrante correspondente aos pontos que têm ambas as coordenadas positivas.



Banco de imagens/
Arquivo da editora

EXPERIMENTE

Não escreva no livro

Representar pontos em um *software*

Vamos definir um ponto em um *software* de Geometria dinâmica. Para isso, no campo de entrada, digite "(*a*,*b*)" e pressione a tecla *Enter*.

O *software* deve exibir o ponto A e o controle deslizante correspondente às coordenadas do ponto (esse recurso controla a variação dos valores de a e b).

- Arraste o ponto do controle deslizante da coordenada a. O que você notou em relação à movimentação do ponto A? O ponto se movimenta horizontalmente no plano.
- Arraste o ponto do controle deslizante da coordenada b. O que você notou em relação à movimentação do ponto A? O ponto se movimenta verticalmente no plano.

15. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

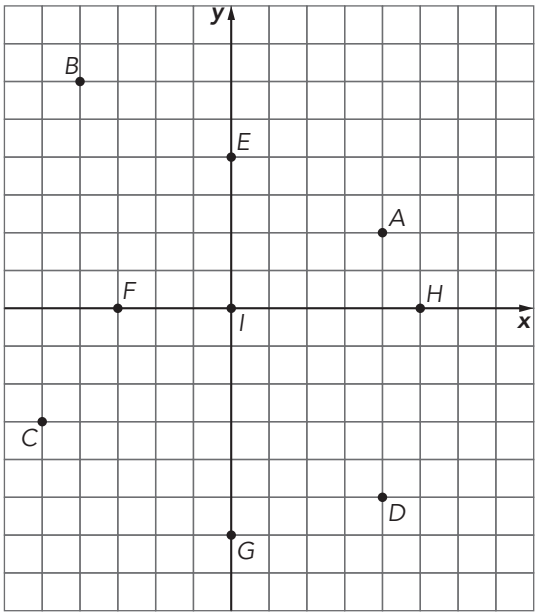
ATIVIDADES

Não escreva no livro

15. Construa um plano cartesiano no caderno e localize os pontos $A(3, 1)$; $B(-4, 2)$; $C(5, -3)$; $D(-1, -1)$; $E(2, 0)$; $F(0, -2)$; $G(0, 0)$; $H(-4, 0)$; $I(0, 4)$; $J\left(-\frac{3}{2}, -4\right)$; $K(\sqrt{2}, 2)$; $L\left(-2, \frac{5}{2}\right)$; e $M\left(3, -\frac{7}{3}\right)$.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

16. Escreva em seu caderno as coordenadas de cada ponto assinalado no plano cartesiano a seguir. O lado de cada quadradinho mede 1 unidade. $A(4, 2)$; $B(-4, 6)$; $C(-5, -3)$; $D(4, -5)$; $E(0, 4)$; $F(-3, 0)$; $G(0, -6)$; $H(5, 0)$; $I(0, 0)$



Banco de imagens/Arquivo da editora

17. Determine x e y que tornam válida, em cada caso, a igualdade:

a) $(x, y) = (2, -5)$ $x = 2$ e $y = -5$

b) $(x + 4, y - 1) = (5, 3)$

c) $(x + y, x - 3y) = (3, 7)$

18. Determine m para que $(m^2, m + 4) = (16, 0)$.

19. O ponto $P(m - 3; 4)$ pertence ao eixo y. Qual é o valor de m? $m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$

20. O ponto $Q(-2, m^2 - 1)$ pertence ao eixo das abscissas. Qual é o valor de m?

$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = +1$ ou $m = -1$

21. Para cada item, represente, em um plano cartesiano, o conjunto de pontos (x, y) tais que:

a) $y > 0$

b) $x \leqslant 0$

c) $x = y$

d) $x \cdot y < 0$

e) $y = 0$

f) $x = 0$ e $y \geqslant 0$

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

22. O ponto $P(a, b)$ pertence ao 2º quadrante.

a) Quais são os sinais de a e de b? $a < 0$ e $b > 0$

b) A qual quadrante pertence o ponto $Q(-a, b)$?

22. b) Como $a < 0$, temos que $-a > 0$ e $b > 0$, e o ponto Q pertence ao 1º quadrante.

17. b) $\begin{cases} x + 4 = 5 \\ y - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 1$ e $y = 4$

c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow x = 4$ e $y = -1$

18. $\begin{cases} m^2 = 16 \Rightarrow m = +4 \text{ ou } m = -4 \\ m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \end{cases}$

Portanto, $m = -4$.

Construção de gráficos

Como podemos construir o gráfico de uma função conhecendo a lei de correspondência $y = f(x)$ e o domínio $D(f)$?

Se $D(f)$ é finito, é possível proceder assim:

- **1º passo:** construímos uma tabela em que aparecem os valores de x pertencentes a $D(f)$ e os valores do correspondente y, calculados por meio da lei $y = f(x)$.
- **2º passo:** representamos cada par ordenado (a, b) da tabela por um ponto do plano cartesiano. O conjunto dos pontos obtidos constitui o gráfico da função.

Vamos analisar como construir o gráfico da função f dada por $y = 2x$, com domínio $D(f) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Como $D(f)$ é finito, seguiremos com os passos descritos.

1º passo:

Construímos uma tabela com os valores de x e de $y = f(x) = 2x$:

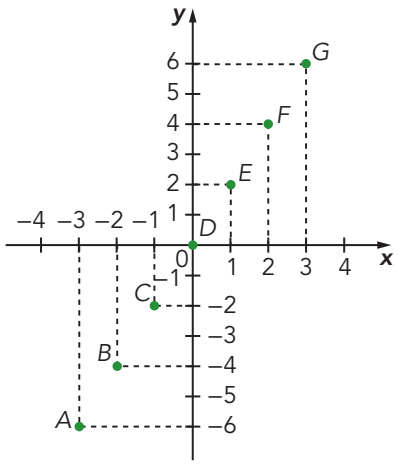
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2	4	6

2º passo:

Representamos os pares ordenados que estão na tabela por pontos no plano cartesiano. Vamos nomear os pontos da seguinte maneira: $A(-3, -6)$, $B(-2, -4)$, $C(-1, -2)$, $D(0, 0)$, $E(1, 2)$, $F(2, 4)$ e $G(3, 6)$.

O gráfico da função dada por $f(x) = 2x$, com domínio $D(f) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, é formado, portanto, por esses 7 pontos distribuídos no plano cartesiano. Os 7 pontos estão alinhados, o que será estudado no próximo capítulo deste Volume.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Observação

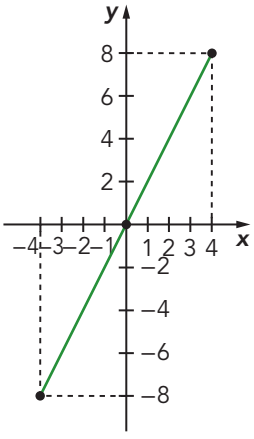
Se o domínio de uma função é formado por um conjunto infinito de pontos, podemos construir uma tabela e obter alguns pontos do gráfico; entretanto, o gráfico da função será constituído por infinitos pontos.

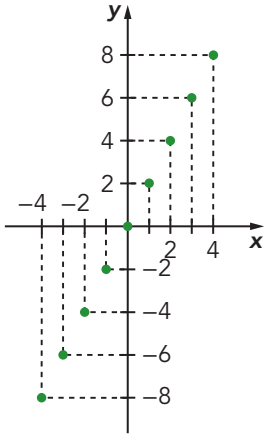
Agora note como são os gráficos da função f definida pela lei $y = 2x$ em domínios diferentes do exemplo anterior.

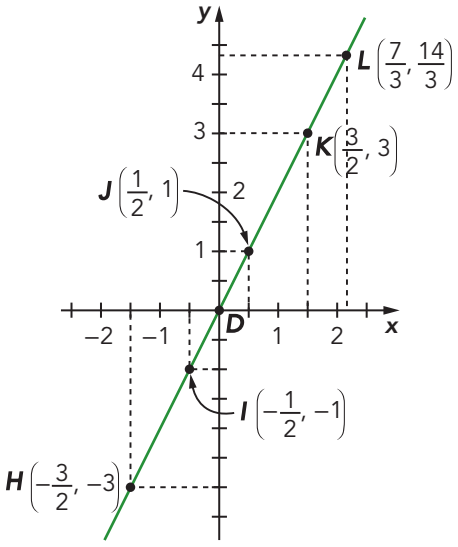
- $D(f) = [-4, 4]$
- $D(f) = \mathbb{Z}$
- $D(f) = \mathbb{R}$

As imagens não estão representadas em proporção.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora







Pense nisto

Não escreva no livro

Em qual(is) dos três domínios apresentados temos que $y = 100$ é imagem de algum valor de x da função dada por $y = 2x$? Nesse(s) caso(s), qual é o valor de x que corresponde a $y = 100$?

$D(f) = \mathbb{Z}$ e $D(f) = \mathbb{R}$. $x = 50$ em ambos os casos.

23. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

23. Construa no caderno o gráfico da função $f: A \to B$, sendo $B = \mathbb{R}$, dada pela lei $y = x + 1$ nos seguintes casos:

a) $A = \{0, 1, 2, 3\}$ Os gráficos encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) $A = [0, 3]$

c) $A = \mathbb{Z}$

d) $A = \mathbb{R}$

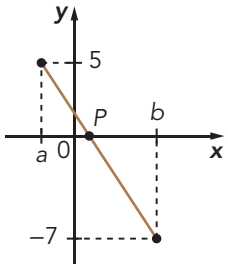
24. Construa no caderno o gráfico da função $f: A \to \mathbb{R}$ definida pela lei $y = -2x + 1$ nos seguintes casos: Os gráficos encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

b) $A = [-2, 2[$

c) $A = \mathbb{R}$

25. O gráfico a seguir representa a função $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $D = [a, b]$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que $f(x) = -3x + 2$, determine:

a) os valores de a e b;

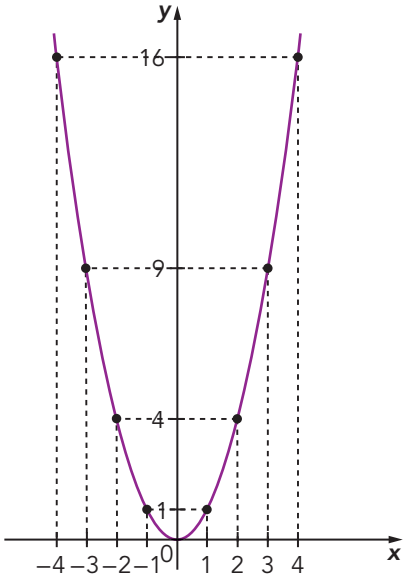
b) a abscissa do ponto P.

25. a) $f(a) = 5 \Rightarrow -3a + 2 = 5 \Rightarrow a = -1$
$f(b) = -7 \Rightarrow -3b + 2 = -7 \Rightarrow b = 3$
b) A abscissa de P é obtida fazendo $y = 0$, isto é: $-3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

Taxa média de variação de uma função

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2$, cujo gráfico está representado a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Vamos analisar, em certo intervalo, a maneira que os valores da imagem (isto é, da variável y) variam à medida que variam os valores do domínio (isto é, da variável x). Em outras palavras, à medida que x varia de x_1 até x_2, analisaremos como se dá a variação das imagens de $f(x_1)$ a $f(x_2)$.

Acompanhe a tabela a seguir considerando inicialmente o intervalo em que f é crescente, ou seja, em que, conforme os valores de x aumentam, os valores de $y = f(x)$ também aumentam. Esse caso ocorre para $x \geqslant 0$.

	x_1	x_2	$\Delta x = x_2 - x_1$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$\Delta y = y_2 - y_1$
I	0	1	$\Delta x = 1 - 0 = 1$	0	1	$\Delta y = 1 - 0 = 1$
II	1	2	$\Delta x = 2 - 1 = 1$	1	4	$\Delta y = 4 - 1 = 3$
III	2	3	$\Delta x = 3 - 2 = 1$	4	9	$\Delta y = 9 - 4 = 5$
IV	3	4	$\Delta x = 4 - 3 = 1$	9	16	$\Delta y = 16 - 9 = 7$

Nos itens I, II, III e IV, à medida que x aumenta 1 unidade, os valores de y aumentam 1, 3, 5 e 7 unidades, respectivamente. Note o sinal (positivo) de Δy.

Podemos perceber que a variação de y ($\Delta y = y_2 - y_1$) em relação à variação de x ($\Delta x = x_2 - x_1$) difere de acordo com os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

Considerando agora o intervalo em que f é decrescente, ou seja, em que os valores de $y = f(x)$ diminuem conforme os valores de x aumentam, nesse caso para $x \leqslant 0$, construímos a tabela:

	x_1	x_2	$\Delta x = x_2 - x_1$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$\Delta y = y_2 - y_1$
V	−4	−3	$\Delta x = (-3) - (-4) = 1$	16	9	$\Delta y = 9 - 16 = -7$
VI	−3	−2	$\Delta x = (-2) - (-3) = 1$	9	4	$\Delta y = 4 - 9 = -5$
VII	−2	−1	$\Delta x = (-1) - (-2) = 1$	4	1	$\Delta y = 1 - 4 = -3$
VIII	−1	0	$\Delta x = 0 - (-1) = 1$	1	0	$\Delta y = 0 - 1 = -1$

Nos itens V, VI, VII e VIII, à medida que x aumenta 1 unidade, os valores de y diminuem 7, 5, 3 e 1 unidade, respectivamente. Note o sinal (negativo) de Δy.

Sejam f uma função definida por $y = f(x)$ e x_1 e x_2 dois valores diferentes ($x_1 \neq x_2$) do domínio de f, cujas imagens são respectivamente $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

O quociente $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ recebe o nome de **taxa média de variação da função f**, para x variando de x_1 até x_2.

Como pode ser notado no exemplo a seguir, a taxa de variação indica o crescimento (ou decrescimento) médio de uma função entre dois pontos quaisquer de seu domínio. Essa medida pode ajudar a entender como uma grandeza muda em função de outra, permitindo que sejam feitas comparações entre trechos da função e, em determinados casos, projeções sobre o comportamento dela em outras partes do domínio.

Não escreva no livro

Pense nisto

A taxa média de variação de f muda quando invertemos o sentido do cálculo da variação de x, isto é, de x_1 até x_2 para x_2 até x_1?

Não. É indiferente escolher o sentido em que calculamos a variação (de x_1 para x_2 ou de x_2 para x_1).

Note que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-\left[-f(x_2) + f(x_1)\right]}{-(-x_2 + x_1)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Vamos retomar, por exemplo, a função definida por $f(x) = x^2$ com $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, apresentada anteriormente, e calcular a taxa média de variação de f, para x variando de:

- 0 a 1;

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

- 1 a 3;

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

- 3 a 1;

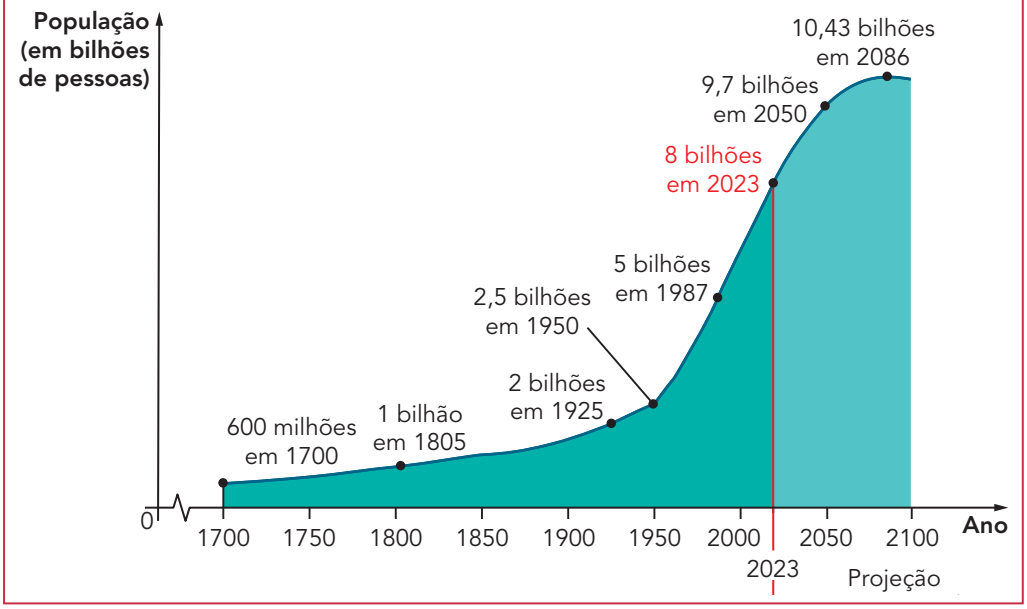
$$\frac{f(1) - f(3)}{1 - 3} = \frac{1 - 9}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

- -4 a -1.

$$\frac{f(-1) - f(-4)}{(-1) - (-4)} = \frac{1 - 16}{3} = \frac{-15}{3} = -5$$

Agora, vamos analisar o conceito estudado em outro contexto. O gráfico a seguir mostra a evolução da população mundial no decorrer do tempo (até 2023) e a projeção para o fim deste século (até 2100).

Crescimento da população mundial entre 1700 e 2100



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: ROSER, Max; RITCHIE, Hannah; ORTIZ-OSPINA, Esteban *et al. World population growth. Our world in data*. Disponível em: https://tedit.net/1frokt. Acesso em: 15 jul. 2024.

Vamos calcular, inicialmente, a taxa média de variação da população, em pessoas/ano, de 1700 a 2023:

$$\frac{8\,000\,000\,000 - 600\,000\,000}{2023 - 1700} = \frac{7\,400\,000\,000}{323} \simeq 22\,910\,217$$

Durante esse período, a taxa média de variação da população foi de aproximadamente 23 milhões de pessoas por ano.

Pense nisto

Considerando as informações apresentadas no gráfico, como é possível concluir em quais períodos a população cresceu mais rapidamente ou mais vagarosamente?

A taxa média encontrada não significa obrigatoriamente que a população mundial aumentou aproximadamente 23 milhões de pessoas por ano durante todos os anos considerados. Há períodos em que a população cresceu mais devagar (por exemplo, de 1700 a 1805) e períodos em que a população cresceu mais rapidamente (de 1950 a 1987, por exemplo). Quando analisamos globalmente, a variação ocorrida equivale, em média, a um aumento de aproximadamente 23 milhões de pessoas por ano.

A inclinação do gráfico indica como a população cresce rapidamente ao longo do tempo. Entre 1700 e 1805, a inclinação da curva é menor do que a inclinação entre os anos de 1950 e 1987, por exemplo.

A seguir, vamos comparar o ritmo de crescimento da população no período de 1987 a 2023 com a variação média encontrada para o período de 1700 a 2023.

- Período: de 1987 a 2023.

  A taxa média de variação, em pessoas/ano, é:

$$\frac{8\,000\,000\,000 - 5\,000\,000\,000}{2023 - 1987} = \frac{3\,000\,000\,000}{36} \simeq 83\,333\,333 \simeq$$
$$\simeq 83{,}33 \text{ milhões}$$

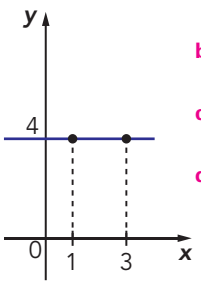
  Esse valor indica que esse período foi de crescimento muito acelerado, sendo aproximadamente 3,6 vezes maior que a taxa de crescimento média calculada para o período de 1700 a 2023.

ATIVIDADES

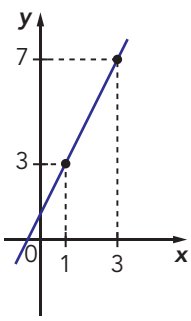
Não escreva no livro

26. Calcule a taxa média de variação da função de cada gráfico representado quando x varia de 1 a 3.

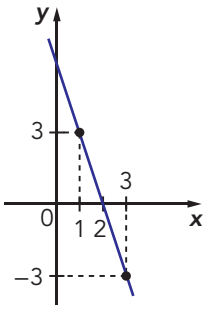
a)



b)

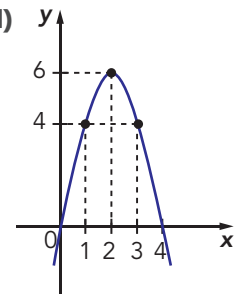


c)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

d)



Banco de imagens/Arquivo da editora

26. a) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4 - 4}{2} = 0$

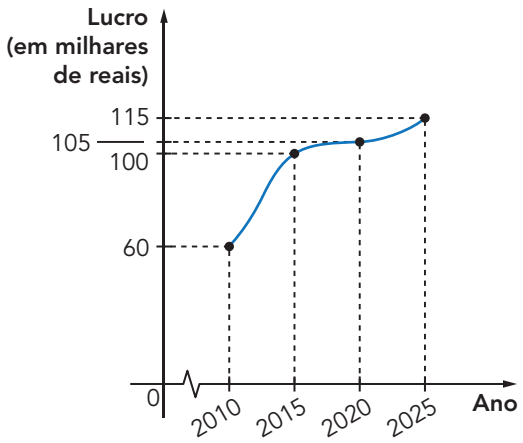
b) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{7 - 3}{2} = 2$

c) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - 3}{2} = -3$

d) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4 - 4}{2} = 0$

27. Considere o gráfico a seguir.

Lucro de uma pequena empresa entre 2010 e 2025



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Compare o ritmo de crescimento do lucro da empresa calculando a taxa média de variação do lucro nos 5 primeiros e nos 5 últimos anos do período considerado.

27. De 2010 a 2015: $\frac{100 - 60}{5} = 8$, portanto 8 milhares de reais/ano.

De 2020 a 2025: $\frac{115 - 105}{5} = 2$, portanto 2 milhares de reais/ano.

Nos 5 primeiros anos, o lucro cresceu 4 vezes mais rápido do que nos últimos 5 anos, então a taxa média de variação nos 5 primeiros anos é o quádruplo da taxa média de variação nos 5 últimos anos.

29. A discussão a respeito de insegurança alimentar favorece o desenvolvimento do TCT *Educação em Direitos Humanos* e da ODS **2**. Sugerimos que esta atividade seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Não escreva no livro

28. Em cada item, calcule a taxa média de variação da função dada quando x varia de 1 a 4.

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$. $-2{,}5$

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -3x + 5$. -3

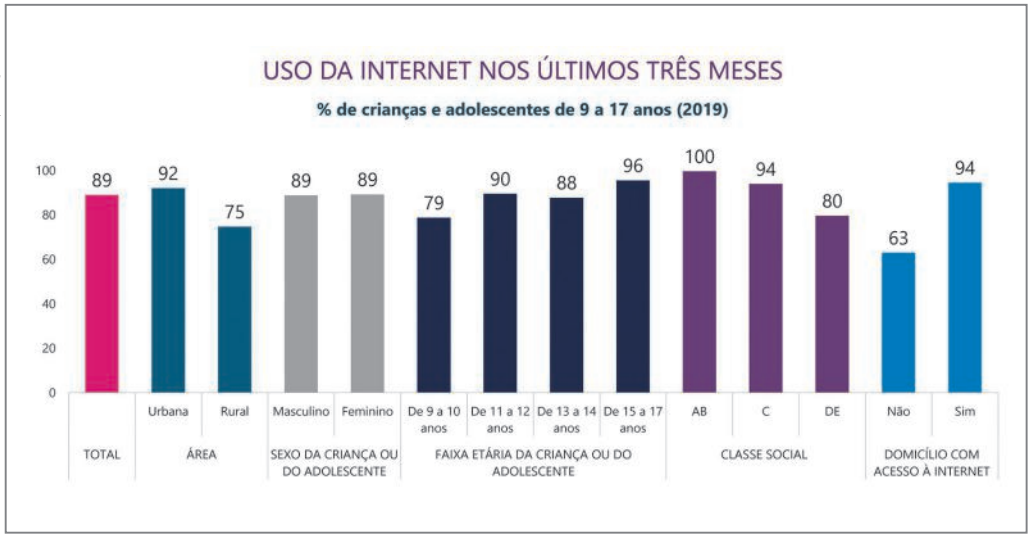
29. Dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) mostram que, em 2023, o percentual de domicílios brasileiros que apresentavam algum grau de insegurança alimentar era de 27,6%, o equivalente, na época, a 21,6 milhões de domicílios. Já em 2013, o percentual de domicílios brasileiros onde havia esse problema era de 22,6%, o equivalente, na época, a 14,8 milhões de domicílios. Calcule a taxa média de variação anual do número de domicílios que apresentaram algum grau de insegurança alimentar no período considerado.

Reprodução/ ONU

29. $\frac{21{,}6 - 14{,}8}{2023 - 2013} = \frac{6{,}8}{10} = 0{,}68$, ou seja, aproximadamente 680 mil domicílios, em média, por ano.

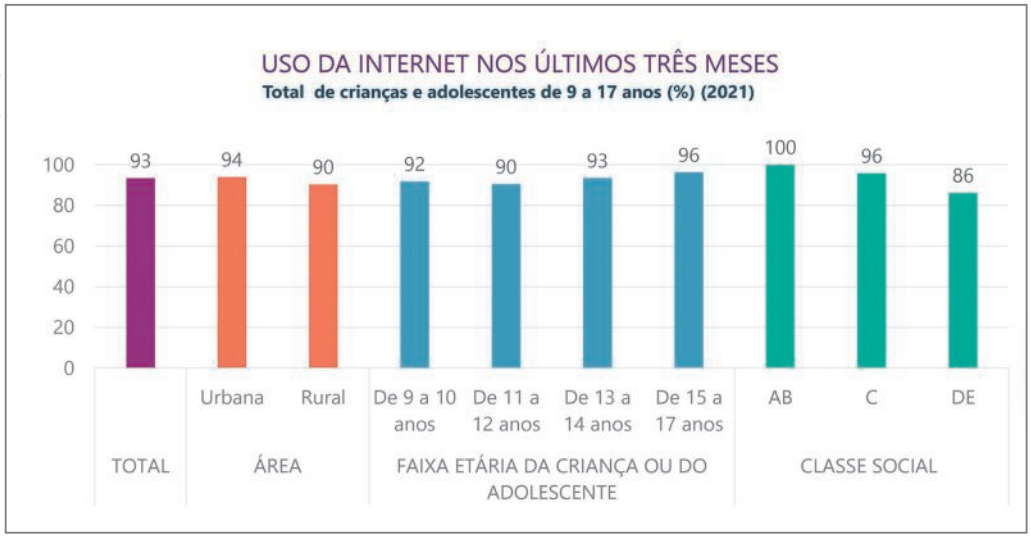
30. Periodicamente, o Centro Regional de Estudos para o Desenvolvimento da Sociedade da Informação (Cetic) realiza estudos sobre o uso da internet por crianças e adolescentes de 9 a 17 anos. Verifique os gráficos de barras que apresentam os resultados obtidos em 2019 e 2021, respectivamente:

Reprodução/cetic.br



Fonte dos dados: TIC KIDS ON-LINE BRASIL 2019. São Paulo: Unesco, 2020. Disponível em: https://tedit.net/ztjg28. Acesso em: 15 jul. 2024.

Reprodução/cetic.br



Fonte dos dados: TIC KIDS ON-LINE BRASIL 2019. São Paulo: Unesco, 2020. Disponível em: https://tedit.net/ztjg28. Acesso em: 15 jul. 2024.

a) Se você fosse o autor do relatório dos resultados de 2021 e tivesse que destacar as 2 principais mudanças em relação aos resultados de 2019, como a taxa média de variação poderia ajudar na escolha dos dados a serem evidenciados?

A taxa média de variação pode ajudar a perceber quais são os resultados que sofreram a maior variação ao longo dos 3 últimos anos.

b) Quais seriam as 2 maiores mudanças evidenciadas? Justifique, numericamente, a escolha delas.

30. b) As 2 maiores taxas de variação foram:

- total de crianças e adolescentes de 9 a 17 anos (%) da zona rural que acessaram a internet: $\frac{90 - 75}{2021 - 2019} = 5$; portanto, crescimento médio de 5 pontos percentuais ao ano;
- total de crianças e adolescentes de 9 a 10 anos (%) que acessaram a internet: $\frac{92 - 79}{2021 - 2019} = \frac{13}{3} \simeq 4{,}33$; portanto, crescimento médio de 4,33 pontos percentuais ao ano.

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Diversidade Cultural*.

Sugerimos que esta atividade seja trabalhada em conjunto com os professores de Geografia e de História, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Explore com os estudantes as diferenças culturais que levam a Índia a ser um país superpopuloso e países como Bulgária e Sérvia a ter uma taxa média de variação populacional negativa entre os dias atuais e 2050.

Infográfico clicável

A evolução da população mundial

Diversos canais de comunicação redigiram artigos sobre o crescimento populacional mundial quando atingimos a marca de 8 bilhões de habitantes, no final de 2022. A seguir, há trechos de um desses artigos que trazia, como parte de seu conteúdo, previsões a respeito da população mundial para um futuro próximo, algumas das quais já foram confirmadas com o passar dos últimos anos.

Comente com os estudantes que o gráfico na página anterior menciona que a população mundial atingiria a marca de 8 bilhões de pessoas em 2023 e no texto a seguir esse valor é mencionado como sendo atingido em 15 de novembro de 2022. Isso acontece pois os dados foram apresentados por diferentes fontes que aproximaram de modos diferentes a informação.

Somos 8 bilhões de pessoas e não vamos parar por aí

Em 2022, a população mundial chegou a 8 bilhões de habitantes. Segundo estimativas de um relatório da ONU, o dia em que chegamos nessa marca é 15 de novembro de 2022. [...]

De acordo com o relatório, a população chegará ao seu auge na década de 2080, com 10,43 bilhões de habitantes e deve ficar nesse nível até 2100, quando começará a diminuir. [...]

A superpopulosa China, tradicionalmente o país mais populoso do mundo por décadas, já apresenta uma diminuição significativa no crescimento, e por isso deve ser passada pela Índia em 2023.

Outros países, como Bulgária, Letônia, Lituânia, Sérvia e Ucrânia devem perder em torno [de] 20% da população até 2050. [...]

Atualmente somos 8 bilhões e somos cada vez mais velhos. Para 2050, a ONU acredita que a população acima de 65 anos será o dobro das crianças abaixo de 5 anos.

Isso não é apenas reflexo da diminuição da mortalidade, mas também da redução de nascimentos, diz o relatório.

I. Falsa. É previsto que durante esse período a população mundial nem cresça nem diminua, ou seja, tenha uma taxa de variação muito próxima de zero.

II. Falsa. Países como China já apresentam uma diminuição significativa na taxa média de crescimento.

III. Falsa. Taxas de crescimento negativas (menores que 0) indicam que a população mundial está diminuindo.

LADEIRA, Sávio. Somos 8 bilhões de pessoas e não vamos parar por aí. *G1*. Disponível em: https://tedit.net/puwkrk. Acesso em: 15 jul. 2024.

Algumas das previsões da reportagem de 2022 já se concretizaram: por exemplo, a população da Índia de fato ultrapassou a da China em 2023.

Com base nas informações da reportagem, analise se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas e corrija as que forem falsas.

I. É possível afirmar que a taxa de variação da população mundial será negativa entre os anos 2080 e 2100.

II. A tendência é que todos os países mais populosos no século XXI mantenham taxas médias de crescimento elevadas até 2100.

III. Uma taxa média de crescimento entre 0% e 1% indica que a população mundial está diminuindo.

IV. Países como Bulgária e Sérvia devem ter uma taxa média de variação populacional negativa entre os dias atuais e 2050. Verdadeira.

Parallel3/Shutterstock

A população da Índia atingiu aproximadamente 1,428 bilhão de pessoas em 2023. Fotografia de um grande engarrafamento de veículos na cidade de Mumbai, na Índia. Foto de 2023.

Caso julgue pertinente, apresente aos estudantes outras informações interessantes a respeito da população mundial que também estão disponíveis no *site* https://tedit.net/puwkrk (acesso em: 15 jul. 2024).

capítulo

4 Função afim

Função polinomial de 1º grau

Antes de apresentarmos o conceito de função afim e de função polinomial de 1º grau, vamos analisar alguns exemplos envolvendo questões do dia a dia.

Vamos supor que um vendedor de uma loja de roupas receba mensalmente da empresa em que trabalha um salário composto de 2 partes:

- um valor fixo de R$ 1.800,00;
- um adicional de 6% sobre o total das vendas realizadas por ele no mês.

Em certo mês, as vendas totalizaram R$ 20.000,00.

Para descobrir quanto o vendedor recebeu de salário, calculamos:

$$1800 + 6\% \cdot 20\,000 = 1800 + \frac{6}{100} \cdot 20\,000 = 1800 + 1200 = 3000$$

Assim, nesse mês, o salário dele foi R$ 3.000,00.

Em outro mês, as vendas totalizaram R$ 8.000,00, e o vendedor recebeu $1800 + 6\% \cdot 8\,000 = 1800 + 480 = 2\,280$, isto é, R$ 2.280,00.

Podemos notar que, para cada total x, em reais, das vendas no mês, há certo salário s pago ao vendedor. Nesse caso, a relação que expressa s em função de x é:

$$s(x) = 1800 + 0{,}06 \cdot x$$

Esse é um exemplo de função afim, que também é uma função polinomial de 1º grau.

Vamos supor agora que um restaurante *self-service* cobre R$ 4,80 a cada 100 g de comida. Dois amigos se serviram, nesse restaurante, de 620 g e 410 g, respectivamente. Vamos calcular quanto cada um pagou.

Fernando Favoretto/Criar Imagem

Ao preferir se alimentar em restaurantes *self-service* em vez de cadeias de *fast food*, você consegue evitar o consumo excessivo de ultraprocessados, deixando sua alimentação mais saudável.

Note, inicialmente, que R$ 4,80 por 100 g equivale a R$ 48,00 por quilograma. Assim, podemos calcular quanto cada amigo pagou. Quem se serviu de 620 g = 0,62 kg pagou R$ 29,76 (pois $0{,}62 \cdot 48 = 29{,}76$). O outro amigo pagou R$ 19,68 (pois $0{,}41 \cdot 48 = 19{,}68$).

O valor pago y, em reais, varia de acordo com a quantidade x de comida, em quilogramas. A lei que relaciona y e x, nesse caso, é $y = 48 \cdot x$, que é outro exemplo de função afim, que também é uma função polinomial de 1º grau.

Chama-se **função afim** qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais dados.

Na expressão da função afim:

- se $a \neq 0$, a lei é da forma $f(x) = ax + b$ e é denominada **função polinomial de 1º grau**;
- se $a = 0$, a expressão é da forma $f(x) = b$ e é chamada **função constante**.

Considere os exemplos de função afim a seguir.

- $f(x) = x - 3$, em que $a = 1$ e $b = -3$: é uma função polinomial de 1º grau.
- $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{5}$, em que $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{2}{5}$: é uma função polinomial de 1º grau.
- $f(x) = 11x$, em que $a = 11$ e $b = 0$: é uma função polinomial de 1º grau.
- $y = -2{,}5x + 1$, em que $a = -2{,}5$ e $b = 1$: é uma função polinomial de 1º grau.
- $y = \frac{3}{4}$, em que $a = 0$ e $b = \frac{3}{4}$: é uma função constante.

Gráfico de uma função polinomial de 1º grau

O gráfico de uma função polinomial de 1º grau, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy (isto é, é uma reta não paralela a qualquer dos eixos coordenados).

Demonstração

Sejam 3 pontos quaisquer distintos, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, pertencentes ao gráfico dessa função. Vamos verificar que A, B e C estão alinhados, isto é, pertencem a uma mesma reta.

Como A, B e C são pontos do gráfico da função, as coordenadas desses pontos satisfazem a lei $y = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$. Assim, temos:

$$\begin{cases} y_1 = a \cdot x_1 + b & \text{I} \\ y_2 = a \cdot x_2 + b & \text{II} \\ y_3 = a \cdot x_3 + b & \text{III} \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro II de III, encontramos:

$$y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2) \quad \text{IV}$$

Subtraindo I de II, obtemos:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad \text{V}$$

Dividindo IV por V, temos:

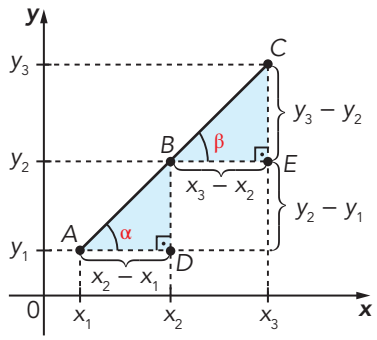
$$\frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} \quad \text{VI}$$

Observação

Provada essa propriedade, podemos, de agora em diante, construir o gráfico de uma função polinomial de 1º grau usando apenas 2 dos pontos dela, pois 2 pontos distintos do plano definem uma única reta.

Considerando a figura, temos que os triângulos *ABD* e *ACE* são semelhantes, pois têm os lados proporcionais (pela relação VI) e os ângulos formados por esses lados são congruentes (são ângulos retos).

Logo, os ângulos de medidas α e β são congruentes e, portanto, *A*, *B* e *C* estão alinhados.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

1. Construa o gráfico que representa a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $y = 3x - 1$.

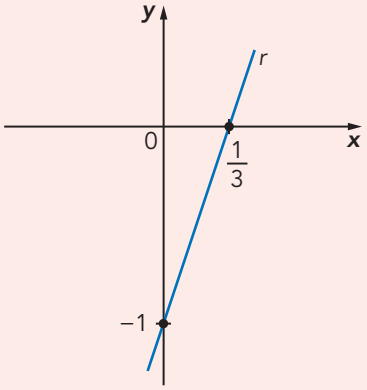
Solução:

Para construir o gráfico, basta obter 2 pontos e traçar a reta definida por eles no plano cartesiano. Por conveniência, vamos escolher o ponto em que $x = 0$ e o ponto em que $y = 0$.

- Para $x = 0$, temos $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$; portanto, um dos pontos é $(0, -1)$.
- Para $y = 0$, temos $0 = 3x - 1$; portanto, $x = \frac{1}{3}$ e o outro ponto é $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Marcamos os pontos $(0, -1)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ no plano cartesiano e traçamos a reta *r* que passa por eles.

A lei $y = 3x - 1$ é também chamada **equação da reta *r***.



Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos $P(-1, 3)$ e $Q(1, 1)$.

Solução:

A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ tem equação $y = a \cdot x + b$. Precisamos determinar os valores de *a* e *b*.

Como o ponto de coordenadas $(-1, 3)$ pertence à reta, temos:

$$3 = a \cdot (-1) + b, \text{ ou seja, } -a + b = 3.$$

Como o ponto de coordenadas $(1, 1)$ pertence à reta, temos $1 = a \cdot 1 + b$, ou seja, $a + b = 1$.

Assim, *a* e *b* satisfazem o sistema de equações $\begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 1 \end{cases}$ cuja solução é $a = -1$ e $b = 2$.

Portanto, a equação procurada é $y = -x + 2$.

Pense nisto

Não escreva no livro

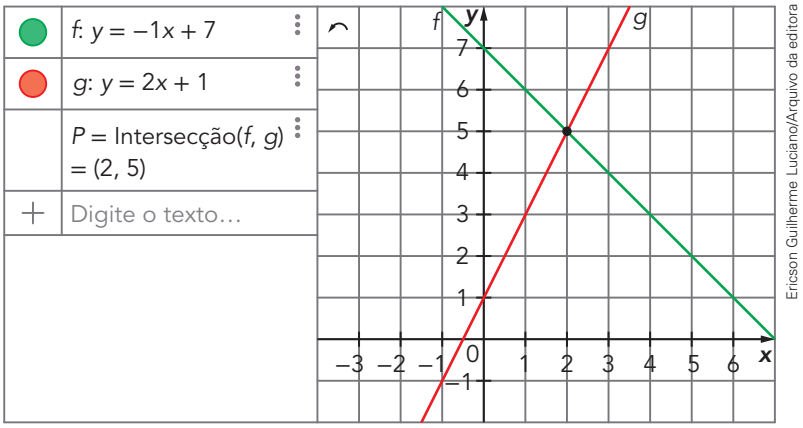
Qual é a diferença entre a lei de uma função polinomial de 1º grau definida por $f(x) = ax + b$ e uma equação do 1º grau definida por $ax + b = 0$?

A lei da função polinomial de 1º grau $y = ax + b$ é uma expressão algébrica que relaciona 2 variáveis *x* e *y*, de modo que para cada valor de *x* corresponde um único valor de *y*. Já a equação de 1º grau $ax + b = 0$, com *a* e *b* números reais conhecidos, é uma sentença expressa por uma igualdade na qual se deve determinar o valor da incógnita *x* de modo que a igualdade seja satisfeita.

Intersecção de retas

Se 2 retas são concorrentes, o ponto $P(x_0, y_0)$, no qual elas se intersectam, pertence a cada uma das 2 retas. Por isso, se nenhuma dessas retas for vertical (paralela ao eixo das ordenadas), as coordenadas desse ponto devem satisfazer simultaneamente às 2 leis das funções que são representadas pelas retas.

No gráfico a seguir, podemos notar como exemplo as retas r e s, que representam graficamente as funções dadas por $y = -x + 7$ e $y = 2x + 1$, respectivamente. O gráfico foi construído em uma calculadora gráfica *on-line*.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Assim, a solução do sistema formado pelas 2 leis $\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ fornece as coordenadas (x_0, y_0) de P.

Igualando, temos:

$$-x + 7 = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{-6}{-3} = 2$$

Substituindo esse valor de x em qualquer uma das equações, obtemos $y = 5$. Assim, (2, 5) é o ponto de intersecção.

Observação

É possível determinar a intersecção de retas no caso de uma delas ser vertical, mas como uma reta vertical não pode ser a representação gráfica de uma função, essa situação não é tratada neste capítulo.

Não escreva no livro

Pense nisto

É possível que um sistema de equações formado pelas leis de 2 funções afins não tenha solução? Qual é a interpretação geométrica nesse caso?

Sim. Se o sistema não tiver solução, as 2 retas não se intersectam, isto é, são paralelas distintas no plano.

Função constante

Uma função dada por $f(x) = ax + b$, quando $a = 0$, é denominada função constante.

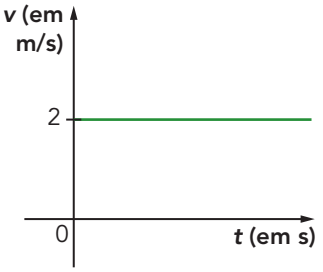
Chama-se **função constante** uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = 0x + b$, ou seja, $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Vamos considerar esta situação: uma pessoa caminha com medida de velocidade v constante de 2 m/s, descrevendo um movimento retilíneo uniforme, ou seja, mantendo a medida de velocidade constante e seguindo uma linha reta em sua caminhada.

Celso Pupo/Shutterstock

A Organização Mundial da Saúde (OMS) recomenda uma faixa mínima de 150 min a 300 min de atividade física de intensidade moderada, por semana.

O gráfico da função que relaciona v com a medida de tempo t, em segundos, é representado a seguir. Trata-se da função constante definida, para $x \geqslant 0$, por $y = 2$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

O gráfico de uma função constante dada por $f(x) = b$ é uma reta horizontal (paralela ao eixo das abscissas), pois para qualquer valor de x, o valor de y será sempre igual a b.

Função linear

Um caso particular de função afim é aquele em que $a \neq 0$ e $b = 0$. Nele, temos a função afim f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada pela lei $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}^*$. Esse tipo de função é denominado **função linear**.

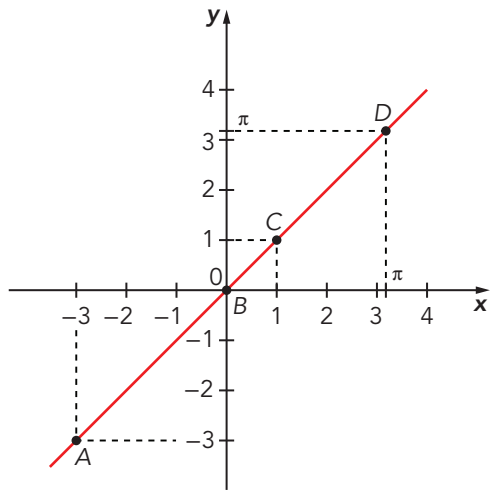
Exemplos de função linear:

- $f(x) = 3x$, em que $a = 3$.
- $f(x) = -4x$, em que $a = -4$.
- $f(x) = x$, em que $a = 1$. Nesse caso, a função f recebe a denominação especial de **função identidade**.

Para construir o gráfico da função identidade $f(x) = x$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, vamos obter alguns dos pontos. Perceba que, para qualquer x, temos $y = x$.

x	y	Ponto
−3	−3	$A(-3, -3)$
0	0	$B(0, 0)$
1	1	$C(1, 1)$
π	π	$D(\pi, \pi)$

Traçando uma reta pelos pontos da tabela, obtemos o gráfico de $f(x) = y = x$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto: Considerando a intersecção dos gráficos das funções lineares definidas por $f(x) = a_1x$ e $g(x) = a_2x$, em que $a_1 \neq a_2 \neq 0$, temos, igualando as leis das funções, $f(x) = g(x) \Rightarrow a_1x = a_2x \Rightarrow a_1x - a_2x = 0 \Rightarrow x \cdot (a_1 - a_2) = 0$. Como $a_1 \neq a_2$, $a_1 - a_2 \neq 0$, logo $x = 0$ e $f(0) = g(0) = 0$. Portanto, independentemente dos valores de a_1 e a_2, a intersecção ocorre no ponto de coordenadas (0, 0).

Não escreva no livro

Pense nisto

Quais são as coordenadas do ponto da intersecção dos gráficos de quaisquer 2 funções lineares não coincidentes?

1. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. d) Não. Considerando uma única visita: $v(x_2) = 3v(x_1) \Leftrightarrow 45 + 80 \cdot x_2 = 135 + 240 \cdot x_1 + \Leftrightarrow x_2 = 3 \cdot x_1 + \frac{9}{8}$. Nesse caso, o técnico deverá trabalhar o triplo mais $\frac{9}{8}$ de hora.

1. Um técnico em informática cobra R$ 45,00 a visita e um adicional de R$ 80,00 por hora de trabalho, com valor proporcional no fracionamento da hora.

a) Quanto o técnico receberia por um serviço de 2,5 h? $45 + 2{,}5 \cdot 80 = 245$; logo, R$ 245,00.

b) Dispondo de R$ 400,00, seria possível contratar esse técnico para um serviço de 4 horas? $45 + 4 \cdot 80 = 365 < 400$; assim, é possível contratá-lo.

c) Qual é a lei da função que representa o valor v, em reais, de um serviço de x horas feito pelo técnico? Esboce no caderno o gráfico dessa função. $v(x) = 45 + 80 \cdot x$
O gráfico encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

d) Certo dia, o técnico recebeu o triplo do que tinha recebido no dia anterior. Isso quer dizer que ele trabalhou o triplo do tempo que trabalhou no dia anterior? Justifique sua resposta.

2. Uma empresa aérea oferece aos passageiros 2 opções de uso da rede *wi-fi* para acesso durante voos.

1ª opção: taxa fixa de R$ 18,00 por voo com acesso ilimitado.

2ª opção: R$ 2,50 por hora de acesso, com valor proporcional no fracionamento da hora.

a) Escreva, para cada opção oferecida, a lei da função que relaciona o preço p, em reais, pago por esse serviço em função do tempo t (com $0 < t < 24$), em horas de acesso. $p(t) = 18$; $p(t) = 2{,}5 \cdot t$

b) Se escolher a 1ª opção, quanto um cliente que usou a rede por 5 horas em certo voo pagará a mais em comparação com a 2ª opção? R$ 5,50

c) Por quanto tempo de uso no voo da rede *wi-fi* seria indiferente a escolha de qualquer um dos planos? 7 h 12 min

d) **Experimente** construir os gráficos das 2 funções em uma calculadora gráfica. Lembre-se de que, para esboçar as 2 ao mesmo tempo, os gráficos precisam ter nomes diferentes ($p(t)$ e $q(t)$, por exemplo). Lembre-se também de que, para representar a casa decimal, o *software* geralmente usa o ponto em vez da vírgula. O que representa o encontro das 2 retas?

3. Construa, no caderno, os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas pelas expressões indicadas.
As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) $y = x + 1$

b) $y = -2x + 4$

c) $y = 3x + 2$

d) $y = -x - 2$

e) $y = \frac{5}{2}$

f) $y = -1$

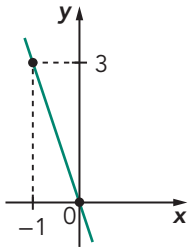
4. Uma reta passa pelos pontos de coordenadas (–1, 5), (2, –4) e (5, –13).

a) Qual é a lei da função representada por essa reta? $y = -3x + 2$

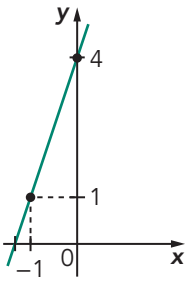
b) Foi necessário usar as informações dos 3 pontos para determinar a lei dessa função?

5. Obtenha a lei da função representada em cada gráfico a seguir.

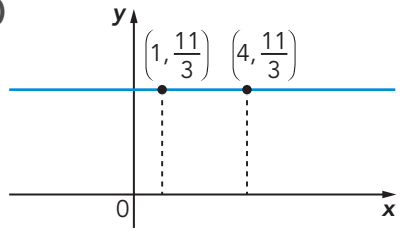
a) $y = -3x$



b) $y = 3x + 4$



c) $y = \frac{11}{3}$



6. Em uma corrida de táxi, é cobrado um valor fixo, conhecido como bandeirada, acrescido de outro valor, que tem uma relação linear com o número de quilômetros rodados. Sabendo que uma corrida de 10 km custou R$ 48,80 e outra de 25 km custou R$ 111,80, determine o valor cobrado em uma corrida de 18 km. R$ 82,40

4. b) Não, pois as coordenadas de 2 pontos bastam para determinar a lei dessa função.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. d) A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.
Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão.

7. Em cada caso, determine o ponto de intersecção das retas que representam as funções f e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dadas por:

a) $f(x) = 3x$ e $g(x) = x + 2$

$3x = x + 2 \Rightarrow x = 1$ e $f(1) = 3 \cdot 1 = 3$; o ponto é (1, 3).

b) $f(x) = -x + 3$ e $g(x) = 2x - 6$

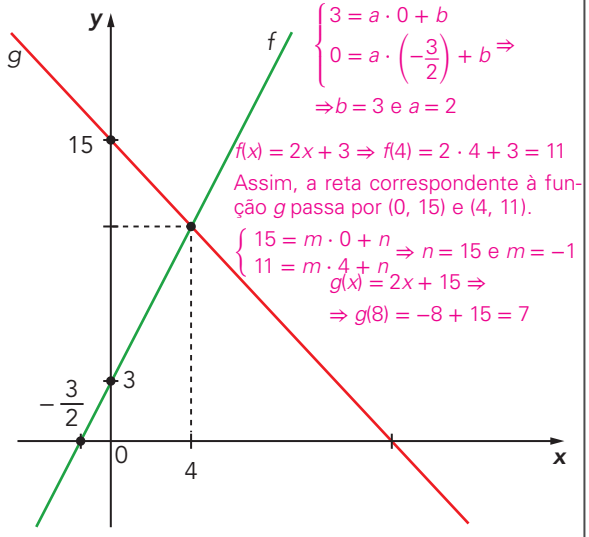
$-x + 3 = 2x - 6 \Rightarrow x = 3$ e $f(3) = -3 + 3 = 0$; o ponto é (3, 0).

c) $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x - 4$

$x + 2 = x - 4 \Rightarrow 0 \cdot x = -6 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$; assim, as retas são paralelas e não há intersecção entre elas.

8. Considere as representações dos gráficos das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = mx + n$. Calcule o valor de $g(8)$.

Pelo gráfico de f, os pontos (0, 3) e $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ pertencem à reta, então:



Banco de imagens/Arquivo da editora

$\begin{cases} 3 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + b \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 3$ e $a = 2$

$f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$

Assim, a reta correspondente à função g passa por (0, 15) e (4, 11).

$\begin{cases} 15 = m \cdot 0 + n \\ 11 = m \cdot 4 + n \end{cases} \Rightarrow n = 15$ e $m = -1$

$g(x) = 2x + 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(8) = -8 + 15 = 7$

9. Em certo ponto de uma viagem de carro, 2 irmãs decidem carregar os celulares delas. O celular da irmã mais nova está com 30% de bateria; e o da irmã mais velha, com 10%. A família dispõe de um carregador portátil, capaz de carregar 1,5% da bateria a cada minuto, e de um cabo que conecta o celular à parte elétrica do carro, com capacidade de carregar 1,0% da bateria a cada minuto. A irmã mais velha convence a mais nova de que deveria ficar com o carregador mais rápido, pois, ao final da viagem, ambas estariam com a mesma porcentagem de bateria carregada.

a) Escreva, no caderno, para cada uma das irmãs, a lei da função que relaciona a porcentagem p de bateria do celular em função do tempo t de viagem, em minutos, contado a partir do momento em que as irmãs começam a carregar os celulares.

$p_n(t) = 30 + t$

$p_v(t) = 10 + 1{,}5t$

b) **Experimente** usar uma calculadora gráfica para construir o gráfico das 2 funções e determine quanto tempo durou a viagem, considerando que, ao final dela, os 2 aparelhos estavam com a mesma porcentagem de carga. Determine, ainda, qual era a carga dos 2 aparelhos. Lembre-se de usar o ponto, em vez da vírgula, para indicar casas decimais.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

c) Em quanto tempo o celular da irmã mais velha já estaria com metade da bateria carregada? 26 min 40 s

10. Um automóvel consome, na estrada, 1 L de gasolina para andar, em média, 11 km.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Construa no caderno uma tabela com os dados da medida de distância percorrida pelo automóvel, em quilômetros, ao consumir 0,25 L; 0,5 L; 2 L; 5 L; 10 L; 20 L; e 30 L de gasolina.

b) Represente os pontos da tabela construída no item **a** em um plano cartesiano. Qual é a regularidade verificada?

c) Qual é a lei que relaciona a medida de distância percorrida pelo automóvel (d) em função da quantidade de combustível consumido (c)?

11. Uma organização não governamental (ONG) distribui alimentos para pessoas em situação de insegurança alimentar. O custo mensal da ONG por pessoa assistida é de R$ 75,00. Quando começou suas atividades, em janeiro de 2024, a ONG distribuía alimentos para 7 pessoas. No mês seguinte, aumentou o auxílio para 15 pessoas. A organização tem uma meta de incluir 5 pessoas por mês pelos 6 meses seguintes, até agosto.

Reprodução/ONU

a) Construa no caderno uma tabela com a quantidade de pessoas que devem receber o auxílio da ONG, mês a mês, desde janeiro até agosto de 2024, e os custos da organização com os alimentos.

b) Use um plano cartesiano para estudar a relação das variáveis (quantidade de pessoas e custo com alimentos) da tabela construída no item **a**. Que tipo de tendência os pontos indicam?

c) Qual é a lei da função que relaciona o custo (c) com alimentos da ONG em função de pessoas que recebem o auxílio (p)?

11. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual. A discussão a respeito de insegurança alimentar favorece o desenvolvimento do TCT *Educação em Direitos Humanos* e do ODS **2**. Sugerimos que esta atividade seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Grandezas diretamente proporcionais

Um técnico de um laboratório de controle de qualidade de materiais recebeu algumas amostras de etanol obtidas de certo fornecedor. Um dos testes que realizou para verificar se os combustíveis continham adulterações foi determinar a medida de volume e de massa de cada uma das amostras. Ele, então, organizou os resultados em uma tabela.

Amostras de etanol

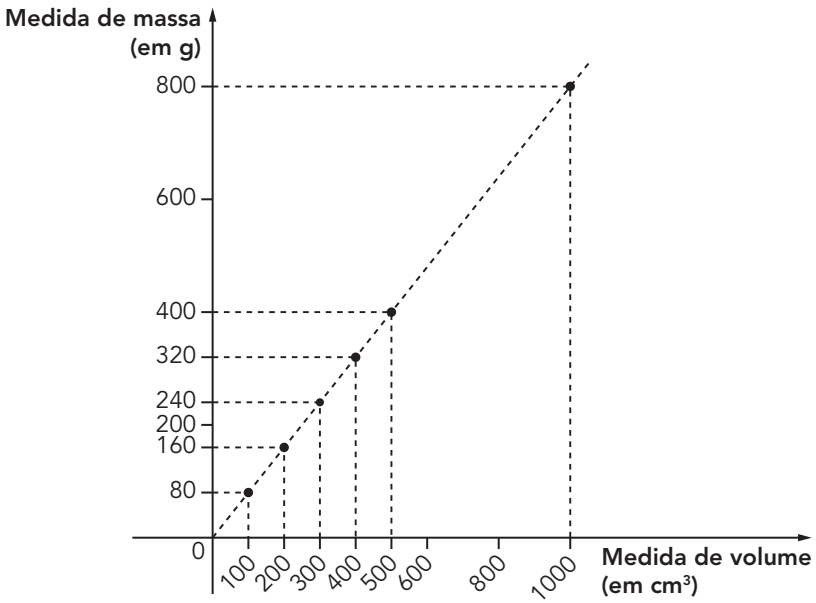
Teste nº	Medida de volume (em cm^3)	Medida de massa (em g)
1	100	80
2	200	160
3	300	240
4	400	320
5	500	400
6	1000	800

Dados elaborados para fins didáticos.

Rabbitmindphoto/Shutterstock

Para as análises do Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro), a expressão "precisão de uma balança" se refere à repetição de resultado para uma mesma medida de massa em medições diferentes, e o termo "exatidão", ao valor correto da medida de massa.

Podemos notar que, para cada medida de volume, existe, em correspondência, uma única medida de massa, ou seja, a medida de massa é função da medida de volume. Com os resultados obtidos, o técnico construiu o gráfico a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Ele notou que os pontos estavam alinhados, e, assim, era possível traçar uma reta passando por todos eles e pela origem do sistema de coordenadas cartesianas; ou seja, o técnico obteve o gráfico de uma **função linear**.

Ao verificar os pares de valores da tabela, o técnico percebeu que, em todas as amostras, a razão entre a medida de massa e a de volume era, em grama por centímetro cúbico, igual a 0,8.

$$\frac{80}{100} = 0{,}8 \quad \frac{160}{200} = 0{,}8 \quad \ldots \quad \frac{400}{500} = 0{,}8 \quad \ldots$$

Ele ainda constatou que:

- quando a medida de volume dobrava, a medida de massa também dobrava;
- quando a medida de volume triplicava, a medida de massa também triplicava;
- se a medida de volume era multiplicada por 10, a medida de massa também era multiplicada por 10, e assim por diante.

O técnico concluiu, então, que as medidas de volume e de massa de certa substância são **grandezas diretamente proporcionais**. Para dada substância, o quociente da medida de massa (m) pela correspondente medida de volume (V) é chamado **densidade**. A medida de densidade do combustível é 0,8 g/cm^3.

Se ele quisesse determinar a medida de massa correspondente a 140 cm^3 desse combustível, poderia efetuar:

$$\frac{m}{V} = 0{,}8 \Rightarrow \frac{m}{140} = 0{,}8 \Rightarrow m = 112$$

Assim, a medida de massa de 140 cm^3 desse combustível é igual a 112 g. Uma alternativa seria estabelecer a relação de proporção:

$$\begin{matrix} 100\ \text{cm}^3 \text{ —— } 80\ \text{g} \\ 140\ \text{cm}^3 \text{ —— } x \end{matrix} \Rightarrow 100\ \text{cm}^3 \cdot x = 140\ \text{cm}^3 \cdot 80\ \text{g} \Rightarrow x = 112\ \text{g}$$

Esse procedimento é comumente chamado **regra de três simples**.

A partir do cálculo dessa medida de densidade $\left(\frac{m}{V} = 0{,}8\right)$, obtemos a expressão $m = 0{,}8V$ da função representada graficamente no plano cartesiano anterior.

Não escreva no livro

Pense nisto

Essa expressão mostra que a medida de massa m é uma função linear da medida de volume V. Assim, a medida de volume V também é uma função linear da medida de massa m?

Sim. Pois, $m = 0{,}8V \Rightarrow$
$\Rightarrow V = \frac{m}{0{,}8} \Rightarrow V = 1{,}25\ m$.

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando uma grandeza y varia em função de outra grandeza x e, para cada par de valores (x, y), a razão $\frac{y}{x} = k$ (com $k \neq 0$) é constante.

Já a expressão dessa razão $\frac{y}{x} = k$ é equivalente a $y = kx$, que é a expressão de uma função linear. Assim, podemos concluir que a função linear é o modelo matemático que tratará dos problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais.

13. $\frac{15\,000}{12\,000} = \frac{5}{4} = \frac{x}{5\,400 - x} \Rightarrow 4x = 27\,00 - 5x \Rightarrow x = 3\,000$. Assim, Paula deve receber R$ 3.000,00 e Roberta, R$ 2.400,00.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

12. Em um hospital, verificou-se que, para cada médico, há 2 enfermeiros, e, para cada 3 enfermeiros, há 5 técnicos de enfermagem.

a) Qual é a razão entre o número de médicos e o número de técnicos de enfermagem? $\frac{3}{10}$

b) Se o número total de funcionários dessas 3 categorias que trabalham nesse hospital é 380, qual é o número de enfermeiros? 120 enfermeiros.

13. No primeiro mês de atividade, uma pequena empresa lucrou R$ 5.400,00. As sócias Paula e Roberta investiram, respectivamente, R$ 15.000,00 e R$ 12.000,00. Como deve ser dividido o lucro entre Paula e Roberta, se esse lucro for diretamente proporcional ao valor investido?

14. Em um quadrado, a medida do lado e a do perímetro são diretamente proporcionais? E a medida do lado e a da área? Sim; não.

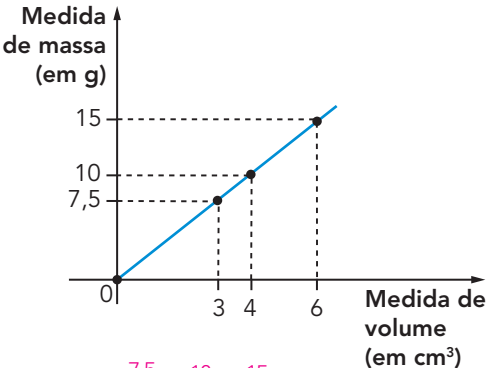
15. Considere todos os retângulos de medida de comprimento 3 metros e medida de largura x metros, sendo $x > 0$.

a) A medida de perímetro de cada retângulo é diretamente proporcional a x? Não.

b) A medida de área de cada retângulo é diretamente proporcional a x? Sim.

16. No gráfico a seguir está representada a relação entre a medida de massa e a medida de volume de certo óleo combustível.

Banco de imagens/Arquivo da editora



a) Sim, pois $\frac{7,5}{3} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \ldots = 2,5$.

a) As grandezas massa e volume são diretamente proporcionais?

b) Qual é a medida de densidade desse óleo? 2,5 g/cm³

c) Qual é a lei que relaciona a medida de massa (m) em função da medida de volume (V)? $m = 2,5 \cdot V$

17. Uma sorveteria cobra R$ 3,25 por 100 g de sorvete.

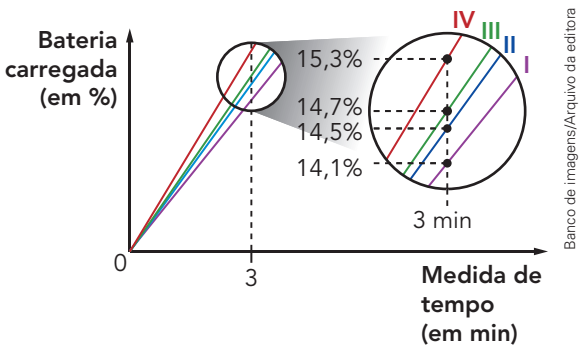
a) Qual é o preço a ser pago por alguém que se servir de 300 g de sorvete? E por quem se servir do dobro disso?
300 g: 3 · R$ 3,25 = R$ 9,75; 600 g: 6 · R$ 3,25 = R$ 19,50.

b) Qual é a lei da função que relaciona o valor pago (y), em reais, e a quantidade de quilogramas consumidos (x)? Construa no caderno o gráfico e determine se o custo do sorvete é diretamente proporcional à medida de massa dele. O preço de 1 kg (1 000 g) é 10 · R$ 3,25 = R$ 32,5; então: $y = 32,5 \cdot x$; sim.

c) Qual é o conjunto mais adequado para ser o domínio dessa função?
O conjunto dos números reais não negativos.

d) Raul comprou sorvete nessa sorveteria e pagou R$ 17,55. De quantos gramas de sorvete ele se serviu?
$17,55 = 32,5 \cdot x \Rightarrow x = 0,54$ kg = 540 g

18. Uma empresa pretende lançar no mercado um modelo inovador de *smartphone*. Para isso, estimou características de 4 protótipos de bateria (**I**, **II**, **III** e **IV**). O gráfico a seguir mostra os resultados, que relacionam a medida de tempo gasto no carregamento das baterias e o percentual carregado.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabe-se que a empresa pretende que o novo modelo de *smartphone* lançado não leve mais do que 20 minutos para carregar totalmente a bateria. Supondo que a relação entre o intervalo de tempo para carregar a bateria e o percentual carregado seja linear, determine qual(is) modelo(s) de bateria deve(m) ser descartado(s) nesse teste.
Os modelos **I**, **II** e **III** devem ser descartados.

Zero de uma função polinomial de 1º grau

Chama-se **zero da função polinomial de 1º grau** definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, o número real x tal que $f(x) = 0$.

Desse modo:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Observação

- O ponto de coordenadas $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ pertence ao eixo das abscissas. Dessa maneira, o zero de uma função polinomial de 1º grau corresponde à abscissa do ponto em que a reta intersecta o eixo Ox.
- O zero da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é o número real que é raiz da equação de 1º grau $ax + b = 0$, ou seja, é $x = -\frac{b}{a}$.
- O conjunto formado por todas as raízes de uma equação é chamado **conjunto solução**. Assim, o conjunto solução S da equação $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, é $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Vamos calcular, por exemplo, o zero da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = 2x - 5$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

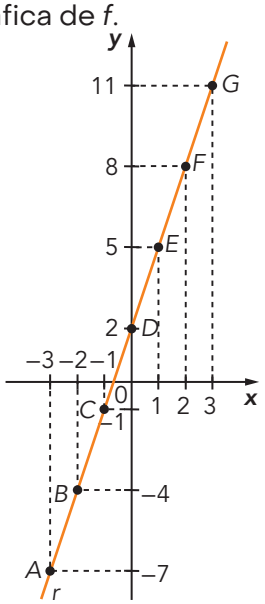
Para determinar o zero da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei $g(x) = 3x + 6$, fazemos:

$$g(x) = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Temos, ainda, que a reta que representa a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = -2x + 10$, intersecta o eixo Ox no ponto de coordenadas (5, 0), pois $h(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Taxa média de variação da função afim

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função afim definida por $y = 3x + 2$. No gráfico, destacamos alguns pontos da reta r, que é a representação gráfica de f.



Banco de imagens/Arquivo da editora

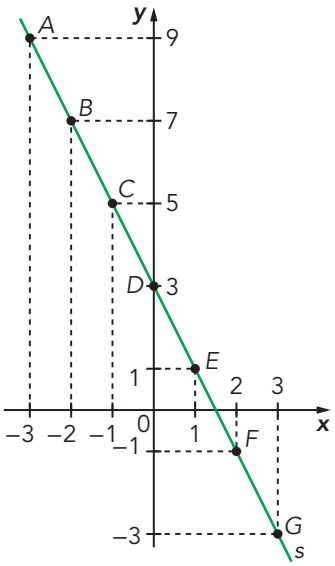
Vamos calcular a taxa média de variação dessa função nos seguintes intervalos.

Intervalo	Δx	Δy	Taxa média de variação: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
de A a B	$-2-(-3)=1$	$-4-(-7)=3$	$\frac{3}{1}=3$
de B a C	$-1-(-2)=1$	$-1-(-4)=3$	$\frac{3}{1}=3$
de E a F	$2-1=1$	$8-5=3$	$\frac{3}{1}=3$
de D a G	$3-0=3$	$11-2=9$	$\frac{9}{3}=3$
de B a E	$1-(-2)=3$	$5-(-4)=9$	$\frac{9}{3}=3$
de A a F	$2-(-3)=5$	$8-(-7)=15$	$\frac{15}{5}=3$

Note que, independentemente do intervalo considerado, a taxa média de variação dessa função é constante e igual a 3.

Acompanhe outro exemplo.

Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função afim expressa por $y = -2x + 3$. No gráfico, destacamos alguns pontos da reta s, que é a representação gráfica de f. Vamos calcular a taxa média de variação dessa função nos intervalos expressos na tabela.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Intervalo	Δx	Δy	Taxa média de variação: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
de A a B	$-2-(-3)=1$	$7-9=-2$	$\frac{-2}{1}=-2$
de B a C	$-1-(-2)=1$	$5-7=-2$	$\frac{-2}{1}=-2$
de E a F	$2-1=1$	$-1-1=-2$	$\frac{-2}{1}=-2$
de B a E	$1-(-2)=3$	$1-7=-6$	$\frac{-6}{3}=-2$
de C a G	$3-(-1)=4$	$-3-5=-8$	$\frac{-8}{4}=-2$
de A a G	$3-(-3)=6$	$-3-9=-12$	$\frac{-12}{6}=-2$

Note que, independentemente do intervalo considerado, a taxa média de variação dessa função é constante e igual a -2.

Em qualquer função afim, a taxa média de variação é constante, independentemente do intervalo entre os pontos considerados, como apresentado nos exemplos anteriores.

Desse modo, dizemos que a função afim, não constante, cresce ou decresce linearmente.

Propriedade:

Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim definida por $f(x) = ax + b$. A taxa média de variação de f, quando x varia de x_1 a x_2, com $x_1 \neq x_2$, é igual ao coeficiente a.

Observação

De acordo com a demonstração, podemos concluir que o cálculo da taxa média de variação de uma função afim não depende dos valores tomados x_1 e x_2.

Demonstração

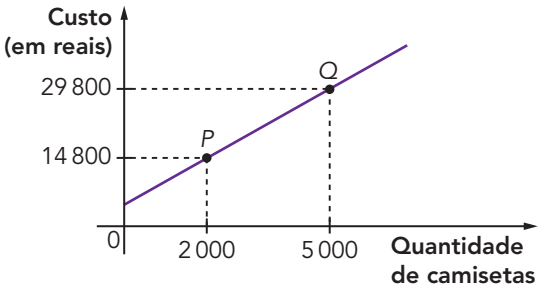
Se $f(x) = ax + b$, temos:

$$f(x_1) = ax_1 + b \text{ e } f(x_2) = ax_2 + b$$

A taxa média de variação de f, para x variando de x_1 até x_2, para quaisquer x_1 e x_2 reais, com $x_1 \neq x_2$, é:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot x_2 - a \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Vamos considerar a aplicação dessa propriedade nos custos de produção de uma fábrica de estampas de camiseta. O gráfico mostra o custo total mensal (y), em reais, para confeccionar x unidades de camisetas estampadas, considerando fixos os custos com funcionários e maquinário.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos calcular o custo de confecção de 3 000 camisetas.

Considerando o intervalo de P a Q, a taxa média de variação, em reais/camiseta, entre esses pontos é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{29\,800 - 14\,800}{5\,000 - 2\,000} = \frac{15\,000}{3\,000} = 5$$

Como se trata de uma função afim, sabemos que essa taxa é constante. Isso significa que, a cada camiseta produzida, o custo total aumenta em 5 reais.

Assim, considerando um aumento de 1 000 unidades a partir da produção de 2 000 camisetas (3 000 – 2 000 = 1 000), o aumento no custo é de 5 000 reais (1 000 · 5 = 5 000), o que elevaria os gastos a 19 800 reais (14 800 + 5 000 = 19 800).

Para obter a lei da função que relaciona x e y, podemos usar a taxa média de variação da função.

Como vimos, na lei $y = ax + b$, temos $a = 5$, isto é, $y = 5x + b$.

Considerando que o ponto $P(2\,000, 14\,800)$ pertence à reta, temos $x = 2\,000$ e $y = 14\,800$.

Aplicando esses valores na lei, temos:

$$14\,800 = 5 \cdot 2\,000 + b \Rightarrow b = 4\,800 \text{ (custo fixo da fábrica)}$$

Assim, a lei é $y = 5x + 4\,800$.

20. a) $5(3 - x) + 2(x + 1) = -x + 5 \Rightarrow 15 - 5x + 2x + 2 = -x + 5 \Rightarrow -2x = -12 \Rightarrow x = 6$; $S = \{6\}$

b) $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5x}{2} + \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4x}{6} - \frac{3}{6} = \frac{15x}{6} + \frac{8}{6} \Rightarrow \frac{11x}{6} = -\frac{11}{6} \Rightarrow x = -1$; $S = \{-1\}$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

19. c) O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

19. Faça o que é pedido.

a) Dada a função afim f cuja lei é $f(x) = 4x + 7$, calcule o zero da função. $-\frac{7}{4}$

b) Dada a função afim g cuja lei é $g(x) = -3x + 9$, determine o conjunto solução da equação $g(x) = 12$. $S = \{-1\}$

c) Determine a lei de uma função afim que admita $\frac{2}{7}$ como zero da função.

d) Determine a lei de uma função afim cuja taxa média de variação seja 0,5 e que admita 17 como zero da função. $j(x) = 0{,}5x - 8{,}5$

20. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações de 1º grau.

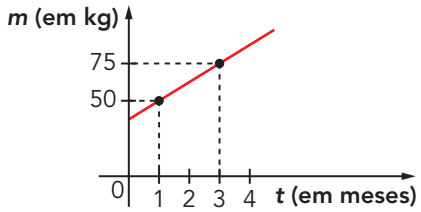
a) $5(3 - x) + 2(x + 1) = -x + 5$

b) $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5x}{2} + \frac{4}{3}$

21. Para um jogo de vôlei, foram vendidos ingressos de apenas 2 setores: arquibancada não numerada e arquibancada numerada. O ingresso para a arquibancada numerada era R$ 30,00 mais caro que o da não numerada. Sabendo que o público pagante foi de 3 200 pessoas, das quais 70% estavam na arquibancada não numerada, e a renda do jogo foi de R$ 140.800,00, determine o preço do ingresso da arquibancada numerada. R$ 65,00

22. O gráfico a seguir mostra uma estimativa simplificada da evolução da medida de massa (m) de um mamífero, em quilogramas, nos primeiros meses de vida.

Banco de imagens/Arquivo da editora

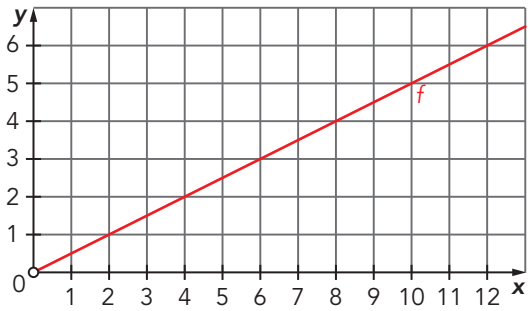


a) Calcule a taxa média de variação entre quaisquer 2 pontos dessa função e use esse valor para determinar a medida de massa esperada desse mamífero ao nascer.

b) Qual é a estimativa para a medida de massa do mamífero aos 2 meses de vida? $37{,}5 + 2 \cdot 12{,}5 = 62{,}5$; logo, 62,5 kg.

c) Qual é a estimativa para a medida de massa do mamífero aos 4,5 meses de vida? $37{,}5 + 4{,}5 \cdot 12{,}5 = 93{,}75$; logo, 93,75 kg.

23. Considere o gráfico da função afim f, com domínio $\mathbb{R}_+^*$, representado a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Elabore e resolva um problema no caderno que envolva essa função f e o conceito de proporcionalidade direta. Um exemplo de problema encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

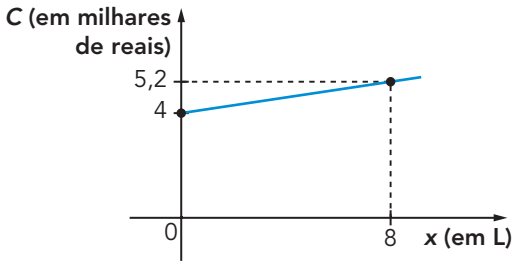
24. Um equipamento industrial novo foi comprado, em 2021, por R$ 4.800,00. O valor de mercado dele vem decrescendo linearmente com o tempo e, em 2024, era de R$ 4.050,00. Mantida essa tendência, determine:

a) a perda anual, em reais, do valor de mercado do equipamento; 250 reais/ano

b) o valor de mercado dele em 2027; R$ 3.300,00

c) a lei da função que associa a cada ano x, a partir de 2021 ($x = 0$), o valor y de mercado desse equipamento, em reais. $y = -250x + 4800$

25. O custo C, em milhares de reais, de produção de x litros de certa substância é dado por uma função afim, com $x \geqslant 0$, cujo gráfico está representado a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) O que o ponto de coordenadas (0, 4), pertencente à reta, indica? Indica o custo fixo da empresa.

b) Qual é o custo de produção de 1 litro dessa substância? R$ 150,00

c) O custo total de R$ 7.000,00 corresponde à produção de quantos litros dessa substância? 20 L

22. a) A taxa de variação é $\frac{75 - 50}{3 - 1} = \frac{25}{2} = 12{,}5$; ou seja, 12,5 kg/mês.

Assim, se, com 1 mês de vida, o mamífero já tinha 50 kg, ele deve ter nascido com $50 - 12{,}5 = 37{,}5$, ou seja, 37,5 kg.

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Física, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Movimento retilíneo uniforme

Imagine que você esteja num ônibus de viagem pela estrada retilínea e que o velocímetro desse ônibus se mantenha na mesma posição durante determinado intervalo de tempo, indicando 80 km/h.

Esse percurso com velocidade constante se trata de um **movimento retilíneo uniforme**: considerados intervalos de tempo iguais, o automóvel sofre deslocamentos iguais.

A função que descreve esse movimento uniforme é chamada **função horária**, que tem, como lei, a expressão $s(t) = s_0 + v \cdot t$, em que:

- $s(t)$ representa a posição do veículo correspondente à medida de tempo t, com $t \geqslant 0$;
- as constantes s_0 e v representam, respectivamente, a posição inicial do veículo (correspondente a $t = 0$) e a medida de velocidade escalar (velocidade do móvel em cada instante considerado).

Note que $s(t) = s_0 + v \cdot t$ é uma função polinomial de 1º grau do tipo $y = ax + b$, com x e y representados por t e s, respectivamente.

A taxa média de variação considerando quaisquer 2 pontos dessa função é constante e igual ao coeficiente de x, que vale a. Desse modo, v representa a taxa média de variação do espaço em relação ao tempo. E perceba que v representa também a medida de velocidade média nesse período.

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v$$

Acompanhe os exemplos a seguir.

- Na função horária $s(t) = 5 + 10t$, com t em segundos e s em metros, o coeficiente de t, que é igual a 10, representa a medida de velocidade escalar do móvel, isto é, $v = 10$ m/s.

  Como $v > 0$, o movimento é progressivo ("s cresce com t"), e o objeto em movimento se afasta da origem estabelecida no sentido definido como positivo.

- Na lei $s(t) = 40 - 20t$, com t em segundos e s em metros, temos $v = -20$ m/s.

  Como $v < 0$, o movimento é retrógrado ("s decresce com t"), e o objeto em movimento se afasta da origem estabelecida no sentido contrário ao definido como positivo.

fujji/Shutterstock

De acordo com a Polícia Rodoviária Federal (PRF), o excesso de velocidade foi a terceira maior causa de acidentes nas rodovias federais brasileiras em 2023.

Fonte dos dados: HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos de Física 1*: Mecânica. 9. ed. São Paulo: LTC, 2012.

1. Um motociclista percorre uma distância de 90 quilômetros em 45 minutos. Considerando a função que relaciona a medida de distância e de tempo nessa situação, qual é a medida de velocidade média desse motociclista em quilômetros por hora? 120 km/h

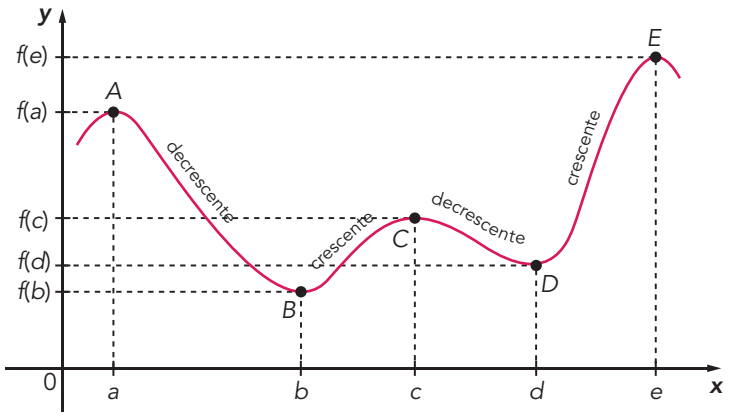
Crescimento e decrescimento

Seja f uma função qualquer, com domínio $D \subset \mathbb{R}$. Vamos apresentar o conceito geral de função crescente e de função decrescente.

Se, para quaisquer valores x_1 e x_2 de um subconjunto S (contido no domínio D), com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$, então f é crescente em S.

Se, para quaisquer valores x_1 e x_2 de um subconjunto S, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$, então f é decrescente em S.

Verifique, no gráfico a seguir, os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente.



Banco de imagens/Arquivo da editora

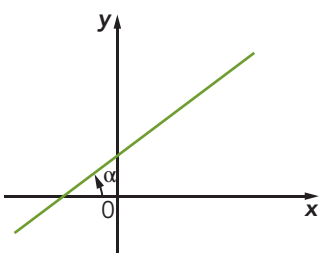
Vamos agora estudar o crescimento e o decrescimento de funções polinomiais de 1º grau.

O coeficiente angular

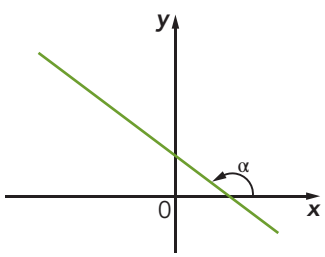
O gráfico da função polinomial de 1º grau $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = ax + b$, $a \neq 0$, é uma reta não paralela a qualquer dos eixos coordenados.

O coeficiente de x, indicado por a, é chamado **coeficiente angular** ou **declividade da reta** e está relacionado à inclinação da reta em relação ao eixo Ox.

Note o ângulo de medida α que a reta forma com o eixo x, convencionado tal como mostram os 2 casos a seguir (sentido anti-horário a partir do eixo Ox para a reta que representa o gráfico da função).



O ângulo de medida α é agudo ($0 < \alpha < 90°$).



O ângulo de medida α é obtuso ($90° < \alpha < 180°$).

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Professor, o conceito de coeficiente angular será apresentado com mais detalhes no Volume **3** desta coleção, na introdução à Geometria analítica.

Não escreva no livro

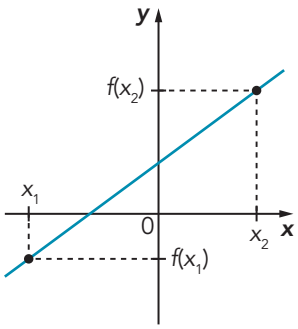
Pense nisto

Podemos considerar que uma reta que forma um ângulo de medida 90° com o eixo x é uma representação gráfica de uma função? Explique sua resposta.

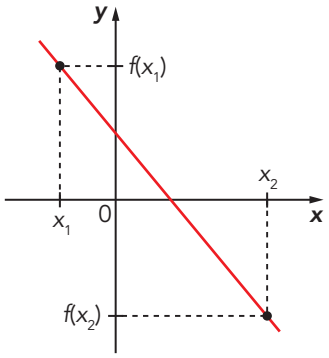
Não, pois, para um único valor de x, teríamos infinitos valores correspondentes de y.

Considerando a função polinomial de 1º grau definida por $f(x) = ax + b$, temos 2 possibilidades.

- Para $a > 0$, se $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$; e daí $ax_1 + b < ax_2 + b$. Logo, $f(x_1) < f(x_2)$. Portanto, f é uma função **crescente**.



- Para $a < 0$, se $x_1 < x_2$, então $ax_1 > ax_2$; e daí $ax_1 + b > ax_2 + b$. Logo, $f(x_1) > f(x_2)$. Portanto, f é uma função **decrescente**.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

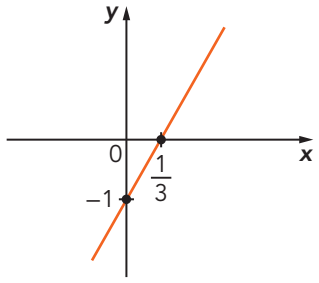
Vamos analisar alguns exemplos.

- Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 3x - 1$. Verifique a tabela e o gráfico de f.

x aumenta →

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–10	–7	–4	–1	2	5	8

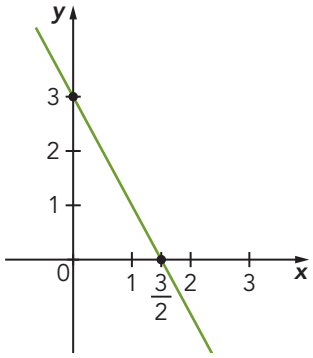
y aumenta →



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que $a = 3 > 0$, e, então, a função é crescente. Lembre-se de que a representa também a taxa média de variação de f.

- Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = -2x + 3$. Considere o gráfico de f.



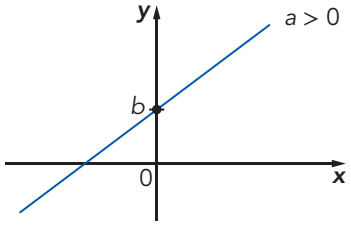
Banco de imagens/Arquivo da editora

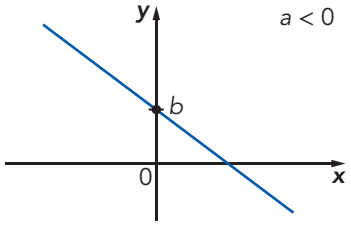
Note que $a = -2 < 0$, e, então, a função é decrescente. Lembre-se de que a representa também a taxa média de variação de f.

Em resumo, as funções f definidas por $f(x) = ax + b$, com $a > 0$, são crescentes; e aquelas com $a < 0$ são decrescentes.

O coeficiente linear

Na função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, o termo constante b é chamado **coeficiente linear** da reta. Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0 + b = b$. O ponto de coordenadas $(0, b)$ pertence ao eixo das ordenadas. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo Oy.





Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

ATIVIDADES

Não escreva no livro

26. O passageiro de um carro, ao passar por certo marco quilométrico de uma estrada, aciona o cronômetro. A tabela seguinte mostra a posição do carro durante alguns instantes.

Dados da viagem

Tempo x (em h)	Posição y (em km)
0,5	55
1,0	70
1,5	85
2,0	100

Dados elaborados para fins didáticos.

A resposta dos itens **d** e **e** encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Supondo que a medida de velocidade do carro se manteve a mesma durante toda a viagem, é possível determinar o marco quilométrico pelo qual o carro passou no início da contagem de tempo? Sim, 40 km.

b) A variação da posição na tabela, em medidas de intervalo de tempo iguais, é constante? Sim.

c) Qual é a taxa média de variação da posição em relação à medida de tempo? Qual é o significado dessa taxa média de variação?
30 km/h; corresponde à medida de velocidade média do veículo.

d) **Experimente** construir o gráfico da função que relaciona y e x, usando os valores fornecidos na tabela em uma calculadora gráfica. Qual é a tendência verificada?

e) Qual é a lei que relaciona a posição y em função do tempo x?

Experimente esboçar essa reta sobre os pontos representados no item **d**.

27. Para cada uma das funções afins dadas pelas leis seguintes, identifique o coeficiente angular (a) e o coeficiente linear (b). Classifique a função em crescente ou decrescente.

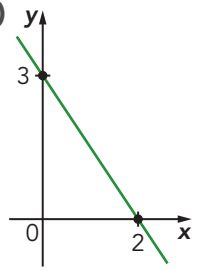
a) $y = 3x - 2$ $a = 3$ e $b = -2$; crescente.

b) $y = 9x$ $a = 9$ e $b = 0$; crescente.

c) $y = \frac{5 - 2x}{3}$ $a = -\frac{2}{3}$ e $b = \frac{5}{3}$; decrescente.

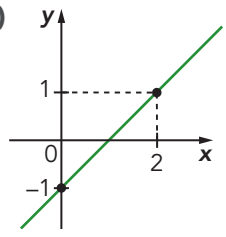
28. Determine os valores dos coeficientes angulares e lineares (a e b, respectivamente) das leis das funções que são graficamente representadas pelas retas a seguir.

a)



Dos pontos (0, 3) e (2, 0), temos: $a = \frac{0 - 3}{2 - 0} = -\frac{3}{2}$ (coeficiente angular) e $b = 3$ (coeficiente linear).

b)



Dos pontos (0, –1) e (2, 1), temos: $a = \frac{1 - (-1)}{2 - 0} = 1$ (coeficiente angular) e $b = -1$ (coeficiente linear).

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

EXPERIMENTE

O objetivo desta atividade é consolidar o estudo dos coeficientes angular e linear de uma reta por meio de um aplicativo de construção de gráficos. A ideia é, partindo de uma reta com os 2 coeficientes conhecidos, fixar um dos coeficientes e, por meio da variação do outro, analisar o que ocorre com as retas obtidas, na comparação com a reta original.

Não escreva no livro

Investigar gráficos de funções polinomiais de 1º grau com o apoio de um *software*

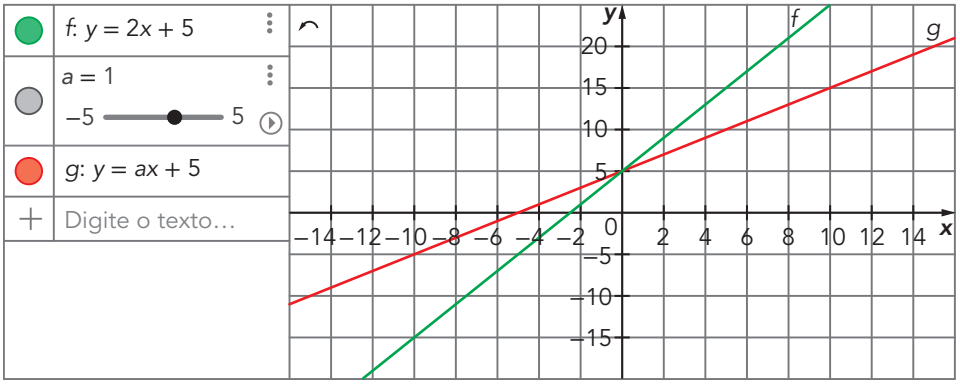
Vamos verificar as mudanças ocorridas no gráfico de uma função polinomial de 1º grau de acordo com a alteração dos parâmetros a e b na calculadora gráfica.

Considere a função f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 5$ e a comparação do gráfico dela com os gráficos das funções g e h de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $g(x) = ax + 5$ e $h(x) = 2x + b$, em que a e b assumem valores reais ($a, b \in \mathbb{R}$).

Acesse uma calculadora gráfica *on-line* ou baixe o aplicativo no computador e construa o gráfico de $f(x) = 2x + 5$. Para isso, no campo de Entrada, digite "$y=2x+5$" e pressione a tecla Enter.

Em seguida, construa o gráfico de $g(x)$ digitando "$y=ax+5$" e, depois, pressionando a tecla Enter.

O aplicativo exibirá os gráficos correspondentes às funções e o controle deslizante correspondente ao parâmetro a (esse recurso controla a variação de a). Para variar esse parâmetro, arraste o ponto do controle deslizante.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Comparando o gráfico de g com o gráfico de f, o que podemos notar com relação:

- à inclinação das retas obtidas? A inclinação da reta que representa a função g varia conforme o valor de a muda. Como o valor de a é fixo em f ($a = 2$), a inclinação da reta que representa f não varia.
- ao ponto de intersecção das retas com o eixo Oy? O ponto de intersecção com o eixo Oy tem coordenadas (0, 5), não variando em nenhuma das retas.

Agora, clique no círculo colorido do lado esquerdo da lei da função g. A reta que representa essa função ficará no modo oculto. Em seguida, digite a lei de $h(x)$, "$y=2x+b$" e pressione a tecla Enter. Serão exibidos o gráfico e o controle deslizante correspondente a essa função. Para variar o parâmetro b, arraste o ponto do controle deslizante.

Comparando o gráfico de h com o gráfico de f, o que podemos verificar com relação:

- à inclinação das retas obtidas? A inclinação das retas obtidas é a mesma e igual a 2, ou seja, são retas paralelas.
- ao ponto de intersecção das retas com o eixo Oy? O ponto de intersecção do gráfico da função h com o eixo Oy varia conforme o parâmetro b muda. No caso do gráfico de f, como não há variação do parâmetro b, não há variação da intersecção.

Considerando as respostas anteriores, conclua:

- o coeficiente angular está relacionado a qual característica da reta que representa a função polinomial de 1º grau no plano cartesiano? O coeficiente angular está relacionado à inclinação da reta que representa a função polinomial de 1º grau no plano cartesiano.
- e o coeficiente linear? O coeficiente linear, por sua vez, é igual à ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo Oy.

Sinal da função

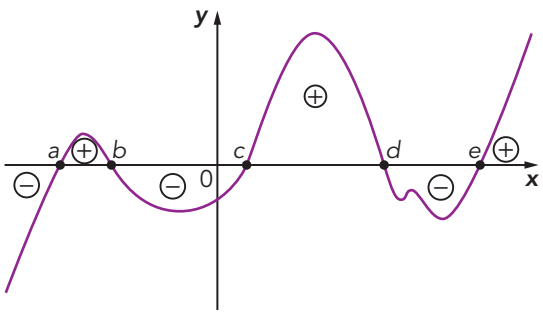
Vamos estabelecer o conceito de sinal de uma função qualquer e, em seguida, particularizar para a função afim.

Considere 3 casos possíveis de localização dos pontos pertencentes a um gráfico de uma função qualquer, tomando como referência o eixo Ox.

- Os pontos de intersecção do gráfico com o eixo Ox têm ordenadas $y = 0$, ou seja, as abscissas x_0 são tais que $f(x_0) = 0$. Essas abscissas x_0 são os zeros da função f.
- Os pontos do gráfico situados acima do eixo Ox têm ordenadas $y > 0$, ou seja, as abscissas x_0 são tais que $f(x_0) > 0$.
- Os pontos do gráfico situados abaixo do eixo Ox têm ordenadas $y < 0$, ou seja, as abscissas x_0 são tais que $f(x_0) < 0$.

O conceito de sinal de uma função diz respeito ao sinal da variável y. Estudar, ou analisar, o sinal de uma função significa determinar para quais valores de x se tem $y > 0$ e para quais valores de x se tem $y < 0$.

Verifique o gráfico a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesse caso, temos estas afirmativas:

- $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, $f(c) = 0$, $f(d) = 0$ e $f(e) = 0$ (a, b, c, d e e são zeros da função);
- o sinal de f é:

  $y > 0$ para $a < x < b$, para $c < x < d$ ou para $x > e$;

  $y < 0$ para $x < a$, para $b < x < c$ ou para $d < x < e$.

Sinal da função afim

Vamos considerar uma função polinomial de 1º grau dada por $y = f(x) = ax + b$ e estudar o sinal dela. Essa função se anula ($y = 0$) para $x = -\frac{b}{a}$ (zero da função).

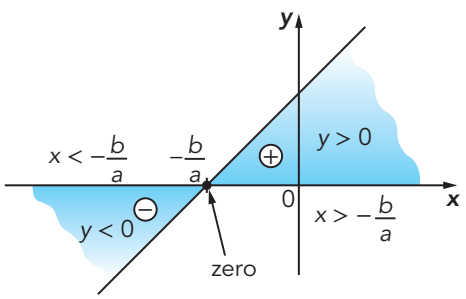
Temos 2 casos possíveis:

- Quando $a > 0$, temos que a função é **crescente**.

$$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \xrightarrow{a > 0} x > -\frac{b}{a}$$

$$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \xrightarrow{a > 0} x < -\frac{b}{a}$$

Nesse caso, y é positivo para valores de x maiores do que o zero da função, e y é negativo para valores de x menores do que o zero da função.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro

Pense nisto

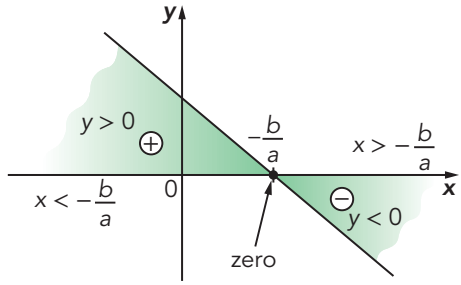
Qual é o sinal de uma função afim definida por $f(x) = 3$? E por uma função afim definida por $g(x) = -7$?

f é positiva para qualquer valor real de *x*, e *g* é negativa para qualquer valor real de *x*.

- Quando $a < 0$, temos que a função é **decrescente**.

$$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \xrightarrow{a < 0} x < -\frac{b}{a}$$

$$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \xrightarrow{a < 0} x > -\frac{b}{a}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

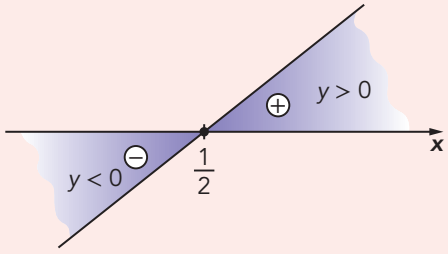
Nesse caso, *y* é positivo para valores de *x* menores do que o zero da função, e *y* é negativo para valores de *x* maiores do que o zero da função.

Atividades resolvidas

3. Analise o sinal da função afim definida por $y = 2x - 1$.

Solução:

Essa função afim apresenta $a = 2 > 0$ e zero da função $x = \frac{1}{2}$. A função é crescente, e a reta intersecta o eixo *Ox* no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

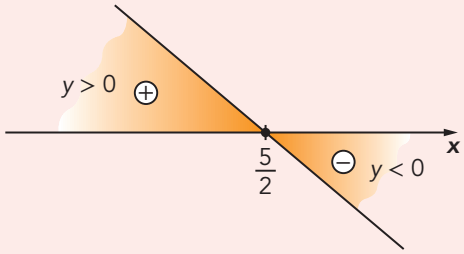
Estudo do sinal:

- $y > 0$ se $x > \frac{1}{2}$
- $y < 0$ se $x < \frac{1}{2}$

4. Estude o sinal da função afim dada por $y = -2x + 5$.

Solução:

Essa função afim apresenta $a = -2 < 0$ e zero da função $x = \frac{5}{2}$. A função é decrescente, e a reta intersecta o eixo *Ox* no ponto $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.



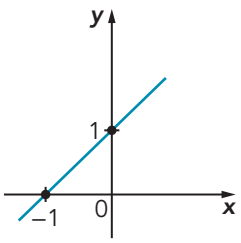
Banco de imagens/Arquivo da editora

Estudo do sinal:

- $y > 0$ se $x < \frac{5}{2}$
- $y < 0$ se $x > \frac{5}{2}$

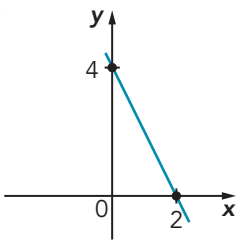
29. Em cada caso, analise o sinal da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ representada no gráfico.

a)



$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > -1 \\ y < 0, \text{ se } x < -1 \end{cases}$

b)



$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 2 \\ y < 0, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

30. Estude o sinal de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas pelas leis a seguir.

a) $y = 4x + 1$ $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > -\frac{1}{4} \\ y < 0, \text{ se } x < -\frac{1}{4} \end{cases}$ **b)** $y = -3x + 1$ $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < \frac{1}{3} \\ y < 0, \text{ se } x > \frac{1}{3} \end{cases}$ **c)** $y = -7x$ $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 0 \\ y < 0, \text{ se } x > 0 \end{cases}$ **d)** $y = \frac{x - 3}{5}$ $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > 3 \\ y < 0, \text{ se } x < 3 \end{cases}$

Inequações de 1º grau

Num exemplo usado anteriormente, indicamos que o salário de determinado vendedor pode ser calculado pela função s: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de lei $s(x) = 1\,800 + 0{,}06 \cdot x$, em que x é o valor total, em reais, das vendas do mês. Qual deve ser o valor total das vendas em um mês para que o salário do vendedor ultrapasse R$ 2.400,00?

Devemos ter:

$$s(x) > 2\,400$$
$$1\,800 + 0{,}06 \cdot x > 2\,400$$
$$0{,}06 \cdot x > 600$$
$$x > 10\,000$$

Assim, as vendas precisam superar R$ 10.000,00.

Acabamos de resolver uma inequação de 1º grau. Vamos, a seguir, mostrar como se resolvem outras inequações de 1º grau e relacionar a resolução de inequações ao estudo do sinal da função afim.

Propriedades das desigualdades

Sejam a e b números reais, em que $a > b$, isto é, $a - b > 0$.

Propriedade 1 (P1): adicionar (ou subtrair) um mesmo número real aos 2 membros **não altera** o sinal da desigualdade.

$a > b \Leftrightarrow a + k > b + k$, sendo k um número real qualquer.

Exemplos:

- $5 > 2 \Leftrightarrow 5 + 7 > 2 + 7$
- $5 > 2 \Leftrightarrow 5 - 15 > 2 - 15$

Propriedade 2 (P2): multiplicar (ou dividir) os 2 membros por um mesmo número real positivo **não altera** o sinal da desigualdade.

$a > b \Leftrightarrow a \cdot k > b \cdot k$, sendo k um número real positivo.

Exemplos:

- $7 > 5 \Leftrightarrow 7 \cdot 3 > 5 \cdot 3$
- $7 > 5 \Leftrightarrow \frac{7}{2} > \frac{5}{2}$

Observação

O símbolo matemático $\Leftrightarrow$ (lê-se "se e somente se") é usado para expressar uma afirmação lógica, de modo que, se o que está à esquerda dele é verdadeiro, então o que vem à direita também é necessariamente verdadeiro, e, reciprocamente, se o que está à direita é verdadeiro, necessariamente o que vem à esquerda também o é.

Propriedade 3 (P3): multiplicar (ou dividir) os 2 membros por um número real negativo **altera** o sinal da desigualdade.

$$a > b \Leftrightarrow a \cdot k < b \cdot k, \text{ sendo } k \text{ um número real negativo.}$$

Exemplos:

- $7 > 5 \Leftrightarrow 7 \cdot (-3) < 5 \cdot (-3) \Leftrightarrow -21 < -15$
- $7 > 5 \Leftrightarrow \frac{7}{-2} < \frac{5}{-2} \Leftrightarrow -3{,}5 < -2{,}5$

Demonstração

P1: Seja k um número real. Vamos adicionar e subtrair k aos 2 membros da desigualdade e reagrupar os termos convenientemente:

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow a - b + k - k > 0 \Leftrightarrow (a + k) - (b + k) > 0 \Leftrightarrow a + k > b + k$$

A demonstração para $a - k > b - k$ é análoga.

P2: Seja k um número real positivo. Multiplicando os 2 membros da desigualdade por k e aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow k \cdot (a - b) > 0 \Leftrightarrow ka - kb > 0 \Leftrightarrow ka > kb$$

A demonstração para $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$ é análoga (multiplique os 2 membros da desigualdade por um número $\frac{1}{k} > 0$).

P3: Seja k um número real negativo. Então $-k$ é um número real positivo. Assim, usando a propriedade **P2** e um processo análogo, temos:

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow (-k) \cdot (a - b) > 0 \Leftrightarrow -ka + kb > 0 \Leftrightarrow kb > ka \Leftrightarrow ka < kb$$

A demonstração para $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$ é análoga.

Pense nisto: Como $x > y$, a fração $\frac{1}{x}$ é menor do que a fração $\frac{1}{y}$. Note que:

$$x > y > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{xy} > \frac{y}{xy} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$$

Não escreva no livro

Pense nisto

Se x e y são números positivos tais que $x > y$, que relação há entre $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$?

Vamos verificar alguns exemplos de inequações e como resolvê-las.

- Podemos resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $2x + 3 > 0$ de 2 modos diferentes.

1º modo

Deixamos no 1º membro apenas o termo que contém a incógnita x: $2x > -3$.

Dividimos os 2 membros pelo coeficiente de x:

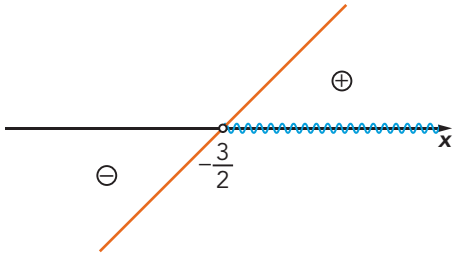
$$\frac{2x}{2} > -\frac{3}{2}, \text{ isto é, } x > -\frac{3}{2}.$$

Ilya Chalyuk/Adobe Stock

2º modo

O primeiro membro da inequação pode ser associado à função dada por $y = 2x + 3$. Assim, é preciso determinar x tal que $y > 0$. Temos que:

- o zero da função é $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$;
- a função é crescente, pois $a = 2 > 0$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, para $y > 0$, devemos considerar $x > -\frac{3}{2}$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{3}{2}\right\}$$

- Para resolver a inequação $-3x + 12 \leqslant 0$, podemos proceder de 2 modos.

1º modo

$$-3x + 12 \leqslant 0 \Rightarrow -3x \leqslant -12$$

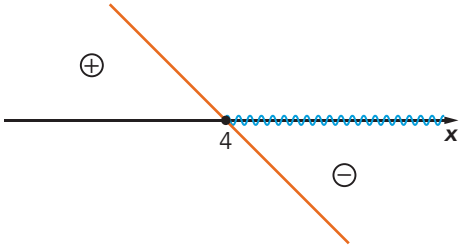
Ao dividir os 2 membros pelo coeficiente de x, que é negativo (-3), é preciso lembrar que o sinal da desigualdade se inverte.

$$\frac{-3x}{-3} \geqslant \frac{-12}{-3}, \text{ isto é, } x \geqslant 4$$

2º modo

Considere a função dada por $y = -3x + 12$. É preciso determinar para quais valores de x se tem $y \leqslant 0$. Temos que:

- zero da função: $-3x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4$;
- $a = -3 < 0$ (decrescente).



Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, $y \leqslant 0$ se $x \geqslant 4$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$$

Observação

Note que poderíamos também ter feito $-3x + 12 \leqslant 0 \Leftrightarrow 12 \leqslant 3x \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{12}{3} \leqslant \frac{3x}{3} \Rightarrow 4 \leqslant x$, isto é, $x \geqslant 4$.

Ilya Chalyuk/Adobe Stock

34. Temos $y = 50\,000 - 90t$, em que y é o número de quilogramas de soja produzido no mês t, contando a partir de janeiro de 2025 ($t = 0$).

Devemos ter $y < 40\,000 \Rightarrow 10\,000 < 90t \Rightarrow t > 111,\overline{1}$. Como $t \in \mathbb{N}$, o menor valor de t que satisfaz o problema é $t = 112$. Como $112 = 9 \cdot 12 + 4$, conclui-se que $t = 112$ meses corresponde a maio de 2034.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

31. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações estudando o sinal das funções envolvidas.

a) $2x - 1 \geqslant 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$

b) $-4x + 3 < 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{4}\right\}$

c) $-2x \leqslant 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

d) $2x - 9 \leqslant x - 5$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

32. A diferença entre o dobro de um número e a metade dele é menor do que 6. Quais números inteiros positivos são soluções desse problema? $2x - \frac{1}{2}x < 6 \Rightarrow x < 4$; os números inteiros positivos são 1, 2 e 3.

33. Para animar a festa da filha, Marcelo consultou 2 bandas, cujos orçamentos, com valor da fração da hora proporcional, são:

- banda **A**: R$ 800,00 fixos, acrescidos de R$ 250,00 por hora de trabalho;
- banda **B**: R$ 650,00 fixos, acrescidos de R$ 280,00 por hora de trabalho.

a) Se Marcelo estima que a festa não durará mais que 2,5 horas, que banda ele deverá contratar pensando exclusivamente no critério financeiro? Banda **B**.

b) Acima de quantas horas de duração da festa é mais econômico optar pela banda **A**? Acima de 5 h.

34. A produção de soja numa região atingiu a safra de 50 toneladas em janeiro de 2025. A partir daí, a produção tem recuado à taxa de 90 kg ao mês. Mantido esse ritmo, a partir de qual data (mês e ano) a produção mensal estará abaixo de 40 toneladas?

35. Leia a tirinha a seguir.

Adão Iturrusgarai/Fotoarena

Considere as seguintes suposições para responder às perguntas.

- Suponha que, no dia em que soube do saldo negativo na conta corrente, Aline tenha conversado com os pais dela e eles tenham pago o saldo devedor.
- Ela se comprometeu a fazer depósitos mensais para os pais de R$ 40,00 para devolver o dinheiro.
- Aline fará o primeiro depósito um mês após esse acordo.
- Os pais dela não vão cobrar juros sobre o empréstimo.

a) Após n meses, antes de ter quitado o empréstimo, quanto Aline ainda deverá aos pais dela? $-732,20 + 40 \cdot n$

b) Qual é o número inteiro mínimo de meses necessários para que Aline deva menos de R$ 200,00? 14 meses.

c) Qual é o número inteiro mínimo de meses necessários para Aline quitar sua dívida? 19 meses.

36. Um turista, ao chegar a um aeroporto, procurou se informar sobre locação de carros e organizou as informações como mostra a tabela a seguir.

Locação de carros

Opção	Preço da diária	Preço adicional por quilômetro rodado
Locadora **1**	R$ 100,00	R$ 0,30
Locadora **2**	R$ 60,00	R$ 0,40
Locadora **3**	R$ 150,00	quilômetros livres

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Qual é a lei que define o preço em reais (y) da locação do carro em função do número de quilômetros rodados (x), em cada uma das situações apresentadas na tabela?

b) Para maior economia, a partir de quantos quilômetros o turista deve preferir a locadora **1** à locadora **2**? A partir de 400 km rodados.

c) Para maior economia, a partir de quantos quilômetros ele deve optar pela locação do carro na locadora **3**? A partir de 225 km rodados.

36. a) $y_1 = 100 + 0,3 \cdot x$; $y_2 = 60 + 0,4 \cdot x$; $y_3 = 150$.

Funções definidas por mais de uma sentença

Entre os impostos pagos por uma pessoa assalariada, um dos principais é o imposto de renda. Para que a tributação cause um pouco menos de impacto para pessoas que recebem salários menores, foi desenvolvido um sistema que torna a contribuição progressiva; ou seja, quanto maior seu rendimento, maior será a contribuição percentual uma vez superada a faixa isenta. Em 2024, o Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF) era calculado de acordo com a seguinte tabela.

Tabela de incidência mensal

Rendimento mensal (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir (em R$)
Até 2.259,20	—	—
De 2.259,21 até 2.826,65	7,5	169,44
De 2.826,66 até 3.751,05	15	381,44
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	662,77
Acima de 4.664,68	27,5	896,00

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Fazenda. IRPF (Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas). Portal *gov.br*, Brasília, DF, 4 maio 2023 [atualizado em: 9 fev. 2024]. Disponível em: https://tedit.net/oyw48b. Acesso em: 17 jul. 2024.

A tabela mostra a alíquota de imposto e a parcela a deduzir para cada faixa de rendimento mensal. Para determinar o valor do imposto de renda, é necessário calcular uma porcentagem do rendimento e, do valor obtido, subtrair a parcela indicada, garantindo, assim, que não haja saltos de contribuição para uma pessoa que muda de faixa. Desse modo, em 2024, uma pessoa que tem um rendimento de R$ 3.751,05 e uma pessoa que tem um rendimento de R$ 3.751,06, embora estejam em faixas diferentes da alíquota de contribuição, pagam, na prática, o mesmo valor de imposto de renda.

Em geral, se o rendimento do trabalhador é x, o imposto de renda mensal y, em 2024, era assim calculado:

- Se $0 < x \leqslant 2259{,}20$, então $y = 0$ e não há parcela a deduzir.
- Se $2259{,}21 \leqslant x \leqslant 2826{,}65$, então $y = 0{,}075 \cdot x - 169{,}44$.
- Se $2826{,}66 \leqslant x \leqslant 3751{,}05$, então $y = 0{,}15 \cdot x - 381{,}44$.
- Se $3751{,}06 \leqslant x \leqslant 4664{,}68$, então $y = 0{,}225 \cdot x - 662{,}77$.
- Se $x > 4664{,}68$, então $y = 0{,}275 \cdot x - 896{,}00$.

Podemos notar que y é função de x e essa relação é estabelecida por 5 sentenças. Usa-se uma sentença ou outra dependendo do intervalo ao qual o valor de x pertence. Esse é um exemplo de **função definida por mais de uma sentença**.

Eric Isselee/Shutterstock

Por ser associado à justiça e à força, o leão foi usado em uma campanha publicitária da Receita Federal em 1979. Desde então, o animal passou a ser o símbolo do imposto de renda.

Vamos acompanhar outro exemplo.

Considere a tabela a seguir, que apresenta parte da conta de água de uma residência que gastou 32 m^3 de água. Além do valor a pagar, a conta mostra como calculá-lo em função do consumo de água (em metros cúbicos). Existe uma tarifa mínima e diferentes faixas de tarifação.

Companhia de saneamento – Tarifa de água por m^3

Faixa de consumo (em m^3)	Tarifa (em R$)	Consumo (em m^3)	Valor (em R$)
até 10	6,00	10	6,00
de 11 a 20	0,77 por m^3	10	7,70
de 21 a 30	2,56 por m^3	10	25,60
de 31 a 50	7,74 por m^3	2	15,48
acima de 50	8,55 por m^3	0	—
total	—	32	54,78

Dados elaborados para fins didáticos.

Observação

Note que, à medida que o consumo aumenta, o valor do metro cúbico de água fica mais caro. É uma maneira de privilegiar famílias cujo consumo é menor, levando-as a mantê-lo baixo com tarifas menores, e incentivar o uso consciente da água.

Para definir a lei da função que relaciona o preço da conta p e a medida de volume V de água consumido em um mês, é necessário estabelecer uma sentença para cada intervalo definido pela companhia de saneamento.

- Se $0 < V \leqslant 10$, então $p(V) = 6$.
- Se $11 \leqslant V \leqslant 20$, então $p(V) = \underbrace{6}_{\text{valor dos primeiros 10 m}^3} + \underbrace{(V - 10)}_{\substack{\text{consumo de água na faixa } \mathbf{2}, \\ \text{após exceder 10 m}^3}} \cdot 0{,}77 = 0{,}77V - 1{,}7$.
- Se $21 \leqslant V \leqslant 30$, então $p(V) = \underbrace{6 + 10 \cdot 0{,}77}_{\text{valor dos primeiros 20 m}^3} + \underbrace{(V - 20)}_{\substack{\text{consumo de água na faixa } \mathbf{3}, \\ \text{após exceder 20 m}^3}} \cdot 2{,}56 = 2{,}56V - 37{,}5$.
- Se $31 \leqslant V \leqslant 50$, então $p(V) = \underbrace{6 + 10 \cdot 0{,}77 + 10 \cdot 2{,}56}_{\text{valor dos primeiros 30 m}^3} + \underbrace{(V - 30)}_{\substack{\text{consumo de água na faixa } \mathbf{4}, \\ \text{após exceder 30 m}^3}} \cdot 7{,}74 = 7{,}74V - 192{,}9$.
- Se $V > 50$, então $p(V) = \underbrace{6 + 10 \cdot 0{,}77 + 10 \cdot 2{,}56 + 20 \cdot 7{,}74}_{\text{valor dos primeiros 50 m}^3} + \underbrace{(V - 50)}_{\substack{\text{consumo de água na faixa } \mathbf{5}, \\ \text{após exceder 50 m}^3}} \cdot 8{,}55 =$

  $= 8{,}55V - 233{,}4$.

No caso de o consumo ser de 32 m^3, usaríamos a quarta sentença e o cálculo seria $p(32) = 7{,}74 \cdot 32 - 192{,}9 = 247{,}68 - 192{,}9 = 54{,}78$.

Indica-se a lei dessa função definida por mais de uma sentença da seguinte forma:

$$p(V) = \begin{cases} 6, \text{ se } 0 < V \leqslant 10 \\ 0{,}77V - 1{,}7, \text{ se } 11 \leqslant V \leqslant 20 \\ 2{,}56V - 37{,}5, \text{ se } 21 \leqslant V \leqslant 30 \\ 7{,}74V - 192{,}9, \text{ se } 31 \leqslant V \leqslant 50 \\ 8{,}55V - 233{,}4, \text{ se } V > 50 \end{cases}$$

A conta de água apresenta informações dos últimos consumos mensais, a tabela de preços indicando o consumo atual e o valor pago em cada faixa de consumo. Na conta de água, além do consumo em metros cúbicos de água, paga-se uma taxa referente à manutenção do tratamento de esgoto da região.

FATURA MENSAL

USUÁRIO:
MATRÍCULA-DV
DADOS CADASTRAIS
REFERÊNCIA: JAN/2025
GRUPO: 16

ENDEREÇO DA LIGAÇÃO:

ENDEREÇO DE ENTREGA:

CATEGORIA:	ECONOMIAS:	CLASSIFICAÇÃO:
RESIDENCIAL	001	2

CONSUMO DOS ÚLTIMOS MESES (M^3)

JAN/2024	9	ABR/2024	8	JUL/2024	7	OUT/2024	5
FEV/2024	9	MAI/2024	7	AGO/2024	10	NOV/2024	5
MAR/2024	8	JUN/2024	10	SET/2024	7	DEZ/2024	6

DADOS DA LEITURA

DT. PREV. PROX.	LEIT.	HIDRÔMETRO	OCORRÊNCIA			
23/02/2025						
LEIT. ANTERIOR	LEIT.	INFORMADA	LEIT.	FATURADA	CONS. M^3	CONS. MÉDIO DIÁRIO LITROS
23/12/2024	23/01/2025		23/01/2025		MED 10	
267	277		277		FAT 10	322

TABELA DE PREÇOS

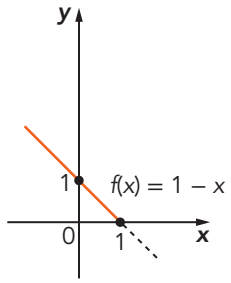
FAIXA DE CONSUMO	ÁGUA	ESGOTO	TOTAL
0 a 10	2,10	1,68	3,78
11 a 20	5,28	4,22	9,50
21 a 30	6,78	5,43	12,21
31 a 40	8,56	6,85	15,41
41 a 50	10,17	8,14	18,31
51 a 60	11,15	8,92	20,07
61 a 9999	12,36	9,88	22,24

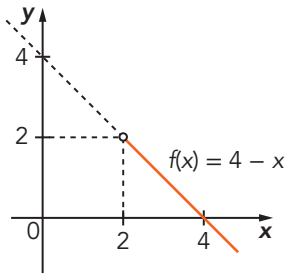
Banco de imagens/Arquivo da editora

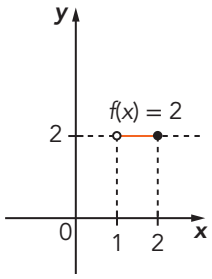
Gráfico de funções definidas por mais de uma sentença

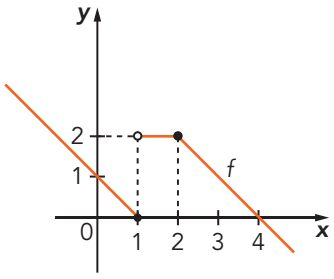
Vamos construir o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença.

O gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2, \text{ se } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 - x, \text{ se } x > 2 \end{cases}$ é apresentado a seguir.









Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

Note que as retas dadas pelas equações $y = 1 - x$ e $y = 4 - x$ não se intersectam, ou seja, são paralelas no plano, pois, fazendo $1 - x = 4 - x$, obtemos $0 \cdot x = 3$, e não existe x real que satisfaça essa equação. Outro modo de chegar a essa conclusão é notando que ambas as funções são representadas por retas com o mesmo coeficiente angular (no caso, -1).

ATIVIDADES

Não escreva no livro

37. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \geqslant 2 \\ -1, \text{ se } x < 2 \end{cases}$. Calcule:

a) $f(0)$
Como $0 < 2$, temos $f(0) = -1$.

b) $f(-1)$
Como $-1 < 2$, temos $f(-1) = -1$.

c) $f(\sqrt{3})$
Como $\sqrt{3} \simeq 1{,}7 < 2$, temos $f(\sqrt{3}) = -1$.

d) $f(\sqrt{5})$
Como $\sqrt{5} \simeq 2{,}3 > 2$, temos $f(\sqrt{5}) = 1$.

e) $f(2)$ $f(2) = 1$

38. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x < -2 \\ x + 3, \text{ se } -2 \leqslant x < 1 \\ x - 5, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$. Calcule o valor de:

a) $f(-3) + f(0)$
$2 \cdot (-3) + 0 + 3 = -3$

b) $f(2) - f(1)$
$2 - 5 - (1 - 5) = -3 + 4 = 1$

c) $f(-2) \cdot f(2)$
$(-2 + 3) \cdot (2 - 5) = -3$

39. Considere os planos de uma operadora de celular.

- **Plano controle 1**: Valor fixo mensal de R$ 45,00 para consumo de até 6 GB de internet. Caso o cliente exceda essa quantia, o custo do *gigabyte* adicional é de R$ 20,00.
- **Plano controle 2**: valor fixo mensal de R$ 75,00 para consumo de até 12 GB de internet. Caso o cliente exceda essa quantia, o custo do *gigabyte* adicional é de R$ 20,00.

a) Um cliente estimou que o consumo mensal de internet dele fosse de 7 GB. Qual plano seria mais vantajoso financeiramente para ele? Plano controle **1**.

b) Para quantos *gigabytes* de consumo de internet no mês não há diferença no valor a ser pago contratando qualquer um dos planos? 7,5 GB

40. Uma gráfica fez a seguinte promoção.

- **Até 100 cópias**: R$ 0,40 por cópia.
- **Acima de 100 cópias (de um mesmo original)**: R$ 0,20 por cópia excedente.

Faça o que se pede. **b)** $p(x) = \begin{cases} 0{,}4x;\ \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 40 + 0{,}20(x - 100);\ \text{se } x > 100 \end{cases}$

a) Determine o valor de 130 cópias de um original. R$ 46,00

b) Determine a lei que define a função preço (p) pago em reais pela reprodução de x cópias de um mesmo original.

c) Refaça os itens **a** e **b** supondo que, acima de 100 cópias, sejam cobrados R$ 0,20 por cópia (e não apenas para as cópias excedentes). Item **a**: R$ 26,00.
Item **b**: $p(x) = \begin{cases} 0{,}4x;\ \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 0{,}2x;\ \text{se } x > 100 \end{cases}$.

41. Em um encarte de supermercado, consta uma promoção de amaciante de roupas com as seguintes informações.

- Preço da unidade: R$ 16,80.
- Acima de 3 unidades: R$ 1,40 de desconto por unidade.

a) Qual será a despesa total na compra de 2, 3, 4 e 5 unidades do amaciante?
2: R$ 33,60; 3: R$ 50,40; 4: R$ 61,60; 5: R$ 77,00.

b) Seja x ($x \in \mathbb{N}$) o número de amaciantes comprados e y o valor total (em reais) gasto. Qual é a lei da função que relaciona x e y?
$y = \begin{cases} 16{,}8x,\ \text{se } x \leqslant 3 \\ 15{,}4x,\ \text{se } x > 3 \end{cases}$

42. a) Para R$ 2.000,00: R$ 0,00; para R$ 4.000,00: R$ 237,23; para R$ 10.000,00: R$ 1.854,00.

42. Considere a tabela de imposto de renda a seguir.

Tabela de imposto de renda

Rendimento mensal (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir (em R$)
até 2.259,20	—	—
de 2.259,21 até 2.826,65	7,5	169,44
de 2.826,66 até 3.751,05	15	381,44
de 3.751,06 até 4.664,68	22,5	662,77
acima de 4.664,68	27,5	896,00

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Fazenda. IRPF (Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas). Portal *gov.br*, Brasília, DF, 4 maio 2023 [atualizado em: 9 fev. 2024]. Disponível em: https://tedit.net/oyw48b. Acesso em: 17 jul. 2024.

a) Determine o imposto de renda mensal referente aos rendimentos de R$ 2.000,00; R$ 4.000,00; e R$ 10.000,00.

b) O rendimento mensal de Júlia é de R$ 3.700,00, e o de Joice é de R$ 3.800,00. Embora tenham diferença em apenas R$ 100,00, ambos os rendimentos estão sujeitos a faixas distintas de tributação. Joice preferia receber R$ 100,00 a menos para "escapar" da 4ª faixa de tributação e, desse modo, receber um valor líquido maior. O raciocínio de Joice faz sentido financeiramente? Explique sua resposta.

43. Na tabela seguinte, considere os valores, por faixa de consumo, do metro cúbico de água praticados em residências de certo município.

Consumo de água

Faixa de consumo (em m^3)	Tarifa (em R$)
até 20	5,20 por m^3
de 21 a 50	12,80 por m^3 excedente
acima de 50	14,90 por m^3 excedente

Dados elaborados para fins didáticos.

42. b) Não, porque o rendimento de Joice, com desconto de IR, é R$ 3.607,77, e o de Júlia, com o desconto de IR, é R$ 3.526,44. Portanto, ganhando R$ 3.800,00, Joice tem um rendimento líquido maior do que se ganhasse R$ 100,00 a menos, mesmo passando para uma faixa mais alta de imposto de renda.

46. Sendo $f(x)$ o valor a ser pago em reais e x o tempo em minutos no plano **B**, temos: $f(x) = \begin{cases} 90, \text{ se } x \leqslant 240 \\ \frac{3}{4}x - 90, \text{ se } x > 240 \end{cases}$

Sendo $g(x)$ o valor a ser pago em reais no plano **A**, temos: $g(x) = 120$.

a) Determine os valores das contas de água correspondentes a consumos de 30 m³ e 60 m³. Para 30 m³: R$ 232,00; para 60 m³: R$ 637,00.

b) Qual é o consumo correspondente a uma conta de água no valor de R$ 517,80? 52 m³

c) Qual é a lei da função que relaciona o valor total (v), em reais, ao consumo de x metros cúbicos? $v(x) = \begin{cases} 5{,}2x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 12{,}8x - 152, \text{ se } 21 \leqslant x \leqslant 50 \\ 14{,}9x - 257, \text{ se } x > 50 \end{cases}$

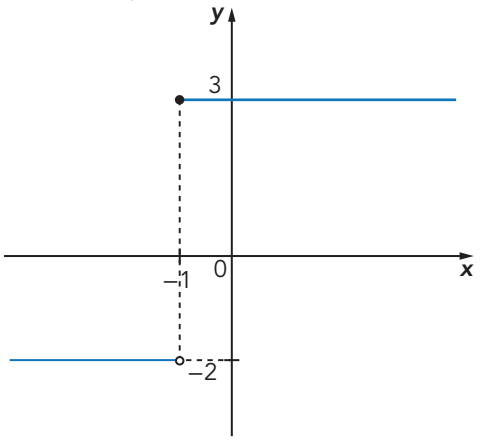
44. Construa, no caderno, os gráficos das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$ e forneça o conjunto imagem.

a) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 2 \\ 3, \text{ se } x = 2 \\ 2, \text{ se } x > 2 \end{cases}$ As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ 4 - x, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

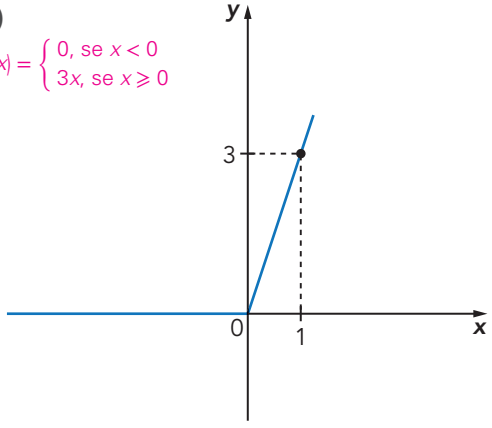
45. Determine a lei de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujos gráficos estão representados a seguir. $f(x) = \begin{cases} -2, \text{ se } x < -1 \\ 3, \text{ se } x \geqslant -1 \end{cases}$

a)



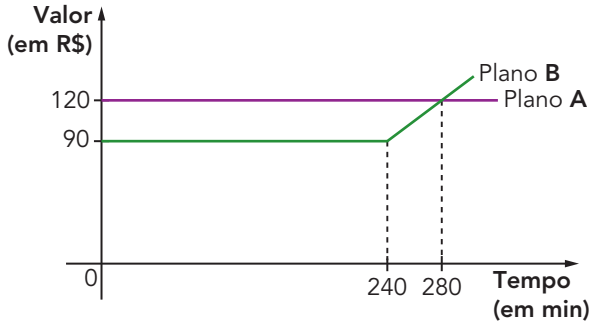
Banco de imagens/Arquivo da editora

b) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ 3x, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$



Banco de imagens/Arquivo da editora

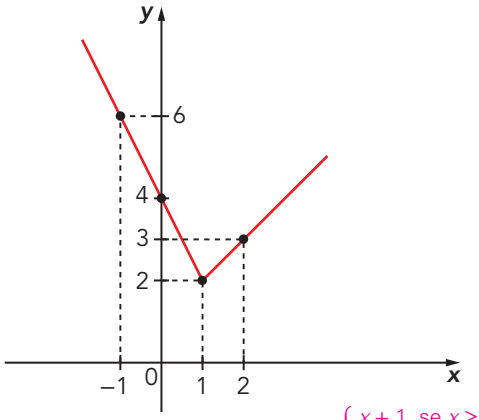
46. No gráfico a seguir, está representada a relação entre os valores pagos e os minutos de ligação mensal em 2 planos de telefonia móvel oferecidos por uma empresa.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Qual é a forma de cobrança de cada um dos planos?

47. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função representada no gráfico a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -2x + 4, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

a) Qual é a lei que define f?

b) Resolva a equação $f(x) = 5$. Verifique no gráfico as soluções encontradas. $S = \left\{-\frac{1}{2}, 4\right\}$

c) Para que valores reais de k a equação $f(x) = k$ apresenta soluções? $k \geqslant 2$

48. Um estacionamento de carros cobra R$ 24,00 para as primeiras 4 horas de uso do serviço e um adicional de R$ 4,00 por hora, sendo que frações dessas horas adicionais são cobradas proporcionalmente. Um carro que, por exemplo, permanecer 4,5 horas estacionado pagará um total de R$ 26,00. $p(t) = \begin{cases} 24, \text{ se } 0 < t \leqslant 4 \\ 4t + 8, \text{ se } t > 4 \end{cases}$

a) Qual é a lei da relação do preço (p), em reais, em função da medida de intervalo de tempo (t), em horas, do uso do estacionamento?

b) Esse estacionamento oferece também a possibilidade de o cliente pagar R$ 45,00 para deixar o carro estacionado ao longo do dia todo. A partir de quanto tempo de uso do estacionamento passa a ser mais vantajoso pagar o preço cheio da diária? A partir de 9 h 15 min.

capítulo

5 Função quadrática

Não escreva no livro

Pense nisto

Em quais outros esportes que você conhece a medida do ângulo de lançamento em relação ao solo pode influenciar no desempenho dos atletas?

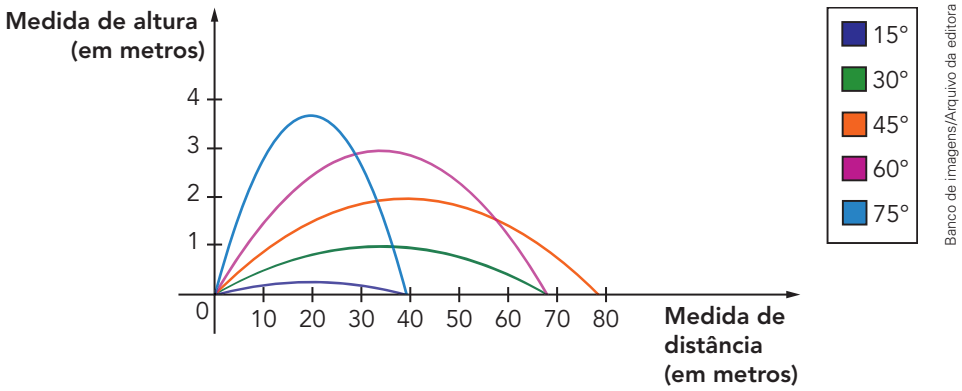
Exemplos de resposta: Lançamento de dardos, arremesso de peso, basquete e vôlei, entre outros.

Função polinomial de 2º grau

Na abertura desta Unidade, foram apresentadas diversas modalidades disputadas nos Jogos dos Povos Indígenas, sendo uma delas o arremesso de lança.

Um dos fatores importantes que deve ser levado em consideração no momento de um arremesso, quando o objetivo é atingir a maior medida de distância possível, é a trajetória que a lança percorrerá ao ser arremessada. Essa trajetória depende de 2 características: a medida de velocidade inicial com a qual ela é arremessada e a medida do ângulo do arremesso em relação ao solo.

Supondo que a mesma pessoa consiga arremessar uma lança sempre com a mesma medida de velocidade inicial, é importante determinar para qual medida do ângulo em relação ao solo esse arremesso é ideal.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Pelo gráfico, podemos notar que a medida do ângulo que resulta no arremesso com maior alcance é 45°. Esse valor pode ser encontrado também por meio de modelos matemáticos, usando as equações de Newton, da Física, que descrevem o movimento dos corpos sujeitos a um campo gravitacional desprezando efeitos como o do atrito do ar.

No campo de estudo de Cinemática, da Física, é possível constatar que o movimento de um objeto submetido a um lançamento oblíquo, ou seja, um objeto lançado "para cima e para a frente" ao mesmo tempo, pode ser modelado por uma função definida por uma lei do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Esse tipo de função será estudado neste capítulo e recebe o nome de **função polinomial de 2º grau** ou **função quadrática**.

É chamada **função polinomial de 2º grau**, ou **função quadrática**, qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Dica

Vídeo *Esse tal de Bhaskara*, (do canal M3 Matemática Multimídia)

Esse vídeo proporciona um passeio histórico em torno das equações quadráticas e dos diversos métodos de resolução delas. Disponível em: https://tedit.net/i488yn. Acesso em: 19 jul. 2024.

Considere os exemplos a seguir.

- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, sendo $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$.
- $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$, sendo $a = 3$, $b = -4$ e $c = 1$.
- $h(x) = x^2 - 1$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$.
- $i(x) = -x^2 + 2x$, sendo $a = -1$, $b = 2$ e $c = 0$.
- $j(x) = -4x^2$, sendo $a = -4$, $b = 0$ e $c = 0$.

Não escreva no livro

Pense nisto

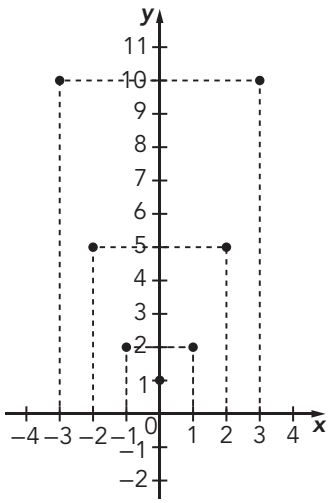
Quando falamos da função polinomial de 2º grau dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, por que é colocada a restrição $a \neq 0$?

Porque, se $a = 0$, a função é dada por $f(x) = bx + c$, que não é de 2º grau.

Gráfico da função polinomial de 2º grau

Vamos construir o gráfico de uma função polinomial de 2º grau. Para isso, considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = x^2 + 1$. Podemos começar calculando o valor da função para alguns valores de x e, então, marcar os pontos obtidos no plano cartesiano.

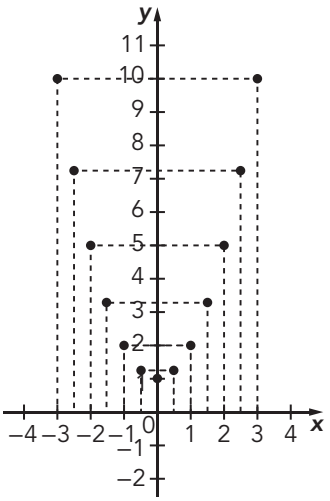
x	$y = x^2 + 1$
–3	10
–2	5
–1	2
0	1
1	2
2	5
3	10



Banco de imagens/Arquivo da editora

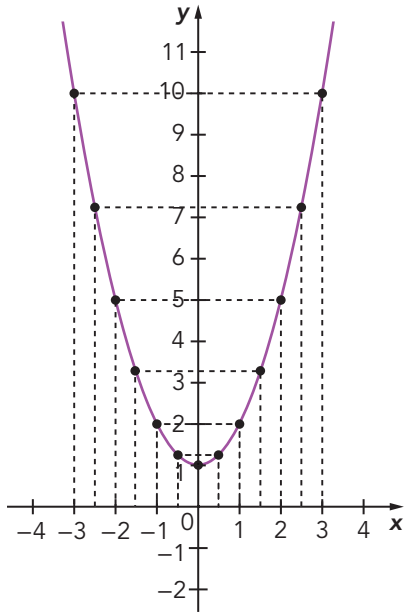
É possível notar que os pontos que compõem o gráfico da função quadrática não se alinham para formar uma reta, diferentemente do gráfico da função afim. Para estudar melhor o comportamento da função, podemos calcular o valor dela para mais valores de x, intermediários aos que calculamos anteriormente, e inserir os novos pontos obtidos no plano cartesiano.

x	$y = x^2 + 1$
–2,5	7,25
–1,5	3,25
–0,5	1,25
0,5	1,25
1,5	3,25
2,5	7,25



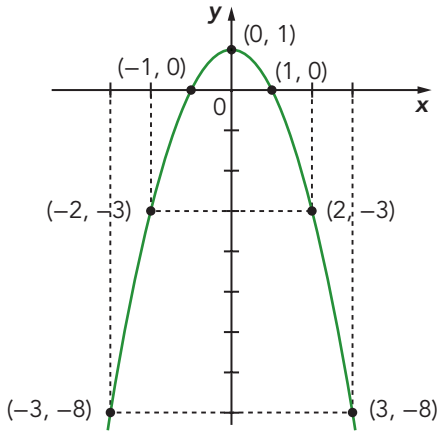
Banco de imagens/Arquivo da editora

Se fosse possível repetir infinitamente esse processo, calculando os valores da função para qualquer valor real de x, obteríamos a curva que representa graficamente a função quadrática.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos considerar agora $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = -x^2 + 1$. Repetindo o procedimento usado no exemplo anterior, temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

A curva obtida em cada exemplo anterior é chamada **parábola**. É possível mostrar que o gráfico de qualquer função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma parábola.

No gráfico de uma função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, temos, em relação ao formato da parábola obtida, que:

- se $\boldsymbol{a > 0}$, dizemos que a concavidade da parábola está voltada **para cima**. Como ocorre, por exemplo, com a função quadrática dada por $f(x) = x^2 + 1$;
- se $\boldsymbol{a < 0}$, dizemos que a concavidade da parábola está voltada **para baixo**. Como ocorre, por exemplo, com a função quadrática dada por $f(x) = -x^2 + 1$.

Observação

No dia a dia, usamos a palavra **concavidade** em diferentes contextos, em geral relacionados à característica côncava de uma superfície ou de um objeto, por exemplo, quando nos referimos à concavidade de lentes e espelhos.

1. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade.

ATIVIDADES

Sugerimos também que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Não escreva no livro

1. Construa no caderno o gráfico de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas pelas seguintes leis. Em seguida, utilize uma calculadora gráfica para checar as respostas.

a) $y = x^2$ **b)** $y = -2x^2$ **c)** $y = -x^2 + 3x$ **d)** $y = x^2 - 4x + 5$

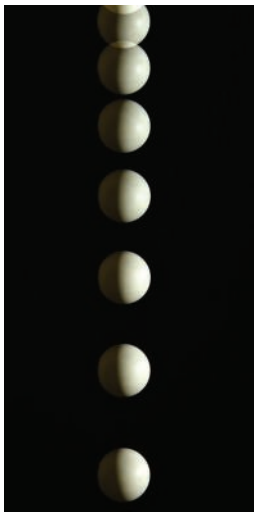
As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. Num experimento sobre queda livre feito na escola, um estudante solta uma bola de tênis, enquanto um colega fotografa o movimento com uma câmera capaz de tirar 10 fotos por segundo. Em seguida, as fotografias são sobrepostas num *software* de edição de imagens, em que é possível visualizar simultaneamente as posições da bola em cada fotografia. A partir dessa composição de imagens, os estudantes usam uma régua para medir a distância vertical total percorrida pela bola no instante em que cada fotografia foi feita, construindo a seguinte tabela.

Percurso da bola

Medida de intervalo de tempo (em s)	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$
Medida de distância (em cm)	0	5	20	45	80	125	180

Dados elaborados para fins didáticos.



GIPhotoStock/Science Source/Fotoarena

Imagem de bola em queda livre sobrepondo fotografias tiradas em medidas de intervalo de tempo iguais.

Usando os dados da tabela, classifique as conclusões feitas pelos estudantes como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) e justifique suas respostas.

a) A relação entre a medida de distância e a medida de intervalo de tempo constatadas não pode ser representada por uma função afim porque a taxa média de variação entre quaisquer dois pontos obtidos não é constante. V

b) Se multiplicarmos a medida de intervalo de tempo por 2, a medida de distância correspondente, conforme a tabela, fica multiplicada por 4. V

c) A função que representa essa relação pode ser descrita pela lei $d(t) = 500 \cdot t^2$, na qual d representa a medida de distância e t representa a medida de intervalo de tempo. V

d) Ao construir, num plano cartesiano, o gráfico que liga os pontos obtidos experimentalmente, obtém-se uma parte de uma parábola cuja concavidade está voltada para baixo. F

Zeros de uma função quadrática

Chamam-se **zeros de uma função** os valores de $x \in \mathbb{R}$ que anulam y. Portanto, os **zeros da função quadrática** (função polinomial de 2º grau), dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, são os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Ao substituirmos $f(x)$ por 0 na lei da função, obtemos a equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e cujas raízes são os zeros da função. Vamos analisar os possíveis casos para esse tipo de equação e as respectivas maneiras de resolução.

I. Se $b = 0$ e $c = 0$:

$$ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Pense nisto: Podem existir 2 soluções reais, sendo necessário que um dos termos da fração $-\frac{c}{a}$ seja positivo, e o outro, negativo. Se ambos os termos da fração forem positivos ou se ambos forem negativos, não há solução real. Portanto, 2 soluções reais ou nenhuma.

Não escreva no livro

Pense nisto

Considerando o caso **III**, qual é o número de soluções reais possíveis para a equação?

II. Se $b \neq 0$ e $c = 0$:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x \cdot (ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

III. Se $b = 0$ e $c \neq 0$:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Apresentamos possíveis modos de resolver a equação de 2º grau no caso de ela ser incompleta ($b = 0$ ou $c = 0$). Para as equações de 2º grau completas, ou seja, em que os três coeficientes são diferentes de zero, podemos usar a fórmula resolutiva de uma equação de 2º grau.

Observação

A fórmula resolutiva de uma equação de 2º grau pode ser usada para qualquer uma das quatro situações apresentadas.

IV. Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Atividades resolvidas

1. Obtenha os zeros da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Solução:

Precisamos resolver a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujos coeficientes são: $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 2$$

Os zeros da função são 2 e 3.

2. Determine os zeros da função quadrática g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

Solução:

Precisamos resolver a equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$, cujos coeficientes são: $a = 4$, $b = -4$ e $c = 1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{1}{2}$$

A função admite 2 zeros iguais a $\frac{1}{2}$.

3. Calcule os zeros reais da função quadrática h de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei a seguir:

$$h(x) = 2x^2 + 3x + 4$$

Solução:

Precisamos resolver a equação $2x^2 + 3x + 4 = 0$, cujos coeficientes são: $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 32 = -23$$

$\nexists\, x$ real, pois $\Delta < 0$.

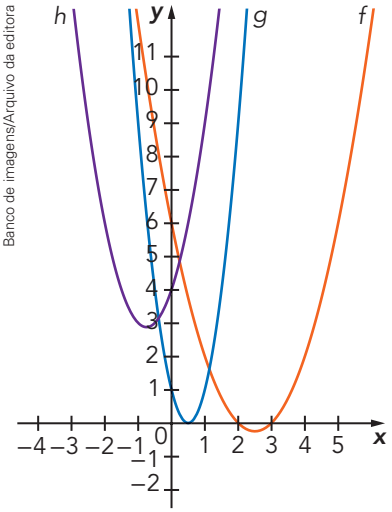
Portanto, essa função não tem zeros reais.

Muitas vezes, queremos estudar a quantidade de zeros reais que uma função tem, sem necessariamente precisarmos calcular seu valor. Note que, nas atividades resolvidas **1**, **2** e **3**, as funções apresentam uma quantidade de zeros reais diferente.

Essa quantidade, numa função quadrática, depende do valor obtido no cálculo do chamado **discriminante**: $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Quando $\Delta > 0$, a função tem dois zeros reais e distintos (como na atividade resolvida **1**).
- Quando $\Delta = 0$, a função tem dois zeros reais iguais (ou um **zero duplo**, que também pode ser chamado de **zero de multiplicidade 2**, como na atividade resolvida **2**).
- Quando $\Delta < 0$, a função não tem zero real (como na atividade resolvida **3**).

Considere a seguir, nas representações gráficas das funções *f*, *g* e *h*, definidas nas atividades resolvidas **1**, **2** e **3**, os zeros de cada uma delas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

No gráfico que representa cada uma das três funções, o número de intersecções com o eixo das abscissas varia. Isso ocorre porque, quando o discriminante é negativo, não há zeros da função e, portanto, a representação gráfica da função não intersecta o eixo das abscissas. Quando o discriminante é nulo, há um zero da função de multiplicidade 2 e, portanto, a representação gráfica da função tangencia o eixo das abscissas. Quando o discriminante é positivo, há dois zeros da função distintos e, portanto, a representação gráfica da função intersecta o eixo das abscissas em dois pontos.

Atividades resolvidas

4. Determine as condições sobre o parâmetro real *m* na função dada por $y = 3x^2 - 2x + (m - 1)$ a fim de que:

a) não existam zeros reais;

b) haja um zero duplo da função;

c) existam dois zeros reais e distintos.

Solução:

Na lei $y = 3x^2 - 2x + (m - 1)$, as variáveis *x* e *y* se relacionam e *m* é um parâmetro que pode assumir qualquer valor real.

Calculando o discriminante (Δ), temos:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (m - 1) = 4 - 12m + 12 = 16 - 12m$$

Assim:

a) $\Delta < 0 \Rightarrow 16 - 12m < 0 \Rightarrow m > \frac{4}{3}$

b) $\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 12m = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$

c) $\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 12m > 0 \Rightarrow m < \frac{4}{3}$

5. A medida de área de um retângulo pode ser calculada multiplicando o valor das medidas dos lados, ou seja:

$x \cdot (x + 4) = 621 \Rightarrow x^2 + 4x - 621 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{2\,500}}{2} \Rightarrow x = -27$ ou $x = 23$

Como não faz sentido *x* ser negativo, já que representa uma medida de lado, temos $x = 23$ cm.

Logo, as medidas do retângulo são 23 cm e 27 cm e o perímetro mede $2 \cdot (23 + 27) = 100$, ou seja, 100 cm.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

3. Determine os zeros reais de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas pelas seguintes leis.

a) $y = 4x - x^2$ $x = 0$ ou $x = 4$

b) $y = -x^2 + 2x + 15$ $x = -3$ ou $x = 5$

c) $y = 9x^2 - 1$ $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{1}{3}$

d) $y = -x^2 + 6x - 9$ $x = 3$

e) $y = 3x^2$ $x = 0$

f) $y = x^2 - 5x + 9$ Não há zero real.

g) $y = (x + 3) \cdot (x - 5)$ $x = -3$ ou $x = 5$

h) $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6$ $x = \sqrt{3}$ ou $x = 2\sqrt{3}$

4. Elabore e resolva um problema que possa ser resolvido por meio da equação $(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = 1325$.

4. Exemplo de resposta: "A soma dos quadrados de 3 números inteiros positivos consecutivos é 1 325. Quais são esses números?".

5. A medida de um dos lados de um retângulo excede a medida do outro em 4 cm. Sabendo que a área desse retângulo mede 621 cm², determine a medida de perímetro.

6. Um grupo de professores programou uma viagem de confraternização que custaria, no total e independentemente do número de pessoas participantes, R$ 6.400,00, valor que dividiriam igualmente entre eles. Alguns dias antes da partida, 6 professores desistiram da viagem e, assim, cada professor participante pagou R$ 240,00 a mais. Quantos foram à viagem? 10 professores.

7. Um vendedor de sucos naturais, em certo mês, obteve uma receita média de R$ 180,00 por dia vendendo cada copo de suco pelo mesmo preço. Aumentou o preço em R$ 0,50 no mês seguinte e vendeu uma média de 18 unidades a menos por dia, mas a receita média diária foi a mesma. Determine:

a) o preço do copo de suco no primeiro mês; R$ 2,00

b) o número de copos vendidos por dia no primeiro mês; 90 copos vendidos no primeiro mês.

c) o número de copos vendidos por dia no segundo mês. No segundo mês, vendeu 18 copos a menos, então 90 – 18 = 72, ou seja, 72 copos foram vendidos.

8. Um vendedor de coco-verde fez algumas alterações no preço (p) do coco para estudar o que aconteceria com a quantidade vendida (n) durante uma temporada de verão.

Inicialmente, notou que:

$$n \cdot p = 280$$

Ao fazer as alterações no preço, percebeu que:

$$(n + 10) \cdot (p - 0{,}5) = 280$$

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) O que representa a equação $n \cdot p = 280$?

b) Qual é o significado prático da igualdade $(n + 10) \cdot (p - 0{,}5) = 280$?

c) Quais são os valores de n e p?

9. Determine em função de m, sendo $m \in \mathbb{R}$, a quantidade de zeros reais da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada pela lei $y = x^2 - 4x + (m + 3)$.

7. Para resolver os itens **a**, **b** e **c**, precisamos modelar a situação. Assim, sendo n e p, respectivamente, o número de copos de suco vendidos e o preço deles no primeiro mês, temos:

$$\begin{cases} n \cdot p = 180 & \text{I} \\ (p + 0{,}50) \cdot (n - 18) = 180 & \text{II} \end{cases}$$

De **II**, temos:
$np - 18p + 0{,}5n - 9 = 180$.
Aplicando o valor de **I** do lado esquerdo da igualdade, temos:
$180 - 18p + 0{,}5n - 9 = 180 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 18 + 36p$

Substituindo em **I**, obtemos:
$(18 + 36p) \cdot p = 180 \Rightarrow$
$\Rightarrow 36p^2 + 18p - 180 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2p^2 + p - 10 = 0 \xrightarrow{p > 0} p = 2$ e $n = 90$

9. Para determinar os zeros da função, fazemos o estudo do discriminante:

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 3) =$
$= 16 - 4 \cdot (m + 3) = 4 - 4m$

- Se $m < 1 \Rightarrow \Delta > 0$, então temos 2 zeros reais distintos.
- Se $m = 1 \Rightarrow \Delta = 0$, então temos 1 único zero real com multiplicidade 2.
- Se $m > 1 \Rightarrow \Delta < 0$, então não temos zero real.

Soma e produto das raízes de uma equação

Considere x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Vamos calcular a soma das raízes, $x_1 + x_2$, e o produto das raízes, $x_1 \cdot x_2$.

- $x_1 + x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{b^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{(2a)^2} = \dfrac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

Atividades resolvidas

5. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que uma das raízes da equação $x^2 - 5x + (k + 3) = 0$, de incógnita x, seja igual ao quádruplo da outra.

Solução:

Usando os valores da soma e do produto das raízes, temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5 \ \text{I} \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = k + 3 \ \text{II}$$

Do enunciado, temos $x_1 = 4x_2$. III

Substituindo III em I, obtemos:

$$4x_2 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 4$$

De II, temos:

$$4 \cdot 1 = k + 3 \Rightarrow k = 1$$

Forma fatorada

Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial de 2º grau dada por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, e zeros x_1 e x_2, então f pode ser escrita na forma $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, que é chamada **forma fatorada da função polinomial de 2º grau** (lembre-se de que fatorar uma expressão algébrica significa escrevê-la sob a forma de multiplicação). Vamos mostrar essa propriedade:

$$y = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Sabendo que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, podemos escrever:

$$y = a \cdot [x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2]$$
$$y = a \cdot [x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2]$$
$$y = a \cdot [x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1)]$$
$$y = a \cdot [(x - x_1) \cdot (x - x_2)] = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Vamos aplicar essa fatoração num exemplo.

Os zeros da função quadrática definida por $y = 2x^2 - 4x - 6$ são -1 e 3. A forma fatorada da lei dessa função é, portanto:

$$y = 2 \cdot [x - (-1)] \cdot (x - 3) = 2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)$$

Um pouco mais adiante, usaremos a forma fatorada para determinar a lei de uma função quadrática, quando são conhecidos os zeros reais dessa função.

11. a) $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{2} = 3$

b) $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

c) $\frac{r_2 + r_1}{r_1 \cdot r_2} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$

d) $(r_1)^2 + (r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2 \cdot r_1 r_2 =$
$= \left(-\frac{(-6)}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 9 - 3 = 6$

10. a) Soma: $-\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$; produto: $\frac{-5}{3}$.

b) Soma: $-\frac{6}{-1} = 6$; produto: $\frac{-5}{-1} = 5$.

c) Soma: $-\frac{0}{2} = 0$; produto: $\frac{-7}{2}$.

d) Soma: $-\frac{-3}{1} = 3$; produto: $\frac{-2}{1} = -2$.

12. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = -11 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -3$ e $x_2 = -8$; então: $p = x_1 \cdot x_2 = 24$.

Observação

Se a função polinomial de 2º grau tiver um zero real de multiplicidade 2, consideramos que $x_1 = x_2$ e, então, $y = a \cdot (x - x_1)^2$.

13. Sejam r_1 e $3r_1$ as raízes dessa equação. O produto das raízes é igual a:

$\frac{c}{a} = \frac{48}{1} \Rightarrow 48 = r_1 \cdot 3r_1 = 48 \Rightarrow 3(r_1)^2 = 48 \Rightarrow (r_1)^2 = 16 \xrightarrow{r_1 < 0} r_1 = -4$; logo, as raízes são -4 e -12.

A soma das raízes é: $(-4) + (-12) = -\frac{b}{a} \Rightarrow -16 = -\frac{2m}{1} \Rightarrow m = 8$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

10. Calcule a soma e o produto das raízes reais das seguintes equações de 2º grau.

a) $3x^2 - x - 5 = 0$

b) $-x^2 + 6x - 5 = 0$

c) $2x^2 - 7 = 0$

d) $x(x - 3) = 2$

11. Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação de 2º grau $2x^2 - 6x + 3 = 0$. Determine o valor de:

a) $r_1 + r_2$

b) $r_1 \cdot r_2$

c) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

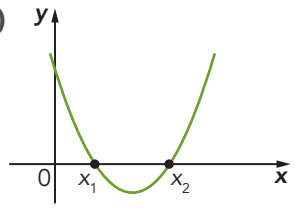
d) $(r_1)^2 + (r_2)^2$

12. A diferença entre as raízes da equação $x^2 + 11x + p = 0$ (com $p \in \mathbb{R}$) é igual a 5. Dadas essas informações, determine as raízes e encontre o valor de p.

13. As raízes reais da equação $x^2 + 2mx + 48 = 0$ (com $m \in \mathbb{R}$) são negativas e uma é o triplo da outra. Qual é o valor de m?

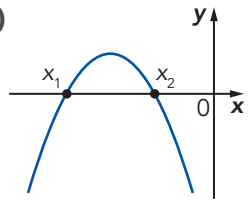
14. Em cada item, está representado o gráfico de uma função quadrática f.
Determine, para cada caso, o sinal da soma (S) e do produto (P) dos zeros da função f.

a)



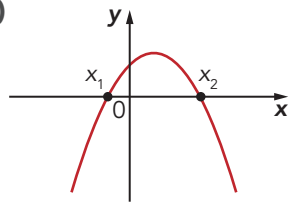
$x_1 > 0$; $x_2 > 0$
$S > 0$; $P > 0$

b)



$x_1 > 0$; $x_2 < 0$
$S < 0$; $P > 0$

c)



$x_1 < 0$; $x_2 > 0$; $|x_2| > |x_1|$
$S > 0$; $P < 0$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

15. Em cada caso, obtenha a forma fatorada da função quadrática f, dada por:

a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$ $f(x) = (x - 5) \cdot (x - 2)$

b) $f(x) = -2x^2 + 10x$ $f(x) = -2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 5) = -2x \cdot (x - 5)$

c) $f(x) = -x^2 - 10x - 25$ $f(x) = -1 \cdot (x + 5) \cdot (x + 5) = -(x + 5)^2$

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

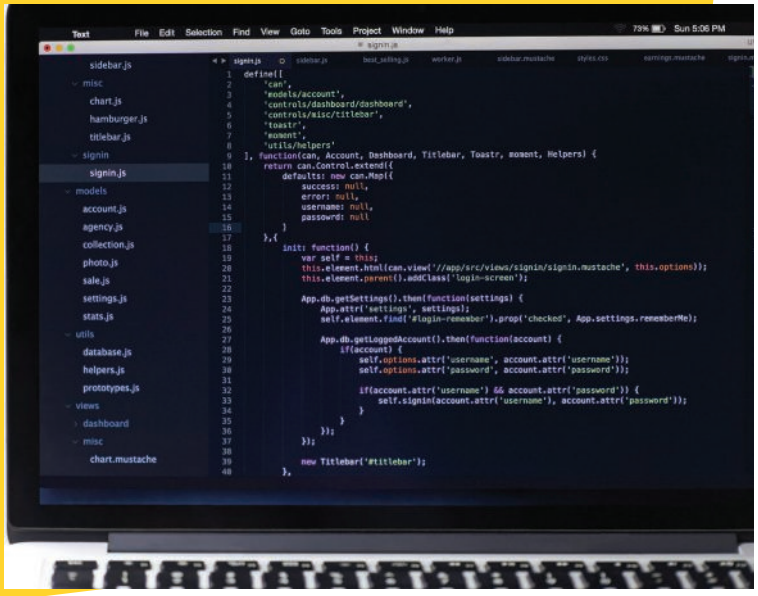
Agora que já foi apresentado mais de um tipo de função aos estudantes, propomos esta seção para que eles possam aplicar a habilidade de avaliar o tipo de função a partir da lei dela.

As funções na programação

O termo **função** é muito usado na computação. Uma planilha digital oferece uma vasta gama de funções para automatizar processos, e um programador pode escrever blocos de funções para organizar a estruturação de um programa. Em ambos os casos, o termo **função** representa um procedimento que recebe um valor (numérico ou não) de entrada e devolve a "imagem" correspondente depois de realizar operações definidas pela planilha digital ou pelo programador. O mesmo ocorre na parte operacional das funções da Matemática: a partir de um número pertencente ao domínio da função, alguma operação algébrica é realizada e obtemos como resultado a imagem correspondente pertencente ao contradomínio.

Vamos supor que uma professora tenha criado um programa de computador para calcular as notas, de 0 a 10, de cada estudante da turma, atribuídas como resultado de um teste contendo 16 questões. O processo de cálculo para atribuir uma nota a cada teste é sempre o mesmo: dividir o número de acertos por 16 (número total de questões) e multiplicar o resultado por 10.

photovibes/Shutterstock



A maior parte das profissões atualmente se beneficia dos conhecimentos básicos de linguagem de programação.

Para isso, a professora elaborou nesse programa uma função chamada "calcula_nota", e essa função tinha, como valor de entrada, o número x de acertos no teste e, como valor de saída, a nota N de cada estudante.

Com o intuito de garantir o bom funcionamento do programa, a professora criou também um alerta no programa que interrompia a execução caso x fosse um valor diferente do esperado.

Em dupla, respondam às questões a seguir no caderno.

1. Qual é o domínio da função "calcula_nota" criada pela professora? Qual é a importância de defini-lo para essa situação?

2. Qual é a lei da função "calcula_nota" criada pela professora, ou seja, qual é a operação que deve ser realizada com cada elemento do domínio para obter a imagem correspondente? $N(x) = \frac{x}{16} \cdot 10$

3. A função obtida é uma função afim, quadrática ou nenhuma das anteriores? Justifique sua resposta.

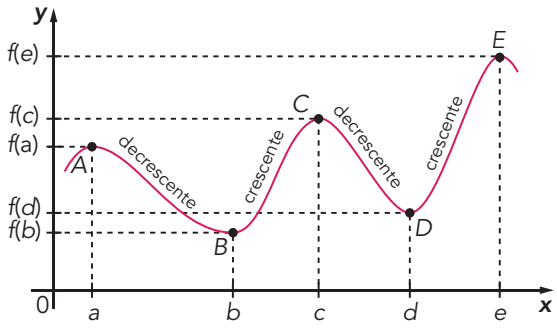
A função obtida é uma função afim, pois pode ser descrita pela lei $y = ax + b$, em que $a = \frac{10}{16} = 0,625$ e $b = 0$.

1. Domínio: $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 16\}$.

Definir o domínio é essencial para criar o alerta do programa: qualquer valor de x que não faz parte do domínio deve gerar o alerta para parar a execução do programa, pois indica que há algo de errado.

Máximos e mínimos

Uma função considerada em todo o domínio ou em apenas um subconjunto do domínio pode apresentar pontos de máximo e/ou pontos de mínimo, ou seja, pontos em que a função apresenta seus maiores valores ou seus menores valores. Considere o exemplo da função representada pelo gráfico.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Podemos concluir, a partir do gráfico, que:

- B é o ponto de mínimo de f no intervalo $I = [a, e]$, sendo $f(b)$ o valor mínimo que a função assume em I;
- E é o ponto de máximo de f no intervalo $I = [a, e]$, sendo $f(e)$ o valor máximo que a função assume em I;
- C é o ponto de máximo de f no intervalo $J = [b, d]$, sendo $f(c)$ o valor máximo que a função assume em J;
- D é o ponto de mínimo de f no intervalo $K = [c, e]$, sendo $f(d)$ o valor mínimo que a função assume em K.

Assim, seja S um subconjunto do domínio D e seja $x_0 \in S$.

Se, para todo x pertencente a S, temos $f(x) \geqslant f(x_0)$, então $(x_0, f(x_0))$ são as coordenadas do **ponto de mínimo** de f em S e $f(x_0)$ é o **valor mínimo** de f em S.

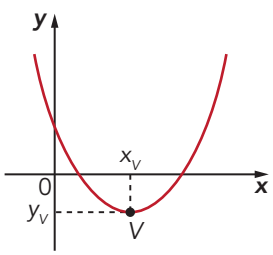
Se, para todo x pertencente a S, temos $f(x) \leqslant f(x_0)$, então $(x_0, f(x_0))$ são as coordenadas do **ponto de máximo** de f em S e $f(x_0)$ é o **valor máximo** de f em S.

Coordenadas do vértice da parábola

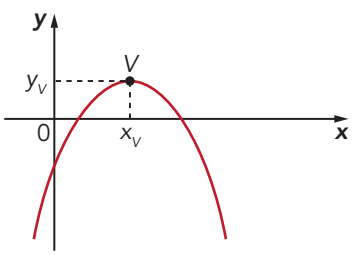
Vamos aplicar o conceito de máximo e mínimo à função quadrática. Toda parábola tem um ponto relevante chamado **vértice de parábola**. Vamos representar por V o ponto que é vértice da parábola.

Dada uma função quadrática definida pela lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, temos duas possibilidades.

- Se $a > 0$, então a concavidade da parábola é voltada para cima e ela terá um ponto de mínimo V, de coordenadas (x_V, y_V).



- Se $a < 0$, então a concavidade da parábola é voltada para baixo e ela terá um ponto de máximo V, de coordenadas (x_V, y_V).



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Nosso objetivo é determinar as coordenadas x_V e y_V do vértice V da parábola. Para isso, vamos retomar a fórmula que define a função quadrática e escrevê-la de outra maneira, sendo $a \neq 0$.

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \Rightarrow y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \Rightarrow y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \Rightarrow y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Esta última forma é denominada **forma canônica da função quadrática**, lembrando que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Verificando a forma canônica, podemos notar que a, $\frac{b}{2a}$ e $\frac{\Delta}{4a^2}$ são valores constantes.

Apenas x é variável. A partir disso, decorrem as considerações a seguir.

- Se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima, então o valor mínimo de y é estabelecido quando ocorrer o valor mínimo para $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$. Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre maior ou igual a zero, o valor mínimo ocorre se $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, se $x = -\frac{b}{2a}$. Nessa situação, o valor mínimo de y é: $y = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$.
- Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo e, por meio de raciocínio análogo, é possível definir que o valor máximo de y ocorre se $x = -\frac{b}{2a}$. Nessa situação, o valor máximo de y é: $y = a\left(0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.

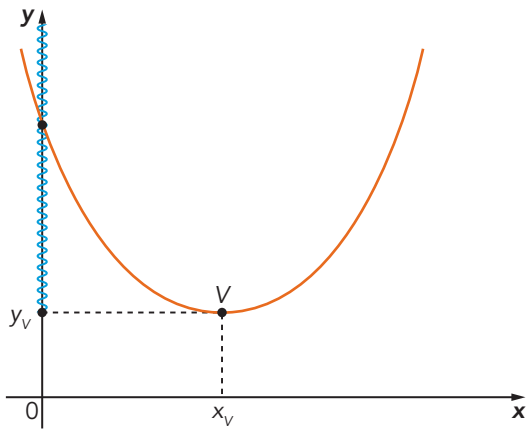
Portanto, em ambos os casos, as coordenadas (x_V, y_V) do vértice são:

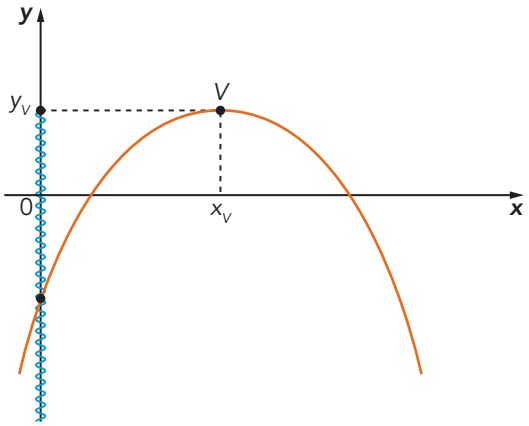
$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

O conjunto imagem

O conjunto imagem $Im(f)$ da função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que a função f assume. Há duas possibilidades:

- Se $a > 0$, então $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant y_V = -\frac{\Delta}{4a}\right\}$.
- Se $a < 0$, então $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant y_V = -\frac{\Delta}{4a}\right\}$.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

6. No Peru há um monumento conhecido como Arco Parabólico, localizado na cidade de Tacna. A medida de altura h do monumento, em função da medida de distância horizontal x a partir de uma das bases do monumento em direção à outra, pode ser aproximada pela função dada por $h(x) = -\frac{9}{8}x^2 + 9x$, em que h e x são valores dados em metros. Qual é a medida de altura máxima do monumento e a que medida de distância horizontal da base do monumento ela ocorre?

Dreamstime/Easy Mediabank

O Monumento aos Heróis, popularmente também conhecido como Arco Parabólico, na cidade de Tacna, no Peru, tem uma estrutura de pedra rosada em formato de parábola. Foto de 2024.

Solução:

Podemos encontrar a medida de altura máxima calculando y_V e a medida de distância da base do monumento por x_V:

$$y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{81}{4 \cdot \left(-\frac{9}{8}\right)} = -\frac{81}{\left(-\frac{9}{2}\right)} = 18$$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{2 \cdot \left(-\frac{9}{8}\right)} = -\frac{9}{-\frac{9}{4}} = 4$$

Portanto, a medida máxima de altura do monumento é de 18 m e ocorre a uma medida de distância de 4 m da base do monumento.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

16. Para cada uma das funções quadráticas seguintes, obtenha as coordenadas do vértice da parábola e determine o conjunto imagem.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 4$ $V(3, -5)$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -5\}$

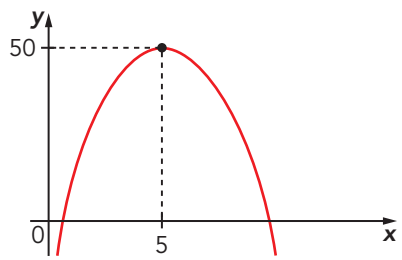
b) $g(x) = -2x^2 - x + 3$

c) $h(x) = 2x^2 - 60x$ **16. c)** $V(15, -450)$; $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -450\}$

d) $i(x) = -5 - x^2$ **16. d)** $V(0, -5)$; $Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -5\}$

e) $j(x) = (x + 1)(2 - x)$ $V\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$; $Im(j) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{9}{4}\right\}$

17. O gráfico a seguir representa a função quadrática dada por $y = -3x^2 + bx + c$. Quais são os valores de b e c?



Banco de imagens/Arquivo da editora

17. $x_V = 5 = \frac{-b}{2 \cdot (-3)} \Rightarrow b = 30$ e $y = -3x^2 + 30x + c$

Como $y_V = 50$, temos:

$50 = -\frac{30^2 - 4 \cdot (-3) \cdot c}{4 \cdot (-3)} \Rightarrow 12c = 600 - 900 \Rightarrow c = -25$

16. b) $V\left(-\frac{1}{4}, \frac{25}{8}\right)$; $Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{25}{8}\right\}$

18. Certa empresa desenvolveu um aplicativo para *smartphones* e estudou quantos usuários fizeram o *download* dele ao longo das semanas que se seguiram. A empresa concluiu que podia descrever o número de milhares de *downloads* do aplicativo (y) em função da quantidade de semanas (x) transcorridas desde quando o aplicativo ficou disponível por meio da expressão $y = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + c \cdot x$, em que c é uma constante real.

Gorodenkoff/Shutterstock

O desenvolvedor de aplicativos é o profissional responsável por criar, planejar e programar soluções para dispositivos móveis.

Sabendo que, ao completar uma semana do início da contagem, já haviam sido registrados 700 *downloads* (0,7 mil *downloads*), determine após quantas semanas:

a) no mínimo, não foram registrados mais *downloads* desse aplicativo; 36 semanas.

b) o número de *downloads* foi máximo e qual foi esse número. 18 semanas; 6 480 *downloads*.

19. Um túnel deve ser construído de modo que:

- a abertura tenha o formato de uma parábola apoiada no solo;
- a base tenha 10 m de medida da largura;
- a medida da altura máxima seja de, no mínimo, 3 m e de, no máximo, 5 m.

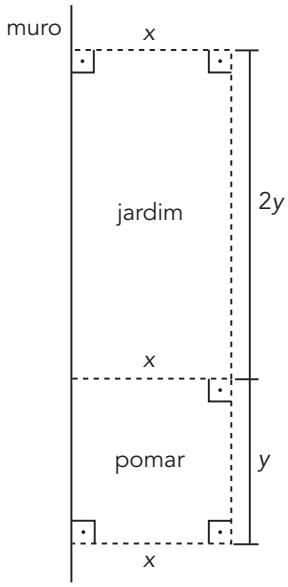
Os engenheiros responsáveis pela obra chegaram à conclusão de que a lei da função que representa todos os túneis possíveis desse formato com medida da largura igual a 10 m é $f(x) = kx^2 - 25k$.

a) Quais são os possíveis valores de k para que o túnel tenha medida da altura máxima no intervalo entre 3 m e 5 m? $-0{,}2 \leqslant k \leqslant -0{,}12$

b) **Experimente** usar um *software* de Geometria dinâmica para construir o gráfico das curvas dessa função para os casos da altura máxima medindo 3 m e 5 m.

A resposta depende do *software* utilizado pelos estudantes.

20. Um fazendeiro tem 150 m de tela para cercar um jardim, de formato retangular, e um pomar, aproveitando, como um dos lados, parte de um muro, conforme indica a imagem a seguir.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) Encontre a medida de área A em função da medida da largura x do terreno do fazendeiro levando em conta o limite de 150 m de tela disponível para cercar o jardim e o pomar. $A = -3x^2 + 150x$

b) **Experimente** usar um *software* de Geometria dinâmica para construir o gráfico da função encontrada no item **a**. Clique no vértice do gráfico para obter os valores das coordenadas desse ponto. Tendo como referência as informações do gráfico, avalie se o impacto na medida de área variaria mais caso o fazendeiro resolvesse alterar a medida da largura x de 20 m para 25 m, ou se a alteração fosse de 15 m para 20 m.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

21. Entre todos os retângulos de perímetro medindo 20 cm, determine aquele cuja medida de área é máxima. Qual é a medida dessa área? O de maior medida de área é um quadrado; 25 cm².

19. b) Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Financeira*.

Por tratar do controle financeiro de um estabelecimento comercial, podendo ser relacionada à modalidade de trabalho autônomo, sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Não escreva no livro

Funções custo, receita e lucro

Uma empreendedora abriu uma pequena doceria numa galeria comercial para produzir e vender brigadeiros.

Nos primeiros meses do negócio, notou que, mensalmente, há uma despesa ou custo fixo (C_F) de R$ 2.800,00 e um custo variável (C_V), que depende da quantidade de brigadeiros preparados. Ela estima que o custo unitário (por unidade) de produção do brigadeiro seja de R$ 1,40. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Cite exemplos de gastos que podem ser considerados custo fixo (ou despesa) da doceria.

b) Seja x a quantidade de brigadeiros produzidos em determinado mês. Obtenha a lei que define o custo total mensal (C) da empreendedora considerando $C = C_F + C_V$.

DihandraPinheiro/Shutterstock

O brigadeiro é um doce tradicionalmente brasileiro.

A dona do negócio decidiu fixar o preço de venda do brigadeiro em R$ 4,20. Neste momento, vamos admitir que esse preço, independe de outros fatores, será mantido fixo. Vamos também supor que toda a quantidade de brigadeiro produzida na doceria seja vendida.

c) Qual é a lei da função que representa a arrecadação bruta, sem levar em consideração as despesas da doceria? Em modelos matemáticos de Economia, costuma-se designar a arrecadação bruta por receita (R). Assim, escreva R em função de x, em que x é a quantidade de brigadeiros vendidos.

d) Represente, no caderno, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções custo (C) e receita (R) em função de x.

pikisuperstar/Freepik

e) As grandezas custo (C) e número de brigadeiros comercializados (x) são diretamente proporcionais? E as grandezas receita (R) e número de brigadeiros comercializados (x)?

f) Determine o ponto de intersecção das duas retas obtidas no item **d**. Sob a perspectiva econômica, qual é a interpretação desse ponto, conhecido como **ponto crítico** ou **ponto de nivelamento**?

Uma vez determinadas as leis que definem as funções receita (R) e custo total (C), é possível definir uma nova lei para uma função que expresse o faturamento líquido ou lucro (L) da doceria, dada pela diferença entre R e C, ou seja, $L = R - C$.

g) Escreva a lei que define L em função de x e construa o gráfico de L. Para quais valores de x o lucro é negativo (isto é, a doceria fica no prejuízo), o lucro é nulo ou o lucro é positivo?

Nos primeiros meses de vendas, foi comercializada uma quantidade de brigadeiros igual ao necessário para atingir o ponto crítico. Assumindo isso como regra, a empreendedora tomou uma decisão para aumentar o lucro: resolveu variar o preço de venda do brigadeiro ao notar que, a cada R$ 0,10 de aumento, o número de doces vendidos diminuía em 15 unidades.

Considerando esse novo número de brigadeiros, a nova receita (R), em função da quantidade n (com $n \in \mathbb{N}$) de aumentos de 10 centavos, passou a ser:

$$R(n) = \underbrace{(1000 - 15n)}_{\substack{\text{quantidade de brigadeiros} \\ \text{vendidos com } n \text{ aumentos} \\ \text{de 10 centavos}}} \cdot \underbrace{(4{,}20 + 0{,}1n)}_{\substack{\text{preço cobrado por} \\ \text{brigadeiro com } n \text{ aumentos} \\ \text{de 10 centavos}}} = -1{,}5n^2 + 37n + 4200$$

h) Qual seria a lei que define o custo (C) em função da quantidade n de aumentos de 10 centavos? Considere novamente que todos os brigadeiros produzidos na doceria sejam vendidos.

i) Qual é a lei que define o lucro (L) em função da quantidade n de aumentos de 10 centavos?

j) Qual deve ser o número n de aumentos de 10 centavos que devem ser aplicados sobre o preço "normal" de venda a fim de que o lucro mensal da dona do negócio seja máximo? Qual será o lucro máximo?

k) Qual deve ser o preço, portanto, do brigadeiro e quantos brigadeiros devem ser produzidos para venda a fim de obter lucro máximo?

D1 Photography/Shutterstock

O consumo de doces deve ser realizado com moderação, visando a uma dieta equilibrada.

pikisuperstar/Freepik

Esboço da parábola

Muitas vezes, é interessante fazer um esboço da parábola sem montar uma tabela com muitos pares (x, y) que satisfaçam a lei da função quadrática. A melhor maneira de fazer esse esboço é reunir alguns elementos importantes da parábola, como o vértice; as intersecções com o eixo x (se houver), que fornecem os zeros reais da função; e a intersecção com o eixo y. Esses elementos permitem analisar aspectos importantes da função representada pela parábola, como o sinal da função, os intervalos de crescimento e decrescimento, o ponto de máximo (ou de mínimo), etc.

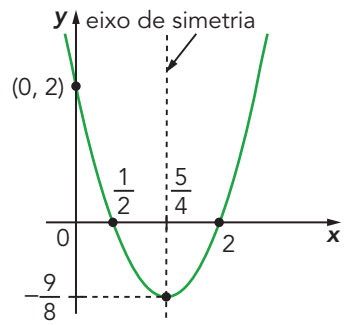
Acompanhe a seguir alguns passos importantes para a realização do esboço de uma parábola.

- Verificar o sinal do **coeficiente *a***, pois ele define se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo.
- Encontrar os zeros da função, caso existam, já que definem os pontos em que a parábola intersecta o eixo Ox.
- Determinar o **vértice** $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, que indica o ponto de mínimo (se $a > 0$) ou o de máximo (se $a < 0$).
- Localizar o **eixo de simetria** da parábola, que é a reta que passa por V e é paralela ao eixo Oy.
- Lembrar que, para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Então, $(0, c)$ é o ponto em que a parábola intersecta o eixo Oy.

Vamos fazer o esboço do gráfico da função quadrática dada por $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

Características:

- Concavidade voltada para cima, pois $a = 2 > 0$.
- Zeros da função: $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2$.
- Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$.
- Intersecção com o eixo Oy: $(0, c) = (0, 2)$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{8}\right\}$.

Verifique que f é crescente se $x > \frac{5}{4}$ e decrescente se $x < \frac{5}{4}$.

Pense nisto: A abscissa do vértice é a média aritmética das raízes da equação ou ainda podemos dizer que a abscissa do vértice é o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são os dois zeros reais.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = \frac{-b}{2a} = x_V$$

Não escreva no livro

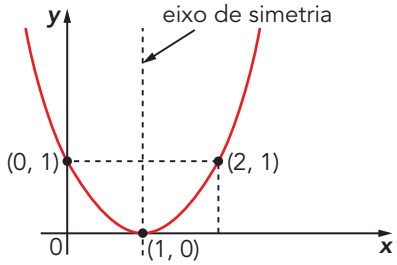
Pense nisto

Se uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ tem 2 zeros reais e distintos, qual é a relação existente entre eles e a abscissa do vértice?

Vamos agora fazer o esboço do gráfico da função quadrática dada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Temos como características:

- Concavidade voltada para cima, pois $a = 1 > 0$.
- Zeros da função: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (raiz dupla).
- Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (1, 0)$.
- Intersecção com o eixo Oy: $(0, c) = (0, 1)$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$.

Verifique que f é crescente se $x > 1$ e decrescente se $x < 1$.

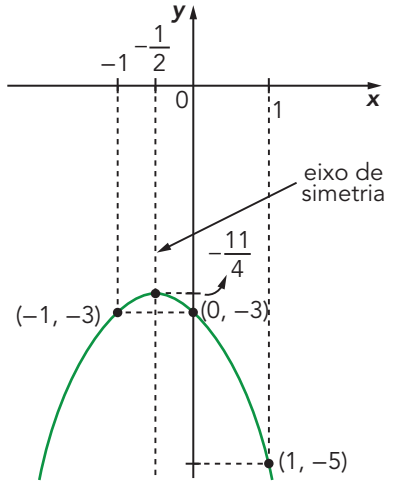
Vamos esboçar o gráfico da função quadrática definida por $f(x) = -x^2 - x - 3$.

Temos a seguir as características:

- Concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 < 0$.
- Zeros da função: $-x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \nexists\, x$ real, pois $\Delta < 0$.
- Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$.
- Intersecção com o eixo Oy: $(0, c) = (0, -3)$.

Como temos apenas 2 pontos, é recomendável obter mais alguns, por exemplo:

$x = 1 \Rightarrow y = -5$; $(1, -5)$ e $x = -1 \Rightarrow y = -3$; $(-1, -3)$, etc.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{11}{4}\right\}$.

Não escreva no livro

Pense nisto

Se uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ tem 1 zero com multiplicidade 2, qual é a relação existente entre ele e a abscissa do vértice?

O zero da função de multiplicidade 2 coincide com a abscissa do vértice.

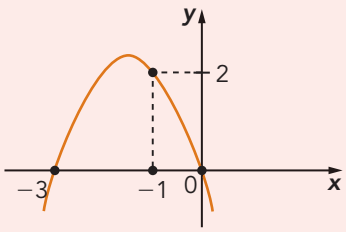
Observação

Não use régua para traçar a curva que passa pelos pontos de uma parábola, pois ela não deve ser representada como um conjunto de segmentos de reta. Use a régua apenas para desenhar os eixos e definir a escala, mas faça a curva à mão livre.

Uma vez tendo conhecimento do esboço da parábola que intersecta em um ou dois pontos o eixo das abscissas, é possível obter a lei da função que é representada graficamente por ela. Um dos métodos possíveis é substituindo os valores dos zeros da função na forma fatorada da lei da função quadrática e, em seguida, utilizando as coordenadas de um terceiro ponto para descobrir o valor do coeficiente a. Analise a atividade resolvida a seguir.

Atividades resolvidas

7. Determine a lei da função quadrática cujo esboço do gráfico está representado a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

Os zeros da função quadrática são –3 e 0. Então a lei, na forma fatorada, é:

$$y = a \cdot (x + 3) \cdot (x - 0)$$

Para $x = -1$, temos $y = 2$. Então:

$$2 = a(-1 + 3) \cdot (-1 - 0) \Rightarrow 2 = -2a \Rightarrow a = -1$$

Daí:

$$y = -1(x + 3) \cdot x \Rightarrow y = -x^2 - 3x$$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

Os gráficos encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

22. Faça o esboço do gráfico das funções dadas pelas leis a seguir, com domínio $D = \mathbb{R}$, e determine o conjunto imagem.

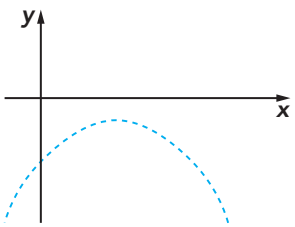
a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$

b) $g(x) = (x - 3) \cdot (x + 2)$
$Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{25}{4}\right\}$

c) $h(x) = -x^2 + \frac{1}{4}$
$Im(h) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{1}{4}\right\}$

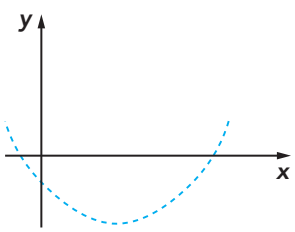
23. Um dos esboços de gráficos seguintes apresenta dados incompatíveis sobre uma função polinomial de 2º grau dada por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Identifique-o e explique o porquê.

(I)



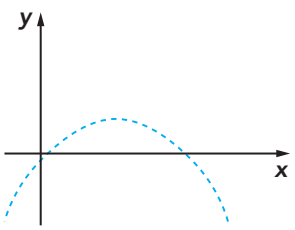
$a < 0$
$b > 0$
$c < 0$

(II)



$a > 0$
$b < 0$
$c < 0$

(III)



$a < 0$
$b < 0$
$c < 0$

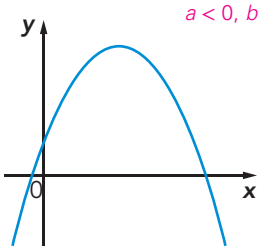
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

23. III, pois como $x_V = -\frac{b}{2a} > 0$, temos que a e b devem ter sinais opostos.

24. A parábola a seguir representa a função dada por $y = ax^2 + bx + c$, definida de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine o sinal dos coeficientes a, b e c.

$a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$

Banco de imagens/Arquivo da editora



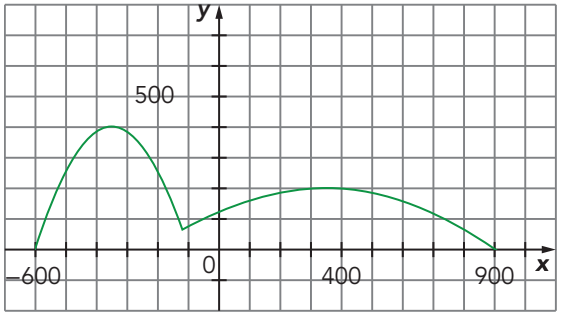
25. Considerando as funções quadráticas definidas pela lei $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, elabore um fluxograma para determinar o sinal do coeficiente b ($b > 0$, $b < 0$ ou $b = 0$), conhecidos o sinal do coeficiente a e o sinal da abscissa do vértice da parábola (x_V).

Dica: Inicie seu fluxograma analisando os sinais do coeficiente a e siga tomando as decisões com respostas sim ou não, até chegar à conclusão sobre o sinal do coeficiente b.

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

26. Um estudante representou de maneira simplificada, num projeto, o formato dos morros do Pão de Açúcar e da Urca, localizados na cidade do Rio de Janeiro (RJ), usando partes de duas parábolas.

Banco de imagens/Arquivo da editora

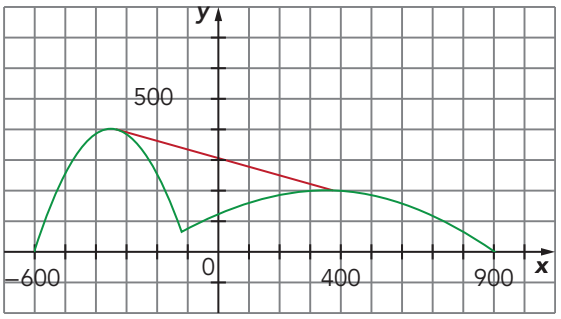


A parte da parábola que representa o morro da Urca (morro mais baixo) corta o eixo Ox em $x = 900$ e, se não fosse interrompida pela parábola que representa o morro do Pão de Açúcar, cortaria o eixo Ox também em $x = -200$. Já a outra parábola, que representa o morro do Pão de Açúcar, corta o eixo Ox em $x = -600$ e o cortaria em $x = 0$ se não fosse interrompida.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Sabendo que, no esquema do estudante, os morros do Pão de Açúcar e da Urca têm medida de altura máxima $y_{VP} = 400$ e $y_{VU} = 200$, respectivamente, e que existe um bondinho que liga, aproximadamente, o topo dos morros em linha reta, qual é a lei da função afim que representa o trajeto do bondinho?

b) Depois de obter a lei da função afim, o estudante esboçou um novo gráfico para incluir o trajeto do bondinho, conforme indicado a seguir. Porém, notou um problema nesse trajeto. Qual é esse problema e o que pode ser feito para resolvê-lo?



Banco de imagens/Arquivo da editora

27. Determine, em cada caso, a lei que define a função quadrática:

a) cujo gráfico contém os pontos $(-1, 5)$, $(0, 8)$ e $(3, 5)$; $y = -x^2 + 2x + 8$

b) de zero duplo igual a $\sqrt{3}$ e cujo gráfico intersecta o eixo Oy em $(0, 3)$. $y = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$

28. Um biólogo desejava comparar a ação de dois fertilizantes. Para isso, duas plantas **A** e **B** da mesma espécie, que nasceram no mesmo dia, foram desde o início tratadas com fertilizantes diferentes. Durante vários dias ele acompanhou o crescimento dessas plantas, medindo, dia a dia, suas alturas. Ele observou que a planta **A** cresceu linearmente, à taxa de 2,5 cm por dia; e a medida de altura da planta **B** pode ser modelada pela função quadrática dada por $y = \frac{20x - x^2}{6}$, em que y é a altura, medida em centímetros, e x é o intervalo de tempo, medido em dias.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Obtenha a diferença entre as medidas de altura dessas plantas com 2 dias de vida.

b) Qual é a lei da função que representa a medida de altura (y) da planta **A** em função de x (número de dias)?

c) Determine o dia em que as duas plantas atingiram a mesma medida de altura e qual foi essa medida.

d) Calcule a taxa média de variação do crescimento das plantas **A** e **B** do 1º ao 4º dia.

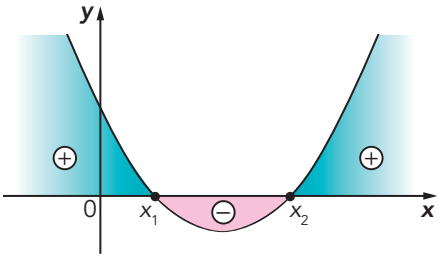
Sinal da função quadrática

Vamos considerar uma função quadrática definida pela lei $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, *com* $a \neq 0$, e determinar os valores de x para os quais y é negativo e os valores de x para os quais y é positivo.

Dependendo do sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, podem ocorrer os casos descritos a seguir.

$\Delta > 0$

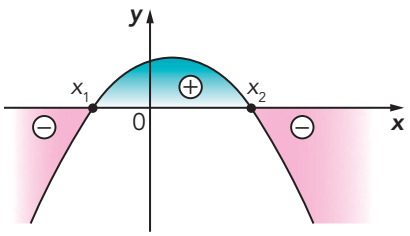
Nesse caso, a função quadrática admite dois zeros reais distintos ($x_1 \neq x_2$). A parábola intersecta o eixo Ox em dois pontos, e o sinal da função é o indicado em cada um dos gráficos.



$a > 0$

$y > 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$

$y < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$



$a < 0$

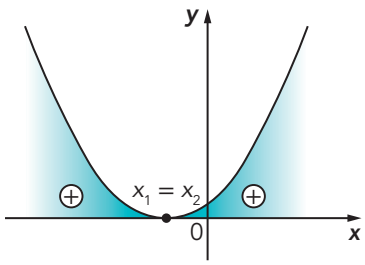
$y > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$

$y < 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$\Delta = 0$

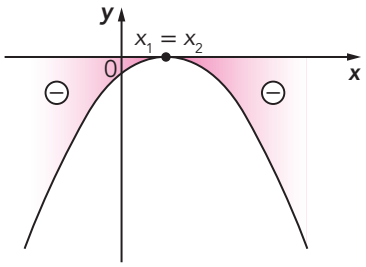
Nesse caso, a função quadrática admite dois zeros reais iguais ($x_1 = x_2$). A parábola tangencia o eixo Ox, isto é, intersecta o eixo em um único ponto, e o sinal da função é o indicado nos gráficos a seguir.



$a > 0$

$y > 0, \forall\, x \neq x_1$

$\nexists\, x$ tal que $y < 0$



$a < 0$

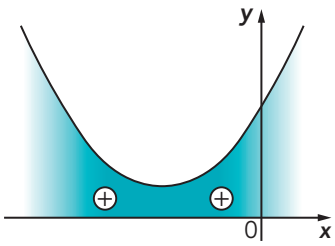
$y < 0, \forall\, x \neq x_1$

$\nexists\, x$ tal que $y > 0$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$\Delta < 0$

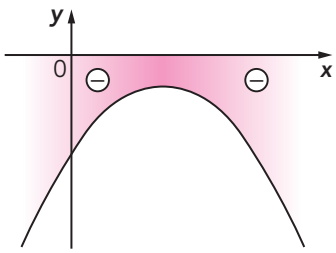
Nesse caso, a função quadrática não admite zeros reais. A parábola não intersecta o eixo Ox, e o sinal da função é o indicado nos gráficos.



$a > 0$

$y > 0, \forall\, x$

$\nexists\, x$ tal que $y < 0$



$a < 0$

$y < 0, \forall\, x$

$\nexists\, x$ tal que $y > 0$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

30. c) $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$
$\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

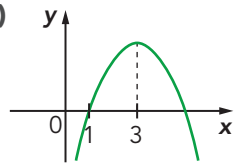
30. d) $x \neq 0 \Rightarrow y > 0$
$\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

Não escreva no livro

29. Faça o estudo do sinal de cada função, definida de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cujo gráfico está representado a seguir.

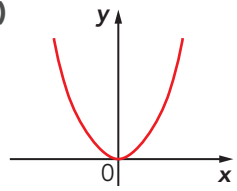
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a)



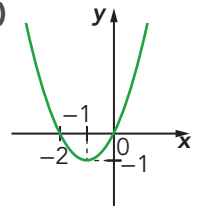
$y < 0$ para $x < 1$ ou $x > 5$.
$y > 0$ para $1 < x < 5$.

b)



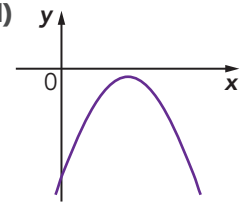
$y > 0$ para $\forall\, x \neq 0$.
$\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

c)



$y < 0$ para $-2 < x < 0$.
$y > 0$ para $x < -2$ ou $x > 0$.

d)



$y < 0$ para qualquer x real.
$\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $y > 0$.

30. Faça o estudo do sinal de cada função, de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela lei dada.

a) $y = 4x^2 + x - 5$
b) $y = 2 - x^2$
c) $y = 3x^2 - x + 4$
d) $y = 3x^2$

a) $x < -\frac{5}{4}$ ou $x > 1 \Rightarrow y > 0$
$-\frac{5}{4} < x < 1 \Rightarrow y < 0$

b) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \Rightarrow y > 0$
$x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2} \Rightarrow y < 0$

31. Dadas as informações no parágrafo a seguir, julgue as afirmações dos itens em verdadeira (**V**), falsa (**F**) ou impossível de concluir a partir dos dados (**I**).

Sabe-se que os zeros de uma função polinomial de 2º grau f são 1 e 5 e que essa função admite um ponto de mínimo. Sobre essa função são feitas algumas afirmações.

I. O gráfico de f pode passar pelo ponto de coordenadas $(3, -2)$. V

II. O conjunto imagem de f é $Im(f) = [-2, +\infty[$. I

III. Se $1 < x < 5$, então $f(x) < 0$. V

IV. $f\left(\sqrt{29}\right) > 0$ V

V. A lei de f é $y = x^2 + 6x - 5$. F

VI. $f(2) > f(4)$ F

VII. O valor mínimo de f pode ser igual a -12. V

32. Marcela realizou um experimento para estudar o movimento de um corpo preso a uma mola e obteve os dados de acordo com a tabela a seguir, em que J representa a unidade de medida joule, usada no Sistema Internacional para a grandeza energia. Sabendo que os dados do experimento de Marcela obedecem a uma função do tipo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, responda às questões dadas.

$f(x)$ (em J)	22,5	8,1	0,9	0	0,9	8,1	22,5
x (em cm)	−15	−9	−3	0	3	9	15

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Analisando os dados obtidos por Marcela, você identifica uma relação entre os valores de y e x?

b) Use uma calculadora gráfica para representar os pontos da tabela num plano cartesiano. Quais características você identifica no gráfico? Há algum padrão na disposição dos pontos no plano cartesiano?

c) De acordo com a disposição dos pontos no plano cartesiano, parece ser possível traçar uma parábola que contenha todos eles? Caso a resposta seja afirmativa, qual seria o vértice dessa parábola? E a concavidade dela seria voltada para cima ou para baixo?

d) Considerando que os valores da tabela obedeçam a uma função do tipo $f(x) = ax^2$, encontre o valor de a.

e) Na calculadora gráfica, trace a curva que representa a função dada por $f(x) = ax^2$ usando o valor de a encontrado do item **d** e verifique se o gráfico dessa função contém todos os pontos da tabela, ou seja, se essa lei pode ser, de fato, usada para descrever o fenômeno estudado por Marcela.

Inequações do 2º grau

Uma desigualdade do tipo $f(x) \leqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$, $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$, em que f é uma função quadrática, recebe o nome de **inequação do 2º grau**.

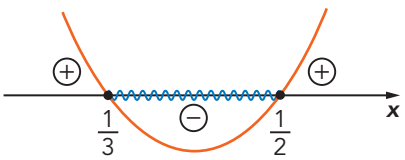
Vamos tomar como exemplo a inequação $6x^2 - 5x + 1 \leqslant 0$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Nesse caso, consideramos a função quadrática f definida por $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$, e queremos determinar $f(x) \leqslant 0$. Para isso, vamos fazer o estudo do sinal dela: $a = 6 > 0$ (a concavidade da parábola é voltada para cima) e $\Delta = 1 > 0$. Portanto, há dois zeros reais e distintos: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$.

Assim, temos:

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ ou $x > \frac{1}{2}$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

A pergunta da inequação é: Para quais valores de x temos $y \leqslant 0$?

Temos como resposta $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ ou $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Atividades resolvidas

8. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $x^2 + x \geqslant 2x^2 + 1$.

Solução:

Vamos escrever todos os termos da inequação num dos membros; por exemplo, no 1º membro:

$$x^2 + x - 2x^2 - 1 \geqslant 0$$
$$-x^2 + x - 1 \geqslant 0 \ (*)$$

Agora, estudamos o sinal de $y = -x^2 + x - 1$.

Temos:

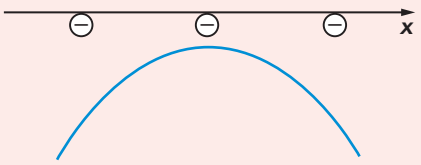
$a = -1 < 0$ (parábola de concavidade voltada para baixo)

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$ (não há zeros reais)

Concluindo, $y < 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Pergunta da inequação em (*): Para que valores de x temos $y \geqslant 0$?

Resposta: $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $y \geqslant 0$, ou seja, $S = \varnothing$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

ATIVIDADES

Não escreva no livro

33. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $-x^2 + 4x + 5 \geqslant 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 5\}$

b) $3x^2 + x + 5 > 0$ $S = \mathbb{R}$

c) $-x^2 + 10x - 25 > 0$ $S = \varnothing$

d) $x^2 + 2x < 35$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 5\}$

e) $9x^2 \geqslant 3x$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{3}\right\}$

34. Na fabricação de certo produto, o lucro mensal de uma empresa, em milhares de reais, é dado por $L(x) = -\frac{x^2}{4} + 30x - 500$, em que x é o número de milhares de peças vendidas no mês. Determine:

a) o lucro mensal máximo na venda dessas peças; R$ 400.000,00

b) para quais valores de x a empresa tem prejuízo, isto é, $L < 0$; Como $x > 0$, devemos ter $0 < x < 20$ ou $x > 100$.

c) em que intervalo deve variar o número de peças vendidas a fim de que o lucro supere 300 mil reais. $40 < x < 80$

PROJETO

O tema do *blog* está alinhado com os ODS **2** e **12**, no que tange a promover a agricultura sustentável e responsável. Ao expor os estudantes a esse trabalho, espera-se que eles possam contribuir com a comunidade e ajudar a evitar a contaminação por agrotóxicos, a manter os ecossistemas e a aumentar a quantidade de alimentos seguros.

Não escreva no livro

Esta seção favorece o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC e da habilidade **EM13MAT502**.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Reprodução/ ONU

Cultivos agrícolas sustentáveis

Leia os textos a seguir sobre a utilização em larga escala de defensores agrícolas na produção de alimentos.

Agrotóxicos: os perigos do uso abusivo ao meio ambiente, animais e seres humanos

Os métodos usados para pulverizar os agrotóxicos nas plantações trazem diversas consequências negativas ao meio ambiente e aos seres humanos, principalmente trabalhadores rurais. Uma das principais técnicas empregadas nas lavouras, a pulverização aérea, consiste na liberação de resíduos químicos por aviões agrícolas. Além de contaminar as plantas, o agrotóxico que é aspergido entra em contato com a água e os alimentos, fazendo com que os seres humanos sejam direta ou indiretamente afetados por esses resíduos.

Os alimentos que recebem os pesticidas são *in natura*, ou seja, apresentam maior possibilidade de contaminação por não serem cozidos. Ao serem higienizados e mesmo com a retirada das suas cascas, esses pesticidas não são eliminados. Em 2001, a Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa) criou o Programa de Análise de Resíduos de Agrotóxicos em Alimentos (PARA), com o objetivo de avaliar continuamente os níveis desses resíduos nos alimentos de origem vegetal. [...]

BRAZ, N. Agrotóxicos: os perigos do uso abusivo ao meio ambiente, animais e seres humanos. *Faculdade de Medicina UFMG*, 3 maio 2018. Disponível em: https://tedit.net/rcu6el. Acesso em: 19 jul. 2024.

Prosa Rural – Controle biológico de pragas em cultivos consorciados

Um dos grandes desafios da agricultura, principalmente nos sistemas orgânicos de produção, é combater as pragas e doenças nas lavouras sem utilizar pesticidas. Para tal, o manejo fitossanitário deve basear-se na prevenção, criando condições que desfavoreçam o surgimento de insetos-pragas nas plantas cultivadas. O controle biológico é uma técnica que utiliza inimigos naturais das pragas para mantê-las sob controle e impedir que prejudiquem a produção.

[...]

EMBRAPA. *Prosa Rural* – Controle biológico de pragas em cultivos consorciados, 1º maio 2013. Disponível em: https://tedit.net/4k3rjm. Acesso em: 19 jul. 2024.

Gan/Adobe Stock

O uso de *drones* na produção agrícola surgiu como um facilitador de processos que antes poderiam danificar a plantação ou prejudicar trabalhadores, mas a dispersão de defensores agrícolas no ar produzida por esses equipamentos pode trazer consequências para a natureza.

Fonte dos dados: FOOD AND AGRICULTURE ORGANIZATION OF THE UNITED NATIONS. *New standards to curb the global spread of plant pests and diseases*, 3 abr. 2019. Disponível em: https://tedit.net/sn8446. Acesso em: 19 jul. 2024.

Pensando em um projeto

A Organização das Nações Unidas para a Alimentação e a Agricultura (FAO) estima que 20 a 40% da produção agrícola mundial é perdida para pragas, e essa porcentagem poderia ser maior, se não houvesse o uso de defensores agrícolas.

Apesar disso, é inegável a existência de diversos prejuízos provenientes do uso incorreto e indiscriminado dessas substâncias.

Que tal divulgar, em um *blog*, um modelo de planejamento anual de produção agrícola para a região em que você vive, que use a menor quantidade possível de defensores agrícolas por área? Para isso, você vai buscar conhecimento sobre técnicas naturais para evitar pragas, conhecer as características da região onde você vive, identificar as possibilidades de cultivos e aplicar seus conhecimentos sobre função quadrática para fundamentar o trabalho.

Para começar

- Organizem-se em 7 grupos.
- Planejem o uso de um computador com acesso à internet.

Plano de ação

Etapa 1

Em grupo, pesquisem o tipo de solo e o clima da região em que vocês vivem, a característica de cada um desses elementos e os cultivos mais indicados para essa região em cada época do ano.

Etapa 2

Encontrem informações sobre a quantidade usualmente indicada de cada defensor agrícola, por metro quadrado, na produção dos cultivos que vocês encontraram na etapa **1**. Organizem as informações em uma planilha eletrônica.

Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, criem um gráfico para mostrar a quantidade de cada um dos defensores agrícolas por metro quadrado em uma região quadrada.

Comecem encontrando a lei da função que relaciona a quantidade indicada de um tipo de defensor agrícola em função de uma região quadrada de lado medindo x metros. Depois, insiram a lei da função no *software*. Repitam para todos os defensores agrícolas pesquisados.

Etapa 3

Lembre os estudantes de que devem colocar todas as condições de domínio da função.

Pesquisem os principais sistemas agroecológicos que podem ser utilizados para esses cultivos durante 1 ano. Os sistemas agroecológicos se baseiam nos ecossistemas naturais para reproduzir um cultivo o mais parecido possível com o que se encontraria na natureza.

Etapa 4

Na etapa **4**, oriente os estudantes a obterem também, na pesquisa, informações sobre cultivo em consórcio, em rotação e em sucessão. Depois, eles devem verificar quais sistemas são mais compatíveis com os cultivos pesquisados.

Elaborem um texto explicativo sobre as melhores maneiras de cultivar os alimentos pesquisados de acordo com algum(ns) sistema(s) agroecológico(s) baseando-se nas teorias estudadas. Adicionem imagens ao texto para facilitar o entendimento. Façam também um parágrafo justificando, com dados, como o modelo gera tanta renda quanto o sistema que utiliza defensores agrícolas.

Esse será o modelo de cultivo de seu grupo.

Etapa 5

Criem a página do *blog* para divulgar as informações que vocês encontraram. Hospedem seu *blog* em um *site* que ofereça endereço e acesso gratuitos.

Etapa 6

Produto final: montagem e publicação do *blog*

- Elaborem coletivamente o texto que será inserido no *blog*.
- Publiquem os textos no *blog* e trabalhem para deixar a página atrativa.
- Compartilhem o endereço do *blog* com a comunidade escolar, tentando atingir a maior quantidade de pessoas que possam se beneficiar com essas informações ou fazer uso delas.

Oriente os estudantes nos elementos que o texto do *blog* deve ter: uma introdução sobre os riscos e os benefícios da utilização de defensores agrícolas; a descrição das características do clima e do solo da região em que eles vivem durante 1 ano, relacionando aos cultivos mais apropriados; o gráfico elaborado na etapa **4**; o modelo de cultivo que propõe uma produção com uso reduzido de pesticidas, com imagens representativas; uma conclusão que elucide a intenção com a divulgação do modelo produzido e a apresentação do grupo.

EXPERIMENTE

Determinar o melhor tipo de função para representar uma relação entre duas grandezas

Estabelecer relações entre grandezas e modelá-las matematicamente é um procedimento importante e que ocorre com frequência na resolução de problemas de diversas áreas, envolvendo, por exemplo, questões como o movimento de planetas ao redor de uma estrela, estudos e projeções sobre as mudanças climáticas e projetos de como melhor preparar uma campanha de vacinação em certo município considerando as especificidades daquela população.

Note os exemplos de relações a seguir, que podem ser representadas por funções afins ou funções quadráticas.

- A medida de distância retilínea percorrida por um carro que se move a uma medida de velocidade constante em função da medida de tempo de deslocamento dele (função afim).
- O valor a ser pago num restaurante *self-service* pela medida de massa de comida consumida (função afim).
- A relação entre a medida de altura de uma bola de basquete lançada à cesta e o deslocamento horizontal dela (função quadrática).

Andy Lyons/Getty Images

A relação entre a altura de uma bola de basquete lançada à cesta e o deslocamento horizontal dela pode ser representada por uma função quadrática. Seleção brasileira disputando partida de basquete feminino com a seleção colombiana durante os Jogos Pan-Americanos de Santiago, no Chile. Foto de 2023.

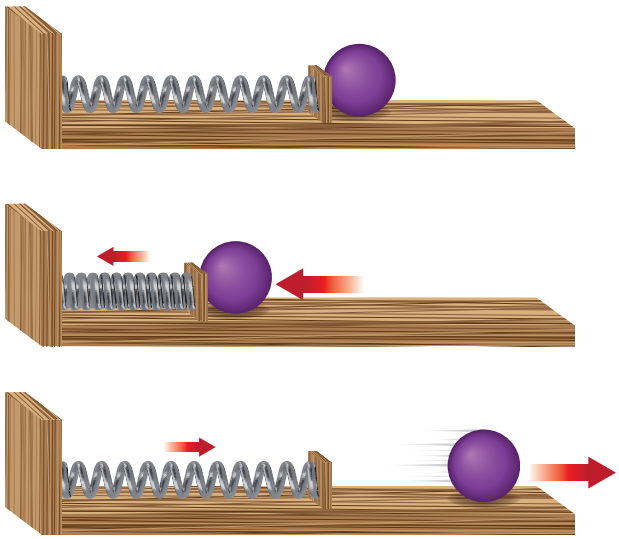
Para modelar a relação entre 2 grandezas, precisamos analisar qual é o tipo de função apropriada a ser usada. Muitos problemas podem ser modelados por funções afins ou quadráticas, embora algumas relações mais complexas necessitem de funções polinomiais de graus maiores ou de outros tipos de funções, como as logarítmicas, exponenciais ou trigonométricas, que são abordadas em outros volumes desta coleção.

Uma maneira de realizar esse processo de modelagem experimentalmente é coletar dados do fenômeno estudado e marcá-los num plano cartesiano, para, assim, avaliar se a sequência de pontos parece formar alguma curva conhecida e qual seriam as características dessa curva.

Uma calculadora gráfica pode ajudar nessa análise, fornecendo, inclusive, a lei da função mais apropriada para o conjunto de dados concedidos para o *software*.

Vamos analisar a seguinte situação como exemplo.

Numa experiência, um pequeno objeto é pressionado contra uma mola sobre uma superfície de atrito desprezível. Essa força aplicada faz com que a mola sofra uma deformação (compressão) e estoque energia potencial elástica. Quando cessada a força que segura o objeto, a energia potencial elástica é convertida em energia cinética, relacionada à medida de velocidade do corpo. O objetivo da experiência é relacionar a deformação da mola, em metros, e a medida de velocidade do corpo depois de desencostar da mola, em metros por segundo.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A tabela a seguir mostra os resultados obtidos em 6 testes, sendo x a medida da compressão (comprimento) sofrida pela mola, em metros; v a medida de velocidade aproximada do corpo após a descompressão da mola, em metros por segundo; e E_{cin} a medida de energia cinética do corpo, em joules. A energia cinética de um corpo é uma medida de energia relacionada à quantidade de movimento que um corpo apresenta.

Dados do experimento

x (em m)	v (em m/s)	E_{cin} (em J)
0	0	0
0,15	3,4	5,78
0,20	4,9	12
0,30	7,5	28,12
0,35	8,6	36,98
0,50	12,5	78,12

Dados elaborados para fins didáticos.

Em dupla, façam o que se pede nos itens a seguir.

a) Acessem a calculadora gráfica *on-line* ou baixem o aplicativo no computador. Localizem a ferramenta de tabela e preencham as duas primeiras colunas com os valores de x e de v apresentados na tabela "Dados do experimento". Para visualizar os pontos, ajustem o *zoom*.

Considerando os pontos, vocês diriam que a relação entre x e v se dá por meio de uma função afim ou quadrática? Por quê? O comportamento dos pontos se parece mais com uma reta do que com uma parábola, indicando que a relação se dá por uma função afim, e não quadrática.

b) Selecionem o botão de regressão linear para os dados da coluna que representa os valores de v; selecionem a opção regressão linear, anotem os valores apresentados para os coeficientes a e b e confirmem (o comando para confirmar pode ser "plotar") para que o gráfico seja representado no plano cartesiano. Ao fazer a regressão linear, a lei de função que mais se adéqua aos pontos inseridos na tabela foi estimada e representada no gráfico. Quais são os valores, aproximadamente, que a ferramenta fornece para os coeficientes da função calculados na regressão linear?

c) De acordo com a lei da função obtida, qual seria a medida de velocidade do corpo caso a mola sofresse uma compressão de 0,5 m? Esse valor se aproxima do dado fornecido na tabela?

Observação

Regressão linear é uma técnica matemática avançada que fornece uma lei para a obtenção de valores desconhecidos a partir da relação entre dados conhecidos.

d) Na próxima coluna, adicionem os valores obtidos para E_{cin}. Novamente, ajustem o *zoom* da tela para serem exibidos todos os pontos. Segundo esses pontos, vocês consideram que a relação entre x e E_{cin} se dá por qual tipo de função?

e) Novamente, selecionem o botão de regressão linear e, em seguida, a ferramenta para plotar. A reta traçada pelo *software* representa bem os pontos do gráfico?

f) Mais uma vez, selecionem o botão de regressão, escolhendo agora o modelo de função quadrática, e cliquem na ferramenta plotar. Considerando os gráficos da função afim e da função quadrática desenhados no plano cartesiano, qual é o tipo de função mais adequado para representar a relação entre x e E_{cin}: afim ou quadrática? Por quê?

b) A resposta depende do *software* utilizado pelos estudantes. Os valores apresentados são, aproximadamente, $a = 25{,}17$ e $b = -0{,}14$. Portanto, $y = 25{,}17x - 0{,}14$.

c) Para uma compressão de 0,5 m, temos $y = 12{,}435$ m/s.

$25{,}17 \cdot 0{,}5 - 0{,}14 = 12{,}445$

Portanto, a medida de velocidade seria de aproximadamente 12,44 m/s. Observe que a resposta obtida com a lei da função está próxima da informação fornecida na tabela para $x = 0{,}5$.

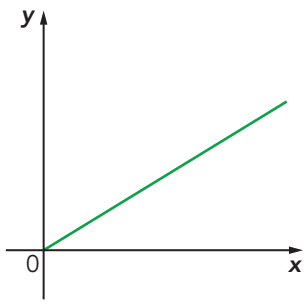
d) Os dados parecem formar uma parábola, indicando o comportamento de uma função quadrática.

e) Não, pois foi ajustada uma função linear para modelar os dados de uma função quadrática.

f) A resposta depende do *software* utilizado pelos estudantes. A curva representando uma função quadrática é a mais apropriada, pois a relação entre a compressão da mola (representada no gráfico por x) e a energia cinética medida no experimento (representada no gráfico por y) é representada graficamente por uma parábola.

Grandezas inversamente proporcionais

Numa função linear $y = k \cdot x$, com $k \neq 0$, temos que $\frac{y}{x} = k$ é constante e as grandezas x e y são diretamente proporcionais. Admitindo que x e y assumem valores não negativos, o gráfico que os relaciona é uma semirreta que parte da origem dos eixos coordenados.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Neste capítulo, estudamos as funções quadráticas do tipo $y = k \cdot x^2$, com $k \neq 0$, e temos $\frac{y}{x^2} = k$, em que k é constante.

Considere que um objeto é abandonado, a partir do repouso, de uma medida de altura de 125 m em relação ao solo, e suponha desprezível a resistência do ar. Foi registrada numa tabela a medida

de distância (d) percorrida pelo objeto, em metros, durante alguns instantes (t) da queda.

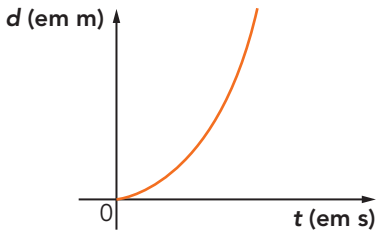
Queda livre

Medida de intervalo de tempo t (em s)	Medida de distância d (em m)	$\frac{d}{t^2}$
1	5	5
2	20	5
3	45	5
4	80	5
5	125	5

Dados elaborados para fins didáticos.

Temos que a razão $\frac{d}{t^2}$ é constante. Assim, os valores t^2 e d são diretamente proporcionais.

Admitindo que t e d assumem valores não negativos, o gráfico que relaciona as grandezas nesta situação é chamado **ramo de parábola**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos conhecer agora outro tipo de proporcionalidade: a proporcionalidade inversa.

Numa experiência, pretende-se medir o tempo necessário para encher de água um tanque inicialmente vazio. Para isso, são feitas várias simulações que diferem entre si pela vazão da fonte que abastece o tanque.

Entretanto, em cada simulação, a vazão não se alterou do início ao fim da experiência. Os resultados são mostrados na tabela a seguir.

Dados do experimento

Simulação	Medida de vazão (em L/min)	Medida de intervalo de tempo (em min)
1	2	60
2	4	30
3	6	20
4	1	120
5	10	12
6	0,5	240

Dados elaborados para fins didáticos.

Verificando os pares de valores, é possível notar algumas regularidades.

1ª) O produto (medida de vazão da fonte) · (medida de intervalo de tempo) é o mesmo em todas as simulações.

$$2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = \ldots = 0{,}5 \cdot 240$$

O valor constante obtido para o produto representa a medida de capacidade do tanque (120 L).

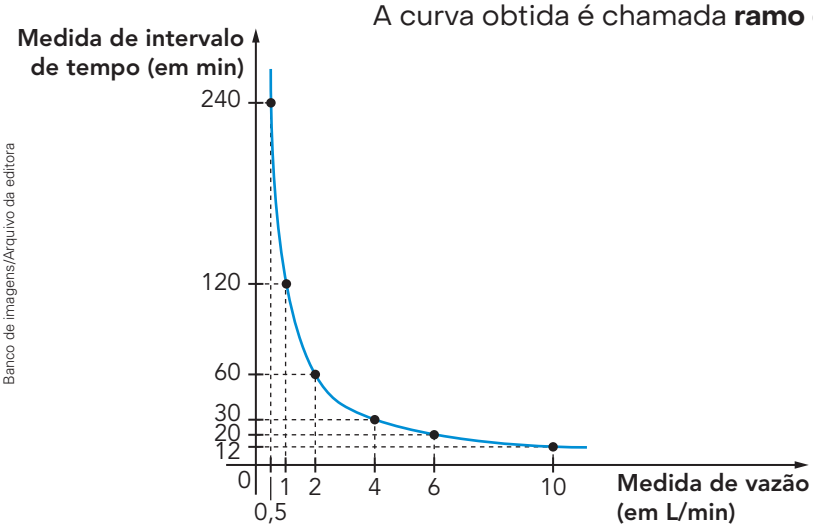
2ª) Dobrando a medida de vazão da fonte, a medida de intervalo de tempo se reduz à metade; triplicando a medida de vazão da fonte, a medida de intervalo de tempo se reduz à terça parte; reduzindo-se a medida da vazão à metade, a medida de intervalo de tempo dobra...

A regularidade listada anteriormente caracteriza que a medida de vazão da fonte e a medida de intervalo de tempo são grandezas inversamente proporcionais.

Duas grandezas são ditas **inversamente proporcionais** se os valores de x e y atribuídos a cada uma delas se relacionam de modo que, para cada par de valores (x, y), se verifica que $x \cdot y = k$ (a constante é k, com $k \neq 0$).

A imagem a seguir mostra o gráfico que relaciona essas duas grandezas: a vazão da fonte e o intervalo de tempo. Note que ele está contido no 1º quadrante, pois as duas grandezas só assumem valores positivos.

A curva obtida é chamada **ramo de hipérbole**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note como podemos determinar a medida de intervalo de tempo t, em minutos, necessário para encher o tanque se a medida de vazão da fonte é de 13 L/min.

Uma maneira é usar a definição de grandezas inversamente proporcionais: o produto (medida de vazão da fonte · medida de intervalo de tempo) é constante e igual a 120.

Logo, $13 \cdot t = 120 \Rightarrow t = \frac{120}{13} \simeq 9{,}23$.

Para encher o tanque são necessários aproximadamente 9,23 min, ou seja, cerca de 9 minutos e 14 segundos.

38. a) Ritmo médio e medida de velocidade média são inversamente proporcionais, pois o produto entre as grandezas resulta sempre em 60. A medida de velocidade média e a medida de intervalo de tempo para percorrer 6 km também são inversamente proporcionais, pois o produto entre essas grandezas é sempre igual a 360. Já a medida de intervalo de tempo para percorrer 6 km e o ritmo médio são diretamente proporcionais, pois a divisão entre elas é sempre igual a 6.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

35. Conforme varia a medida do lado de um quadrado (ℓ), variam também as medidas de perímetro (p) e de área (A) desse quadrado.

a) Represente graficamente a relação entre p e ℓ e entre A e ℓ.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Existe uma relação de proporcionalidade entre as grandezas p e ℓ? E entre as grandezas A e ℓ?
Sim, as grandezas p e ℓ são diretamente proporcionais, e a grandeza A é diretamente proporcional ao quadrado da grandeza ℓ.

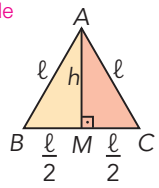
36. Um terreno de formato retangular tem medidas de largura e comprimento x e y, respectivamente. Sabendo que o perímetro desse terreno mede 240 m, represente graficamente a relação existente entre a medida de área (A) do terreno e a medida de largura (x).
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

37. Considere o triângulo equilátero a seguir, cuja medida do lado é ℓ, de altura é h e de área é A.

37. a) A medida de altura em função da medida do lado pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras: $\ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4} \xrightarrow{h > 0} h = \frac{\sqrt{3}\,\ell}{2}$.

A medida de área do triângulo é dada por $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}\,\ell}{4} \cdot \ell = \frac{\sqrt{3}\,\ell^2}{4}$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

38. b) Medida de velocidade do atleta, em km/h: $\frac{1 \cdot 60}{2{,}53 \cdot 1} \simeq 23{,}71$.

Medida de velocidade se tivesse corrido em média 3 min por quilômetro, em km/h: $\frac{1 \cdot 60}{3 \cdot 1} = 20$.

A velocidade com média de 3 min por quilômetro seria menor do que a velocidade do recorde.

a) Determine a medida de altura (h) em função de ℓ. Em seguida, determine a expressão que representa a medida de área (A) em função da medida do lado (ℓ).

b) Indique se é diretamente ou inversamente proporcional a relação entre as grandezas representadas no item anterior. h é diretamente proporcional a ℓ e A é diretamente proporcional ao quadrado de ℓ.

38. Em treinos de corrida, é comum medir o ritmo do atleta em minutos por quilômetro. Considere a tabela a seguir, que relaciona as medidas de velocidade e de tempo que um corredor levaria para percorrer 6 km no ritmo correspondente.

Dados do atleta

Medida de velocidade média (em km/h)	Medida de intervalo de tempo para percorrer 6 km (em min)	Ritmo médio (em min/km)
15	24	4
12,5	28,8	4,8
12	30	5
10	36	6

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Quais grandezas expressas na tabela têm relação diretamente proporcional e quais têm relação inversamente proporcional?

b) O queniano Eliud Kipchoge estabeleceu um novo recorde mundial ao correr os 42,195 km da maratona de Berlim (Alemanha), em 2022, em ritmo médio de 2,53 min/km. Qual seria a medida de velocidade média se ele tivesse corrido no ritmo de 3 min/km? Essa velocidade seria maior ou menor do que a velocidade do recorde?

Fonte de pesquisa: KIPCHOGE bate recorde com pace de 2 m 53/km na maratona de Berlim. *Eu Atleta*. Disponível em: https://tedit.net/g61775. Acesso em: 19 jul. 2024.

Tobias SCHWARZ/AFP

O maratonista queniano Eliud Kipchoge finalizou a prova de 42,195 km, em Berlim (Alemanha), com o tempo de 2 h 01 min 09 s e bateu o recorde oficial da maratona. Foto de 2022.

VIRALIZE!

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Direitos da Criança e do Adolescente*.

Reprodução/ ONU

"Cotas, pra que te quero?"

Quem nunca foi abordado na escola ou em casa, por alguém mais velho, com a pergunta "O que você quer ser quando crescer?"? Essa questão, muitas vezes, é respondida de pronto com uma resposta íntima, retirada de um sonho ou de uma vontade específica. Entretanto, com o passar dos anos, essa vontade pode mudar por si mesma ou por falta de oportunidade.

As políticas públicas de cotas têm sido implementadas com o objetivo de promover o acesso à educação de qualidade a todos, buscando a inclusão e a igualdade de oportunidades para as minorias.

Diferença entre nota de cotistas e demais alunos na USP cai ao longo do curso

Pesquisa inédita revela que notas dos grupos diferem, no máximo, 1,2 ponto e distância se estreita ao fim da graduação

Na formatura da primeira turma da Universidade de São Paulo, desde a implementação da política de cotas para estudantes de escolas públicas e para pretos, pardos e indígenas, uma pesquisa [...] revela que o desempenho dos cotistas foi pouco inferior ao dos demais alunos e melhorou progressivamente ao longo do curso [...]

O estudo acompanhou por quatro anos as notas dos cerca de 11 mil ingressantes da capital paulista de 2018, quando começou o programa de cotas. [...]

De acordo com a pesquisa sobre o desempenho desses alunos, mesmo nas faculdades mais concorridas, a distância máxima entre os oriundos de escolas públicas e os de particulares foi de 1,2 ponto na mediana das notas, de 0 a 10. A mediana é a nota central de cada grupo – 50% dos alunos estão acima dessa marca e os outros 50%, abaixo.

[...]

No início do programa de cotas da USP, em 2018, foram reservadas 37% das vagas de cada uma das unidades, que normalmente oferecem mais de um curso. A inclusão se ampliou de forma gradual, anualmente, e atingiu a meta final em 2021, quando 50% de cada curso e turno foram reservados para alunos de escolas públicas e, dentro desse conjunto, 37,5%, destinados a pretos, pardos e indígenas (PPI) – a porcentagem de 37,5% equivale à proporção dessa população no Estado de São Paulo, mas, como é aplicada na cota de 50%, ficam garantidas para alunos PPI 18,75% de todas as vagas da USP.

[...]

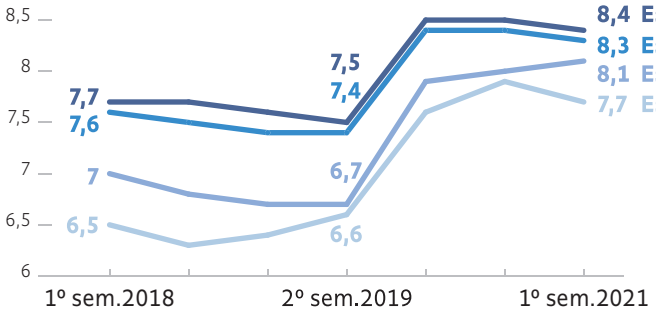
O estudo na USP partiu do banco de dados de estudantes, e dividiu-os em quatro grupos [...]: pretos, pardos e indígenas (PPI) de escola pública; brancos de escola pública; PPI de escola privada; brancos de escola privada. Esses últimos dois grupos [...] não são beneficiados por cotas [...].

[...]

Desempenho de alunos de escolas públicas e particulares na USP*

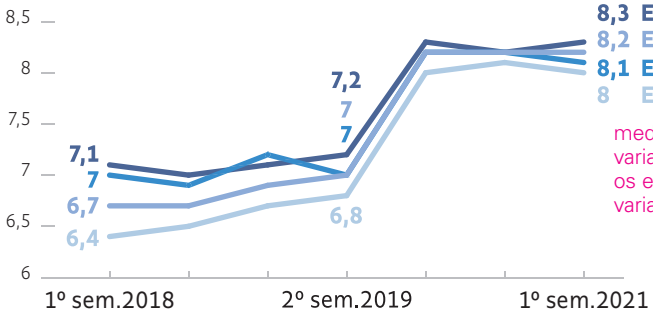
Distância de notas se reduz ao longo da graduação**

Cursos mais concorridos***



8,4 Escola privada + brancos
8,3 Escola privada + pretos, pardos e indígenas
8,1 Escola pública + brancos
7,7 Escola pública + pretos, pardos e indígenas

Cursos menos concorridos***



8,3 Escola privada + brancos
8,2 Escola pública + brancos
8,1 Escola privada + pretos, pardos e indígenas
8 Escola pública + pretos, pardos e indígenas

*Mediana das notas dos ingressantes da USP na capital paulista em 2018, quando teve início o programa de cotas da USP

**Dados dos anos da pandemia devem ser lidos com cautela; é cedo para entender efeitos do ensino remoto

***Cursos mais concorridos são aqueles com mediana da nota final na Fuvest acima de 600 pontos; os menos concorridos, abaixo de 600

Fonte: Pesquisa Ações Afirmativas no Ensino Superior Brasileiro, do Centro de Estudos da Metrópole, da USP

Editoria de arte/Folhapress

1. a) O grupo com o melhor aumento no desempenho foram os estudantes pretos, pardos e indígenas oriundos de escolas públicas matriculados nos cursos menos concorridos, com uma variação de 1,6 ponto na mediana das notas. Os grupos que apresentaram menor variação na categoria de cursos menos concorridos foram os estudantes oriundos de escolas particulares, com uma variação de 1,2 ponto na mediana das notas.

Para a coordenadora da pesquisa e professora da FFLCH Marta Arretche, os dados demonstram que a inclusão dos cotistas não compromete a excelência da USP. [...] "Agora temos esse retrato do desempenho mostrando que a diferença de mediana entre cotistas e não cotistas não é tão grande, o que significa que a excelência da universidade não está ameaçada", avalia Arretche.

[...]

Para o reitor, "não há, desde a implementação das cotas, nenhuma sinalização de queda de prestígio da USP, da produção acadêmica, científica". "A USP precisa mostrar para a sociedade que o programa de cotas é interessante, aumenta a diversidade e qualifica ainda mais as nossas pesquisas, porque temos alunos de diversas realidades, vivências e pensamentos", afirma. "As grandes universidades internacionais têm programas de inclusão altamente fortalecidos. Se a universidade brasileira ficar fora disso, estará excluída do mundo acadêmico", complementa o reitor.

MATOS, Laura. Diferença entre nota de cotistas e demais alunos na USP cai ao longo do curso. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 15 maio 2022. Disponível em: https://tedit.net/6ix5hl. Acesso em: 19 jul. 2024.

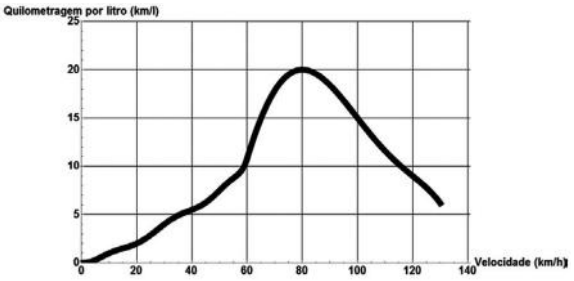
1. Na reportagem lida, há a apresentação de 2 gráficos de linha apresentando dados sobre o desempenho dos estudantes durante os semestres da graduação em 2 categorias diferentes de cursos. Qual grupo de estudantes apresentou a maior variação na melhoria de notas entre o primeiro e o último semestre pesquisados na categoria de cursos menos concorridos? Qual grupo de estudantes apresentou a menor variação nas notas nessa mesma categoria?

2. Realize uma pesquisa sobre os direitos da criança e do adolescente relacionados à educação e sobre as ações adotadas pelo governo para garantir o direito à educação básica de qualidade para todos. Escreva, no caderno, um texto argumentativo a respeito de como as políticas públicas educacionais podem contribuir para a diminuição das desigualdades. Respostas pessoais. Incentive os estudantes a utilizarem fontes confiáveis para a pesquisa. Sugerimos a leitura do Estatuto da Criança e do Adolescente (disponível em: https://tedit.net/q5n35s; acesso em 7 set. 2024) em sala de aula.

PARA FUNDAMENTAR SABERES

As imagens não estão representadas em proporção.

1. **(Unicamp-SP)** A eficiência de um veículo pode ser avaliada pela quantidade de quilômetros que ele é capaz de percorrer com um litro de combustível. Tal eficiência depende de vários fatores, entre eles a velocidade adotada.
O gráfico a seguir exibe o número de quilômetros percorridos por litro de combustível, para um determinado veículo, em função da velocidade.

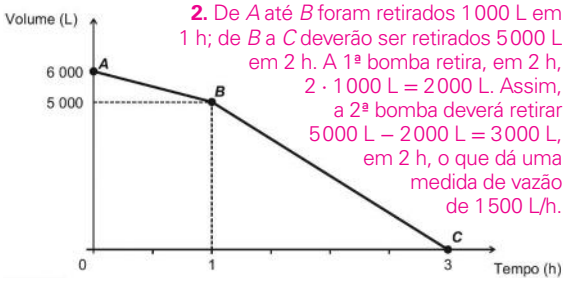


Reprodução/Unicamp-SP, 2019.

a) Supondo que o veículo trafegue com velocidade constante de 100 km/h, determine quantos litros de combustível ele consome para percorrer 60 km.

b) Considere que o veículo tenha 50 litros de combustível em seu tanque. Determine a sua autonomia máxima, isto é, a maior distância que ele pode percorrer, supondo que ele trafegue a uma velocidade constante.

2. **(Enem)** Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.



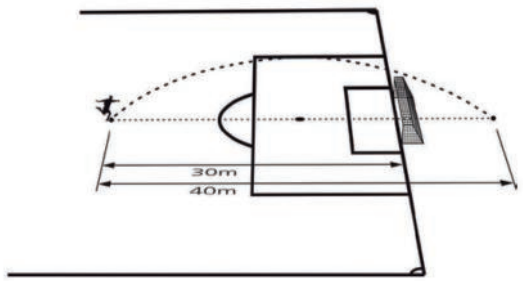
Reprodução/Enem, 2016.

Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

Alternativa **c**.

a) 1000 **c)** 1500 **e)** 2500
b) 1250 **d)** 2000

3. **(Unicamp-SP)** Um jogador de futebol chuta uma bola a 30 m do gol adversário. A bola descreve uma trajetória parabólica, passa por cima da trave e cai a uma distância de 40 m de sua posição original. Se, ao cruzar a linha do gol, a bola estava a 3 m do chão, a altura máxima por ela alcançada esteve entre:

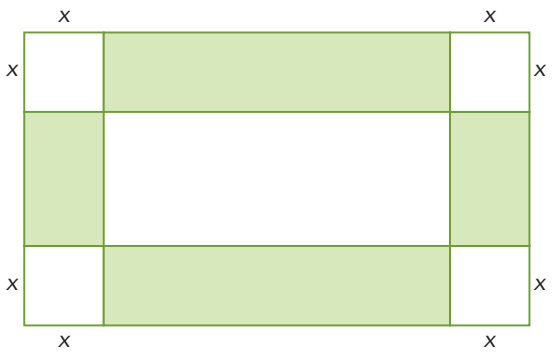


Reprodução/Unicamp-SP, 2012.

a) 4,1 e 4,4 m. **c)** 3,2 e 3,5 m.
b) 3,8 e 4,1 m. **d)** 3,5 e 3,8 m.

Alternativa **b**.

4. Uma folha retangular mede 20 cm por 16 cm. Em cada um cantos do retângulo, recortam-se quadrados congruentes cujos lados medem x centímetros, com $0 < x < 8$, como mostra a figura seguinte.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Expresse a área da superfície pintada em função de x. $-8x^2 + 72x$

b) Para que valor de x essa área é máxima? Qual é o valor da área máxima? 4,5 cm; 162 cm^2.

2. De A até B foram retirados 1 000 L em 1 h; de B a C deverão ser retirados 5 000 L em 2 h. A 1ª bomba retira, em 2 h, $2 \cdot 1\,000$ L = 2 000 L. Assim, a 2ª bomba deverá retirar 5 000 L − 2 000 L = 3 000 L, em 2 h, o que dá uma medida de vazão de 1 500 L/h.

1. a) A uma medida de velocidade constante de 100 km/h, a eficiência do carro é de 15 km/L. Assim, ao percorrer 60 km, o quádruplo de 15, o carro consumirá 4 L.
b) A autonomia máxima se dará para a medida de velocidade que oferece eficiência máxima (80 km/h, 20 km/L). Portanto, com 50 L no tanque, o carro poderia percorrer 1 000 km (pois $20 \cdot 50 = 1\,000$).

5. **(Enem)** Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação $q = 400 - 100p$, na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais. A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto. O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo:

a) R$ 0,50 $\leqslant p <$ R$ 1,50

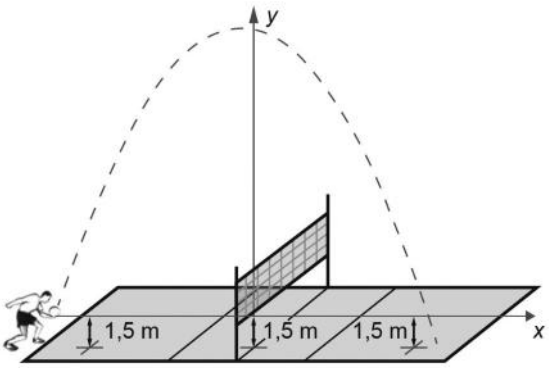
b) R$ 1,50 $\leqslant p <$ R$ 2,50

c) R$ 2,50 $\leqslant p <$ R$ 3,50

d) R$ 3,50 $\leqslant p <$ R$ 4,50

e) R$ 4,50 $\leqslant p <$ R$ 5,50

6. **(Enem)** Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.



Reprodução/Enem, 2016.

A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio **I**: 17 m;
- ginásio **II**: 18 m;
- ginásio **III**: 19 m;
- ginásio **IV**: 21 m;
- ginásio **V**: 40 m.

O saque desse atleta foi invalidado

a) apenas no ginásio **I**.

b) apenas nos ginásios **I** e **II**.

c) apenas nos ginásios **I**, **II** e **III**.

d) apenas nos ginásios **I**, **II**, **III** e **IV**.

e) em todos os ginásios. Alternativa **d**.

Nesta Unidade, estudamos o conceito geral de função, além de duas funções muito importantes na Matemática: a função afim e a função quadrática. Também estudamos as funções definidas por mais de uma sentença. Sobre todas elas, pense nas seguintes questões. Respostas pessoais.

1. Consigo entender funções como relações entre duas grandezas associando-as com situações reais?
2. Em relação à função afim, sei representá-las graficamente no plano cartesiano? Dada uma reta no plano cartesiano, consigo obter a lei da função correspondente a ela? Consigo enumerar alguma propriedade característica da função afim? Qual?
3. Em relação à função quadrática, consigo representar o esboço de uma parábola que a representa no plano cartesiano? Dada uma parábola no plano cartesiano, consigo extrair informações importantes sobre a função representada? Quais? Consigo enumerar alguma propriedade característica da função quadrática? Qual?
4. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
5. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas e exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

5. A arrecadação é dada por $A = p \cdot q$, com $q = 400 - 100p$. Então, $A(p) = p(400 - 100p) = 400p - 100p^2$. Como $A \geqslant 300$, temos: $-100p^2 + 400p - 300 \geqslant 0 \Rightarrow -p^2 + 4p - 3 \geqslant 0$. As raízes da equação $-p^2 + 4p - 3 = 0$ são 1 e 3, portanto $1 \leqslant p \leqslant 3$. Como o preço original já era de R$ 3,00 por pão, o preço deve passar a ser de R$ 1,00. Alternativa **a**.

Unidade

3 SEMELHANÇA E TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Usuário de cadeira de rodas utilizando uma rampa de acessibilidade.

O tema desta abertura de Unidade favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação em Direitos Humanos* e *Vida Familiar e Social*.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de História, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Vergani Fotografia/Adobe Stock

Rampas de acessibilidade

Reprodução/ONU

Para que todas as pessoas, com deficiência ou não, possam frequentar os mesmos lugares e usufruir dos mesmos bens e serviços, é necessária a implementação de mecanismos que garantam o acesso de todos aqueles com restrição de mobilidade.

O artigo 5º da Lei n. 10.098, de 19 de dezembro de 2000, estabelece normas gerais e critérios básicos para a promoção da acessibilidade das pessoas com deficiência ou com mobilidade reduzida. Outros decretos municipais também estabelecem padronizações para os passeios públicos (parte da calçada exclusiva para circulação de pedestres), como o artigo 4º do Decreto n. 59.671, de agosto de 2020, do município de São Paulo (SP), que regulamenta a organização das calçadas e determina a inclinação máxima para acesso a imóveis em 8,33%. Além disso, existe uma norma da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) que regulamenta a acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos visando **autonomia** (fazer com independência), **conforto** (fazer com baixo esforço físico) e **segurança** (fazer evitando acidentes).

1. Como é a acessibilidade na sua cidade? Você já reparou em rampas e outros dispositivos de acessibilidade disponíveis? Respostas pessoais.
2. Você já pensou no que acontece se a rampa for muito inclinada? Como você imagina que seja calculada a inclinação da rampa de acesso numa calçada, por exemplo? Respostas pessoais.

Dica

Saiba mais de acessibilidade

- ARAUJO, Ana Luisa; OLIVEIRA, Nelson. Território sem dono, calçadas brasileiras revelam negligência com o pedestre. *Senado Notícias*, Brasília, DF, 10 jan. 2020. Disponível em: https://tedit.net/wwd3ou. Acesso em: 27 jun. 2024.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *ABNT NBR 9050*: acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. Rio de Janeiro: ABNT, 2020. Disponível em: https://tedit.net/nhwbir. Acesso em: 27 jun. 2024.

capítulo

6 Semelhança e congruência de figuras planas

Razão de semelhança

Vamos estudar um dos métodos usados para ampliar imagens e pintar grandes murais. Na seção *Interligando* do final deste capítulo, você vai conhecer o trabalho de um grande muralista brasileiro.

O planejamento do desenho é realizado em papel com medidas de dimensão menores do que as do mural onde esse desenho será ampliado. Elabora-se, então, uma malha quadriculada sobre a arte feita no papel para, a partir dela, ampliar o desenho no mural.

Considere o exemplo a seguir.

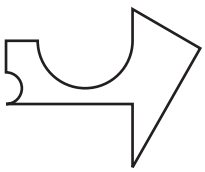


Figura **1**: Planejamento da arte.

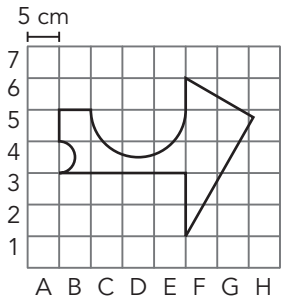


Figura **2**: Elaboração de uma malha quadriculada sobre a arte no papel.

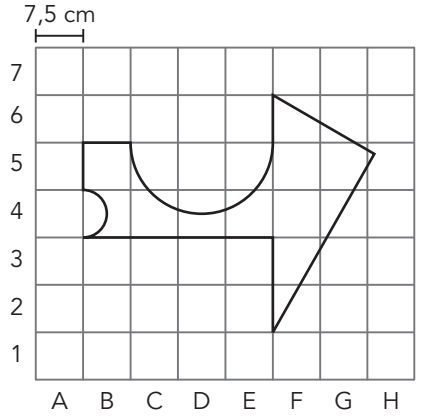


Figura **3**: Ampliação da malha quadriculada no mural e ampliação da arte.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Para fazer uma ampliação da arte planejada na figura **1**, cria-se uma malha quadriculada sobre ela, como indicado na figura **2** e, depois, amplia-se a malha quadriculada, quadradinho por quadradinho, como indicado na figura **3**. Repare que, na posição B4 da figura **2**, há uma semicircunferência. Na mesma posição B4 da figura **3**, também há uma semicircunferência, mantendo as proporções, ou seja, ampliando o desenho.

Com essa técnica, o artista consegue garantir que a arte reproduzida seja fidedigna e, desse modo, semelhante à imagem planejada.

Para sabermos quantas vezes maior é a arte no mural, podemos calcular a razão entre as medidas dos lados de um quadradinho das malhas da figura **3** e as da figura **2**.

Assim, a ampliação é 1,5 vez maior $\left(\text{pois } \frac{7,5}{5} = 1,5\right)$.

Edson Grandisoli/Pulsar Imagens

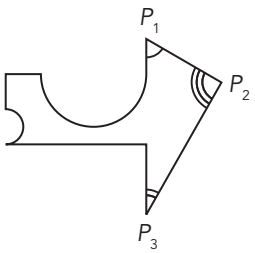
Pessoa produzindo grafite, tipo de arte urbana representada por desenhos e pinturas em murais, em locais públicos. Foto de 2021, Sorocaba (SP).

Generalizando para essas duas figuras, se tomarmos uma medida de distância d_1 entre dois pontos da figura **2** e d_2 entre os pontos correspondentes da figura **3**, o quociente entre d_2 e d_1 será $\frac{d_2}{d_1} = 1{,}5$. Essa constante é chamada **razão de semelhança**.

Agora, vamos analisar alguns ângulos das figuras **2** e **3**.

Considere os ângulos assinalados na figura, com vértices nos pontos P_1, P_2 e P_3. Tanto na figura **2** quanto na figura **3**, o ângulo assinalado com vértice em P_1 mede 60°. Da mesma maneira, nas duas figuras, cada ângulo assinalado com vértice em P_2 e em P_3 mede, respectivamente, 90° e 30°. Os ângulos indicam o formato da figura, que se mantém quando a ampliamos ou a reduzimos. O que se modifica nesses casos são apenas as medidas dos segmentos de reta. Como essas duas condições (medidas lineares proporcionais e medidas angulares iguais) são satisfeitas, dizemos que as duas figuras são **semelhantes**.

As imagens não estão representadas em proporção.



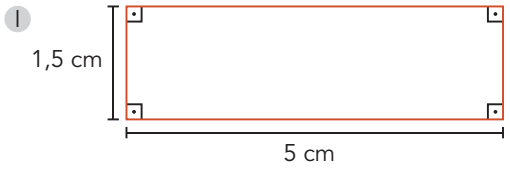
Banco de imagens/Arquivo da editora

Quando duas figuras semelhantes têm razão de semelhança igual a 1, dizemos também que elas são **congruentes**.

Acompanhe alguns exemplos.

1. Dois retângulos (não quadrados) serão semelhantes somente se a razão entre as medidas dos lados maiores for igual à razão entre as medidas dos lados menores.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Os retângulos I e II são semelhantes pois:

$$\frac{5}{2} = \frac{1{,}5}{0{,}6} = 2{,}5$$

A razão de semelhança entre eles é 2,5. Note que a razão entre as medidas de perímetro é igual à razão de semelhança:

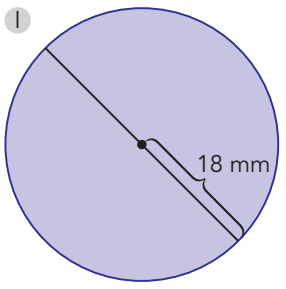
$$\frac{1{,}5 + 5 + 1{,}5 + 5}{0{,}6 + 2 + 0{,}6 + 2} = 2{,}5$$

2. Dois círculos quaisquer são sempre semelhantes.

A razão de semelhança entre os círculos I e II pode ser determinada pela razão entre as medidas dos raios, que é:

$$\frac{18}{12} = 1{,}5$$

Note que a razão entre as medidas dos diâmetros também é 1,5 $\left(\text{pois } \frac{36}{24} = \frac{3}{2} = 1{,}5\right)$.

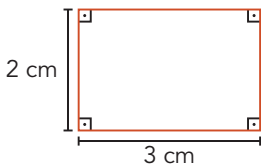


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro

Pense nisto

Dê exemplos de retângulos semelhantes ao retângulo a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplos de resposta: Qualquer retângulo, cujas medidas dos lados forem proporcionais a 2 e 3, é semelhante ao retângulo dado: 4 cm e 6 cm; 7 cm e 10,5 cm; 6 cm e 9 cm; 8 cm e 12 cm; 10 cm e 15 cm; 20 cm e 30 cm; etc.

3. Sim, pois eles têm dois pares de ângulos congruentes, que medem 48° e 90°. O terceiro ângulo, portanto, mede 42° nos dois triângulos, pois 180° − 48° − 90° = 42°.

ATIVIDADES

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

5. Não, pois, se os ângulos da base medem 40°, o outro ângulo mede 100° (pois 40° + 40° + 100° = 180°). No entanto, pode também ocorrer o caso de os ângulos da base medirem 70° e o outro 40° (pois 70°+ 70° + 40° = 180°). Se isso ocorrer, os triângulos também não serão semelhantes.

1. Indique, no caderno, quais das seguintes afirmações são verdadeiras (**V**) e quais são falsas (**F**).

a) 2 retângulos quaisquer são semelhantes. F

b) 2 círculos quaisquer são semelhantes. V

c) 2 triângulos retângulos quaisquer são semelhantes. F

d) 2 triângulos equiláteros quaisquer são semelhantes. V

e) 2 trapézios retângulos quaisquer são semelhantes. F

f) 2 losangos quaisquer são semelhantes. F

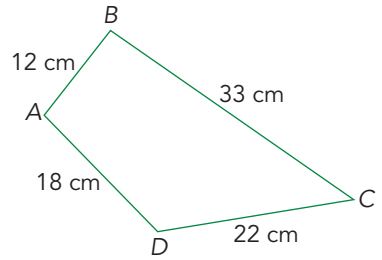
2. Os retângulos R_1 e R_2 são semelhantes. As medidas dos lados de R_1 são 6 cm e 10 cm. Sabendo que a razão de semelhança entre R_1 e R_2, nessa ordem, é $\frac{2}{3}$, responda às perguntas no caderno.

a) Sem efetuar cálculo algum, qual é o retângulo cujas medidas dos lados são maiores?

b) Quais são as medidas dos lados do retângulo R_2?

3. Dois triângulos retângulos distintos apresentam um ângulo de medida 48° e lados correspondentes com medidas proporcionais. É correto afirmar que eles são semelhantes? Explique no caderno.

4. Quais são as medidas dos lados de um quadrilátero $A'B'C'D'$ com medida de perímetro 17 cm, semelhante ao quadrilátero $ABCD$ representado?

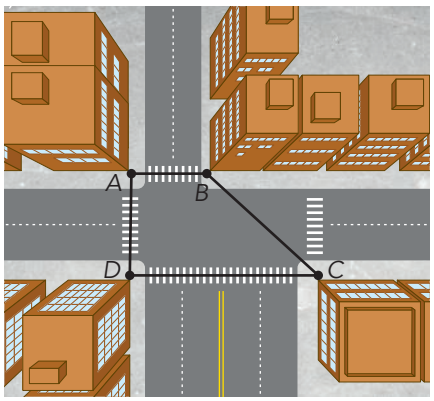


Banco de imagens/Arquivo da editora

$A'B' = 2{,}4$ cm; $B'C' = 6{,}6$ cm; $C'D' = 4{,}4$ cm; $D'A' = 3{,}6$ cm.

5. Dois triângulos isósceles distintos apresentam um ângulo de medida 40°. É correto afirmar que eles são semelhantes? Explique.

6. Um prospecto de propaganda imobiliária traz as posições das torres A, B, C e D de apartamentos que serão construídas num grande terreno plano.



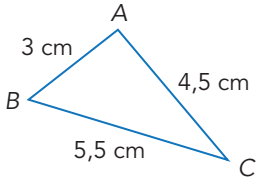
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

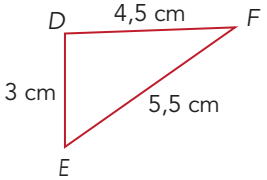
Um cliente, interessado em conhecer essas medidas de distância, mediu com uma régua os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, obtendo respectivamente 2 cm, 4 cm, 5 cm e 2,7 cm. Em seguida, ele verificou no prospecto que a escala utilizada era de 1 : 2000. Que valores ele obteve para as medidas de distância reais entre as torres A e B, B e C, C e D e A e D?

Congruência de triângulos

Noção intuitiva

Analise os triângulos ABC e DEF.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. a) Como a razão entre R_1 e R_2, nessa ordem, é menor do que 1, as medidas dos lados de R_2 são maiores do que as de R_1.

2. b) Sejam x e y as medidas, em centímetros, dos lados de R_2, temos: $\frac{2}{3} = \frac{6}{x} = \frac{10}{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9$;

$2y = 30 \Rightarrow y = 15$

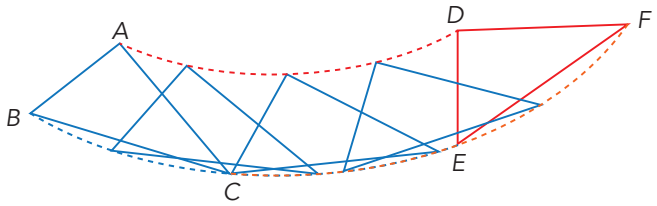
6. $AB = 2 \cdot 2000$ cm $= 4000$ cm $= 40$ m

$BC = 4 \cdot 2000$ cm $= 8000$ cm $= 80$ m

$CD = 5 \cdot 2000$ cm $= 10000$ cm $= 100$ m

$AD = 2{,}7 \cdot 2000$ cm $= 5400$ cm $= 54$ m

É possível imaginar um deslocamento do triângulo *ABC* até fazer com que seus lados coincidam com os lados do triângulo *DEF*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Também é possível estabelecer uma correspondência entre os vértices desses 2 triângulos. Acompanhe as trajetórias descritas pelos pontos *A*, *B* e *C*.

Note que:

- os lados correspondentes (ou homólogos) são congruentes, ou seja, têm medidas iguais;

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF} \text{ e } \overline{AC} \cong \overline{DF}$$

Usamos o símbolo ≅ para indicar congruência.

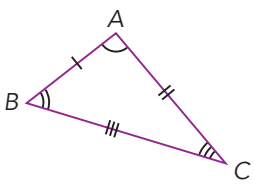
- os ângulos internos correspondentes são congruentes, ou seja, têm medidas iguais.

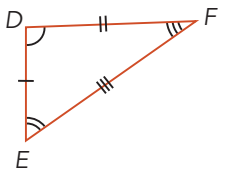
$$\hat{A} \cong \hat{D}, \hat{B} \cong \hat{E} \text{ e } \hat{C} \cong \hat{F}$$

Conceito de congruência

Dois triângulos são congruentes quando é possível estabelecer uma correspondência entre os vértices, de modo que os lados sejam respectivamente congruentes e os ângulos internos sejam respectivamente congruentes.

Vídeo





Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF} \\ \hat{A} \cong \hat{D}, \hat{B} \cong \hat{E}, \hat{C} \cong \hat{F}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

(Lê-se "O triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *DEF*.)

Critérios (ou casos) de congruência

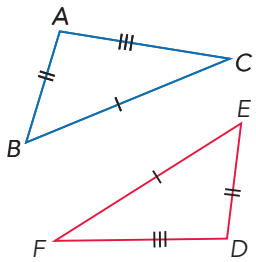
O conceito de congruência de triângulos estabelece que 2 triângulos são congruentes quando:

- cada lado de um dos triângulos é congruente ao lado correspondente no outro triângulo – portanto, são 3 congruências entre os lados;
- cada ângulo interno de um dos triângulos é congruente ao ângulo interno correspondente no outro triângulo – portanto, são 3 congruências entre os ângulos.

Para concluir que 2 triângulos são congruentes usando o conceito de congruência, temos que constatar 6 congruências: 3 congruências de lados e 3 congruências de ângulos. É possível reduzir esse trabalho por meio dos critérios de congruência.

São 4 critérios ou casos de congruência que permitem concluir que 2 triângulos são congruentes, a partir da análise de apenas 3 determinadas congruências.

Caso LLL (lado-lado-lado)

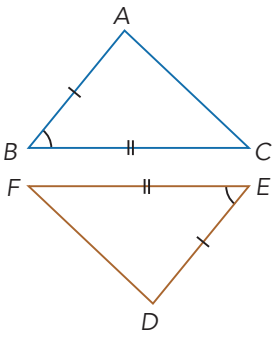


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Se 2 triângulos apresentam os 3 lados respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

Para os triângulos ABC e DEF, o critério estabelece que, como $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, então os 3 ângulos também são respectivamente congruentes, ou seja: $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$ e, consequentemente, os triângulos são congruentes.

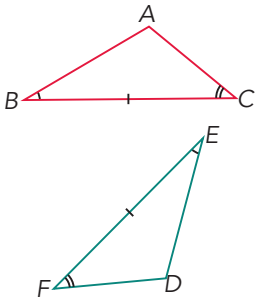
Caso LAL (lado-ângulo-lado)



Se 2 triângulos apresentam 2 lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

Analise os triângulos ABC e DEF representados. De acordo com esse critério de congruência, como $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então o 3º lado e os 2 ângulos restantes também são respectivamente congruentes, ou seja: $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$ e, consequentemente, os triângulos são congruentes.

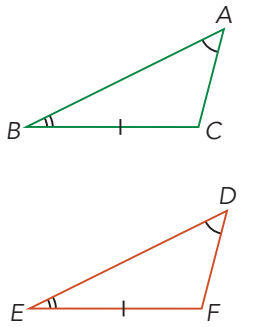
Caso ALA (ângulo-lado-ângulo)



Se 2 triângulos apresentam 2 ângulos e o lado entre esses ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

Esse critério estabelece que, nos triângulos ABC e DEF, se $\hat{B} \cong \hat{E}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$, então os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ e os pares de lados restantes também são respectivamente congruentes, ou seja: $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e, consequentemente, os triângulos são congruentes.

Caso LAAo (lado-ângulo adjacente-ângulo oposto)



Se 2 triângulos apresentam um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.

Esse caso estabelece que, se um triângulo ABC e um triângulo DEF apresentam $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{A} \cong \hat{D}$, então o ângulo restante e os 2 lados restantes também são respectivamente congruentes, ou seja: $\hat{C} \cong \hat{F}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e, consequentemente, os triângulos são congruentes.

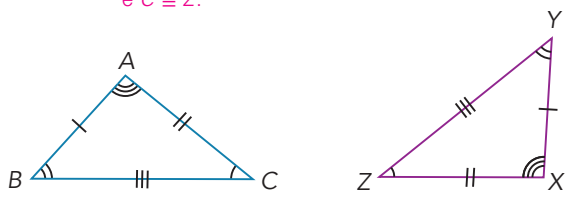
8. Exemplo de problema: Em certo momento de um jogo, 4 pessoas estão localizadas nos pontos B, C, N e P, próximas a uma árvore em A, conforme figura. Vence o jogo aquele que chegar primeiro à árvore. Sabendo que $\widehat{B} \cong \widehat{N}$, $\overline{BC} \cong \overline{NP}$, $BN = 30$ m e $AC = 17{,}5$ m, verifique quais das pessoas estão mais próximas da árvore.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

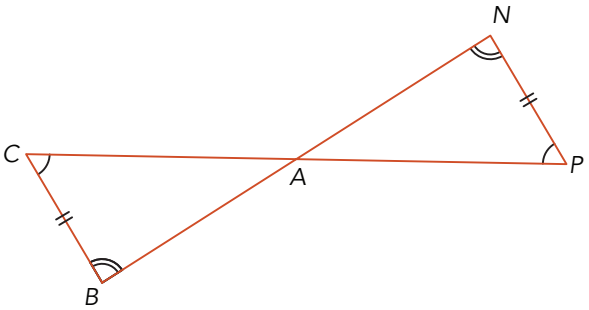
7. Sabendo que os triângulos ABC e XYZ são congruentes, escreva, no caderno, as 3 congruências de lados e as 3 congruências de ângulos. $\overline{AB} \cong \overline{XY}$, $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$ e $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$; e $\widehat{A} \cong \widehat{X}$, $\widehat{B} \cong \widehat{Y}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{Z}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



8. Considere a figura a seguir e elabore, no caderno, um problema que possa ser modelado usando essa figura e resolvido justificando as congruências entre esses triângulos.

Banco de imagens/Arquivo da editora

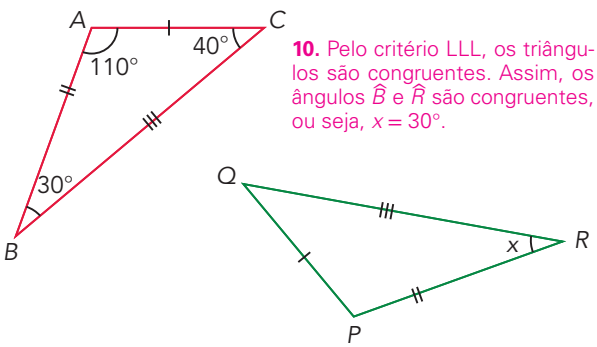


9. **Troque ideias** com um colega sobre a seguinte situação.

Usando régua e compasso, represente, no caderno, um triângulo com lados medindo 6 cm, 7 cm e 9 cm. Compare seu triângulo com o do colega. Caso julgue necessário, use um transferidor para medir os ângulos. O que você pode afirmar sobre esses triângulos? Justifique sua resposta por meio de conceitos matemáticos.

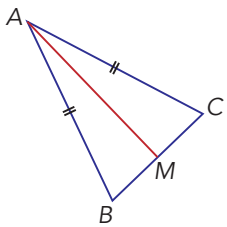
10. Os 2 triângulos representados são congruentes. Indique, no caderno, o critério de congruência utilizado e determine o valor de x.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



10. Pelo critério LLL, os triângulos são congruentes. Assim, os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{R}$ são congruentes, ou seja, $x = 30°$.

11. Um triângulo é isósceles quando tem 2 lados congruentes. Mostre, usando congruência de triângulos, que o segmento de reta $\overline{AM}$ (mediana) que tem como extremidades o vértice A e o ponto médio M da base $\overline{BC}$ de um triângulo isósceles, em que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, divide o triângulo ABC em 2 triângulos congruentes.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

Em um triângulo, o segmento de reta que tem como extremidades um dos vértices e o ponto médio do lado oposto a esse vértice é chamado **mediana** relativa a esse vértice ou relativa a esse lado. Na atividade **11**, o segmento de reta $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao vértice A ou relativa ao lado $\overline{BC}$.

12. Paralelogramo é um quadrilátero que tem 2 pares de lados paralelos. Mostre que a diagonal $\overline{AC}$ de um paralelogramo $ABCD$ o divide em 2 triângulos congruentes.

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

13. Em períodos chuvosos, algumas regiões próximas a rios, ribeirões ou córregos sofrem com transbordamentos. Com o intuito de acabar com esse problema, muitos desses cursos de água são canalizados. A canalização de um rio, ribeirão ou córrego consiste em efetuar modificações no seu leito e no seu trajeto para aumentar o escoamento da água.

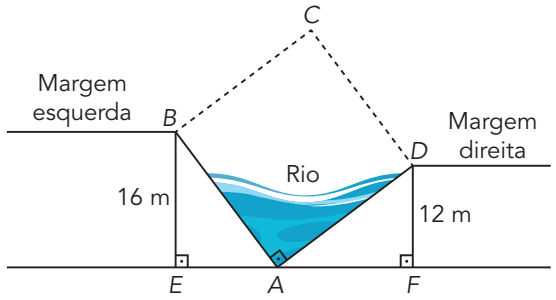
DRC/Folhapress

Córrego canalizado na zonal sul da cidade de São Paulo (SP). Foto de 2024.

9. Resposta pessoal. Não é necessário medir os ângulos internos com um transferidor, pois o critério de congruência estabelece condições mínimas para se concluir que 2 triângulos são congruentes. Nesse caso, basta constatar a congruência entre os lados pelo caso LLL.

11. De acordo com o enunciado, temos $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e, como M é ponto médio de $\overline{BC}$, temos $\overline{BM} \cong \overline{MC}$. Além disso, $\overline{AM}$ é um lado comum aos triângulos ABM e ACM. Assim, pelo critério LLL, $\triangle ABM \cong \triangle ACM$.

Para um concurso de inovações, um estudante resolveu inovar na elaboração de um projeto de canalização de um rio que separa duas margens em desnível. A figura a seguir mostra o perfil desse projeto e as medidas que o estudante conhece (alturas das margens em relação ao fundo do rio).



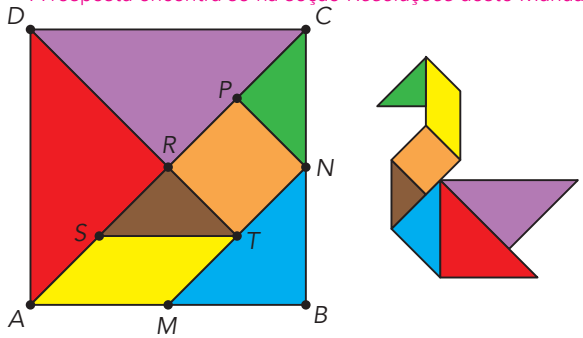
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Acreditando que vai reduzir o acúmulo de objetos no fundo do rio, o estudante resolveu usar no projeto 2 lados consecutivos $(\overline{AB}$ e $\overline{AD})$ de um quadrado ($ABCD$) para o fundo do leito do rio fazendo com que o vértice B esteja na margem esquerda, o vértice D, na margem direita e o ponto A no fundo do rio sendo um ponto pertencente ao segmento de reta $\overline{EF}$.

Para finalizar o projeto, é necessário determinar a medida do segmento de reta $\overline{EF}$. Calcule essa medida. 28 m

14. Tangram é um antigo quebra-cabeça chinês composto de 7 peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Com essas peças é possível formar diferentes figuras.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Tangram e uma das figuras formadas por suas peças.

Sabendo que:

- os pontos M e N são pontos médios de 2 dos lados do quadrado $ABCD$;
- os pontos P, S e T são respectivamente pontos médios dos lados $\overline{CR}$, $\overline{AR}$ e $\overline{MN}$;
- R é o centro do quadrado $ABCD$, responda ao que se pede.

a) Os triângulos ADR e DCR são congruentes? Justifique sua resposta.

b) Os triângulos RST e PNC são congruentes? Justifique sua resposta.

c) Qual é a razão entre as medidas de área do triângulo PNC e do trapézio $RCNT$?

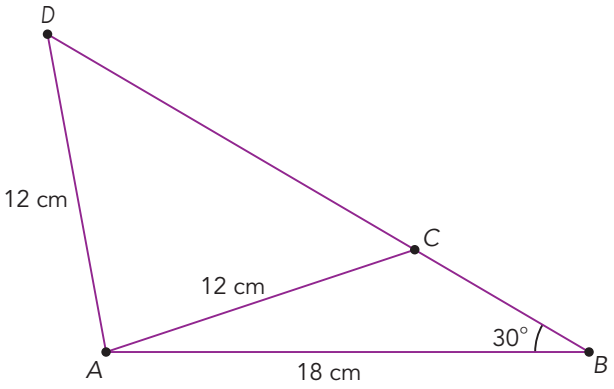
d) Qual é a razão entre as medidas de área do triângulo BMN e do triângulo RST?

Observação

Toda linha plana, fechada e simples delimita uma superfície, e essa superfície tem uma medida de área. Para evitarmos repetições, em vez de escrevermos, por exemplo, "medida de área da região delimitada por um triângulo", escreveremos simplesmente "medida de área do triângulo".

15. **Troque ideias** com um colega sobre a seguinte situação.

Analise os triângulos ABC e ABD.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que:

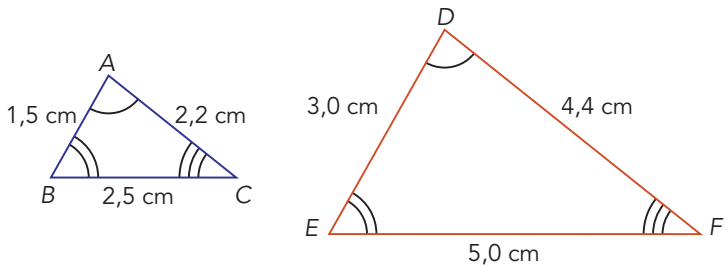
- o triângulo ABC tem lados de medidas 12 cm e 18 cm e um dos ângulos medindo 30°;
- o triângulo ABD tem lados de medidas 12 cm e 18 cm e um dos ângulos medindo 30°.

Esses dois triângulos são congruentes? Justifique sua resposta.

15. Não, pois os triângulos têm o lado $\overline{AB}$ e o ângulo de medida 30° comuns. Além disso, $AD = AC = 12$ cm e, como o ponto C pertence ao lado $\overline{BD}$, podemos dizer que $BC < BD$ e, então, os triângulos ABC e ABD não são congruentes.

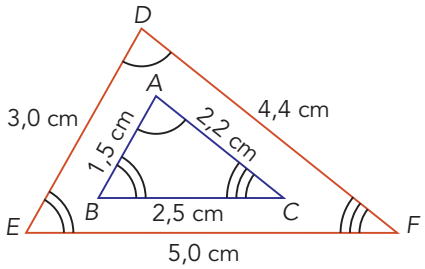
Semelhança de triângulos

Considere os triângulos *ABC* e *DEF*.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Como $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$, é possível colocar o triângulo menor (*ABC*) no interior do maior (*DEF*), de maneira que os lados fiquem respectivamente paralelos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

Usaremos, em toda a coleção, a notação *AB* para representar a medida de um segmento de reta $\overline{AB}$ (segmento de extremidades *A* e *B*).

Se calcularmos as razões entre as medidas dos lados correspondentes, teremos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{1,5}{3,0} = \frac{1}{2} \qquad \frac{AC}{DF} = \frac{2,2}{4,4} = \frac{1}{2} \qquad \frac{BC}{EF} = \frac{2,5}{5,0} = \frac{1}{2}$$

Logo, as razões são todas iguais, ou seja, os lados correspondentes (homólogos) são proporcionais.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

Daí, podemos estabelecer a seguinte definição.

Dois triângulos são semelhantes se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

Dica

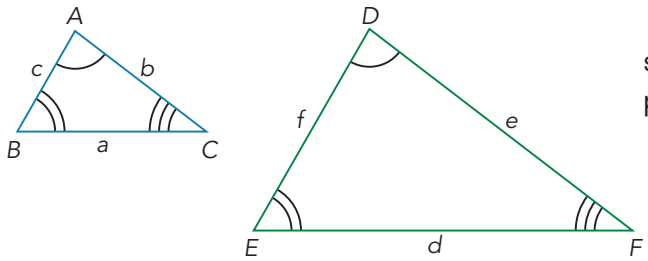
Partes 1 e 2 do episódio *O triângulo e o quadrilátero*, do canal Isto É Matemática

Esses vídeos apresentam características dos triângulos e dos quadriláteros.

A parte 1 (9 min 48 s) está disponível em: https://tedit.net/iqmg2c, e a parte 2 (9 min 53 s), em: https://tedit.net/9dhaa9. Acesso em: 2 jul. 2024.

rawpixel.com/Freepik

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora



Os triângulos ABC e DEF representados são semelhantes. Em linguagem matemática, podemos escrever:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \text{ e } \dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{cases}$$

Utilizamos o símbolo ~ para indicar semelhança.

Razão de semelhança em triângulos

Se 2 triângulos são semelhantes, a razão entre as medidas dos lados homólogos (ou correspondentes) é chamada **razão de semelhança**. Nos triângulos ABC e DEF, apresentados anteriormente, note que:

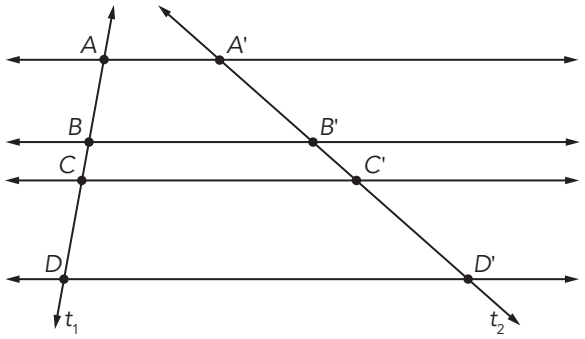
$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k, \text{ em que } k \text{ é a razão de semelhança.}$$

O conceito de triângulos semelhantes fixou as seguintes condições para um triângulo ABC ser semelhante a outro, $A'B'C'$.

$$\underbrace{\hat{A} \cong \hat{A'}, \hat{B} \cong \hat{B'}, \hat{C} \cong \hat{C'}}_{\text{três congruências de ângulos}} \text{ e } \underbrace{\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}}_{\text{proporcionalidade entre as medidas dos lados}}$$

Contudo, podemos reduzir a quantidade de exigências. Os casos de semelhança (ou critérios de semelhança), que estudaremos a seguir, mostram quais são as condições mínimas para 2 triângulos serem semelhantes.

Para demonstrarmos a validade dos critérios de semelhança, precisamos retomar o teorema de Tales e o teorema fundamental da semelhança. A figura a seguir é composta de um feixe de retas paralelas e duas retas transversais, t_1 e t_2.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Ao analisá-la, podemos dizer que:

- são correspondentes os pontos A e A', B e B', C e C' e D e D';
- são correspondentes os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, etc.

Observação

Para determinar a razão de semelhança entre as medidas dos lados de triângulos, elas devem ser expressas na mesma unidade de medida.

Não escreva no livro

Pense nisto

Se a razão de semelhança entre 2 triângulos é 1, o que podemos afirmar sobre eles?

Se 2 triângulos são semelhantes e a razão de semelhança é 1, então os lados são respectivamente congruentes e, consequentemente, os triângulos são congruentes.

Teorema de Tales

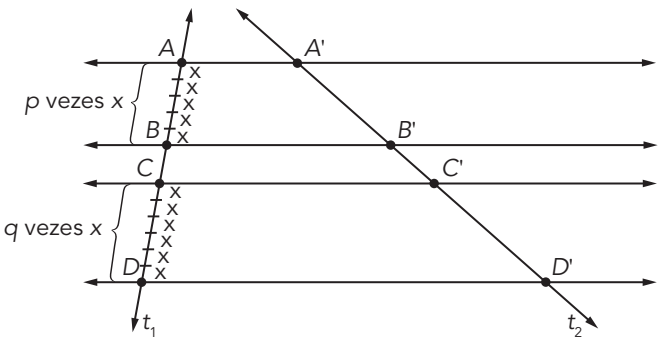
Agora, vamos retomar um teorema muito importante da Geometria: o teorema de Tales.

> Se 2 retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre as medidas de 2 segmentos de reta quaisquer de uma delas é igual à razão entre as medidas dos 2 segmentos de reta correspondentes da outra.

Considerando a figura anterior, a tese é $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$. Acompanhe a demonstração a seguir.

Demonstração

Suponha que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sejam segmentos de reta comensuráveis, isto é, existam um segmento de reta de medida x e números inteiros p e q, $p > 0$ e $q > 0$, de modo que $AB = p \cdot x$ e $CD = q \cdot x$, como indica a figura (neste caso, temos $p = 5$ e $q = 6$).



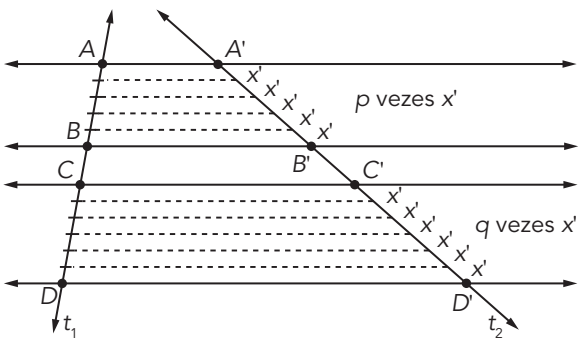
Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

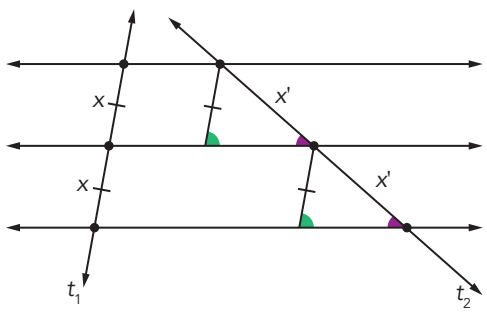
Com isso, podemos estabelecer a razão:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{p \cdot x}{q \cdot x} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{p}{q}$$ I

Assim, conduzimos retas do feixe (paralelas a $\overleftrightarrow{AA'}$) pelos pontos de divisão dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



Ampliando um trecho do feixe, obtemos a figura a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Podemos notar que, traçando segmentos de reta paralelos à reta t_1, são determinados paralelogramos, cada um com lados opostos congruentes, e também são determinados triângulos congruentes, pois os ângulos assinalados em verde são congruentes (ângulos correspondentes num feixe de retas paralelas cortadas por transversais), assim como os ângulos assinalados em roxo (caso LAAo);

Além disso, o segmento de reta $\overline{A'B'}$ fica dividido em p segmentos congruentes, cada um com medida x': Então, $A'B' = p \cdot x'$. E o segmento de reta $\overline{C'D'}$ fica dividido em q segmentos congruentes, cada um com medida x': Então $C'D' = q \cdot x'$.

Assim, estabelecemos a razão:

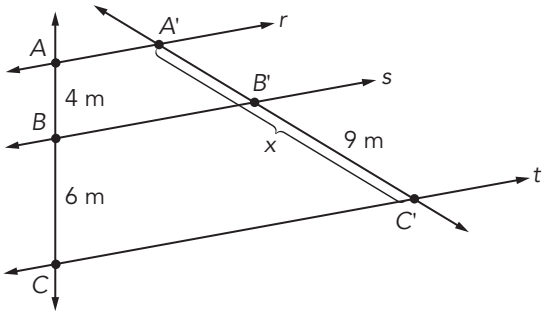
$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p \cdot x'}{q \cdot x'} \Rightarrow \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p}{q} \quad \text{II}$$

Comparando I e II, temos $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

Pode-se mostrar que o teorema de Tales também é válido no caso em que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis, isto é, quando não existem um segmento de reta de medida x e números inteiros p e q, $p > 0$ e $q > 0$, de modo que $AB = p \cdot x$ e $CD = q \cdot x$.

Acompanhe o exemplo que segue.

Na figura, as retas r, s e t são paralelas. Vamos calcular o valor de x.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto: Ao usar o teorema de Tales, é possível escolher quaisquer dois segmentos de uma transversal (e não apenas segmentos adjacentes). Assim, na proporção utilizada pelo estudante, ele considerou a razão $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'} \Rightarrow \frac{4+6}{6} = \frac{x}{9} \Rightarrow \frac{10}{6} = \frac{x}{9}$.

Não escreva no livro

Pense nisto

Um estudante usou a proporção $\frac{10}{6} = \frac{x}{9}$ para solucionar o problema do exemplo anterior. Comente essa estratégia.

Note que $\overline{A'B'}$ mede, em metros, $x - 9$. Aplicando o teorema de Tales, segue que:

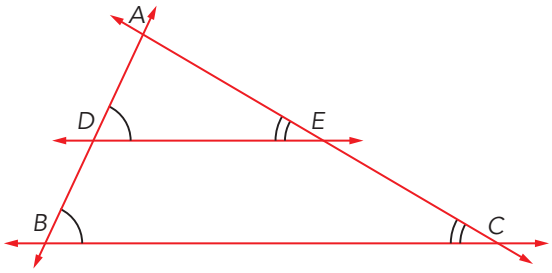
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{x-9}{9} \Rightarrow 6x = 90 \Rightarrow x = 15$$

Logo, $x = 15$ m.

Teorema fundamental da semelhança

Toda reta paralela a um lado de um triângulo e que intersecta os outros 2 lados em pontos distintos determina um novo triângulo, semelhante ao primeiro.

Vamos comprovar a validade desse teorema usando o triângulo ABC representado a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Hipótese: $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$ ($D \in \overleftrightarrow{AB}$ e $E \in \overleftrightarrow{AC}$). **Tese**: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Observação

Usaremos o símbolo // para indicar 2 segmentos de reta paralelos ou duas retas paralelas.

Demonstração

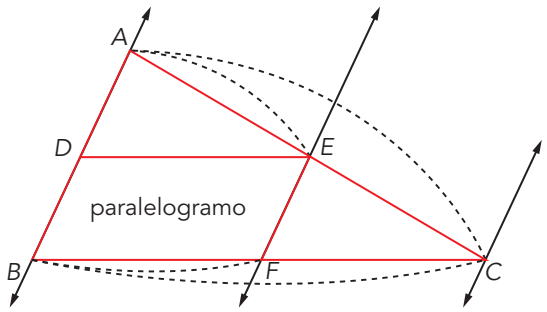
Considerando os triângulos ADE e ABC e o paralelismo de $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, temos $\hat{D} \cong \hat{B}$ e $\hat{E} \cong \hat{C}$. Então, os triângulos ADE e ABC têm os ângulos ordenadamente congruentes.

$$\hat{D} \cong \hat{B}, \hat{E} \cong \hat{C} \text{ e } \hat{A} \text{ é comum} \quad \text{I}$$

Sendo $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$ e aplicando o teorema de Tales nas transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, temos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \text{II}$$

Pelo ponto E, vamos conduzir a reta $\overleftrightarrow{EF}$, paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, sendo F pertencente a $\overleftrightarrow{BC}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sendo $\overleftrightarrow{EF} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$ e aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

Entretanto, $\overleftrightarrow{BF} \cong \overleftrightarrow{DE}$, pois $BDEF$ é um paralelogramo. Vamos então substituir BF por DE na proporção anterior:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{III}$$

Comparando II e III: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$. IV

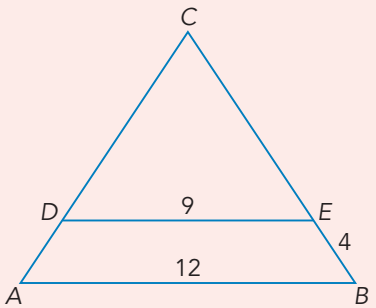
Concluímos, assim, que os triângulos ADE e ABC têm ângulos congruentes (por I) e lados proporcionais (por IV). Logo, eles são semelhantes.

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Daí concluímos a validade do **teorema fundamental da semelhança**.

Atividades resolvidas

1. Determine as medidas de $\overline{CB}$ e $\overline{CE}$ da figura a seguir, sabendo que $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{AB}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

Sendo $\overline{DE} \,//\, \overline{AB}$, temos, pelo teorema fundamental da semelhança: $\triangle CDE \sim \triangle CAB$.

Daí, segue que:

$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} = \frac{9}{12} \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{9}{12} \Rightarrow \frac{CE}{CE + 4} = \frac{9}{12} \Rightarrow CE = 12$;
ou seja, 12 u.c. (unidades de medida de comprimento).

$CB = CE + 4 = 12 + 4 = 16$; ou seja, 16 u.c.

Critérios (ou casos) de semelhança

Vamos estudar os critérios mínimos para 2 triângulos serem semelhantes.

AA (ângulo-ângulo)

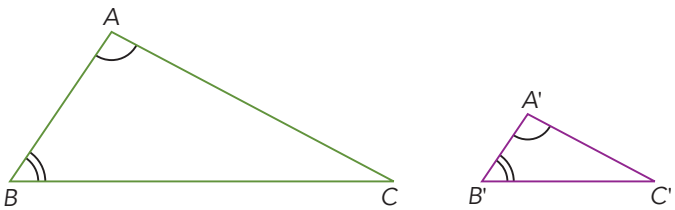
Se 2 triângulos apresentam 2 ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Analise os triângulos ABC e $A'B'C'$ com 2 ângulos respectivamente congruentes:

$$\hat{A} \cong \hat{A'} \text{ e } \hat{B} \cong \hat{B'}$$

Observação

As demonstrações dos casos seguintes são análogas ao caso AA.



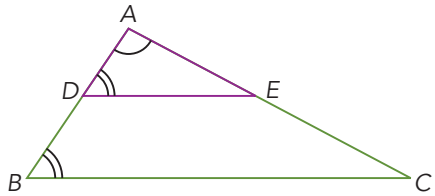
Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Vamos demonstrar a seguir a validade desse critério.

Demonstração

Se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, então, pelo caso ALA de congruência de triângulos, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ e daí $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Se os triângulos não forem congruentes, vamos supor que $AB > A'B'$.

Vamos tomar D em $\overline{AB}$, de modo que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, e por D vamos representar $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, sendo E pertencente a $\overline{AC}$.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Pelo caso de congruência ALA, temos $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$; logo, são semelhantes: $\triangle ADE \sim \triangle A'B'C'$.

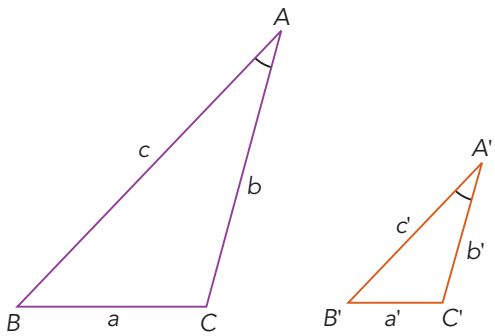
Pelo teorema fundamental da semelhança, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Então, os triângulos $A'B'C'$ e ABC também são semelhantes:

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

LAL (lado-ângulo-lado)

Se 2 triângulos têm 2 lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

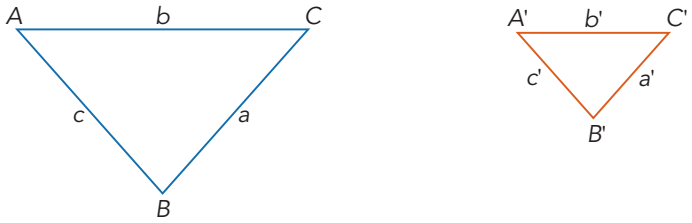


$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} \\ \hat{A} \cong \hat{A'} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

LLL (lado-lado-lado)

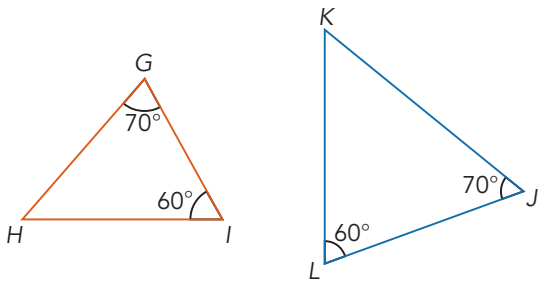
Se 2 triângulos têm as medidas dos lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

No exemplo a seguir, analise os 2 triângulos representados.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Temos $\hat{G} \cong \hat{J}$ e $\hat{I} \cong \hat{L}$.

Então, pelo critério AA de semelhança, $\triangle GHI \sim \triangle JKL$ e, em consequência, as medidas dos lados homólogos são proporcionais.

$$\frac{GH}{JK} = \frac{GI}{JL} = \frac{HI}{KL}$$

Não escreva no livro

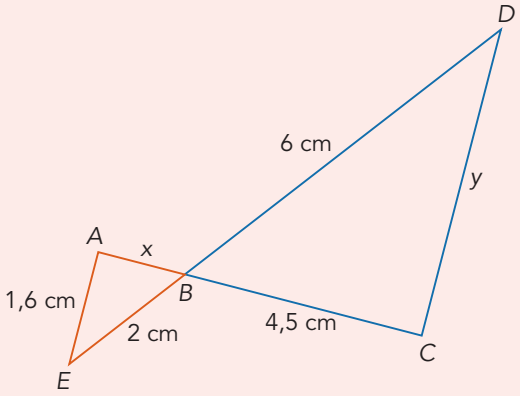
Pense nisto

Se 2 triângulos têm 2 lados correspondentes proporcionais e 1 dos ângulos congruentes, esses triângulos são semelhantes?

Se os ângulos congruentes não forem os compreendidos entre os lados correspondentes proporcionais, não podemos garantir que os triângulos sejam semelhantes.

Atividades resolvidas

2. Analise a figura. Sabe-se que $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$ e que B pertence aos segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{ED}$. Quais são as medidas x do segmento de reta $\overline{AB}$ e y do segmento de reta $\overline{CD}$?



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

Como $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$, há 2 pares de ângulos alternos internos congruentes:

$$B\hat{A}E \cong B\hat{C}D \text{ e } B\hat{E}A \cong B\hat{D}C$$

Há também $A\hat{B}E \cong C\hat{B}D$ (ângulos opostos pelo vértice). Assim, temos $\triangle ABE \sim \triangle CBD$. Podemos escrever a proporcionalidade entre as medidas dos lados homólogos:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AE}{CD} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow \frac{x}{4{,}5} = \frac{1{,}6}{y} = \frac{2}{6}$$

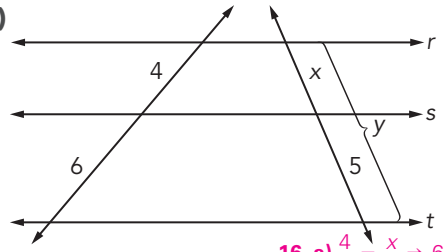
Temos, então, $x = \frac{2 \cdot 4{,}5}{6}$, isto é, $x = 1{,}5$ cm; além de $y = \frac{6 \cdot 1{,}6}{2}$, isto é, $y = 4{,}8$ cm.

As imagens não estão representadas em proporção.

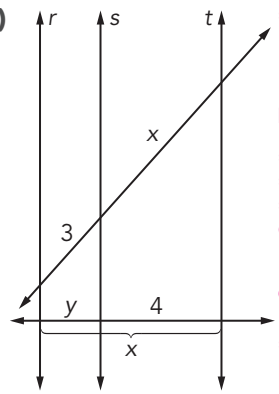
Não escreva no livro

16. Em cada caso a seguir, as retas *r*, *s* e *t* são paralelas. Determine os valores de *x* e *y*.

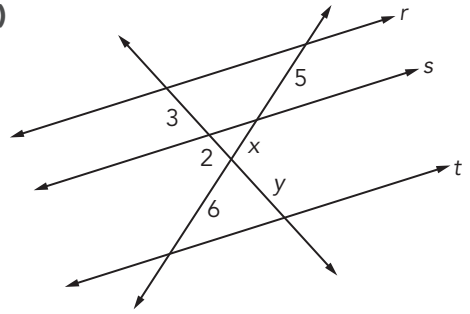
a)



b)



c)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

16. a) $\frac{4}{6} = \frac{x}{5} \Rightarrow 6x = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{10}{3}$

$y = x + 5 = \frac{10}{3} + 5 = \frac{25}{3}$

b) $\frac{3 + x}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 12 + 4x \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x$

$\Rightarrow = -2$ (não serve)

ou $x = 6$

$y = x - 4 = 6 - 4 = 2$

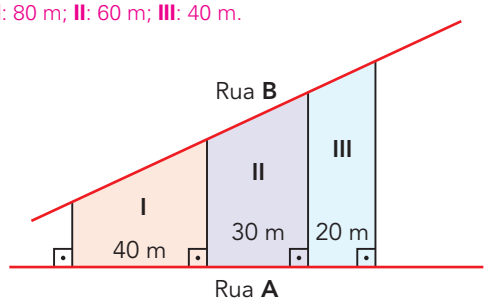
c) $\frac{3}{2} = \frac{5}{x} \Rightarrow 3x = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{10}{3}$

$\frac{3}{y} = \frac{5}{6} \Rightarrow 5y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{5}$

17. Os terrenos **I**, **II** e **III** têm frente para a rua **A** e para a rua **B**, como mostra a figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua **A**. Qual é a medida da frente para a rua **B** de cada terreno sabendo que a frente total para essa rua mede 180 m? Responda no caderno.

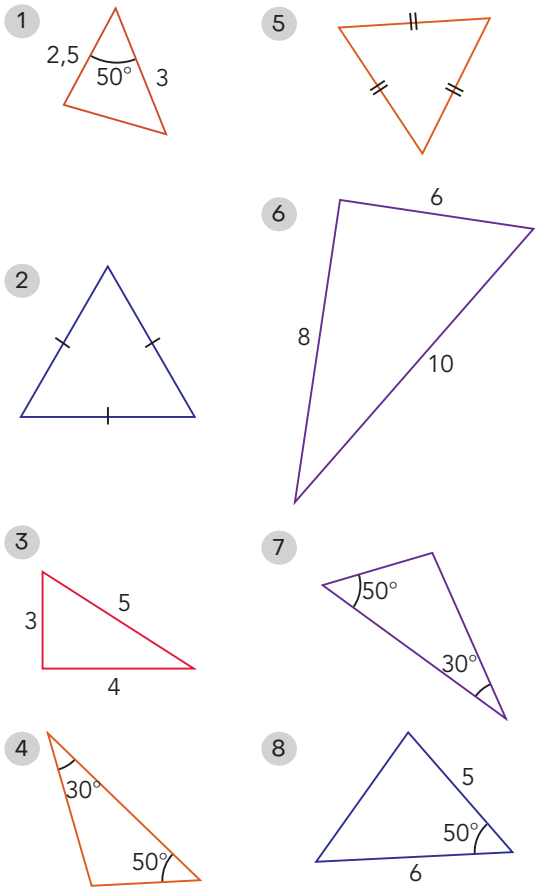
I: 80 m; **II**: 60 m; **III**: 40 m.



Banco de imagens/Arquivo da editora

18. 1 e 8 (caso LAL), 2 e 5 (caso LLL ou AA), 3 e 6 (caso LLL) e 4 e 7 (caso AA).

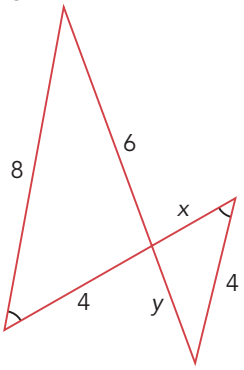
18. São dados 8 triângulos. Indique, no caderno, os pares de triângulos semelhantes e o critério de semelhança correspondente.



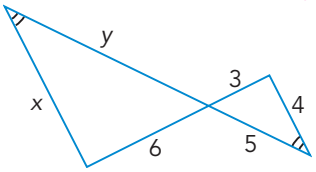
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

19. Determine *x* e *y* em cada figura, cujos ângulos assinalados com a mesma marcação são congruentes.

a)



b)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

19. a) $\frac{8}{4} = \frac{6}{y} = \frac{4}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x = 4 \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{16}{8} \Rightarrow x = 2$

$8y = 4 \cdot 6 \Rightarrow y = \frac{24}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 3$

b) $\frac{6}{3} = \frac{y}{5} = \frac{x}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 4 \cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{24}{3} \Rightarrow x = 8$

$3y = 6 \cdot 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{30}{3} \Rightarrow y = 10$

22. a) Pelo critério AA, temos: $\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{6}{8} \Rightarrow 6x = 72 \Rightarrow x = 12$; logo, $x = 12$ cm.

b) Pelo critério AA, temos: $\triangle EDA \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{ED}{DA} = \frac{CB}{BA} \Rightarrow \frac{36}{x} = \frac{27}{x - 10} \Rightarrow 27x = 36x - 360 \Rightarrow 9x = 360 \Rightarrow x = 40$; logo, $x = 40$ cm.

20. Em certa hora do dia, um prédio de 48 m de medida da altura projeta no solo uma sombra de 10 m de medida de comprimento. Responda, no caderno, às perguntas a seguir.

a) No mesmo instante, qual é a medida de comprimento da sombra projetada por um prédio de 18 m de medida da altura, situado na mesma rua, supondo-a plana e horizontal? 3,75 m

b) Em outra hora do dia, a sombra do prédio menor diminuiu 50 cm em relação à situação anterior. Em quanto diminuirá a sombra do prédio maior? Aproximadamente 1,34 m.

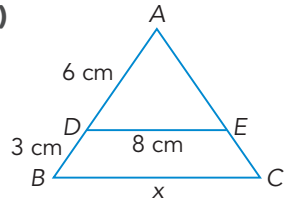
21. Uma rampa de inclinação constante tem 90 m de medida da extensão, e o ponto mais alto se encontra a 8 m do solo. Responda, no caderno, às perguntas a seguir.

a) Saindo do solo, uma pessoa se desloca sobre a rampa e atinge um ponto que se encontra a 2 m de medida da altura em relação ao solo. Quantos metros ainda faltam para a pessoa chegar ao ponto mais alto? 67,5 m

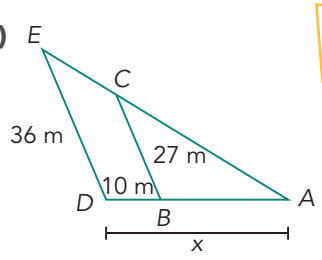
b) Saindo do ponto mais alto da rampa, uma pessoa desce 20 m da rampa, chegando a um ponto S. A que medida da altura S está em relação ao solo? Aproximadamente 6,22 metros.

22. Sendo $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, determine o valor de x em cada caso.

a)



b)

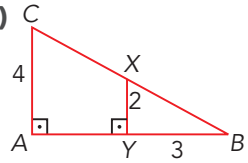


As imagens não estão representadas em proporção.

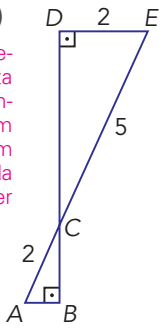
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

23. Determine a medida do segmento de reta $\overline{AB}$ em cada caso.

a)



b)



25. Exemplo de problema: Um avião decola, com inclinação constante, da pista de um aeroporto e, instantes depois, encontra-se a 150 m de medida de altura em relação ao solo, tendo percorrido 500 m desde a decolagem. Calcule a medida da altura do avião em relação ao solo após ter percorrido mais 1,5 km.

23. a) Pelo critério AA, temos: $\triangle CAB \sim \triangle XYB \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{AB}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2AB = 12 \Rightarrow AB = 6$.

b) Pelo critério AA, temos: $\triangle ABC \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{2}{AB} = \frac{5}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 5AB = 4 \Rightarrow AB = \frac{4}{5}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

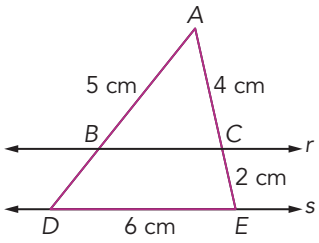
24. Determine a razão entre as medidas de perímetro dos triângulos ABC e ADE, nessa ordem, sabendo que $r \parallel s$.

1º modo:

Pelo critério AA, os triângulos ABC e ADE são semelhantes, então:

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{5}{AD} = \frac{4}{4 + 2} = \frac{BC}{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow 4AD = 5 \cdot 6 = 30 \Rightarrow AD = 7{,}5$;
$6BC = 4 \cdot 6 \Rightarrow BC = 4$

A medida de perímetro do $\triangle ABC$ é 5 cm + 4 cm + 4 cm = 13 cm e a do $\triangle ADE$ é 7,5 cm + 6 cm + 6 cm = 19,5 cm.



A razão pedida é $\frac{13}{19{,}5} = \frac{13}{\frac{39}{2}} = \frac{2}{3}$.

2º modo:

Pelo critério AA, os triângulos ABC e ADE são semelhantes e A razão de semelhança é $k = \frac{AC}{AE} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Como a medida de perímetro é a soma das medidas dos 3 lados, a razão entre as medidas de perímetro também é $\frac{2}{3}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

25. Considere a fotografia seguinte e elabore no caderno um problema que possa ser resolvido usando semelhança de triângulos.

Taro Hama /Moment RF/Getty Images

Durante a decolagem de um avião é possível notarmos o ângulo de inclinação. Foto de avião comercial decolando do aeroporto Haneda, na região especial de Ota, em Tóquio, no Japão. Foto de 2022.

Consequências da semelhança de triângulos

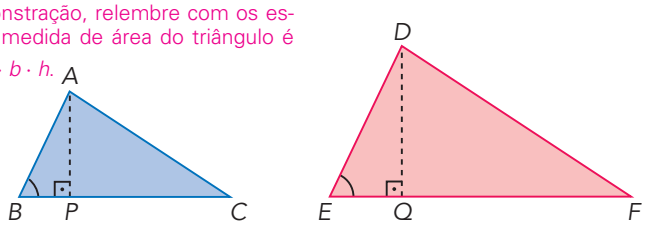
Razão entre as medidas de área de triângulos semelhantes

Por meio dos critérios de semelhança, podemos provar que, se a razão de semelhança entre as medidas dos lados correspondentes de 2 triângulos é k, então a razão entre as medidas de:

- 2 alturas homólogas é k;
- 2 medianas homólogas é k;
- 2 bissetrizes internas homólogas é k;
- área de 2 triângulos semelhantes é k^2.

Vamos provar a última afirmação. Seja $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Para essa demonstração, relembre com os estudantes que a medida de área do triângulo é calculada por $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Temos $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = k$.

Demonstração

Consideremos as alturas homólogas $\overline{AP}$ e $\overline{DQ}$, portanto $\frac{AP}{DQ} = k$ (razão de semelhança das medidas de 2 alturas homólogas).

Sendo S_1 a medida de área do triângulo ABC e S_2 a medida de área do triângulo DEF, temos:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \frac{BC \cdot AP}{2} \\ S_2 = \frac{EF \cdot DQ}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{BC \cdot AP}{EF \cdot DQ} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AP}{DQ} = k \cdot k = k^2$$

Logo, a razão entre as medidas de área de 2 triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Note que a propriedade apresentada anteriormente pode ser estendida a quaisquer superfícies planas semelhantes.

A razão entre as medidas de área de 2 superfícies planas semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Observação

Bissetriz de um triângulo é o segmento de reta que divide o ângulo interno em 2 ângulos congruentes.

Altura de um triângulo é o segmento de reta perpendicular à reta que contém o lado do triângulo que é tomado como base e que tem extremidades na reta e no vértice do ângulo oposto a esse lado.

Não escreva no livro

Pense nisto

Qual é a unidade de medida de k? E de k^2?

k e k^2 são razões entre duas medidas expressas em uma mesma unidade de medida, de uma mesma grandeza. Logo, não têm uma unidade de medida.

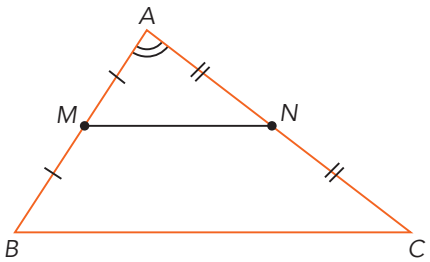
Base média do triângulo

Se um segmento de reta une os pontos médios de 2 lados de um triângulo, então esse segmento de reta é paralelo ao terceiro lado e a medida dele é a metade da medida do terceiro lado.

Acompanhe a demonstração dessa propriedade.

Demonstração

Analise o triângulo ABC representado a seguir, em que M e N são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Os triângulos AMN e ABC têm o ângulo $\hat{A}$ em comum, e $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$.

De acordo com o critério LAL de semelhança, temos $\triangle AMN \sim \triangle ABC$; portanto, $\hat{M} \cong \hat{B}$, $\hat{N} \cong \hat{C}$ e $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$.

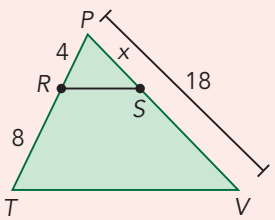
Assim, podemos concluir que $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$ e $MN = \frac{BC}{2}$.

Reciprocamente, pode-se mostrar que, se, pelo ponto médio de um lado de um triângulo, traçarmos uma reta paralela a outro lado, essa reta encontrará o terceiro lado em seu ponto médio.

Pense nisto: Se a medida de área do triângulo PRS é $\frac{1}{9}$ da medida de área do triângulo PTV, então a medida de área do trapézio $RSVT$ é $\frac{8}{9}$ da medida de área do triângulo PTV. Assim, a razão pedida é $\frac{\frac{8}{9}}{\frac{1}{9}} = 8$.

Atividades resolvidas

3. Na figura a seguir, $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{TV}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Determine o valor de x.

b) Sendo S_1 a medida de área do triângulo PRS e S_2 a do triângulo PTV, encontre uma relação entre S_1 e S_2.

Solução:

Como $\overline{RS} \,//\, \overline{TV}$, os triângulos PRS e PTV são semelhantes.

a) Escrevendo a razão de semelhança entre as medidas dos lados dos triângulos PRS e PTV, temos:

$$\frac{PR}{PT} = \frac{PS}{PV} \Rightarrow \frac{4}{4+8} = \frac{x}{18} \Rightarrow 12x = 4 \cdot 18 \Rightarrow x = \frac{72}{12} \Rightarrow x = 6$$

b) Como a razão de semelhança entre as medidas dos lados correspondentes dos triângulos PRS e PTV, nessa ordem, é $\frac{1}{3}$, concluímos que a razão entre suas medidas de área é $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, isto é, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{9}$.

Pense nisto

Qual é a razão entre a medida de área do trapézio $RSVT$ e a medida de área do triângulo PRS?

29. De acordo com as medidas de perímetro de T_1 e de T_2, concluímos que as medidas dos lados dos 2 triângulos são 2 cm e 8 cm, respectivamente. Se a razão entre as medidas dos lados é $\frac{8}{2} = 4$, então a razão entre as medidas de área é $4^2 = 16$.

ATIVIDADES

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

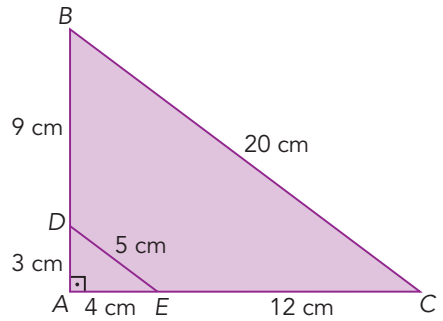
26. As medidas dos lados de um triângulo *ABC* são 5,2 cm, 6,5 cm e 7,3 cm. Seja *MNP* o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de *ABC*. No caderno, faça o que se pede a seguir.

a) Calcule a medida de perímetro de *MNP*. 9,5 cm

b) Prove que *MNP* é semelhante a *ABC*.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

27. Na figura $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Responda no caderno às perguntas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

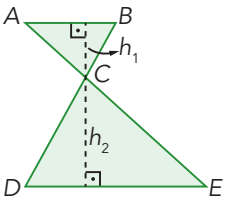
a) Qual é a razão de semelhança entre as medidas dos lados dos triângulos *ADE* e *ABC*, nessa ordem? $\frac{1}{4}$

b) Qual é a razão entre as medidas de perímetro dos triângulos *ADE* e *ABC*, nessa ordem? $\frac{1}{4}$

c) Qual é a razão entre as medidas de área dos triângulos *ADE* e *ABC*, nessa ordem? $\frac{1}{16}$

d) Se a medida de área do triângulo *ADE* é 6 cm², qual é a medida de área do triângulo *ABC*? 96 cm²

28. Na figura, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DE}$. Sabendo que $AB = 5$ cm, $h_1 = 3$ cm e $DE = 10$ cm, faça, no caderno, o que se pede.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Determine h_2. $h_2 = 6$ cm

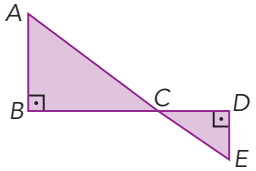
b) Calcule as medidas de área dos triângulos *ABC* e *CDE*. 7,5 cm² e 30 cm²

c) Mostre que a razão entre as medidas de área dos triângulos *ABC* e *CDE* é o quadrado da razão de semelhança.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

29. Os triângulos equiláteros T_1 e T_2 têm medidas de perímetro de 6 cm e 24 cm, respectivamente. Qual é a razão entre a medida de área de T_2 e a medida de área de T_1?

30. Na figura seguinte, $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$, $DE = 4$ cm e as medidas de área dos triângulos *ABC* e *EDC* são, respectivamente, 36 cm² e 4 cm². Quanto mede $\overline{AB}$? Responda no caderno.



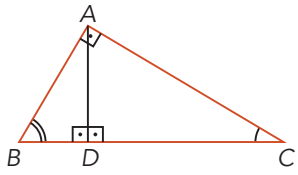
Banco de imagens/Arquivo da editora

30. Se a razão entre as medidas de área dos triângulos *ABC* e *EDC* é $\frac{36}{4} = 9 = k^2$, então a razão entre as medidas dos lados é $k = 3$. Assim, $\frac{AB}{DE} = 3 \Rightarrow \frac{AB}{4} = 3 \Rightarrow AB = 12$; ou seja, $AB = 12$ cm.

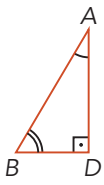
O triângulo retângulo

Todo triângulo retângulo tem, além do ângulo reto, 2 ângulos agudos complementares. O maior dos 3 lados do triângulo retângulo é o oposto ao ângulo reto e chama-se **hipotenusa**. Os outros 2 lados são chamados **catetos**.

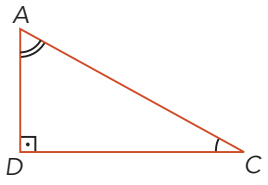
Traçando a altura $\overline{AD}$, relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo *ABC*, obtemos 2 outros triângulos retângulos: *DBA* e *DAC*. Acompanhe as figuras.



Os ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}D$ são complementares, ou seja, a soma das medidas deles é 90°.



O ângulo $B\hat{A}D$ é complementar do ângulo $A\hat{B}D$. Então, $B\hat{A}D \cong A\hat{C}D$.



O ângulo $D\hat{A}C$ é complementar do ângulo $A\hat{C}D$. Então, $D\hat{A}C \cong A\hat{B}D$.

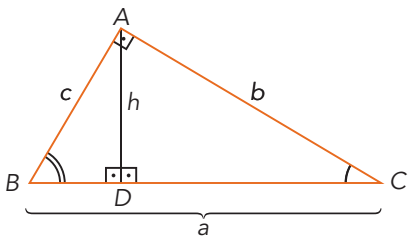
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

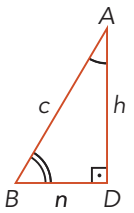
Reunindo as conclusões, constatamos que os triângulos *ABC*, *DBA* e *DAC* têm os respectivos ângulos correspondentes congruentes e, portanto, são semelhantes:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$$

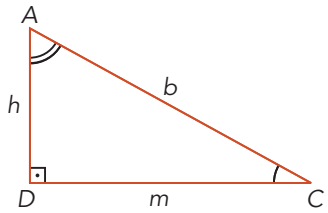
Relações métricas

Voltemos ao triângulo *ABC*, retângulo em $\hat{A}$, com a altura relativa à hipotenusa $\overline{AD}$. Os segmentos de reta $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$ são chamados de **projeções dos catetos sobre a hipotenusa**.





n: medida da projeção de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$.



m: medida da projeção de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Explorando a semelhança dos triângulos, temos:

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \quad \text{I}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \quad \text{II}$$

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{n}{h} = \frac{h}{m} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \quad \text{III}$$

Em qualquer triângulo retângulo, tem-se as relações métricas I, II e III.

- O quadrado da medida de um cateto é igual ao produto das medidas da hipotenusa e da projeção desse cateto sobre a hipotenusa, isto é:

$b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$

- O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos de reta que a altura determina na hipotenusa:

$$h^2 = m \cdot n$$

Das relações I, II e III, decorrem outras, dentre as quais vamos destacar duas.

Multiplicando membro a membro as relações I e II e depois usando a III, temos:

$$\left.\begin{matrix} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{matrix}\right\} \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot \underbrace{m \cdot n}_{\text{III}} \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot h^2 \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

- Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto das medidas da hipotenusa e da altura relativa a ela.

$$b \cdot c = a \cdot h$$

Adicionando membro a membro as relações I e II e considerando que $m + n = a$, temos:

$$\left.\begin{matrix} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{matrix}\right\} \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot \underbrace{(m + n)}_{a} \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

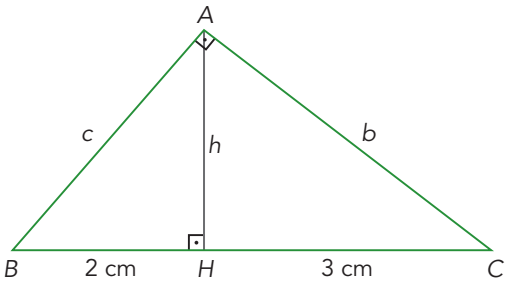
- Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Esta última relação é conhecida como **teorema de Pitágoras**.

Acompanhe o exemplo a seguir.

Conhecendo as medidas das projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa, é possível calcular as medidas dos catetos. Analise o triângulo no qual as projeções medem 2 cm e 3 cm.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro

Pense nisto

De que outro modo poderíamos ter calculado a medida do cateto $\overline{AC}$ do triângulo ABC?

Utilizando a relação métrica no triângulo retângulo:
$b^2 = a \cdot m \Rightarrow$
$\Rightarrow b^2 = (2 + 3) \cdot 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow b^2 = 15 \Rightarrow b = \sqrt{15}$.
Outra maneira também seria aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo ABC:
$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow b^2 + 10 = 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow b^2 = 15$; ou seja,
$b = \sqrt{15}$ cm.

Podemos calcular:

$$h^2 = m \cdot n = 2 \cdot 3 \Rightarrow h = \sqrt{6}$$

Usando a equação $c^2 = a \cdot n$ deduzida, temos:

$$c^2 = a \cdot n = (2 + 3) \cdot 2 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$$

Logo, o cateto $\overline{BA}$ mede $\sqrt{10}$.

No triângulo ACH, que é retângulo, temos:

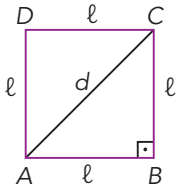
$$b^2 = h^2 + 3^2 = 6 + 9 = 15 \Rightarrow b = \sqrt{15}$$

Logo, o cateto $\overline{AC}$ mede $\sqrt{15}$ cm.

Aplicações notáveis do teorema de Pitágoras

Diagonal do quadrado

Vamos considerar um quadrado $ABCD$ cujo lado meça ℓ e calcular a medida da diagonal d em função de ℓ.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Aplicando o teorema de Pitágoras em qualquer um dos triângulos retângulos, temos:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2$$

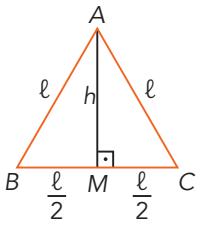
$$d = \ell\sqrt{2}$$

Assim, por exemplo, se o lado de um quadrado mede 10 cm, sua diagonal medirá $10\sqrt{2}$ cm (aproximadamente 14,1 cm).

Altura do triângulo equilátero

Vamos considerar um triângulo equilátero *ABC* cujo lado meça ℓ e expressar a medida de altura *h* em função de ℓ.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Aplicando o teorema de Pitágoras num dos triângulos retângulos, temos:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Assim, por exemplo, num triângulo equilátero com medida do lado 6 cm, a altura relativa a qualquer um dos lados mede $\frac{6\sqrt{3}}{2}$ cm $= 3\sqrt{3}$ cm (aproximadamente 5,2 cm).

História da Matemática

A origem da Geometria

É impossível estabelecer a origem da Geometria, que certamente ocorreu na Antiguidade.

Alguns historiadores apontam 3 fases de desenvolvimento da Geometria:

1ª) a **fase subconsciente**, em que o ser humano percebia as formas, tamanhos e relações espaciais, mas não conseguia estabelecer conexões para obter resultados gerais;

2ª) a **fase empírica**, em que o ser humano era capaz de estabelecer leis gerais, por meio de experimentações, por exemplo, para calcular medidas de área de figuras planas e medidas de volume de objetos;

3ª) a **fase demonstrativa**, iniciada no mundo ocidental pelos gregos, em que o ser humano adquiriu a capacidade de deduzir resultados por meio de raciocínios lógicos.

starline/Freepik

31. Pelo caso AA, os triângulos *ABE* e *CDE* são semelhantes. $\frac{6}{4} = \frac{x + (8 - x)}{8 - x} \Rightarrow 48 - 6x = 32 \Rightarrow 6x = 16 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

No triângulo *CDE*, temos: $y^2 = 4^2 + (8 - x)^2 = 4^2 + \left(8 - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{400}{9} \Rightarrow y = \frac{20}{3}$

Um dos matemáticos que pode ser associado à Geometria demonstrativa é Tales de Mileto (século VI a.C.), que provou a validade de algumas propriedades geométricas, entre elas as propriedades das transversais de um feixe de retas paralelas, que estudamos neste capítulo.

O aparecimento de teoremas sequenciados, em que cada um é demonstrado a partir dos anteriores, parece ter começado com Pitágoras de Samos (século VI a.C.), fundador de uma escola de pensadores.

Como os ensinamentos da escola pitagórica não foram documentados e eram transmitidos oralmente, não se sabe se as descobertas atribuídas a Pitágoras eram realmente dele ou dos discípulos.

Apesar do nome "teorema de Pitágoras", registros arqueológicos indicam que os babilônios já conheciam esse teorema por volta do século XVIII a.C., o que indica que Pitágoras não elaborou o teorema, mas pode ter sido o responsável pela divulgação e popularização dele no mundo ocidental.

Fonte dos dados: DOMINGUES, Hygino H. Tales. Pitágoras e a Geometria demonstrativa. *In*: DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos da Matemática Elementar*. v. 10. São Paulo: Atual Editora, 2013. PITÁGORAS NÃO É O AUTOR DO TEOREMA MATEMÁTICO QUE CARREGA SEU NOME, *Academia Brasileira de Ciências*. Disponível em: https://tedit.net/vc4n8p. Acesso em: 17 jul. 2024.

32. Sendo m a medida da projeção do cateto que mede $\sqrt{5}$ sobre a hipotenusa de medida y, temos:

a) $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 1^2 + m^2 \Rightarrow m = 2$

$\left(\sqrt{5}\right)^2 = m \cdot y \Rightarrow 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $3^2 = (x + 2) \cdot 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

$y^2 = (x + 2) \cdot x = \frac{45}{4} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

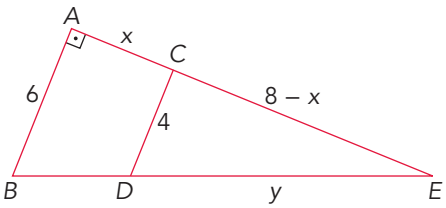
ATIVIDADES

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

31. Sabendo que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, determine os valores de x e y.

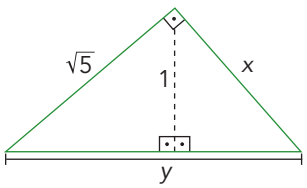
Banco de imagens/Arquivo da editora



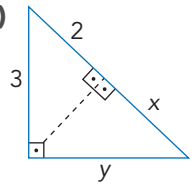
32. Determine os valores de x e y nas figuras a seguir.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a)

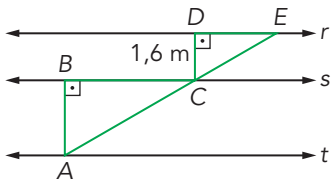


b)



33. A lateral dos 2 últimos desníveis de um palco foi projetada conforme representada na figura. Porém, um imprevisto na fase de construção fez com que a medida da extensão do penúltimo desnível fosse o dobro da medida da extensão do último.

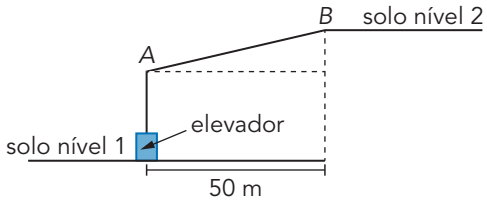
Banco de imagens/Arquivo da editora



Considerando as retas r, s e t paralelas e $AE = 6$ m, determine a medida da extensão de cada um desses desníveis. 2,4 m e 1,2 m.

34. Para vencer um desnível de 9 m entre 2 pisos de um *shopping*, foram construídos um elevador e uma rampa suave para possibilitar o acesso de usuários de cadeira de rodas e de pessoas com mobilidade reduzida, como mostra a imagem.

Banco de imagens/Arquivo da editora



O elevador sobe verticalmente 5 m, chegando ao ponto *A*. De *A*, inicia-se o percurso sobre a rampa de baixa inclinação até se chegar ao ponto *B*, no outro nível. Use uma calculadora para determinar a medida de comprimento aproximada da rampa, com aproximação de duas casas decimais depois da vírgula.

34. Aproximadamente 50,16 m.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão.

EXPERIMENTE

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Não escreva no livro

Determinar ternos pitagóricos com o auxílio de uma planilha eletrônica

Um triângulo retângulo é denominado "pitagórico" se as medidas dos lados são **ternos pitagóricos**, isto é, são números naturais não nulos, a, b e c, que satisfazem o teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$).

Se as medidas dos lados de um triângulo pitagórico não têm fator comum, ele será chamado de **triângulo pitagórico primitivo**.

Uma caracterização apresentada por Euclides (cerca de 300 a.C.) verificou que a, b e c determinam um terno pitagórico se $a = x^2 + y^2$, $b = x^2 - y^2$ e $c = 2xy$, em que x e y são números naturais não nulos e $x > y$.

Vamos determinar ternos pitagóricos com o auxílio de uma planilha eletrônica, usando a caracterização apresentada por Euclides da seguinte maneira:

- na célula A1, digite um número natural não nulo (x) e pressione a tecla *Enter*;
- na célula B1, digite um número natural não nulo (y), tal que $x > y$, e pressione a tecla *Enter*;
- na célula C1, digite `=A1^2+B1^2` (que corresponde a $a = x^2 + y^2$) e pressione a tecla *Enter*;
- Na célula D1, digite `=A1^2−B1^2` (que corresponde a $b = x^2 - y^2$) e pressione a tecla *Enter*;
- na célula E1, digite `=2*A1*B1` (que corresponde a $c = 2xy$) e pressione a tecla *Enter*.

Observação

Vamos relembrar que, numa planilha eletrônica, o primeiro elemento do nome de uma célula indica a coluna onde ela está localizada e o segundo, a linha. Desse modo, a célula A1 está localizada na coluna **A**, linha **1**, e D4 está na coluna **D**, linha **4**.

Você pode usar gratuitamente a planilha eletrônica LibreOffice Calc, parte integrante do pacote LibreOffice, disponível em https://tedit.net/v6ef48 (acesso em: 7 jul. 2024), mas existem outros *softwares* com funções de planilha eletrônica.

Assim, o *software* apresenta um terno pitagórico nas células C1, D1 e E1.

Para conhecer outros ternos pitagóricos, preencha as células das colunas **A** e **B** com valores x e y, naturais não nulos, tais que $x > y$. Depois, selecione as células C1, D1 e E1, clique no canto inferior direito (alça de preenchimento) da célula E1 e arraste o cursor até a linha desejada. Desse modo, o *software* preenche automaticamente as células das colunas **C**, **D** e **E** com ternos pitagóricos em cada linha.

- Agora, com o auxílio de uma planilha eletrônica, calcule um terno pitagórico em que um dos números seja 312.

Ao digitar, nas colunas **A** e **B**, respectivamente, os números 13 e 12, a planilha retoma o terno pitagórico 313, 25 e 312.

$13^2 + 12^2 = 313$

$13^2 - 12^2 = 25$

$2 \cdot 13 \cdot 12 = 312$

35. d) $6^2 = (3\sqrt{3})^2 + \left\{\frac{[10 - (x + 2)]}{2}\right\}^2 \Rightarrow x^2 - 16x + 28 = 0 \Rightarrow x = 14$ (não serve, pois a medida da base menor seria 16) ou $x = 2$; logo, $x = 2$ cm.

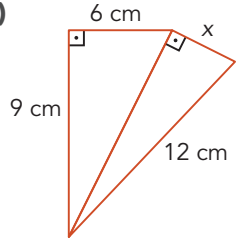
ATIVIDADES

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

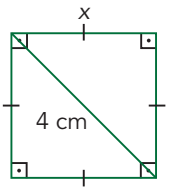
35. Determine no caderno o valor de x em cada caso.

a)



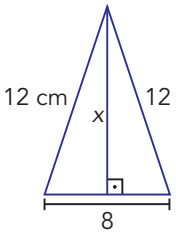
Seja ℓ a medida da hipotenusa do triângulo de catetos com medidas 6 cm e 9 cm. Então, $\ell^2 = 6^2 + 9^2 = 117$, e, no triângulo cuja hipotenusa mede 12 cm, temos $12^2 = x^2 + \ell^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 = 144 - 117 = 27 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 3\sqrt{3}$; logo $x = 3\sqrt{3}$ cm.

b)



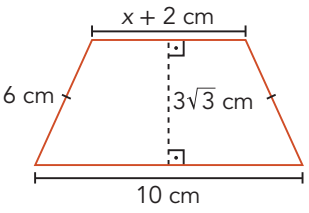
$x^2 + x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 2\sqrt{2}$; logo, $2\sqrt{2}$ cm.

c)



$x^2 + 4^2 = 12^2 \Rightarrow x^2 = 128 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 8\sqrt{2}$; logo $8\sqrt{2}$ cm.

d)

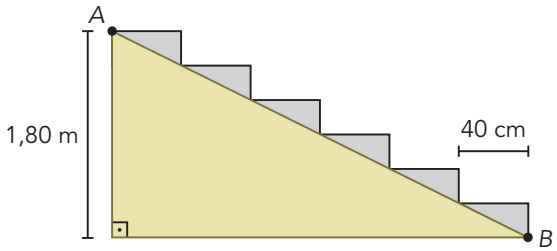


36. Medida dos catetos: $2\sqrt{6}$ cm e $2\sqrt{10}$ cm; medida da altura relativa à hipotenusa: $\sqrt{15}$ cm.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

36. Quais são as medidas dos catetos e da altura relativa à hipotenusa de um triângulo sabendo que essa altura determina, sobre a hipotenusa, segmentos de reta com medidas 3 cm e 5 cm?

37. A imagem mostra o perfil de uma escada, composta de 6 degraus idênticos, cada um com largura de medida 40 cm. A medida de distância do ponto mais alto da escada ao solo é 1,80 m. Qual é a medida do segmento de reta $\overline{AB}$? Resolva no caderno.



Banco de imagens/Arquivo da editora

38. Saindo de um ponto O, um robô caminha, em linha reta e sucessivamente, 10 m na direção sul; 3 m na direção leste; 6 m na direção norte; e, de lá, retorna em linha reta ao ponto de partida. Quantos metros o robô percorreu ao todo? Responda no caderno. 24 m

39. Em certo trecho de um rio, as margens são paralelas. Ali, a medida de distância entre 2 povoados situados na mesma margem é 3000 m. Esses povoados distam igualmente de um farol, situado na outra margem do rio. Sabendo que a largura do rio é 2 km, determine a medida de distância do farol a cada um dos povoados. 2,5 km

40. No portão retangular da casa de Horácio, foi necessário colocar, diagonalmente, um reforço de madeira (ripa) com 3 m de medida de comprimento. Sabendo que a medida da altura do portão excede em 60 cm a medida da base desse portão, determine no caderno as medidas das dimensões desse portão.
Medida da base: 1,8 m; medida da altura: 2,4 m.

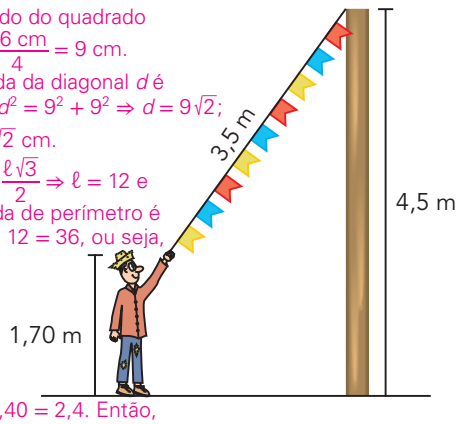
41. A medida de perímetro de um quadrado é 36 cm. Qual é a medida da diagonal desse quadrado? Responda no caderno.

42. A medida da altura de um triângulo equilátero é $6\sqrt{3}$ m. Qual é a medida de perímetro desse triângulo? Responda no caderno.

43. Para ajudar na decoração de uma festa da cidade, Paulo esticou completamente um fio de bandeirinhas, com 3,5 m de medida, até o topo de um poste com 4,5 m de medida da altura. Sabendo que Paulo tem 1,70 m de medida da altura, determine no caderno a medida da distância entre a mão que segura o fio e o poste.

41. O lado do quadrado mede $\frac{36 \text{ cm}}{4} = 9$ cm.
A medida da diagonal d é tal que $d^2 = 9^2 + 9^2 \Rightarrow d = 9\sqrt{2}$; logo, $9\sqrt{2}$ cm.

42. $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = 12$ e a medida de perímetro é $3\ell = 3 \cdot 12 = 36$, ou seja, 36 m.



Zapt/Arquivo da editora

37. A base do triângulo de hipotenusa $\overline{AB}$ tem medida 2,4 m, pois $6 \cdot 0{,}40 = 2{,}4$. Então, $(AB)^2 = (2{,}4)^2 + (1{,}8)^2 = 9 \Rightarrow AB = 3$; ou seja, $AB = 3$ m

44. Dois grupos de turistas partem simultaneamente da entrada do hotel em que estão hospedados. O primeiro grupo segue na direção leste, rumo a um monumento distante 800 m do ponto de partida. O segundo parte na direção norte, rumo a um museu situado a 1000 m do ponto de partida. Responda, no caderno, às perguntas.

a) Qual é, em linha reta, a medida de distância, em metros, entre o monumento e o museu? Aproximadamente 1 280 m.

b) Supondo que os 2 grupos caminhem a uma velocidade constante de 2 km/h, qual é a medida de distância, em metros, entre os 2 grupos 15 minutos após a partida? Aproximadamente 707 m.

pauloalberto82/Shutterstock

Paraty, Rio de Janeiro. Foto de 2023.

45. **Troque ideias** com um colega sobre a seguinte situação.

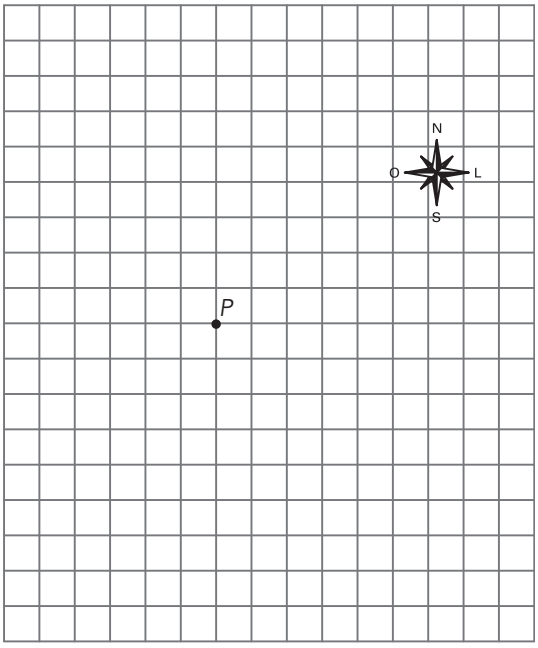
A malha quadriculada seguinte representa um esquema das ruas de certo bairro. Nela, cada quadradinho tem lado medindo 100 m. Além disso, há uma rosa dos ventos para indicar os pontos cardeais.

Duas pessoas partiram do ponto *P* e seguiram trajetórias distintas.

Pessoa 1: percorreu 800 m para o norte, 500 m para o leste, 400 m para o sul e 200 m para oeste e parou num ponto *A*.

Pessoa 2: percorreu 500 m para o sul, virou à direita e percorreu 200 m; virou à esquerda e percorreu 300 m; virou à esquerda e percorreu 800 m; parou num ponto *B*.

Sobre as situações descritas, responda no caderno às perguntas. Se necessário, copie a malha quadriculada e desenhe os percursos descritos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual é a medida de distância entre o ponto *A* e o ponto *P*? 500 m

b) Qual é a medida de distância entre o ponto *P* e o ponto *B*? 1 000 m

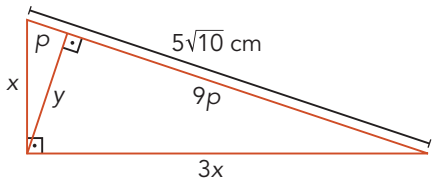
c) Qual das informações apresentadas foi mais fácil de ser entendida? Qual é a diferença entre os referenciais utilizados? Resposta pessoal. O referencial utilizado para a pessoa 1 (rosa dos ventos) é fixo, enquanto o referencial utilizado para a pessoa 2 muda conforme a posição onde ela se encontra.

46. Ao resolver um problema sobre triângulos retângulos, um estudante produziu, corretamente, a figura a seguir. Elabore e resolva no caderno um problema associado a tal figura. Em seguida, troque de caderno com um colega para que ele resolva o problema que você elaborou e você resolva o dele.

Exemplo de resposta: Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede $5\sqrt{10}$ cm e um dos catetos mede o triplo do outro. Sabendo que a altura relativa à hipotenusa determina sobre ela segmentos de reta cujas medidas estão na razão 9 : 1, calcule:

a) as medidas dos catetos;

b) a medida da altura relativa à hipotenusa.



As imagens não estão representadas em proporção.

Banco de imagens/Arquivo da editora

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Mural *Todos somos um (Etnias)*, do artista brasileiro Eduardo Kobra, localizado na zona portuária do Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2016. O mural ocupa 3 mil metros quadrados de medida de área.

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Diversidade Cultural*.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Arte, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

Arte e Matemática

Com obras em 5 continentes, o artista brasileiro Eduardo Kobra (1975–) é um dos muralistas mais reconhecidos da atualidade. Algumas de suas obras detêm recordes, no *Guinness book*, o livro dos recordes, de maiores murais grafitados do mundo. É o caso, por exemplo, do mural da fotografia, que foi inaugurado antes dos Jogos Olímpicos Rio 2016.

Para que a confecção desse mural fosse concluída antes dos Jogos Olímpicos, Kobra e a equipe trabalharam 12 horas por dia durante 2 meses, usando 3 mil latas de *spray* e 2 500 litros de tinta. O desenho, fruto de uma profunda pesquisa sobre povos nativos ao redor do globo, foi inspirado na união transmitida pelos 5 anéis olímpicos, exibindo a imagem de representantes de tribos nativas dos 5 continentes: os *huli* (Oceania), os *mursi* (África), os *kayin* (Ásia), os *supi* (Europa) e os Tapajó (Américas).

As obras de Eduardo Kobra são conhecidas pelas formas geométricas marcadas por cores fortes e revelam a preocupação do artista com causas ambientais, como o combate à pesca predatória, e causas sociais, como a luta contra a violência, pela disseminação de uma cultura de paz pelo mundo. Além disso, já retratou grandes personalidades, como o ativista norte-americano Martin Luther King (1929–1968), a ativista paquistanesa Malala Yousafzai (1997–), o arquiteto Oscar Niemeyer (1907–2012) e o músico Chico Buarque (1944–).

Fonte dos dados: BIOGRAFIA. Eduardo Kobra, [*s. l.*], [20–]. Disponível em: https://tedit.net/oqxnc8. Acesso em: 3 jul. 2024.

1. Você conhece algum dos murais desse artista? Resposta pessoal.

2. Por que você acha que o mural *Todos somos um (Etnias)* tem esse nome?

3. Na abertura do capítulo apresentamos uma técnica utilizada por artistas, e o Eduardo Kobra é um desses artistas. Utilize essa técnica e amplie um desenho de sua preferência utilizando um papel quadriculado ou uma folha de papel A4. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal. O artista propõe o olhar para a união dos povos, na ocasião dos Jogos Olímpicos, por meio das etnias retratadas no mural.

capítulo

7 Trigonometria no triângulo retângulo

Razões trigonométricas

Neste capítulo, antes de iniciar o estudo da Trigonometria no triângulo retângulo, vamos conhecer um pouco da história do desenvolvimento dessa importante área da Matemática.

As imagens não estão representadas em proporção.

História da Matemática

A Trigonometria

O significado da palavra **trigonometria** (do grego, *trigonon*, que significa "triângulo", e *metron*, "medida") nos remete ao estudo dos ângulos e lados dos triângulos, figuras básicas em qualquer estudo de Geometria.

Em um contexto mais amplo, a Trigonometria se aplica à resolução de problemas geométricos que relacionam ângulos e distâncias. A origem desses problemas nos leva a civilizações antigas do Mediterrâneo, especificamente à egípcia, que já conhecia regras simples de mensuração e demarcação de linhas divisórias de terrenos nas margens dos rios. Registros encontrados no Egito, datados de 1500 a.C., indicam medições de ângulos e segmentos de reta feitas por meio do gnômon sobre uma mesa graduada.

Adz K/Shutterstock

Gnômon.

Um dos primeiros instrumentos conhecidos para medir ângulos, chamado groma, também seria conhecido pela civilização egípcia, que o teria empregado na construção das três grandes pirâmides de Gizé.

SSPL/Getty Images

Groma.

A "primeira versão" do aparelho utilizado atualmente por agrimensores e engenheiros para a medição de ângulos, o teodolito, surgiu no século XVI.

Durante muito tempo, a Trigonometria esteve ligada à Astronomia, devido à dificuldade natural em estimar e calcular medidas de distância impossíveis de medir diretamente. Nesse cenário, a civilização grega, dando continuidade aos trabalhos dos babilônios, fez importantes contribuições, como as estimativas das medidas de distância entre o Sol e a Terra e entre a Terra e a Lua, realizadas por Aristarco (310 a.C.–230 a.C.), por volta de 260 a.C. – ainda que os números encontrados por ele estivessem muito longe dos valores modernos –, e a estimativa da medida do raio da Terra, feita por Eratóstenes (aproximadamente entre 275 a.C.–194 a.C.), por volta de 200 a.C.

Billion Photos/Shutterstock

O teodolito é um instrumento de medição de ângulos verticais e horizontais.

No entanto, o primeiro estudo sistemático das relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e o comprimento da corda correspondente, que resultou na primeira tabela trigonométrica, é atribuído a Hiparco de Niceia (por volta de 180 a.C.–125 a.C.).

Somente no século XVIII, com a invenção do cálculo infinitesimal, a Trigonometria desvinculou-se da Astronomia, passando a ser um ramo independente e em desenvolvimento da Matemática.

Fonte dos dados: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010. KENNEDY, Edward S. *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

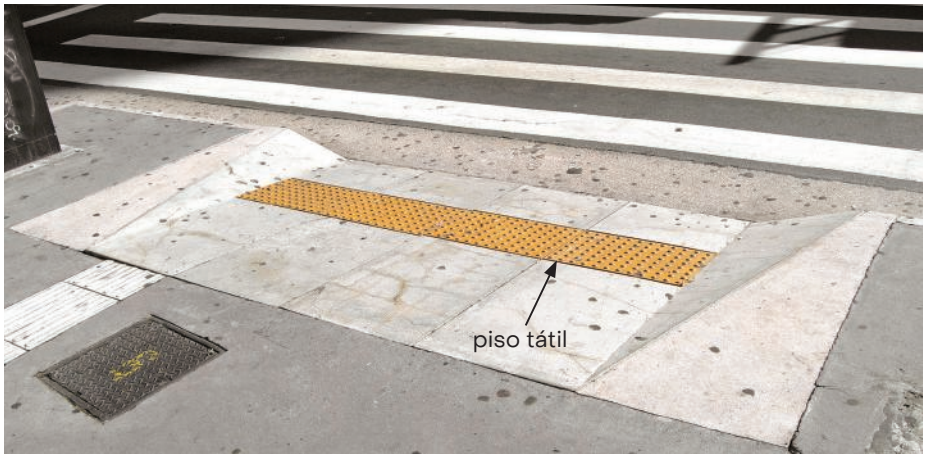
Introdução

Na abertura desta Unidade, você pôde perceber que, quando se quer vencer um desnível entre duas superfícies planas e facilitar o deslocamento de cadeirantes, pessoas com mobilidade reduzida, carrinhos de bebê, malas, etc., a rampa é uma boa alternativa, já que garante circulação mais ágil e não requer tanta atenção no deslocamento se comparada a uma escada.

Dica

Vídeo
Acessibilidade: os desafios do cadeirante em SP

Veiculado pelo canal VivaBem, o jornalista Fernando Rocha acompanha a locomoção da também jornalista Célia Correa, cadeirante, pelas ruas do centro de São Paulo (SP), num dia comum de trabalho. Vídeo (7 min 54 s). Disponível em: https://tedit.net/h9ppp3. Acesso em: 4 jul. 2024.

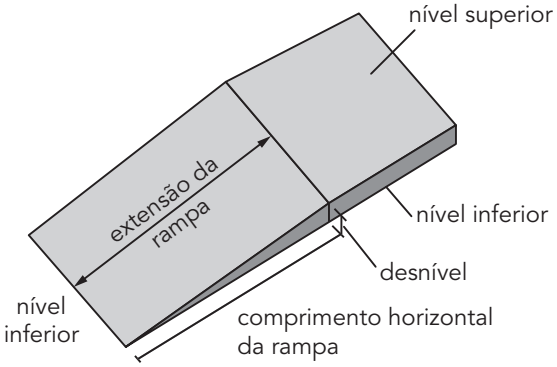


Daniel Cymbalista/Pulsar Imagens

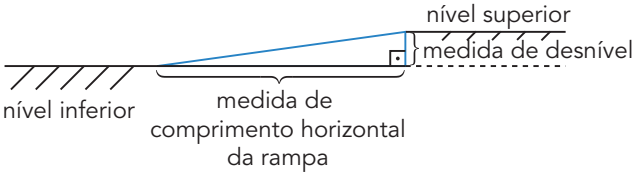
Rampa de baixa inclinação com piso tátil.

Algumas normas regulamentam a declividade de uma rampa em 8,33%. Mas o que isso significa?

A **declividade** de uma rampa é a razão entre a medida do desnível a ser vencido e a medida de comprimento horizontal da rampa. Analise as imagens a seguir.



Rampa em perspectiva.



Rampa em vista lateral.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pode-se pensar na declividade de uma rampa como a razão entre a medida de deslocamento vertical e a medida de deslocamento horizontal experimentados ao caminhar sobre a rampa.

$$\text{declividade} = \frac{\text{medida do desnível}}{\text{medida de comprimento horizontal da rampa}} = \frac{\text{medida de deslocamento vertical}}{\text{medida de deslocamento horizontal}}$$

Caso os estudantes apresentem dificuldade na compreensão dessa relação, construa com eles alguns exemplos: 1 cm de medida do desnível corresponde a um comprimento de rampa medindo 20 · (1 cm) = 20 cm de medida de comprimento horizontal da rampa; 2 cm de medida do desnível: 20 · (2 cm) = 40 cm de medida de comprimento horizontal da rampa; 3 cm de medida do desnível: 20 · (3 cm) = 60 cm de medida de comprimento horizontal da rampa, etc.

Vamos trabalhar inicialmente com um exemplo simples: uma declividade de 5%.

$$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

Isso significa que, para cada 1 cm (ou 1 dm, ou 1 m, ...) de medida do desnível a ser vencido, é necessário um comprimento horizontal de rampa medindo 20 cm (ou 20 dm, ou 20 m, ...).

Por exemplo, para vencer um desnível que mede 80 cm, uma rampa com declividade de 5% deverá ter 20 · (80 cm) = 1600 cm = 16 m de medida de comprimento horizontal.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Representação de rampa com declividade de 5%.

As ideias apresentadas sobre declividade de uma rampa motivam a definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo, iniciando pela tangente.

Observação

Se a rampa tem declividade de 100%, para cada 1 cm de medida de desnível a ser vencido, é necessário um comprimento horizontal de rampa medindo 1 cm, ou seja, o deslocamento vertical e o deslocamento horizontal são iguais.

Tangente de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo $\hat{A}$ é dada pela razão entre a medida do cateto oposto a $\hat{A}$ e a medida do cateto adjacente a $\hat{A}$.

Relembre com os estudantes que ângulo agudo é aquele que tem medida maior do que 0° e menor do que 90°.

Simplificamos indicando a tangente do ângulo $\hat{A}$ apenas por tan $\hat{A}$.

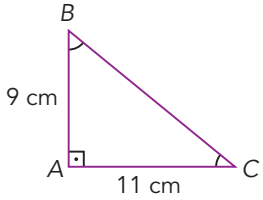
$$\tan \hat{A} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{A}}{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{A}}$$

As imagens não estão representadas em proporção.

Considere o exemplo a seguir.

Comente com os estudantes que pode-se encontrar em outras fontes a sigla "tg" para indicar tangente.

Seja o triângulo ABC retângulo em A, cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem 9 cm e 11 cm, respectivamente.



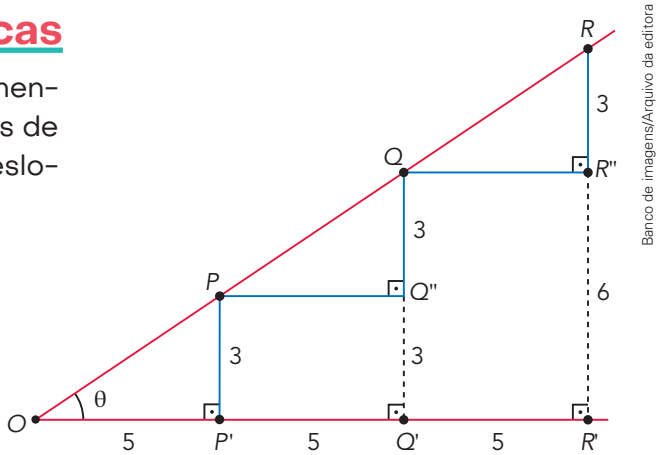
Banco de imagens/Arquivo da editora

Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são agudos (o cateto $\overline{AB}$ é oposto a $\hat{C}$ e adjacente a $\hat{B}$ e o cateto $\overline{AC}$ é oposto a $\hat{B}$ e adjacente a $\hat{C}$). Daí:

$$\tan \hat{B} = \frac{11 \text{ cm}}{9 \text{ cm}} = \frac{11}{9} \text{ e } \tan \hat{C} = \frac{9 \text{ cm}}{11 \text{ cm}} = \frac{9}{11}$$

Tabela de razões trigonométricas

Na figura **A**, notamos que a cada deslocamento horizontal (à direita) medindo 5 u.c. (unidades de medida de comprimento) corresponde um deslocamento vertical (para cima) medindo 3 u.c.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Figura **A**.

Não escreva no livro

Pense nisto

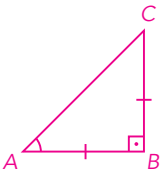
Supondo que o triângulo ROR' seja o perfil de uma rampa, qual é a declividade dessa rampa?

$\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}60 = 60\%$

A figura **A** indica a invariância da tangente do ângulo de medida θ por meio da semelhança entre triângulos ($\triangle OPP' \sim \triangle OQQ' \sim \triangle ORR' \sim \ldots$).

$$\begin{cases} \triangle OPP': \tan\theta = \dfrac{3}{5} \\ \triangle OQQ': \tan\theta = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} \\ \triangle ORR': \tan\theta = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Pense nisto: Considere um triângulo ABC retângulo em $\hat{B}$, com cateto $\overline{AB}$ paralelo ao plano do chão e cateto $\overline{BC}$ perpendicular ao mesmo plano.



Como $AB = BC$, o triângulo ABC é retângulo e isósceles, conclui-se que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes. Logo, $\text{med}(C\hat{A}B) = \text{med}(A\hat{C}B) = 45°$.

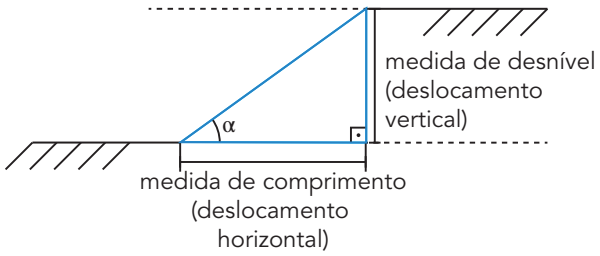
Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, o valor de tan θ é sempre o mesmo, independentemente do triângulo retângulo considerado.

A cada ângulo agudo, corresponde um único valor da respectiva tangente. No final deste Volume, há uma **tabela de razões trigonométricas**. Ela traz os valores aproximados das tangentes e de outras razões trigonométricas, que serão estudadas a seguir.

Retomando o exemplo sobre a rampa: em geral, rampas com declividade maior do que 8,33% não são consideradas acessíveis. Vamos calcular a medida do ângulo máximo determinado por uma rampa em relação à horizontal para ser considerada acessível.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Pense nisto

Imagine que uma rampa tenha a declividade de 100%. Qual seria a medida do ângulo de inclinação dessa rampa?

Chamando de α a medida do ângulo máximo, devemos ter tan $\alpha = 8{,}33\% = 0{,}0833$. Procuramos, no corpo da tabela de razões trigonométricas, o valor mais próximo de 0,0833 na coluna "Tangente", que é o valor 0,08749, correspondente ao ângulo de medida 5°.

Assim, o ângulo máximo determinado por uma rampa em relação à horizontal para ser considerada acessível mede aproximadamente 5°.

Seno e cosseno de um ângulo agudo

Na situação da figura **A** do tópico "Tabela de razões trigonométricas", qual seria, sobre a rampa, o deslocamento (d) correspondente a um deslocamento horizontal de 5 u.c.? Usando o teorema de Pitágoras:

$$(OP)^2 = d^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow d = \sqrt{34} \simeq 5{,}83$$

Fixado o ângulo de medida θ, a cada 5 u.c. de deslocamento horizontal (ou a cada 3 u.c. de deslocamento vertical) corresponde um deslocamento, sobre a rampa, de $\sqrt{34}$ u.c. Podemos também relacionar essas grandezas por meio das seguintes razões.

- $\dfrac{3}{\sqrt{34}}$ exprime a razão entre as medidas do deslocamento vertical e do deslocamento sobre a rampa.
- $\dfrac{5}{\sqrt{34}}$ exprime a razão entre as medidas do deslocamento horizontal e do deslocamento sobre a rampa.

A primeira razão recebe o nome de **seno de θ** e é indicada por $\text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$.

A segunda razão recebe o nome de **cosseno de θ** e é indicada por $\cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$.

Se necessário, desenhe na lousa um triângulo ABC, retângulo em B e com ângulo agudo $\hat{C}$ de medida θ, e destaque a hipotenusa do triângulo $(\overline{AC})$, o cateto oposto ao ângulo de medida θ $(\overline{AB})$ e o cateto adjacente ao ângulo de medida θ $(\overline{BC})$.

De modo geral, num triângulo retângulo, definimos o seno e o cosseno de cada um dos ângulos agudos.

- O seno de um ângulo agudo de medida θ é dado pela razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}$$

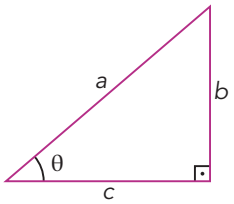
- O cosseno de um ângulo agudo de medida θ é dado pela razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\cos\theta = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Considerando θ a medida do ângulo agudo assinalado no triângulo, temos que:

As imagens não estão representadas em proporção.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{c}{a}$$



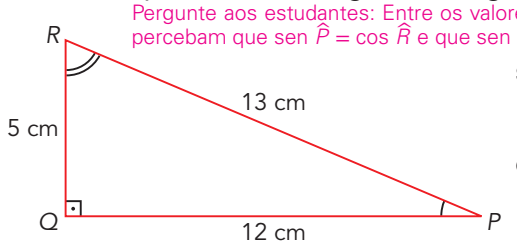
Medida da hipotenusa: a.
Medida dos catetos: b e c.

Banco de imagens/Arquivo da editora

As razões seno, cosseno e tangente não são expressas em unidade de medida, pois o quociente entre as medidas de 2 segmentos de reta (na mesma unidade) é um número real.

Por exemplo, neste triângulo retângulo, notamos que:

Pergunte aos estudantes: Entre os valores sen $\hat{P}$, cos $\hat{P}$, sen $\hat{R}$ e cos $\hat{R}$, quais são iguais? Espera-se que eles percebam que sen $\hat{P}$ = cos $\hat{R}$ e que sen $\hat{R}$ = cos $\hat{P}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

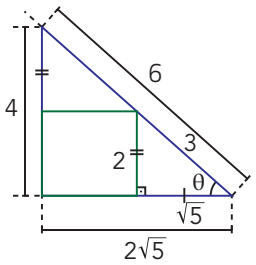
$$\operatorname{sen}\hat{P} = \frac{5\text{ cm}}{13\text{ cm}} = \frac{5}{13} \text{ e } \operatorname{sen}\hat{R} = \frac{12\text{ cm}}{13\text{ cm}} = \frac{12}{13}$$

$$\cos\hat{P} = \frac{12\text{ cm}}{13\text{ cm}} = \frac{12}{13} \text{ e } \cos\hat{R} = \frac{5\text{ cm}}{13\text{ cm}} = \frac{5}{13}$$

Também são invariantes o seno e o cosseno de determinado ângulo, independentemente do triângulo retângulo tomado, porque cada uma das razões tem sempre o mesmo valor.

Note que:

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \ldots$
- $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \ldots$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Por isso, a tabela de razões trigonométricas apresenta também um único valor para o seno (e para o cosseno) de determinado ângulo agudo.

Vamos considerar, por exemplo, um ângulo de medida $\theta = 40°$. Na tabela de razões trigonométricas, verificamos que:

tan 40° = 0,83910 sen 40° = 0,64279 cos 40° = 0,76604

Esses valores são aproximados, contêm arredondamentos e, eventualmente, dependendo do problema, podem ser arredondados ainda mais.

Além da tabela, é possível obter as razões trigonométricas de um ângulo agudo com uma calculadora científica.

O primeiro passo é configurá-la para a medida do ângulo ser expressa em graus. Para isso, certifique-se de estar usando a função **DEG**. Essa abreviação vem do inglês *degree*, que significa "grau". Em geral, as calculadoras utilizam o grau como padrão.

- Para saber o valor de tan 40°, pressionamos as teclas:

Comente com os estudantes que algumas calculadoras científicas não têm a tecla com o sinal de igual e que, nesse caso, devemos apertar a tecla OK.

Obtemos o valor aproximado tan 40° = 0,839099631.

- Para conhecer o valor de sen 40°, pressionamos as teclas:

Obtemos o valor aproximado sen 40° = 0,642787610. A abreviação "SIN" vem do inglês *sine*, que significa seno.

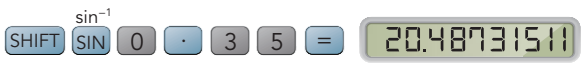
- Para obter o valor de cos 40°, pressionamos:

Obtemos o valor aproximado cos 40° = 0,766044443.

Com a calculadora científica, podemos também determinar a medida de um ângulo agudo conhecendo uma das razões trigonométricas.

Acima da tecla $\overset{\sin^{-1}}{\text{SIN}}$, aparece a opção $\sin^{-1}$, que corresponde à segunda função dessa tecla. Essa opção é ativada, em geral, por meio da tecla SHIFT.

Assim, por exemplo, se quisermos saber qual é o ângulo agudo cujo seno vale 0,35, basta pressionar estas teclas:



Aparece no visor o número 20,48731511. Isso significa que o ângulo pedido mede aproximadamente 20,5°, isto é, 20° 30'.

Note que a calculadora fornece o ângulo com uma precisão muito maior do que a tabela, pois na tabela aparecem apenas valores inteiros em graus.

Para sabermos qual é o ângulo agudo cuja tangente vale 2,5, fazemos assim.

Aparece no visor o número 68,19859051, que significa que o ângulo mede aproximadamente 68,2°, ou seja, 68° 12'.

Não escreva no livro

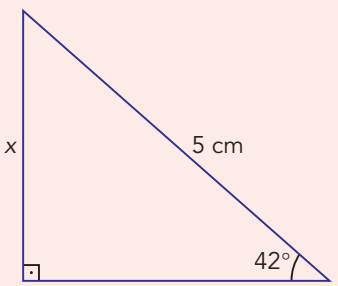
Pense nisto

Por que 68,2° = 68° 12'?

Atividades resolvidas

Pense nisto: O minuto e o segundo são submúltiplos do grau tal que: 1° = 60' (60 minutos) e 1' = 60" (60 segundos). Daí: 0,2° = 0,2 · 60' = 12'.

1. Determine o valor de x na figura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

O cateto de medida x é o cateto oposto ao ângulo de medida 42°, e 5 cm é a medida da hipotenusa. Desse modo, vamos usar a razão seno.

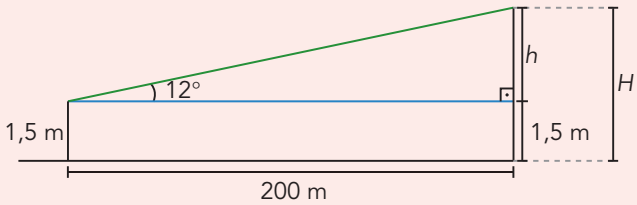
$$\text{sen } 42° = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 5 \cdot \text{sen } 42°$$

Consultando a tabela de razões trigonométricas ou usando uma calculadora científica, obtemos o valor de sen 42° ≃ 0,66913.

Assim, $x \simeq 5 \cdot 0{,}66913 \simeq 3{,}35$; ou seja, $x \simeq 3{,}35$ cm.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Uma mulher, cujos olhos estão a 1,5 m do solo, avista, sob um ângulo de medida 12°, o topo de um edifício que se encontra a 200 m dela. Qual é a medida da altura aproximada do edifício?



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

Analise o esquema que ilustra a situação descrita anteriormente. Nesse triângulo retângulo, temos:

$$\tan 12° = \frac{h}{200} \Rightarrow h = 200 \cdot \tan 12°$$

Consultando a tabela de razões trigonométricas ou usando uma calculadora científica, encontramos $\tan 12° \simeq 0{,}21256$. Temos, então, $h \simeq 200 \cdot 0{,}21256 = 42{,}512$ e $H \simeq 42{,}512 + 1{,}5 \simeq 44$.

A medida aproximada da altura do edifício (H) é 44 m.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, sempre que necessário as atividades podem ser realizadas em duplas, de modo a promover a inclusão.

ATIVIDADES

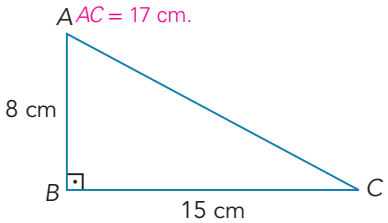
As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

Use a tabela de razões trigonométricas ou uma calculadora científica sempre que necessário.

1. Determine o que se pede em relação à figura a seguir.

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow AC = \sqrt{289} = 17$; ou seja, $AC = 17$ cm.



Banco de imagens/Arquivo da editora

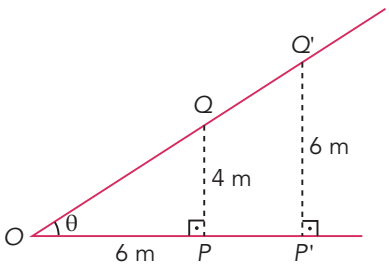
$\text{sen } \hat{A} = \frac{15}{17}$; $\cos \hat{A} = \frac{8}{17}$; $\tan \hat{A} = \frac{15}{8}$.

a) sen $\hat{A}$, cos $\hat{A}$ e tan $\hat{A}$.

b) sen $\hat{C}$, cos $\hat{C}$ e tan $\hat{C}$.

$\text{sen } \hat{C} = \frac{8}{17}$; $\cos \hat{C} = \frac{15}{17}$; $\tan \hat{C} = \frac{8}{15}$.

2. Analise a figura a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Determine:

a) tan θ;

a) $\triangle QOP$: $\tan \theta = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

b) $\triangle Q'OP'$: $\tan \theta = \frac{P'Q'}{OP'} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{6}{OP'} \Rightarrow$
$\Rightarrow OP' = 9$; ou seja, $OP' = 9$ m.

b) a medida de distância de O a P'.

3. Numa folha de papel, elabore e resolva mais de uma questão envolvendo um triângulo retângulo PQR com ângulo reto em Q, tal que $\cos \hat{P} = \frac{4}{5}$ e $QR = 4$ cm. Em seguida, troque com um colega os problemas elaborados para resolvê-los.

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

4. Usando régua e transferidor, represente no caderno um triângulo retângulo com um dos ângulos agudos medindo 30°. Em seguida, meça os lados desse triângulo e, com aproximação de 3 casas decimais, calcule o valor numérico de:

a) sen 30° **b)** cos 30° **c)** tan 30°

- **Troque ideias** com um colega: Os resultados foram exatamente iguais ou houve diferença em alguma(s) casa(s) decimal(is)?
- Em caso de diferença, elabore hipóteses sobre o motivo que levou a essa diferença.

Respostas pessoais.

5. Um observador avista o topo de um obelisco de 120 m de medida da altura sob um ângulo de medida 27° com o chão de um terreno. Considere desprezível a medida da altura do observador e que o observador e o obelisco estão em um mesmo terreno plano e horizontal.

a) A que medida de distância da base do obelisco o observador se encontra? Use os valores sen 27° ≃ 0,45; cos 27° ≃ 0,9; e tan 27° ≃ 0,5. 240 m

4. a) O estudante deve encontrar um valor próximo ao da tabela de razões trigonométricas: sen 30° = 0,500.
b) O estudante deve encontrar um valor próximo ao da tabela de razões trigonométricas: cos 30° = 0,866.
c) O estudante deve encontrar um valor próximo ao da tabela de razões trigonométricas: tan 30° = 0,577.

13. Resposta esperada: Como a hipotenusa corresponde ao lado de maior medida em um triângulo retângulo, a razão associada ao seno ou ao cosseno está necessariamente entre 0 e 1. Para a razão associada à tangente, pode ocorrer de o cateto oposto medir mais ou menos (ou até ter a mesma medida) do que o adjacente, de modo que a tangente possa assumir qualquer valor real positivo.

Não escreva no livro

b) Aproximando-se 100 m do obelisco, em linha reta, o observador passa a mirar o topo do obelisco sob um ângulo de medida α com o chão. Determine α. $\alpha = 41°$

6. Um barco atravessa um rio de largura medindo 97 m num trecho em que as margens são paralelas. Devido à correnteza, segue uma direção que determina um ângulo de medida 76° em relação à margem de partida. Qual é a medida de distância percorrida pelo barco? Aproximadamente 100 m.

Enunciado prévio para as atividades **7** a **9**.

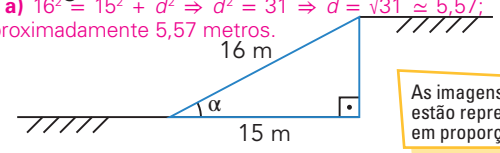
As normas de acessibilidade de determinada cidade estabelecem que a declividade (razão entre a medida do deslocamento vertical e a medida do deslocamento horizontal) máxima aceitável para uma rampa é de 8,33%.

7. Um arquiteto desenvolveu um projeto de uma rampa para vencer um desnível que mede 3,2 m entre 2 pisos. Para respeitar essa norma, qual deverá ser a medida de comprimento horizontal mínimo dessa rampa? Para facilitar os cálculos, use a aproximação $\frac{1}{12} \simeq 0{,}0833$.

Aproximadamente 38,4 m.

8. Analisando o esboço do projeto da rampa a seguir, determine:

8. a) $16^2 = 15^2 + d^2 \Rightarrow d^2 = 31 \Rightarrow d = \sqrt{31} \simeq 5{,}57$; aproximadamente 5,57 metros.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

a) o valor aproximado da medida do desnível entre os 2 pisos;

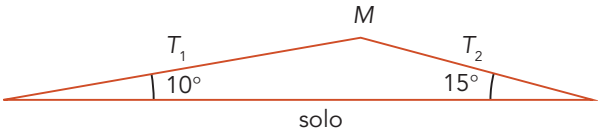
b) o valor de tan α e responda se a rampa é ou não é acessível.

9. **Troque ideias** com os colegas: Conforme o critério dessa cidade, há rampas de acessibilidade na escola em que vocês estudam? Respostas pessoais.

- Se não houver rampas desse tipo, vocês podem indicar um local onde deveria haver uma rampa – locais onde há um desnível a ser vencido. Nesse caso, meçam a medida do desnível e procurem calcular qual seria a medida de comprimento horizontal dessa possível rampa para atender ao grau de declividade de 8,33%.
- Se houver rampas de acessibilidade, verifiquem se a declividade delas é de no máximo 8,33% (conforme normas de acessibilidade). Se todas estiverem em conformidade, vocês podem escrever uma carta para a direção da escola agradecendo e parabenizando-a por isso.

8. b) $\tan \alpha = \frac{5{,}57}{15} = 0{,}37 \Rightarrow 0{,}37 = 37\% > 8{,}33\%$; a rampa não é acessível.

10. O acesso a um mirante *M*, situado a 200 m de medida da altura em relação ao solo plano, pode ser feito por 2 trilhas retilíneas, T_1 e T_2, cujas inclinações em relação ao solo são de 10° e 15°, respectivamente. Suponha constantes essas inclinações, a partir do solo.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) Em qual das trilhas a medida de distância percorrida é menor? Na trilha **2**.

b) Qual é a diferença entre as medidas de distância percorridas nas 2 trilhas para chegar ao mirante? Aproxime os resultados dos cálculos para números inteiros. Considere sen 10° ≃ 0,174; cos 10° ≃ 0,985; sen 15° ≃ 0,259; e cos 15° ≃ 0,966. 377 m

11. Um pequeno avião voa a uma medida da altura constante de 3 km. O piloto planeja o procedimento de descida de modo que o ângulo determinado entre a horizontal e a trajetória seja constante, com medida 20°. Que medida de distância, aproximadamente, o avião percorrerá até o pouso? Aproximadamente 8,77 km.

12. Duas vias de contorno retilíneo se intersectam num entroncamento *E* determinando um ângulo de medida 75°. Calcule a menor medida de distância entre uma das vias e uma área de refúgio situada na outra via, a 1200 m de *E*. Aproximadamente 1 159 m.

13. Explique por que todos os valores de seno e cosseno que constam na tabela de razões trigonométricas são números reais pertencentes ao intervalo]0, 1[, mas o mesmo não acontece com os valores das tangentes.

14. Um poste de 10 m de medida da altura projeta em certo instante uma sombra de *a* metros de medida do comprimento. Obtenha, para cada valor de *a*, a medida aproximada do ângulo que os raios solares determinam com o solo horizontal nesse instante.

a) $a = 5$ m Aproximadamente 63°.

b) $a = 10$ m 45°

16. a) Não, pois o seno e o cosseno dos ângulos agudos desse triângulo são iguais a $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$, que não correspondem aos valores do seno e do cosseno de 30° e de 60°.

b) sen $x = \frac{3}{5} = 0{,}6 \Rightarrow x \simeq 37°$ e $90° - 37° = 53°$; ou seja, aproximadamente 37° e 53°.

15. Para combater o incêndio num apartamento de um edifício, os bombeiros usaram uma escada de 65 m de medida de comprimento. Ela ficou apoiada sobre a plataforma do caminhão do corpo de bombeiros, a 3 m de medida da altura do solo, determinando um ângulo de medida 37° com o plano horizontal que contém a plataforma. Completamente esticada, a escada foi fixada no topo do edifício. Considere que, nesse edifício, cada andar tem 2,8 m de medida da altura e que o topo do edifício coincida com o teto do último andar. Use os seguintes valores: sen 37° ≃ 0,6; cos 37° ≃ 0,8; tan 37° ≃ 0,75.

a) Esboce no caderno uma figura para representar a situação descrita. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Quantos andares há nesse edifício?
15 andares.

16. Em dupla com um colega e usando régua e transferidor, cada um de vocês deve representar no caderno 2 triângulos retângulos: o triângulo **1**, em que os ângulos agudos medem 30° e 60°, e o triângulo **2**, em que os lados medem 3 cm, 4 cm e 5 cm. Em seguida, meçam os lados do triângulo **1** e calculem os valores numéricos das razões seno, cosseno e tangente dos 2 ângulos agudos dos 2 triângulos.

a) **Troque ideias** com o colega: Comparando as medidas dos ângulos agudos dos 2 triângulos, o triângulo **2** pode ter ângulos com medidas 30° e 60°?

b) **Troque ideias** com o colega: Quais são as medidas dos ângulos internos agudos do triângulo **2**?

EXPERIMENTE

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

Obter seno, cosseno e tangente de ângulos agudos

Vamos obter os valores das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente usando um *software* de Geometria dinâmica. Escolha um *site* que permita esse tipo de construção *on-line* ou baixe um aplicativo no computador.

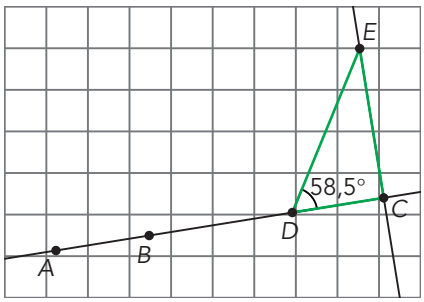
Selecione a ferramenta de construção de reta. Represente uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ qualquer. Em seguida, selecione a ferramenta de construção de ponto e represente um ponto C na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Localize a ferramenta de construção de reta perpendicular e represente uma reta perpendicular à $\overleftrightarrow{AB}$ que passe por C. Por fim, represente um ponto D sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e outro ponto, E, sobre a reta perpendicular.

Para construir um triângulo retângulo, selecione a ferramenta de construção de polígono para representar o triângulo CDE. Em geral, essa construção é feita clicando sobre os pontos C, D, E e C novamente.

Selecione a ferramenta de medição de ângulos e indique a medida do ângulo $C\hat{D}E$. Movimente o ponto D ou o ponto E, a medida do ângulo $C\hat{D}E$ vai variar.

Para obter o valor de $\text{sen}(C\hat{D}E)$, digite no campo de entrada "CE/DE" e pressione a tecla *Enter*. Analogamente, você conseguirá obter os valores de $\cos(C\hat{D}E)$ e de $\tan(C\hat{D}E)$ digitando respectivamente "CD/DE" e "CE/CD".



Banco de imagens/Arquivo da editora

Representação da tela de um *software* de Geometria dinâmica.

Em geral, os valores apresentados são aproximados para uma casa decimal.

Confira os valores obtidos consultando a tabela de razões trigonométricas.

Ângulos notáveis

Os ângulos de medidas 30°, 45° e 60° são chamados **ângulos notáveis**, pois são os mais comuns em problemas de Trigonometria.

As razões trigonométricas desses ângulos foram apresentadas na tabela de razões trigonométricas. Porém, como você já percebeu, os valores encontrados nessa tabela (ou na calculadora científica) são aproximados e contêm muitas casas decimais. Em cada problema, recorremos a arredondamentos. Para os ângulos notáveis, vamos escrever esses valores de maneira que dispensem esses arredondamentos.

Para isso, vamos utilizar 2 figuras geométricas: o triângulo equilátero cujo lado mede ℓ e o quadrado cujo lado mede ℓ.

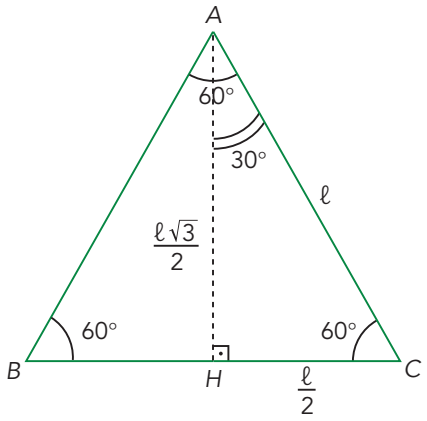
Triângulo equilátero

Se julgar necessário, retome com os estudantes os conceitos de bissetrizes, medianas e alturas de um triângulo.

No triângulo equilátero (3 lados de mesma medida e 3 ângulos internos de medida 60°) representado a seguir, a altura $\overline{AH}$ coincide com a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ (pelo critério LAAo, $\triangle ABH \sim \triangle ACH$); assim, $\overline{HC}$ mede $\frac{\ell}{2}$.

A altura $\overline{AH}$ também coincide com a bissetriz de $B\hat{A}C$ (pois $\triangle ABH \sim \triangle ACH$). Assim, $\text{med}(C\hat{A}H) = 30°$.

Além disso, pelo teorema de Pitágoras, sabe-se que $\overline{AH}$ mede $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Para o ângulo de medida 30°, temos, no $\triangle AHC$:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para o ângulo de medida 60°, temos, no $\triangle AHC$:

$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2} \qquad \tan 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \sqrt{3}$$

Note que:

$$\text{sen } 30° = \cos 60°$$
$$\cos 30° = \text{sen } 60°$$
$$\tan 30° = \frac{1}{\tan 60°} \text{ (ou } \tan 30° \cdot \tan 60° = 1)$$

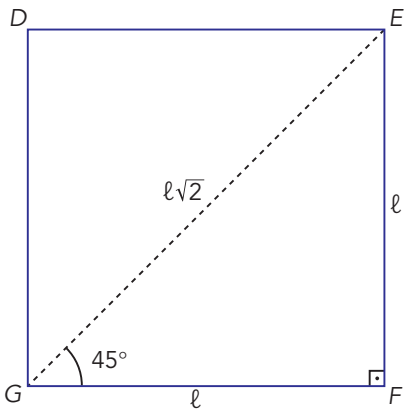
Pense nisto

Não escreva no livro

Em um triângulo retângulo com ângulos agudos de medidas 30° e 60°, um dos catetos tem medida igual à metade da medida da hipotenusa. Qual é esse cateto?

É o cateto que está oposto ao ângulo de medida 30°, ou o cateto adjacente ao ângulo de medida 60°. Note que $\text{sen } 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Quadrado



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabe-se, pelo teorema de Pitágoras, que a diagonal do quadrado (4 lados de mesma medida e 4 ângulos internos retos) mede $\ell\sqrt{2}$.

Temos, no $\triangle EFG$:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Note que $\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ$.

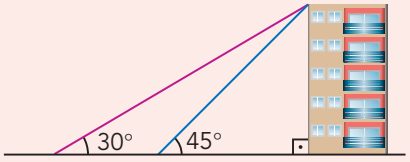
$$\tan 45^\circ = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

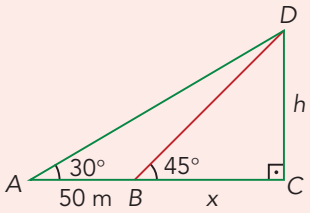
Obtemos, assim, a tabela com os valores das razões trigonométricas que passaremos a usar para os ângulos notáveis.

Razão \ Medida de abertura	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Atividades resolvidas

3. De um ponto no solo, um observador vê o topo de um edifício sob um ângulo de medida 30° em relação ao solo. Aproximando-se 50 m do prédio, o ângulo de observação passa a medir 45° em relação ao solo. Determine a medida da altura do edifício.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

Analise o esquema da situação.

Note que o triângulo BCD é retângulo e isósceles, pois $\operatorname{med}(C\hat{B}D) = \operatorname{med}(B\hat{D}C) = 45^\circ$. Assim, temos que $x = h$.

No triângulo retângulo ACD:

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{50 + x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{50 + h} \Rightarrow 3h = \sqrt{3}(50 + h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3h - h\sqrt{3} = 50\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{50\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{50\sqrt{3}}{(3 - \sqrt{3})} \cdot \frac{(3 + \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})} \Rightarrow h = \frac{150\sqrt{3} + 50 \cdot 3}{3^2 - (\sqrt{3})^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{150(\sqrt{3} + 1)}{9 - 3} \Rightarrow h = \frac{150(\sqrt{3} + 1)}{6} \Rightarrow h = 25 \cdot (1 + \sqrt{3}) \Rightarrow h \simeq 68{,}3$$

A altura do edifício mede aproximadamente 68,3 m.

17. a) $\tan 60° = \frac{8\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow x = 8$

b) $\operatorname{sen} 45° = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{x} \Rightarrow x\sqrt{2} = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$

c) $\cos 45° = \frac{x}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{6} \Rightarrow 2x = 6\sqrt{2} \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$

d) Pelo teorema de Pitágoras, a hipotenusa do triângulo de catetos de medidas $\sqrt{2}$ e $\sqrt{10}$ mede $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Daí, $\cos 30° = \frac{2\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 4$.

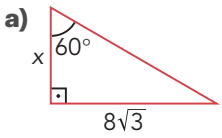
ATIVIDADES

Não escreva no livro

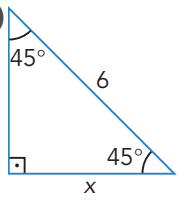
17. Calcule os valores de x em cada caso.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

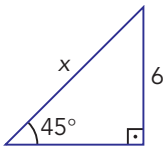
a)



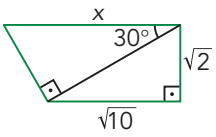
c)



b)



d)



18. Uma escada de pedreiro medindo 6 m de comprimento está apoiada numa parede e determina com o solo um ângulo de medida 60°. Qual é a medida da altura atingida pelo ponto mais alto da escada? Qual é a medida de distância do pé da escada à parede?

$3\sqrt{3}$ m; 3 m.

19. Um objeto, ao ser solto sobre um plano inclinado que determina um ângulo de medida 60° com o solo horizontal, percorre 8 m para atingi-lo. Calcule a medida da altura, em relação ao solo, da qual o objeto foi solto.

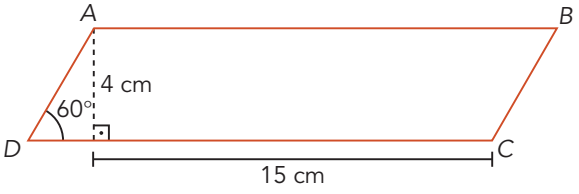
$4\sqrt{3}$ m

20. Obtenha a medida de perímetro de um retângulo sabendo que uma diagonal mede $5\sqrt{3}$ cm e determina um ângulo cuja medida é 30° com um dos lados do retângulo.

$5(\sqrt{3} + 3)$ cm

21. Determine a medida de perímetro do paralelogramo $ABCD$. $(8\sqrt{3} + 30)$ cm

Banco de imagens/Arquivo da editora



22. Um observador está situado a x metros do pé de um prédio. Ele consegue mirar o topo do prédio sob um ângulo de medida 60°. Afastando-se 40 m desse ponto, ele passa a avistar o topo do prédio sob um ângulo de medida 30°. Considerando desprezível a medida da altura do observador, determine:

a) o valor de x; 20 m

b) a medida da altura do prédio. $20\sqrt{3}$ m

23. Num trecho de rio em que as margens são paralelas, um morador, à beira de uma delas, avista a base de um farol, situado à beira da outra margem, sob um ângulo de medida 45° com a margem em que se encontra. Caminhando 1400 m no sentido indicado pela seta na imagem, ele passa a mirar o mesmo ponto da base do farol sob um ângulo de medida 60° com a margem em que se encontra.

As imagens não estão representadas em proporção.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Considerando $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$, obtenha a medida da largura do rio, em quilômetros, nesse trecho.

Aproximadamente 3,4 km.

24. Uma rampa com inclinação constante de 30° em relação à horizontal é equivalente a uma rampa com declividade de 30%? Explique sua resposta.

25. **Troque ideias** com um colega sobre a resolução desta atividade.

Um trapézio retângulo com altura que mede 8 cm tem o ângulo obtuso medindo 150°.

a) Essas informações permitem determinar a medida do lado oblíquo (não perpendicular às bases) desse trapézio? Se permitirem, determine essa medida. Sim; 16 cm

b) Essas informações permitem determinar a medida de perímetro desse trapézio? Se permitirem, determine-a; se não permitirem, acrescente uma informação que permita determinar essa medida.

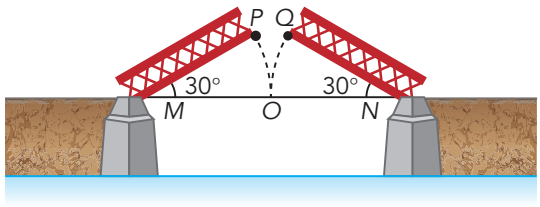
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

26. Sobre a represa de uma cidade, há uma ponte de 30 m de medida de comprimento que se abre algumas vezes ao dia para dar passagem a pequenas embarcações. Na imagem, O é ponto médio de $\overline{MN}$, e $\overset{\frown}{OP}$ e $\overset{\frown}{OQ}$ são arcos de circunferência com centros em M e N, respectivamente.

24. Não, pois uma rampa com declividade de 30% apresenta ângulo de inclinação α, tal que $\tan \alpha = 0{,}3$. Consultando a tabela de razões trigonométricas, obtemos que α é aproximadamente 17°.

30. Exemplo de resposta: Para dar sustentação a um poste de 12 m de medida da altura, utilizou-se um cabo de aço preso, totalmente esticado, cujas extremidades são o solo e o topo do poste. Sabendo que o cabo determina com o chão um ângulo de medida 45°, calcule a medida de comprimento do cabo.

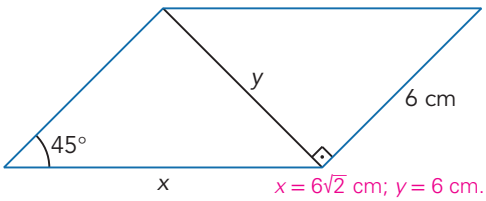
Banco de imagens/ Arquivo da editora



Com a ponte na posição apresentada na imagem, abre-se um vão, representado pelo segmento de reta $\overline{PQ}$. Qual é a medida de comprimento desse vão? Use $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$. 4,5 m

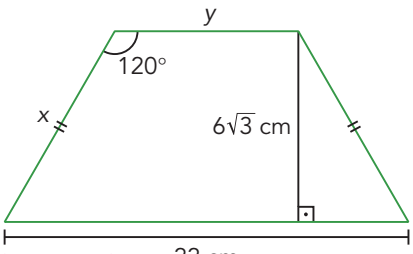
27. Determine os valores de x e y no paralelogramo do item **a** e no trapézio isósceles do item **b**.

a)



$x = 6\sqrt{2}$ cm; $y = 6$ cm.

b)



$x = 12$ cm; $y = 10$ cm.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

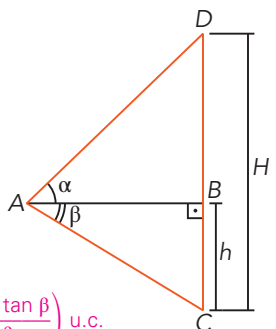
28. Num triângulo isósceles, os lados congruentes medem 6 cm e determinam entre eles um ângulo de medida 120°. Calcule:

a) a medida de perímetro do triângulo; $6(2 + \sqrt{3})$ cm

b) a medida de área do triângulo. $9\sqrt{3}$ cm²

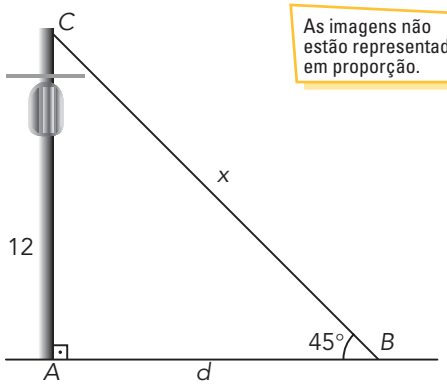
29. Para obter a medida da altura H de uma chaminé, uma engenheira usou um aparelho especial com o qual estabeleceu a horizontal $\overline{AB}$ e mediu os ângulos de medidas α e β. Em seguida, mediu $BC = h$. Determine a medida da altura da chaminé em função de α, β e h.

Banco de imagens/Arquivo da editora



$H = h \cdot \left(\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \beta}\right)$ u.c.

30. Elabore e resolva no caderno um problema a partir da imagem a seguir, em que $\overline{BC}$ representa um cabo de aço. Em seguida, troque de caderno com um colega para você resolver a atividade elaborada por ele e vice-versa.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Leia o texto e resolva a atividade a seguir.

Não basta construir uma rampa para garantir acessibilidade, pois nem toda rampa é acessível. As rampas precisam estar de acordo com os critérios estabelecidos pela legislação. A norma que trata da acessibilidade em edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos, NBR 9050/2020, define uma inclinação máxima de 8,33% para rampas, embora, em situações excepcionais, permita inclinações maiores. Esse número significa que, a cada 12 m do comprimento de rampa, podemos subir cerca de 1 m de medida da altura.

Na prática, percorrer essa distância exige muito esforço. Assim, se tiver 8,33% de inclinação, a rampa deve ser composta de 2 trechos, com um patamar para descanso. Para vencer 1 m de medida da altura com um único trecho de rampa, a inclinação deverá estar entre 5% e 6,25%.

Fontes dos dados: CONHEÇA os tipos de acessibilidade e como implementá-los. *EqualWeb Brasil*, Rio de Janeiro, 8 ago. 2022. Disponível em: https://tedit.net/5kal9t. RAMPA de acessibilidade: como construir? *Guiaderodas*, São Paulo, 16 jul. 2020. Disponível em: https://tedit.net/il7282. Acesso em: 8 jul. 2024

31. Uma rampa de acesso para cadeirantes de uma escola deve ser construída com inclinação máxima de 8%. A medida da altura do ponto mais alto da entrada da escola até o chão é 80 cm. Qual deve ser a medida de comprimento mínimo da rampa para que ela atenda às especificações de acessibilidade?

A medida de comprimento mínimo da rampa deve ser de aproximadamente 914,39 cm para atender às especificações de acessibilidade.

INTERLIGANDO

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação em Direitos Humanos* e *Vida Familiar e Social*.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de História, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Reprodução/ ONU

Acessibilidade

A acessibilidade é fundamental para garantir a igualdade de acesso a todas as pessoas, seja qual for a necessidade de cada uma delas. Quando produtos, serviços e ambientes são projetados com acessibilidade, pessoas com limitações são capazes de participar de maneira inclusiva da sociedade e de exercer os direitos delas de cidadãs. A acessibilidade pode ser implementada em diversos contextos, como arquitetura, transporte, tecnologia, comunicação e serviços públicos.

Tipos de acessibilidade

Acessibilidade Atitudinal

Este termo diz respeito ao conjunto de práticas voltadas para eliminar barreiras sociais entre as pessoas. Ou seja, este tipo de acessibilidade abrange as atitudes necessárias para que nosso meio se torne mais inclusivo para todos.

O capacitismo já está tão enraizado em nossa sociedade que é comum que este tipo de preconceito aconteça e nem sequer tomemos conhecimento sobre ele, por ser algo já naturalizado. Mas, para mudar isto, é necessário agir ativamente. [...]

Acessibilidade Arquitetônica

[A acessibilidade arquitetônica] é uma das mais conhecidas e também uma das mais fáceis de serem notadas. Isto se dá, pois a acessibilidade arquitetônica diz respeito à adequação de espaços físicos e, sem a existência desta, não há possibilidade de que todos transitem pelos espaços. [...]

Alguns exemplos de acessibilidade arquitetônica são: rampas, elevadores, plataformas de elevação, sinais de trânsito com avisos sonoros, sinalização de piso em relevo e muitas outras opções. [...]

Acessibilidade Metodológica (ou Pedagógica)

[...]

A acessibilidade metodológica, também conhecida como acessibilidade pedagógica, diz respeito à ausência de barreiras nas metodologias e técnicas de ensino apresentadas aos alunos.

Por meio dela, profissionais de ensino têm a possibilidade de agir de acordo com dificuldades ou impossibilidades que seus alunos tenham de compreender o conteúdo apresentado, seja por conta do método, do conceito ou da forma como é apresentado. [...]

Acessibilidade Comunicacional

Este é mais um tipo de acessibilidade que vai [ao] encontro [de] uma legislação que garante direitos aos cidadãos, mas nem sempre esta é cumprida. A informação é um direito de todos, mas, para isso, muitas vezes é necessário que haja uma comunicação inclusiva. [...]

Não escreva no livro

Algumas opções possíveis de implementação da acessibilidade comunicacional [são] por meio da contratação de intérpretes de libras, do investimento em ambientes virtuais acessíveis, ferramentas de acessibilidade digital e uso de técnicas de comunicação inclusiva.

Acessibilidade Digital

Atualmente, os aparelhos eletrônicos se tornaram extensões de quem somos e, por isso, a cada dia vemos mais a migração de rotinas, hábitos e serviços, que sempre foram físicos, para o meio digital.

Porém, nem sempre as barreiras digitais são rompidas para que todos tenham uma navegação igualitária. Sem acessibilidade digital, pessoas com deficiência ou dificuldades de navegação na internet, como idosos, pessoas em fase de alfabetização, analfabetos e crianças em fase de aprendizado, são impossibilitados de realizar tarefas que podem parecer simples no cotidiano para muitas pessoas. [...]

CONHEÇA os tipos de acessibilidade e como implementá-los. *EqualWeb Brasil*, Rio de Janeiro, 8 ago. 2022. Disponível em: https://tedit.net/5kal9t. Acesso em: 8 jul. 2024.

1. No trecho do texto sobre acessibilidade atitudinal, há referência sobre capacitismo. Você sabe o que significa? Você consegue identificar atitudes capacitistas na charge?

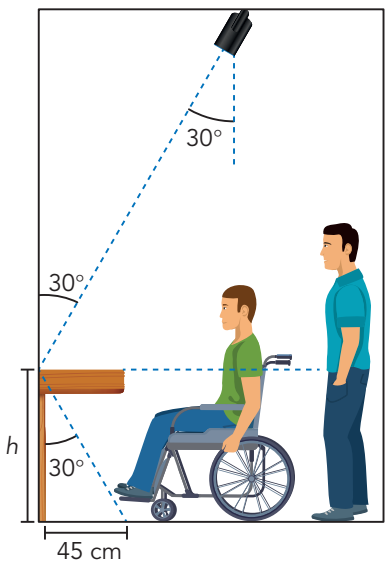
Respostas pessoais.

Ricardo Ferraz/Acervo do cartunista

2. O capacitismo é relacionado à discriminação contra qualquer pessoa por causa de sua deficiência, não somente a pessoas que usam cadeira de rodas. Leia a cartilha *Combata o capacitismo*, disponível em: https://tedit.net/33hxdo (acesso em: 8 jul. 2024), elaborada pelos ministérios da Saúde e dos Direitos Humanos e da Cidadania em 2023. Depois, responda: Você sabe como evitar e combater o capacitismo?

Respostas pessoais.

3. Uma loja, preocupada com a acessibilidade das vitrines e dos mostruários, projetou-os de maneira que a altura visual deles estivesse ao alcance das pessoas que usam cadeira de rodas. Segundo as normas de acessibilidade, para peças de observação horizontal, a iluminação deve ser perpendicular ao piso; já para peças de observação vertical, a iluminação deve incidir sobre a peça a 30°, formando 60° com a horizontal. O acervo disponível para manuseio deve estar disposto de modo que as pessoas em cadeira de rodas o alcancem, conforme ilustra a imagem.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Pelas normas de acessibilidade, a medida da altura da superfície de exposição deve ser entre 75 cm e 85 cm. Calcule a medida da altura da bancada do mostruário e verifique se foi construída de maneira acessível.

A medida da altura da bancada do mostruário é 78,94 cm; portanto, está de acordo com o parâmetro estabelecido para acessibilidade.

PROJETO

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Ambiental*.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Não escreva no livro

Reprodução/ ONU

O triângulo retângulo e a prevenção de deslizamentos de terra

Leia os textos a seguir.

Texto 1

O que provoca os deslizamentos de terra?

[...] Ele sempre começa com a ruptura do solo de uma encosta – que, por sua vez, precisa ser desencadeada por alguma coisa. O agente causador mais conhecido são as chuvas. [...]

Deslizamentos são fenômenos naturais: podem ocorrer mesmo que a área esteja com sua vegetação intacta. Mas a ação humana pode facilitar sua ocorrência e aumentar os estragos. [...]

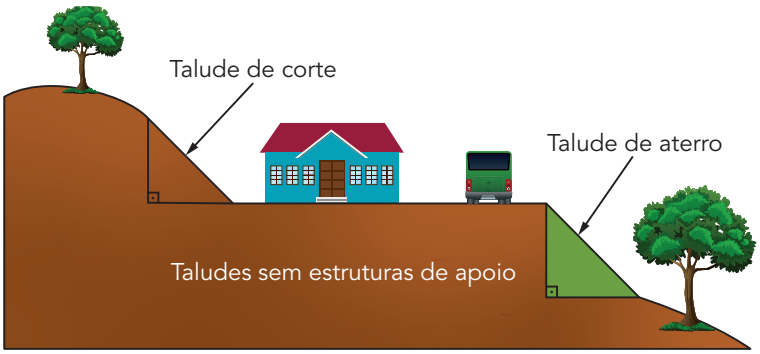
[Um] fator que pode proteger ou condenar um terreno é a inclinação. A maioria das tragédias ocorre em encostas reclinadas em ângulos que variam entre 20° e 35°.

Menos do que isso, o risco de deslizamentos diminui. Mais que isso, pode até rolar muita terra ladeira abaixo, mas o número de vítimas vai ser bem menor [...].

BIANCHIN, Victor. O que provoca os deslizamentos de terra? *Mundo estranho*, 22 dez. 2011 (atualizado em 22 fev. 2024). Disponível em: https://tedit.net/h48hf3. Acesso em: 16 jun. 2024.

Texto 2

Talude é um terreno inclinado que serve para dar sustentação e estabilidade ao solo. Ele pode ter origem natural (ocasionado por fenômenos da natureza, como chuva, vento, etc.) ou ser produzido pelo ser humano. Para que seja estável, o talude deve ter uma inclinação máxima de 45°.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Existem 2 tipos de talude: o de corte, formado a partir de um processo de retirada de material, e o de aterro, fruto da reposição de massas de solo.

A inclinação de um talude pode ser representada pelo ângulo determinado pela hipotenusa do triângulo retângulo com o cateto que está na horizontal, como na imagem, cujas distâncias horizontal e vertical constituem os catetos desse triângulo.

Fonte dos dados: COORDENADORIA ESTADUAL DE PROTEÇÃO E DEFESA CIVIL (Espírito Santo). *Estabilização de taludes*. Disponível em: https://tedit.net/jdemrj. BASSANELI, Hélio Rodrigues; CORRÊA, Marco Aurélio Martins; ESPÍRITO SANTO, André Pereira Coelho do; CRUZ, Arthur Giorgie El Rafael Zochling Campos; SILVA, Bruno Geraldo Rodrigues; SANTOS, Glauber Laurentino; MARIOTTO, Thiago Bueno. Estabilidade de taludes. *Jornada Científica*, v. 1, n. 2, 2016. Disponível em: https://tedit.net/97jstu. Acesso em: 24 jun. 2024.

Pensando em um projeto

É comum nos depararmos com notícias de casas destruídas e vidas perdidas por desastres naturais envolvendo deslizamentos de terra. A aplicação do estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo está diretamente associada a uma medida de prevenção dos deslizamentos: os taludes.

Que tal buscar conhecer e identificar áreas de risco de deslizamentos no local em que vive? Para isso, em grupos, vocês vão criar um *blog* para divulgar um relatório de risco de deslizamentos.

Para começar

- Com a turma e o professor, selecionem regiões do local onde vocês vivem que possam ser estudadas.
- Organizem-se em grupos para estudar cada região.

Plano de ação

Etapa 1

Pesquisem as principais causas de deslizamentos de terra. Depois, identifiquem se há registros de ocorrência dessas causas na região estudada.

Etapa 2

Apresentem aos colegas de turma as informações obtidas na etapa **1**. Depois, troquem ideias: Todos os grupos encontraram as mesmas causas de deslizamentos? Quais foram as mais frequentes?

Etapa 3

Usem o levantamento feito nas etapas anteriores para mapear locais de risco na região estudada.

Façam um registro detalhado de cada local, incluindo descrição, vídeos e fotografias, que serão inseridos, posteriormente, no *blog*.

Etapa 4

De acordo com o texto **2**, os taludes de áreas construídas devem ter uma inclinação máxima de 45°; qualquer inclinação maior gera risco de deslizamentos de terra e, desse modo, as encostas com inclinação maior não devem ser ocupadas.

Pesquisem ou consultem um profissional, como um engenheiro, para a verificação da norma existente sobre inclinação de taludes em áreas construídas na cidade em que vivem.

Depois, calculem a inclinação dos taludes existentes na região analisada, classificando-os em adequados ou inadequados. Para isso, usem as relações estabelecidas no triângulo retângulo para calcular e comparar inclinações.

Etapa 5

Juntem as informações obtidas nas etapas anteriores em um relatório. Depois, criem um *blog* a partir das indicações disponíveis na seção *Produções em foco* e publiquem o relatório.

Etapa 6

Para a apresentação do relatório, a turma e o professor devem definir a data e o horário da apresentação, considerando a disponibilidade das pessoas envolvidas: estudantes, professores, pessoas residentes nas comunidades, profissionais da área, coordenadores da escola, entre outros.

Coletivamente, criem um folheto/convite *on-line* para divulgar a apresentação dos relatórios indicando as informações básicas sobre a região escolhida.

Etapa 7

Distribuam o folheto/convite para outras turmas da escola e, se possível, familiares, amigos e outros membros da comunidade para divulgar a apresentação. Convidem, principalmente, as pessoas das regiões analisadas e, se possível, os profissionais contatados na etapa **4**.

Etapa 8

Produto final: Divulgação do relatório de risco de deslizamentos na escola para a comunidade escolar e/ou da região a partir das publicações feitas no *blog*.

- Os grupos devem recepcionar os convidados e cada grupo deve apresentar sua publicação no *blog*, conforme a região escolhida.
- Vocês devem fornecer e divulgar o *link* do *blog* para que todas as pessoas da comunidade tenham acesso às informações levantadas na pesquisa.

Caso seja possível que os profissionais contatados na etapa **4** participem, pode-se combinar com eles que falem a respeito do tema, passando informações importantes para a prevenção de deslizamentos de terra, comentando os registros apresentados pelos estudantes, respondendo a perguntas, orientando e esclarecendo dúvidas.

capítulo

8 Área de figuras planas

O que é área?

Recorremos frequentemente a objetos do cotidiano para compreender conceitos geométricos. A visualização e a medição desses objetos são estratégias para a descoberta e a compreensão de propriedades geométricas.

Em situações como calcular a quantidade de azulejos necessária na reforma de uma cozinha, o custo para envernizar a superfície de uma porta ou ainda o custo da confecção de um quadro, as quantidades envolvidas dependem do cálculo de medidas de área de superfícies planas. As imagens desta página são exemplos de aplicação desses cálculos.

Dagmara_K/Adobe Stock

Colocação de piso de azulejo.

As imagens não estão representadas em proporção.

thaipraybоy/Adobe Stock

Pessoa envernizando porta.

Neste capítulo, vamos revisar um conteúdo estudado no Ensino Fundamental: o cálculo de **área de superfícies planas delimitadas**.

De modo geral, **área** é uma grandeza relacionada à extensão de uma superfície plana e sua medida é expressa em uma unidade-padrão preestabelecida (correspondente à medida de área de um quadrado de lado unitário, isto é, de um quadrado cujo lado mede 1 unidade de medida de comprimento).

Dica

Reportagem "A incrível história de como a França criou o sistema métrico decimal"

Leia esse texto sobre os critérios que os franceses adotaram para definir o sistema métrico que conhecemos, desde as placas de mármore que delimitam o metro colocadas há mais de 2 séculos na Place Vendôme, uma praça no centro de Paris. Disponível em: https://tedit.net/lz7585. Acesso em: 10 jul. 2024.

Ao tratar da criação do sistema métrico decimal durante a Revolução Francesa, sugerimos o trabalho em conjunto com o professor de História, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Mas como são definidos os padrões de unidades de medida?

É o Sistema Internacional de Unidades (SI) que estabelece as unidades básicas de medida e as unidades derivadas, que podem ser expressas a partir das unidades básicas. Vamos nos referir particularmente à unidade básica de comprimento, o metro, e às unidades dela derivadas, conforme indicado a seguir.

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Área	metro quadrado	m^2
Volume	metro cúbico	m^3

O sistema métrico decimal, criado durante a Revolução Francesa, e o depósito de 2 padrões de platina nos Arquivos da República, em Paris, em 22 de junho de 1799, representando o metro e o quilograma, podem ser considerados a primeira etapa que levou ao atual Sistema Internacional de Unidades. No Brasil, o sistema métrico decimal foi oficialmente introduzido em 1862.

Atualmente, usa-se a seguinte definição de metro, adotada pela Convenção Geral de Pesos e Medidas, em 1983:

HJBC/Adobe Stock

Barra de metro-padrão de mármore, na Place Vendôme, em Paris (França). Foto de 2022.

> Metro é a medida de comprimento do trajeto percorrido pela luz, no vácuo, durante um intervalo de tempo de $\frac{1}{299\,792\,458}$ segundo.

Vamos agora estabelecer algumas relações entre certas unidades de medida.

$$1\text{ m} = 10\text{ dm} \begin{cases} 1\text{ m}^2 = 10^2\text{ dm}^2 \\ 1\text{ m}^3 = 10^3\text{ dm}^3 \end{cases}$$

Verifique as relações a seguir.

$$\begin{cases} (1\text{ m}) \cdot (1\text{ m}) = (10\text{ dm}) \cdot (10\text{ dm}) \Rightarrow 1\text{ m}^2 = 100\text{ dm}^2 = 10^2\text{ dm}^2 \\ (1\text{ m}) \cdot (1\text{ m}) \cdot (1\text{ m}) = (10\text{ dm}) \cdot (10\text{ dm}) \cdot (10\text{ dm}) \Rightarrow 1\text{ m}^3 = 1000\text{ dm}^3 = 10^3\text{ dm}^3 \end{cases}$$

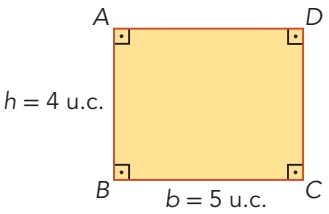
$$1\text{ m} = 100\text{ cm} \begin{cases} 1\text{ m}^2 = 10^4\text{ cm}^2 \\ 1\text{ m}^3 = 10^6\text{ cm}^3 \end{cases}$$

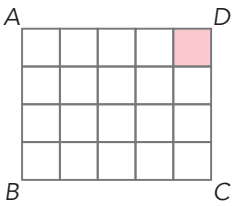
Verifique as relações a seguir.

$$\begin{cases} (1\text{ m}) \cdot (1\text{ m}) = (100\text{ cm}) \cdot (100\text{ cm}) \Rightarrow 1\text{ m}^2 = 10\,000\text{ cm}^2 = 10^4\text{ cm}^2 \\ (1\text{ m}) \cdot (1\text{ m}) \cdot (1\text{ m}) = (100\text{ cm}) \cdot (100\text{ cm}) \cdot (100\text{ cm}) \Rightarrow 1\text{ m}^3 = 1\,000\,000\text{ cm}^3 = 10^6\text{ cm}^3 \end{cases}$$

Área do retângulo

Considere o retângulo *ABCD*. Supondo que o lado $\overline{AB}$ meça 4 u.c. e o lado $\overline{BC}$ meça 5 u.c. – em que u.c. é a unidade de medida de comprimento –, podemos dividir o retângulo em 20 pequenos quadrados, cada um deles com 1 unidade de medida de área, indicada por u.a., conforme a figura.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

O quadradinho na cor rosa representa 1 unidade de medida de área (1 u.a.).

Assim, a medida de área (A) do retângulo *ABCD* é:

$$A = (5 \text{ u.c.}) \cdot (4 \text{ u.c.}) = 20 \text{ u.a.}$$

Se, em um retângulo *ABCD*, chamarmos de:

- A a medida de área do retângulo *ABCD*;
- b a medida da base $\overline{BC}$;
- h a medida da altura $\overline{AB}$;

então teremos:

Comente com os estudantes que, de modo geral e sem perda de generalidade, a expressão $A = b \cdot h$ também pode ser usada para calcular a medida de área de retângulos nos quais as medidas dos lados são expressas por números reais positivos.

$$A = b \cdot h$$

A medida de área de um retângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura, ambas com a mesma unidade de medida.

Atividades resolvidas

1. Calcule a medida de área de um retângulo cujas dimensões, base e altura, medem, respectivamente, 13,4 cm e 0,25 m.

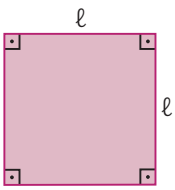
Solução:

Como, para o cálculo da medida de área, as medidas das dimensões devem estar na mesma unidade e lembrando que 1 m = 100 cm, temos $b = 13{,}4$ cm e $h = 0{,}25 \cdot 100$ cm $= 25$ cm.

Assim, $A = b \cdot h \Rightarrow A = 13{,}4 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} \Rightarrow A = 335 \text{ cm}^2$.

Área do quadrado

Como todo quadrado é um retângulo cuja medida da base é igual à medida da altura, a fórmula para o cálculo da medida de área do retângulo pode ser usada para obter a expressão da medida de área de um quadrado.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Desse modo, se ℓ é a medida do lado de um quadrado, então, se $b = \ell$ e $h = \ell$, temos:

$$A = b \cdot h \Rightarrow A = \ell \cdot \ell$$

Assim:

$$A = \ell^2$$

A medida de área de um quadrado é igual ao quadrado da medida do lado desse quadrado.

Atividades resolvidas

2. Um artesão pretende usar retalhos para fazer uma colcha em formato de retângulo com as seguintes medidas de dimensão: 2,40 m de medida do comprimento por 1,80 m de medida da largura. Se os retalhos forem recortados em pedaços quadrados, cada qual com 20 cm de medida do lado, quantos pedaços serão necessários para compor tal colcha? Considere não haver perda nem sobreposição de tecido para a composição da colcha.

Solução:

Vamos determinar a medida de área A_1 da superfície da colcha:

$$A_1 = b \cdot h = 2{,}40\ \text{m} \cdot 1{,}80\ \text{m} = 4{,}32\ \text{m}^2$$

Seja n o total de pedaços de retalho que deverão compor a colcha.

Cada pedaço deverá ter o formato de um quadrado de 20 cm de lado, e a medida de área A_2 é dada por:

$$A_2 = \ell^2 = 20\ \text{cm} \cdot 20\ \text{cm} = 0{,}2\ \text{m} \cdot 0{,}2\ \text{m} = 0{,}04\ \text{m}^2$$

Como a medida do comprimento e a da largura da colcha são divisíveis pela medida do lado do retalho, a medida de área da superfície dos n pedaços reunidos, que deverão revestir os $4{,}32\ \text{m}^2$, será $n \cdot A_2 = n \cdot 0{,}04\ \text{m}^2$.

Logo, como devemos ter $n \cdot A_2 = A_1$, então $n \cdot 0{,}04\ \text{m}^2 = 4{,}32\ \text{m}^2$, ou seja, $n = 108$ pedaços.

3. Medidas das dimensões do retângulo: a e b.

$$\begin{cases} 2a + 2b = 28 \Rightarrow a + b = 14 \\ \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{a+b}{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow a = 6 \text{ e } b = 8$$

$A = a \cdot b = 6\ \text{m} \cdot 8\ \text{m} = 48\ \text{m}^2$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. Determine a medida de área de:

a) um retângulo cujas dimensões medem 6,5 cm e 12 cm; $78\ \text{cm}^2$

b) um quadrado cujo lado mede $5\sqrt{3}$ m; $75\ \text{m}^2$

c) um retângulo cuja base mede 16 dm e cuja diagonal mede 20 dm; $192\ \text{dm}^2$

d) um quadrado que tem 24 m de medida de perímetro; $36\ \text{m}^2$

e) um retângulo cuja diagonal determina um ângulo de medida 30° com o lado que mede 12 dm; $48\sqrt{3}\ \text{dm}^2$

f) um quadrado cuja diagonal mede $5\sqrt{2}$ mm. $25\ \text{mm}^2$

2. Um mapa de certa região foi construído na escala 1 : 20 000. Determine, em metros quadrados, a área real de uma chácara que, nesse mapa, é representada por um quadrado cujo lado mede 0,3 cm.

2. 1 cm —— 200 m

0,3 cm —— x

$x = 0{,}3 \cdot 200\ \text{m} = 60\ \text{m}$ (medida real)

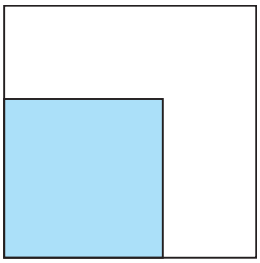
$A_{\text{real}} = (60\ \text{m})^2 = 3\,600\ \text{m}^2$

3. Um jardim tem o formato de um retângulo cujas medidas das dimensões estão entre si na razão $\frac{3}{4}$. Se esse jardim tem 28 m de medida de perímetro, determine a medida de área.

Se julgar necessário, relembre as propriedades de proporção com os estudantes.

4. Um azulejo tem o formato de um quadrado cuja diagonal mede $15\sqrt{2}$ cm. Se as paredes de um salão, que têm medida de área equivalente à de um retângulo cujas dimensões medem 54 m e 4,5 m, forem totalmente revestidas por tais azulejos e supondo que nenhum deles se quebre no ato da colocação e que não haja sobreposição nem espaços vazios entre 2 azulejos adjacentes, quantos azulejos serão usados? 10 800 azulejos.

5. A região colorida da figura representa uma piscina de formato quadrado construída no quintal de uma casa. Pretende-se reduzir em 2 m as medidas das dimensões da superfície dessa piscina, de modo que ela passe a ocupar 36% da medida de área do quintal. Se o quintal tem o formato de um quadrado cuja área mede $225\ \text{m}^2$, calcule, em metros quadrados, o aumento da superfície do quintal não ocupada pela piscina. $40\ \text{m}^2$



Banco de imagens/Arquivo da editora

6. a e b: medidas das dimensões da superfície da mesa.

$\begin{cases} 2a + 2b = 52 \text{ dm} & (1) \\ a \cdot b = 144 \text{ dm}^2 & (2) \end{cases}$

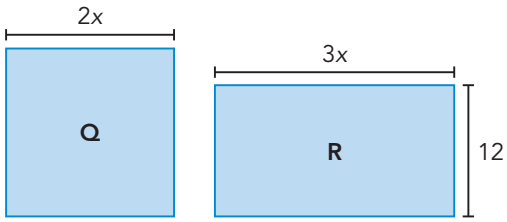
De (1) e (2), temos $a^2 - 26a + 144 = 0$; então $a = 18$ dm e $b = 8$ dm (ou $a = 8$ dm e $b = 18$ dm).

Não escreva no livro

6. Um arquiteto montou a maquete do projeto de construção de um edifício sobre uma mesa plana de formato retangular. Sabendo que o perímetro da superfície mede 52 dm e a área mede 144 dm², calcule as medidas das dimensões dessa superfície.

7. Sejam 2 terrenos planos, um com formato de quadrado (**Q**) e o outro com formato de retângulo (**R**), de medidas das dimensões, em metros, indicadas nas figuras.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

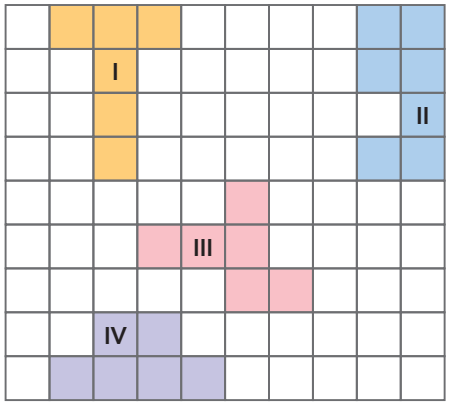


a) Se **Q** e **R** têm a mesma medida de perímetro, quais são as medidas de área?

b) Se **Q** e **R** têm a mesma medida de área, qual é a razão entre as medidas de perímetro de **Q** e de **R**?

8. Na malha quadriculada, as regiões coloridas – **I**, **II**, **III** e **IV** – representam as superfícies de 4 sítios planos onde, respectivamente, os irmãos Artur, Lucas, Edson e Luísa pretendem construir, cada um, uma casa.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Sabendo que a área total da malha mede 36 000 m², responda no caderno às perguntas.

a) Quais sítios têm perímetros de mesma medida? **I**, **II** e **III**.

b) Qual dos irmãos pretende construir a casa do sítio na superfície de maior medida de área? Qual é a medida de área dessa superfície? Lucas; 2 800 m².

9. Afrânio é dono de um terreno plano e de formato retangular. Pretendendo vender esse terreno, dividiu-o em 4 lotes retangulares, cujas medidas de área, em metros quadrados, são indicadas na figura.

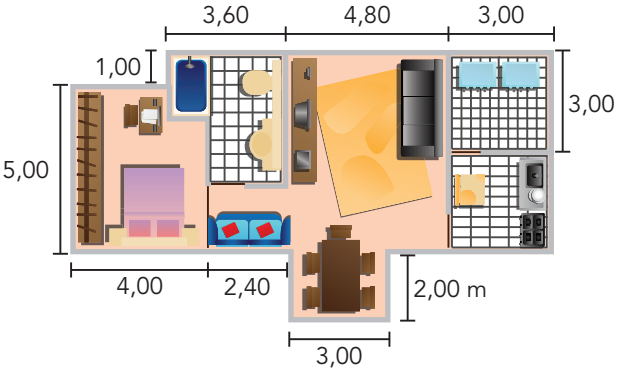
Banco de imagens/Arquivo da editora

Se o metro quadrado de cada lote for vendido por R$ 860,00, qual é o preço de venda do lote cuja superfície tem x m² de medida de área? R$ 206.400,00

As imagens não estão representadas em proporção.

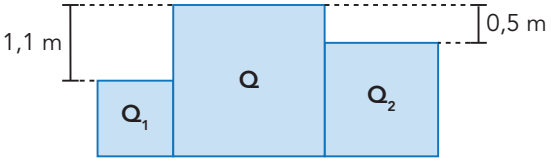
10. A imagem a seguir é da planta de um apartamento, cujas dimensões são dadas em metros. Considerando desprezível a espessura das paredes, determine a medida de área total desse apartamento. 88,4 m²

Banco de imagens/Arquivo da editora



11. Três mesas, cujos tampos têm formato quadrado, foram justapostas lado a lado, conforme é mostrado na figura a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora

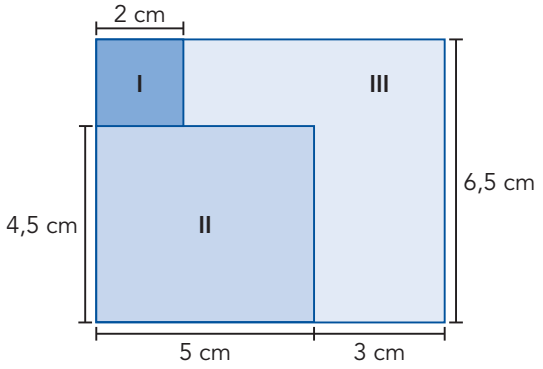


Sabendo que as medidas de área das superfícies dos tampos dessas mesas somam 7,06 m², determine a medida de área de **Q** (superfície do tampo da maior mesa). 4 m²

7. a) $4 \cdot 2x = 2 \cdot (3x + 12) \Rightarrow 8x = 6x + 24 \Rightarrow x = 12$
Medida de área de **Q**: $(24 \text{ m})^2 = 576 \text{ m}^2$.
Medida de área de **R**: $36 \text{ m} \cdot 12 \text{ m} = 432 \text{ m}^2$.
b) $(2x)^2 = 12 \cdot 3x \Rightarrow 4x^2 = 36x \Rightarrow x = 9$
Medida de perímetro de **Q**: $4 \cdot 18 \text{ m} = 72 \text{ m}$.
Medida de perímetro de **R**: $2 \cdot (27 \text{ m} + 12 \text{ m}) = 78 \text{ m}$.
A razão pedida é $\frac{72 \text{ m}}{78 \text{ m}} = \frac{12}{13}$.

12. Um grande terreno plano, de formato retangular, foi dividido em 3 lotes, conforme representação, a qual foi feita na escala 1 : 1000.

Banco de imagens/Arquivo da editora



a) $A_I = 400\ m^2$, $A_{II} = 2250\ m^2$ e $A_{III} = 2550\ m^2$.

a) Determine a medida de área, em metros quadrados, de cada um dos 3 lotes.

b) Se uma pessoa comprar os lotes **I** e **II**, que porcentagem da medida de área do terreno ela estará adquirindo?

Aproximadamente 51%.

c) Se o metro quadrado desse terreno for vendido por R$ 850,00, quanto será pago pela compra do lote **III**? R$ 2.167.500,00

13. Elabore no caderno um problema, em um contexto real, que envolva o conceito de medidas de área e de perímetro e que possa ser resolvido usando as operações a seguir.

$120\ m + 150\ m + 120\ m + 150\ m = 540\ m$

$120\ m \cdot 150\ m = 18\,000\ m^2$

14. **Troque ideias** com um colega e, juntos, leiam o texto a seguir.

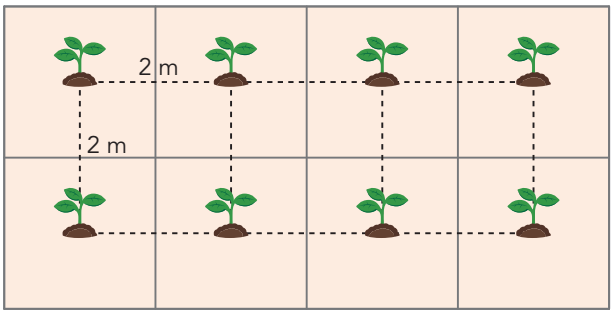
Uma região que foi desmatada, por fatores naturais ou não, geralmente pode ser recuperada. De acordo com a Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa), uma das estratégias de recuperação consiste em adotar ações de manejo que induzam os processos de regeneração natural da região. Uma delas é o plantio de mudas em área total. Nesse processo, as mudas podem ser plantadas de maneira sistemática (em linhas), com diversos tipos de espaçamento variando em função do tipo de vegetação que se quer restaurar, do relevo da região e da velocidade com que se deseja recobrir o solo. As espécies podem ser arranjadas de várias maneiras em função da disponibilidade de mudas e da ecologia local.

Usualmente, os espaçamentos são de 2 m × 2 m, resultando numa densidade de 2500 mudas/hectare, e de 3 m × 2 m, resultando numa densidade de aproximadamente 1667 mudas/hectare.

Em ambos os espaçamentos, as plantas ficam posicionadas ou em malhas quadradas, ou em malhas retangulares.

Fonte dos dados: ESTRATÉGIAS de recuperação [Código Florestal: adequação ambiental da paisagem rural]. *Embrapa*, Brasília, DF, [20–]. Disponível em: https://tedit.net/eu58r6. Acesso em: 11 jul. 2024.

As imagens não estão representadas em proporção.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Exemplo de disposição das mudas no espaçamento 2 m × 2 m.

Sabendo que 1 hectare (indicamos: 1 ha) equivale a $10\,000\ m^2$, responda no caderno às perguntas.

a) Qual foi o cálculo efetuado para serem obtidas as densidades de mudas por hectare quando os espaçamentos são 2 m × 2 m ou 3 m × 2 m?

$10\,000\ m^2 : (2 \cdot 2)\ m^2 = 2500$; $10\,000\ m^2 : (3 \cdot 2)\ m^2 \simeq 1667$

b) Se o espaçamento escolhido for de 5 m × 5 m, qual é a densidade de mudas por hectare? 400 mudas/hectare

c) Quais são os valores naturais a e b de modo que o espaçamento a m × b m resulte na maior densidade de mudas por hectare? $a = b = 1$ m

Observação

O hectare (ha) é uma unidade de medida de área prática e reconhecida internacionalmente, especialmente utilizada nos setores agrícola, florestal e imobiliário no Brasil. É comumente empregada para expressar áreas rurais, como terras de cultivo, pastagens e propriedades agrícolas.

13. Exemplo de problema: Para cercar um terreno de formato retangular, o proprietário precisa comprar arame farpado, que é medido em metros. Além disso, ele precisa comprar grama para plantar nesse terreno e, para isso, é necessário calcular a medida de área. Calcule as medidas de perímetro e de área desse terreno sabendo que as medidas das dimensões do retângulo que o representa são 120 m e 150 m.

INTERLIGANDO

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Cálculo da medida de área em um *software* gráfico

O desenvolvimento da tecnologia permitiu mais precisão na demarcação das fronteiras do território brasileiro e, consequentemente, uma melhora na estimativa da medida de área desse território. Além da tecnologia, alterações nos limites político-administrativos colaboram para a variação da estimativa da medida de área do território brasileiro.

A tabela a seguir apresenta a estimativa oficial publicada pelo IBGE para a medida de área do território brasileiro em alguns anos.

Estimativa oficial da medida de área do território brasileiro em alguns anos

Ano	Medida de área (em km^2)
2018	8 510 820,623
2019	8 510 295,914
2020	8 510 345,538
2021	8 510 345,540
2022	8 510 417,771

Fonte dos dados: ÁREAS territoriais. *IBGE*, Rio de Janeiro, 2022. Disponível em: https://tedit.net/x99gck. Acesso em: 15 jul. 2024.

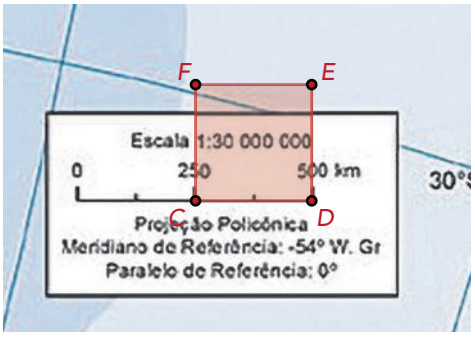
Agora, vamos estimar a medida de área do território brasileiro usando a imagem de um mapa do Brasil com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica.

No *site* https://tedit.net/af2qgh (acesso em: 15 jul. 2024), obtenha um mapa político do Brasil e salve-o no computador, na extensão ".jpg".

Experimente inserir a imagem do mapa do Brasil no aplicativo. Para isso, localize a opção de inserir imagem. O *software* deve permitir que você selecione o arquivo da imagem do mapa do Brasil que você converteu. Para que a imagem do mapa não prejudique a construção, procure configurá-la como "imagem de fundo". Em geral, isso é feito clicando sobre a imagem com o botão direito do *mouse*.

Com a ferramenta de construção de polígonos regulares, represente um quadrado cujo lado tenha a mesma medida da escala do mapa. Para isso, se o mapa tem escala de 1 cm : 250 km, por exemplo, marque os pontos *C* (em 250) e *D* (em 500) sobre a escala. Digite "4" no número de vértices do polígono regular e finalize.

O *software* exibirá o quadrado *CDEF*. Esse quadrado será tomado como unidade de medida-padrão de área.



Reprodução/IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

Detalhe ampliado da construção sobre a escala do mapa na tela do *software* de Geometria dinâmica.

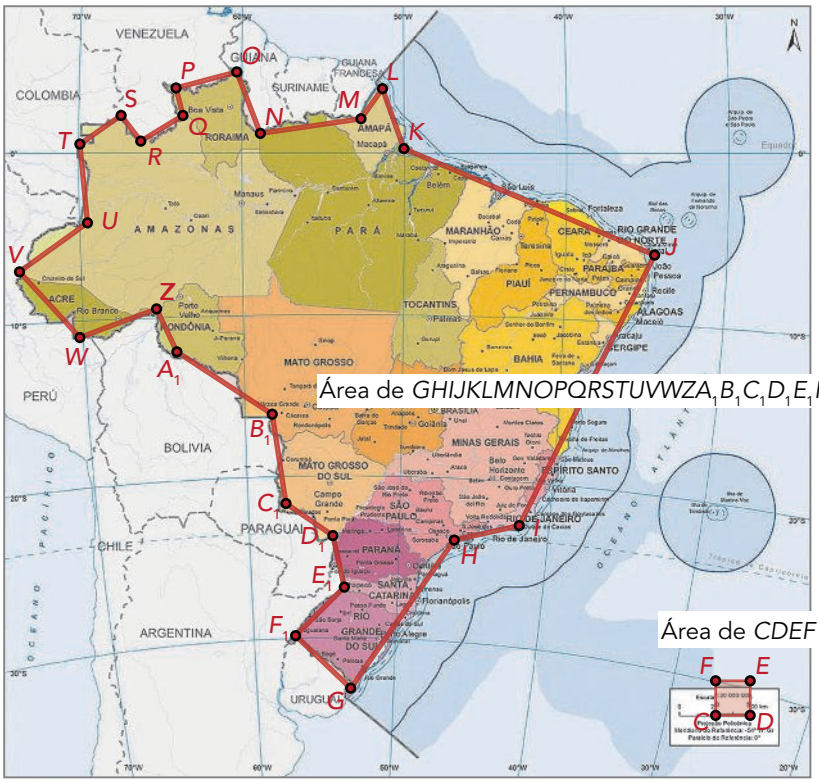
Agora, com a ferramenta de construção de polígonos, contorne, de modo aproximado, o território brasileiro representando uma linha poligonal fechada. Quando terminar, o *software* exibirá o polígono chamado, por exemplo, de $GHIJ...A_1...$ (a quantidade de vértices da poligonal vai depender da precisão que você queira ter).

Em seguida, utilizando a ferramenta de medição de área, selecione o quadrado *CDEF*; o *software* exibirá uma legenda com a medida de área desse polígono. Faça o mesmo com a

Não escreva no livro

poligonal que contornou o território brasileiro. A ideia é calcular a medida de área dessa poligonal usando a medida de área do quadrado *CDEF* como unidade de medida-padrão.

Dessa maneira, o *software* exibirá as medidas de área correspondentes aos dois polígonos representados.



Reprodução/IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

Representação da tela do *software* de Geometria dinâmica.

Fonte dos dados: IBGE. *Brasil político*. Rio de Janeiro: IBGE, [2021]. 1 mapa. Escala: 1 : 30 000 000. Disponível em: https://tedit.net/af2qgh. Acesso em: 10 set. 2024.

A medida de área do quadrado *CDEF* exibida pelo *software* corresponde a 250^2 km^2 e queremos saber quantos km^2 mede a área da poligonal que contornou o território brasileiro. Por meio da regra de três, podemos determinar esse valor, que é uma estimativa da medida de área do território nacional.

Área no *software*		Área real
0,36 u.a.	——	250^2 km^2
54 u.a.	——	A

$$\Rightarrow A = \frac{250^2 \cdot 54}{0{,}36}\ \text{km}^2 = 9\,375\,000\ \text{km}^2$$

O resultado obtido, nesse caso, apresenta uma variação percentual, aproximada, de 10,16% em relação à estimativa oficial da medida de área do território brasileiro em 2022.

1. É possível, usando o mesmo procedimento, encontrar uma estimativa mais próxima da estimativa oficial? Como você faria isso?

2. Qual é o motivo para definirmos o quadrado *CDEF* na escala apresentada?

3. Se uma região está em um mapa no qual não há uma escala gráfica, é possível estimar a medida de área dessa região? Como você faria?

1. Sim, é possível. Basta utilizar mais lados para a poligonal e, consequentemente, haverá mais precisão no contorno e na estimativa da medida de área.

2. O quadrado *CDEF* é a unidade-padrão para a medida de área do mapa. Utilizando essa unidade de medida de área, teremos uma estimativa para medida de área da região poligonal e, desse modo, conseguimos estimar a medida de área real da região.

3. Se houver informação da medida de distância real entre 2 pontos do mapa, é possível. Por exemplo, se o mapa for do estado da Bahia e você souber a medida de distância real entre 2 cidades (Salvador e Porto Seguro, por exemplo), basta adotar a mesma medida de distância entre elas como a medida do lado do quadrado (no caso, 390 km), isto é, basta determinar a medida do lado de um quadrado cujo lado é o segmento de reta que liga o centro dessas 2 cidades e repetir o procedimento apresentado.

Área do paralelogramo

Vamos determinar a medida de área do paralelogramo *ABCD*, representado na figura **1**, em que *b* e *h* são a medida da base e a da altura, respectivamente.

Projetando os vértices *A* e *D* sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$, obtêm-se os pontos *P* e *Q*, respectivamente, ficando assim determinado o retângulo *APQD*, representado na figura **2**.

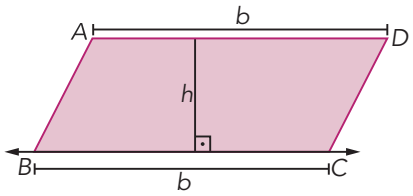


Figura **1**

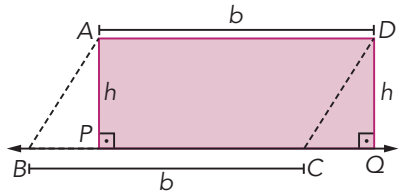


Figura **2**

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que os triângulos *APB* e *DQC* são congruentes (critério LAAo) e, portanto, têm medidas de área iguais.

Assim, a medida de área do paralelogramo *ABCD* é igual à do retângulo *APQD*, ou seja:

$$A = b \cdot h$$

A medida de área de um paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura, ambas com a mesma unidade de medida.

Pense nisto

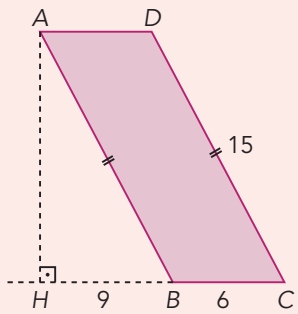
É correto afirmar que todo quadrado é retângulo? E afirmar que todo retângulo é paralelogramo e que todo quadrado é paralelogramo?

Pense nisto: Sim. Como em todo retângulo os lados adjacentes são perpendiculares entre si, então todo quadrado é retângulo.

Sim. Como todo paralelogramo tem os lados opostos paralelos entre si, então todo retângulo é paralelogramo e, consequentemente, todo quadrado é paralelogramo.

Atividades resolvidas

3. Calcule a medida de área do paralelogramo *ABCD* considerando que as medidas de comprimento indicadas na figura estão em centímetros.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

Note que a altura do paralelogramo é a perpendicular $\overline{AH}$ à reta suporte do lado $\overline{BC}$, traçada pelo vértice *A*.

Como o triângulo *AHB* é retângulo, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(AH)^2 + (HB)^2 = (AB)^2 \Rightarrow (AH)^2 = (15\text{ cm})^2 - (9\text{ cm})^2 = 144\text{ cm}^2 \Rightarrow AH = 12\text{ cm}$$

Logo, a medida de área de *ABCD* é:

$$A = BC \cdot AH = (6\text{ cm}) \cdot (12\text{ cm}) = 72\text{ cm}^2$$

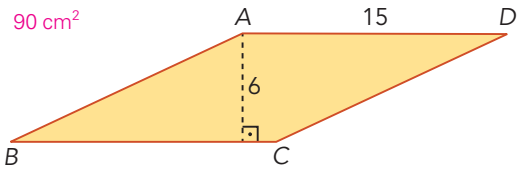
As imagens não estão representadas em proporção.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

15. Em cada caso, determine a medida de área do paralelogramo *ABCD* considerando que as medidas de comprimento indicadas estão em centímetros.

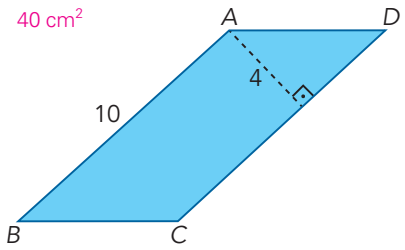
a) 90 cm²



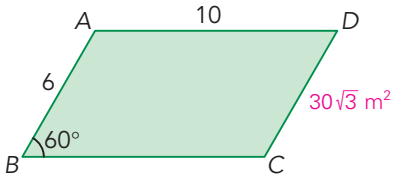
Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

b) 40 cm²

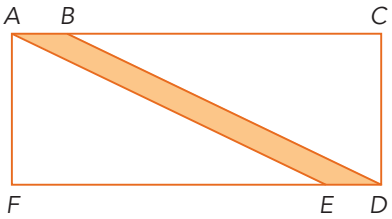


c)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

16. A figura representa o esquema de um projeto para a construção de um jardim em um terreno plano de formato retangular, representado pelo retângulo *ACDF*, cuja superfície tem medida de área 504 m².



Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesse esquema, a região destacada *ABDE* é um paralelogramo que representa uma passagem de pedestres que dividirá o jardim em 2 canteiros triangulares, *AFE* e *DCB*.

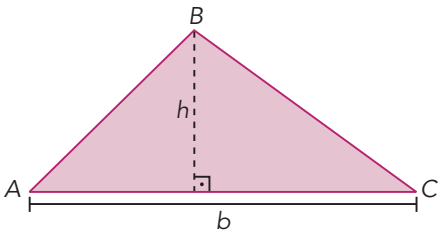
Se $AE = 30$ m e $AF = \frac{3}{4} \cdot FE$, qual será a medida de área da passagem de pedestres?

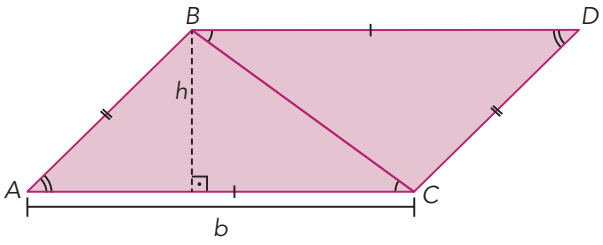
72 m²

Área do triângulo

Considere o triângulo *ABC* representado, em que a base $\overline{AC}$ mede *b* e a altura relativa a essa base mede *h*.

Note que as retas paralelas correspondentes aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, traçadas respectivamente pelos vértices *B* e *C*, se intersectam no ponto *D*, determinando assim o paralelogramo *ABDC*, cuja medida da base é *b* e cuja medida da altura é *h*, de acordo com a figura.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Como $AB = DC$, $\text{med}(B\hat{A}C) = \text{med}(B\hat{D}C)$ e $AC = DB$, os triângulos *ABC* e *DCB* são congruentes (critério LAL) e, portanto, as medidas de área são iguais.

Logo, a medida de área do triângulo *ABC* é igual à metade da medida de área do paralelogramo *ABDC*, ou seja:

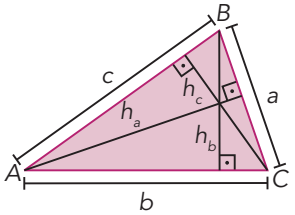
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

A medida de área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura (relativa a essa base), ambas com a mesma unidade de medida.

Observação

De modo geral, se h_a, h_b e h_c são as respectivas medidas das alturas relativas aos lados de medidas *a*, *b* e *c*, temos que a medida de área do triângulo *ABC* é:

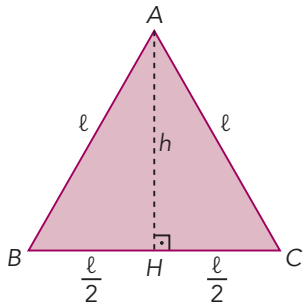
$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} \text{ ou } A = \frac{b \cdot h_b}{2} \text{ ou } A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Área do triângulo equilátero

Se ℓ é a medida do lado do triângulo equilátero ABC, representado a seguir, temos que $\overline{AH}$ é a altura e a mediana relativas ao lado $\overline{BC}$ e, portanto:



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\begin{cases} \overline{AH} \text{ é perpendicular a } \overline{BC} \\ H \text{ é o ponto médio de } \overline{BC} \Rightarrow HC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\ell}{2} \end{cases}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AHC, temos:

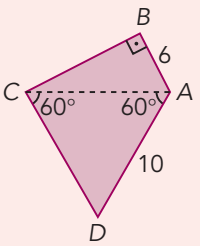
$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a medida de área do triângulo equilátero é dada por:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}$$

Atividades resolvidas

4. Determine a medida de área do quadrilátero $ABCD$ sabendo que $AB = 6$ cm, $AD = 10$ cm, a diagonal $\overline{AC}$ determina com os lados $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ ângulos de medida 60° e o lado $\overline{BC}$ é perpendicular ao lado $\overline{AB}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

A medida de área A do quadrilátero $ABCD$ é tal que $A = A_1 + A_2$, em que A_1 e A_2 são as medidas de área dos triângulos ACD e ABC, respectivamente.

- Cálculo de A_1:

  Como $\text{med}(A\hat{C}D) = \text{med}(D\hat{A}C) = 60°$, então $\text{med}(A\hat{D}C) = 60°$, ou seja, o triângulo ACD é equilátero e a medida de área é dada por:

  $$A_1 = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

  Logo, a medida de área do triângulo ACD é $25\sqrt{3}$ cm^2.

- Cálculo de A_2:

  Como o triângulo ABC é retângulo em B, então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

  $$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2 \Rightarrow 10^2 = (BC)^2 + 6^2 \Rightarrow BC = 8$$

  Assim, $A_2 = \dfrac{BC \cdot AB}{2} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24$.

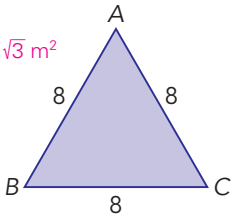
  Então, a medida de área do triângulo ABC é 24 cm^2, e a do quadrilátero $ABCD$ é:

  $$A = A_1 + A_2 = \left(25\sqrt{3} + 24\right); \text{ ou seja, } A = \left(25\sqrt{3} + 24\right)\text{cm}^2.$$

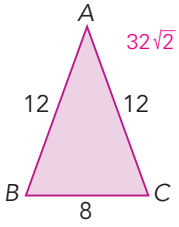
17. Determine a medida de área de cada um dos triângulos a seguir, nos quais as medidas dos lados estão indicadas em metros.

As imagens não estão representadas em proporção.

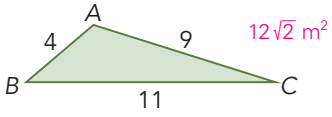
a) $16\sqrt{3}$ m²



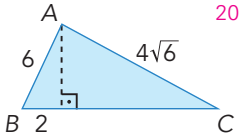
b) $32\sqrt{2}$ m²



c) $12\sqrt{2}$ m²



d) $20\sqrt{2}$ m²



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

18. Calcule a medida de área do triângulo em cada um dos seguintes casos.

a) A medida de um lado é 12 cm, e a medida da altura relativa a esse lado é 8 cm. 48 cm²

b) Os lados medem 8 m, 10 m e 14 m. $16\sqrt{6}$ m²

c) O triângulo é isósceles, os lados congruentes medem 12 m e o outro lado mede 6 m. $9\sqrt{15}$ m²

d) O triângulo é retângulo, com um dos catetos e a hipotenusa medindo 12 dm e 18 dm, respectivamente. $36\sqrt{5}$ dm²

e) Dois lados, que medem 14 m e 18 m, determinam entre si um ângulo que mede 30°. 63 m²

19. Sabe-se que, para representar uma bandeira, Valentina inicialmente dividiu uma folha de papel em quadradinhos congruentes (figura **1**) e depois, para poder pintá-la, apagou algumas linhas do quadriculado para que a folha ficasse conforme a figura **2**.

Figura **1**

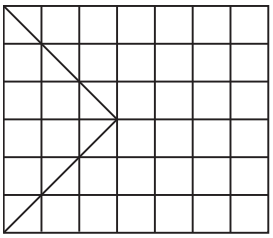
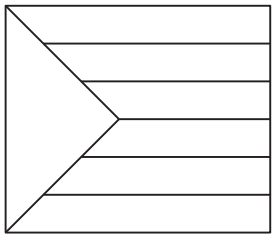


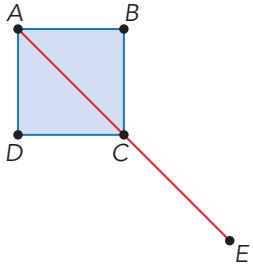
Figura **2**



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Se as medidas das dimensões da superfície da folha eram 0,24 m × 0,28 m, determine a medida de área da superfície triangular da bandeira, em centímetros quadrados. 144 cm²

20. A figura apresenta um quadrado *ABCD* em que $AB = 6$ cm e *C* é o ponto médio de $\overline{AE}$. Determine a medida de área do triângulo *BCE*, em centímetros quadrados. 18 cm²



Banco de imagens/Arquivo da editora

21. **Experimente** formular uma hipótese sobre a medida de área de triângulos usando um *software* de Geometria dinâmica.

Selecione a ferramenta de construção de retas. Determine uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ clicando em 2 pontos do plano. Selecione a ferramenta de construção de pontos e crie um ponto *C* não pertencente à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Localize a ferramenta de construção de retas paralelas e determine uma reta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que passa por *C*.

Selecionando a ferramenta de construção de polígonos, determine um triângulo *ABD* clicando nos pontos *A* e *B*, em um ponto da reta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ e novamente em *A*.

Movimente o ponto *D* e responda a esta pergunta no caderno.

a) Você acha que as áreas dos diversos triângulos *ABD* possíveis têm a mesma medida? Resposta pessoal.

21. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Atividades que envolvem tecnologia podem ou não ter a acessibilidade necessária aos estudantes. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

26. Exemplo de problema: Uma praça com medida de área de $25\sqrt{3}$ m² tem formato de triângulo equilátero. Para uma brincadeira, algumas crianças precisam contornar a praça com uma corda. Calcule quantos metros de corda serão necessários.

Não escreva no livro

Agora, selecione a ferramenta de medição de área e clique no triângulo *ABD*. Aparecerá a medida de área desse polígono.

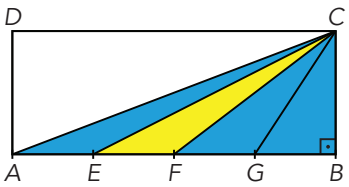
Movimente novamente o ponto *D* e responda ao que se pede a seguir no caderno.

b) Como você justifica que, mesmo que os triângulos tenham formas diversas, a medida de área é a mesma? Justificativa pessoal.

c) Formule uma hipótese sobre o que você percebeu. Resposta pessoal.

22. A figura a seguir representa o logotipo de uma empresa. O lado $\overline{AB}$ do retângulo *ABCD* dessa figura foi dividido em 4 partes de mesma medida. Além disso, o triângulo *EFC* será pintado de amarelo. Calcule o percentual que a medida de área da região colorida em amarelo (triângulo *EFC*) representa em relação à medida de área total do logotipo (retângulo *ABCD*).

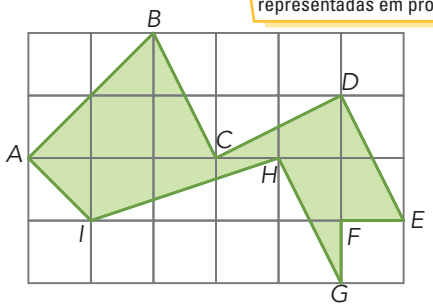
Banco de imagens/ Arquivo da editora



23. Um investidor comprou um terreno com o formato do polígono *ABCDEFGHI* da figura a seguir.

As imagens não estão representadas em proporção.

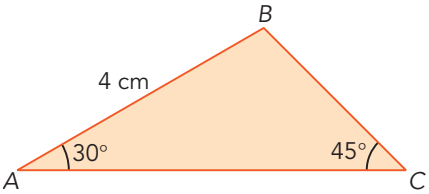
Banco de imagens/Arquivo da editora



Sabendo que o lado de cada quadradinho da malha mede 2 km, qual é a medida de área do terreno? 32 km²

24. Calcule a medida de área do triângulo *ABC* representado a seguir. $2 \cdot (1 + \sqrt{3})$ cm²

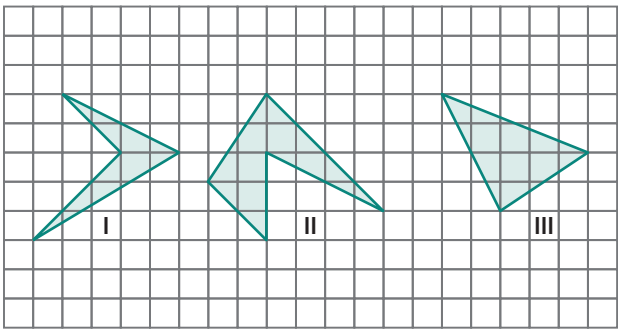
Banco de imagens/ Arquivo da editora



22. $AE = EF = FG = GB = x$. A área do retângulo mede $4x \cdot BC$. A área do triângulo mede $A_{EFC} = \frac{x \cdot BC}{2}$. O percentual pedido é $\frac{\frac{x \cdot BC}{2}}{4 \cdot x \cdot BC} = \frac{1}{8} = 0{,}125$; ou seja, 12,5%.

25. Na malha quadriculada a seguir, o lado de cada quadradinho mede 1 u.c.

Determine as medidas de área dos polígonos **I**, **II** e **III**. $A_I = 5$ u.a.; $A_{II} = 9$ u.a.; $A_{III} = 8$ u.a.

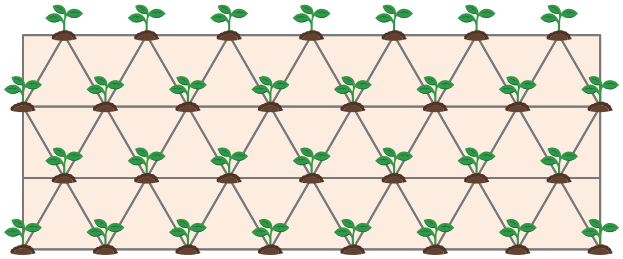


Banco de imagens/Arquivo da editora

26. Elabore no caderno um problema que envolva um triângulo equilátero cuja área meça $25\sqrt{3}$ m². Troque o problema com um colega e resolva o dele enquanto ele resolve o seu.

27. c) Não. Esse produto pode ser a medida de área de um paralelogramo composto de dois desses triângulos de lado medindo ℓ.

27. Retome a atividade **14**, sobre recuperação de regiões desmatadas, no tópico "Área do quadrado". Existe outro tipo de espaçamento que é no formato triangular. De acordo com a Embrapa, esse sistema permite aumentar em 15% o número de plantas por hectare, em relação ao quadrado. Nesse espaçamento, a malha é composta de triângulos equiláteros e a densidade pode ser calculada pela fórmula $d = \frac{1 \text{ ha}}{\ell \cdot h}$ (em mudas por hectare), em que ℓ e h são, respectivamente, a medida do lado e a medida da altura do triângulo.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Responda no caderno às perguntas.

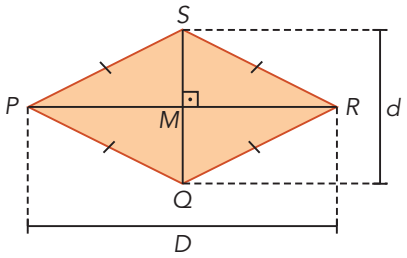
a) Qual é a medida de distância entre as linhas horizontais de mudas plantadas?
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Qual é a densidade de mudas por hectare em um espaçamento triangular em que o lado de cada triângulo mede 8 m?
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

c) Na fórmula apresentada, o produto $\ell \cdot h$ é a medida de área do triângulo de lado medindo ℓ? O que esse produto representa?

Área do losango

Considerando que o losango é um paralelogramo cujas medidas dos lados são iguais e cujas diagonais são perpendiculares entre si e se intersectam nos respectivos pontos médios, note na figura que ele pode ser decomposto em 4 triângulos retângulos congruentes (critério LLL) e a medida de área é igual à soma das medidas de área desses triângulos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, no losango *PQRS*, se *D* é a medida da diagonal maior e *d* a da diagonal menor, a medida de área *A* dessa superfície é tal que:

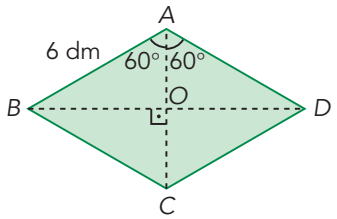
$$A = 4 \cdot A_{QMR} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}$$

Ou seja:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

A medida de área de um losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais, todas com a mesma unidade de medida.

Vamos calcular a medida de área do losango *ABCD*. Considerando *d* e *D* as respectivas medidas das diagonais menor e maior do losango *ABCD*, temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$AO = \frac{d}{2} \text{ e } BO = \frac{D}{2}, \text{ ou seja, } d = 2 \cdot AO \text{ e } D = 2 \cdot BO.$$

Além disso, temos que $\text{med}(B\hat{A}O) = \text{med}(D\hat{A}O) = 60°$.

Como o triângulo *AOB* é retângulo em *O*, temos:

$$\cos 60° = \frac{AO}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AO}{6} \Rightarrow AO = 3$$

$$\text{sen } 60° = \frac{BO}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BO}{6} \Rightarrow BO = 3\sqrt{3}$$

Assim, $d = 2 \cdot AO = 2 \cdot 3 = 6$ e $D = 2 \cdot BO = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

A diagonal menor mede 6 dm e a diagonal maior mede $6\sqrt{3}$ dm.

Logo, a medida de área do losango *ABCD* é:

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{(6\sqrt{3} \text{ dm}) \cdot (6 \text{ dm})}{2} = 18\sqrt{3} \text{ dm}^2$$

Pense nisto: Sim; decompondo-o em 2 triângulos equiláteros de lado 6 dm.

Logo: $2 \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ dm}^2 = 18\sqrt{3} \text{ dm}^2$

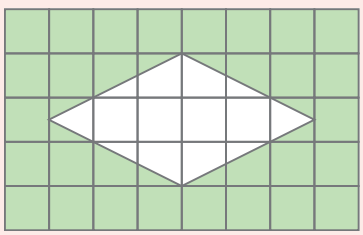
Não escreva no livro

Pense nisto

Existe outra maneira para calcular a área desse losango?

Atividades resolvidas

5. Francineide usou uma folha de papel quadriculado para representar a bandeira do Brasil. Sem conhecer as proporções reais entre os elementos geométricos da bandeira, iniciou o desenho representando o losango central para, então, pintar de verde a parte externa, como é mostrado na figura a seguir.


Banco de imagens/Arquivo da editora

Se as medidas das dimensões da superfície da folha são 10 cm × 16 cm, calcule:

a) a medida do lado do losango;

b) a medida de área da região colorida em verde.

Solução:

a) Como as dimensões da superfície da folha medem 10 cm × 16 cm, a medida do lado de cada um dos 40 quadradinhos é 2 cm. Assim, $D = 12$ cm e $d = 6$ cm são, respectivamente, a medida da diagonal maior e a da menor do losango.

Considerando o triângulo retângulo MOQ, se ℓ é a medida do lado do losango, temos:

$$\ell^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 45 \Rightarrow \ell = 3\sqrt{5}$$

Portanto, o lado do losango mede $3\sqrt{5}$ cm.

b) Se A é a medida de área da região colorida em verde, A_1 a medida de área da superfície da folha de papel e A_2 a medida de área do losango, temos:

$$A_1 = 10 \text{ cm} \cdot 16 \text{ cm} = 160 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{12 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}}{2} = 36 \text{ cm}^2$$

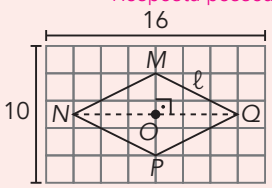
Como $A = A_1 - A_2$, temos:

$$A = 160 \text{ cm}^2 - 36 \text{ cm}^2 = 124 \text{ cm}^2$$

Pense nisto

Você conhece as normas da confecção da bandeira nacional? Pesquise os critérios relacionados às dimensões, às cores e ao posicionamento das figuras geométricas, das letras e das estrelas.

Resposta pessoal.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Pense nisto

Existem losangos que são retângulos?

Pense nisto: Sim. Um losango é um quadrilátero com lados congruentes e cujas diagonais são perpendiculares entre si. Se os ângulos internos do losango medirem 90°, então ele também será um quadrado. Como o quadrado é um retângulo com lados congruentes, então podemos concluir que existem losangos que são retângulos.

ATIVIDADES

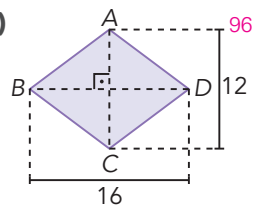
As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

28. Em cada caso, determine a medida de área do losango $ABCD$ considerando que as medidas de comprimento estão indicadas em decímetros.

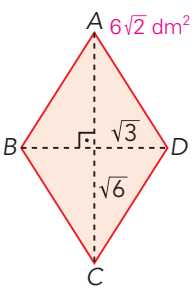
Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

a)



96 dm²

b)



6√2 dm²

29. Determine a medida de área do losango sob as seguintes condições.

a) A medida do lado é 8 cm, e uma das diagonais mede 12 cm. $24\sqrt{7}$ cm²

Se julgar necessário, relembre as propriedades de proporção com os estudantes.

b) As medidas das diagonais estão entre si na razão $\frac{3}{4}$, e o perímetro mede 50 m. 150 m²

30. Em um mapa feito em escala de 1 : 9 000 000, certo município aparece representado por um losango cujo lado mede 1,25 cm. Sabendo que as medidas das diagonais estão entre si assim como 3 está para 4, determine a medida de área real desse município, em quilômetros quadrados. 12 150 km²

31. Elabore um problema em um contexto cotidiano no qual seja necessário calcular a medida de área de um losango. Esse losango deve possuir uma diagonal medindo 16 m e medida de perímetro 40 m. Troque de problema com um colega e resolva o dele enquanto ele resolve o seu.

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Área do trapézio

Considere o trapézio *MNPQ*, da figura **1**, no qual as bases $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ medem *b* e *B*, respectivamente.

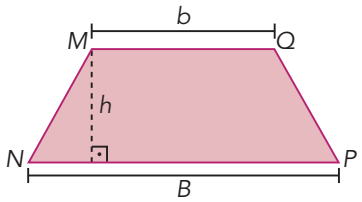


Figura **1**

Note, na figura **2**, que esse trapézio pode ser decomposto em 2 triângulos, T_1 e T_2, de mesma medida da altura e tais que a soma das medidas de área seja igual à medida de área *A* do trapézio *MNPQ*.

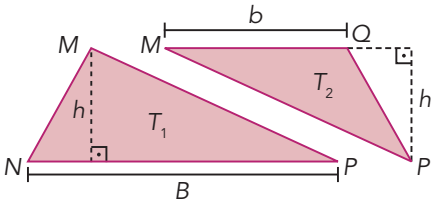


Figura **2**

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, temos:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{Bh + bh}{2}$$

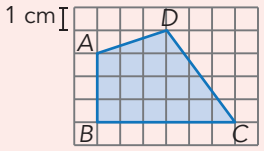
Ou seja:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

A medida de área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das medidas das bases pela medida de altura, todas com a mesma unidade de medida.

Atividades resolvidas

6. Calcule a medida de área do quadrilátero *ABCD* a seguir.

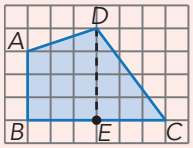


Solução:

Seja *E* um ponto sobre $\overline{BC}$ de modo que $\overline{DE} \perp \overline{BC}$. A medida de área *A* do quadrilátero *ABCD* é a soma das medidas de área A_1 do trapézio retângulo *ABED* e A_2 do triângulo retângulo *DEC*.

$$A_1 = \frac{(AB + DE) \cdot BE}{2} =$$

$$= \frac{(3 + 4) \cdot 3}{2} = 10{,}5$$



$$A_2 = \frac{EC \cdot DE}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

Assim, $A = A_1 + A_2 = 10{,}5 + 6 = 16{,}5$.

Logo, a medida de área do quadrilátero *ABCD* é 16,5 cm².

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

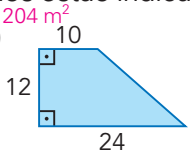
ATIVIDADES

As imagens não estão representadas em proporção.

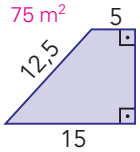
Não escreva no livro

32. Calcule a medida de área de cada um dos trapézios seguintes, nos quais as medidas dos lados estão indicadas em metros.

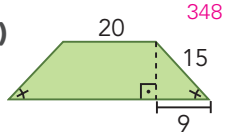
a) 204 m²



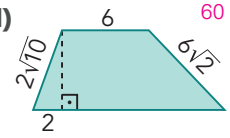
b) 75 m²



c) 348 m²

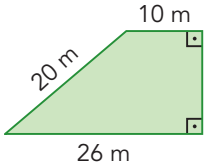


d) 60 m²



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

33. Sabe-se que os lotes de um condomínio fechado são vendidos ao preço de R$ 1.500,00 o metro quadrado. Nessas condições, por quanto deverá ser vendido o lote representado pela figura sabendo que tem formato de um trapézio retângulo com as medidas das dimensões indicadas? R$ 324.000,00



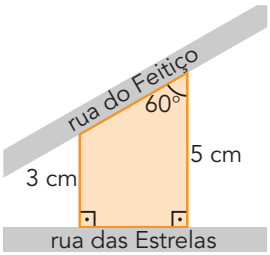
Banco de imagens/Arquivo da editora

34. $h = 4$ dm; $B = b + 3$ dm.
$A = 24 \Rightarrow \frac{1}{2}(b + B) \cdot h = 24 \Rightarrow (b + b + 3) \cdot 4 = 48 \Rightarrow b = 4{,}5$
Logo, $B = b + 3$ dm $= 4{,}5$ dm $+ 3$ dm $= 7{,}5$ dm.

34. Considere um trapézio cuja altura mede 4 dm e no qual a medida da base maior excede a medida da base menor em 3 dm. Se a medida de área desse trapézio é 24 dm², determine as medidas das bases.

35. Na figura seguinte tem-se a representação de um terreno com frente para 2 ruas, feita em uma escala de 1 : 2 000.

Banco de imagens/Arquivo da editora

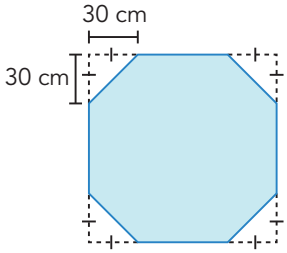


a) Qual é a medida de comprimento, em metros, da frente para a rua do Feitiço? 80 m

b) Qual é a medida de área desse terreno em metros quadrados? $3\,200\sqrt{3}$ m²

36. Uma pessoa tinha uma mesa de granito cuja superfície tinha o formato de um quadrado com lado medindo 1,20 m. Ela contratou os serviços de uma marmoraria para alterar o formato do tampo da mesa transformando-o num octógono, conforme mostra a figura.
Sabendo que as superfícies das partes retalhadas da pedra original são todas congruentes entre si, calcule:

Banco de imagens/Arquivo da editora



a) a medida de perímetro da superfície da mesa octogonal (adote $\sqrt{2} = 1{,}4$); 4,08 m

b) a medida de área da superfície octogonal. 1,26 m²

37. Elabore no caderno um problema em um contexto cotidiano envolvendo um trapézio cuja medida de área seja 100 dm². Troque o problema com um colega e resolva o dele enquanto ele resolve o seu.

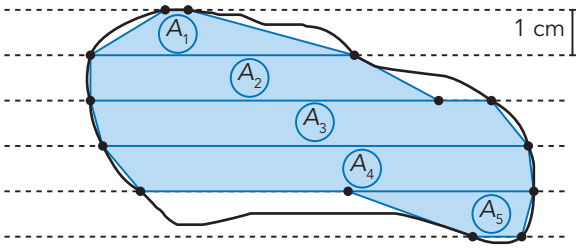
38. **Troque ideias** com um colega, e, juntos, representem em uma folha de papel uma linha fechada (linha que começa e termina no mesmo ponto). Conversem sobre como estimar a medida de área da superfície dessa figura.
Após a conversa, sigam os próximos passos.

Para estimar a medida de área da superfície **por falta**:

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

- representem linhas paralelas com 1 cm de medida de distância entre elas;
- representem trapézios (no interior da superfície) de modo que as bases estejam sobre as linhas paralelas;



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

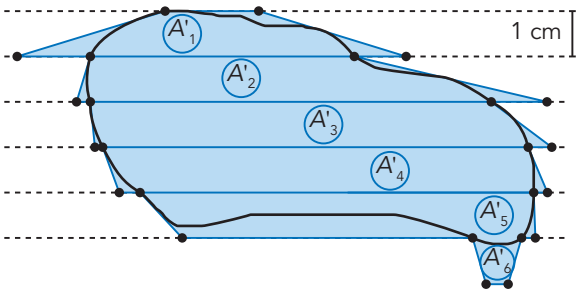
- meçam as bases e calculem as medidas de área A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5.

Uma estimativa para a medida de área da superfície do exemplo por falta é:

$$A_f = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

Para estimar a medida de área da superfície **por excesso**:

- aproveitem as linhas paralelas traçadas anteriormente e representem trapézios de modo que os lados não paralelos tangenciem a linha fechada e as bases estejam sobre as linhas paralelas;



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

- meçam as bases e calculem as medidas de área A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 e A'_5.

Uma estimativa para a medida de área da superfície do exemplo por excesso é:

$$A_e = A'_1 + A'_2 + A'_3 + A'_4 + A'_5 + A'_6$$

Tendo as estimativas das medidas de área por excesso e por falta, é imediato concluir que a medida de área A da superfície é tal que $A_f < A < A_e$. Além disso, é razoável assumir que a medida de área A é aproximadamente igual à média aritmética entre as medidas A_f e A_e, isto é, $A = \frac{A_f + A_e}{2}$.

Também é possível usar retângulos no lugar dos trapézios. Resposta pessoal.

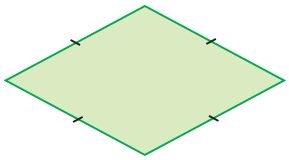
Na atividade **38**, comente com os estudantes que, dependendo da linha fechada que eles representarem, é possível que o número de regiões trapezoidais seja maior ou menor do que os indicados nos exemplos por falta e por excesso.

37. Exemplo de problema: A tampa de uma caixa tem o formato de um trapézio cujas medidas das bases são 8 dm e 12 dm. Sabendo que a medida de área dessa tampa com formato de trapézio é 100 dm², calcule a medida da altura.

Polígonos regulares

Vamos analisar os quadriláteros a seguir.

- **Losango**



Como o losango tem os lados congruentes, o losango é equilátero.

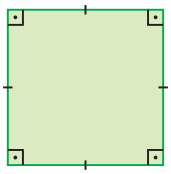
- **Retângulo**

Como o retângulo tem os ângulos internos congruentes, o retângulo é equiângulo.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

- **Quadrado**

Como o quadrado tem os lados congruentes e os ângulos internos congruentes, o quadrado é equilátero e equiângulo.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

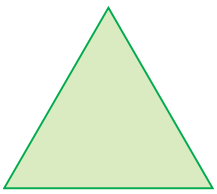
Dos três quadriláteros anteriores, só o quadrado tem lados congruentes e ângulos internos congruentes. Logo, ele é um quadrilátero regular.

Um **polígono regular** é um polígono convexo que tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

Se julgar necessário, retome com os estudantes o conceito de polígono convexo: um polígono contido num plano é convexo se, ao traçarmos uma reta sobre cada lado desse polígono, o restante dele ficar no mesmo semiplano, isto é, em um dos dois semiplanos que a reta determina.

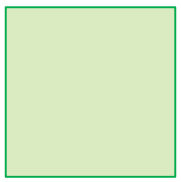
Exemplos de polígono regular:

- com 3 lados



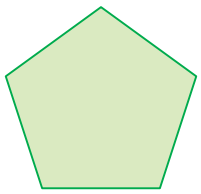
Triângulo regular (triângulo equilátero).

- com 4 lados



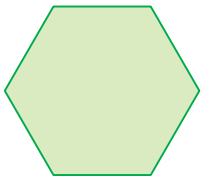
Quadrilátero regular (quadrado).

- com 5 lados



Pentágono regular.

- com 6 lados



Hexágono regular.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Elementos notáveis de um polígono regular

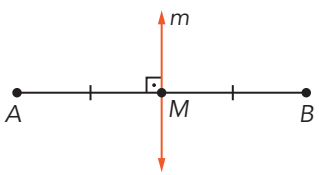
Se julgar necessário, retome com os estudantes os conceitos de circunferências inscritas e circunscritas a polígonos.

- **Centro**: é o centro comum das circunferências inscrita e circunscrita. É o ponto em que concorrem as mediatrizes dos lados do polígono regular. É o ponto em que concorrem as bissetrizes dos ângulos internos do polígono regular.
- **Apótema**: é um segmento de reta com uma extremidade no centro do polígono e a outra no ponto médio de um lado ao qual ele é perpendicular.

Observação

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio.

Na imagem a reta m é a mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$. Note que m intersecta $\overline{AB}$ no ponto médio M.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Dica

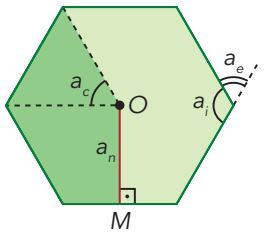
Artigo "Por que o parafuso é sextavado?", de Luiz Márcio P. Imenes e José Jakubovic (*Revista Professor de Matemática*, n. 4)

Quando tem a cabeça prismática (em formato de prisma), um parafuso deve ser apertado e desapertado por uma chave que se encaixe corretamente. Levando em consideração a quantidade de giros necessária para o aperto e a facilidade do encaixe, entre outros detalhes, o artigo exemplifica a razão do uso do parafuso de cabeça sextavada. Disponível em: https://tedit.net/3at3d9. Acesso em: 12 jul. 2024.

Observação

A medida do ângulo externo é $a_e = 180° - a_i$.

Analise a figura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Nessa figura:

- O é o centro;
- M é o ponto médio de um lado;
- $\overline{OM}$ é o apótema (e tem medida a_n);
- a_c é a medida do ângulo central – ângulo determinado por dois segmentos de reta com extremidades no centro O e nos vértices de um lado;
- a_i é a medida do ângulo interno – ângulo determinado por dois lados consecutivos do polígono;
- a_e é a medida do ângulo externo – ângulo suplementar adjacente a um ângulo interno do polígono.

Se o polígono regular tem n lados, valem as seguintes expressões.

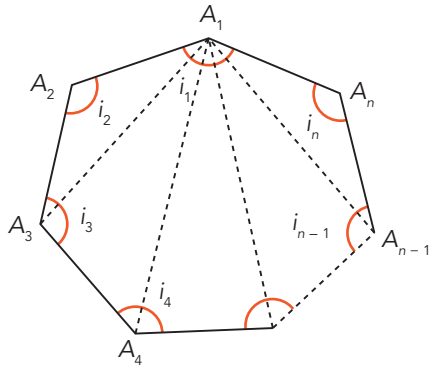
1. A medida do ângulo central é $a_c = \frac{360°}{n}$.

2. A soma das medidas dos ângulos internos é:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

Sejam A_1, A_2, A_3, A_4, ... , A_n os vértices de um polígono convexo de n lados.

A partir de um único vértice, traçamos todas as diagonais. Como consequência, o polígono ficará dividido em $(n - 2)$ triângulos. Assim, a soma S_i das medidas dos ângulos internos do polígono $S_i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \ldots + i_n$ será igual à soma das medidas dos ângulos internos dos $(n - 2)$ triângulos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

3. A medida do ângulo interno é:

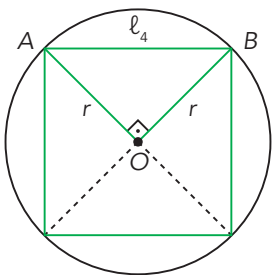
$$a_i = \frac{S_i}{n} \Rightarrow a_i = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$$

Caso julgue pertinente, retome com os estudantes as demonstrações dessas propriedades, já estudadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Lado e apótema de alguns polígonos regulares

Lado e apótema do quadrado inscrito em uma circunferência

Vamos calcular a medida do lado (ℓ_4) e a medida do apótema (a_4) de um quadrado inscrito em uma circunferência com medida do raio r conhecida.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Cálculo da medida do lado (ℓ_4).

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OAB, temos:

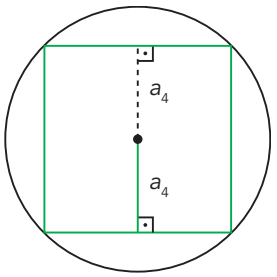
$$(\ell_4)^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow (\ell_4)^2 = 2r^2 \Rightarrow \ell_4 = r\sqrt{2}$$

- Cálculo da medida do apótema (a_4).

$$a_4 + a_4 = \ell_4 \Rightarrow 2a_4 = \ell_4 \Rightarrow a_4 = \frac{\ell_4}{2}$$

Substituindo ℓ_4, temos:

$$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Lado e apótema do hexágono regular inscrito em uma circunferência

Vamos calcular a medida do lado (ℓ_6) e a medida do apótema (a_6) de um hexágono regular inscrito em uma circunferência com medida do raio r conhecida.

- Cálculo da medida do lado (ℓ_6).

No triângulo OAB, temos:

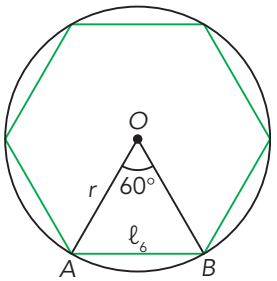
$$\text{med}(A\hat{O}B) = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$\overline{AO} \cong \overline{OB}$, então $\triangle OAB$ é isósceles e $O\hat{A}B \cong O\hat{B}A$.

Logo, temos $\text{med}(O\hat{A}B) = \text{med}(O\hat{B}A) = \text{med}(A\hat{O}B) = 60^\circ$. Portanto, $\triangle OAB$ é equilátero.

Então, a medida do lado é igual à medida do raio.

$$\ell_6 = r$$



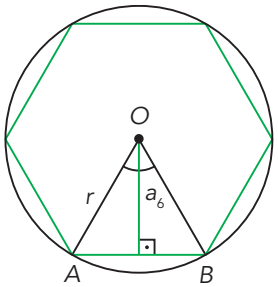
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que o hexágono regular é composto de 6 triângulos equiláteros.

- Cálculo da medida do apótema (a_6).

O apótema do hexágono coincide com a altura do triângulo equilátero OAB de lado com medida r. Portanto:

$$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$



Lado e apótema do triângulo equilátero inscrito em uma circunferência

Vamos calcular a medida do lado (ℓ_3) e a medida do apótema (a_3) de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência com medida do raio r conhecida.

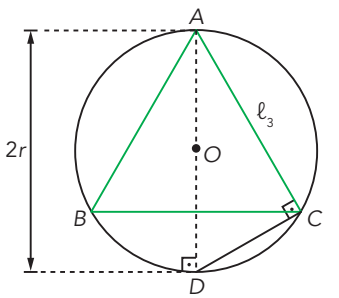
- Cálculo da medida do lado (ℓ_3).

Representamos o diâmetro $\overline{AD}$.

Como $AB = AC = BC = \ell_3$, então os pontos A, B e C dividem a circunferência em 3 arcos congruentes. Assim,

$\text{med}(\overset{\frown}{AC}) = \text{med}(A\hat{O}C) = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ e, consequentemente,

$\text{med}(D\hat{O}C) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como med$\left(D\widehat{O}C\right) = 60°$ e $OC = OD$ (medidas dos raios), o triângulo OCD é equilátero.

Logo, $CD = r$.

Por estar inscrito em uma semicircunferência, o triângulo ACD é retângulo em C.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ACD, temos:

$$(2r)^2 = r^2 + (\ell_3)^2 \Rightarrow (\ell_3)^2 = 3r^2 \Rightarrow \boxed{\ell_3 = r\sqrt{3}}$$

Caso julgue pertinente, retome com os estudantes a justificativa dessa propriedade já vista nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

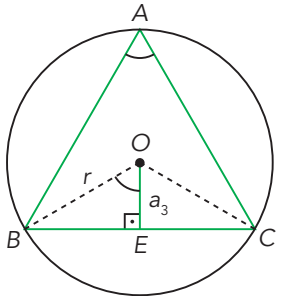
- Cálculo do apótema (a_3).

  A medida da altura do triângulo equilátero ABC é $AE = AO + OE = AO + a_3 = a_3 + r$.

  Por outro lado, a medida dessa altura é igual a:

$$\frac{\ell_3 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3r}{2}$$

  Assim: $a_3 + r = \frac{3r}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{3r}{2} - r \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{r}{2}}$



Banco de imagens/Arquivo da editora

  O apótema do triângulo tem medida igual à metade da medida do raio r.

Área de um polígono regular

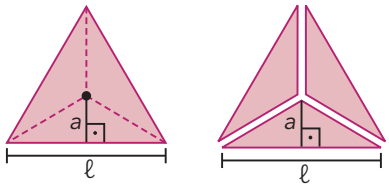
Vamos indicar como:

- n o número de lados do polígono regular;
- ℓ a medida do lado;
- a a medida do apótema;
- p a medida de perímetro ($p = n \cdot \ell$), sendo, consequentemente, $\frac{p}{2} = \frac{n \cdot \ell}{2}$ a medida do semiperímetro.

Assim, temos:

- Para $n = 3$, o polígono regular é um **triângulo equilátero**.

  Esse polígono é constituído de 3 triângulos congruentes, nos quais as alturas medem a.

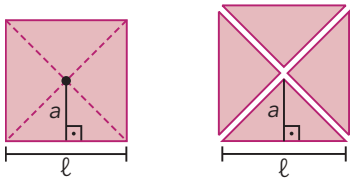


  Temos $\begin{cases} A = 3 \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} \\ p = 3\ell \end{cases}$

  Logo, $A = (3\ell) \cdot \frac{a}{2} = (p) \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow A = \frac{p \cdot a}{2}$.

- Para $n = 4$, o polígono regular é um **quadrado**.

  Esse polígono é constituído de 4 triângulos congruentes, nos quais as alturas medem a.

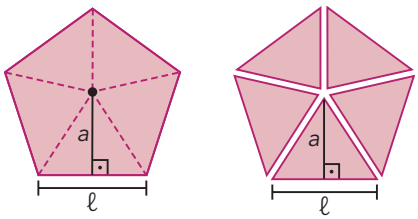


  Temos $\begin{cases} A = 4 \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} \\ p = 4\ell \end{cases}$

  Logo, $A = (4\ell) \cdot \frac{a}{2} = (p) \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow A = \frac{p \cdot a}{2}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- Para $n = 5$, o polígono é um **pentágono regular**.
  Esse polígono é constituído de 5 triângulos congruentes, nos quais as alturas medem a.

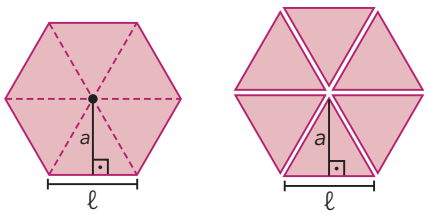


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

  Temos $\begin{cases} A = 5 \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} \\ p = 5\ell \end{cases}$

  Logo, $A = (5\ell) \cdot \dfrac{a}{2} = (p) \cdot \dfrac{a}{2} \Rightarrow A = \dfrac{p \cdot a}{2}$.

- Para $n = 6$, o polígono é um **hexágono regular**.
  Esse polígono é constituído de 6 triângulos congruentes, nos quais as alturas medem a.



  Temos $\begin{cases} A = 6 \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} \\ p = 6\ell \end{cases}$

  Note que a medida de área do hexágono regular é igual à soma das medidas de área de 6 triângulos equiláteros congruentes. Assim, podemos expressar a medida de área do hexágono regular também em função da medida do lado do hexágono, ou seja: $A = 6 \cdot \dfrac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

  Logo, $A = (6\ell) \cdot \dfrac{a}{2} = (p) \cdot \dfrac{a}{2} \Rightarrow A = \dfrac{p \cdot a}{2}$.

- Se o polígono regular tem n lados, então a medida de área é igual a n vezes a medida de área do triângulo de base ℓ e a medida de altura a.

$$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{p}{2} \cdot a$$

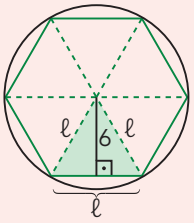
Logo, a **área de um polígono regular** tem medida igual ao produto da medida do semiperímetro pela medida do apótema, ambas na mesma unidade.

$$A = \frac{p \cdot a}{2}$$

Atividades resolvidas

Não escreva no livro

7. O apótema de um hexágono regular mede 6 cm. Determine a medida de área dele.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

$$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 6 \Rightarrow \ell = 4\sqrt{3}$$

A medida do lado ℓ é $4\sqrt{3}$ cm.

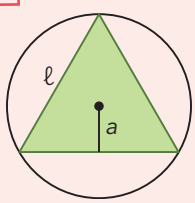
$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot A_{\text{triângulo}} = 6 \cdot \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3}$$

A área do hexágono mede $72\sqrt{3}$ cm².

Pense nisto

Existe outra maneira para calcular a medida de área desse hexágono?

8. Calcule a medida de área de um triângulo equilátero que está inscrito em uma circunferência cujo raio mede 4 cm.



Solução:

Já estudamos que a medida do lado do triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio medindo r é dada por $\ell = r\sqrt{3}$. Então, nesse caso, $\ell = 4\sqrt{3}$ cm. Assim, o perímetro do triângulo mede $p = 12\sqrt{3}$ cm.

Concluímos também que a medida do apótema desse triângulo é dada por $a = \dfrac{r}{2}$.

Então, $a = \dfrac{4 \text{ cm}}{2} = 2$ cm.

A medida de área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{(12\sqrt{3}) \cdot 2}{2} = 12\sqrt{3}$$

Portanto, a medida de área é $12\sqrt{3}$ cm².

Poderíamos também ter usado a fórmula da medida de área do triângulo equilátero:

$$A = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}; \text{ isto é, } A = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Pense nisto: Como o lado mede $4\sqrt{3}$, a medida do perímetro do hexágono é $p = 24\sqrt{3}$ cm. Assim, a medida de área é $\dfrac{p \cdot a}{2} = \dfrac{(24\sqrt{3}) \cdot 6}{2} = 72\sqrt{3}$; ou seja, $72\sqrt{3}$ cm².

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

39. Determine o que se pede.

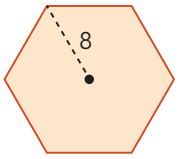
a) A medida do apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo diâmetro mede 4 cm. $\sqrt{3}$ cm

b) A medida do apótema de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência cujo raio mede 5 cm. 2,5 cm

c) A medida de área de um hexágono regular cujo lado mede 4 cm. $24\sqrt{3}$ cm²

d) A medida de área de um hexágono regular cuja distância entre 2 lados paralelos mede 18 cm. $162\sqrt{3}$ cm²

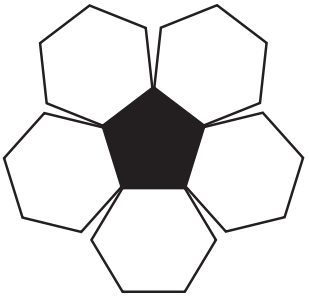
40. Calcule a medida de área do hexágono regular, no qual a unidade da medida indicada é o centímetro. $96\sqrt{3}$ cm²



Banco de imagens/ Arquivo da editora

41. O tampo de uma mesa tem o formato de um hexágono regular cujo lado mede 0,8 m. Calcule a medida de área da superfície desse tampo. $0{,}96\sqrt{3}$ m²

42. O logotipo de uma empresa é composto de 1 pentágono regular e 5 hexágonos regulares, ambas as formas com lados de mesma medida, como indica a figura. Sabendo que o apótema de cada hexágono mede 3 cm, calcule:



Banco de imagens/Arquivo da editora

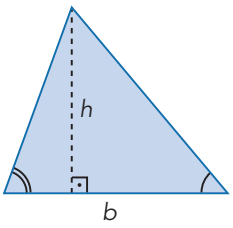
a) a medida de área de cada hexágono; $18\sqrt{3}$ cm²

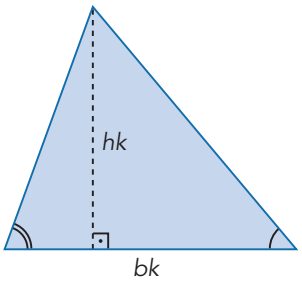
b) a medida de perímetro do pentágono. $10\sqrt{3}$ cm

Razão entre medidas de área de figuras semelhantes

Inicialmente, vamos determinar a razão entre as medidas de área de 2 triângulos semelhantes.

Considere 2 triângulos semelhantes em que a razão de semelhança é k (com $k > 0$).



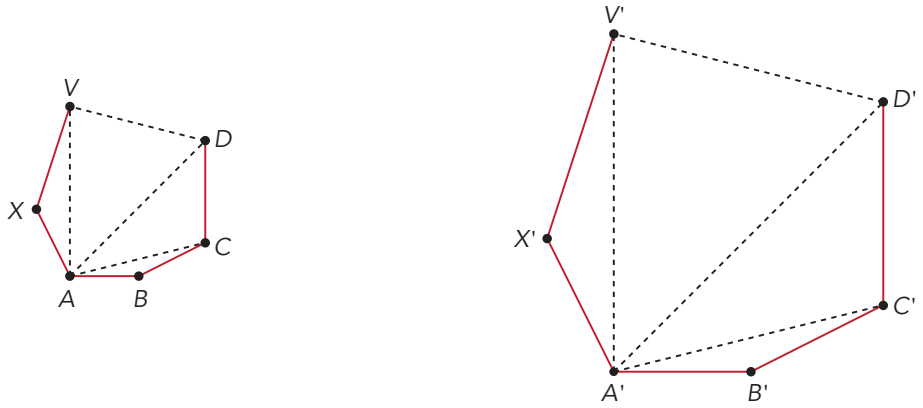


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Se um dos triângulos tem a base medindo b e a altura relativa a essa base medindo h, o outro triângulo semelhante terá a base correspondente medindo $b \cdot k$ e a altura, relativa a essa base, medindo $h \cdot k$, ambas com a mesma unidade de medida. Assim, a medida de área de um dos triângulos será $A_1 = \frac{b \cdot h}{2}$ e a do outro $A_2 = \frac{b \cdot k \cdot h \cdot k}{2} = k^2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = k^2 \cdot A_1$.

Logo, $\frac{A_2}{A_1} = k^2$, isto é, a razão entre as medidas de área de 2 triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Tendo essa propriedade em mente, considere os polígonos semelhantes a seguir. Cada um deles pode ser decomposto em triângulos respectivamente semelhantes.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, $ABCD...VX \sim A'B'C'D'...V'X' \Rightarrow ABC \sim A'B'C'$ e $ACD \sim A'C'D'$ e ... e $AVX \sim A'V'X'$.

Da semelhança entre os respectivos triângulos semelhantes, temos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots = \frac{VX}{V'X'} = \frac{AX}{A'X'} = k \text{ (razão de semelhança)}$$

A razão entre as medidas de área dos respectivos triângulos semelhantes é:

$$\frac{A_{ABC}}{A_{A'B'C'}} = \frac{A_{ACD}}{A_{A'C'D'}} = \ldots = \frac{A_{AVX}}{A_{A'V'X'}} = k^2$$

Logo, a razão entre as medidas de área dos polígonos $ABCD...VX$ e $A'B'C'D'...V'X'$ é:

$$\frac{A_{ABCD...VX}}{A_{A'B'C'D'...V'X'}} = \frac{A_{ABC} + A_{ACD} + \ldots + A_{AVX}}{A_{A'B'C'} + A_{A'C'D'} + \ldots + A_{A'V'X'}} = \frac{k^2 A_{A'B'C'} + k^2 A_{A'C'D'} + \ldots + k^2 A_{A'V'X'}}{A_{A'B'C'} + A_{A'C'D'} + \ldots + A_{A'V'X'}} =$$

$$= k^2 \frac{A_{A'B'C'} + A_{A'C'D'} + \ldots + A_{A'V'X'}}{A_{A'B'C'} + A_{A'C'D'} + \ldots + A_{A'V'X'}} = k^2$$

Portanto:

A razão entre as medidas de área de 2 polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Atividades resolvidas

9. O piso de uma piscina tem o formato de um hexágono regular e foi representado em uma figura elaborada na escala 1 : 200. Se, na representação, a área do hexágono mede 2,55 cm², qual é a medida de área real do piso dessa piscina?

Solução:

O hexágono determinado pelo piso da piscina e o hexágono que a representa na figura são semelhantes e a razão de semelhança é $k = \frac{1}{200}$.

Então, a medida de área real do piso da piscina pode ser calculada por:

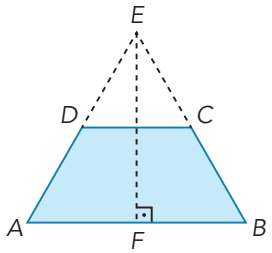
$$k^2 = \frac{A_{\text{figura}}}{A_{\text{piscina}}} \Rightarrow \left(\frac{1}{200}\right)^2 = \frac{2{,}55}{A_{\text{piscina}}} \Rightarrow A_{\text{piscina}} = 2{,}55 \cdot (200)^2 = 102\,000$$

A medida de área real do piso da piscina é 102 000 cm² ou 10,2 m².

43. Seja H_1 um heptágono cuja medida de área da superfície é 20 cm². Sabendo que H_2 é um heptágono semelhante a H_1 e tem medida de perímetro igual a $\frac{3}{4}$ da medida de perímetro de H_1, determine a medida de área de H_2.

44. Considere o trapézio $ABCD$, de 10 cm de medida da altura, no qual as bases medem 50 cm e 30 cm. Prolongando os lados não paralelos, obtém-se o ponto E, como indicado na figura. Determine a razão entre a medida de área do triângulo EDC e a medida de área do trapézio $ABCD$.

$\frac{9}{16}$



Banco de imagens/Arquivo da editora

43. Sejam p_1 e A_1, respectivamente, a medida de perímetro e a de área de H_1 e p_2 e A_2, respectivamente, a medida de perímetro e a de área de H_2. Temos: $p_2 = \frac{3}{4} \cdot p_1 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{3}{4} = k$ (razão de semelhança entre H_2 e H_1).

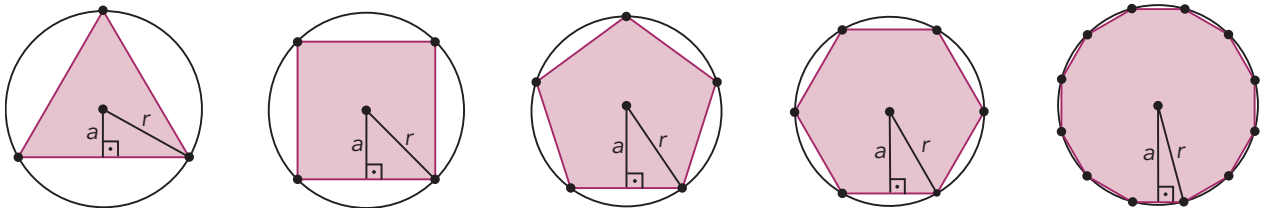
A razão entre as medidas de área será: $\frac{A_2}{A_1} = k^2 \Rightarrow \frac{A_2}{20\ \text{cm}^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_2 = 20 \cdot \frac{9}{16} = 11{,}25$; ou seja, 11,25 cm².

Área do círculo e das partes do círculo

Área do círculo

Considere esta sucessão de polígonos regulares inscritos em circunferências de raio medindo r.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note nessa sucessão que, se o número de lados do polígono aumenta, a medida do apótema também aumenta, ao passo que a medida do lado diminui. Desse modo, quanto maior for o número de lados de um polígono, mais:

- a medida de perímetro (p) do polígono se aproxima do valor da medida de comprimento da circunferência ($2\pi r$);
- a medida do apótema (a) se aproxima da medida do raio da circunferência (r).

Quando o número de lados de um polígono é arbitrariamente grande, temos:

$$\begin{cases} p = 2\pi r \\ a = r \end{cases}$$

Como a medida de área de um polígono regular é dada por $A = \frac{p \cdot a}{2}$, nesse caso, temos $A = \frac{(2\pi r) \cdot r}{2} = \pi r^2$, que é a expressão da medida de área do círculo cujo raio mede r.

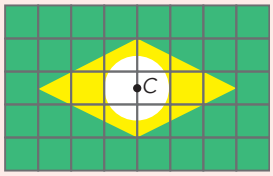
Assim:

$$A = \pi r^2$$

A medida de área de um círculo é igual ao produto do número real π pelo quadrado da medida do raio do círculo

Atividades resolvidas

10. Considere que Francineide, a menina citada na atividade resolvida **5**, continuou aqui a representação da bandeira do Brasil. Agora, ela representou de branco o círculo central da bandeira, tangente a 2 segmentos de reta na vertical do quadriculado. O ponto C do círculo é o centro do retângulo, conforme a figura a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Determine a medida de área da superfície pintada em amarelo na bandeira por Francineide lembrando que as dimensões da superfície da folha retangular quadriculada medem 10 cm × 16 cm.

Solução:

A medida de área (A) da superfície pintada em amarelo é igual à diferença entre as medidas de área da região limitada pelo losango (A_L) e do círculo (A_C).

O cálculo de A_L encontra-se na atividade resolvida **5** resultando em $A_L = 36\ cm^2$.

A medida do raio do círculo é igual à medida do lado de um quadradinho, ou seja, $r = 2$ cm. Assim, a medida de área do círculo, em cm^2, é:

$$A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

Logo:

$$A = A_L - A_C \Rightarrow A = 36 - 4\pi \Rightarrow A = 4(9 - \pi)$$

A medida de área da superfície da bandeira pintada de amarelo é $4(9 - \pi)\ cm^2$.

45. a) $A = \pi \cdot (11\ dm)^2 = 121\pi\ dm^2$

b) $d = 2r = 24\ m \Rightarrow r = 12\ m$

$A = \pi \cdot (12\ m)^2 = 144\pi\ m^2$

c) $2\pi r = 32\pi\ cm \Rightarrow r = 16\ cm$

$A = \pi \cdot (16\ cm)^2 = 256\pi\ cm^2$

ATIVIDADES

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

45. Determine a medida de área do círculo sob as seguintes condições:

a) a medida do raio é 11 dm;

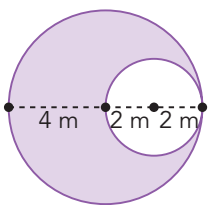
b) a medida do diâmetro é 24 m;

c) o círculo tem 32π cm de medida de comprimento.

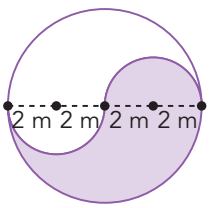
46. Calcule as medidas de área das partes coloridas das figuras.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) $12\pi\ m^2$



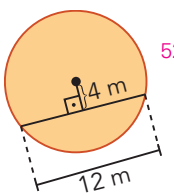
b) $8\pi\ m^2$



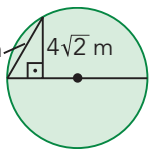
47. Calcule a medida de área de cada círculo representado a seguir.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) $52\pi\ m^2$



b) $81\pi\ m^2$



48. Sabe-se que o tampo da mesa mostrada na ilustração a seguir é composto de 2 tábuas retangulares, cada qual com largura medindo 0,35 m, e 2 tábuas em formato de semicírculo, cada uma com diâmetro medindo 0,80 m.

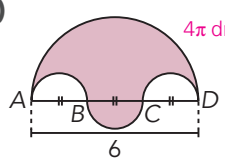
Banco de imagens/Arquivo da editora

Experimente calcular a medida de área da superfície do tampo dessa mesa usando uma calculadora e adotando 3,14 como o valor aproximado de π.

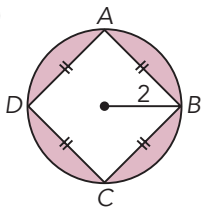
Aproximadamente 0,7824 m^2.

49. Considere que nas figuras seguintes os segmentos de reta assinalados são congruentes e a unidade de medida de comprimento está em decímetros. Em cada caso, calcule a medida de área da superfície colorida. $4(\pi - 2)\ dm^2$

a) $4\pi\ dm^2$



b)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

48. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas de modo a promover a inclusão.

As imagens não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro

50. Uma indústria produz em série o banquinho mostrado na figura. O assento desse banquinho tem formato circular, com medida do diâmetro 0,30 m, e é cortado de uma tábua de madeira retangular que mede 0,70 m × 1,00 m. Se o assento não pode ter emendas, pede-se:

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) a maior quantidade de assentos que podem ser obtidos de uma única tábua (desconsidere a perda de material com o corte); 6 assentos.

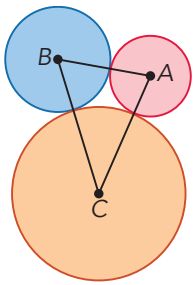
b) determine a medida de área, em centímetros quadrados, da superfície da tábua que não é aproveitada após o corte da maior quantidade possível de assentos que se pode obter de uma única tábua.

Adote $\pi \simeq 3{,}1$. 2 815 cm^2

51. Um *show* lotou uma praça circular de uma cidade certa noite, e o jornal local noticiou que a ocupação média dos que foram ouvir o som havia sido de 4 pessoas por metro quadrado. Nessas condições, sabendo que essa praça tem 49 m de raio e considerando $\pi = \frac{22}{7}$, determine uma estimativa da quantidade de pessoas presentes no *show*. 30 184 pessoas.

52. Na figura estão representados 3 círculos de centros nos pontos *A*, *B* e *C*, 2 a 2 tangentes exteriormente. Se $AB = 16$ cm, $BC = 24$ cm e $AC = 22$ cm, calcule a medida de área de cada um dos 3 círculos.

49π cm^2; 81π cm^2; 225π cm^2



Banco de imagens/Arquivo da editora

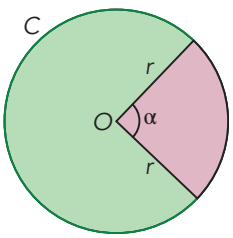
53. O palco de uma casa de espetáculos tem formato de um círculo com 20 m de medida do diâmetro. Após uma reforma, a superfície do palco circular teve a medida do diâmetro aumentada em 60%. De quanto foi acrescida, em porcentagem, a medida de área do palco com essa reforma? 156%

54. De uma placa quadrada de metal, com 20 cm de medida do lado, é recortado um círculo de diâmetro máximo. Em seguida, recorta-se desse círculo um quadrado inscrito nesse círculo. Considerando 3,14 como o valor aproximado de π e desprezando a perda de material com o corte, qual é a medida de área da superfície desperdiçada da placa? 200 cm^2

Área do setor circular

Na figura a seguir, temos:

- *C* como círculo de centro *O* e raio de medida *r*;
- α sendo a medida do ângulo central (ou ângulo com vértice *O*).

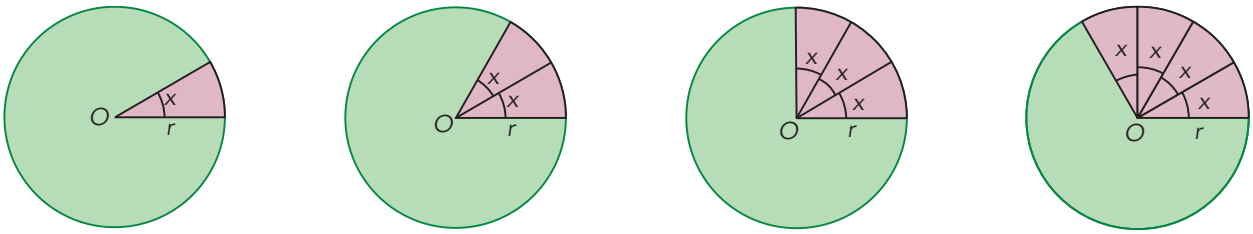


Banco de imagens/Arquivo da editora

Chama-se **setor circular** de centro *O*, raio de medida *r* e ângulo central de medida α a região limitada pelos lados do ângulo e pelo arco que ele determina.

Assim, na figura, a região colorida em lilás representa o setor circular definido.

Dado um setor circular de centro *O*, com raio de medida *r* e ângulo central de medida *x*, vamos comparar a medida de área desse setor com as medidas de área de outros setores de mesmo raio, mas cujas medidas dos ângulos centrais são sucessivamente aumentadas para $2x$, $3x$, $4x$, ...



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Podemos notar que, se a medida do ângulo central dobra, a medida de área do setor dobra; se a medida do ângulo central triplica, a medida de área do setor triplica; e assim sucessivamente. Dessa maneira, concluímos que a medida de área de um setor circular é diretamente proporcional à medida do ângulo central (ou a medida de comprimento do arco correspondente). Assim:

- quando a medida do ângulo central é dada em graus, a área do setor circular pode ser calculada pela seguinte regra de três:

	medida de área (em u.a.)		medida do ângulo central (em graus)
setor:	A	—	x
círculo:	$\pi \cdot r^2$	—	360

$$\Rightarrow \frac{A}{\pi \cdot r^2} = \frac{x}{360}$$

Portanto:

$$A_{setor} = \frac{x}{360} \cdot \pi \cdot r^2$$

- quando a medida de comprimento do correspondente arco é ℓ, a medida de área do setor circular pode ser calculada pela seguinte regra de três.

	medida de área (em u.a.)		medida de comprimento do arco (em u.c.)
setor:	A	—	ℓ
círculo:	$\pi \cdot r^2$	—	$2\pi r$

$$\Rightarrow \frac{A}{\pi \cdot r^2} = \frac{\ell}{2\pi r}$$

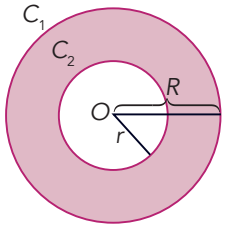
Portanto:

$$A_{setor} = \frac{\ell \cdot r}{2}$$

Não escreva no livro

Pense nisto

Sejam C_1 e C_2 circunferências concêntricas (de centros coincidentes) cujos raios medem, respectivamente, R e r, com $R > r$. Chama-se **coroa circular** a região compreendida entre as circunferências de C_1 e C_2, como mostra a figura a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como você faria para calcular a medida de área da coroa circular?

A medida de área de uma coroa circular é igual à diferença entre as medidas de área dos círculos cujos raios medem R e r.

$A_{coroa} = \pi R^2 - \pi r^2$

Atividades resolvidas

11. Calcule a medida de área de um setor circular cujo ângulo central mede 120° e cujo raio mede 10 cm.

Solução:

Estabelecemos a seguinte regra de três:

	medida de área (em cm²)		medida do ângulo central (em graus)
setor:	A	—	120
círculo:	$\pi \cdot 10^2$	—	360

$$\Rightarrow \frac{A}{100\pi} = \frac{120}{360} \Rightarrow A = \frac{100\pi}{3}$$

Portanto, a medida de área do setor circular é $\frac{100\pi}{3}$ cm².

58. Medida do diâmetro da piscina: $2r = 8$ m $\Rightarrow r = 4$ m.
Medida da largura do piso: 2,5 m $\Rightarrow R = 4$ m + 2,5 m = 6,5 m.
A: medida de área do piso.
$A = \pi R^2 - \pi r^2 = 6{,}5^2\pi - 4^2\pi = 82{,}50$; $A = 82{,}50$ m^2
Logo, Marina gastará 82,50 · R$ 16,00 = R$ 1.320,00.

As imagens não estão representadas em proporção.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

55. Para cada item, calcule no caderno a medida de área do setor circular de raio medindo r e ângulo central de medida θ.

a) $r = 4$ m e $\theta = 30°$ $\frac{4\pi}{3}$ m^2

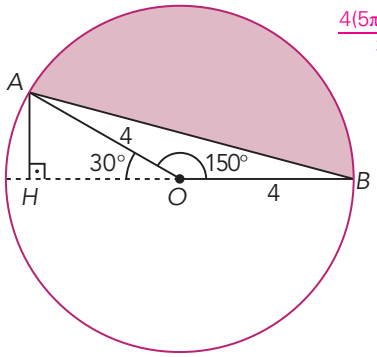
b) $r = 9$ dm e $\theta = 120°$ 27π dm^2

c) $r = 12$ m e $\theta = 45°$ 18π m^2

d) $r = 6$ cm e $\theta = 90°$ 9π cm^2

56. Calcule, no caderno, a medida de área da superfície colorida na figura, em que o círculo tem centro O, raio com medida 4 cm e ângulo $A\hat{O}B$ medindo 150°.

Banco de imagens/Arquivo da editora

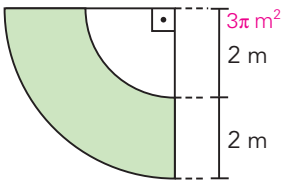


$\frac{4(5\pi - 3)}{3}$ cm^2

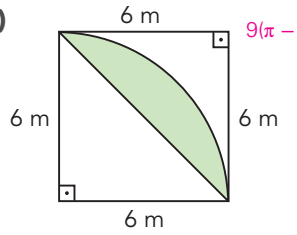
57. Em cada caso, calcule a medida de área da superfície colorida.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

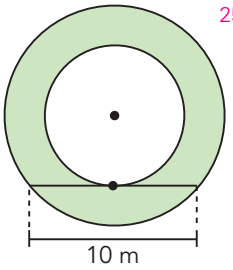
a) 3π m^2



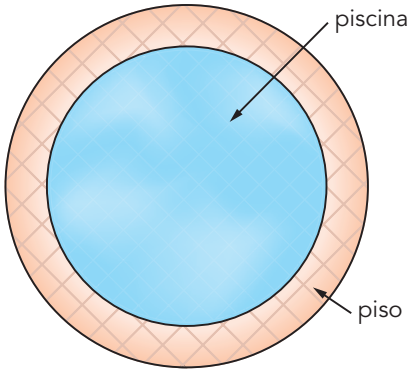
b) $9(\pi - 2)$ m^2



c) 25π m^2



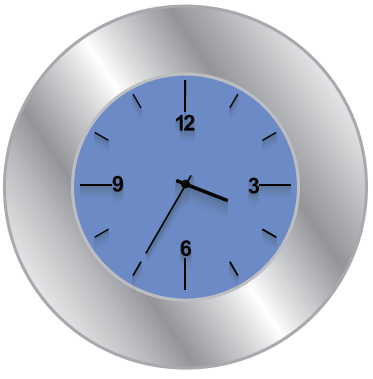
58. Na casa de Marina, há uma piscina de formato circular circundada por um piso, conforme mostrado na ilustração a seguir. Ela pretende trocar o revestimento do piso por outro, que custa R$ 16,00 o metro quadrado. Sabendo que a piscina tem 8 m de diâmetro e o piso tem 2,5 m de largura, determine a quantia mínima que Marina gastará na compra do novo revestimento para o piso. Adote $\pi = \frac{22}{7}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

59. Considere um triângulo equilátero ABC cujo lado mede 4 cm. Com centro em A, é representado um arco de circunferência que intersecta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos respectivos pontos médios, determinando um setor. Determine a medida de área da superfície do triângulo não ocupada pelo setor. $\left(4\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$ cm^2

60. Na cozinha da casa de Neusa, há um relógio em que uma placa de metal plana, em formato de coroa circular, circunda o mostrador, pintado de azul. Determine a medida de área da superfície da placa sabendo que a circunferência maior da placa tem 32π cm de medida de comprimento e o diâmetro do círculo interno mede 10 cm. 231π cm^2



Banco de imagens/Arquivo da editora

VIRALIZE!

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação ambiental*.

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Não escreva no livro

Reprodução/ ONU

Redução de emissão de metano na agropecuária mundial

Integrando a agenda da 28ª Conferência das Nações Unidas sobre Mudança do Clima (COP 28), em Dubai, foi realizado [...], o painel "O Caminho Crítico para 1,5 °C: Dobrando a Curva do Metano para um Planeta Habitável", organizado pelo Banco Mundial com a participação do Ministério da Agricultura e Pecuária (Mapa). O objetivo foi apresentar as estratégias dos países participantes para alcançar as metas de mitigação das emissões de metano, ao mesmo tempo que aumentam a resiliência e a produtividade.

O Banco Mundial intensificou o compromisso com as reduções globais de metano e está lançando, como principal iniciativa nesse sentido, ações para financiamento de projetos nos setores de óleo e gás, resíduos e agricultura. Os investimentos serão focados em programas que gerem três benefícios simultâneos: socioeconômico (rentável para o produtor), redução da emissão de gases do efeito estufa e adaptação no sistema produtivo aos efeitos das mudanças climáticas. [...]

O diretor do Departamento de Produção Sustentável e Irrigação [...], Bruno Brasil, falou durante sua explanação sobre a experiência brasileira com o plano ABC. "Duas tecnologias: o manejo de resíduos da produção animal e a terminação intensiva – atuam diretamente na redução das emissões de metano e, ao mesmo tempo, resultam em benefícios econômicos para o produtor rural, pois melhoram a eficiência da produção, gerando mais renda ao produtor. Esse é o único caminho viável para o desenvolvimento sustentável na agricultura. Precisamos aliar desenvolvimento socioeconômico, adaptação às mudanças climáticas e redução das emissões de gases de efeito estufa", destacou.

A atuação brasileira é composta por tecnologias sustentáveis testadas e adaptadas aos diferentes biomas do país. Além disso, o Plano ABC promove simultaneamente a adaptação dos sistemas agrícolas às mudanças climáticas, o aumento da produtividade, bem como o controle das emissões de gases do efeito estufa. [...]

Incentive os estudantes a acessar a plataforma de monitoramento de emissões de gases de efeito estufa disponível em: https://tedit.net/3ep6y2 (acesso em: 13 set. 2024) e verificar no *ranking* a posição em que seu estado se encontra.

BRASIL. Ministério da Agricultura e Pecuária. Mapa apresenta plano ABC como referência para redução da intensidade de emissões de metano na agropecuária mundial. *Portal gov.br*, Brasília, DF, 4 dez. 2023. Disponível em: https://tedit.net/u78xe5. Acesso em: 16 jul. 2024.

1. Efeito estufa é um fenômeno natural que impede a perda de calor e mantém o planeta Terra aquecido, possibilitando inclusive a manutenção da vida. Contudo, devido às ações humanas, está ocorrendo o aumento da concentração de gases na atmosfera, levando ao aumento da medida de temperatura média global. Os gases conhecidos como gases de efeito estufa, regulados pelo Protocolo de Quioto, são: dióxido de carbono (CO_2), metano (CH_4) e óxido nitroso (N_2O), hexafluoreto de enxofre (SF_6) e duas famílias de gases, hidrofluorcarbono (HFC) e perfluorcarbono (PFC).

1. O que é o efeito estufa? Quais são os gases que contribuem para o efeito estufa?

2. Pesquise como a redução de emissão de metano na agropecuária está relacionada com a mudança climática. Faça um resumo no caderno.

A resposta depende da pesquisa feita pelo estudante.

3. Pesquise algumas atitudes que podemos ter para reduzir o efeito estufa. Quais dessas atitudes você pode realizar? A resposta depende da pesquisa feita pelo estudante.

PARA FUNDAMENTAR SABERES

1. **(Enem)** Um túnel viário de uma única via possui a entrada na forma de um triângulo equilátero de lado 6 m. O motorista de um caminhão com 3 m de largura deve decidir se passa por esse túnel ou se toma um caminho mais longo. Para decidir, o motorista calcula a altura que esse caminhão deveria ter para tangenciar a entrada do túnel. Considere o caminhão como um paralelepípedo reto.

Essa altura, em metro, é Alternativa **e**.

a) 3 **c)** $3\sqrt{3}$ **e)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $3\sqrt{2}$ **d)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

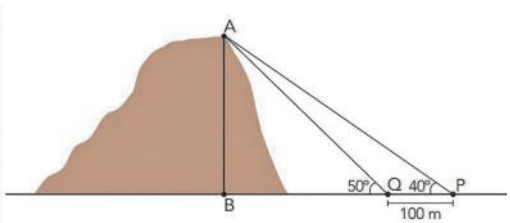
2. **(Enem)** Em uma sala escura há um ponto luminoso, a mais de 3 metros de distância de uma parede, e um disco pendurado, paralelo à parede, entre ela e o ponto luminoso. O disco encontra-se a 1 metro de distância do ponto luminoso, projetando uma sombra S_1, em formato de círculo, na parede. Esse disco é afastado mais 2 m do ponto luminoso, em direção à sombra e sem encostar na parede, projetando outra sombra S_2, também no formato de um círculo.

Sejam A_1 a área de S_1 e A_2 a área de S_2.

O valor de $\frac{A_1}{A_2}$ é Alternativa **e**.

a) 1. **b)** 2. **c)** 3. **d)** 4. **e)** 9.

3. **(Uerj)** Admita que uma pessoa na posição P avista o ponto A mais alto de um morro sob um ângulo de 40°. Ao caminhar 100 m sobre a reta horizontal PB, até a posição Q, ela avista o mesmo ponto sob o ângulo de 50°. O esquema a seguir representa essa situação, sendo $\overline{AB}$ a altura do morro em relação à reta horizontal PB.



Reprodução/Uerj, 2022.

Considere os seguintes valores das razões trigonométricas:

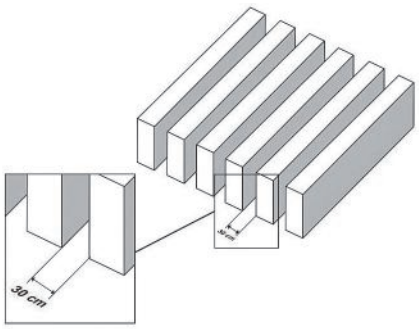
α	sen α	cos α	tan α
40°	0,64	0,77	0,84
50°	0,77	0,64	1,19

A altura $\overline{AB}$, em metros, é igual a: Alternativa **d**.

a) 212,0. **c)** 232,0.

b) 224,6. **d)** 285,6.

4. **(Enem)** Pergolado é o nome que se dá a um tipo de cobertura projetada por arquitetos, comumente em praças e jardins, para criar um ambiente para pessoas ou plantas, no qual há uma quebra da quantidade de luz, dependendo da posição do sol. É feito como um estrado de vigas iguais, postas paralelas e perfeitamente em fila, como ilustra a figura.



Reprodução/Enem, 2020.

Um arquiteto projeta um pergolado com vãos de 30 cm de distância entre suas vigas, de modo que, no solstício de verão, a trajetória do sol durante o dia seja realizada num plano perpendicular à direção das vigas, e que o sol da tarde, no momento em que seus raios fizerem 30° com a posição a pino, gere a metade da luz que passa no pergolado ao meio-dia.

Para atender à proposta do projeto elaborado pelo arquiteto, as vigas do pergolado devem ser construídas de maneira que a altura, em centímetro, seja a mais próxima possível de:

a) 9. **c)** 26. **e)** 60.

b) 15. **d)** 52.

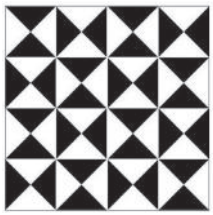
Alternativa **c**.

5. **(Uece)** Em muitas edificações são usados ladrilhos cerâmicos no revestimento de pisos planos, pelo fato de as peças cerâmicas usadas possuírem padrões geométricos que permitem os encaixes lado a lado sem deixar brechas. Desejamos ladrilhar um ambiente em forma de L com cantos retangulares, utilizando peças cerâmicas que possuem a forma de um retângulo cujas dimensões de cada uma delas são 45 cm de largura por 60 cm de comprimento. Considerando que o perímetro do ambiente em forma de L é composto por seis segmentos de reta cujas medidas do comprimento são 9 m, 9 m, 12 m, 15 m, 18 m e 27 m, admitindo-se que não há corte de peças e que se use n peças para o revestimento total do piso, é correto afirmar que o valor de n pode ser: Alternativa **a**.

a) 1300 ou 1400. **c)** 1200 ou 1500.

b) 1350 ou 1450. **d)** 1250 ou 1350.

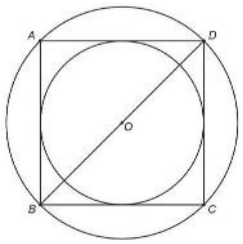
6. **(Unicamp-SP)** O desenho a seguir é formado por quadrados com o lado medindo 2 cm, onde estão pintados triângulos com medidas iguais. A soma das áreas dos triângulos pintados de preto é:



Reprodução/Unesp, 2020.

a) 16 **b)** 24 **c)** 32 **d)** 40

7. **(Enem)** Uma empresa de publicidade está criando um logotipo que tem o formato indicado na figura. O círculo menor está inscrito no quadrado $ABCD$, e o círculo maior circunscreve o mesmo quadrado. Considere S_1 a área do círculo menor e S_2 a área do círculo maior.



Reprodução/Enem-PPL, 2022.

A razão da área do círculo maior para o círculo menor é igual a Alternativa **c**.

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 2 **d)** 8 **e)** 16

6. Em cada quadradinho, a região pintada de preto tem medida de área que equivale à metade da medida de área do quadradinho. Desse modo, a soma das medidas de área dos triângulos pintados de preto será $16 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2\right) = 32$, ou seja, 32 cm^2. Alternativa **c**.

Nesta Unidade, estudamos congruência e semelhança de triângulos com aplicações; trigonometria e áreas de figuras planas. Respostas pessoais.

1. Consegui revisar e aprofundar conteúdos estudados no Ensino Fundamental? Quais? E quais conceitos foram estudados pela primeira vez?
2. Reconheço congruência como um caso particular de semelhança? Consigo identificar triângulos semelhantes e resolver problemas usando a razão de semelhança?
3. Resolvo problemas usando trigonometria em triângulos retângulos? Nesse contexto, como são definidas as razões trigonométricas? Reconheço a importância da trigonometria para resolver problemas de distâncias que não podem ser medidas diretamente?
4. Com relação ao cálculo da medida de área das principais figuras planas estudadas na Unidade, consegui compreender como são obtidas as fórmulas? Reconheço também outro método de cálculo de medida de área que não seja por meio de fórmulas? Utilizo corretamente as unidades de medida de área?
5. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
6. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas e exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

Unidade

4 CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA E LEIS DOS SENOS E DOS COSSENOS

Alpinista escalando a montanha Puig Campana, em Finestrat, Espanha, 2023. Além de superar altitudes para chegar ao cume de uma grande montanha, os alpinistas precisam que seus pulmões se adaptem a níveis cada vez menores de oxigênio.

Markus Thomenius/ Alamy/Fotoarena

A Matemática no alpinismo

O alpinismo é uma prática de aventura em que, com habilidade, conhecimento e perícia, busca-se superar os desafios do meio ambiente. O objetivo é alcançar o cume de montanhas e picos por meio de caminhadas e escaladas.

Para essa prática, é importante ressaltar a necessidade de utilizar técnicas e equipamentos específicos. Em muitas situações, devido à dificuldade do trajeto, é essencial contratar guias locais que conheçam bem a montanha ou o pico a ser escalado, garantindo trilhas seguras para os alpinistas.

A prática do alpinismo leva os entusiastas a explorar as regiões mais elevadas e remotas do planeta. Escalar montanhas não é apenas uma prova de resistência e coragem, mas também um exercício complexo de planejamento e análise.

A Matemática, especialmente a Trigonometria, desempenha um papel vital na navegação e no planejamento de rotas de alpinismo. As leis dos senos e dos cossenos, em particular, são ferramentas indispensáveis que ajudam os alpinistas a resolver problemas práticos durante suas ascensões.

Por exemplo, aplicando essas leis, é possível determinar a medida de distância entre 2 pontos e, consequentemente, escolher a melhor rota a seguir. Além disso, elas ajudam a calcular a quantidade e a medida de comprimento de corda necessárias para escalar uma face rochosa ou atravessar uma fenda no gelo, garantindo que todas as ancoragens sejam seguras.

2. A medida da altura de um pico (ou montanha) é indicada utilizando como referência o nível do mar. Assim, o termo mais adequado seria **altitude**, já que **altura** é a medida da distância entre o pico e qualquer ponto abaixo dele, seja sua base, uma cidade encravada na montanha ou o próprio mar.

Não escreva no livro

1. Faça uma pesquisa sobre os picos (ou montanhas) onde é praticado o alpinismo no Brasil. Escolha um desses picos e responda em seu caderno qual é a altitude dele.

A resposta depende da pesquisa feita pelo estudante.

2. Pesquise um pouco mais sobre a altura (ou altitude, a depender da fonte consultada) impressa em mapas, livros, etc. Em seguida, responda em seu caderno: A altura de um pico (ou montanha) é medida em relação à sua base ou ao nível do mar?

capítulo 9

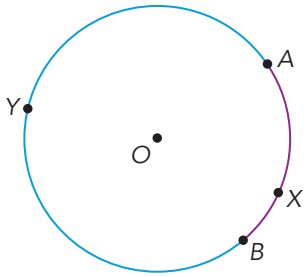
Circunferência trigonométrica

Arcos e ângulos

Seja uma circunferência de centro O, sobre a qual tomamos 2 pontos distintos, A e B. A circunferência fica dividida em 2 partes, cada uma das quais chamada de **arco de circunferência**, ou apenas **arco**.

Note, na figura, que existem 2 arcos determinados por A e B:

- o arco de extremidades A e B que contém o ponto X – representado por $\overset{\frown}{AXB}$;
- o arco de extremidades A e B que contém o ponto Y – representado por $\overset{\frown}{AYB}$.

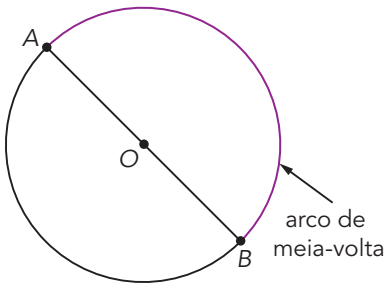


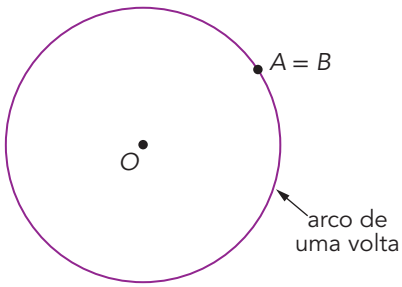
Banco de imagens/Arquivo da editora

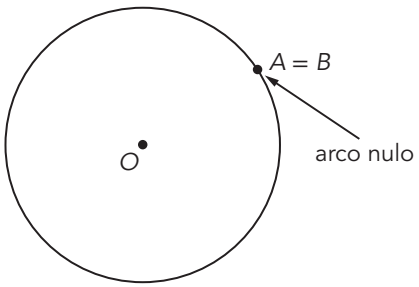
Quando não houver dúvidas em relação ao arco ao qual nos referimos, podemos escrever simplesmente $\overset{\frown}{AB}$ para representar o arco com extremidades A e B.

Analise os casos particulares:

- se A e B são extremidades de um diâmetro, cada um dos arcos $\overset{\frown}{AB}$, chamado de **arco de meia-volta**, determina uma semicircunferência, conforme a figura;
- se A coincidir com B, são determinados 2 arcos. Um deles é o **arco de uma volta**, e o outro, o **arco nulo**. Analise-os nas figuras a seguir.

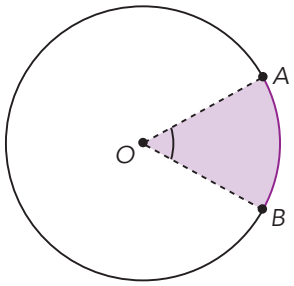






Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Além disso, todo ângulo central corresponde a um arco da circunferência, e vice-versa.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente ao arco $\overset{\frown}{AB}$.

Dica

O Pi Existe

Vídeo em português de Portugal, com legendas, que explica como calcular o número π e dá exemplos de medições de objetos do dia a dia nas quais esse número aparece (7 min 10 s). Disponível em: https://tedit.net/sx60kj. Acesso em: 18 jul. 2024.

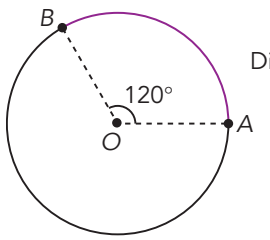
Pense nisto: A medida angular de um arco é a medida do ângulo central correspondente e, assim, não depende da medida do raio. Já a medida de comprimento de um arco depende da medida do raio da circunferência.

Professor, se desejar, use imagens deste capítulo para ajudar os estudantes a compreenderem essa relação.

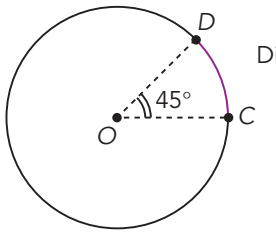
Medida angular e medida linear de arco

A **medida angular** de um arco ou, simplesmente, **medida de um arco** é igual à medida do ângulo central correspondente. Acompanhe os exemplos a seguir.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

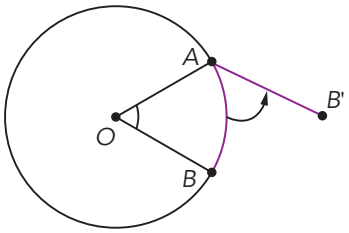


$\text{med}(A\hat{O}B) = 120°$
Dizemos que o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 120°.



$\text{med}(C\hat{O}D) = 45°$
Dizemos que o arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 45°.

A **medida linear** de um arco refere-se a sua **medida de comprimento**. Quando retificamos um arco de circunferência, obtemos um segmento de reta cuja medida corresponde à medida de comprimento do arco, que pode ser medido em centímetros, metros, entre outras unidades de medida de comprimento.



O segmento $\overline{AB'}$ é a retificação do arco $\overset{\frown}{AB}$.

Não escreva no livro

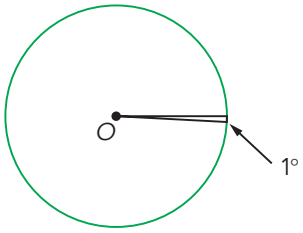
Pense nisto

A medida angular de um arco depende da medida do raio da circunferência correspondente? E a medida de comprimento de um arco também depende?

Unidades de medida angular de arcos

Ao tratarmos da medida angular de um arco, adotamos o grau (°) ou radiano (rad).

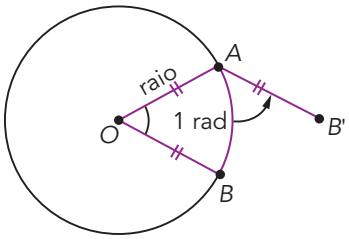
- **1 grau** (1°) é a medida de um arco igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência correspondente.

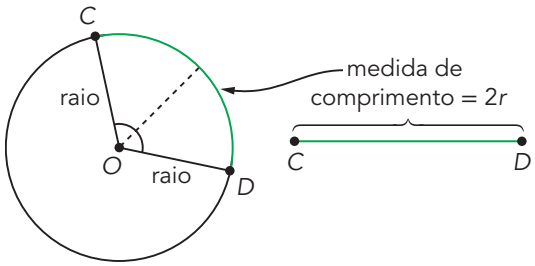


Banco de imagens/Arquivo da editora

- **1 radiano** (1 rad) é a unidade de medida angular de um arco cuja medida de comprimento é igual à medida do raio da circunferência correspondente. Note, na figura, que o arco $\overset{\frown}{AB}$, bem como seu ângulo correspondente $A\hat{O}B$, mede 1 rad. Já o arco $\overset{\frown}{CD}$, bem como seu ângulo correspondente $C\hat{O}D$, mede 2 rad, pois a medida de comprimento é igual ao dobro da medida do raio.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora





Observação

O grau apresenta submúltiplos importantes, como o **minuto** e o **segundo**.
O arco de medida 1 minuto (indica-se 1') corresponde a $\frac{1}{60}$ do arco de medida 1°; o arco de medida 1 segundo (indica-se 1") corresponde a $\frac{1}{60}$ do arco de medida 1'.

Como sabemos, a medida de comprimento c de uma circunferência de raio com medida r é igual a $2\pi r$.

Assim, um arco de medida de comprimento igual a r mede 1 rad; um arco de medida de comprimento igual a $2r$ mede 2 rad, etc. Da mesma maneira, um arco de medida de comprimento $2\pi r$ (volta completa) mede 2π rad. Ou seja, o arco de uma volta mede 2π rad ou 360°.

Acompanhe algumas correspondências:

2π rad _____ 360° $\frac{\pi}{2}$ rad _____ 90° $\frac{\pi}{4}$ rad _____ 45°

π rad _____ 180° $\frac{\pi}{3}$ rad _____ 60° $\frac{\pi}{6}$ rad _____ 30°

A relação "um arco de meia-volta mede 180° ou π rad" servirá de base para efetuarmos as conversões de unidades de medida angular de arcos.

Atividades resolvidas

1. Se um arco mede 30°, qual seria a medida angular desse arco em radianos?

Solução:

Considerando a proporcionalidade existente entre graus e radianos, podemos usar a regra de três simples:

π rad _____ 180°

x _____ 30°

$$x = \frac{30° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Podemos, ainda, calcular mentalmente: Como 30° correspondem à sexta parte de 180°, temos, em radianos, a sexta parte de π, que é $\frac{\pi}{6}$.

2. Numa circunferência, um ângulo central mede $\frac{3\pi}{4}$ radianos. Quanto mede esse ângulo em graus?

Solução:

A partir da proporcionalidade, temos:

π rad _____ 180°

$\frac{3\pi}{4}$ rad _____ x

$$x = \frac{\frac{3\pi}{4} \text{ rad} \cdot 180°}{\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = 135°$$

Podemos, ainda, calcular mentalmente.

Como π rad correspondem a 180°, temos:

$$\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = 3 \cdot \frac{\pi}{4} \text{ rad} =$$
$$= 3 \cdot \frac{180°}{4} = 3 \cdot 45° = 135°$$

3. Quanto mede, em graus, um arco de medida angular 1 radiano?

Solução:

Como π rad correspondem a 180°, podemos fazer:

π rad _____ 180°

1 rad _____ x

$$x = \frac{180°}{\pi}$$

Seja $\pi \simeq 3{,}14$, segue que $x \simeq \frac{180°}{3{,}14} \simeq 57{,}3°$.

Como $57{,}3° = 57° + 0{,}3°$, temos que:

$$57° + 0{,}3 \cdot 60' = 57° + 18' = 57°\ 18'$$

Observação

Quando a unidade de medida angular de um arco vier suprimida, fica convencionado que essa medida é dada em radianos. Assim, quando dizemos que um arco $\overset{\frown}{AB}$ mede $\frac{\pi}{4}$, estamos dizendo que o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede $\frac{\pi}{4}$ radianos; se o arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 3, queremos dizer que o arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 3 radianos, e assim por diante.

História da Matemática

O número π

Civilizações muito antigas já sabiam empiricamente que a razão entre a medida de comprimento de uma circunferência e a medida do diâmetro era "um pouco maior do que 3", independentemente da circunferência considerada. Os babilônios atribuíram a essa razão o valor $3\frac{1}{8} = 3{,}125$; já os egípcios atribuíram o valor $4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 \simeq 3{,}16049$.

Por volta de 250 a.C., Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.), que viveu na Grécia, obteve um importante resultado, mostrando que essa razão fica entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{10}{70}$, isto é, entre 3,14084 e 3,14286, ›

aproximadamente. Sua ideia foi inscrever um polígono regular em uma circunferência com medida de raio 1 e ir dobrando o número de lados. Ele partiu de um triângulo equilátero e finalizou com um polígono regular de 96 lados, cuja medida de perímetro era uma boa aproximação para a medida de comprimento da circunferência.

Na civilização chinesa no século III d.C., Liu Hui (225–295) obteve o valor 3,14159 usando um método similar ao de Arquimedes.

No século XVI, perto do ano 1600, o francês François Viète (1540–1603) descobriu uma expansão finita para o cálculo de π; no século XVIII, o suíço Leonhard Euler (1707–1783) chamou essa razão de π e, por volta de 1765, o francês Johann H. Lambert (1728–1777) provou, pela primeira vez, que π é irracional.

Em 2021, a Universidade de Ciências Aplicadas de Graubünden, na Suíça, calculou o número π com precisão de 62,8 trilhões de casas decimais.

Fonte dos dados: ONODY, Roberto N. O número Pi com 62,8 trilhões de casas decimais. *IFSC/USP*, 20 out. 2021. Disponível em: https://tedit.net/s3xk1c. Acesso em: 18 jul. 2024.

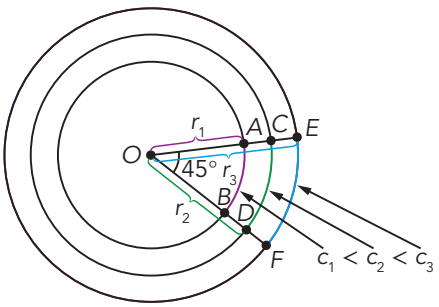
Observação

A definição de π como a razão entre a medida de comprimento de uma circunferência e a medida do diâmetro dela corresponde a um modelo matemático teórico. Quando usamos medidas de comprimento obtidas em medições empíricas de objetos circulares, obtemos um número racional para essa razão. Aproximações de π com uma grande quantidade de casas decimais são geradas por processos computacionais.

Medida de comprimento de um arco

Quando medimos o comprimento de um arco, as unidades de medida utilizadas são o metro, o centímetro, o milímetro, etc.

Note que, na figura, a medida de comprimento de um arco depende da medida do raio considerado: os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{EF}$ medem, cada um deles, 45° (ou $\frac{\pi}{4}$ rad), mas as medidas de comprimento são diferentes.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Acompanhe o esquema a seguir para calcular as medidas de comprimento c_1, c_2 e c_3 dos arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{EF}$, respectivamente:

- arco $\overset{\frown}{AB}$:

$360° \text{ ——— } 2\pi r_1$

$45° \text{ ——— } c_1$

$c_1 = \frac{\pi}{4} \cdot r_1$

- arco $\overset{\frown}{CD}$:

$360° \text{ ——— } 2\pi r_2$

$45° \text{ ——— } c_2$

$c_2 = \frac{\pi}{4} \cdot r_2$

- arco $\overset{\frown}{EF}$:

$360° \text{ ——— } 2\pi r_3$

$45° \text{ ——— } c_3$

$c_3 = \frac{\pi}{4} \cdot r_3$

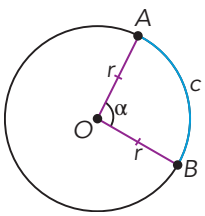
Mantida fixa a medida do ângulo central, a medida de comprimento de um arco é diretamente proporcional à medida do raio da circunferência que o contém.

No exemplo, $\frac{c_1}{r_1} = \frac{c_2}{r_2} = \frac{c_3}{r_3} = \frac{\pi}{4}$.

Note que a constante de proporcionalidade corresponde à medida do ângulo central, expressa em radianos. O ângulo central da figura mede 45° ou $\frac{\pi}{4}$ rad.

Em geral, temos $\alpha = \frac{c}{r}$, em que:

- α: medida do arco (em radianos);
- c: medida de comprimento do arco;
- r: medida do raio da circunferência (na mesma unidade de medida de c);



Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro

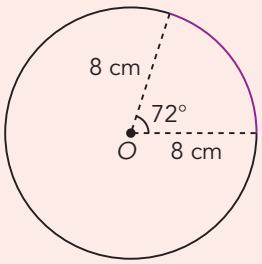
Pense nisto

Na relação $\alpha = \frac{c}{r}$, o que acontece se $r = 1$?

A medida de comprimento do arco é igual à medida angular desse arco em radianos.

Atividades resolvidas

4. Qual é a medida de comprimento de um arco de 72° sobre uma circunferência cujo raio mede 8 cm?



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

A medida de comprimento da circunferência é $c = 2 \cdot \pi \cdot 8 \text{ cm} = 16\pi \text{ cm}$.

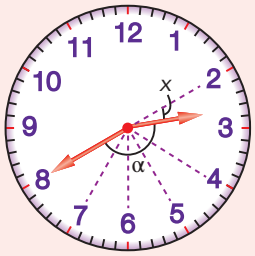
Podemos estabelecer uma relação de proporção:

$$16\pi \text{ cm} \text{ ——— } 360°$$
$$x \text{ ——— } 72°$$

$$x = \frac{16\pi}{5} \text{ cm (ou aproximadamente 10,05 cm)}$$

Note que, como $\frac{360°}{72°} = 5$, a medida de comprimento do arco é igual à quinta parte da medida de comprimento da circunferência correspondente.

5. Determine a medida do menor ângulo α formado entre os ponteiros de um relógio ao marcar 2 h 40 min.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Solução:

O ângulo pedido mede α. Note que, entre 2 marcas consecutivas de horas, tem-se um arco cujo ângulo central mede $\frac{360°}{12} = 30°$. Assim, considerando o deslocamento do "2 ao 8", temos:

$$\alpha + x = 6 \cdot 30° \Rightarrow \alpha = 180° - x$$

Em 1 hora (60 minutos), o ponteiro das horas percorre um arco de medida 30°.

Para calcular a medida x do ângulo percorrido pelo ponteiro das horas em 40 minutos, podemos estabelecer a proporção:

$$60 \text{ minutos} \text{ ——— } 30°$$
$$40 \text{ minutos} \text{ ——— } x$$

$$x = 20°$$

Assim, temos $\alpha = 180° - 20° = 160°$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. Escreva em seu caderno a medida angular, em radianos, de cada item a seguir.

a) 30°

a) $\begin{matrix} \pi \text{ rad} — 180° \\ x — 30° \end{matrix}$ $x = \frac{30° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ rad

b) 15°

b) 15° é $\frac{1}{12}$ de 180°, portanto é $\frac{\pi}{12}$ rad.

c) 120°

c) $\frac{120°}{180°} \cdot \pi \text{ rad} = \frac{2}{3} \cdot \pi \text{ rad} = \frac{2\pi}{3}$ rad

d) 210°

d) $\frac{210°}{180°} \cdot \pi \text{ rad} = \frac{7}{6} \cdot \pi \text{ rad} = \frac{7\pi}{6}$ rad

e) 270°

e) $\frac{270°}{180°} \cdot \pi \text{ rad} = \frac{3}{2} \cdot \pi \text{ rad} = \frac{3\pi}{2}$ rad

f) 300°

f) $\frac{300°}{180°} \cdot \pi \text{ rad} = \frac{5}{3} \cdot \pi \text{ rad} = \frac{5\pi}{3}$ rad

2. Escreva em seu caderno a medida angular, em graus, de cada item a seguir.

a) $\frac{\pi}{3}$ rad

a) $\frac{180°}{3} = 60°$

b) $\frac{\pi}{2}$ rad

b) $\frac{180°}{2} = 90°$

c) $\frac{\pi}{4}$ rad

c) $\frac{180°}{4} = 45°$

d) $\frac{\pi}{5}$ rad

d) $\frac{180°}{5°} = 36°$

e) 0,5 rad

e) $\begin{matrix} 180° \text{ ——— } \pi \text{ rad} \\ x \text{ ——— } 0{,}5 \text{ rad} \end{matrix}$ $x = \frac{90°}{\pi}$

Adotando a aproximação 3,1416 para π, obtemos o valor $x \simeq 28{,}65°$.

f) $\frac{5\pi}{4}$ rad

f) $\frac{5 \cdot 180°}{4} = 225°$

10. π —— 180°
x —— 72°
$x = \frac{2\pi}{5}$; $\alpha = \frac{c}{r} \Rightarrow r = \frac{c}{\alpha} \Rightarrow r = \frac{157}{\frac{2\pi}{5}} \simeq 125$; aproximadamente 125 m.

As imagens não estão representadas em proporção.

3. Uma semicircunferência tem como medida de comprimento 188,4 m. Quanto mede seu raio? Considere $\pi \simeq 3{,}14$.

$\frac{2\pi r}{2} = 188{,}4 \Rightarrow 3{,}14 \cdot r \simeq 188{,}4 \Rightarrow r \simeq 60$ m

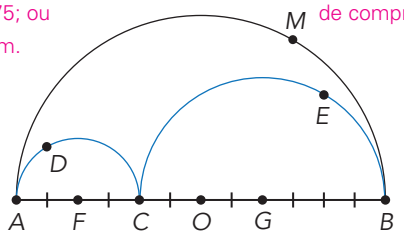
4. Calcule em seu caderno a medida de comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ definido em uma circunferência cujo comprimento do raio mede 8 cm e o ângulo central $A\hat{O}B$ mede 120°.

5. Considerando que, na figura, $\overline{AB}$ está dividido em 12 partes iguais, qual é o percurso mais curto para ir de A até B: sobre a semicircunferência $\overset{\frown}{AMB}$ ou sobre as semicircunferências $\overset{\frown}{ADC}$ e, em seguida, $\overset{\frown}{CEB}$?

Nenhum, pois os percursos têm a mesma medida de comprimento.

4. $\frac{16\pi}{3} \simeq 16{,}75$; ou seja, 16,75 cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

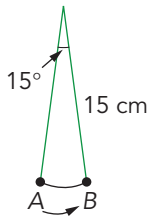


6. Um atleta correu 7 536 m em uma pista circular de 40 m de medida do raio. Quantas voltas ele deu na pista? Considere $\pi \simeq 3{,}14$.

7. Um pêndulo de 15 cm de medida de comprimento oscila entre A e B, formando um ângulo de medida 15°. Qual é a medida de comprimento da trajetória descrita pela sua extremidade entre A e B? Considere $\pi \simeq 3{,}1416$.

6. Em uma volta, o atleta percorre uma medida de distância de 251,2 m, pois $2\pi \cdot 40 = 80\pi \simeq 80 \cdot 3{,}14 \simeq 251{,}2$.
O número de voltas é, portanto, aproximadamente, $\frac{7\,536}{251{,}2} = 30$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

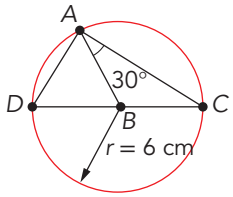


Como $\frac{180°}{15°} = 12$, a medida de 15° corresponde a $\frac{\pi}{12}$ rad.
Daí, como $\alpha = \frac{c}{r}$, obtemos: $\frac{\pi}{12} = \frac{c}{15} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{3{,}1416}{12} \simeq \frac{c}{15} \Rightarrow$
$\Rightarrow c \simeq 3{,}927$; logo $c \simeq 3{,}927$ cm.

8. Determine a medida do menor ângulo formado entre os ponteiros de um relógio ao marcar 9 h 35 min. 77° 30'

9. Na figura, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AC}$ e o triângulo CAD está inscrito numa semicircunferência, com centro em B e cujo raio mede 6 cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

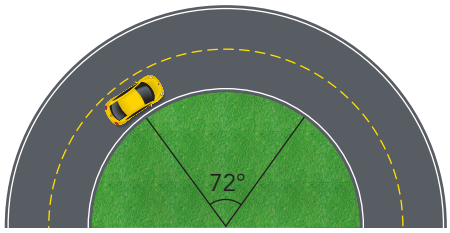


Considerando o arco $\overset{\frown}{AD}$, que não contém o ponto C, determine em seu caderno:

a) a medida dele, em radianos;

b) a medida de comprimento dele, em centímetros.

10. Um automóvel percorre 157 m em uma pista circular descrevendo um arco medindo 72°. Determine a medida do raio desse arco. Considere $\pi \simeq 3{,}14$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

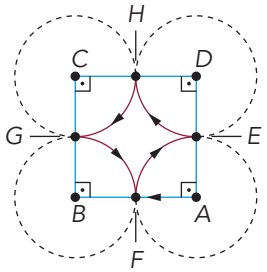
11. Escolha um horário determinado por hora e minuto. Em seguida, elabore uma questão que envolva o cálculo da medida do menor ângulo entre os ponteiros do relógio no horário escolhido e resolva-a.
Troque a questão elaborada com um colega para que ele resolva a sua enquanto você resolve a dele.

Exemplo de questão: Determine a medida do menor ângulo entre os ponteiros de um relógio analógico que marca 11 h 50 min.

12. O ponteiro dos minutos de um relógio tem medida de comprimento 12 cm. Qual é a medida de distância que a ponta do ponteiro percorre num intervalo de tempo de 20 minutos? Considere $\pi \simeq 3{,}1416$.

Aproximadamente 25,13 cm.

13. A figura a seguir representa um molde de uma estampa que será bordada em tecido. As circunferências com centros em A, B, C e D têm raios com mesma medida e são tangentes nos pontos E, F, G e H.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Qual deverá ser a medida de comprimento mínimo de linha a ser utilizada para bordar $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EH}$, $\overline{HG}$, $\overline{GF}$, $\overline{FE}$ e $\overline{EA}$, sabendo que $AC = 10\sqrt{2}$ cm? Considere a aproximação $\pi \simeq 3{,}1416$. Aproximadamente 71,5 cm.

9. Sabemos que $AB = BC = 6$ cm, e $\text{med}(B\hat{C}A) = 30°$, pois o $\triangle ABC$ é isósceles. Logo, $\text{med}(A\hat{B}C) = 120°$ e $\text{med}(A\hat{B}D) = 60°$.
a) $\text{med}(\overset{\frown}{AD}) = \frac{\pi}{3}$ rad **b)** A medida de comprimento de $\overset{\frown}{AD}$ é $\frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 6$ cm $= 2\pi$ cm.

Circunferência trigonométrica

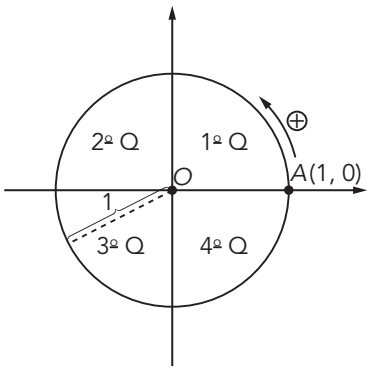
Se julgar necessário, revise os conceitos de plano cartesiano e as coordenadas de um ponto, abscissa e ordenada.

Num plano cartesiano, vamos considerar uma circunferência com centro O e raio unitário, ou seja, raio medindo 1 unidade de medida de comprimento (1 u.c.).

O círculo limitado por essa circunferência fica dividido em 4 partes iguais denominadas **quadrantes** (Q) e indicadas na figura por 1º Q (primeiro quadrante), 2º Q (segundo quadrante), 3º Q (terceiro quadrante) e 4º Q (quarto quadrante).

Vamos convencionar que todos os arcos tomados nessa circunferência têm origem no ponto $A(1, 0)$ e o sentido positivo é o anti-horário, conforme imagem.

Determinamos, desse modo, a **circunferência trigonométrica**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica

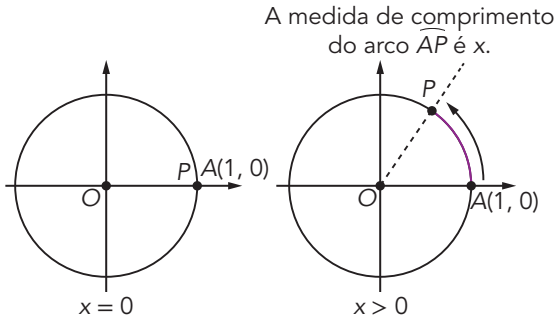
Como o raio é unitário, o comprimento da circunferência trigonométrica mede $2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi$.

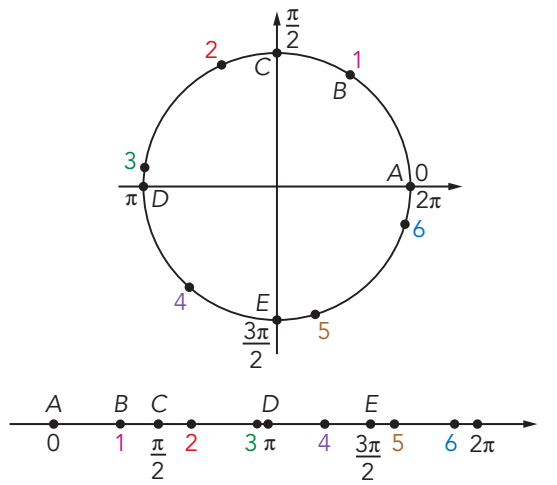
Vamos associar a cada número real x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, um único ponto P da circunferência trigonométrica, de modo que:

- se $x = 0$, o ponto P coincide com o ponto $A(1, 0)$;
- se $x > 0$, descrevemos, a partir de A, no sentido anti-horário, um arco de comprimento x cujas extremidades são A e P.

Analise a associação entre um número real e um ponto da circunferência trigonométrica:

- O arco $\overset{\frown}{AC}$ corresponde a $\frac{1}{4}$ do arco de uma volta completa. A medida de comprimento é $\frac{\pi}{2}$, que é a quarta parte de 2π. Note que a medida desse arco é $\frac{\pi}{2}$ radianos (ou 90°). Dizemos que o ponto C está associado ao número real $\frac{\pi}{2}$.
- O arco $\overset{\frown}{AD}$ corresponde à metade do arco de uma volta completa. A medida de comprimento é π, que é a metade de 2π. Note que a medida desse arco é π radianos (ou 180°). Dizemos que o ponto D está associado ao número real π.
- O arco $\overset{\frown}{AE}$ corresponde a $\frac{3}{4}$ do arco de uma volta completa e a medida de comprimento é, portanto, $\frac{3}{4}$ de 2π, isto é, $\frac{3\pi}{2}$. A medida desse arco é $\frac{3\pi}{2}$ radianos (ou 270°). O ponto E está associado ao número real $\frac{3\pi}{2}$.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- O arco $\overset{\frown}{AB}$ tem medida de comprimento igual a 1 e a medida dele é 1 radiano (note que a medida de comprimento de $\overset{\frown}{AB}$ é igual à medida do raio). O ponto B está associado ao número real 1.

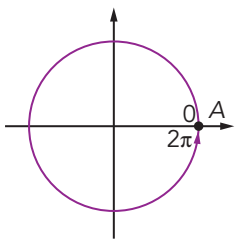
Ao fazermos essa associação, é importante lembrar que a medida (α) de um arco, em radianos, coincide numericamente, na circunferência trigonométrica, com a medida de comprimento (c), pois, como $\alpha = \frac{c}{r}$ e $r = 1$, temos $\alpha = c$.

Observação

Estamos considerando, por enquanto, a associação de um número real pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$ a um ponto da circunferência trigonométrica.

Posteriormente, no Volume 2 desta coleção, será apresentada a associação de um número real qualquer a um ponto da circunferência trigonométrica.

Antecipadamente, note que o número real 2π corresponde ao ponto $A(1, 0)$: trata-se da extremidade "final" do arco de uma volta completa, de medida 2π radianos (ou 360°) e medida de comprimento 2π.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Simetrias

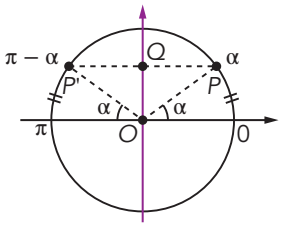
Na circunferência trigonométrica, vamos estudar 3 tipos de simetrias: em relação ao eixo vertical, em relação ao eixo horizontal e em relação ao centro.

Para o estudo de cada uma delas, tomaremos um arco de medida α radianos, do 1º Q, correspondente ao número real α, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Sendo P o ponto associado ao número real α, a seguir temos os casos de simetria.

Simetria em relação ao eixo vertical

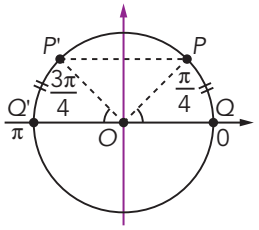
O simétrico de P em relação ao eixo vertical é o ponto P', associado ao número real $\pi - \alpha$, visto que os ângulos centrais representados na figura são congruentes.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

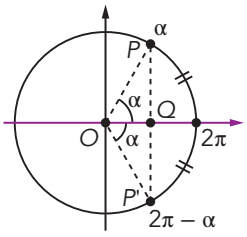
Acompanhe o exemplo a seguir.

Verifique nesse caso que os pontos P e P', associados aos números reais $\frac{\pi}{4}$ e $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, respectivamente, são simétricos em relação ao eixo vertical. O mesmo ocorre com Q e Q', que estão associados aos números reais zero e π, respectivamente.



Simetria em relação ao eixo horizontal

Levando em conta a congruência entre os ângulos centrais representados na figura, podemos afirmar que o ponto P' simétrico a P em relação ao eixo horizontal está associado ao número real $2\pi - \alpha$.



Pense nisto: Porque são retângulos, têm um lado comum e hipotenusas cujas medidas são iguais à medida do raio da circunferência trigonométrica.

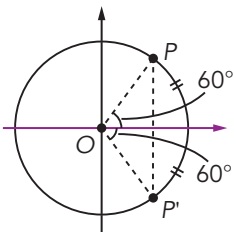
Não escreva no livro

Pense nisto

Por que os triângulos POQ e $P'OQ$ são congruentes?

16. b) Cada um dos triângulos da figura é equilátero. No $\triangle AOB$, $AO = BO = 1$ (medida do raio), e, como $\text{med}(A\hat{O}B) = 60°$ e $\triangle AOB$ é isósceles, segue que $\text{med}(B\hat{A}O) = \text{med}(A\hat{B}O) = 60°$. Logo, $\triangle AOB$ é equilátero. Portanto, a medida de perímetro do hexágono é igual a 6 u.c. A medida de área do hexágono é igual à medida de área de 6 triângulos equiláteros congruentes entre si, ou seja, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ u.a., pois $6 \cdot \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Na figura, os pontos P e P' são simétricos (note a congruência entre os ângulos representados) e estão associados aos números reais $\frac{\pi}{3}$ e $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$, respectivamente.

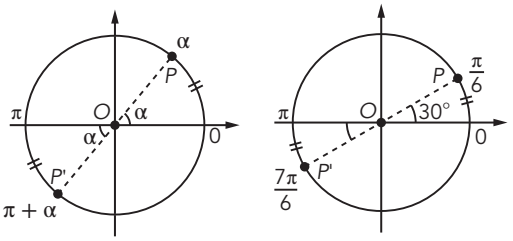


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Simetria em relação ao centro

Quando 2 pontos são diametralmente opostos, como P e P' da figura, é possível afirmar que o número real associado a P é α e a P' é $\alpha + \pi$, pois os ângulos representados na figura são congruentes.

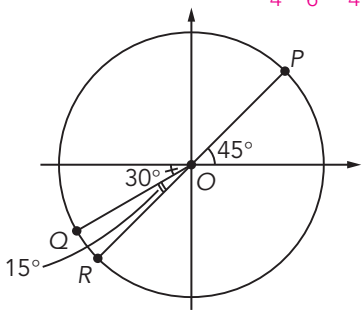
Os pontos correspondentes aos números reais $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ são simétricos em relação ao centro da circunferência. Note que: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.



ATIVIDADES

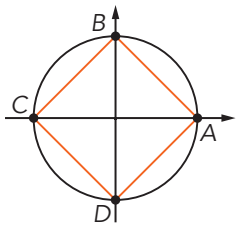
Não escreva no livro

14. Sejam os pontos P, Q e R da circunferência trigonométrica seguinte. Qual é o número real x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, associado ao ponto P? E ao ponto Q? E ao ponto R? $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{4}$.



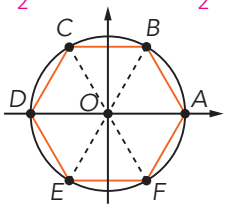
Banco de imagens/Arquivo da editora

15. O quadrado $ABCD$ está inscrito na circunferência trigonométrica. Determine em seu caderno, para cada vértice, o número real x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, associado.



A: $x = 0$; B: $x = \frac{\pi}{2}$; C: $x = \pi$; D: $x = \frac{3\pi}{2}$.

16. Na figura, o hexágono regular $ABCDEF$ está inscrito na circunferência trigonométrica. O vértice A está associado ao número real zero.

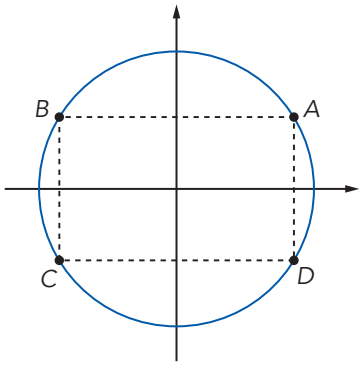


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Os demais vértices do hexágono estão associados a números reais pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi[$. Determine esses números.

b) Obtenha a medida de perímetro e a medida de área do hexágono $ABCDEF$.
Observação: A medida de área de um triângulo equilátero de lado medindo a é $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

17. Na figura, o número real $\frac{7\pi}{9}$ está associado a B.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Determine em seu caderno os números reais cujos pontos associados são, respectivamente, A, C e D sabendo que $ABCD$ é um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados. A: $\frac{2\pi}{9}$; C: $\frac{11\pi}{9}$; D: $\frac{16\pi}{9}$.

16. a) $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \text{med}(\overset{\frown}{BC}) = \ldots = \text{med}(\overset{\frown}{FA}) = \frac{360°}{6} = 60° \left(\text{ou } \frac{\pi}{3} \text{ rad}\right)$

A: 0; B: $\frac{\pi}{3}$; C: $2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$; D: $3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$; E: $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$; F: $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

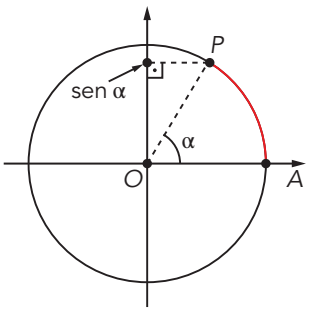
Seno

No estudo das razões trigonométricas para ângulos agudos num triângulo retângulo, é definido sen α para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Vamos agora estender esse conceito para um número real α, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

Seja P um ponto da circunferência trigonométrica associado a um número real α, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Definimos o **seno de α** como a **ordenada do ponto P**.

Daqui em diante, o eixo vertical da circunferência trigonométrica (eixo das ordenadas) será chamado **eixo dos senos**.

Pense nisto: A ordenada de P' é sen α e a abscissa é zero. Logo, P' (0, sen α).



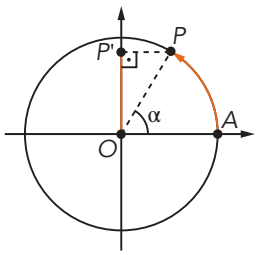
med $(\overset{\frown}{AP}) = \alpha$ rad

med$(A\hat{O}P) = \alpha$ rad

Não escreva no livro

Pense nisto

Projetando ortogonalmente o ponto P sobre o eixo vertical, obtemos o ponto P'.



Quais as coordenadas do ponto P' em função de α?

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

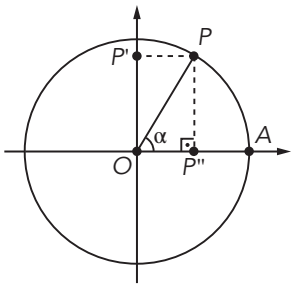
Note, pela figura, que a definição apresentada coincide com as relações trigonométricas do triângulo retângulo:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}, \text{ com } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

P' e P'' são, respectivamente, as projeções ortogonais de P sobre o eixo das ordenadas e das abscissas. Tomando os segmentos de reta $\overline{PP''} \,//\, \overline{OP'}$, temos no $\triangle OPP''$:

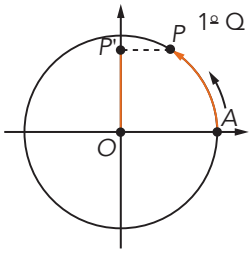
$$\text{sen } A\hat{O}P = \text{sen } \alpha = \frac{PP''}{OP}$$

Como $OP = 1$, temos: $\text{sen } \alpha = \frac{PP''}{OP} = PP'' = OP'$.

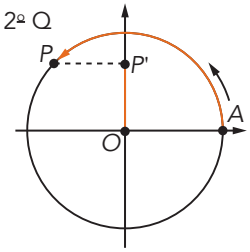


Banco de imagens/Arquivo da editora

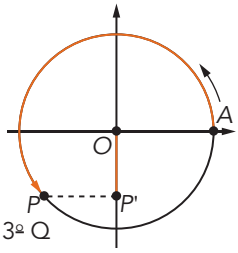
O mesmo procedimento é utilizado quando P ocupa posições nos demais quadrantes. Considerando o sentido positivo do eixo dos senos, acompanhe como fica o sinal do seno de um número real α em cada quadrante, conforme varia a posição de P.



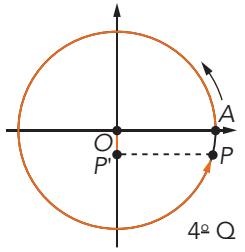
ordenada de P positiva
sen $\alpha > 0$



ordenada de P positiva
sen $\alpha > 0$



ordenada de P negativa
sen $\alpha < 0$



ordenada de P negativa
sen $\alpha < 0$

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

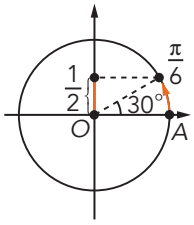
Note que, no 3º e 4º quadrantes, a ordenada do ponto P é um número negativo, pois a medida algébrica de OP' é negativa.

Observação

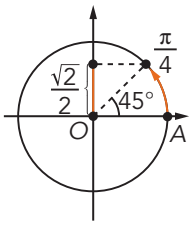
Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, temos $-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$, uma vez que a ordenada de qualquer ponto da circunferência trigonométrica varia de -1 a 1.

Valores notáveis do seno

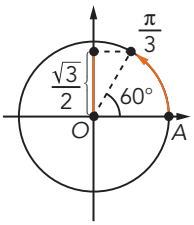
Já estamos familiarizados com o seno de alguns números reais:



$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$



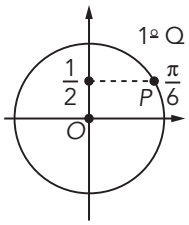
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$



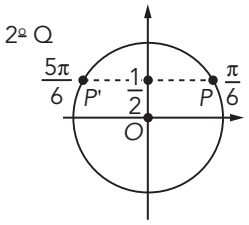
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

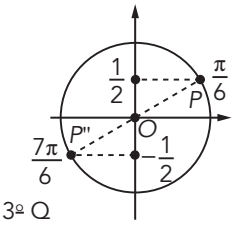
Usando os valores anteriores, é possível obter, por simetria, o seno de outros números reais, como os casos a seguir.



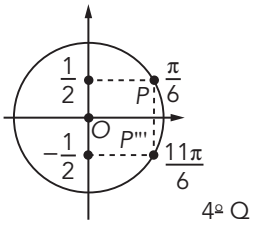
$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$
ou $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$



$\operatorname{sen} 150° = \frac{1}{2}$
ou $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$



$\operatorname{sen} 210° = -\frac{1}{2}$
ou $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

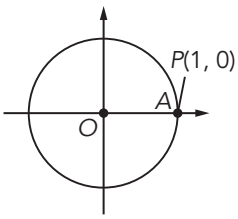


$\operatorname{sen} 330° = -\frac{1}{2}$
ou $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

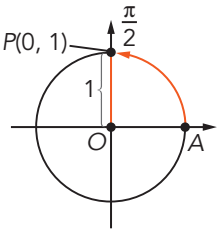
Repare que determinamos o valor do seno de um número real comparando-o com o seno de outro número real $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ pertencente ao 1º Q. Esse processo é conhecido como **redução ao primeiro quadrante**.

Também é possível obter o valor do seno de números reais que coincidem com os pontos de intersecção da circunferência trigonométrica com os eixos coordenados:



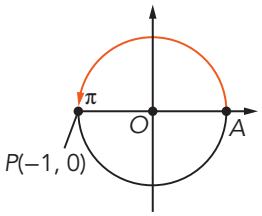
$\begin{cases}\operatorname{sen} 0 = 0 \\ \operatorname{sen} 0° = 0\end{cases}$

A ordenada de P é 0.



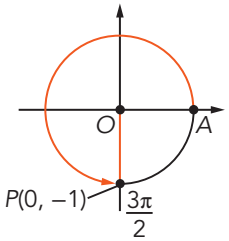
$\begin{cases}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \\ \operatorname{sen} 90° = 1\end{cases}$

A ordenada de P é 1.



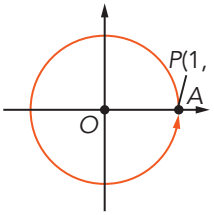
$\begin{cases}\operatorname{sen}\pi = 0 \\ \operatorname{sen} 180° = 0\end{cases}$

A ordenada de P é 0.



$\begin{cases}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1 \\ \operatorname{sen} 270° = -1\end{cases}$

A ordenada de P é –1.



$\begin{cases}\operatorname{sen} 2\pi = 0 \\ \operatorname{sen} 360° = 0\end{cases}$

A ordenada de P é 0.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Nas calculadoras científicas, é possível obter o valor do seno (e de outras razões trigonométricas) de um arco qualquer expresso em graus ou em radianos.

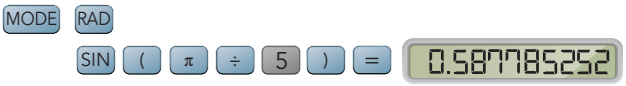
- Em graus, para encontrar o valor de sen 36°, utilize a tecla SIN para obter o valor aproximado do seno:

Em alguns modelos de calculadora, a sequência de teclas que devem ser pressionadas pode ser diferente. Em alguns modelos, o cálculo de sen 36° é feito pressionando as teclas 3 6 sin =.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

- Em radianos, é preciso ajustar a calculadora para RAD, pois, em geral, ela vem configurada em DEG (*degree*, em inglês, significa "grau"). Essa alteração poderá ser feita usando as teclas MODE ou DRG.

  Para obter o valor de sen $\frac{\pi}{5}$ $\left(\frac{\pi}{5}\text{ corresponde a }36°\right)$, é preciso seguir esta sequência:



Banco de imagens/ Arquivo da editora

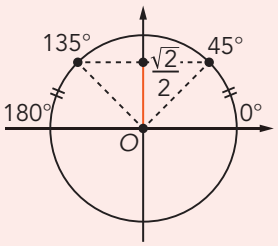
Atividades resolvidas

6. Qual é o valor do seno dos ângulos indicados a seguir?

a) 135° **b)** $\frac{5\pi}{3}$

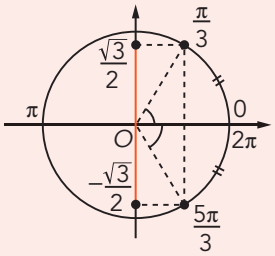
Solução:

a)



$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Note, inicialmente, que $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$:



$$\text{sen } \frac{5\pi}{3} = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

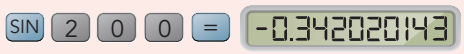
7. Utilizando a tabela de razões trigonométricas ao final deste Volume, obtenha o valor de sen 200°. Confira a resposta usando uma calculadora científica.

Solução:

No cálculo de sen 200°, precisamos realizar uma redução ao 1º Q.

$$\text{sen } 200° = \text{sen } (200° - 180°) =$$
$$= -\text{sen } 20° = -0{,}34202 \text{ (pela tabela de razões trigonométricas)}$$

Na calculadora, basta seguir esta sequência para obter o valor aproximado:



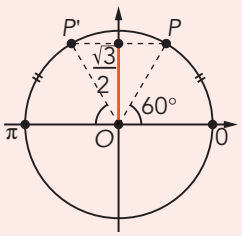
Banco de imagens/ Arquivo da editora

8. Resolva a equação sen $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo $U = [0, 2\pi[$.

Solução:

Devemos determinar todos os números reais x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, tais que sen $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Na circunferência trigonométrica, marcamos no eixo dos senos a ordenada $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Note que tanto P como P' têm ordenada $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como sen $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, temos que P está associado a $\frac{\pi}{3}$ e P' a $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Assim, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

ATIVIDADES

Não escreva no livro

18. Calcule em seu caderno o valor da expressão

$$y = \frac{\text{sen } 0 + \text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen } \frac{3\pi}{2}}{2 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{6}}.$$

$y = \frac{0 + 1 - (-1)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2$

19. Determine em seu caderno o valor de:

a) sen π **b)** sen 120° **c)** sen $\frac{\pi}{4}$ **d)** sen 150° **e)** sen 225° **f)** sen 300° **g)** sen 2π **h)** sen 330°

19. a) sen $\pi = 0$

b) sen $120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) sen $\frac{\pi}{4} = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) sen $150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

e) sen $225° = -\text{sen } 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) sen $300° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) sen $2\pi = 0$

h) sen $330° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$

21. a) sen 130° = sen 50° = 0,76604
b) sen 230° = −sen 50° = −0,76604
c) sen 320° = −sen 40° = −0,64279
d) sen $\frac{3\pi}{5}$ = sen 108° = sen 72° = 0,95106

Não escreva no livro

20. Sem consultar a tabela de razões trigonométricas ou a calculadora, compare em seu caderno os seguintes pares de valores:

a) sen 75° e sen 85° sen 75° < sen 85°

b) sen 100° e sen 170° sen 100° > sen 170°

c) sen 260° e sen 250° sen 260° < sen 250°

d) sen 300° e sen 290° sen 300° > sen 290°

e) sen 278° e sen 262° sen 278° = sen 262°

21. Com auxílio da tabela de razões trigonométricas, calcule no caderno:

a) sen 130° **c)** sen 320°

b) sen 230° **d)** sen $\frac{3\pi}{5}$

22. Sabendo que sen $\frac{\pi}{7} = a$, responda em seu caderno.

a) $a > 0$ ou $a < 0$? $a > 0$

b) Qual é o valor de sen $\frac{8\pi}{7}$ em função de a? $-a$

23. Resolva em seu caderno as equações seguintes, sendo $U = [0, 2\pi[$. $S = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

a) sen $x = \frac{1}{2}$ $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ **c)** sen $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) sen $x = -1$ $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ **d)** $4 \operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$

24. Com uma calculadora científica, Joel desejava obter o valor de sen 4°, que ele sabia ser um número real positivo, pois 4° é um arco do 1º Q. Ao pressionar SIN 4 =, obteve -0.756802495.

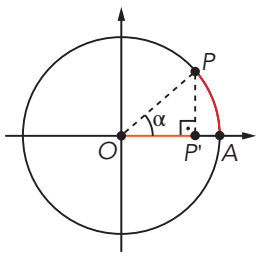
Explique em seu caderno a contradição encontrada. O que pode ter ocorrido?

23. d) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Pense nisto

Projetando ortogonalmente o ponto P sobre o eixo horizontal, obtemos o ponto P'.



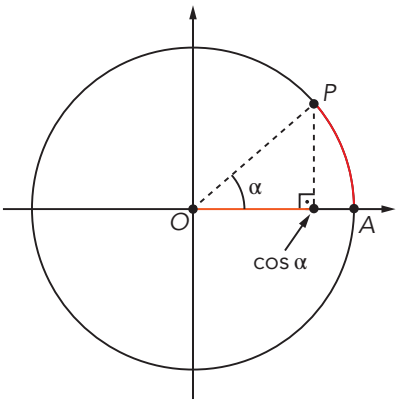
Banco de imagens/Arquivo da editora

Quais são as coordenadas do ponto P' em função de α?

A abscissa de P é cos α e a ordenada é zero. Logo, P'(cos α, 0).

Cosseno

Seja P um ponto sobre a circunferência trigonométrica associado ao número real α, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Definimos o **cosseno de α** como a **abscissa do ponto *P***.



$\text{med}(\overset{\frown}{AP}) = \alpha$ rad
$\text{med}(A\hat{O}P) = \alpha$ rad

Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

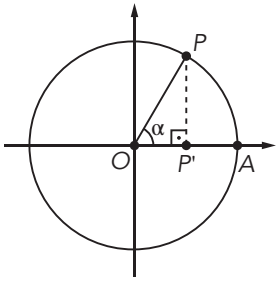
Pela figura, é possível compreender que a definição anterior coincide com a definição apresentada no estudo da trigonometria do triângulo retângulo:

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}, \text{ com } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

P' é a projeção ortogonal de P sobre o eixo das abscissas.

No triângulo retângulo POP', temos:

$$\cos A\hat{O}P = \cos \alpha = \frac{OP'}{OP} = \frac{OP'}{1} = OP'$$



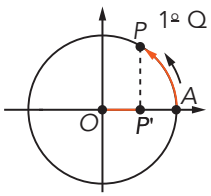
Banco de imagens/Arquivo da editora

A partir desse momento, o eixo horizontal da circunferência trigonométrica (eixo das abscissas) será chamado **eixo dos cossenos**.

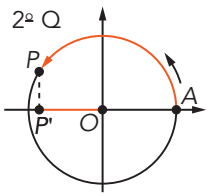
24. A calculadora estava configurada em RAD e não em DEG (o modo DEG fornece o valor do seno de um ângulo medido em graus).

Note que $x = 4$ tem valor associado ao 3º Q $\left(\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}\right)$ e sen 4 < 0; já o arco de medida 4° tem valor associado ao 1º Q e, portanto, sen 4° > 0.

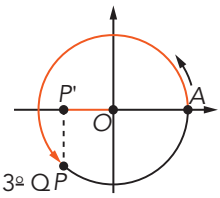
O mesmo procedimento é utilizado quando P ocupa posições nos demais quadrantes.



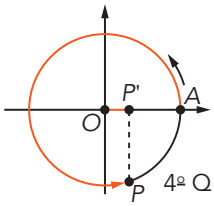
abscissa de P positiva
$\cos \alpha > 0$



abscissa de P negativa
$\cos \alpha < 0$



abscissa de P negativa
$\cos \alpha < 0$



abscissa de P positiva
$\cos \alpha > 0$

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Note que, nos 2º e 3º quadrantes, a abscissa de P é um número negativo, pois a medida algébrica de OP' é negativa.

De fato, se P' está à direita de O, então a abscissa de P é um número positivo (1º e 4º quadrantes). Se P' está à esquerda de O, então a abscissa de P é um número negativo (2º e 3º quadrantes).

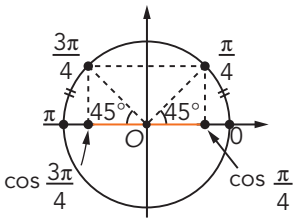
Observação

Note que o cosseno de um arco qualquer, na circunferência trigonométrica, varia de -1 a 1, isto é, $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$ (a exemplo do seno).

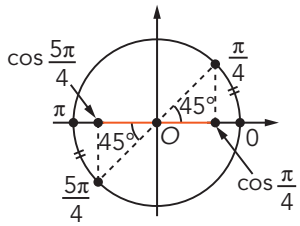
Valores notáveis do cosseno

Utilizando os valores dos ângulos notáveis, é possível obter, por simetria, o cosseno de outros números reais.

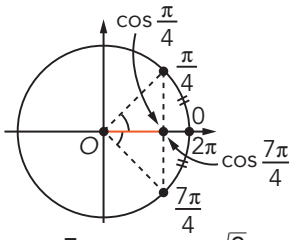
A partir de $\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vamos obter os valores de $\cos \frac{3\pi}{4}$, $\cos \frac{5\pi}{4}$ e $\cos \frac{7\pi}{4}$.



$\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



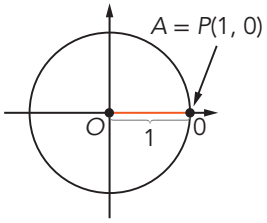
$\cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$\cos \frac{7\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

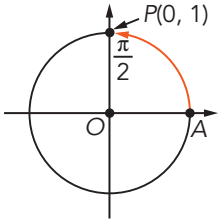
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos obter o valor do cosseno de números reais em que P está na intersecção da circunferência trigonométrica com os eixos coordenados:



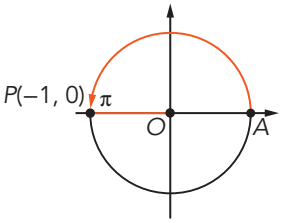
A e P coincidem.
$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \cos 0° = 1 \end{cases}$

A abscissa de P é 1.



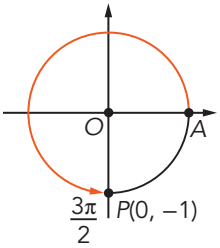
$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \cos 90° = 0 \end{cases}$

A abscissa de P é 0.



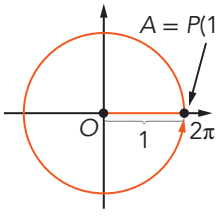
$\begin{cases} \cos \pi = -1 \\ \cos 180° = -1 \end{cases}$

A abscissa de P é -1.



$\begin{cases} \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \\ \cos 270° = 0 \end{cases}$

A abscissa de P é 0.



A e P coincidem.
$\begin{cases} \cos 2\pi = 1 \\ \cos 360° = 1 \end{cases}$

A abscissa de P é 1.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Na calculadora científica, a tecla usada para obter os valores do cosseno é COS.

No cálculo de $\cos \frac{11\pi}{12}$, ajustamos a calculadora na configuração RAD e pressionamos as teclas indicadas para obter o valor aproximado:

Banco de imagens/ Arquivo da editora

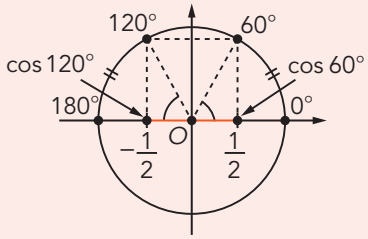
Atividades resolvidas

9. Obtenha, por redução ao 1º Q, os valores de:

a) $\cos 120°$ **b)** $\cos \frac{4\pi}{3}$

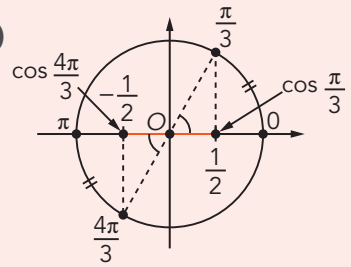
Solução:

a)



$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

b)



$\cos \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

ATIVIDADES

Não escreva no livro

25. a) $y = \frac{0 - (-1)}{\frac{1}{2} \cdot 1 + 0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

b) $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

25. Calcule em seu caderno o valor de x e de y.

a) $y = \frac{\cos 90° - \cos 180°}{\cos 60° \cdot \cos 0° + \cos 90°}$

b) $x = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi \cdot \cos \frac{\pi}{6}$

26. Calcule em seu caderno:

a) $\cos 270°$ $\cos 270° = 0$

b) $\cos \frac{3\pi}{4}$ $\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos \frac{5\pi}{3}$ $\cos \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

d) $\cos 0°$ $\cos 0° = \cos 2\pi = 1$

e) $\cos 150°$ $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

27. Sem usar a tabela de razões trigonométricas ou a calculadora, compare em seu caderno os seguintes pares de valores:

a) $\cos 65°$ e $\cos 85°$ $\cos 65° > \cos 85°$

b) $\cos 91°$ e $\cos 89°$ $\cos 91° < \cos 89°$

c) $\cos 50°$ e $\cos 340°$ $\cos 50° < \cos 340°$

d) $\cos 190°$ e $\cos 170°$ $\cos 190° = \cos 170°$

28. Em seu caderno, classifique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada uma das afirmações a seguir.

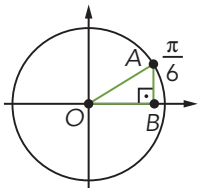
a) $\cos 90° - \cos 30° = \cos 60°$ F

b) $\left(\text{sen } \frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2 = 1$ V

c) $\text{sen } 100° + \cos 100° < 0$ F

d) $\cos 6 < 0$ F

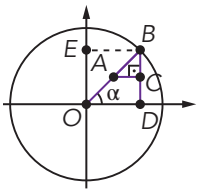
29. Analisando a figura, calcule em seu caderno a medida de perímetro e a de área do triângulo OAB, situado no 1º Q da circunferência trigonométrica.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Medida de perímetro: $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ u.c.; medida de área: $\frac{\sqrt{3}}{8}$ u.a.

30. Na circunferência trigonométrica, A é ponto médio de $\overline{OB}$ e B está associado ao número real α. Elabore em seu caderno uma questão referente à figura a seguir. Em seguida, troque a questão elaborada com um colega para que ele resolva a sua enquanto você resolve a dele.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Exemplo de questão: Qual é a medida de perímetro do triângulo ABC em função do ângulo α?

31. Resolva em seu caderno as equações seguintes, considerando $U = [0, 2\pi[$.

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

b) $\cos x = 1$ $S = \{0\}$

c) $\cos x = -\frac{1}{2}$ $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

d) $3 \cdot \cos x + 6 = 0$ $S = \varnothing$

e) $4 \cdot \cos^2 x = 3$ $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

32. Na calculadora científica de Juliana, a tecla 4 está quebrada. Escreva em seu caderno uma maneira de ela obter o valor de $\cos \frac{4\pi}{5}$, com aproximação de 3 casas decimais utilizando essa calculadora.

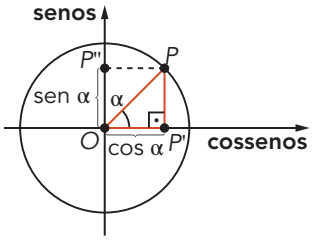
O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Relações entre seno e cosseno

Relação fundamental da Trigonometria

Seja P o ponto associado a um número real $\alpha \in [0, 2\pi]$.

- Se P pertence ao 1º Q, temos:



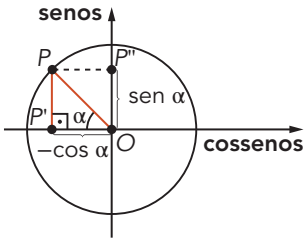
$OP = 1$; $OP' = \cos \alpha$; $OP'' = PP' = \operatorname{sen} \alpha$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle OP'P$, temos:

$(OP)^2 = (OP')^2 + (PP')^2 \Rightarrow 1 = (\cos \alpha)^2 + (\operatorname{sen} \alpha)^2$,

isto é, $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

- Se P pertence ao 2º Q, temos:



$OP = 1$; $OP' = |-\cos \alpha| = \cos \alpha$; $OP'' = PP' = \operatorname{sen} \alpha$

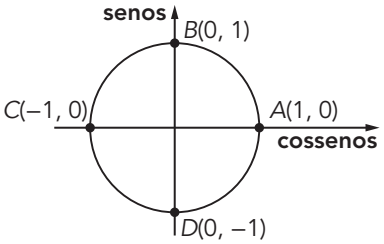
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle OP'P$, temos:

$(OP)^2 = (OP')^2 + (PP')^2 \Rightarrow 1 = (\cos \alpha)^2 + (\operatorname{sen} \alpha)^2$,

isto é, $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Para os demais quadrantes, a justificativa é análoga.

- Se P coincide com algum dos pontos A, B, C ou D seguintes, a relação também é válida.



Se P coincide com $A(1, 0)$: $\cos \alpha = 1$ e $\operatorname{sen} \alpha = 0$, então $\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1^2 + 0^2 = 1$.

Para os demais pontos, usamos raciocínio análogo. Logo:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ para todo } \alpha \in [0, 2\pi]$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Essa é a **relação fundamental da Trigonometria** e permite obter o seno de um número real a partir do cosseno desse mesmo número, e vice-versa.

Acompanhe este exemplo:

Dado $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, para obtermos $\cos x$, usamos a relação fundamental da Trigonometria:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, notamos que x está no 2º Q e, consequentemente, $\cos x < 0$.

Assim, temos $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Pense nisto

Não escreva no livro

É verdade que $\operatorname{sen}^2 \alpha = (\operatorname{sen} \alpha)^2$ para todo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?

E $\operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{sen} \alpha^2$? Sim. Não. Note que: $\operatorname{sen}^2 \alpha = (\operatorname{sen} \alpha)^2$; $\operatorname{sen}^2 \alpha \neq \operatorname{sen} \alpha^2$.

Arcos complementares

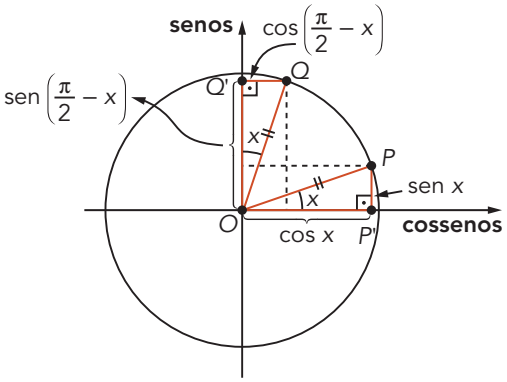
Se α e β são as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo ($\alpha + \beta = 90°$), então $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ e $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$.

Essa relação é verdadeira para α e $\beta \in \mathbb{R}$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Vamos agora estudar essa relação na circunferência trigonométrica.

Seja $x \in \mathbb{R}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (1º Q).

Na circunferência trigonométrica a seguir, P está associado ao número real x, e Q a $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Temos:

$$\begin{cases} OP' = \cos x \text{ e } PP' = \operatorname{sen} x \\ QQ' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ e } OQ' = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

Observando que $OP = OQ = 1$ (medida do raio), $\text{med}(P\hat{O}P') = \text{med}(Q\hat{O}Q') = x$ e $\text{med}(O\hat{Q'}Q) = \text{med}(O\hat{P'}P) = 90°$, pelo critério LAAo, concluímos que os triângulos retângulos destacados são congruentes. Daí, temos:

$$PP' = QQ' \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad OP' = OQ' \Rightarrow \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Essa relação pode ser estendida para qualquer arco de medida x, com $0 < x < 2\pi$:

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{e} \quad \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

ATIVIDADES

33. Pela relação fundamental da Trigonometria: $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Não escreva no livro

33. Sabendo que $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{4}{9}$, com $\alpha \in [0, 2\pi]$, obtenha em seu caderno o valor de $\cos\alpha$.

34. Sendo $\cos x = \frac{3}{5}$, com x no 4º Q, determine em seu caderno $\operatorname{sen} x$. $-\frac{4}{5}$

35. Existe um número real $\alpha \in [0, 2\pi]$ que satisfaça simultaneamente $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ e $\cos\alpha = \frac{2}{3}$? Não.

36. Determine em seu caderno os possíveis valores reais de m para que se tenha simultaneamente $\operatorname{sen}\alpha = \frac{m}{2}$ e $\cos\alpha = m - 1$. $m = 0$ ou $m = \frac{8}{5}$

37. É verdade que $\operatorname{sen}^2 20° + \operatorname{sen}^2 70° = 1$? Explique, no caderno, sem consultar a tabela de razões trigonométricas ou usar a calculadora.

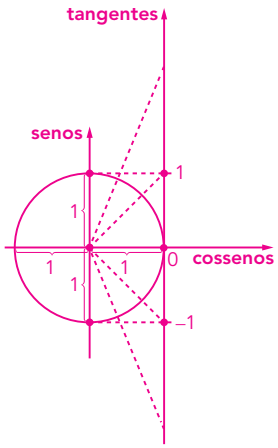
38. Resolva em seu caderno a equação: $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0$, em que $U = [0, 2\pi[$. $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

37. Sabemos que $\operatorname{sen} 20° = \cos 70°$, pois 20° e 70° são ângulos complementares. Logo, $\operatorname{sen}^2 20° + \operatorname{sen}^2 70° = \cos^2 70° + \operatorname{sen}^2 70° = 1$, o que garante que a afirmação é verdadeira.

Pense nisto: Não; embora $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, $\tan x$ não é limitada.

Tangente

Para definirmos a tangente de um número real α, vamos acrescentar à circunferência trigonométrica um terceiro eixo. Esse eixo, denominado **eixo das tangentes**, é obtido ao se tangenciar, por uma reta perpendicular ao eixo dos cossenos, a circunferência no ponto $A(1, 0)$. O ponto A é a origem do eixo das tangentes, e seu sentido positivo (para cima) coincide com o do eixo dos senos.

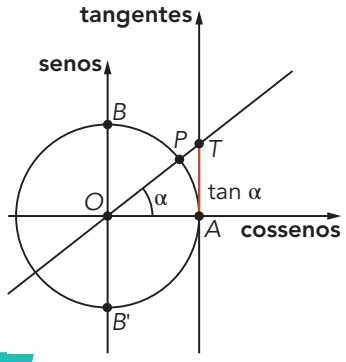


Banco de imagens/Arquivo da editora

Unindo o centro O à extremidade P ($P \neq B$ e $P \neq B'$) de um arco de medida α rad, determinamos a reta $\overleftrightarrow{OP}$, que intersecta o eixo das tangentes no ponto T.

O valor da tangente de α é igual à medida do segmento de reta $\overline{AT}$, ou igual ao oposto dessa medida (quando a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ é negativa), ou igual a 0, de acordo com a posição do ponto T em relação ao ponto A no eixo das tangentes:

- se T está acima de A, $\tan \alpha = AT$;
- se T está abaixo de A, $\tan \alpha = -AT$;
- se T coincide com A, $\tan \alpha = 0$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

Pela figura anterior, é possível compreender que a definição de tangente coincide com a definição apresentada no estudo da trigonometria do triângulo retângulo:

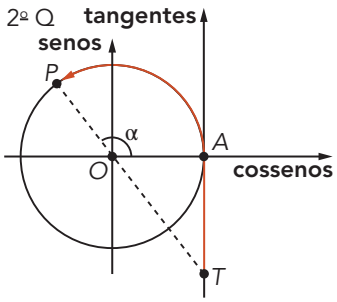
$$\tan \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}, \text{ com } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

No triângulo retângulo OAT, temos:

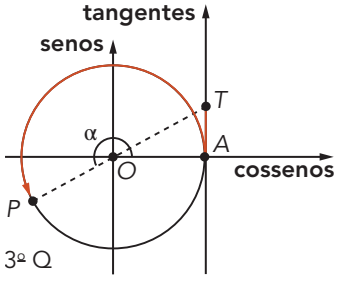
$$\tan A\hat{O}T = \tan \alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

Assim, para P pertencente ao 1º Q, T estará acima de A e, consequentemente, $\tan \alpha > 0$.

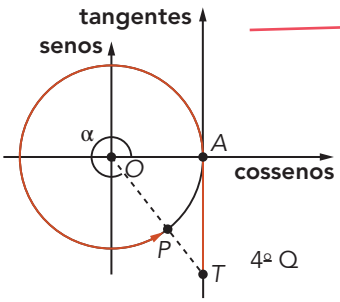
Variando a posição de P nos demais quadrantes, temos:



P está associado a α.
T está abaixo de A.
$\tan \alpha < 0$



P está associado a α.
T está acima de A.
$\tan \alpha > 0$



P está associado a α.
T está abaixo de A.
$\tan \alpha < 0$

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

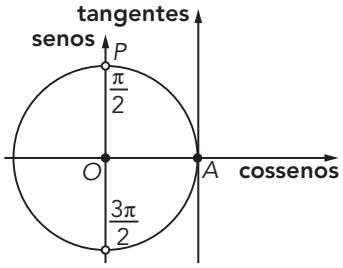
Não escreva no livro

Pense nisto

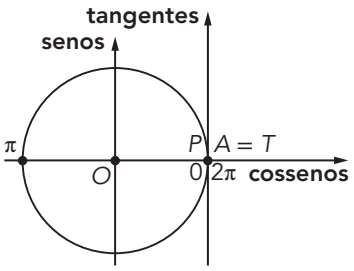
É verdade que $\tan \alpha$ tem valor mínimo igual a –1 e valor máximo igual a 1, a exemplo do seno e do cosseno?

Acompanhe 2 casos particulares a seguir.

- Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o ponto P pertence ao eixo dos senos, então a reta $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das tangentes. Consequentemente, não existirá o ponto T (intersecção entre a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e o eixo das tangentes). Por isso, não se define $\tan \frac{\pi}{2}$. Analogamente, não se define $\tan \frac{3\pi}{2}$.



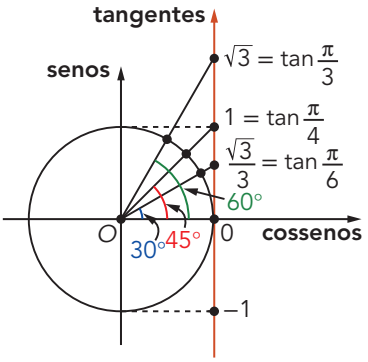
- Se $\alpha = 0$, ou $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 2\pi$, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ intersecta o eixo das tangentes em sua origem A. Assim, $AT = 0$, então $\tan 0 = 0$, $\tan \pi = 0$ e $\tan 2\pi = 0$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Valores notáveis da tangente

Conhecemos os valores da tangente de ângulos notáveis que estão indicados na circunferência trigonométrica a seguir.



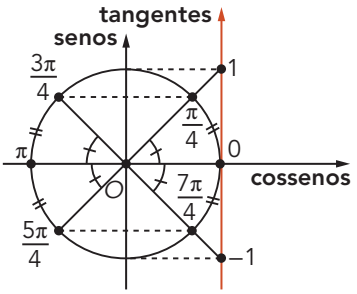
$\tan \frac{\pi}{6} = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan \frac{\pi}{4} = \tan 45° = 1$

$\tan \frac{\pi}{3} = \tan 60° = \sqrt{3}$

Com esses valores, é possível determinar, por simetria, a tangente de outros arcos.

A partir de $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, é possível encontrar os valores de $\tan \frac{3\pi}{4}$, $\tan \frac{5\pi}{4}$ e $\tan \frac{7\pi}{4}$. Note a congruência entre os ângulos representados.



$\tan \frac{3\pi}{4} = \tan \frac{7\pi}{4} = -1$

$\tan \frac{5\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades resolvidas

10. Com o auxílio da tabela de razões trigonométricas ao final do Volume, encontre o valor de tan 290°.

Solução:

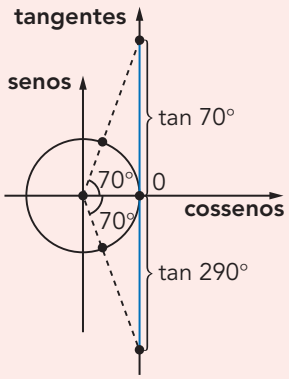
Note que 290° = 360° – 70°.

Pela simetria apresentada na figura, concluímos que:

$$\tan 290° = -\tan 70°$$

Pela tabela de razões trigonométricas, temos:

$$\tan 290° \simeq -2{,}74748$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

39. a) $\tan 180° = \tan 0° = 0$
b) $\tan 240° = \tan 60° = \sqrt{3}$
c) $\tan \frac{3\pi}{2}$ não existe, pois $\frac{3\pi}{2}$ está associado ao ponto de intersecção da circunferência com o eixo dos senos.
d) $\tan \frac{11\pi}{6} = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

ATIVIDADES

Não escreva no livro

39. Calcule em seu caderno, se existir:

a) $\tan 180°$ **c)** $\tan \frac{3\pi}{2}$

b) $\tan 240°$ **d)** $\tan \frac{11\pi}{6}$

40. Sendo $x = 30°$, calcule em seu caderno o valor da expressão:

$$y = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} x - 4 \cdot \cos x + \tan (2x)}{\cos (4x) - \operatorname{sen} (2x)}$$ $4 - 2\sqrt{3}$

41. Classifique em seu caderno como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada afirmação seguinte.

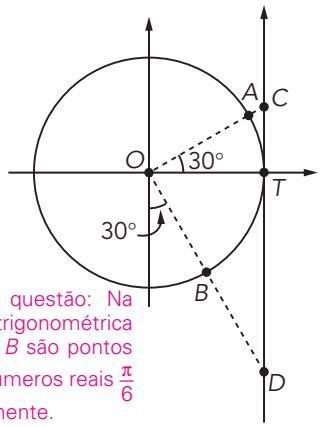
a) $\tan 100° < \tan 105°$ V

b) $\tan 80° < \operatorname{sen} 80°$ F

c) $\tan 250° > 0$ V

d) $\tan 2\pi$ não existe. F

42. Elabore em seu caderno uma questão a partir da figura a seguir.
Troque a questão elaborada com um colega para que ele resolva a sua enquanto você resolve a dele.

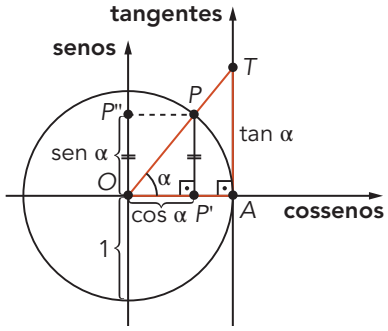


Banco de imagens/Arquivo da editora

42. Exemplo de questão: Na circunferência trigonométrica apresentada, A e B são pontos associados aos números reais $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{3}$, respectivamente.
Determine a medida:
a) de $\overline{CD}$;
b) de área do triângulo COD;
c) angular do menor arco determinado por A e B, bem como a medida de comprimento desse arco.

Relação entre tangente, seno e cosseno

Seja α um número real, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Vamos supor, inicialmente, que α pertença ao 1º Q, isto é, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. O número real α está associado a P, extremidade do arco de medida α rad.

Note que, na figura, temos:

$$OP' = \cos \alpha$$
$$AT = \tan \alpha$$
$$OP'' = P'P = \operatorname{sen} \alpha$$
$$OP = OA = 1 \text{ (medida do raio)}$$

Os triângulos $OP'P$ e OAT são semelhantes, pois têm em comum o ângulo de medida α e um ângulo reto. Podemos, então, estabelecer a proporção:

$$\frac{OP'}{OA} = \frac{P'P}{AT} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\tan \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

Se o ponto P pertencer ao 2º, 3º ou 4º quadrantes, chega-se à mesma relação usando procedimento similar. Caso α pertença a um quadrante em que $\cos \alpha < 0$, ou $\operatorname{sen} \alpha < 0$ ou $\tan \alpha < 0$, adotamos o módulo desses valores como medidas dos catetos.

- Se $\alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$, temos $\tan \alpha = 0$, $\operatorname{sen} \alpha = 0$ e $\cos \alpha \neq 0$.
  Daí, $\tan \alpha = 0 = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$.
  Para $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$, não se define a tangente.
  Desse modo, se $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \dfrac{3\pi}{2}$, vale a relação:

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

Os valores da tangente de ângulos notáveis e de outros ângulos podem ser obtidos usando a relação apresentada anteriormente.

- Se $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, então $\tan \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.
- Se $\alpha = 40°$, então $\tan 40° = \dfrac{\operatorname{sen} 40°}{\cos 40°}$. Consultando a tabela de razões trigonométricas ao final do Volume, obtemos:

$$\tan 40° \simeq \frac{0{,}64279}{0{,}76604} \simeq 0{,}83910$$

Pense nisto

Utilizando a relação $\tan \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$, com $\alpha \in [0; 2\pi]$, como podemos justificar que α precisa ser diferente de $\dfrac{\pi}{2}$ e diferente de $\dfrac{3\pi}{2}$?

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, o valor de $\cos \alpha = 0$. Desse modo, $\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{0}$, o que não é possível.

Pense nisto

Qual é o erro na afirmação: "Se $\tan \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 2 = \dfrac{2}{1}$, então $\operatorname{sen} \alpha = 2$ e $\cos \alpha = 1$"?

Se uma razão $\frac{a}{b} = 2$, o que se pode concluir é que $a = 2b$ e, não necessariamente, $a = 2$ e $b = 1$. Por exemplo, se $a = 6$ e $b = 3$, $\frac{a}{b} = 2$ ou se $a = -10$ e $b = -5$, $\frac{a}{b} = 2$. Além disso, $\operatorname{sen} \alpha$ não pode ser igual a 2, já que $-1 \leqslant \operatorname{sen} \alpha \leqslant 1$.

Atividades resolvidas

11. Seja α um número real pertencente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Sabendo que $\tan \alpha = 2$, qual é o valor de $\operatorname{sen} \alpha$? E de $\cos \alpha$?

Solução:

De $\tan \alpha = 2$, podemos escrever $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 2 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 2 \cdot \cos \alpha$.

Aplicando esse resultado à relação fundamental da Trigonometria, temos:

$(2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 4 \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 5 \cdot \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{5}} = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Como α pertence ao 1º Q, temos $\cos \alpha > 0$ e, assim, concluímos que:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ e } \operatorname{sen} \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

43. Pela relação fundamental da Trigonometria:

$\cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \xrightarrow{\alpha \in 2º\ Q} \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

43. Sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{1}{3}$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, determine em seu caderno o valor de $\tan \alpha$.

44. Se $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ e $\cos \alpha = 0{,}2$, qual é o valor de $\tan \alpha$? $-2\sqrt{6}$

45. Se $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e $\tan x = -4$, obtenha em seu caderno o valor de $\cos x$. $-\frac{\sqrt{17}}{17}$

46. Considerando $\tan 58° \simeq \dfrac{8}{5}$, determine o valor aproximado de $\operatorname{sen} 58°$ e $\tan 302°$.

$\operatorname{sen} 58° = \frac{8\sqrt{89}}{89}$; $\tan 302° = -\frac{8}{5}$.

47. Sabendo que $2 \cdot \operatorname{sen} x + 5 \cdot \cos x = 0$, com $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, determine em seu caderno o valor da expressão: $A = 4 \cdot \tan^2 x + 2 \cdot \tan x$.

47. $2 \cdot \operatorname{sen} x + 5 \cdot \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen} x = -5 \cdot \cos x \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{5}{2} \Rightarrow \tan x = -\frac{5}{2}$

$A = 4 \cdot \frac{25}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = 25 - 5 = 20$

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Arte, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

As imagens não estão representadas em proporção.

A Matemática por trás do disfarce

Você sabe o que significa anamorfose?

Anamorfoses são representações distorcidas de imagens em um plano ou em outra superfície que, quando observadas de determinado ponto de vista ou quando são refletidas por um espelho curvo, transformam a imagem original. É como se houvesse uma imagem disfarçada.

Analise a anamorfose a seguir. Repare que a imagem do cubo mágico (imagem **1**) está distorcida, em 2D (2 dimensões), e não aparenta ser um objeto em 3D (3 dimensõs).

Reprodução/brusspup/Youtube

Imagem **1**.

Do mesmo ponto de vista, quando rotacionamos a imagem em 180°, temos a impressão de que é um cubo mágico sem distorções e em 3D (imagem **2**).

Reprodução/brusspup/Youtube

Imagem **2**.

Agora, analise um exemplo de anamorfose cilíndrica (imagem refletida em um espelho curvo). A primeira imagem é a original.

Sugira aos estudantes que acompanhem o processo de criação de uma anamorfose similar à anamorfose do cubo mágico em https://tedit.net/d4m0q5 (acesso em: 22 jul. 2024).

AUTVIS, Brasil, 2024. Reprodução/Coleção particular

Imagem original.

AUTVIS, Brasil, 2024. Reprodução/Coleção particular

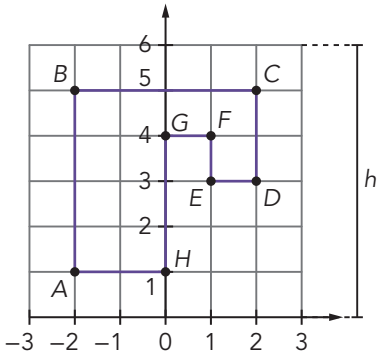
Imagem espelhada por um espelho curvo.

OROSZ, István. *The raven* (*Edgar Allan Poe anamorphosis*), 2006, tinta nanquim e aquarela, 60 mm × 500 mm, espelho cilíndrico 60 mm × 100 mm.

A segunda imagem mostra o reflexo que a imagem original produz em um espelho cilíndrico posicionado no centro. Esse é o reflexo do busto de Edgar Allan Poe, escritor estadunidense bastante conhecido por suas histórias de terror, entre elas, o poema "O corvo" (em inglês "*The raven*").

Acompanhe agora o processo de criação de uma anamorfose cilíndrica, isto é, anamorfose na qual utilizamos um espelho cilíndrico.

Para exemplificar, vamos determinar, numa malha quadriculada com n quadradinhos horizontais e m quadradinhos verticais, um polígono $ABCDEFGH$. Note que os lados dele ou são horizontais ou são verticais, para facilitar o processo.



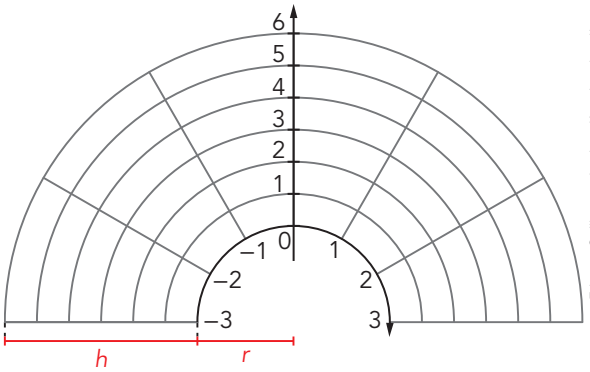
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Malha quadriculada em que $n = 6$, $m = 6$ e o comprimento vertical de 6 quadradinhos é h.

A imagem a seguir apresenta a malha anamórfica correspondente à malha quadriculada anterior.

Note, na malha anamórfica, que:

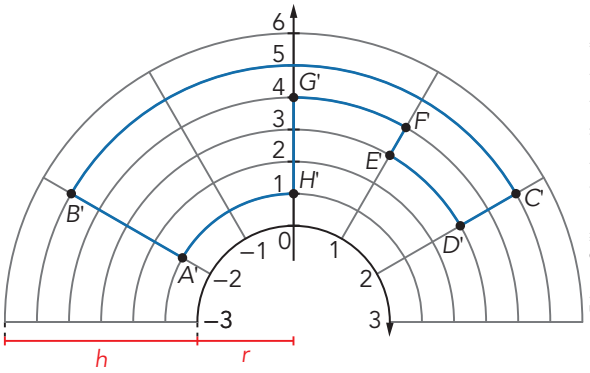
- a quantidade de semicircunferências concêntricas é igual a $m + 1$ (incluindo a semicircunferência que será o "eixo");
- a medida r do raio da semicircunferência menor ("eixo") deve ser maior do que a medida do raio da base do espelho cilíndrico;
- a medida do raio da semicircunferência maior deve ser igual a $r + h$, em que h é a medida de comprimento vertical de m quadradinhos da malha quadriculada;
- os segmentos de reta radiais (retas que passam pelos centros coincidentes das semicircunferências) indicados devem dividir cada semicircunferência em arcos de medida $\frac{\pi}{n}$ rad.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Malha anamórfica em que cada um dos arcos das semicircunferências tem medida angular $\frac{\pi}{6}$ rad.

A imagem a seguir apresenta a projeção do polígono *ABCDEFGH* sobre a malha anamórfica. Essa projeção é *A'B'C'D'E'F'G'H'*.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Note que o ponto *A'* é a projeção de *A* e que ambos têm as mesmas coordenadas. O mesmo ocorre com os outros pontos. Além disso, os segmentos de reta verticais, quando projetados na malha anamórfica, são radiais, e os horizontais, quando projetados, são arcos de circunferência.

Se você colocar um espelho cilíndrico de modo que seu eixo intersecte os centros das semicircunferências, notará que a imagem produzida nele será a do polígono *ABCDEFGH*.

Você pode construir um espelho cilíndrico. Basta utilizar uma palha de aço para raspar e polir toda a superfície lateral de uma lata cilíndrica de alumínio.

a) Represente em seu caderno uma anamorfose cilíndrica. Resposta pessoal.

b) Qual deve ser o valor de n (quantidade de quadradinhos horizontais da malha) para facilitar a determinação dos segmentos de reta radiais da malha anamórfica? n deve ser um divisor de π rad, ou seja, de 180°.

c) No exemplo apresentado, a projeção de um segmento de reta **vertical** com 1 unidade de medida de comprimento passou a ter qual medida de comprimento na malha anamórfica? Apresente o valor em função de h. Passou a ter a mesma medida de cada quadradinho da malha, isto é: $\frac{h}{n}$ u.c. $= \frac{h}{6}$ u.c.

d) No exemplo apresentado, a projeção do segmento de reta $\overline{DE}$ passou a ter qual medida de comprimento na malha anamórfica? Apresente o valor em função de h e de r.

d) O segmento de reta $\overline{DE}$, projetado na malha anamórfica, tornou-se um arco de circunferência de medida angular $\frac{\pi}{6}$ rad e raio medindo $\left(r + \frac{3h}{6}\right)$ u.c. Assim, a medida de comprimento passou a ser:

$\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \left(r + \frac{3 \cdot h}{6}\right) =$

$= \frac{\pi}{6}\left(r + \frac{h}{2}\right)$; ou seja,

$\frac{\pi}{6}\left(r + \frac{h}{2}\right)$ u.c.

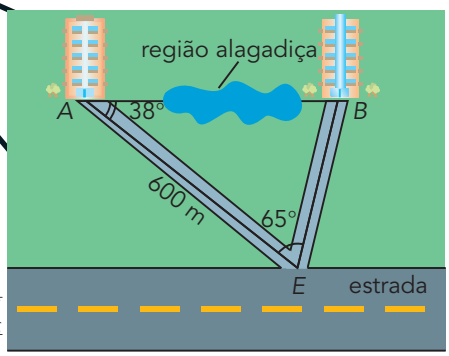
capítulo

10 Trigonometria em triângulos quaisquer

Lei dos senos

Do entroncamento (E) de uma estrada saem 2 pequenos trechos retilíneos, num terreno plano, que levam aos portões de entrada de 2 condomínios, indicados pelas letras A e B na imagem a seguir.

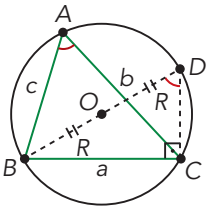
Deseja-se determinar a medida de distância entre A e B, mas a medição direta é difícil, pois há uma região alagadiça entre esses pontos.



Zapt/Arquivo da editora

Com o auxílio de um teodolito, um topógrafo mediu, a partir de E, o ângulo formado pelas retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{EB}$, obtendo 65°, conforme mostra a imagem. Em seguida, percorreu os 600 metros do trecho $\overline{EA}$ e, a partir do ponto A, mediu o ângulo entre as retas $\overleftrightarrow{EA}$ e $\overleftrightarrow{AB}$, obtendo 38°. Com essas informações, é possível medir a distância entre A e B aplicando a lei a seguir.

As medidas dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos, e a constante de proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

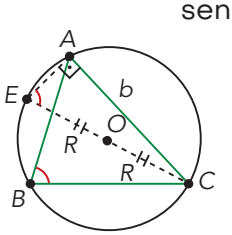
Dado um $\triangle ABC$, vamos considerar a circunferência circunscrita a ele. Sejam O e R, respectivamente, o centro e a medida do raio dessa circunferência. O $\triangle ABC$ tem os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ com vértices, respectivamente, em A, B e C e lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, de medidas a, b e c.

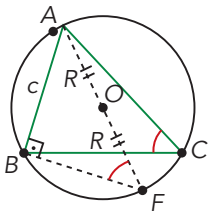
A partir do diâmetro $\overline{BD}$, na imagem anterior, temos $\text{med}(B\hat{A}C) = \text{med}(B\hat{D}C)$, pois $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}C$ são ângulos inscritos (isto é, seus vértices são pontos da circunferência e seus lados são secantes a ela), tem o arco comum $\overset{\frown}{BC}$ e determinam a mesma corda $\overline{BC}$ na circunferência.

Como o $\triangle BDC$ é inscrito em uma semicircunferência, ele é retângulo em C:

$$\text{sen}\,\hat{D} = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R$$

De modo análogo, temos $\dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = 2R$ e $\dfrac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observação

- Se o $\triangle ABC$ for retângulo, a demonstração é análoga, considerando $\text{sen}\,90° = 1$.
- Se o $\triangle ABC$ for obtusângulo, com $\text{med}(\hat{A}) = \alpha$, usa-se a relação $\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\hat{A}$ para demonstrar a validade da lei dos senos.

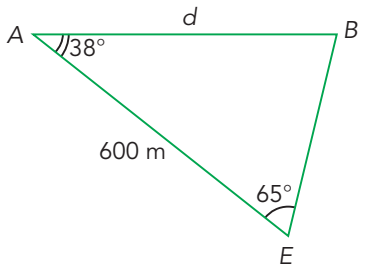
Se achar necessário, revise o conceito de ângulo inscrito e a relação entre a medida do ângulo inscrito e a medida angular do arco correspondente.

Segue a expressão da **lei dos senos**, também conhecida como **teorema dos senos**:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

Voltemos ao problema da medida de distância entre os portões dos 2 condomínios apresentado anteriormente. De acordo com a representação, temos:

$$\text{med}(A\hat{B}E) = 180° - (65° + 38°) = 77°$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de distância d pode ser obtida por meio da lei dos senos: $\frac{d}{\operatorname{sen} 65°} = \frac{600}{\operatorname{sen} 77°}$.

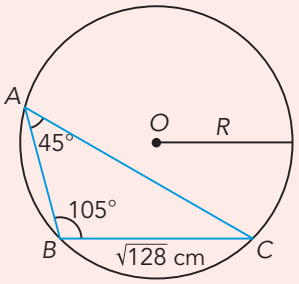
Usando os valores aproximados para sen 65° e sen 77°, temos:

$$\frac{d}{0{,}90631} = \frac{600}{0{,}97437} \Rightarrow d \simeq 558$$

Logo, a medida de distância entre A e B é aproximadamente 558 metros.

Atividades resolvidas

1. No $\triangle ABC$, determine as medidas do lado $\overline{AB}$ e do raio da circunferência circunscrita.



Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Solução:

$$\text{med}(\hat{C}) = 180° - (45° + 105°) = 30°$$

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{AB}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow \frac{BC}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{AB}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow \frac{\sqrt{128}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AB}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AB = \sqrt{64} = 8$$

O lado $\overline{AB}$ mede 8 cm.

Usando a constante de proporcionalidade:

$$2R = \frac{AB}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16 \Rightarrow R = 8$$

O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede 8 cm.

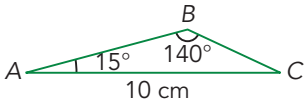
2. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que verifique com antecedência se há disponibilidade de uma calculadora sonora. Caso não haja, a atividade pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão. Estratégias como essa podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. Num triângulo ABC são dados $\text{med}(\hat{B}) = 60°$, $\text{med}(\hat{C}) = 45°$ e $AB = 8$ cm. Determine em seu caderno a medida de $\overline{AC}$. $4\sqrt{6}$ cm

2. No triângulo ABC, determine em seu caderno a medida de $\overline{AB}$ e a de $\overline{BC}$. Se precisar, use a tabela de razões trigonométricas do final deste Volume ou uma calculadora.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

$AB \simeq 6{,}57$ cm; $BC \simeq 4{,}03$ cm.

3. O proprietário de um terreno deseja conhecer a medida de distância entre a casa dele e a nascente de um rio. O caminho da casa à nascente, porém, é de difícil acesso. A partir da frente da casa e com o auxílio de um teodolito, ele mediu o ângulo por meio do qual avistava a nascente e um pomar, obtendo 48°. Caminhou, então, 420 m em linha reta até o pomar, de onde mirou a nascente e a casa segundo um ângulo de 64°.

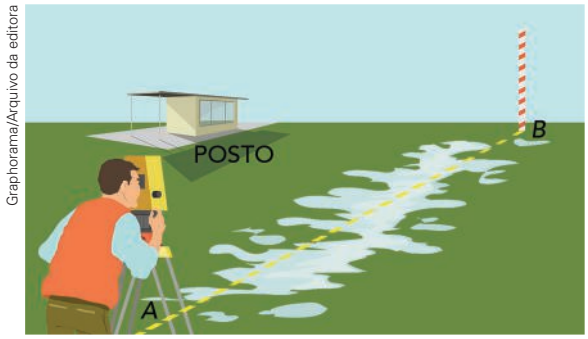
As imagens não estão representadas em proporção.

Quantos metros separam sua casa da nascente? Consulte a tabela de razões trigonométricas no final deste Volume ou use uma calculadora científica. Aproximadamente 407 m.

Graphorama/Arquivo da editora

4. Em um triângulo ABC, sabe-se que $\cos \hat{B} = -\frac{1}{3}$ e $AC = 10$ cm. Acrescente em seu caderno alguma informação a este enunciado que permita determinar a medida de $\overline{AB}$.
Resposta pessoal.

5. Entre os pontos A e B, extremidades do lado de um terreno, existe uma região plana alagadiça. Um topógrafo, situado em A, avistou um posto rodoviário localizado na estrada sob um ângulo de 40° em relação a $\overline{AB}$. Dirigiu-se, então, ao posto, situado a 1500 m de A e avistou as extremidades do terreno sob um ângulo de 85°.
Considere: sen 55° ≃ 0,82; sen 85° ≃ 0,99 e sen 40° ≃ 0,64.

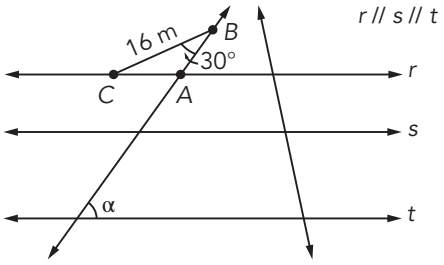


Graphorama/Arquivo da editora

a) Qual é a medida de distância, em metros, de A até B? Aproximadamente 1 811 m.

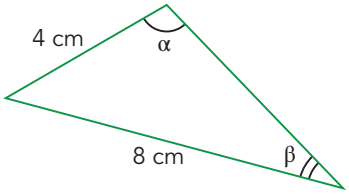
b) Qual é a medida de distância, em metros, entre o posto e o ponto B?
Aproximadamente 1 171 m.

6. Considerando a figura a seguir, elabore em seu caderno um problema em que se estabeleça uma relação entre o ângulo α, o triângulo ABC e a lei dos senos. Se necessário, acrescente alguma informação que possibilite resolvê-lo.
Troque o problema elaborado com um colega para que ele resolva o seu enquanto você resolve o dele.



Banco de imagens/Arquivo da editora

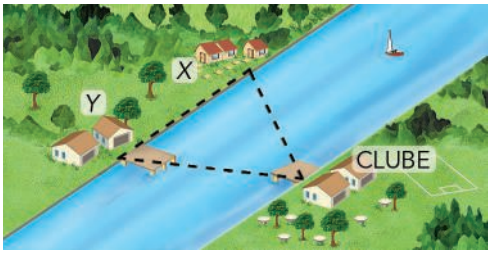
7. Na figura a seguir, sabe-se que $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$. Determine em seu caderno o valor de sen β.
$\frac{\sqrt{15}}{8}$



Banco de imagens/Arquivo da editora

8. Determine em seu caderno a medida do raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC sendo $BC = 15$ cm e $\text{med}(\hat{A}) = 30°$. 15 cm

9. Duas casas de veraneio X e Y estão situadas na mesma margem de um rio. De X avistam-se a casa Y e a entrada de um clube particular na outra margem, sob um ângulo de 56°. De Y avistam-se a entrada do clube e a casa X, sob um ângulo de 42°.
Admita que, nesse trecho, as margens do rio são paralelas e considere os valores: sen 42° ≃ 0,67; sen 56° ≃ 0,83 e sen 82° ≃ 0,99.



Graphorama/Arquivo da editora

Sabendo que a medida de distância entre a casa representada por X e a entrada do clube é 600 m, determine em seu caderno o número inteiro mais próximo que representa, em metros:

a) a medida de distância entre a entrada do clube e Y; Aproximadamente 743 m.

b) a medida de distância entre as casas X e Y;
Aproximadamente 887 m.

c) a medida de largura do rio. 498 m

6. Exemplo de problema: Uma pessoa está parada no ponto C e outra pessoa está parada no ponto B, em ruas transversais representadas na figura. Elas combinaram de se encontrar na esquina, representada pelo ponto A. Sabendo que $\text{med}(C\hat{B}A) = 30°$ e o menor ângulo formado entre as duas ruas mede α, qual medida de distância a pessoa deve percorrer para ir do ponto C ao ponto A?

INTERLIGANDO

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de História, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Evolução da história da Trigonometria

QUAL É A HISTÓRIA MESMO?

A história da Matemática apresenta um caminho bem interessante para descrever o que você aprende durante a sua jornada na escola. Mas isso não aconteceu de um dia para o outro. A Matemática apresenta também um caminho de conhecimento que vem datado de muitos anos.

EM TRIGONOMETRIA, POR EXEMPLO,...

... não se tem certeza de sua origem, mas sabe-se que o início do seu desenvolvimento se deu devido a problemas gerados pela Astronomia e pelas Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e os babilônios. Nessa mesma época, é possível encontrar problemas envolvendo a cotangente no papiro *Rhind* e uma notável tábua de secantes na tábula cuneiforme babilônica *Plimpton 322*.

Art Collection 2/Alamy/Fotoarena

Reprodução/Wikimedia Commons

FORAM OS GREGOS...

... que fizeram um estudo das relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos que subtendem. Nas obras de Euclides, já existiam teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas.

No livro *Os Elementos* de Euclides, é possível encontrar indícios da lei do cosseno para ângulos obtusos e agudos, respectivamente, nos postulados II.12 e II.13, porém enunciadas em linguagem geométrica.

Manuel Lagos Cid/Paris Match/Getty Images

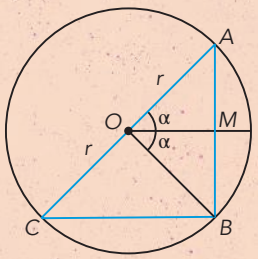
Postulado 12: "Nos triângulos obtusângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo obtuso é maior do que os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo obtuso por duas vezes o contido por um dos à volta do ângulo obtuso, sobre o qual cai a perpendicular, e também pela cortada exteriormente pela perpendicular relativamente ao ângulo obtuso."

Postulado 13: "Nos triângulos acutângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo agudo é menor do que os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo agudo por duas vezes o contido por um dos à volta do ângulo agudo, sobre o qual cai a perpendicular, e também pela cortada internamente pela perpendicular relativa ao ângulo agudo."

O ASTRÔNOMO HIPARCO DE NICEIA

Na segunda metade do século II a.C., Hiparco de Niceia escreveu um tratado em doze livros, no qual se dedicou à criação da primeira tabela trigonométrica. Essa tabela continha os valores dos arcos para uma série de ângulos que Hiparco calculou para usar em seus estudos de Astronomia. Usando os conhecimentos babilônicos, introduziu a divisão da circunferência em 360° na Grécia. Também parece ter sido Hiparco um dos primeiros a dividir o círculo em 360° na sua tábua de cordas.

Apesar de a corda de um arco não ser o seno, uma vez conhecido o valor de seu comprimento, pode-se calcular o seno da metade do arco.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\text{sen } \alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{corda de } 2\alpha}{2r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{corda de } 2\alpha = 2r \cdot \text{sen } \alpha$$

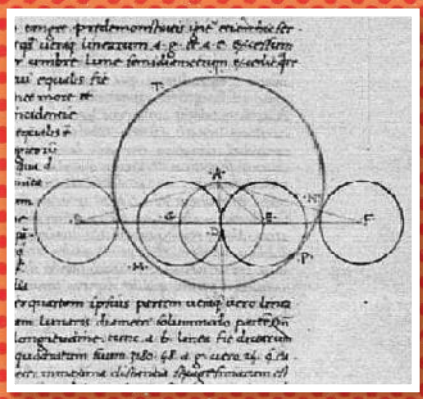
Raul Aguiar/Arquivo da editora

MENELAU DE ALEXANDRIA

Outro matemático grego, Menelau de Alexandria, por volta de 100 d.C., produziu um tratado sobre cordas num círculo em seis livros. No entanto, vários desses livros se perderam. Felizmente, seu tratado *Sphaerica*, composto de três livros, foi preservado em uma versão árabe e é o trabalho mais antigo conhecido sobre Trigonometria esférica.

PTOLOMEU DE ALEXANDRIA

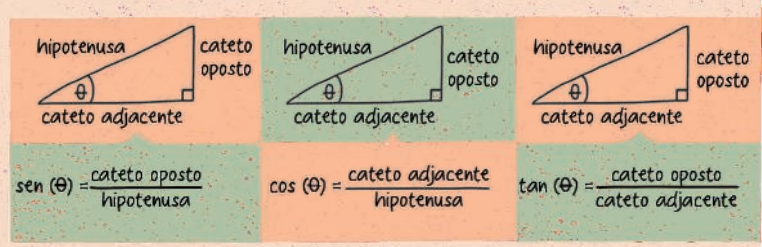
Entretanto, a obra trigonométrica mais influente e significativa da Antiguidade foi a *Syntaxis mathematica*, escrita por Ptolomeu de Alexandria, contendo 13 livros. Este tratado é famoso por sua compacidade e elegância. Para distingui-lo de outros, foi associado a ele o superlativo *magiste* ou "o maior". Mais tarde, na Arábia, a obra foi chamada de *Almajesto*, e desde então é conhecida por esse nome.



Reprodução/Wikipedia Commons

MAS E O SENO E O COSSENO?

A palavra "cosseno" surgiu somente no século XVII, como o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de seno e cosseno foram originados pelos problemas relativos à Astronomia.



Raul Aguiar/Arquivo da editora

Além de seno, cosseno e tangente, temos duas leis extremamente importantes:

Lei dos cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$ $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$ $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$

Lei dos senos: $\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R$

PASSADO TODO ESSE TEMPO...

... a Trigonometria deixou de ser apenas uma auxiliar da Astronomia. Ela tornou-se primeiramente autônoma e, por fim, transformou-se em uma parte da análise matemática, expressando diversas relações, sem necessidade de recorrer apenas a arcos ou ângulos. Foi um longo caminho da humanidade para chegar até a Trigonometria que vemos nos dias de hoje.

Fontes dos dados: UM POUCO da história da Trigonometria. Disponível em: https://tedit.net/04tcfw. RIZZATO, F. B. *O início da Trigonometria*. Disponível em: https://tedit.net/44g1y7. EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da Unesp, 2009. COSTA, Nielce M. Lobo da. *A história da Trigonometria*. Disponível em: https://tedit.net/fwof5x. Acesso em: 23 jul. 2024.

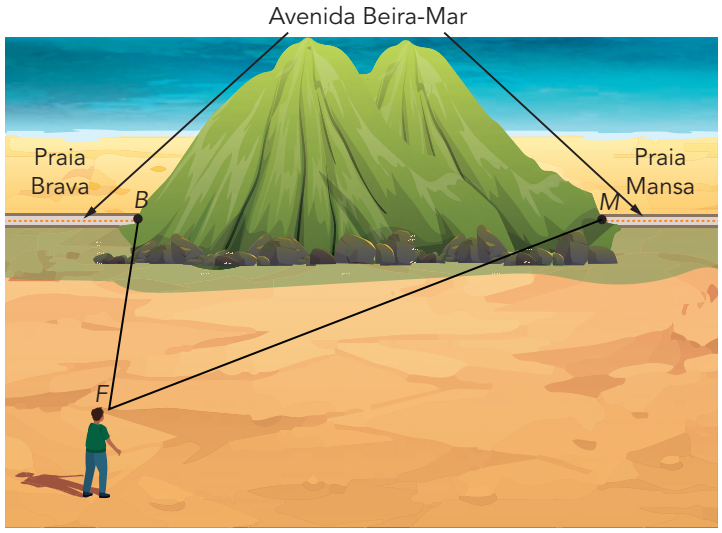
1. Faça uma pesquisa e apresente, em forma de mapa conceitual, em que situações a Trigonometria colabora para o desenvolvimento humano.
A resposta depende da pesquisa realizada pelo estudante.

2. Elabore uma linha do conhecimento que mostre os principais conceitos estudados anteriormente na vida escolar e que são úteis para o estudo da Trigonometria. Resposta pessoal.

3. No infográfico, a lei dos senos e a lei dos cossenos são consideradas "extremamente importantes". Acesse uma aplicação de inteligência artificial generativa e peça que gere um texto sobre a importância desse assunto e compare com outras fontes confiáveis a veracidade da informação, citando ao final a fonte de pesquisa. Em seguida, elabore um breve resumo sobre o que a inteligência artificial apresentou e o comparativo com o *site* confiável que você pesquisou. Respostas pessoais.

Lei dos cossenos

A prefeitura de uma cidade litorânea está estudando a viabilidade de construir um túnel retilíneo ligando as praias Brava e Mansa pela avenida Beira-Mar, que é interrompida por um trecho montanhoso. Vamos supor que todo o terreno ao redor dos morros seja plano.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Devido à impossibilidade de ser feita uma medição direta, o engenheiro da prefeitura posicionou-se no terreno plano e avistou, do ponto F, o final da avenida Beira-Mar no trecho que está na praia Brava (ponto B) e o início da continuação da avenida, logo no começo da praia Mansa (ponto M), conforme mostra a figura.

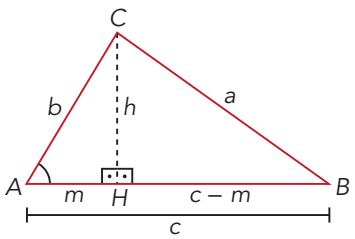
Feitas as medições, o funcionário verificou que, naquele momento, estava a 150 m de B e a 320 m de M; além disso, mediu o ângulo formado pelas retas $\overleftrightarrow{FB}$ e $\overleftrightarrow{FM}$, obtendo 41°.

Se o projeto for aprovado, quantos quilômetros de extensão terá o túnel, considerando a medida do segmento de reta $\overline{BM}$ como base para o cálculo?

Por meio da lei a seguir, podemos resolver esse e outros problemas.

Em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto da medida desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

- Sejam o triângulo **acutângulo** ABC e $CH = h$ a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\left.\begin{array}{l} \triangle BCH: a^2 = h^2 + (c - m)^2 \\ \triangle ACH: h^2 = b^2 - m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = (b^2 - m^2) + (c^2 - 2 \cdot c \cdot m + m^2) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m \quad \text{I}$$

$$\triangle ACH: \cos \hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \hat{A} \quad \text{II}$$

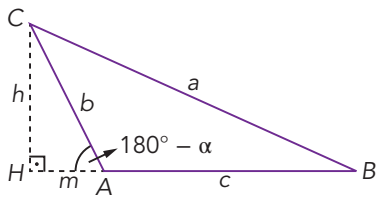
Substituindo II em I, obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Analogamente, podemos obter:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \text{ e } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

- Sejam o triângulo ABC **obtusângulo** em $\hat{A}$, com med$(\hat{A}) = \alpha$, e $CH = h$ a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\left.\begin{array}{l} \triangle BCH: a^2 = h^2 + (c + m)^2 \\ \triangle ACH: h^2 = b^2 - m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = (b^2 - m^2) + (c^2 + 2 \cdot c \cdot m + m^2) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m \quad \text{I}$$

$$\triangle CHA: \cos(180° - \alpha) = \frac{m}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = b \cdot \cos(180° - \alpha) \Rightarrow m = b \cdot (-\cos \alpha) \Rightarrow m = -b \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha m = -b \cdot \cos \hat{A} \quad \text{II}$$

Substituindo II em I, obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Analogamente, podemos obter:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \text{ e } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

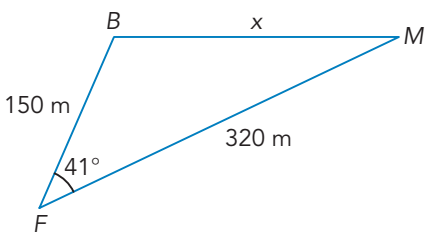
- No caso de o triângulo ABC ser **retângulo** (em $\hat{A}$), como $\cos 90° = 0$, verifica-se a igualdade $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90°$, que se reduz à expressão do teorema de Pitágoras.

  Como pudemos perceber nos 3 casos, em qualquer triângulo ABC, temos:

$$\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \end{array}$$

Cada uma das relações anteriores é conhecida como **lei dos cossenos** ou **teorema dos cossenos**.

Considerando o problema sobre a medida da extensão do túnel, proposto na introdução da lei dos cossenos, a partir da representação temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

BF: medida de distância entre o engenheiro e o ponto B.

MF: medida de distância entre o engenheiro e o ponto M.

BM: medida da extensão do futuro túnel.

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 150^2 + 320^2 - 2 \cdot 150 \cdot 320 \cdot \cos 41°$$

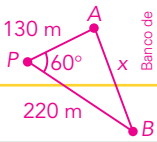
Considerando $\cos 41° \simeq 0{,}75$, temos:

$$x^2 = 22\,500 + 102\,400 - 96\,000 \cdot 0{,}75 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 124\,900 - 72\,000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 52\,900 \Rightarrow x = 230$$

Assim, o futuro túnel terá 230 m de medida de extensão.

13. Pela lei dos cossenos, temos:
$x^2 = 220^2 + 130^2 - 2 \cdot 220 \cdot 130 \cdot \cos 60° \Rightarrow x^2 = 48400 + 16900 - 28600 \Rightarrow x^2 = 36700 \Rightarrow x \simeq 191{,}6$ (pois $x > 0$)
Portanto, a passarela terá aproximadamente 191,6 m de medida de extensão.

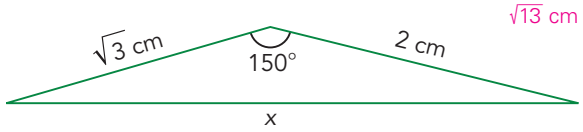
ATIVIDADES



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Não escreva no livro

10. Determine em seu caderno o valor de x.

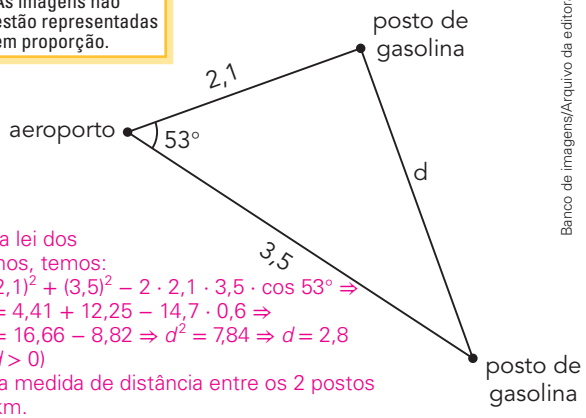


Banco de imagens/ Arquivo da editora

$\sqrt{13}$ cm

11. O acesso ao aeroporto de uma cidade é feito por 2 vias de contorno retilíneo que se intersectam formando um ângulo de medida 53°. Em cada uma das vias há um posto de gasolina cujas medidas de distância até o acesso ao aeroporto são iguais a 2,1 km e 3,5 km, conforme mostra a figura.

As imagens não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

11. Pela lei dos cossenos, temos:
$d^2 = (2{,}1)^2 + (3{,}5)^2 - 2 \cdot 2{,}1 \cdot 3{,}5 \cdot \cos 53° \Rightarrow$
$\Rightarrow d^2 = 4{,}41 + 12{,}25 - 14{,}7 \cdot 0{,}6 \Rightarrow$
$\Rightarrow d^2 = 16{,}66 - 8{,}82 \Rightarrow d^2 = 7{,}84 \Rightarrow d = 2{,}8$
(pois $d > 0$)
Logo, a medida de distância entre os 2 postos é 2,8 km.

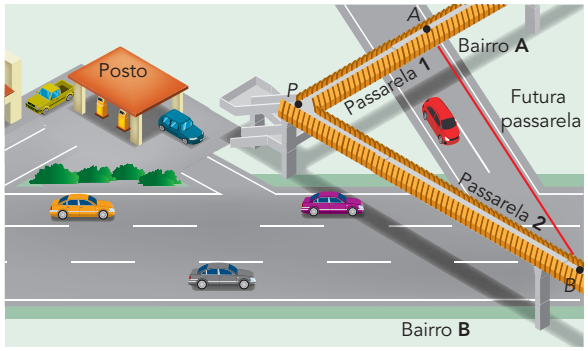
Qual é a medida de distância entre esses postos? Adote $\cos 53° \simeq 0{,}6$.

12. Elabore em seu caderno uma questão envolvendo um triângulo ABC tal que $\cos \hat{A} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $AB = 4\sqrt{3}$ cm e $AC = 5$ cm.

A questão elaborada por você deve conter uma figura com as informações necessárias indicadas.

Em seguida, troque a questão elaborada com um colega para que ele resolva a sua enquanto você resolve a dele.

13. A prefeitura de uma cidade estuda a viabilidade de construir, sobre uma rodovia, uma terceira passarela ligando os bairros Araucárias (representado na imagem por bairro **A**) e Bambuzais (representado por bairro **B**) diretamente, a partir das passarelas já construídas.

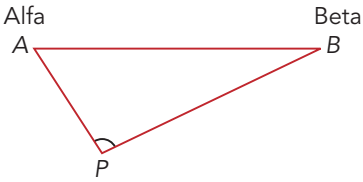


Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

O acesso atual é feito pelas passarelas **1** e **2**, que ligam os pontos A e B, respectivamente, ao ponto P. Medições feitas pela empresa contratada mostram que as passarelas **1** e **2** medem, respectivamente, 130 m e 220 m. O ângulo formado pelas passarelas **1** e **2** mede 60°.

Se o projeto for aprovado, quantos metros de medida de extensão terá a passarela que ligará diretamente os bairros **A** e **B**? Admita que as extremidades A, P e B estejam na mesma medida de altura em relação ao solo.

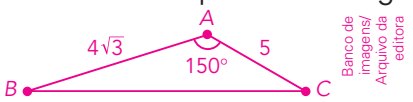
14. Um motorista de caminhão precisa fazer entregas nas cidades Alfa e Beta, com medida de distância de $10\sqrt{13}$ km entre si. Do ponto P em que se encontra, na bifurcação de uma estrada, ele sabe que a medida de distância a Beta, representada no esquema por B, é o triplo da medida de distância a Alfa, representada por A.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Sabendo que $\text{med}(A\hat{P}B) = 120°$ e que a medida da velocidade máxima permitida no trecho de P a B é 50 km/h, determine em seu caderno a medida de tempo mínima que será gasta para chegar a Beta, onde será feita a primeira entrega. 36 min

15. Elabore em seu caderno uma questão envolvendo as medidas dos lados de um triângulo isósceles que tem um ângulo interno com



Banco de imagens/ Arquivo da editora

12. Exemplo de questão: Considere o triângulo ABC a seguir. Determine a medida de $\overline{BC}$.

16. Exemplo de problema: Qual é a medida da diagonal menor do paralelogramo?

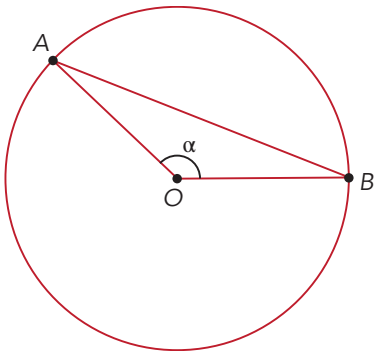
medida igual a 30° e lados congruentes medindo 1 cm cada um.

Troque a questão elaborada com um colega para que ele resolva a sua enquanto você resolve a dele. Exemplo de questão: Quanto mede o outro lado desse triângulo?

16. Elabore em seu caderno um problema envolvendo um paralelogramo cujos lados medem 6 cm e 8 cm e formam um ângulo medindo 60°.

Troque o problema elaborado com um colega para que ele resolva o seu enquanto você resolve o dele.

17. Na figura, a medida do segmento de reta $\overline{AB}$ é 60% maior do que a medida do raio da circunferência de centro O. Determine em seu caderno $\tan \alpha$. $-\frac{24}{7}$

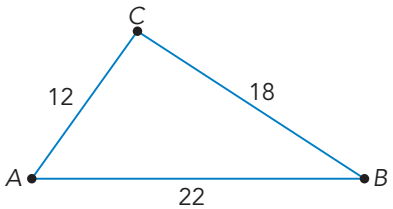


Banco de imagens/Arquivo da editora

18. As medidas, em centímetros, dos lados de um triângulo são números naturais ímpares e consecutivos.

Se o ângulo formado pelos menores lados mede 120°, calcule em seu caderno a medida do maior lado.

19. Uma aluna pegou 3 varetas de bambu para representar um triângulo, utilizando cola quente para unir suas extremidades. As medidas de comprimento das varetas são 12 cm, 18 cm e 22 cm.



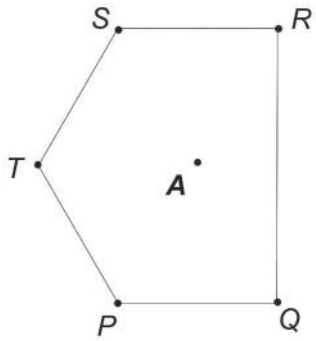
Banco de imagens/Arquivo da editora

Modelo geométrico de triângulo no qual as medidas dos lados são proporcionais ao triângulo feito com as varetas de bambu.

Troque ideias com um colega e, sem usar nenhum instrumento, classifiquem no caderno o triângulo em retângulo, acutângulo ou obtusângulo. Obtusângulo.

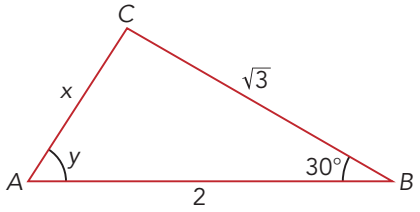
20. **(UFG-GO)** Uma empresa de vigilância irá instalar um sistema de segurança em um condomínio fechado, representado pelo polígono da figura a seguir. A empresa pretende colocar uma torre de comunicação, localizada no ponto A, indicado na figura, que seja equidistante dos vértices do polígono, indicados por P, Q, R, S e T, onde serão instalados os equipamentos de segurança. Sabe-se que o lado RQ desse polígono mede 3000 m e as medidas dos outros lados são todas iguais à distância do ponto A aos vértices do polígono. Calcule a distância do ponto A, onde será instalada a torre, aos vértices do polígono.

$\sqrt{3}$ km



Reprodução/UFG, 2010.

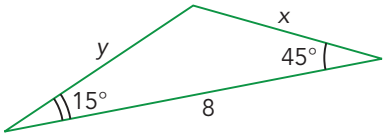
21. Analise a figura e determine em seu caderno o valor de x e de y. Como podemos classificar o triângulo em relação aos seus ângulos internos? $x = 1$; $y = 60°$. O triângulo ABC é retângulo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

22. Analise a figura e verifique se é possível determinar o valor de x sem conhecer o valor de sen 15° e de cos 15°. Faça-o em seu caderno em caso afirmativo.

Sim, é possível, e o valor de x é $4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{6}}{3}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

18. Sejam x, $x + 2$ e $x + 4$ as medidas dos lados. Aplicando a lei dos cossenos, temos:
$(x + 4)^2 = (x + 2)^2 + x^2 - 2 \cdot (x + 2) \cdot x \cdot \cos 120° \Rightarrow (x + 4)^2 = (x + 2)^2 + x^2 - 2 \cdot (x + 2) \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = x^2 + 4x + 4 + x^2 + x^2 + 2x \Rightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -2$ (não convém)
$x + 4 = 3 + 4 = 7$ Portanto, o maior lado mede 7 cm.

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **7** e **10** da BNCC. Também favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Ambiental*.

Não escreva no livro

PROJETO

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Biologia ou de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Reprodução/ ONU

Professor, converse com os estudantes sobre o tema tratado nesta seção. Pergunte a eles se já presenciaram alguma situação em que havia lixo na praia, no mar ou em rios, se conheciam os impactos da poluição marinha para os animais e se já entraram em contato com projetos que trabalham em prol desses animais. Questione, também, se já notaram que existem produtos fabricados com o intuito de substituir ou minimizar uso de materiais plásticos, como canudos reutilizáveis.

Mar sem plástico

Leia o texto a seguir.

[...]

Estima-se que 80% do lixo marinho tenha origem em terra, chegando aos oceanos por meio dos cursos d'água, o que indica uma necessidade de melhores gestões dos recursos hídricos e dos resíduos sólidos.

[...]

O lixo marinho é composto por materiais sólidos fabricados ou transformados (plásticos, filtros de cigarros, vidro, metal e madeira) que são jogados no ambiente marinho, constituindo grave ameaça à saúde dos nossos mares, rios e lagos, mas também à nossa economia e à sociedade. Nesse cenário, os plásticos são o principal detrito encontrado no ambiente marinho. Ao contrário dos materiais orgânicos, os plásticos concentram-se nos oceanos e podem levar 500 anos para se decomporem. Afetam diretamente a fauna marinha, pois são confundidos com alimentos e ingeridos pelos animais, causando sua morte e contaminando cadeias alimentares, com sérios impactos na saúde dos seres humanos.

BRASIL. Ministério da Defesa. Marinha do Brasil. *Combate ao lixo no mar*. Disponível em: https://tedit.net/63ra60. Acesso em: 27 jul. 2024.

Suryanto Suryanto/Anadolu/Getty Images

Lixo plástico acumulado e boiando em uma praia, em Bangkalan, na Indonésia. Foto de 2024.

Pensando em um projeto

Para combater a poluição marinha, é importante que, entre outras ações, sejam realizados mapeamentos das áreas poluídas. Nesse processo, atualmente, são utilizados diferentes recursos tecnológicos de georreferenciamento que auxiliam na determinação de medidas de distância e na localização de pontos de coleta de amostragens e de embarcações. O desenvolvimento dessas tecnologias envolve conceitos de Trigonometria.

Em contextos de menor escala, podemos aplicar, por exemplo, a lei dos senos ou dos cossenos para calcular medidas de distância inacessíveis e para estimar medidas de áreas poluídas apenas fixando um ponto visível em alto-mar, utilizando fita métrica para determinar uma medida de distância entre 2 pontos em terra ou em um mapa, e um teodolito para determinar a medida dos 2 ângulos com vértices nesses 2 pontos. O teodolito deve ser utilizado apenas em terra e não em alto-mar.

Objetivo

O lixo em mares e oceanos é um problema tanto dos governos quanto da população. Pensando em contribuir com soluções para esse problema, crie, em grupo, uma cartilha que possa ser divulgada em um *blog* para informar e conscientizar a população sobre o descarte adequado do lixo. Para isso, pesquise e identifique áreas em rios ou mares em que seja comum encontrar lixos e organize ações a fim de chamar a atenção e mobilizar a população da região em que mora para evitar essa poluição, reduzindo o consumo de plástico, realizando o descarte correto desse material ou ajudando na limpeza desses locais.

Para começar

- Organizem-se em 6 grupos.

Se julgar oportuno, sugira aos estudantes que procurem especialistas que possam ser convidados para ministrar palestras sobre assuntos relacionados ao tema do projeto. Podem ser pesquisadores, voluntários envolvidos em projetos já existentes para combater a poluição marinha, entre outras possibilidades.

Plano de ação

Etapa 1

Em grupo, pesquisem os tipos de lixo que são jogados em mares e oceanos, quais são as fontes de descarte desses materiais e quais são as consequências do descarte incorreto do lixo em águas salgadas.

Pesquisem ações que vêm sendo desenvolvidas para solucionar esse problema, entre outras informações relacionadas ao tema "poluição marinha".

Além disso, descubram se, na região em que vocês vivem, existe o serviço de coleta seletiva de lixo, avaliando quais tipos de material reciclável passam, de fato, pelo processo de reciclagem e como é feito o descarte do lixo não orgânico e que não é reciclado.

Etapa 2

Compartilhem informações sobre o destino que usualmente é dado ao lixo produzido na região em que vocês vivem e sobre o motivo de cooperativas não reciclarem alguns tipos de material reciclável.

Troquem ideias sobre as informações encontradas e, com o auxílio do professor, discutam sobre como o problema do lixo afeta mares e oceanos.

Etapa 3

Definam juntos se há algum córrego, rio ou praia na região em que vocês vivem onde se costuma encontrar lixo não orgânico descartado na água.

Etapa 4

Os grupos devem visitar os locais encontrados na etapa **3** para realizar um monitoramento. Esse monitoramento pode ser feito uma vez a cada 2 semanas durante 6 meses, por exemplo.

Durante a análise, é importante delimitar e descrever a área a ser analisada (características, vegetação e dimensões), de maneira que seja fácil identificá-la novamente quando o monitoramento for realizado. A descrição da área envolve a descrição das medidas de comprimento e de ângulos do triângulo que a representa.

Vocês devem separar a área afetada em regiões triangulares. Como não é possível realizar todas as medições (principalmente aquelas que estão na água), vocês podem usar a lei dos senos ou a lei dos cossenos para determinar as medidas que comporão a descrição da região, a depender das informações que tiverem.

Etapa 5

Cada grupo deve elaborar um conteúdo para compor uma cartilha informativa com o intuito de abordar o problema e os impactos da poluição marinha e as ações que nós, como população, podemos tomar, incentivar e divulgar para minimizar essa poluição. Nessa cartilha também devem ser apresentadas outras informações que vocês pesquisaram nas etapas anteriores, inclusive informações sobre horário de coleta seletiva nos bairros, se houver.

Etapa 6

Definam um dia da semana ou do mês para que seja realizada a limpeza de alguma praia ou arredores de rios. Essa organização será divulgada no *blog* para que a população possa ajudar.

Para criar um *blog*, utilizem as indicações disponíveis na seção *Produções em foco*.

Etapa 7

Produto final: divulgação em um *blog* dos procedimentos e das ações promovidas pelos estudantes durante a realização deste projeto.

Os grupos devem organizar e apresentar no *blog* a cartilha que produziram. Nesse *blog* serão inseridas as informações de monitoramento do local definido, incluindo o planejamento, as características das regiões delimitadas, as informações pesquisadas, a divulgação de palestras e de ações de limpeza, entre outras.

É importante que o endereço eletrônico desse *blog* seja divulgado o quanto antes para que a comunidade possa acompanhar e participar das ações promovidas pelos estudantes.

Professor, a realização de ações de monitoramento e conscientização da população para ajudar a minimizar o problema do lixo plástico no mar contribui para o ODS **14**, promovendo hábitos sustentáveis e o consumo consciente, como menor consumo e descarte correto do plástico, gerando menos lixo que pode chegar ao mar e prejudicar a vida marinha.

VIRALIZE!

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

A matemática no cinema

A matemática dos efeitos visuais no cinema moderno

Quando o cineasta canadense James Cameron se deparou com dificuldades incontornáveis na execução dos engenhosos efeitos visuais para o filme Avatar (2009), decidiu que, se não havia tecnologia suficiente, iria criá-la. Para alcançar o resultado desejado, sua equipe teve que reinventar as câmeras 3D, aperfeiçoar o sistema de captura de imagens e de captura de expressões faciais e corporais dos atores. E por trás de todas as técnicas e ferramentas que alavancam a sétima arte, proporcionando ao público uma imersão cada vez maior nas telas, estão a computação gráfica e, é claro, as ferramentas matemáticas.

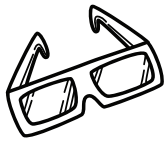
"O cinema 3D é todo baseado em trigonometria, porque tudo advém da distância entre nossos dois globos oculares e as projeções que nós fazemos de um objeto em terceira dimensão", explica Affonso Beato, diretor de fotografia brasileiro que estuda a estereografia, representação de objetos tridimensionais em um plano, há mais de uma década. "A visão humana é organicamente estereoscópica. Mas quando vamos reproduzir isso na cinematografia precisamos ter um rigor matemático enorme para que as imagens criadas sejam fisiologicamente aceitáveis para a visão humana."

Professor da Art Center – College of Design de Pasadena, na Califórnia e membro da American Society of Cinematographers (ASC), Beato já trabalhou com diretores como Glauber Rocha, Walter Salles Jr, Pedro Almodóvar e Stephen Frears. Em seus projetos na cinematografia estereográfica, tem como importante colaborador o Visgraf, laboratório de computação gráfica do IMPA.

Em 2011, o diretor de fotografia veio ao instituto para apresentar uma palestra sobre a visão confortável do 3D. Mais tarde, colaborou com o "The Tempest", produção do Visgraf que une realidade virtual, cinema, teatro e tecnologia de jogos. "Prestamos uma consultoria de cinematografia virtual para o projeto, ajudando na iluminação dos avatares e enquadramento de câmeras", lembra o diretor. [...]

A MATEMÁTICA dos efeitos visuais no cinema moderno. *Impa*, 25 ago. 2020. Disponível em: https://tedit.net/owadfj/. Acesso em: 9 jul. 2024.

Ilustrações: redgreystock/Freepik



Carrossel de imagens

LIGHTFIELD STUDIOS/Adobe Stock

As lentes dos óculos que usamos para assistir a filmes 3D no cinema são filtros polarizadores, que criam a sensação de profundidade das cenas.

www.fotoarena.com.br

Em 2024, depois de 15 anos, o filme *Avatar* (2009), de James Cameron, ainda continuava sendo o filme com a maior bilheteria mundial (cerca de 2,847 bilhões de dólares).
O filme representa uma revolução no modo de filmar utilizando a tecnologia 3D, dando uma ideia de imersão ainda maior ao espectador ao assistir à película cinematográfica. Cena do filme *Avatar* (2009).

1. O texto cita a estereografia, que é uma técnica que cria a ilusão de profundidade em uma imagem. Nossos olhos capturam ângulos ligeiramente diferentes de um mesmo objeto, e o cérebro combina essas duas imagens para produzir a percepção de profundidade, conhecida como estereopsia. A Trigonometria desempenha papel fundamental nesse processo. A medida de distância entre os olhos e a medida do ângulo de visão de cada olho são elementos cruciais que permitem ao cérebro calcular a medida de distância dos objetos. Assim, para termos a percepção de profundidade, precisamos dos dois olhos.
Convide um colega para realizar os experimentos a seguir.

a) Feche um olho, estenda o braço esquerdo e aponte com o dedo indicador para a direita. Aproximando-se de um colega que esteja fazendo o mesmo na sua frente, tente aproximar lentamente as pontas dos dedos indicadores de ambos sem mover a cabeça. Foi fácil tocar a ponta do dedo do colega? Resposta pessoal.

b) Ainda com um olho fechado, repita o experimento movimentando a cabeça. Peça ao colega que faça o mesmo. Ficou um pouco mais fácil tocar a ponta do dedo dele? Resposta pessoal.

c) Com os dois olhos abertos, repita o experimento. Ficou fácil tocar a ponta do dedo do colega? Resposta pessoal.

d) Observe atentamente algum objeto e, em seguida, feche o olho esquerdo. Depois, feche o olho direito. A imagem que você vê é exatamente igual? Não. As imagens têm perspectivas diferentes.

e) Por que, quando movimentamos a cabeça com um olho fechado, a nossa percepção de profundidade melhora? Para uma melhor percepção de profundidade, o cérebro precisa de mais imagens com perspectivas diferentes para poder estimar.

2. Faça uma pesquisa sobre cinemas acessíveis e depois escreva um relato no caderno. Resposta pessoal.

Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. Sugerimos que verifique a possibilidade de a atividade ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão.

PARA FUNDAMENTAR SABERES

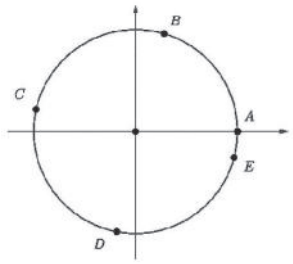
1. **(Uece)** Um relógio de ponteiros atrasa 30 segundos a cada hora. Se hoje às 12 horas ele indica a hora exata, a medida, em graus, do menor ângulo entre o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos depois de três dias é:

a) 176. **b)** 162. **c)** 194. **d)** 156.

Alternativa **b**.

2. **(UFJF-Pism-MG)** Considere o ciclo trigonométrico, os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e os números *b*, *c*, *d*, *e* conforme a figura [a seguir].

Reprodução/UFJF-PISM, 2023.



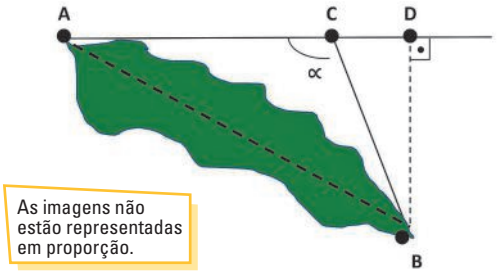
$b = \cos \overset{\frown}{AB}$
$c = \cos \overset{\frown}{AC}$
$d = \cos \overset{\frown}{AD}$
$e = \cos \overset{\frown}{AE}$

A relação correta entre *b*, *c*, *d*, *e*: Alternativa **a**.

a) $c < d < b < e$ **d)** $d < b < c < e$
b) $c < b < e < b$ **e)** $d < e < b < c$
c) $b < e < c < d$

3. **(Unitins-TO)** Uma empresa deseja construir uma estrada para ligar os pontos *A* e *B*, localizados em área de conservação ambiental, conforme mostra a figura [a seguir].

Reprodução/Unitins Paraíso, 2020.



As imagens não estão representadas em proporção.

Sobre essa área, tem-se as seguintes informações:

$\overline{AC} \cong \overline{CB}$ $B\hat{A}C = 30°$

$\overline{AC} = 10$ km $A\hat{C}B = 120°$

$\overline{AC} = \frac{\overline{AD}}{2}$ $\operatorname{sen} 120° = 0{,}866$

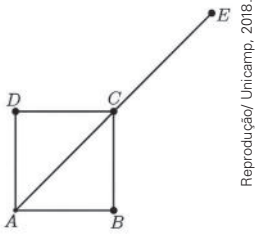
$\operatorname{sen} 30° = 0{,}5$

A partir dessas informações, o trecho *AB* tem comprimento aproximado, em km:

a) 9,46 **c)** 17,32 **e)** 4,40
b) 12,88 **d)** 8,66

4. **(Unicamp-SP)** Considere que o quadrado *ABCD*, representado na figura [a seguir], tem lados de comprimento de 1 cm e que *C* é o ponto médio do segmento *AE*. Consequentemente, a distância entre os pontos *D* e *E* será igual a: Alternativa **c**.

Reprodução/ Unicamp, 2018.



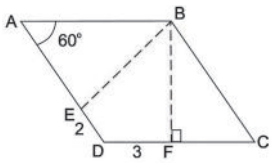
a) $\sqrt{3}$ cm. **c)** $\sqrt{5}$ cm.
b) 2 cm. **d)** $\sqrt{6}$ cm

5. **(Uece)** Desejando-se cercar uma área plana na forma de um triângulo cujos vértices estão nos pontos *X*, *Y* e *Z*, ao iniciar a construção da cerca, verificou-se que a localização do ponto *Y* tinha desaparecido. O mapa indicava que o comprimento do lado *XZ* era 20 m e o comprimento do lado *YZ* era 30 m. Além disso, o ângulo (interno ao triângulo) entre *ZX* e *XY* era 120 graus. Nestas condições, pode-se afirmar corretamente que o comprimento do lado *XY*, em metros, é aproximadamente:
Dado: Se precisar, use o número 49 como valor aproximado de $\sqrt{2400}$. Alternativa **b**.

a) 13,6. **b)** 14,5. **c)** 14,0. **d)** 15,1.

6. **(Unicamp-SP)** No losango [a seguir], qual é a medida do comprimento do segmento *BE*? Alternativa **c**.

Reprodução/Unicamp, 2024.



a) $\sqrt{26}$ **b)** $\sqrt{27}$ **c)** $\sqrt{28}$ **d)** $\sqrt{29}$

7. **(Fuvest-SP)** Quatro tanques cilíndricos são vistos de cima (em planta baixa) conforme a figura. Todos têm 10 m de raio e seus centros se posicionam em vértices dos dois quadrados tracejados adjacentes, ambos com

3. Como o triângulo *ABC* é isósceles, os ângulos $A\hat{B}C$ e $C\hat{B}D$ medem 30° cada um. Pela lei dos senos, temos:

$\frac{AB}{\operatorname{sen} 120°} = \frac{10}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow \frac{AB}{0{,}866} = \frac{10}{0{,}5} \Rightarrow AB = \frac{8{,}66}{0{,}5} \Rightarrow AB = 17{,}32$ Alternativa **c**.

30 m de lado. Uma fita de isolamento, esticada e paralela ao solo, envolve os 4 tanques, dando uma volta completa (linha em laranja na figura).

O comprimento da fita, em metros, é:

Alternativa **b**.

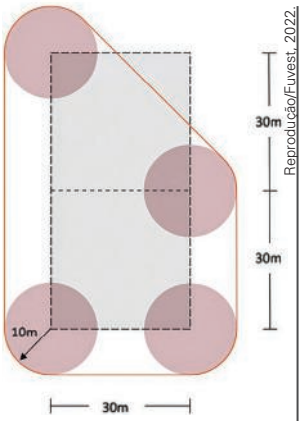
a) $20\pi + 30(3 + \sqrt{2})$.

b) $20\pi + 30(4 + \sqrt{2})$.

c) $25\pi + 15(4 + \sqrt{2})$.

d) $25\pi + 30(4 + \sqrt{2})$.

e) $25\pi + 30(4 + 2\sqrt{2})$.

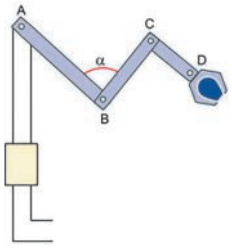


Reprodução/Fuvest, 2022.

8. (Unesp-SP) A figura indica o projeto de um braço mecânico em que $\overline{AB}$ assume função próxima de um bíceps humano, $\overline{BC}$ de um antebraço e $\overline{CD}$ de um punho. Sabe-se que a medida de $\overline{AB}$ supera a de $\overline{CD}$ em 11 cm e que a medida de $\overline{BC}$ é 8 cm. Alternativa **e**.

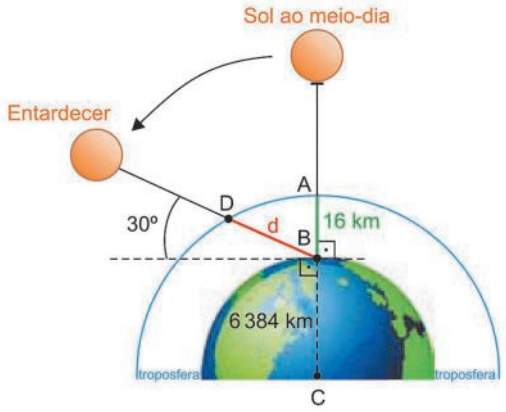
Se, para $\alpha = 60°$, a distância entre os pontos A e C do mecanismo é igual a $8\sqrt{3}$ cm, a extensão máxima horizontal do braço mecânico, em cm, é igual a

a) 31. **b)** 28. **c)** 30. **d)** 27. **e)** 29.



Reprodução/Unesp, 2023.

9. (Unifesp) Quando o Sol está a pino, ao meio-dia, sua luz é filtrada por aproximadamente 16 km da troposfera terrestre. À tarde, quando o Sol está a uma inclinação de 30° em relação ao horizonte no ponto que incidia na Terra ao meio-dia, sua luz é filtrada por d quilômetros dessa camada da atmosfera, como mostra a figura, em que consideramos o raio da Terra como 6384 km. O esquema desse modelo simplificado está representado a seguir:



Reprodução/Unifesp, 2024.

a) Escreva [no caderno] a medida de $\overline{CD}$ em notação científica na unidade de medida metro. Determine as medidas dos ângulos agudo $A\hat{B}D$ e obtuso $C\hat{B}D$.

b) Escreva [no caderno] uma equação polinomial do 2º grau na incógnita d e coeficientes inteiros cuja raiz positiva é a medida de d, em quilômetros. $d^2 + 6384d - 204544 = 0$

Nesta Unidade, estudamos circunferência trigonométrica e Trigonometria em um triângulo qualquer. Respostas pessoais.

1. Resolvo problemas envolvendo a medida angular e a medida de comprimento de arcos, em contextos diversos? Relaciono corretamente as unidades de medida angular grau e radiano?
2. Consigo reconhecer a relevância da Trigonometria por meio dos conceitos estudados e das atividades propostas nesta Unidade?
3. Reconheço as razões seno e cosseno na circunferência trigonométrica? Consigo relacionar essas duas razões para um mesmo arco? De que maneira?
4. Resolvo problemas envolvendo Trigonometria em triângulos não retângulos? Quais são os principais conceitos que uso nesses problemas?
5. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
6. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas, exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

9. a) $CD = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, med$(A\hat{B}D) = 60°$, med$(C\hat{B}D) = 120°$

Caso julgue pertinente, retome com os estudantes como escrever medidas utilizando notação científica, conceito visto nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Unidade 5 ESTATÍSTICA BÁSICA

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras.*

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Luciana Whitaker/Pulsar Imagens

Cacique Syrata Pataxó e os pais dele durante festa Aragwaksã (Festa da Vitória), na Aldeia Reserva da Jaqueira da etnia Pataxó, em Porto Seguro (BA). Foto de 2024. A Festa da Vitória é um ritual anual da aldeia da Jaqueira que celebra, sempre no início do mês de agosto, de modo especial, a conquista territorial e de famílias Pataxó na aldeia.

Povos originários no Brasil

Povos originários brasileiros é como são chamados aqueles que habitavam a região, antes da colonização portuguesa, que hoje é o território brasileiro. Outra maneira de se referir aos povos originários é chamá-los de indígenas – palavra que significa "natural de onde se vive" – e é mais adequada para expressar a diversidade cultural desses povos do que o termo "índio", que tem suas raízes na colonização.

A cultura indígena brasileira, cuja riqueza engloba – mas não se limita a – diversos tipos de manifestações artísticas, múltiplas línguas, religiões e medicinas tradicionais, desempenha um papel fundamental na preservação histórica e ambiental do Brasil, bem como na formação do tecido social do país.

De acordo com dados estatísticos do *Censo Demográfico 2022*, a população indígena chegou a 1693535, o que representa cerca de 0,83% do total de habitantes no país. Em comparação com o censo anterior (*Censo Demográfico 2010*), a população indígena aumentou em aproximadamente 88,82%.

Ainda assim, as comunidades indígenas enfrentam desafios significativos. Dados revelam que o acesso a serviços básicos, como saúde e educação, segue limitado em muitas regiões indígenas. Além disso, a demarcação e a proteção das terras ocupadas por essas comunidades são questões de extrema importância, uma vez que muitas delas enfrentam desafios para assegurar a posse e a preservação de seus territórios.

Fontes dos dados: KETTLE, Wesley. A importância dos povos indígenas para a preservação da natureza. Portal *gov.br*, Brasília, DF, 19 abr. 2023. Disponível em: https://tedit.net/iqlc5v. SILVA, Vanessa Almeida da. A importância de manter vivas as culturas dos povos originários. *Conexão UFRJ*, Rio de Janeiro, 9 ago. 2022. Disponível em: https://tedit.net/m1wu9b. CASTRO, Marcelo Ganzela Martins de. A importância de se estudar a cultura e a literatura indígena. [Entrevista cedida a] Singularidades. *Blog Singularidades*, 23 dez. 2021. Disponível em: https://tedit.net/ofcteo. IBGE. *Censo 2022*: Panorama. Rio de Janeiro: IBGE, 2022. Disponível em: https://tedit.net/q7e9of. Acesso em: 26 jul. 2024.

1. A resposta depende da pesquisa realizada pelo estudante. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade.

2. Exemplo de resposta: A mudança ocorre pelo fato de o termo "índio" ser genérico, que não considera as especificidades que existem entre os povos indígenas, como as linguísticas e culturais, ou de tempo de contato com a sociedade não indígena.

Não escreva no livro

1. Atualmente, a preocupação com a preservação das culturas indígenas tem um lugar de destaque no debate público. Pesquise e registre algumas das principais discussões ou acontecimentos recentes sobre o assunto.

2. A data 19 de abril era chamada de "Dia do Índio". Porém a Lei n. 14.402, de julho de 2022, mudou a nomenclatura para Dia dos Povos Indígenas. Essa data é marcada pela luta dos povos originários por reconhecimento de direitos e respeito às tradições milenares. Qual é o motivo da mudança da nomenclatura?

3. A valorização das culturas indígenas tem relação com uma perspectiva de mundo chamada decolonialidade. Você já conhece esse termo? Ele parece se referir a quê?

3. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: A palavra decolonialidade está relacionada à palavra colônia e refere-se a uma perspectiva de mundo que envolve a valorização das culturas e saberes, tradicionais ou não, de pessoas pertencentes a povos e regiões que sofreram com processos colonizatórios.

capítulo

11 Noções básicas de Estatística

Podcast

Transcrição de áudio

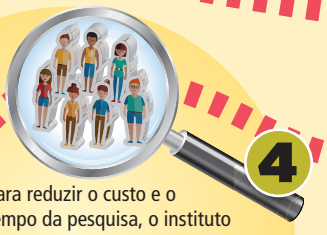
O papel da Estatística

Os levantamentos estatísticos de pesquisas que têm relação direta com o cotidiano das pessoas costumam ser amplamente divulgados nos meios de comunicação, como TV, jornais, revistas, redes sociais, etc. Eles envolvem temas como hábitos de consumo, eleições, comportamento, saúde, desenvolvimento humano, economia, entre outros. Antes de abordar as etapas de um levantamento estatístico, vamos analisar, a partir do infográfico, uma situação em que é possível conferir o papel desempenhado pela Estatística.

1 O dono de uma academia de ginástica com 4 mil alunos matriculados deseja conhecer um pouco mais sobre seus alunos e o grau de satisfação deles com a academia. Esse estudo é fundamental para que se possa decidir estratégias de investimento e propaganda.

2 Para isso, ele encomendou uma pesquisa a um instituto especializado, que planejará a pesquisa, a coleta, a apuração e a organização de dados, fará a análise inferencial desses dados e divulgará os resultados.

3 No início da pesquisa, o instituto estabeleceu o conjunto de pessoas que poderiam oferecer as informações da pesquisa: todos os alunos matriculados na academia. Cada uma dessas pessoas tem uma característica em comum – ser aluno da academia.



4 Para reduzir o custo e o tempo da pesquisa, o instituto selecionou uma pequena parcela (amostra), de 90 dos alunos matriculados na academia. Essas pessoas formam um subconjunto inicial do conjunto de todos os alunos matriculados.

6 Os alunos da amostra responderão aos questionários elaborados pelo instituto por meio, por exemplo, de contato telefônico. Depois de coletadas as informações da amostra, os profissionais do instituto deverão apurar e contabilizar os dados brutos, organizando-os de maneira que o dono da academia possa ter uma visão clara, simples e objetiva dos resultados.

5 Para garantir a confiabilidade dos dados da pesquisa, o instituto enumerou todos os alunos matriculados, atribuindo um número a cada um deles. Em seguida, por meio de um dispositivo aleatório (sem critério de seleção), sorteou 90 números, que correspondem aos alunos que farão parte da amostra e fornecerão as informações investigadas sobre o grau de satisfação com a academia.

7 Por fim, o instituto de pesquisa precisa levantar as características investigadas de todos os alunos com base nos resultados obtidos na amostra, estimando os erros provenientes da amostragem. Com essas informações, o dono da academia pode identificar problemas e fazer melhorias em seu negócio.

Alex Silva/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Dica

Transformando dados em informações

O vídeo (disponível em: https://tedit.net/rnrmf8; acesso em: 23 jul. 2024) mostra a abrangência e a importância dos levantamentos de dados realizados pelo IBGE nos âmbitos social, demográfico, econômico, físico e de recursos naturais, que permitem traçar um retrato abrangente e fiel do país.

Pesquisas estatísticas

Chamamos de **universo estatístico** ou **população** o conjunto de pessoas ou elementos que podem oferecer as informações que serão investigadas. No exemplo da pesquisa sobre o grau de satisfação dos alunos com a academia, a população é composta de 4 mil pessoas, todas matriculadas.

Odua Images/Adobe Stock

Prostock-studio/Adobe Stock

A análise estatística do mercado consumidor é essencial para compreender as necessidades dos clientes e garantir o lançamento bem-sucedido de novos produtos.

Em geral, em uma pesquisa de grandes proporções, é inviável coletar informações de todos os elementos do universo estatístico, devido, principalmente, ao elevado custo operacional e ao longo tempo de execução. Por isso, seleciona-se uma parcela (parte ou subconjunto) da população, à qual damos o nome de **amostra**. Essa escolha é complexa e depende de vários fatores. A amostra da população deve ser representativa e, assim, ter características similares às da população de onde foi retirada.

No exemplo inicial, a amostra era um subconjunto composto de 90 pessoas matriculadas na academia. Podemos enumerar diversas situações em que se faz presente um planejamento estatístico. Acompanhe alguns exemplos a seguir.

- Um jornal de grande circulação na Bahia encomenda uma pesquisa a um instituto especializado a fim de conhecer a intenção de voto dos eleitores do estado da Bahia na próxima eleição para governador. Note que, nesse caso, a população (ou universo estatístico) da qual será escolhida a amostra é o conjunto de todos os eleitores que votam no estado da Bahia.
- A Secretaria de Saúde da prefeitura de Belo Horizonte (MG) deseja conhecer os hábitos sexuais dos jovens de 12 a 17 anos do município, visando criar campanhas de prevenção ao HIV e a outras infecções sexualmente transmissíveis (IST). Para isso, encomenda uma pesquisa a um órgão especializado. Nesse caso, a população é formada por todos os jovens de 12 a 17 anos que residem em Belo Horizonte, e dela será escolhida a amostra.

Etapas da pesquisa estatística

As principais etapas de uma **pesquisa estatística** são:

Banco de imagens/ Arquivo da editora

I. **Planejamento**:
Nesta fase, são estabelecidos os objetivos do estudo, que orientam a identificação das variáveis a serem medidas ou identificadas, o método de pesquisa (questionários ou entrevistas, por exemplo), a população-alvo, o processo de amostragem e o planejamento da coleta de dados.

II. **Coleta de dados**:
A coleta de dados é a fase em que os dados são obtidos.

III. **Apuração ou contagem dos dados**:
Em geral, os dados coletados não estão organizados de maneira estruturada; por isso, é necessário contá-los e categorizá-los. Um recurso comumente utilizado nessa fase é a organização dos dados em tabelas.

IV. **Exposição dos dados**:
A exposição, ou apresentação, dos dados pode ser feita por meio de tabelas e gráficos. Além disso, costuma-se utilizar medidas como a média para resumir as informações.

V. **Interpretação dos dados**:
Na fase final do levantamento estatístico, ocorre a interpretação dos dados. Essa etapa exige muito cuidado e atenção, pois é o momento em que as conclusões da pesquisa são deduzidas a partir da análise dos dados coletados. Esse processo é conhecido como **inferência estatística**, que possibilita generalizar os resultados obtidos de uma amostra para toda a população de interesse.

Considerando as etapas principais dos procedimentos em uma pesquisa estatística, nesta Unidade, vamos destacar principalmente a **análise descritiva e quantitativa** de um conjunto de dados, representando-os em forma de gráficos ou tabelas, e associando a eles algumas medidas.

Amostragem

Vídeo

Uma das principais características do planejamento estatístico de uma pesquisa (etapa **I**) é a escolha da técnica de amostragem que será utilizada. Estudaremos a seguir duas das técnicas mais utilizadas em pesquisas.

No exemplo sobre o grau de satisfação dos alunos matriculados na academia, conferiremos a técnica de amostragem aleatória simples. Nela, cada elemento da população tem igual probabilidade de ser selecionado para a amostra. Essa técnica de amostragem é, em geral, um método simples e amplamente utilizado em pesquisas.

Outra técnica bastante empregada é a **amostragem proporcional estratificada**, que permite dividir a população em estratos ou subgrupos homogêneos, com características semelhantes entre os indivíduos dentro de cada estrato. Assim, é possível selecionar uma amostra aleatória simples de cada um, cujo tamanho é proporcional ao número de elementos presentes no estrato.

Imagine que você queira coletar informações sobre os estágios dos 500 estudantes do curso de Administração de Empresas de uma faculdade, dos quais 360 estudam no período matutino e 140 no período noturno. Neste caso, o universo estatístico está dividido em dois estratos. Se a amostra tiver 50 elementos, serão sorteados 36 do período matutino e 14 do período noturno, mantendo a proporção.

Variável

Vamos voltar à situação apresentada no início do capítulo. Suponha que cada entrevistado da amostra selecionada pelo instituto teve de responder às seguintes questões:

1) Qual é a sua idade?
2) Qual é o seu estado civil?
3) Em qual período do dia você geralmente vai à academia? (M) Manhã (T) Tarde (N) Noite
4) Geralmente, quantas vezes por semana você vai à academia?
5) Com relação às instalações da academia (salas de treinamento, vestiário, área de convivência e lanchonete), você: (A) Aprova (AR) Aprova com ressalvas (R) Reprova
6) Como você avalia os aparelhos de musculação? (E) Excelente (O) Ótimo (B) Bom (R) Ruim (P) Péssimo
7) Como você avalia o suporte, a orientação e o acompanhamento dos instrutores? (E) Excelente (O) Ótimo (B) Bom (R) Ruim (P) Péssimo
8) Qual é o valor atual da sua mensalidade?
9) Atualmente, você considera a possibilidade de trocar de academia? (S) Sim (N) Não

Essas questões devem ser respondidas por todos os elementos da amostra e permitirão levantar os dados necessários para a análise. Cada um dos itens investigados pela pesquisa é denominado **variável**.

Variáveis como "estado civil" (2), "período de treino" (3), "avaliação das instalações" (5), "avaliação dos aparelhos" (6), "avaliação dos instrutores" (7) e "possibilidade de troca de academia" (9) apresentam como resposta um atributo, uma qualidade, característica, categoria ou preferência do entrevistado e são classificadas como variáveis **qualitativas**. Considerando o estado civil, dizemos que solteiro (S), casado (C), separado (Se), divorciado (D) e viúvo (V) são respostas, realizações ou valores assumidos por essa variável.

Já as variáveis "idade" (1), "frequência semanal" (4) e "valor atual da mensalidade" (8) apresentam como resposta um número obtido por contagem ou por mensuração e são classificadas como variáveis **quantitativas**. Do mesmo modo, ao considerar a idade, dizemos que cada um dos valores numéricos respondidos pelos entrevistados é resposta, realização ou valor assumido por essa variável.

Não escreva no livro

Pense nisto

Na pesquisa apresentada no infográfico do início do capítulo, por que se selecionou uma amostra de alunos matriculados na academia e não uma amostra dos alunos que frequentam a academia?

Porque essa amostra é mais representativa de todos os alunos matriculados na academia do que ao selecionar uma amostra dos alunos que frequentam a academia. Nesse caso, a pesquisa coletaria informações apenas daqueles que frequentam a academia no período de realização da pesquisa, desconsiderando a opinião dos alunos matriculados e que, por algum motivo, não estejam frequentando a academia nesse período.

No quadro a seguir há, como exemplo, os dados de 25 dos 90 questionários aplicados nessa pesquisa, já organizados a partir dos dados brutos coletados.

Grau de satisfação com a academia

Idade (em anos)	Estado civil	Período de treino	Frequência semanal	Avaliação das instalações	Avaliação dos aparelhos	Avaliação dos instrutores	Valor atual da mensalidade (em reais)	Possibilidade de troca de academia
27	S	M	4	AR	O	O	240	N
38	C	N	2	AR	E	O	90	N
34	D	N	3	A	R	B	112	S
22	C	T	2	A	E	O	284	N
18	S	M	3	A	O	O	130	N
35	C	M	2	A	E	E	110	S
30	C	N	3	A	E	E	106	N
41	S	N	4	R	O	E	104	N
52	V	T	5	A	B	E	140	N
28	S	M	2	AR	O	O	70	S
29	C	N	3	AR	E	O	160	S
45	S	N	4	R	O	O	120	N
31	C	M	3	AR	E	E	92	S
32	D	T	1	A	R	R	128	N
20	S	M	6	AR	O	E	188	S
22	C	M	2	A	E	E	144	N
38	C	N	3	A	E	O	116	N
34	C	N	3	R	E	O	272	S
21	S	M	1	AR	O	O	96	N
25	D	N	5	AR	R	B	82	S
28	C	N	2	A	E	O	116	N
32	C	N	4	A	E	O	90	S
43	S	T	3	R	B	B	158	S
28	C	N	5	A	O	O	78	N
51	V	M	4	AR	E	O	164	N

Tabela de frequência

A organização dos dados em tabelas possibilita uma leitura rápida e resumida dos resultados obtidos em uma pesquisa.

Para cada variável estudada, contamos quantas vezes cada um de seus valores (realizações) aparece. O número obtido é chamado **frequência absoluta** e pode ser indicado por F_a.

Atividades resolvidas

1. Considerando as realizações (ou, mais informalmente, as respostas) da variável "estado civil" nos 25 questionários analisados e representados no quadro "Grau de satisfação com a academia", obtenha as frequências absolutas (F_a) de cada possível resposta associada a ela.

Solução:

Solteiro: → $F_a = 8$

Divorciado: → $F_a = 3$

Casado: → $F_a = 12$

Separado: → $F_a = 0$

Viúvo: → $F_a = 2$

Note que a soma das frequências absolutas deve ser igual ao número total de dados disponíveis. De fato, $8 + 12 + 2 + 3 + 0 = 25$.

Em geral, quando os resultados de uma pesquisa são divulgados em jornais e revistas, os valores correspondentes às frequências absolutas são acompanhados do número total de dados obtidos, a fim de tornar a análise dos dados mais significativa. Sendo assim, suponha que, em uma pesquisa eleitoral, a informação "2705 pessoas vão votar no candidato **X**" só tem consistência se conhecermos o número total de pessoas entrevistadas.

No exemplo da pesquisa sobre o grau de satisfação com a academia, o instituto poderia, algum tempo depois, repetir a pesquisa sobre a avaliação da academia e definir uma amostra com um número maior de entrevistados. Para comparar os resultados obtidos nas duas amostras, seria preciso levar em consideração que elas têm quantidades diferentes de indivíduos.

Definimos, desse modo, para cada realização ou valor assumido por uma variável, a **frequência relativa** (indicaremos por F_r) como a razão entre a frequência absoluta (F_a) e o número total de dados (n), isto é:

$$F_r = \frac{F_a}{n}$$

Note que, para cada valor assumido pela variável, temos $0 \leqslant F_a \leqslant n$. Desse modo, temos que $\frac{0}{n} \leqslant \frac{F_a}{n} \leqslant \frac{n}{n}$, isto é, $0 \leqslant F_r \leqslant 1$. Por isso, é comum expressar a frequência relativa em porcentagem.

Retomando o exemplo da variável "estado civil" do quadro "Grau de satisfação com a academia", vamos calcular as frequências relativas (F_r) de cada possível resposta associada a ela.

- Solteiro: $\frac{8}{25} = 0{,}32$ ou 32%.
- Casado: $\frac{12}{25} = 0{,}48$ ou 48%.
- Viúvo: $\frac{2}{25} = 0{,}08$ ou 8%.
- Divorciado: $\frac{3}{25} = 0{,}12$ ou 12%.
- Separado: 0.

Podemos construir uma tabela para apresentar as frequências relativas e as frequências absolutas associadas a essa variável.

Estado civil dos alunos da academia

Estado civil	Solteiro	Casado	Viúvo	Divorciado	Separado	**Total**
Frequência absoluta (F_a)	8	12	2	3	0	**25**
Frequência relativa (F_r)	0,32 ou 32%	0,48 ou 48%	0,08 ou 8%	0,12 ou 12%	0	**1,00 ou 100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

Pense nisto

Não escreva no livro

Perceba que a soma das frequências relativas das realizações (ou respostas) por uma variável é igual a 1. Explique por que isso ocorre.

Pense nisto: Suponhamos que uma variável assuma k valores distintos, a_1, a_2, ..., a_k, com frequências absolutas respectivamente iguais a n_1, n_2 ..., n_k, com $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. As frequências relativas correspondentes a a_1, a_2, ..., a_k são respectivamente iguais a $\frac{n_1}{n}$; $\frac{n_2}{n}$; ... $\frac{n_k}{n}$. Adicionando, obtemos $\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + ... + \frac{n_k}{n} = \frac{n_1 + n_2 + ... + n_k}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

A construção das tabelas de frequência para as variáveis "período de treino", "frequência semanal", "avaliação das instalações", "avaliação dos aparelhos", "avaliação dos instrutores" e "possibilidade de troca de academia" segue o mesmo procedimento.

Para as demais variáveis, que são quantitativas, no entanto, é possível perceber que, praticamente, não há repetição de valores. Quando consideramos os valores assumidos pela variável "valor da mensalidade", notamos que eles variam de R$ 70,00 a R$ 284,00.

Construir uma tabela usando os 25 valores, cada um ocorrendo, em geral, uma única vez, seria inviável, pois não resumiria os dados. Nesse caso, podemos agrupar os dados em **classes** ou **intervalos de valores**.

Acompanhe no exemplo seguinte um procedimento comum para a construção das classes (ou dos intervalos). Para isso, vamos definir para uma variável quantitativa a **amplitude da amostra**, ou seja, a diferença entre o maior e o menor valor obtido.

Analise o exemplo a seguir associado à variável "Valor atual da mensalidade (em reais)" do quadro apresentado anteriormente.

- Calculamos a amplitude da amostra:

  R$ 284,00 – R$ 70,00 = R$ 214,00

- Escolhemos o número de intervalos que serão usados; nesse exemplo, vamos usar 4 intervalos para distribuir as mensalidades.
- Dividimos a amplitude da amostra por 4:
  R$ 214,00 ÷ 4 = R$ 53,50, que será arredondado para R$ 54,00; esse valor representará a amplitude de cada intervalo.
- Assim, o primeiro intervalo "começa" em R$ 70,00 (menor valor) e "vai" até R$ 124,00 (pois 70 + 54 = 124). Convencionaremos que esse intervalo é fechado à esquerda e aberto à direita, isto é, trata-se do intervalo real [70, 124[, que será representado pela notação:

  70 ⊢ 124

- O segundo intervalo será 124 ⊢ 178 (pois 124 + 54 = 178); o terceiro será 178 ⊢ 232 (pois 178 + 54 = 232); e o quarto e último intervalo será 232 ⊢ 286 (pois 232 + 54 = 286).

Pense nisto: Se não arredondássemos, os intervalos seriam: 70 ⊢ 123,5; 123,5 ⊢ 177,0; 177,0 ⊢ 230,50 e 230,50 ⊢ 284. Nesse caso, de acordo com a convenção adotada, o maior valor da mensalidade (R$ 284,00) não estaria incluído na última classe, sendo necessária a criação de mais uma classe para poder incluí-la. A mesma conclusão seria obtida se o arredondamento fosse "para baixo", isto é, para 53.

Observação

Em algumas situações, as frequências relativas de alguns valores assumidos pela variável são expressas por números aproximados. Desse modo, a soma delas pode ser diferente de 100% ou 1.

Pense nisto

Ao dividirmos a amplitude da amostra por 4, obtivemos o valor R$ 53,50 e arredondamos para R$ 54,00. Você saberia explicar o porquê do arredondamento "para cima"?

1. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos estratégias didáticas para promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. No caso de estudantes cegos ou com baixa visão, eles podem descrever a resposta explanando os conhecimentos a respeito da habilidade mobilizada na atividade, bem como resolver a atividade em duplas. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

Atividades resolvidas

2. Construa a tabela de frequências completa para a variável "Valor atual da mensalidade (em reais)" do quadro "Grau de satisfação com a academia" apresentado anteriormente.

Solução:

Valor da mensalidade paga pelos alunos da academia

Mensalidade (em reais)	Frequência absoluta (F_a)	Frequência relativa (F_r)
$70 \vdash 124$	14	$\frac{14}{25} = 0,56$ ou 56%
$124 \vdash 178$	7	$\frac{7}{25} = 0,28$ ou 28%
$178 \vdash 232$	1	$\frac{1}{25} = 0,04$ ou 4%
$232 \vdash 286$	3	$\frac{3}{25} = 0,12$ ou 12%
Total	**25**	$\mathbf{\frac{25}{25} = 1,00}$ **ou 100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

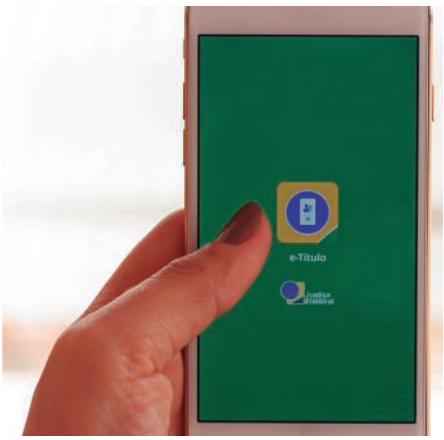
1. Em certa cidade, haverá 2º turno para eleições municipais. A cidade tem 1764 835 eleitores registrados. Uma pesquisa feita com 2 650 eleitores sobre a intenção de voto para prefeito revelou que 1715 pretendem votar no candidato **A**, 691 no candidato **B**, 141 estão indecisos e 103 vão votar em branco ou anular o voto.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Qual é a variável investigada na pesquisa? Classifique-a como qualitativa ou quantitativa. Quais são as realizações ("respostas") dessa variável?

b) Qual é o tamanho da população e o da amostra?

c) Construa, no caderno, uma tabela de frequências absolutas para representar os dados da pesquisa.



Lais/Adobe Stock

No Brasil, para uma pessoa poder votar em um representante público (prefeito, vereador, governador, deputado estadual, deputado federal, senador e presidente) é necessário emitir o um documento chamado título de eleitor. Jovens a partir de 15 anos já podem emitir o documento, mas apenas a partir de 16 anos é possível participar de uma votação. Para pessoas entre 16 e 18 anos, maiores de 70 anos ou analfabetas, o voto é facultativo, e para pessoas entre 18 e 70 anos, o voto é obrigatório.

Em 2017 foi criado pelo governo Federal o aplicativo e-Título, tornando dispensável a versão impressa do título de eleitor.

Para as questões **2** a **4**, use o quadro "Grau de satisfação com a academia" apresentado anteriormente.

2. Construa, no caderno, uma tabela de frequências absolutas e frequências relativas para a variável "frequência semanal". A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

3. Construa no caderno uma tabela de frequências absolutas e frequências relativas para a variável "idade", agrupando os dados em 5 classes de valores. Faça os arredondamentos, a fim de trabalhar com valores inteiros nos intervalos.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

4. A quantidade de avaliações excelentes é 7, e a de ótimos, 14. A frequência relativa dessas duas avaliações será: $\frac{7 + 14}{25} = 0{,}84 = 84\%$. Portanto, os dados da amostra confirmam essa expectativa.

Não escreva no livro

4. O dono da academia esperava que ao menos 80% dos alunos avaliassem os instrutores como ótimos ou excelentes. Os dados da amostra confirmam essa expectativa? Apresente os cálculos necessários que justificam a resposta.

5. Em uma pesquisa feita em um curso pré-vestibular, foram sorteados, aleatoriamente, 50 nomes de uma relação de 2475 estudantes regularmente matriculados. Os estudantes responderam a um questionário no qual constavam, entre outras, as seguintes perguntas:

I. Qual é a área de carreira universitária pretendida?

II. Você cursou o Ensino Médio em escola particular, pública municipal ou pública estadual?

III. Qual é a sua renda mensal familiar?

IV. Quantos irmãos você tem?

V. Qual é a sua disciplina favorita?

VI. Quantos anos você já fez cursinho?

VII. Você trabalha/exerce alguma atividade remunerada?

VIII. Qual é o tempo aproximado gasto para vir ao cursinho?

a) Determine a população (universo estatístico) dessa pesquisa. Todos os estudantes regularmente matriculados nesse curso pré-vestibular.

b) Qual é o tamanho da população e o da amostra?
População: 2475 estudantes. Amostra: 50 estudantes.

c) Entre os itens do questionário, destaque os que correspondem a variáveis qualitativas. **I**, **II**, **V** e **VII**.

d) Em relação às perguntas **I**, **V** e **VI** do questionário, dê exemplos de possíveis respostas, isto é, possíveis valores assumidos pela variável. Exemplo de resposta: Exatas, Matemática, 3 anos.

6. As notas obtidas por 30 estudantes de uma turma em uma prova de inglês estão relacionadas a seguir:

6,5 – 3,2 – 9,3 – 4,2 – 7,4 – 1,2 – 8,6 – 3,5 – 8,0 – 3,8 – 1,7 – 4,2 – 2,1 – 4,8 – 5,4 – 3,3 – 3,2 – 6,4 – 9,1 – 5,3 – 1,9 – 4,5 – 5,5 – 6,1 – 7,0 – 2,1 – 6,2 – 5,6 – 4,8 – 4,7

a) Agrupe as notas em 6 intervalos de classe, cada uma com amplitude 1,5, a partir da nota 1,0. Construa, no caderno, uma tabela de frequências absolutas e frequências relativas.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Usando os dados agrupados, determine a porcentagem de estudantes com nota maior ou igual a 7. $\frac{6}{30} = 0{,}2$; logo, 20% dos estudantes.

7. A tabela a seguir refere-se aos resultados de uma pesquisa realizada com 400 adolescentes a respeito de seu lazer preferido.

Lazer preferido entre adolescentes

Lazer	F_a	F_r	%
Instrumento musical	a	0,06	b
Internet	92	c	d
Esporte	e	f	9%
Sair à noite	180	g	h
Outros	i	j	k
Total	**400**	**1,00**	**100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

Quais são os valores de a, b, c, d, e, f, g, h, i, j e k? $a = 24$; $b = 6\%$; $c = 0{,}23$; $d = 23\%$; $e = 36$; $f = 0{,}09$; $g = 0{,}45$; $h = 45\%$; $i = 68$; $j = 0{,}17$; $k = 17\%$.

8. Na tabela a seguir estão representados os resultados de um levantamento realizado com 180 pessoas, na praça de alimentação de um *shopping center*, sobre seus gastos em uma refeição.

Gastos com alimentação

Gastos (em reais)	Número de pessoas
25 ⊢ 35	63
35 ⊢ 45	$x + 54$
45 ⊢ 55	$2x$
55 ⊢ 65	$\frac{x}{2}$

Dados elaborados para fins didáticos.

a) $63 + x + 54 + 2x + \frac{x}{2} = 180 \Rightarrow \frac{7x}{2} = 63 \Rightarrow x = 18$
a) Qual é o valor de x?

b) Que porcentagem do total de entrevistados gasta de R$ 55,00 a R$ 65,00 por refeição?

c) Que porcentagem do total de entrevistados gasta menos de R$ 45,00 por refeição?

8. b) $\frac{x}{2} = \frac{18}{2} = 9$; $\frac{9}{180} = 0{,}05 = 5\%$.
c) $63 + x + 54 = 63 + 18 + 54 = 135$; $\frac{135}{180} = 0{,}75 = 75\%$.

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Os censos demográficos

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

A Estatística também é utilizada para levantar informações sobre uma população inteira, como ocorre nos censos demográficos.

Até 1872, não havia levantamentos específicos para contar o número de habitantes no Brasil. As informações sobre a população eram obtidas por meio de relatórios com outras finalidades, como temas religiosos ou levantamentos militares realizados pela Coroa portuguesa para a defesa do território.

Rafael Henrique/Adobe Stock

Equipamento de trabalho usado pelos recenseadores em 2022.

O primeiro censo demográfico nacional foi realizado em 1872 e intitulado Recenseamento da População do Império do Brasil. Outros três ocorreram em 1890, 1900 e 1920.

Em 1936, foi criado o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), que implantou a periodicidade decenal e ampliou a abrangência temática dos questionários.

Os censos coletam informações indispensáveis para a definição de políticas públicas e para a tomada de decisões de investimentos, tanto no âmbito público como no privado. Entre os principais usos dos resultados censitários, podemos citar:

- acompanhar as taxas de crescimento, a distribuição geográfica e a evolução de características da população;
- identificar áreas que requerem investimentos prioritários de infraestrutura;
- identificar áreas carentes em projetos sociais;
- fornecer informações precisas à União para o repasse de verbas para estados e municípios;
- analisar o perfil da mão de obra nos municípios e transmitir essas informações, favorecendo decisões acertadas de investimentos do setor privado.

No *site* do IBGE, podemos encontrar mais detalhes sobre a história dos censos no Brasil e o último deles, o *Censo Demográfico 2022*, como metodologia, temas e subtemas, variáveis investigadas, etc.

Fontes dos dados: IBGE. *Censos demográficos*. Rio de Janeiro: IBGE. Disponível em: https://tedit.net/x6dcio. IBGE. *A história do Censo no Brasil*. Rio de Janeiro: IBGE, 2000. Disponível em: https://tedit.net/vzfn9o. Acesso em: 26 jul. 2024.

1. Antes da realização do último censo demográfico, ocorreu uma pesquisa chamada censo experimental. Faça uma pesquisa sobre o *Censo Experimental 2019* e responda às questões a seguir no caderno.

a) Em quais locais ocorreu esse censo experimental? A resposta encontra-se nas *Orientações específicas* deste Manual.

b) Para que serve o censo experimental? O censo experimental foi um ensaio geral para avaliar e aperfeiçoar todos os procedimentos a serem utilizados no censo demográfico.

2. Um tema muito importante para que o governo possa planejar políticas públicas é o da educação. Encontre no *site* do IBGE as informações sobre educação do *Censo Demográfico 2022* e, consultando os dados encontrados, responda aos itens a seguir no caderno.

a) Qual é a taxa de alfabetização do estado em que você mora? Resposta pessoal.

b) Qual á a taxa de alfabetização da faixa da sua idade? Resposta pessoal.

c) Entre a população indígena, qual é a taxa de alfabetização? 84,95%

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **4**, **5** e **10** da BNCC e as habilidades **EM13CNT302** e **EM13CNT310**.

Também favorece o desenvolvimento dos TCTs *Saúde* e *Educação para o Consumo*.

Não escreva no livro

PROJETO

Podcast

Transcrição de áudio

Reprodução/ ONU

Campanha para o uso consciente de água

Leia o trecho a seguir e acesse a reportagem completa para conhecer algumas dicas que podem ajudar na economia de água.

Dia Mundial da Água: DNOCS alerta para o uso consciente dos recursos hídricos

[...]

No dia 22 de março, é comemorado o Dia Mundial da Água, instituído pela Organização das Nações Unidas (ONU), em 1992. A data é celebrada no mundo inteiro como um alerta para a importância desse bem tão precioso para a humanidade e proteção dos nossos recursos Hídricos.

O Departamento Nacional de Obras Contra as Secas (DNOCS) foi criado, há mais de um século, com a missão de promover a adequada convivência com a seca, por meio da implantação de infraestrutura, do aproveitamento e da gestão integrada de recursos hídricos.

[...]

BRASIL. Ministério da Integração e Desenvolvimento. Dia Mundial da Água: DNOCS alerta para o uso consciente dos recursos hídricos. Portal *gov.br*, Brasília, DF, 22 mar. 2024. Disponível em: https://tedit.net/bxv98x. Acesso em: 23 jul. 2024.

Ratsanai/Getty Images

Dica

Semana da água: uso consciente é principal forma de prevenção

O *podcast Entrevista É Nacional* convida o engenheiro florestal e chefe de assessoria Vladimir Puntel Ferreira para uma esclarecedora conversa sobre o uso da água. O episódio está disponível na íntegra em https://tedit.net/zi8442 (acesso em: 2 jun. 2024).

Pensando em um projeto

Uma das mídias informativas em ascensão no mundo é o *podcast*. Por contar apenas com áudio, é uma das maneiras mais utilizadas para se entreter ou se informar enquanto faz alguma outra atividade: trabalha, dirige ou faz trajetos em transporte público.

A proposta envolve a organização de quatro *podcasts* temáticos, que consiste em uma apresentação oral gravada envolvendo discussões sobre:

- **Tema 1**: Legislação federal e contexto atual sobre o consumo de água.
- **Tema 2**: O consumo de água na comunidade escolar.
- **Tema 3**: Propostas de ações sobre uso consciente da água.
- **Tema 4**: Campanha de ações sobre o uso consciente da água na escola.

Para começar

- Organizem-se em 4 grupos. Cada grupo deverá escolher um dos temas propostos, de modo que a turma trabalhe com todos eles.

Plano de ação

Etapa 1

Em grupo, pesquisem sobre consumo de água e ações que envolvam a economia desse recurso. Organizem-se a partir da temática escolhida. Procurem materiais ou artigos sobre o tema que colaboram para a organização de pontos importantes. Os tópicos principais a serem pesquisados são:

- Legitimação do direito do ser humano à água pela Organização Mundial das Nações Unidas por meio da Resolução A/RES/64/292 e das legislações brasileiras sobre água e saneamento.
- Pesquisa estatística sobre os hábitos de consumo de água na comunidade em que vocês vivem. Essa pesquisa envolve a apresentação de relatório estatístico sobre o padrão de consumo de água nas famílias dos estudantes. A turma deve se organizar como um todo para a coleta de dados.
- Ações que envolvam a conscientização sobre o uso da água.
- Ações que a comunidade pode realizar para reduzir o consumo de água.

Todos os grupos devem fazer a mesma pesquisa, e só depois utilizarão os resultados na criação dos *podcasts*. É importante que os grupos responsáveis por todos os temas conheçam toda a pesquisa, para que possam referenciar os assuntos em suas próprias gravações.

A seguir, encontram-se algumas sugestões de exploração de cada tema.

- **Tema 1**: Explorar os documentos pesquisados, avaliando os contextos histórico e econômico do desenvolvimento e da aprovação deles.
- **Tema 2**: Apresentar uma análise crítica dos resultados encontrados na análise e no tratamento dos dados da pesquisa realizada.
- **Tema 3**: Debater como as práticas de consumo de água podem impactar a disponibilidade e a qualidade da água. Apresentar exemplos das ações tomadas em outros lugares para melhorar a sustentabilidade do consumo de água.
- **Tema 4**: Apresentar ações que possam ser adotadas no dia a dia da comunidade escolar.

Etapa 2

Na sala de aula, os grupos devem apresentar os resultados das pesquisas por meio de relatórios contendo gráficos. Com a ajuda do professor, a turma escolherá os pontos mais importantes que serão explorados na próxima etapa.

Etapa 3

Cada grupo deve organizar um roteiro para facilitar a apresentação dos resultados. Para auxiliar na organização, registrem no roteiro o resumo dos resultados da pesquisa, das discussões e das decisões dos membros do grupo para organização da gravação.

No roteiro deve constar o objeto-tema do *podcast*, a apresentação do grupo e dos locutores, o objetivo de cada grupo, a apresentação da pesquisa (em formato de bate-papo, entrevista, informativo ou noticiário, por exemplo), a data em que a pesquisa foi realizada, a vinheta de início e a vinheta de conclusão.

Vocês podem pesquisar um roteiro pronto e preenchê-lo ou criar um roteiro do zero.

Etapa 4

Consultem a seção *Produções em foco* no início do livro e avaliem, junto ao professor, quanto tempo será necessário para a produção dos *podcasts*.

Em seguida, definam datas, horários e espaço para a apresentação deles. Posteriormente, eles deverão ser compartilhados com toda a comunidade escolar.

Produzam materiais de divulgação dos *podcasts* temáticos, como *cards* de cada um para postagens nas redes sociais. Cada *card* deve conter a data, o horário e o meio de divulgação dos áudios (incluindo o endereço, se assim for decidido).

Etapa 5

Façam a divulgação dos *podcasts* para outras turmas da escola, familiares, amigos e a comunidade local.

Produto final: Apresentação dos *podcasts* temáticos para a comunidade escolar e/ou da região.

Os grupos devem fazer a apresentação dos *podcasts* nas datas e nos horários de cada *podcast* temático.

capítulo

12 Representações gráficas

Introdução

A representação gráfica constitui um importante recurso para reunião, análise e interpretação de um conjunto de dados. Os vários tipos de gráfico estão presentes em diversos veículos de comunicação (jornais, revistas e internet são alguns exemplos) e são associados aos mais variados assuntos do dia a dia.

A importância dos gráficos está ligada, sobretudo, à possibilidade de facilitar e tornar mais rápida a absorção das informações por parte do leitor. Além disso, o recurso gráfico permite aos veículos de comunicação a elaboração de diversas ilustrações, que tornam a leitura mais atraente.

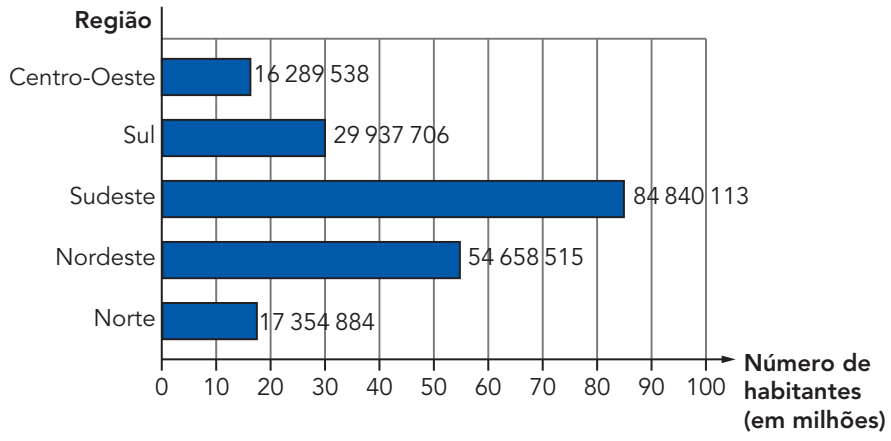
Neste capítulo, estudaremos sete tipos de representações gráficas: gráfico de barras, histograma, diagrama de ramos e folhas, gráfico de setores, gráfico de linhas, pictograma e gráfico de dispersão.

Gráfico de barras

O gráfico a seguir mostra um dos resultados do *Censo Demográfico 2022* da população brasileira e sua distribuição pelas grandes regiões do Brasil.

Cada região está representada por uma barra horizontal, cuja medida do comprimento é proporcional ao número de habitantes da região (frequência absoluta ou relativa). Essa representação gráfica recebe o nome de **gráfico de barras horizontais**.

Distribuição da população brasileira por região – 2022

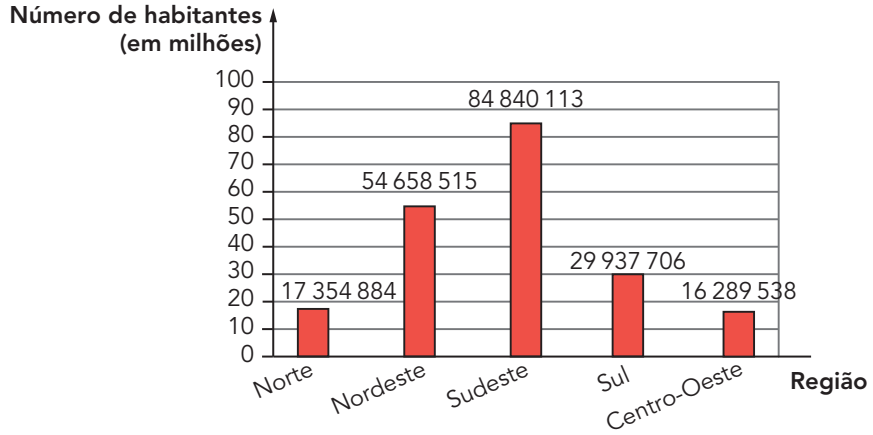


Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Censo Demográfico 2022*. Disponível em: https://tedit.net/6bzgqb. Acesso em: 5 ago. 2024.

Uma alternativa para essa representação é o **gráfico de barras verticais**.

Distribuição da população brasileira por região – 2022



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Censo Demográfico 2022*. Disponível em: https://tedit.net/6bzgqb. Acesso em: 5 ago. 2024.

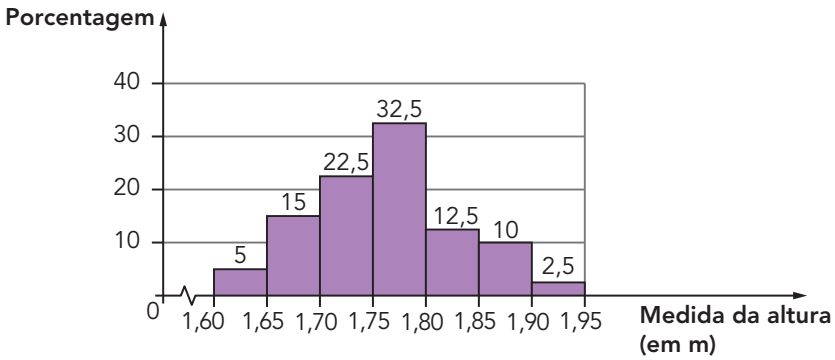
As duas representações anteriores apresentam exatamente os mesmos dados.

Histograma

O **histograma** é uma representação gráfica muito semelhante ao gráfico de barras verticais. Em geral, ele é usado para representar valores assumidos por uma variável quantitativa que podem ser expressos por números reais – não necessariamente inteiros – quando estes estão agrupados em classes (intervalos de valores). Esse gráfico é formado por retângulos contíguos, isto é, que estão em contato entre si (os retângulos se "encostam"). A base de cada retângulo corresponde a um segmento de reta cujas extremidades são os limites de cada classe de intervalo, e a medida da altura de cada retângulo é proporcional à frequência (absoluta ou relativa) da classe correspondente.

Imagine que estamos analisando as medidas da altura de 80 estudantes do Ensino Médio de uma escola e queremos construir um histograma. Primeiro, coletamos os dados brutos das medidas da altura de cada um deles, que podem variar, refletindo a diversidade física dos estudantes, desde os mais altos até os mais baixos. Portanto, ao construir esse histograma, podemos compreender melhor como essas características físicas estão distribuídas, o que facilita a análise e a interpretação dos dados. O resultado é o histograma a seguir.

Medida da altura dos alunos do Ensino Médio



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Comente com os estudantes que a indicação (⌇), no eixo horizontal, entre 0 e 1,60, corresponde a uma supressão de valores. Geralmente, ela é utilizada para facilitar a elaboração do gráfico, evitando uma representação muito alongada no eixo correspondente.

Não escreva no livro

Pense nisto

Quais informações podemos extrair desse histograma?

Pense nisto: Exemplos de resposta: A classe que reúne a maior porcentagem de estudantes analisada corresponde ao intervalo entre 1,75 m e 1,80 m, incluindo 1,75 m; 75% dos estudantes do Ensino Médio dessa escola têm medida da altura menor do que 1,80 m (note que adicionamos: 5% + 15% + 22,5% + 32,5%).

Caso julgue pertinente, retome com os estudantes o que é IDH, conceito que pode ser explorado em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Diagrama de ramos e folhas

O **diagrama de ramos e folhas** é uma representação da distribuição dos dados de uma variável quantitativa. Ele apresenta os dados de forma direta e explícita, o que facilita a análise da distribuição dos valores considerados.

No exemplo a seguir, temos parte de uma tabela retirada do Relatório de Desenvolvimento Humano 2023-2024, divulgado pelo Programa da Nações Unidas para o Desenvolvimento (Pnud). Nessa tabela são apresentados os 21 países com os maiores valores de Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) do mundo.

Ranking de IDH – 2022

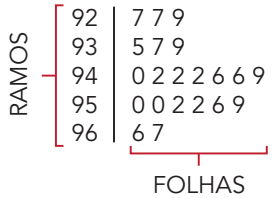
Classificação	País	IDH
1	Suíça	0,967
2	Noruega	0,966
3	Islândia	0,959
4	Hong Kong, China (ERA)	0,956
5	Dinamarca	0,952
5	Suécia	0,952
7	Alemanha	0,950
7	Irlanda	0,950
9	Cingapura	0,949
10	Austrália	0,946
10	Países Baixos	0,946
12	Bélgica	0,942
12	Finlândia	0,942
12	Lichtenstein	0,942
15	Reino Unido	0,940
16	Nova Zelândia	0,939
17	Emirados Árabes Unidos	0,937
18	Canadá	0,935
19	República da Coreia	0,929
20	Luxemburgo	0,927
20	Estados Unidos da América	0,927

Comente com os estudantes que no Relatório de Desenvolvimento Humano os países que possuem mesmo IDH estão na mesma classificação. Por isso, Dinamarca e Suécia estão classificados em 5º lugar e não há 6º lugar, por exemplo.

Fonte dos dados: PNUD. *Human Development Report 2023-2024*. Disponível em: https://tedit.net/br0jv7. Acesso em: 5 ago. 2024.

O diagrama de ramos e folhas desses dados é:

Ranking de IDH – 2022



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Legenda: *ab*|*c* significa 0,abc.
Exemplo: 92|7 significa 0,927.

Fonte dos dados: PNUD. *Human Development Report 2023-2024*. Disponível em: https://tedit.net/br0jv7. Acesso em: 5 ago. 2024.

No diagrama anterior, os números que estão à esquerda da linha vertical compõem os ramos e expressam os centésimos do IDH, e os números que estão à direita da linha vertical compõem as folhas e expressam os milésimos de cada IDH. Assim, na linha em que o ramo é 92, temos 3 valores de IDH: 0,927, 0,927 e 0,929. Além disso, é possível perceber que, entre os 21 dados, a maior concentração de IDH está no intervalo de 0,940 a 0,959.

No exemplo a seguir, o diagrama de ramos e folhas representa a distribuição das idades (em anos inteiros), em certo dia de 2024, das 15 senadoras e dos 66 senadores do Brasil. Repare que, nesse caso, temos dois conjuntos de dados representados em um único diagrama para facilitar a comparação entre eles.

Idade (em anos inteiros), em certo dia de 2024, das 15 senadoras e dos 66 senadores do Brasil

SENADORAS						SENADORES																										
			7	0	4	1	2	3	3	5	5	6	7	7	7	8	8	9														
7	3	2	1	0	5	1	1	2	2	2	3	4	5	6	6	6	8	8	8													
	5	4	0	0	6	0	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8	9	9		
		3	0	0	7	1	2	3	3	3	4	4	4	4	6	7	7	9														
				1	8	0																										

Legenda: *a*|*b*|*c* significa senadora com *ba* anos e senador com *bc* anos.
Exemplos: 0|4|1 significa senadora com 40 anos e senador com 41 anos.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: SENADO FEDERAL. Senadores em exercício. Disponível em: https://tedit.net/th7jr4. Acesso em: 23 jul. 2024.

Nesse diagrama, os números que estão entre as linhas verticais compõem os **ramos** e expressam as dezenas das idades, e os números que estão à direita ou à esquerda das linhas verticais (ramos) compõem as **folhas** e expressam as unidades das idades.

Assim, na linha cujo ramo é igual a 4, temos 2 dados à esquerda (40 e 47), que indicam as idades de duas senadoras, e 13 dados à direita (41, 42, 43, 43, 45, 45, 46, 47, 47, 47, 48, 48 e 49), que indicam as idades de 13 senadores.

A análise do diagrama nos permite concluir que a maior concentração das idades das senadoras está no intervalo de 50 a 59 anos, e a dos senadores, no de 60 a 69 anos.

Alejandro Zambrana/Shutterstock

Inaugurado em 1960, o Palácio do Congresso Nacional, sede principal do Senado em Brasília (DF), foi projetado pelo arquiteto Oscar Niemeyer. Foto de 2022.

Não escreva no livro

Pense nisto

No diagrama que apresenta os 21 países com maiores valores de IDH em 2022, se os ramos expressassem os décimos do IDH, o que ocorreria com a sua quantidade?

O diagrama teria apenas uma linha. Os dados apresentados em uma única linha não seriam úteis para nenhuma análise.

1. a) O principal objetivo da representação de dados em um gráfico de barras é facilitar a análise comparativa. É fácil identificar visualmente qual barra representa o maior dado.

b) Exemplo de resposta: Sim, pois as alturas das barras são nitidamente proporcionais.

c) Exemplo de resposta: Não, pois, analisando apenas as alturas das barras, parece que a população do TO é consideravelmente menor do que a do ES.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

1. Analise a tabela e os 2 gráficos que representam os dados a respeito da população de algumas unidades da federação, de acordo com o Censo 2022.

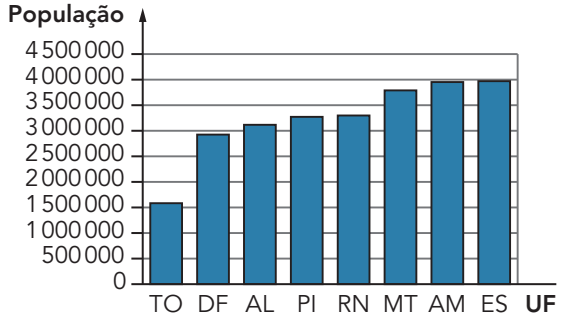
População de algumas unidades federativas – 2022

UF	População
AL	3125254
AM	3952262
DF	2923369
ES	3975100
MT	3784239
TO	1511460
PI	3270174
RN	3303953

Fonte dos dados: IBGE. *Censo Demográfico 2022*. Disponível em: https://tedit.net/6bzgqb. Acesso em: 5 ago. 2024.

Gráfico **1**

População de algumas unidades federativas – 2022

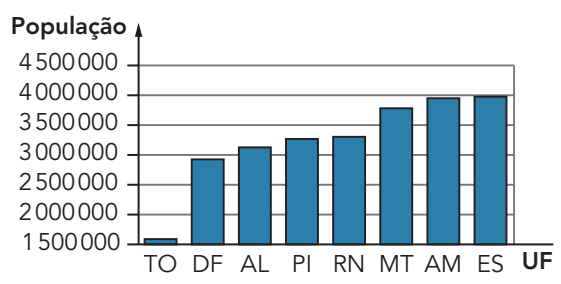


Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Censo Demográfico 2022*. Disponível em: https://tedit.net/6bzgqb. Acesso em: 5 ago. 2024.

Gráfico **2**

População de algumas unidades federativas – 2022



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Censo Demográfico 2022*. Disponível em: https://tedit.net/6bzgqb. Acesso em: 5 ago. 2024.

a) Qual é o principal objetivo ao utilizarmos a representação de dados de uma tabela em um gráfico, nesse caso, de barras?

b) Analisando apenas as barras do gráfico **1**, é possível concluir que a população do ES corresponde a um pouco mais do que o dobro da população do TO? Explique.

c) Analisando apenas as barras do gráfico **2**, é possível concluir que a população do ES corresponde a um pouco mais do que o dobro da população do TO? Explique.

d) Considerando os dois gráficos, quais diferenças fazem com que tenhamos uma impressão enganosa ao comparar as populações?

2. Na tabela a seguir, temos a quantidade de medalhas de ouro conquistadas pelo Brasil nos Jogos Olímpicos, desde a edição de 1948, em Londres, na Inglaterra, até a de 2024, em Paris, na França.

Medalhas de ouro conquistadas pelo Brasil nos Jogos Olímpicos – 2024

Ano	Quantidade de medalhas de ouro	Ano	Quantidade de medalhas de ouro
1948	0	1988	1
1952	1	1992	2
1956	1	1996	3
1960	0	2000	0
1964	0	2004	5
1968	0	2008	3
1972	0	2012	3
1976	0	2016	7
1980	2	2020	7
1984	1	2024	3

Fonte dos dados: COMITÊ OLÍMPICO DO BRASIL. Time Brasil. Disponível em: https://tedit.net/8efisi. Acesso em: 9 ago. 2024.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Considerando a variável "quantidade de medalhas de ouro", construa uma tabela de frequências.

b) Represente esse conjunto de dados em um gráfico de barras verticais.

1. d) Exemplo de resposta: A escala do eixo vertical é diferente nos dois gráficos. No gráfico **2**, o eixo vertical inicia-se em 1 500 000 e, no gráfico **1**, inicia-se em 0. Esse "corte" efetuado no eixo do gráfico **2** faz com que os comprimentos das barras nesse gráfico não sejam proporcionais às quantidades que representam.

Caso julgue pertinente, comente com os estudantes que o IDHM por unidade federativa é calculado a partir da média geométrica de valores do IDHM de cada município.

3. Considere os dados da tabela a seguir.

IDHM, em 2021, de todas as unidades federativas do Brasil

UF	IDHM 2021	UF	IDHM 2021
AC	0,71	PB	0,698
AL	0,684	PR	0,769
AP	0,688	PE	0,719
AM	0,7	PI	0,69
BA	0,691	RJ	0,762
CE	0,734	RN	0,728
DF	0,814	RS	0,771
ES	0,771	RO	0,7
GO	0,737	RR	0,699
MA	0,676	SC	0,792
MT	0,736	SP	0,806
MS	0,742	SE	0,702
MG	0,774	TO	0,731
PA	0,690		

Fonte dos dados: PNUD. Disponível em: https://tedit.net/g3kg3k. Acesso em: 9 jun. 2024.

Faça o que se pede.

a) Agrupe os valores de IDHM em intervalos de amplitude 0,1; a começar por 0,6, faça uma tabela de frequências e construa um histograma.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Considerando a construção feita no item anterior, determine a porcentagem de unidades federativas que têm IDHM igual ou maior do que 0,7. $\frac{19}{27} \simeq 0,7037$, ou seja, aproximadamente 70,37%.

4. Desde o surgimento da covid-19, em dezembro de 2019, já foram registrados mais de 700 mil óbitos por causa da doença. Porém, com o desenvolvimento de vacinas e campanhas de vacinação em massa, a taxa de mortalidade foi sendo reduzida drasticamente.

Os dados a seguir referem-se à taxa de mortalidade aproximada (número de óbitos a cada 1 milhão de habitantes) pela covid-19 nas unidades federativas do Brasil, considerando os casos oficiais registrados.

Mortalidade aproximada pela covid-19 por UF do Brasil – 1º/1/2024 a 25/5/2024

00	0			CE
01	7			RR
02	4			MA
03	1			AM
04	0	7		PE – AP
08	1			AL
09	6	7		SE – BA
10	1			PA
13	4	9		PI – ES
14	7	7		AC – PB
15	1			PR
16	3			SC
18	2	5		DF – GO
20	2	3	8	RN – RO – MG
21	0	3		TO – RJ
23	0			MT
25	5			RS
26	5			SP
27	0			MS

Legenda: *ab*|*c* significa *a,bc* óbitos a cada 1 milhão de habitantes. Exemplos: 18|2 significa 1,82 óbito a cada 1 milhão de habitantes.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde – Covid-19 no Brasil. *gov.br*. Disponível em: https://tedit.net/phi3m7. Acesso em: 6 ago. 2024.

a) Quais foram as taxas de mortalidade a cada 1 milhão de habitantes das seguintes unidades federativas: TO, RR, RJ e AM?

b) Qual é o percentual, em relação ao total apresentado no diagrama, de unidades federativas que apresentaram taxas de mortalidade menores do que 1 morte a cada 1 milhão de habitantes?

c) Quantas unidades federativas da região Sul apresentaram taxas de mortalidade a cada 1 milhão de habitantes superiores a 2?

Apenas 1 (o RS).

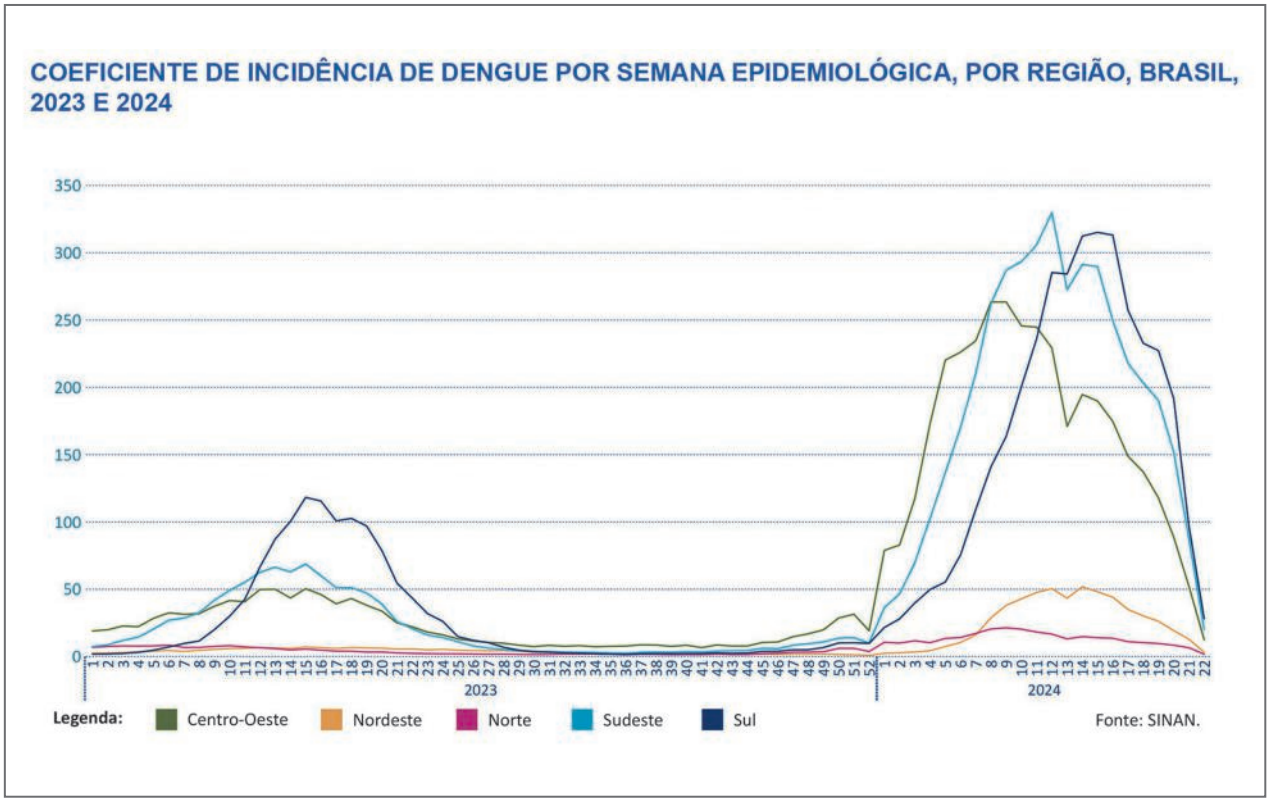
4. a) TO: 2,10 mortes a cada 1 milhão de habitantes. RR: 0,17 morte a cada 1 milhão de habitantes. RJ: 2,13 mortes a cada 1 milhão de habitantes. AM: 0,31 morte a cada 1 milhão de habitantes.

4. b) A quantidade de UF em que a taxa de mortalidade é inferior a 1 morte a cada 1 milhão de habitantes é 9 em um total de 27. Logo, o percentual será: $\frac{9}{27} \simeq 33,3\%$.

Gráfico de linhas

De 2023 para 2024 houve um aumento nos casos de dengue no Brasil. Especialista apontam que em 2024 houve circulação de novas versões do vírus no país (há 4 tipos de vírus causadores de dengue), além disso, circularam mais os tipos 3 e 4, que não eram detectados há tempos no país. O excesso de calor e as chuvas desde o fim de 2023 também contribuíram para esse aumento. Combater a dengue é um grande desafio para a sociedade!

O gráfico representa o número de prováveis confirmações de casos de dengue no Brasil.



Reprodução/Ministério da Saúde/Governo Federal

BRASIL. Ministério da Saúde. Indicadores de dengue. Disponível em: https://tedit.net/qj2u5p. Acesso em: 24 jul. 2024.

O gráfico anterior mostra o coeficiente de incidência da dengue em 2023 e 2024 estratificado por região. Notavelmente, em 2024, a região Sudeste apresentou o maior coeficiente de incidência, seguida pela região Sul. Além disso, é possível identificar o padrão da doença em 2023, com um pico entre as semanas 14 e 19 superado já nas primeiras semanas de 2024. Nesse caso, o gráfico de linhas é ideal para acompanhar a incidência da dengue ao longo de uma série histórica. Ele mostra claramente a tendência e as variações semanais da doença em cada ano, permitindo uma análise direta das mudanças e dos padrões ao longo do tempo.

Não escreva no livro

Pense nisto

Que outras informações, além das apresentadas no texto, se podem notar na leitura do gráfico?

Exemplo de resposta: As regiões Norte e Nordeste apresentam menores coeficientes de incidência da dengue tanto em 2023 quanto em 2024.

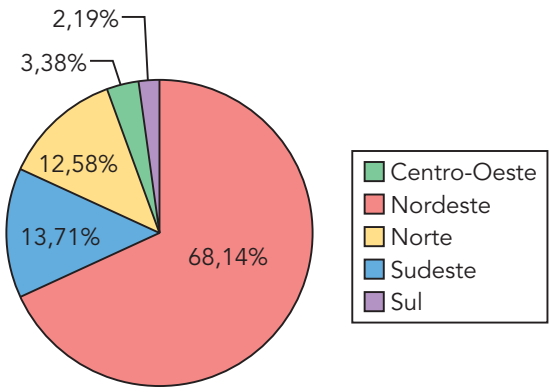
Gráfico de setores

O gráfico a seguir mostra a distribuição aproximada das pessoas quilombolas, divididas nas grandes regiões do Brasil, segundo dados do *Censo Demográfico 2022*.

Verifique se os estudantes conhecem o significado de pessoas quilombolas e, caso desconheçam, proponha que façam uma pesquisa a respeito das comunidades quilombolas brasileiras. Esse conceito pode ser explorado em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Essa representação gráfica é conhecida como gráfico de setores.

Distribuição das pessoas quilombolas nas regiões brasileiras – 2022



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: em IBGE. *Censo Demográfico 2022*. Disponível em: https://tedit.net/6bzgqb. Acesso em: 5 ago. 2024.

Não escreva no livro

Pense nisto

Quais são as medidas dos ângulos dos setores representados nesse gráfico?

Observação

A população quilombola foi levantada pela primeira vez no Censo de 2022.

Pense nisto: S: 2,19% de 360° = 7° 53' 2,4"
SE: 13,71% de 360° = 49° 21' 21,6"
N: 12,58% de 360° = 45° 17' 16,8"
CO: 3,38% de 360° = 12° 10' 4,8"
NE: 68,14% de 360° = 245° 18' 14,4"

Pictograma

Pictograma é uma representação gráfica em que são usadas figuras ou imagens relacionadas ao assunto tratado. As representações pictóricas possuem forte apelo visual, chamando prontamente a atenção e despertando a curiosidade do leitor, e, por isso, são amplamente utilizadas nos mais variados veículos de comunicação.

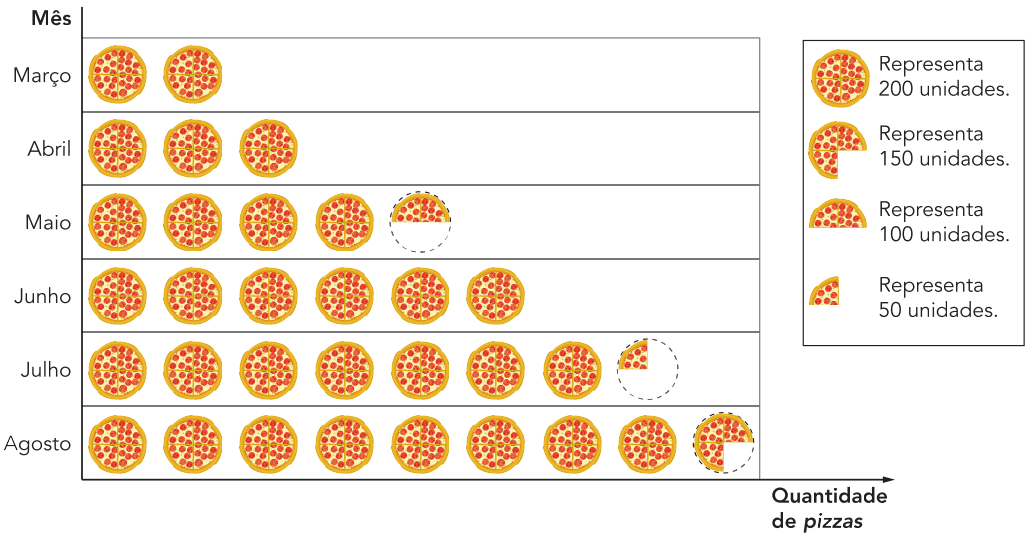
Analise o pictograma a seguir.

Pense nisto

Quantas *pizzas* foram vendidas em maio?

Pense nisto: Cada representação de disco de *pizza* corresponde a 200 *pizzas*. No mês de maio, estão representados 4 discos e meio, o que equivale a 4,5 · 200 = 900. Portanto, em maio foram vendidas 900 *pizzas*.

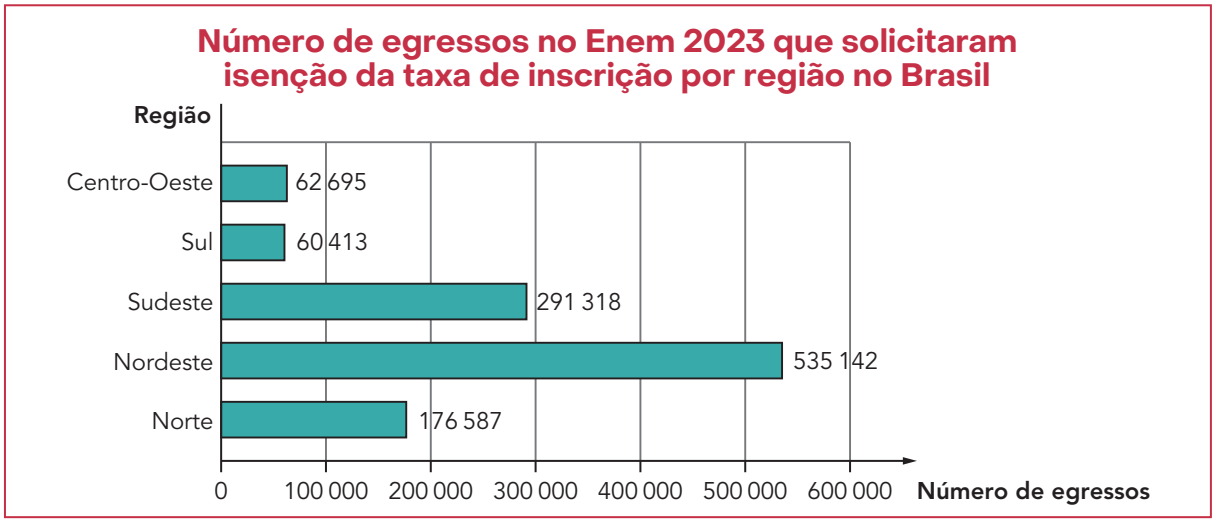
***Pizzas* vendidas no último semestre em uma pizzaria**



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

5. O gráfico de barras horizontais a seguir representa a distribuição do número de egressos no Enem 2023 que solicitaram isenção da taxa de inscrição por região no Brasil.



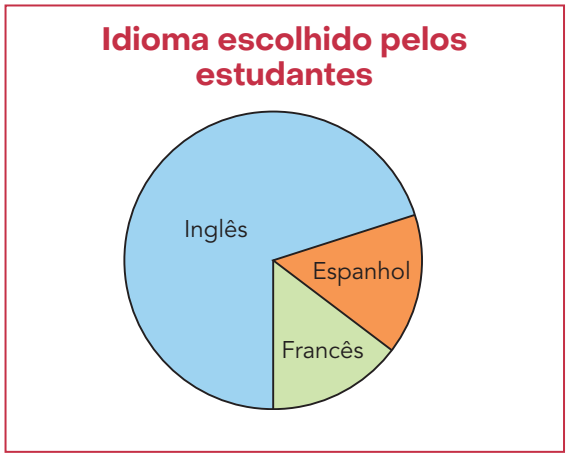
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: INEP. Sinopses Estatísticas. Enem. Disponível em: https://tedit.net/3n30pg. Acesso em: 6 ago. 2024.

Represente esses dados em um gráfico de setores, indicando, para cada região, o respectivo percentual em relação ao total de egressos e a medida do ângulo central de cada setor.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

6. Em uma escola, os estudantes devem optar por um, e somente um, dos três idiomas para estudar: inglês, espanhol ou francês. A distribuição da escolha de 180 estudantes está indicada pelo gráfico a seguir. Sabendo que o ângulo do setor representado pelos estudantes que escolheram inglês mede 252° e que apenas 18 estudantes optaram por estudar francês, determine:



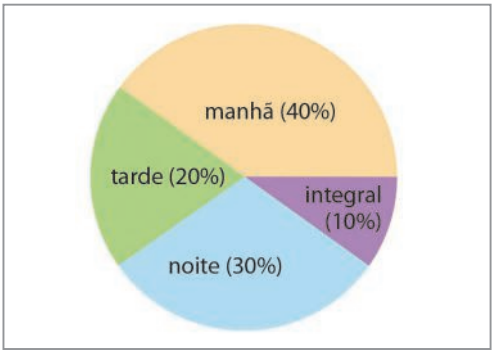
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

a) a medida do ângulo central do setor correspondente a francês; 36°

b) o número de estudantes que optaram por espanhol e a medida do ângulo central correspondente. 36 estudantes; 72°.

7. **(Vunesp/Provão paulista)** Uma escola tem alunos nos turnos da manhã (40%), da tarde (20%) e da noite (30%), e, ainda, alunos no turno único de tempo integral (10%). O gráfico de "*pizza*" mostra essas porcentagens, ilustradas por setores circulares com ângulos proporcionais às porcentagens.



Reprodução/Unesp, 2023.

O ângulo, em graus, do setor de círculo correspondente ao turno da manhã é

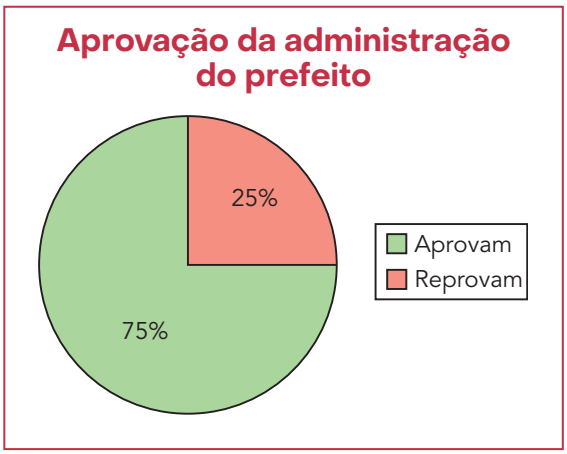
a) 72°. **c)** 120°. **e)** 144°.

b) 90°. **d)** 108°.

40% de 360° = 0,4 · 360° = 144°

Alternativa **e**.

8. O gráfico a seguir ilustra o resultado de uma pesquisa sobre a aprovação da administração do prefeito de uma cidade após 1 ano de sua posse. Sabe-se que foram ouvidas 480 pessoas.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Quantas pessoas aprovam a administração do prefeito?

b) Quais são as medidas dos ângulos dos setores desse gráfico?

c) Supondo que, entre pessoas que moram em casa e que moram em apartamento, as pessoas que moram em casa representam 60% entre os que aprovam e 45% entre os que reprovam, determine a diferença entre o número de pessoas que moram em apartamento que aprovam e o número de pessoas que moram em apartamento que reprovam a administração desse prefeito.

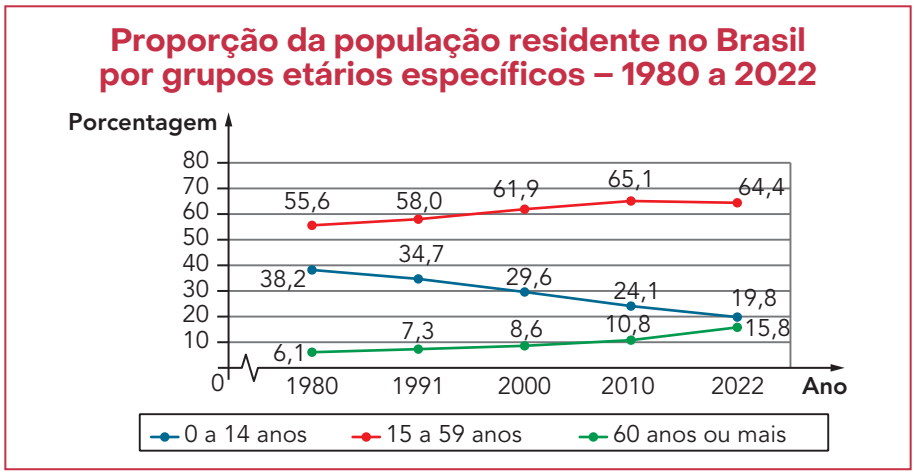
8. a) 75% de 480 pessoas, ou seja: $0{,}75 \cdot 480$ pessoas $= 360$ pessoas.

b) Reprovam: $25\% \cdot 360° = 90°$; aprovam: $75\% \cdot 360° = 270°$.

c) Aprovam: $(100\% - 60\%) \cdot 75\% \cdot 480 = 144$; reprovam: $(100\% - 45\%) \cdot 25\% \cdot 480 = 66$.

A diferença será: $144 - 66 = 78$, ou seja, 78 pessoas.

9. Analise o gráfico a seguir, que apresenta dados dos Censos de 1980 a 2022.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. População por idade e sexo. Disponível em: https://tedit.net/o0kc9p. Acesso em: 6 ago. 2024.

Considerando o gráfico, classifique as afirmações em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

a) O percentual de jovens de até 14 anos vem caindo anualmente desde 1980.

b) A máxima diferença entre os percentuais de jovens de até 14 anos e de adultos com 60 anos ou mais foi registrada no *Censo Demográfico 2000*.

c) Se a população brasileira, em 2010, era de aproximadamente 190 milhões, então mais de 123 milhões de habitantes tinham entre 15 e 59 anos.

d) Se o *Censo Demográfico 2000* indicava uma população de 14 620 000 idosos no Brasil, então a população brasileira ultrapassava a barreira dos 169 milhões de pessoas.

9. a) Verdadeiro, basta analisar a linha que representa essa faixa etária no gráfico.

b) Falso, foi registrada no Censo de 1980.

c) Verdadeiro, pois $0{,}651 \cdot 190\,000\,000 = 123\,690\,000$.

d) Verdadeiro, pois:

$14\,620\,000$ ——— $8{,}6\%$

x ——— 100%

$x = \dfrac{14\,620\,000 \cdot 100}{8{,}6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 170\,000\,000$

10. a) Em 2021: $10 \cdot 25\,000$ hectares desmatados = $= 250\,000$ hectares desmatados.
$1\ km^2 = (1\,000\ m) \cdot (1\,000\ m) = 1\,000\,000\ m^2 = 10^2$ hectares

Convertendo: $\frac{250\,000}{100} = 2\,500$, ou seja, $2\,500\ km^2$.

Em 2023: $2{,}5 \cdot 25\,000$ hectares $= 62\,500$ hectares, ou seja, $625\ km^2$.

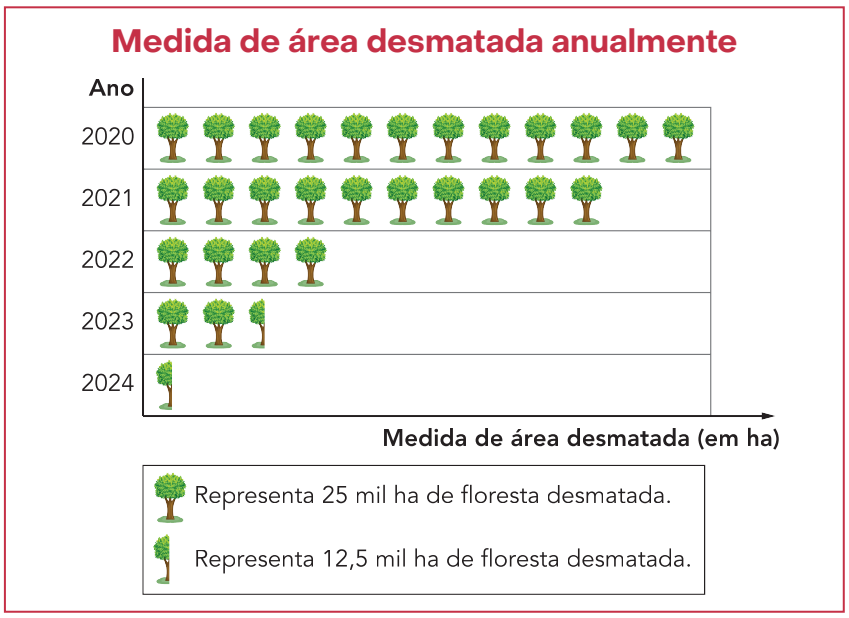
Não escreva no livro

10. No pictograma a seguir está representada a queda na medida de área desmatada anualmente em uma floresta de certo país devido à maior fiscalização dos órgãos governamentais no período de 2020 a 2024.

10. b) Queda absoluta: 6 árvores; queda percentual: $\frac{6}{10} = 0{,}6$, ou seja, 60%.

c) Queda absoluta: 2 árvores; queda percentual: $\frac{2}{2{,}5} = 0{,}8$, ou seja, 80%.

d) Medida de área total desmatada em 2024: $0{,}5 \cdot 25\,000$ hectares $=$ $= 12\,500$ hectares; medida de área do campo de futebol: $100\ m \cdot 70\ m = 7\,000\ m^2$. Assim, temos: $\frac{12\,500 \cdot 10^4}{7\,000} \simeq 17\,857$.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Sabendo que 1 hectare (ha) equivale a $10^4\ m^2$, determine no caderno:

a) a medida de área, em quilômetros quadrados, correspondente à superfície de floresta desmatada nesse país em 2021 e em 2023;

b) a queda percentual da medida de área desmatada em 2022 em comparação a 2021;

c) a queda percentual da medida de área desmatada em 2024 em comparação a 2023;

d) o número inteiro de campos de futebol equivalente à área de floresta desmatada em 2024, considerando um campo de futebol de 100 m de comprimento por 70 m de largura.

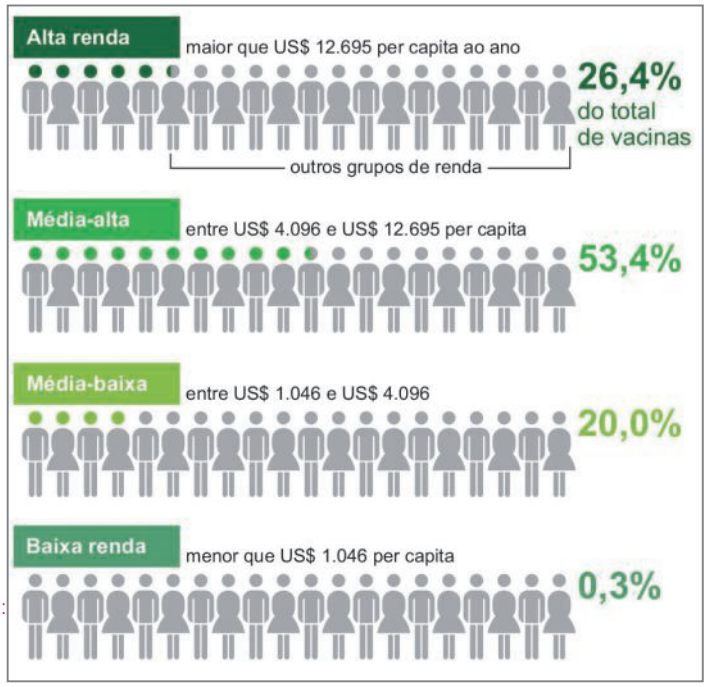
11. **(Famerp-SP)** O infográfico apresenta a porcentagem do total de vacinas aplicadas, de acordo com a renda, em cada grupo de países, até agosto de 2021.

Na representação dos países de baixa renda não aparece coloração verde porque a porcentagem correspondente é muito pequena. Se a cabeça de cada pessoa indicada no infográfico tem diâmetro 2 mm, a área aproximada da região da cabeça de uma pessoa do grupo de baixa renda que deveria ser pintada de verde seria de:

[Considere $\pi \simeq 3{,}14$.]

a) 0,38 mm^2.
b) 0,04 mm^2.
c) 1,88 mm^2.
d) 0,19 mm^2.
e) 3,77 mm^2.

Medida de área de cada cabeça: $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi \simeq 3{,}14$.
Se todas as cabeças estivessem preenchidas, a medida de área seria: $20 \cdot 3{,}14\ mm^2 = 62{,}8\ mm^2$.
100% —— 62,8
0,3% —— x
$x = 0{,}1884 \simeq 0{,}19$
Alternativa **d**.



Reprodução/Vunesp, 2022.

(www.nexojornal.com.br. Adaptado.)

INTERLIGANDO

Não escreva no livro

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Língua Portuguesa, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias.
Comente com os estudantes que, em geral, no segundo semestre são registrados números maiores de devastação por queimadas no Brasil devido ao período de seca.

Gráficos enganosos

A representação de dados em gráficos é uma ferramenta útil para apresentar e analisar informações, mas também pode ser usada para induzir o leitor a uma interpretação inadequada ou enganosa.

Atualmente, com a massificação da capacidade de divulgar informação graças à popularidade das redes sociais, um fenômeno que se encontra em evidência são as *fake news*: informações mentirosas divulgadas em massa de maneira que pareçam verdadeiras para o leitor, que muitas vezes não tem condição de conferir a veracidade das informações. Representações gráficas que induzem ao erro de interpretação ou de conclusão sobre os dados apresentados podem gerar *fake news*.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos das situações mais frequentes.

Mapa clicável

- Notas e observações em letras miúdas que contêm uma informação essencial para a interpretação correta do gráfico.

  Analise o infográfico, divulgado pela Secretaria Especial de Comunicação Social (Secom), órgão da Presidência da República, sobre as medidas de área queimada, em quilômetros quadrados, no Brasil.

  Uma leitura pouco atenta pode levar à conclusão de que, em 2020, a área queimada no Brasil havia sido a menor desde 2003. Contudo, note que há um asterisco no ano 2020. Esse asterisco indica (na parte inferior da imagem) que os dados haviam sido coletados até agosto de 2020 (ou seja, apenas 8 meses de 2020), diferentemente dos anos anteriores, que se referem aos 12 meses de cada um deles.

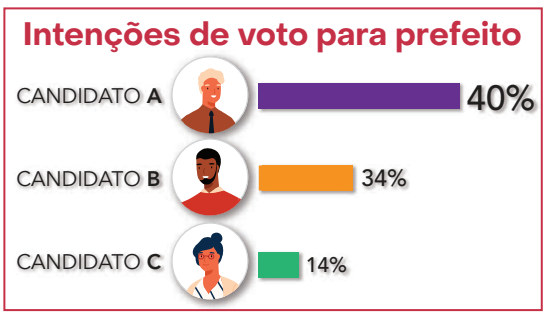
Secretaria de Comunicação Social da Presidência/Governo Federal

MESMO com os focos de incêndio que acometem o Pantanal e outros biomas brasileiros, [...] 26 set. 2020. Conteúdo publicado pelo perfil oficial da SECOM em uma rede social e acessado no dia 9 ago. 2024.

- Escalas que não se iniciam por 0.

  Suponha que um candidato à prefeitura de um munícipio queira inflar a percepção do público quanto à sua liderança nas pesquisas de intenção de voto. Ele poderia, por exemplo, divulgar um gráfico como o apresentado a seguir.

  Quando a escala não se inicia em 0, tem-se a impressão de que as diferenças entre os valores percentuais é maior do que a diferença real. Por exemplo, analisando apenas a medida de comprimento das barras, tem-se a impressão de que percentual do candidato **A** é o dobro

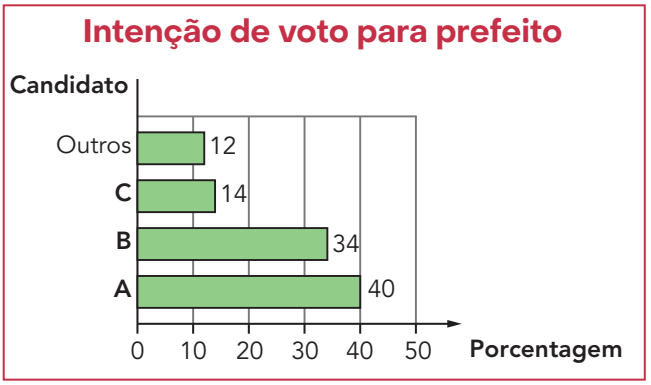


Arte: Banco de imagens/Arquivo da editora; ilustrações dos personagens: Good Studio/Adobe Stock

Dados elaborados para fins didáticos.

do percentual do candidato **B**. Além disso, houve a omissão dos 12% dos dados restantes dessa pesquisa que juntos totalizam 100%. Provavelmente, essa porcentagem representa as intenções de voto em outros candidatos.

Note que, ao construir um gráfico de barras com a escala iniciando em 0, a diferença entre os valores percentuais parece menor do que quando comparada com o gráfico anterior.



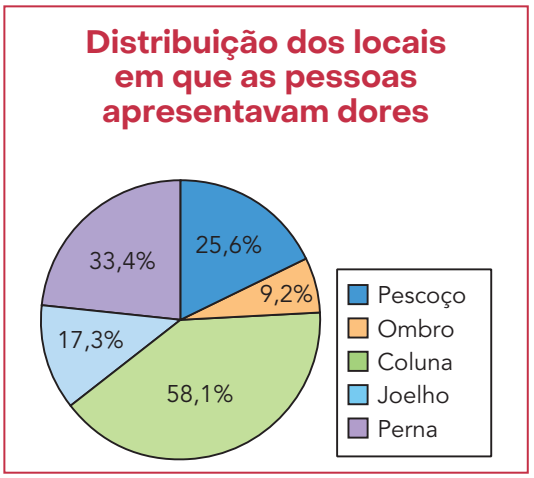
Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

- O total não é 100%.

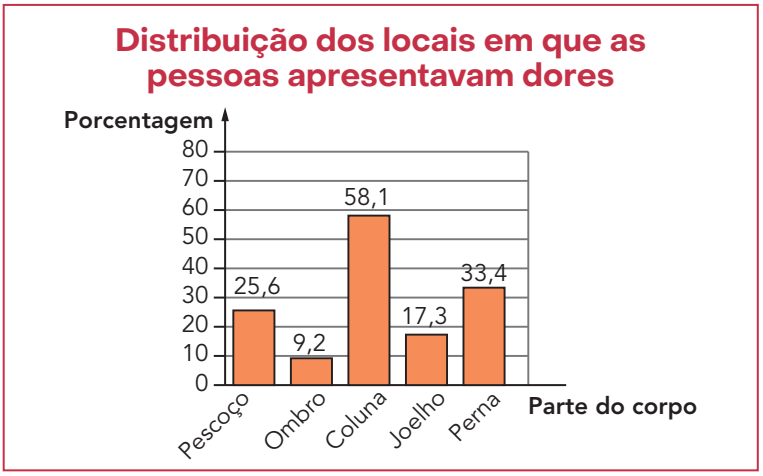
Acompanhe o exemplo de um gráfico de setores que apresenta o resultado de uma pesquisa feita com pessoas que relataram problemas de dores, desconforto ou sensação de formigamento em partes específicas do corpo.

Note que, adicionando os valores percentuais apresentados, o resultado é maior do que 100%. Isso ocorreu porque as pessoas que responderam à pesquisa puderam selecionar mais de 1 opção. Desse modo, a representação por meio do gráfico de setores se torna inadequada. Logo, é preferível que se utilize, nesse caso, o gráfico de barras, como o apresentado a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

1. Professor, caso tenha estudantes com algum tipo de deficiência, sugerimos que oriente a turma a promover a inclusão de acordo com a deficiência apresentada. A pesquisa proposta pode ser realizada em duplas, de modo a promover a inclusão na realização da atividade. Estratégias como essas podem ser aplicadas nesta e em outras atividades similares do capítulo.

a) As respostas dependem do gráfico que o estudante selecionar. Assuntos que abrangem pesquisas tendenciosas geralmente contêm gráficos enganosos, como os de pesquisas eleitorais, nos quais pode haver seletividade de dados em determinados períodos ou o uso de escalas não proporcionais.

1. Selecione em reportagens, notícias ou relatórios de pesquisa um gráfico enganoso e faça o que se pede.

a) Justifique por que o gráfico selecionado pode levar a uma interpretação errada dos dados que ele apresenta.

b) No caderno ou no computador, construa outro gráfico com os mesmos dados, mas que possibilite a interpretação correta da pesquisa.

A resposta depende do gráfico escolhido pelo estudante.

2. **Troque ideias** com um colega sobre a importância do uso de fontes estatísticas confiáveis em reportagens e como isso pode evitar a propagação de *fake news*. Resposta pessoal.

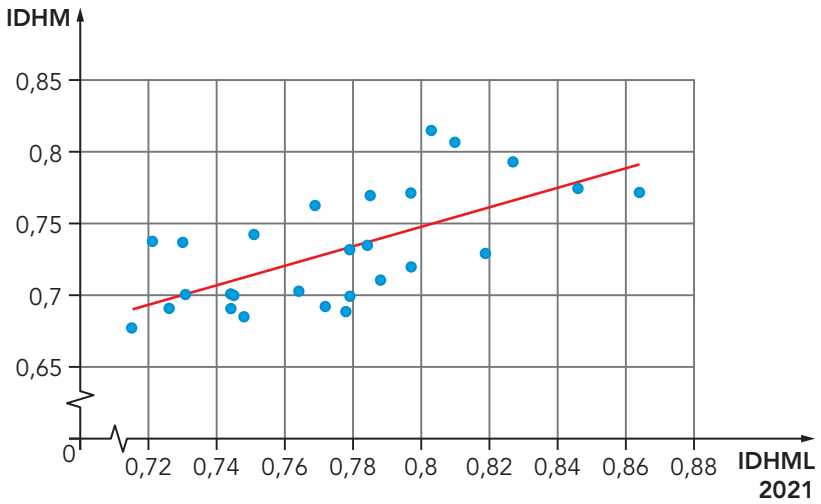
Gráfico de dispersão

O **gráfico de dispersão** é uma representação que mostra como duas variáveis quantitativas podem ou não estar relacionadas, isto é, se existe alguma correlação entre essas variáveis. Essa correlação pode ou não ser uma relação de causa e consequência. Os valores de uma das variáveis ficam representados no eixo horizontal, e os da outra, no eixo vertical. Juntos, esses pares de valores são representados em um plano cartesiano por meio de pontos. A união desses pontos é chamada de nuvem de pontos.

O gráfico de dispersão a seguir relaciona o Índice de Desenvolvimento Humano Municipal de Longevidade (IDHML) e o Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM), ambos por unidade federativa, em 2021.

O Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM) é uma medida composta de indicadores de três dimensões do desenvolvimento humano: longevidade, educação e renda. O índice varia de 0 a 1; quanto mais próximo de 1, maior o desenvolvimento humano. O IDHM brasileiro segue as mesmas três dimensões do IDH global, mas vai além: adequa a metodologia global ao contexto brasileiro e à disponibilidade de indicadores nacionais.

IDHML × IDHM por UF – 2021



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: PNUD. Consulta em tabela. Disponível em: https://tedit.net/g3kg3k. Acesso em: 19 ago. 2024.

A seguir, vamos construir e interpretar um gráfico de dispersão como o apresentado.

EXPERIMENTE

Construir um gráfico de dispersão na planilha eletrônica

Para averiguar as diferenças nas condições de vida entre pessoas brancas e negras, foi criado o Índice de Desenvolvimento Humano Municipal por Cor (IDHMC). Ele mede as lacunas existentes entre negros e brancos nas três dimensões básicas do desenvolvimento humano: vida longa e saudável, acesso ao conhecimento e padrão de vida decente – as mesmas três dimensões básicas para o cálculo do IDHM.

A tabela seguir apresenta o IDHMC em 2021 das unidades federativas de acordo com o PNUD.

IDHMC branco × IDHMC negro por UF – 2021

UF	IDHMC branco	IDHMC negro	UF	IDHMC branco	IDHMC negro
AC	0,762	0,691	PB	0,738	0,671
AL	0,715	0,664	PR	0,790	0,718
AP	0,769	0,664	PE	0,754	0,693
AM	0,742	0,686	PI	0,727	0,674
BA	0,718	0,676	RJ	0,807	0,717
CE	0,764	0,715	RN	0,758	0,699
DF	0,849	0,780	RS	0,784	0,713
ES	0,808	0,740	RO	0,734	0,680
GO	0,765	0,717	RR	0,776	0,670
MA	0,724	0,659	SC	0,800	0,748
MT	0,760	0,719	SP	0,829	0,759
MS	0,769	0,717	SE	0,736	0,684
MG	0,807	0,739	TO	0,766	0,714
PA	0,742	0,671	—	—	—

Fonte dos dados: PNUD. IDHM Cor Brasil. Disponível em: https://tedit.net/z5zv42. Acesso em: 6 ago. 2024.

Vamos utilizar uma planilha eletrônica para construir um gráfico de dispersão relacionado às informações da tabela anterior da seguinte maneira:

- digite ordenadamente, na coluna **A**, a partir da linha **1**, os dados do IDHM branco da tabela;
- digite ordenadamente, na coluna **B**, a partir da linha **1**, os dados do IDHM negro da tabela;
- selecione todas as células com os dados dessas duas colunas e insira um gráfico de dispersão;
- caso a primeira versão do gráfico apresente apenas os pontos, procure nas configurações do gráfico a opção que faz com que a linha de tendência seja exibida.

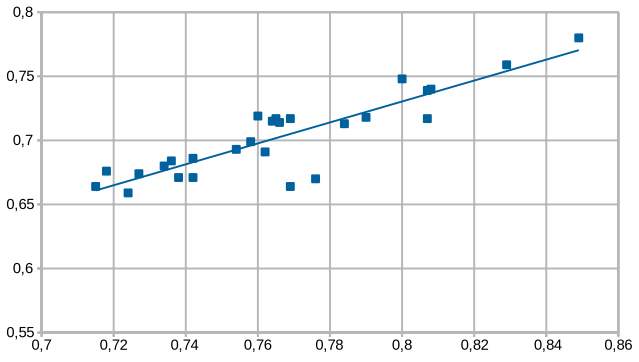
Desse modo, o *software* exibe um gráfico de dispersão relacionando as informações das colunas **A** e **B**.

Para analisar a tendência e verificar, de modo simplificado, como as variáveis se relacionam, selecione o gráfico construído e insira uma linha de tendência (opte pelo modelo linear).

No gráfico obtido, podemos perceber que a linha de tendência é uma reta ascendente e, desse modo, a correlação é positiva. Isso quer dizer que, quando uma variável aumenta, a outra também aumenta, mas as grandezas correspondentes não são diretamente proporcionais.

Se a linha de tendência for uma reta descendente, a correlação será

IDHMC branco × IDHMC negro por UF – 2021



Reprodução/LibreOffice

Dados elaborados para fins didáticos.

negativa. Isto quer dizer que, quando uma das variáveis aumenta, a outra diminui, não necessariamente de modo proporcional.

Quanto mais próxima de uma reta horizontal estiver a linha de tendência, menor será a correlação significativa entre essas variáveis.

Note que, apenas analisando a linha de tendência, conseguimos afirmar se há uma correlação positiva, se há uma correlação negativa ou se não há correlação significativa. Entretanto, não conseguimos medir o grau de associação linear entre essas variáveis. Para medirmos esse grau, podemos utilizar a planilha eletrônica e calcular o **coeficiente de correlação**.

O coeficiente de correlação é um número que varia de –1 a 1. Se o sinal for positivo, a correlação será positiva; se for negativo, a correlação será negativa. Além disso, quanto mais próximo de 1 for o coeficiente, mais forte será a associação positiva entre as variáveis; consequentemente, a linha de tendência será ascendente e se ajustará muito bem aos pontos da nuvem. Se o coeficiente for exatamente igual a 1, então a linha se ajustará perfeitamente aos dados – todos os pontos da nuvem estarão sobre a reta.

Agora, utilize a planilha eletrônica para calcular o coeficiente de correlação entre as variáveis apresentadas na tabela da seguinte maneira: na planilha que você utilizou para construir o gráfico de dispersão, selecione uma célula vazia e, então, digite "=CORREL(A1:A27;B1:B27)" e tecle Enter.

Destaque aos estudantes que, nesse exemplo, é possível inferir que há uma relação de causa e consequência (causalidade). As unidades federativas em que o IDHM branco é maior tendem a ter também um maior IDHM negro.

O resultado será aproximadamente 0,879. Isso indica que a correlação é forte.

Antes de iniciar as atividades, pergunte aos estudantes: Considerando o gráfico de dispersão "**IDHML × IDHM por UF - 2021**", a qual conclusão podemos chegar?. Espera-se que, após os estudos, eles percebam que há uma correlação positiva entre o IDHML e o IDHM por UF em 2021, ou seja, conforme o IDHML aumenta, o IDHM também aumenta.

ATIVIDADES

Não escreva no livro

12. As respostas dependem dos resultados das pesquisas realizadas pelos estudantes.

12. Faça uma pesquisa sobre a existência ou não de uma relação entre o tempo dedicado aos estudos em Matemática e o desempenho na prova da mesma disciplina. Para isso, faça o que se pede.

a) Responda às perguntas a seguir.

- Qual é o tempo médio, em horas, que você dedica por semana para estudar Matemática? Registre o valor na forma decimal, com aproximação para dois algarismos decimais (por exemplo: 45 min = 0,75 h).
- Que nota você obteve na prova de Matemática?

b) Experimente utilizar uma planilha eletrônica para representar os dados obtidos em um gráfico de dispersão e uma linha de tendência.

c) Considerando as representações construídas por você no item anterior, responda: Há uma correlação entre essas duas variáveis?

13. O gráfico a seguir é resultado de uma pesquisa feita sobre as vendas semanais de uma linha de sorvetes de certa indústria de acordo com a temperatura média semanal.

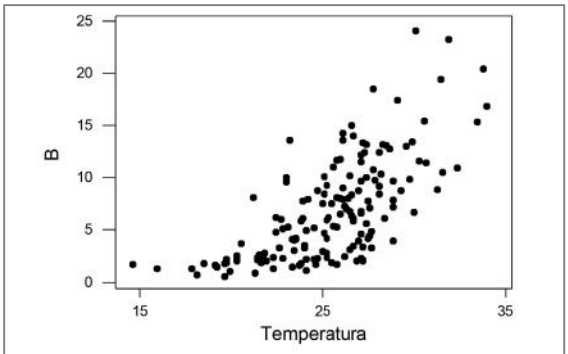


Figura 7.1 - Gráfico Temperatura x Vendas (São Paulo)

Reprodução/repositorio.usp.br

ISHII, Paloma Ayumi. *Estudo do comportamento das vendas em uma empresa de sorvetes.* 2005. Trabalho de Conclusão de Curso – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2005. Disponível em: https://tedit.net/mkum1y. Acesso em: 9 ago. 2024.

a) Quais informações faltam nesse gráfico? Os eixos não apresentam unidade de medida.

b) A correlação entre as duas variáveis é positiva ou negativa? Positiva.

c) A maior venda semanal coincide com a maior temperatura registrada? Não.

VIRALIZE!

Esta seção favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação em Direitos Humanos* e *Trabalho*.

Reprodução/ ONU

Equidade de gênero no mercado de trabalho

Mulheres já são quase metade dos médicos do País e passarão a ser maioria na profissão em 2024

Pela primeira vez na história do País, o número de mulheres médicas já é quase metade do total de profissionais do País e elas devem superar a quantidade de homens e se tornar maioria na profissão ainda neste ano, conforme mostram dados da nova edição do estudo Demografia Médica, divulgada nesta segunda-feira [8/4/2024] pelo Conselho Federal de Medicina (CFM).

De acordo com a pesquisa, que reúne dados atualizados até janeiro deste ano, as mulheres já representam 49,92% dos profissionais, enquanto os homens somam 50,08% do total. Em 1990, somente 30% dos médicos brasileiros eram do sexo feminino.

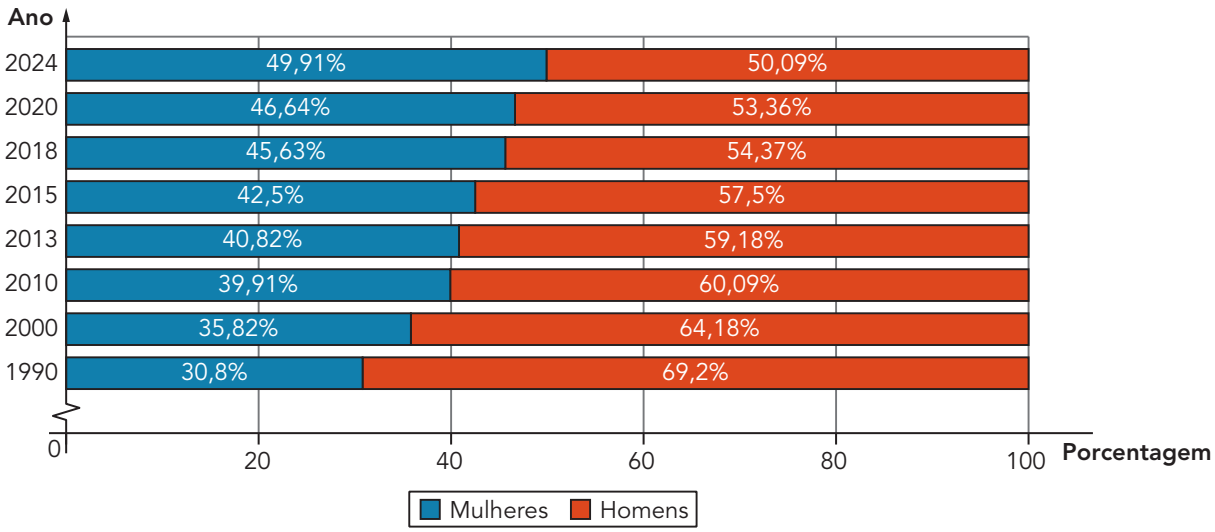
Há localidades do País em que as mulheres já são maioria, como na cidade de São Paulo, onde elas representam 51,04% da força de trabalho da profissão, com 39 721 profissionais.

Segundo o CFM, a ligeira vantagem masculina ainda existente no cenário nacional deverá ser superada neste ano porque, desde 2009, as mulheres já são maioria entre as egressas das faculdades médicas. [...]

Sugerimos que esta seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Caso julgue pertinente, comente com os estudantes que a partir de 2024 o IBGE começou a incluir orientação sexual e identidade de gênero nas pesquisas que realiza.

Proporção de médicos homens e mulheres no Brasil entre 1990 e 2024



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Fonte dos dados: CAMBRICOLI, Fabiana. Mulheres já são quase metade dos médicos do país e passarão a ser maioria na profissão em 2024. *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, ano 145, n. 47 055, p. A12, 8 abr. 2024.

Tripla jornada feminina é barreira para ascensão na carreira

O maior nível de exigência com as mulheres pode ser um impeditivo para que elas cresçam profissionalmente [...]. As dificuldades da tripla jornada feminina são apontadas como uma das razões que as fazem buscar especialidades clínicas e com rotina mais regular.

"Um dos maiores gargalos para maior inclusão é a conciliação entre trabalho, casamento, filhos e cuidados com os pais, que requerem tempo e esforços ainda invisíveis das mulheres. Quando se observa a participação ainda pequena das médicas em algumas especialidades que exigem plantões e múltiplos vínculos, isso fica nítido", destaca Lígia. [...]

Para Lígia, para enfrentar a situação, que também ocorre em outras profissões, "é necessário romper padrões para tornar a profissão compatível com namorar, ter lazer, férias e trabalho digno e estável".

O CFM, por sua vez, diz no estudo que o cenário "desafia as estruturas tradicionais e as normas de gênero na Medicina, abrindo caminho para um ambiente mais inclusivo e diversificado" e "pode servir como um catalisador para abordar questões mais amplas de equidade de gênero no setor de saúde".

CAMBRICOLI, Fabiana. Mulheres já são quase metade dos médicos do país e passarão a ser maioria na profissão em 2024. *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, ano 145, n. 47 055, p. A12, 8 abr. 2024.

1. Em valores relativos, o aumento foi de 49,91 − 30,80 = 19,11%. Portanto, o aumento percentual foi de $\frac{19,11}{30,80} \simeq 0,62 = 62\%$.

1. Qual é o aumento da participação percentual de médicas no Brasil registrado entre 1990 e 2024?

2. De acordo com o Conselho Regional de Medicina do estado de São Paulo, o Brasil tinha, em 2024, 575 930 médicos ativos. Qual era a quantidade de médicas mulheres?
49,91% de 575 930 = 287 447, ou seja, 287 447 médicas.

3. Você sabia que o Brasil possui um programa que promove a equidade de gênero e raça em empresas? Esse programa chama-se Programa Pró-Equidade de Gênero e Raça, que, em 2024, estava em sua 7ª edição. Faça uma pesquisa e cite pelo menos uma vantagem de uma empresa que participe desse programa. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

4. Em grupo com alguns colegas, pesquisem as seguintes questões:

a) Qual é a unidade federativa que apresenta a menor diferença salarial entre homens e mulheres? Quanto é essa diferença?

b) Existem países em que a paridade salarial entre homens e mulheres é lei?

c) Que tipos de medida vocês sugerem para tentar resolver esse problema no Brasil?

Pesquisem em veículos confiáveis: agências de pesquisa renomadas que apresentem informações sobre a metodologia usada na obtenção de dados; agências de notícia conhecidas que citem a fonte das informações apresentadas; portais de universidade; revistas ou periódicos acadêmicos; entre outros.
A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

5. Organizem e apresentem uma composição de *slides* com os principais resultados da pesquisa para os demais colegas e o professor. Não se esqueçam de indicar as fontes utilizadas. Resposta pessoal.

6. Conversem com os demais colegas e o professor para comparar os dados e as conclusões obtidos nas pesquisas realizadas entre os grupos.
Resposta pessoal.

lordn/Adobe Stock

Embora as mulheres já representem quase metade dos profissionais de Medicina no Brasil, dados obtidos pela pesquisa realizada em parceria entre a AMB e a FMUSP indicam que o rendimento anual das mulheres que exercem a profissão continua 36,3% inferior do que o dos homens.

PARA FUNDAMENTAR SABERES

1. **(EEAR-SP)** A tabela informa o percentual de alunos inscritos, por região, em um determinado concurso (A), em 2013.

Número de Inscrições no concurso A em 2013	
Regiões	**Inscritos (%)**
Centro-Oeste	9
Norte	10
Sul	12
Nordeste	33
Sudeste	36

Se esses dados forem representados em um gráfico de setores, a medida aproximada do ângulo do setor correspondente à região Sudeste é:

a) 135°
b) 132°
c) 130°
d) 120°

2. **(Enem)** Uma pessoa pratica quatro atividades físicas — caminhar, correr, andar de bicicleta e jogar futebol — como parte de seu programa de emagrecimento. Essas atividades são praticadas semanalmente de acordo com o quadro, que apresenta o número de horas diárias por atividade.

Dias da semana	Caminhar	Correr	Andar de bicicleta	Jogar futebol
Segunda-feira	1,0	0,5	0,0	2,0
Terça-feira	0,5	1,0	0,5	1,0
Quarta-feira	0,0	1,5	1,0	0,5
Quinta-feira	0,0	2,0	0,0	0,0
Sexta-feira	0,0	0,5	0,0	2,5

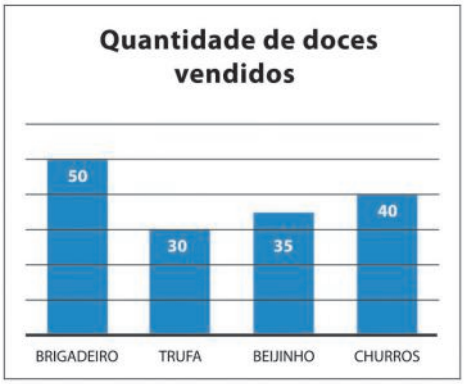
Ela deseja comemorar seu aniversário e escolhe o dia da semana em que o gasto calórico com as atividades físicas praticadas for o maior. Para tanto, considera que os valores dos gastos calóricos das atividades por hora (cal/h) são os seguintes:

Atividade física	Gasto calórico (cal/h)
Caminhar	248
Correr	764
Andar de bicicleta	356
Jogar futebol	492

O dia da semana em que será comemorado o aniversário é: Alternativa **c**.

a) segunda-feira.
b) terça-feira.
c) quarta-feira.
d) quinta-feira.
e) sexta-feira.

3. **(Vunesp/Provão paulista)** O gráfico apresenta a quantidade de doces vendidos por Ângela na última semana.



Reprodução/Unesp, 2023.

Os preços de cada um dos doces estão na tabela a seguir:

Brigadeiro	Trufa	Beijinho	Churros
R$ 3,00	R$ 5,00	R$ 2,00	R$ 10,00

De acordo com os dados, ao analisar a quantidade de doces vendidos e o valor arrecadado com cada um, pode-se afirmar que, para esse período de vendas: Alternativa **e**.

a) a quantidade total de doces vendidos foi de 150. $50 + 30 + 35 + 40 = 155$. Portanto, a afirmativa está incorreta.

1. O ângulo do setor que representa a região Sudeste deve ser de 36% dos 360° graus que representam a totalidade. Assim: $360° \cdot 0{,}36 \simeq 130°$.
Alternativa **c**.

3. b) Valor obtido com venda de trufas: R$ 5,00 · 30 = R$ 150,00.
Valor obtido com venda de beijinhos: R$ 2,00 · 35 = R$ 70,00.
Portanto, a afirmativa está incorreta.

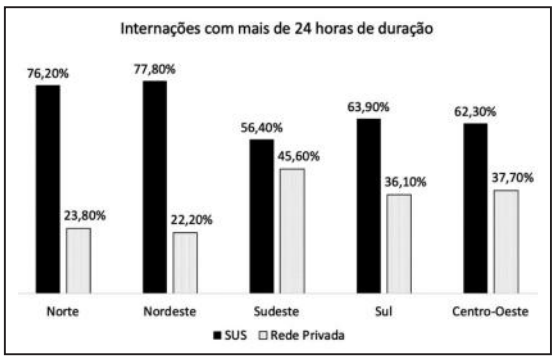
b) o valor obtido com as vendas de trufas foi o dobro do obtido com as vendas de beijinho.

c) o valor total obtido com as vendas dos doces foi R$ 700,00.

d) o doce que mais contribuiu para o valor total das vendas foi o brigadeiro.

e) mais da metade do valor total obtido veio da venda de churros. R$ 770,00 : 2 = R$ 385,00. Portanto, a afirmativa está correta.

4. (Ufscar-SP/Unicamp Indígena) O gráfico a seguir compara, por região, o percentual do número de internações com duração superior a 24 horas, realizadas na rede privada e no SUS (Sistema Único de Saúde) em 2019.



Reprodução/Unicamp, 2023.

Segundo esse gráfico, é correto afirmar que:

a) mais da metade destas internações em todo o Brasil foram realizadas pelo SUS.

b) na região Sudeste, a maioria dessas internações foram realizadas fora do SUS.

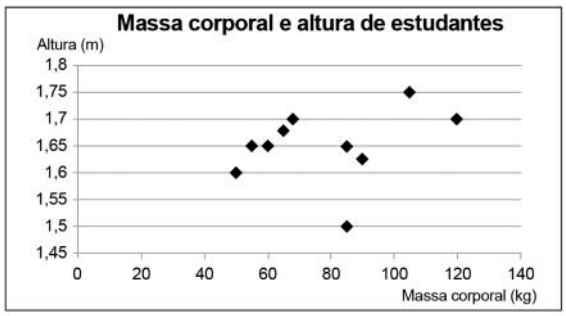
c) nas regiões Norte e Nordeste, a quantidade destas internações realizadas fora do SUS foi superior a 30%.

3. d) Pelo item **c**, o doce que mais contribuiu para a arrecadação foi o churro. Portanto, a afirmativa está incorreta.

Não escreva no livro

d) mais de 70% dessas internações em cada uma das regiões (Sudeste, Sul e Centro-Oeste) foram realizadas pelo SUS.

5. (Enem) Um professor, para promover a aprendizagem dos estudantes em estatística, propôs uma atividade. O objetivo era verificar o percentual de estudantes com massa corporal abaixo da média e altura acima da média de um grupo de estudantes. Para isso, usando uma balança e uma fita métrica, avaliou uma amostra de dez estudantes, anotando as medidas observadas. O gráfico apresenta a massa corporal, em quilograma, e a altura, em metro, obtidas na atividade.



Reprodução/Enem, 2023.

Após a coleta dos dados, os estudantes calcularam a média dos valores obtidos, referentes à massa corporal e à altura, obtendo, respectivamente, 80 kg e 1,65 m.

Qual é o percentual de estudantes dessa amostra com massa corporal abaixo da média e altura acima da média? Alternativa **b**.

a) 10 **c)** 30 **e)** 70
b) 20 **d)** 50

3. c) Venda de brigadeiros: R$ 3,00 · 50 = R$ 150.
Venda de churros: R$ 10,00 · 40 = R$ 400,00.
Total: 150 + 70 + 150 + 400 = 770, ou seja, R$ 770,00.
Portanto, a afirmativa está incorreta.

Nos últimos capítulos, estudamos as etapas de uma pesquisa estatística e como classificar, tabular e representar as informações coletadas. Analisamos diferentes tipos de gráfico e percebemos que alguns deles podem ser enganosos de modo proposital ou não. Respostas pessoais.

1. Reconheço a relevância da Estatística nas mais variadas áreas do conhecimento? Identifico as etapas de uma pesquisa estatística?
2. Quais representações gráficas estou aprendendo pela primeira vez? Eu consigo ler e interpretar dados descritos em diversos gráficos ou diagramas? Tenho dificuldades com algum deles?
3. Eu consigo representar dados agrupados ou não agrupados em tabelas de frequência, gráficos ou diagramas?
4. Colaborei com o professor durante o andamento das aulas, realizando as atividades indicadas e tirando minhas dúvidas?
5. Fui respeitoso com os colegas e comigo mesmo, contribuindo nos debates durante as aulas, exercitando a empatia, o diálogo e a cooperação para a manutenção de um ambiente agradável e produtivo dentro e fora da escola?

4. Para que a alternativa **a** seja incorreta, em pelo menos uma das regiões o percentual de internações realizadas na rede privada deveria ser maior do que o realizado pelo SUS. Como isso não acontece, pode-se afirmar que mais da metade das internações realizadas em todo o Brasil foi realizada pelo SUS.
As demais alternativas provam-se falsas com a análise do gráfico. Alternativa **a**.

Tabela de razões trigonométricas

Medida de abertura	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,01745	0,99985	0,01746
2°	0,03490	0,99939	0,03492
3°	0,05234	0,99863	0,05241
4°	0,06976	0,99756	0,06993
5°	0,08716	0,99619	0,08749
6°	0,10453	0,99452	0,10510
7°	0,12187	0,99255	0,12278
8°	0,13917	0,99027	0,14054
9°	0,15643	0,98769	0,15838
10°	0,17365	0,98481	0,17633
11°	0,19087	0,98163	0,19438
12°	0,20791	0,97815	0,21256
13°	0,22495	0,97437	0,23087
14°	0,24192	0,97030	0,24933
15°	0,25882	0,96593	0,26795
16°	0,27564	0,96126	0,28675
17°	0,29237	0,95630	0,30573
18°	0,30902	0,95106	0,32492
19°	0,32557	0,94552	0,34433
20°	0,34202	0,93969	0,36397
21°	0,35837	0,93358	0,38386
22°	0,37461	0,92718	0,40403
23°	0,39073	0,92050	0,42447
24°	0,40674	0,91355	0,44523
25°	0,42262	0,90631	0,46631
26°	0,43837	0,89879	0,48773
27°	0,45399	0,89101	0,51953
28°	0,46947	0,88295	0,53171
29°	0,48481	0,87462	0,55431
30°	0,50000	0,86603	0,57735
31°	0,51504	0,85717	0,60086
32°	0,52992	0,84805	0,62487
33°	0,54464	0,83867	0,64941
34°	0,55919	0,82904	0,67451
35°	0,57358	0,81915	0,70021
36°	0,58779	0,80902	0,72654
37°	0,60182	0,79864	0,75355
38°	0,61566	0,78801	0,78129
39°	0,62932	0,77715	0,80978
40°	0,64279	0,76604	0,83910
41°	0,65606	0,75471	0,86929
42°	0,66913	0,74314	0,90040
43°	0,68200	0,73135	0,93252
44°	0,69466	0,71934	0,96569
45°	0,70711	0,70711	1,00000

Medida de abertura	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,71934	0,69466	1,03553
47°	0,73135	0,68200	1,07237
48°	0,74314	0,66913	1,11061
49°	0,75471	0,65606	1,15037
50°	0,76604	0,64279	1,19175
51°	0,77715	0,62932	1,23499
52°	0,78801	0,61566	1,27994
53°	0,79864	0,60182	1,32704
54°	0,80903	0,58779	1,37638
55°	0,81915	0,57358	1,42815
56°	0,82904	0,55919	1,48256
57°	0,83867	0,54464	1,53986
58°	0,84805	0,52992	1,60033
59°	0,85717	0,51504	1,66428
60°	0,86603	0,50000	1,73205
61°	0,87462	0,48481	1,80405
62°	0,88295	0,46947	1,88073
63°	0,89101	0,45399	1,96261
64°	0,89879	0,43837	2,05030
65°	0,90631	0,42262	2,14451
66°	0,91355	0,40674	2,24604
67°	0,92050	0,39073	2,35585
68°	0,92718	0,37461	2,47509
69°	0,93358	0,35837	2,60509
70°	0,93969	0,34202	2,74748
71°	0,94552	0,32557	2,90421
72°	0,95106	0,30902	3,07768
73°	0,95630	0,29237	3,27085
74°	0,96126	0,27564	3,48741
75°	0,96593	0,25882	3,73205
76°	0,97030	0,24192	4,01078
77°	0,97437	0,22495	4,33148
78°	0,97815	0,20791	4,70463
79°	0,98163	0,19087	5,14455
80°	0,98481	0,17365	5,67128
81°	0,98769	0,15643	6,31375
82°	0,99027	0,13917	7,11537
83°	0,99255	0,12187	8,14435
84°	0,99452	0,10453	9,51436
85°	0,99619	0,08716	11,43010
86°	0,99756	0,06976	14,30070
87°	0,99863	0,05234	19,08110
88°	0,99939	0,03490	28,63630
89°	0,99985	0,01745	57,29000

Essa tabela contém valores aproximados. Os arredondamentos utilizados são de 5 casas decimais.

RESPOSTAS

UNIDADE 1

Abertura de Unidade (p. 14)

1. Respostas pessoais.

2. Raiz da mandioca: *in natura*; farinha de mandioca: minimamente processada; bolo de mandioca: processado; *chips* de mandioca: ultraprocessados.

Capítulo 1

Atividades

1. $A = \{-1, 0\}$; $B = \{2\}$; $C = \{0, 4, 9\}$; $D = \{-1\}$; $E = \varnothing$.

2. **a)** V **b)** F **c)** V **d)** V **e)** V **f)** F

3. **a)** F **b)** F **c)** V **d)** F **e)** V **f)** V

4. **a)** F; $\varnothing$ não é elemento de U.
b) V; 3 é elemento de U e $\{3\}$ é subconjunto de U.
c) V; os subconjuntos unitários de U são $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$.
d) F; $n(U) = 4 \Rightarrow n(P(U)) = 2^4 = 16$.

5. **a)** $\{-1\}$ **b)** U **c)** $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ **d)** $\{-1, 0, 1\}$

6. **a)** F; Mato Grosso $\in A$, porém Mato Grosso $\notin N$; além disso, Tocantins $\in N$, porém Tocantins $\notin A$.
b) F; Mato Grosso $\in A$, porém Mato Grosso $\notin N$.
c) V; $O \cap A = \{\text{Mato Grosso}\}$.
d) V; os elementos de A pertencem à região Norte ou Centro-Oeste.
e) F; $\{\text{Pará}\} \subset A \cap N$.

7. 13 estudantes.

8. **a)** Resposta pessoal. **b)** Resposta pessoal.

9. 74% dos moradores.

10. **a)** V **b)** V **c)** F **d)** F **e)** V **f)** V **g)** F **h)** V **i)** V

Pense nisto (p. 17)

O conjunto $\{a\}$ é um conjunto unitário formado apenas pelo elemento a, já o conjunto $\{\{a\}\}$ é um conjunto cujo único elemento é o conjunto $\{a\}$.

Pense nisto (p. 18)

Um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos.

Pense nisto (p. 20)

Sim.

Pense nisto (p. 20)

Sim. Resposta pessoal.

Interligando (p. 24)

1. Tipo espectral **G**.

2. Resposta pessoal.

Capítulo 2

Atividades

1. **a)** $A \cap B = \{5, 6\}$; $A \cup B = \mathbb{N}$.
b) $A \cap B = B$; $A \cup B = A$.
c) $A \cap B = B$; $A \cup B = A$.
d) $A \cap B = \{3\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. **a)** 1 **b)** 11 **c)** 6 **d)** −9 **e)** −2 **f)** 1 **g)** 1 **h)** −10

3. **a)** −18 ou 18.
b) Resposta pessoal.

4. Um milhão, setecentos e três mil e duzentos quilômetros quadrados; resposta pessoal.

5. −R$ 935,00

6. **a)** 2 **b)** −30 **c)** −3 **d)** −43 **e)** −46 **f)** 36 **g)** 11 **h)** 14

7. 510 algarismos.

8. **a)** F **b)** F **c)** F **d)** F **e)** F

9. 12 caixas.

10. **a)** 1525 números.
b) −2009
c) −2503

11. **a)** F **b)** V **c)** F **d)** F

12. **a)** $\frac{1}{20}$ **b)** $\frac{21}{20}$ **c)** $-\frac{9}{4}$

13. **a)** 2,4 **b)** 0,024 **c)** −2,8875

14. R$ 540,00

15. 7 maneiras; 11 maneiras.

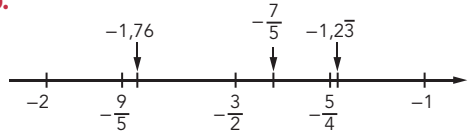
16. $-8{,}2 = -\frac{41}{5}$

17. **a)** $\frac{4}{9}$ **b)** $\frac{337}{300}$ **c)** $\frac{23}{990}$

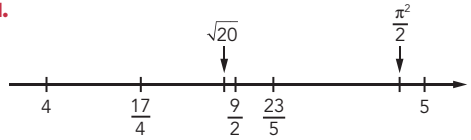
18. Não existe.

19. **a)** $\frac{16}{15}$ **b)** $\frac{26}{15}$ **c)** $\frac{4}{25}$

20.



21.



São irracionais: $\sqrt{20}$ e $\frac{\pi^2}{2}$.

22. **a)** Irracional. **b)** Racional. **c)** Irracional. **d)** Irracional. **e)** Racional. **f)** Racional. **g)** Racional. **h)** Racional. **i)** Irracional. **j)** Irracional. **k)** Racional.

23. **a)** F **b)** F **c)** F **d)** V **e)** F

24. **a)** Vazio. **b)** Unitário. **c)** Unitário. **d)** Vazio. **e)** Vazio. **f)** Unitário. **g)** Unitário. **h)** Vazio.

25. A: irracional; B: irracional; C: racional; D: racional; E: irracional.

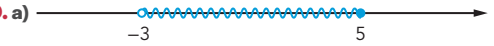
26. **a)** 1,73 e 1,74.
b) 1,732 e 1,733.

27. $a < b < d < c$

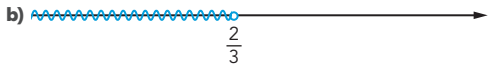
28. 90

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

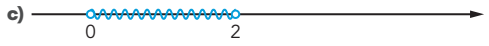
29. a)



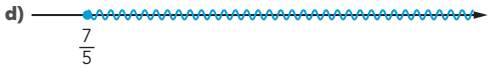
b)



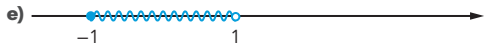
c)



d)



e)



f)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

30. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\sqrt{2}\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < x \leqslant 1\right\}$
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{4} < x \leqslant 0\right\}$

31. a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\} =]-3, +\infty[$
b) $A \cap B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant \frac{4}{3}\right\} = \left]-2, \frac{4}{3}\right]$
c) $A - B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{4}{3}\right\} = \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$
d) $B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant -2\} =]-3, -2]$

32. 3 números inteiros.

33. $\left[1, \frac{3}{2}\right[\cup [2, +\infty[$

34. a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10} < x \leqslant 1\right\}$
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10} < x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant \frac{1}{10}\right\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -1\}$
g) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10} < x \leqslant 1\right\}$
h) $\varnothing$

35. a) 3,2
b) $\frac{1}{3}$
c) 4
d) 20
e) 2
f) 5
g) $\frac{1}{12}$
h) 16

36. a) $x = \frac{9}{2}$ **b)** $x = \frac{5}{7}$ **c)** $x = -1$ **d)** $x = 4$

37. Tocantins; resposta pessoal.

38. a) 120 **b)** 126 **c)** 60 **d)** 123,55 **e)** 675 **f)** 30 **g)** 262,5 **h)** 53,9 **i)** 2,7 **j)** 10,5

39. R$ 2.350,00; R$ 2.750,00.

40. a) $x = 25$ **b)** $x = 5$ **c)** $x = 80$ **d)** $x = 34$ **e)** $x = 125$

41. a) $\frac{3}{10}$ **b)** $\frac{4}{3}$ **c)** 20 estudantes.

42. Fabricantes **B** e **D**.

43. Aproximadamente 92,86%.

44. a) 126 estudantes; 10,5%.
b) Não, só seria possível responder ao segundo questionamento.
c) Sim; 28% e 42%.

45. Resposta pessoal.

46. a) 285 páginas. **b)** 114 páginas.

47. 240 g

48. a) 81,25% **b)** 70 arremessos.

49. a) 9,6 cm² **b)** 5,76 cm × 2,4 cm

50. a) Aproximadamente 91,23%. **b)** 32 358 estudantes. **c)** 388 estudantes. **d)** Aproximadamente 6,92%.

Pense nisto (p. 27)

Um número p é par se, na divisão por 2, o resto é igual a 0. Um número q é ímpar se, na divisão por 2, o resto é igual a 1. Assim, para $n \in \mathbb{N}$, ao dividir qualquer número natural escrito como $2n$ por 2, o resto da divisão será sempre 0 e, ao dividir qualquer número natural escrito como $(2n + 1)$ por 2, o resto da divisão será sempre 1.

Pense nisto (p. 28)

A primeira sentença é falsa, pois $-2 \in \mathbb{Z}$, mas $-2 \notin \mathbb{N}$, por exemplo. Assim, nem todo número inteiro é natural. A segunda sentença é verdadeira, pois todo número natural também é um número inteiro ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$).

Pense nisto (p. 28)

$4m$, em que $m \in \mathbb{Z}$.

Pense nisto (p. 29)

Sim, o número 0, pois: $x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Pense nisto (p. 29)

Sim.

Pense nisto (p. 31)

A proposição é verdadeira. Podemos escrever $a = 39n$; assim, $a = 13 \cdot 3n$ e, portanto, múltiplo de 13.

Pense nisto (p. 34)

- Resposta pessoal.
- Sim.

Pense nisto (p. 35)

- Sim.
- Não.

Pense nisto (p. 37)

1,414 e 1,415.

Pense nisto (p. 38)

Respostas pessoais.

Pense nisto (p. 46)

Sim.

Interligando (p. 45)

1. 1 : 50 000 000
2. 1000 km
3. 3,74 cm
4. 1 : 1 300 000
5. 0 200 m
6. 0 400 km

Educação financeira (p. 50)

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.
4. a) R$ 105,00
b) R$ 158,82
c) Aproximadamente R$ 908,86.
d) R$ 908,86

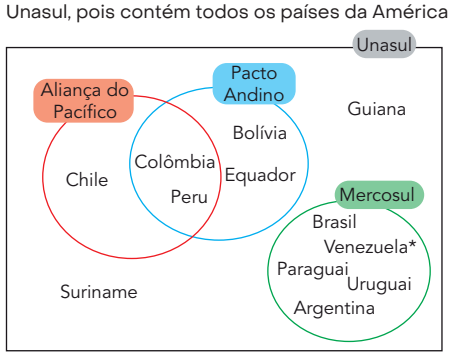
Viralize! (p. 52)

1. Resposta pessoal.
2. Respostas pessoais.
3. Resposta pessoal.

Para fundamentar saberes (p. 54)

1. a) Unasul, pois contém todos os países da América do Sul.

b)



*País suspenso do bloco em 2016.

Banco de imagens/Arquivo da editora

2. **a)** 48 pessoas. **b)** 9 pessoas. **c)** 15 pessoas.
3. **a)** V **b)** V **c)** V **d)** V **e)** F
4. **a)** V **b)** F **c)** V **d)** F **e)** F **f)** F
5. 128 estudantes.
6. Alternativa **d**.
7. Alternativa **b**.
8. Alternativa **d**.
9. Alternativa **a**.

UNIDADE 2

Abertura de Unidade (p. 56)

1. Respostas pessoais.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.

Capítulo 3

Atividades

1. **a)** 100 m²: R$ 4.200,00; 250 m²: R$ 10.500,00.
b) $y = 42 \cdot x$
c) $\frac{1}{2}$

2. **a)**

Medida de distância percorrida pelo avião a 900 km/h

Medida de tempo	Medida de distância (em km)
15 min (0,25 hora)	225
0,5 hora	450
2 horas	1800
5 horas	4500

Dados elaborados para fins didáticos.

b) 4 horas.
c) $d = 900 \cdot t$
d) Diminuiria; 3 horas e 36 minutos.

3. **a)**

Medidas dos quadrados

Medida do lado (em cm)	1	3,5	5	8	10
Medida de perímetro (em cm)	4	14	20	32	40
Medida de área (em cm²)	1	12,25	25	64	100

Dados elaborados para fins didáticos.

b) $p = 4 \cdot \ell$
c) $A = \ell \cdot \ell = \ell^2$
d) Sim; não.
e) Resposta pessoal.

4. **a)**

Medida de tempo gasto para encher o reservatório

Número de torneiras	Medida de tempo (em min)
1	40
4	10
8	5
10	4

Dados elaborados para fins didáticos.

b) $t = \frac{40}{n}$
c) 25 torneiras.

5. **a)** Sim; resposta pessoal.
b) Não.
c) Sim; resposta pessoal.
d) Não.

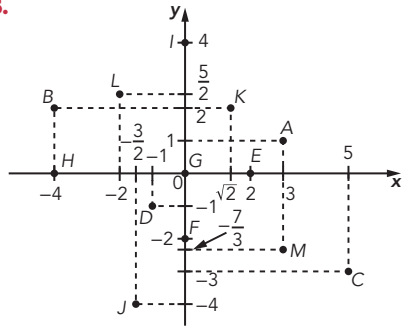
6. **a)** Sim.
b) Não.

7. Resposta pessoal.

8. **a)** R$ 1.800,00
b) R$ 180,00
c) 3 anos.
d) Resposta pessoal.

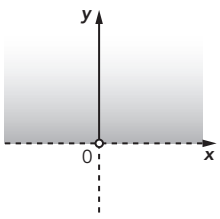
9. **a)** $D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{0, 1, 4\}$.
b) $D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.
c) $D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{0, 1, 2\}$.

10. 6 elementos.
11. $Im(f) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leqslant 0\}$
12. **a)** $\mathbb{R}$; resposta pessoal.
b) $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; resposta pessoal.
13. **a)** $\mathbb{R}$ **b)** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
14. **a)** Resposta pessoal. **b)** Resposta pessoal.
15.

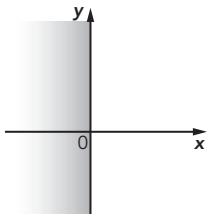


Banco de imagens/Arquivo da editora

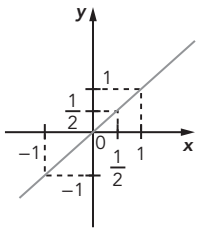
16. $A(4, 2)$; $B(-4, 6)$; $C(-5, -3)$; $D(4, -5)$; $E(0, 4)$; $F(-3, 0)$; $G(0, -6)$; $H(5, 0)$; $I(0, 0)$.
17. **a)** $x = 2$ e $y = -5$. **b)** $x = 1$ e $y = 4$. **c)** $x = 4$ e $y = -1$.
18. $m = -4$
19. $m = 3$
20. $m = +1$ ou $m = -1$.
21. **a)**



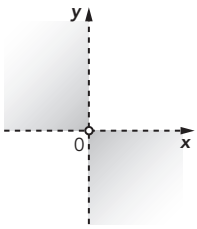
b)



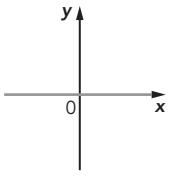
c)



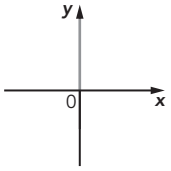
d)



e)

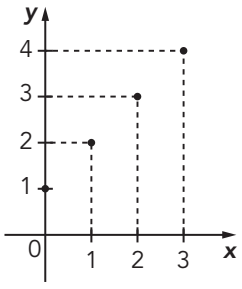


f)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

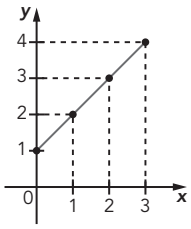
22. **a)** $a < 0$ e $b > 0$. **b)** 1º quadrante.
23. **a)** $A = \{0, 1, 2, 3\}$; $Im(f) = \{1, 2, 3, 4\}$.



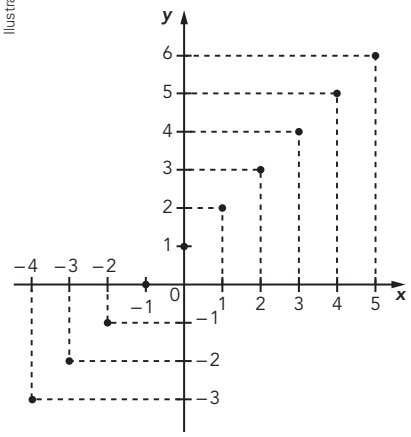
Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

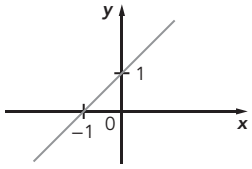
b) $A = [0, 3]$; $Im(f) = [1, 4]$.



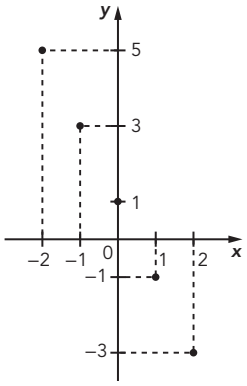
c) $A = \mathbb{Z}$; $Im(f) = \mathbb{Z}$.



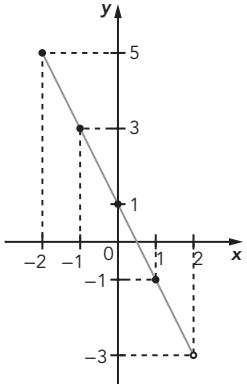
d) $A = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$.



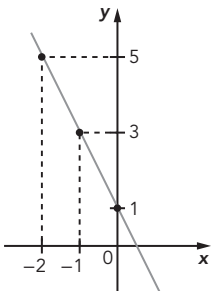
24. a)



b)



c)



Banco de imagens/Arquivo da editora

25. a) $a = -1$ e $b = 3$. **b)** $x = \frac{2}{3}$

26. a) 0 **b)** 2 **c)** −3 **d)** 0

27. A taxa média de variação nos 5 primeiros anos é o quádruplo da taxa média de variação nos 5 últimos anos.

28. a) −2,5 **b)** −3

29. Aproximadamente 680 mil domicílios, em média, por ano.

30. a) A taxa média de variação pode ajudar a perceber quais são os resultados que sofreram a maior variação ao longo dos 3 últimos anos.

b) Total de crianças e adolescentes de 9 a 17 anos (%) da zona rural que acessaram a internet: crescimento médio de 5 pontos percentuais ao ano; e total de crianças e adolescentes de 9 a 10 anos (%) que acessaram a internet: crescimento médio de 4,33 pontos percentuais ao ano.

Pense nisto (p. 71)

$D(f) = \mathbb{Z}$ e $D(f) = \mathbb{R}$; $x = 50$ em ambos os casos.

Pense nisto (p. 74)

Não.

Pense nisto (p. 74)

A inclinação do gráfico indica como a população cresce rapidamente ao longo do tempo. Entre 1700 e 1805, a inclinação da curva é menor do que a inclinação entre os anos de 1950 e 1987, por exemplo.

Experimente (p. 60)

Resposta pessoal.

Experimente (p. 69)

- O ponto se movimenta horizontalmente no plano.
- O ponto se movimenta verticalmente no plano.

Interligando (p. 77)

I. Falsa. É previsto que durante esse período a população mundial não cresça nem diminua, ou seja, tenha uma taxa de variação muito próxima de 0.

II. Falsa. Países como China já apresentam uma diminuição significativa na taxa média de crescimento.

III. Falsa. Taxas de crescimento negativas (menores que 0) indicam que a população mundial está diminuindo.

IV. Verdadeira.

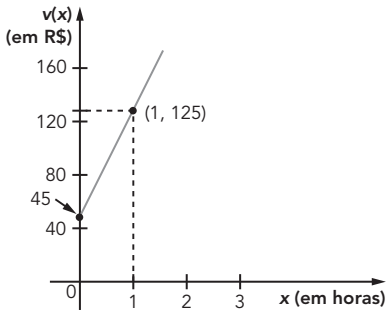
Capítulo 4

Atividades

1. a) R$ 245,00

b) Sim.

c) $v(x) = 45 + 80 \cdot x$



Banco de imagens/Arquivo da editora

d) Não, pois, para receber o triplo em uma única visita, o técnico deverá trabalhar o triplo mais $\frac{9}{8}$ de hora.

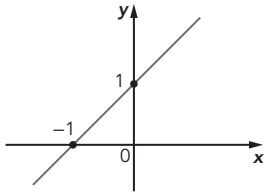
2. a) $p(t) = 18$; $p(t) = 2{,}5 \cdot t$

b) R$ 5,50

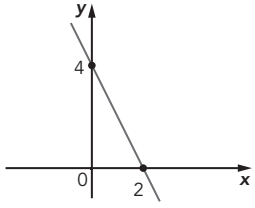
c) 7 h 12 min

d) O encontro das 2 retas representa o ponto em que $p(t) = q(t)$, ou seja, o tempo de uso em que os 2 planos apresentam o mesmo custo.

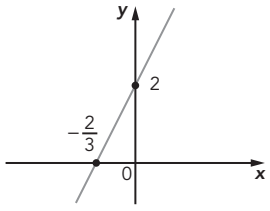
3. a)



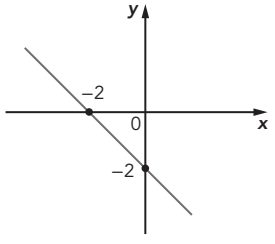
b)



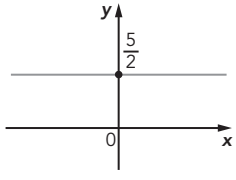
c)



d)



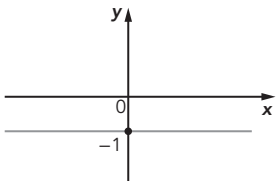
e)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Banco de imagens/ Arquivo da editora

f)



4. a) $y = -3x + 2$ **b)** Não.

5. a) $y = -3x$ **b)** $y = 3x + 4$ **c)** $y = \frac{11}{3}$

6. R$ 82,40

7. a) (1, 3) **c)** Não há intersecção entre elas.

b) (3, 0)

8. $g(8) = 7$

9. a) $p_n(t) = 30 + t$; $p_v(t) = 10 + 1{,}5t$.

b) Resposta pessoal. 70% da carga total.

c) 26 min 40 s

10. a)

Consumo de combustível

Combustível consumido (em L)	Medida de distância (em km)
0,25	2,75
0,5	5,5
2	22
5	55
10	110
20	220
30	330

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Os pontos tendem a estar alinhados, descrevendo o comportamento de uma função polinomial de 1º grau.

c) Resposta pessoal.

11. a)

Quantidade de pessoas que devem receber o auxílio da ONG

Mês	Quantidade de pessoas	Custo (em reais)
Janeiro	7	525
Fevereiro	15	1125
Março	20	1500
Abril	25	1875
Maio	30	2250
Junho	35	2625
Julho	40	3000
Agosto	45	3375

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Os pontos indicam uma tendência de estarem todos alinhados.

c) $c(p) = 75p$

12. a) $\frac{3}{10}$ **b)** 120 enfermeiros.

13. Paula deve receber R$ 3.000,00, e Roberta, R$ 2.400,00.

14. Sim; não.

15. a) Não. **b)** Sim.

16. a) Sim. **b)** 2,5 g/cm³ **c)** $m = 2{,}5 \cdot V$

17. a) R$ 9,75; R$ 19,50.

b) $y = 32{,}5 \cdot x$; sim.

c) O conjunto dos números reais não negativos.

d) 540 g

18. Os modelos **I**, **II** e **III** devem ser descartados.

19. a) $-\frac{7}{4}$ **c)** Resposta pessoal.

b) $S = \{-1\}$ **d)** $j(x) = 0{,}5x - 8{,}5$

20. a) $S = \{6\}$ **b)** $S = \{-1\}$

21. R$ 65,00

22. a) 12,5 kg/mês; 37,5 kg. **c)** 93,75 kg

b) 62,5 kg

23. Resposta pessoal.

24. a) 250 reais/ano **c)** $y = -250x + 4800$

b) R$ 3.300,00

25. a) Indica o custo fixo da empresa.

b) R$ 150,00

c) 20 L

26. a) Sim, 40 km.

b) Sim.

c) 30 km/h; corresponde à medida de velocidade média do veículo.

d) Os pontos tendem a estar alinhados.

e) $y = 30x + 40$

27. a) $a = 3$ e $b = -2$; crescente.

b) $a = 9$ e $b = 0$; crescente.

c) $a = -\frac{2}{3}$ e $b = \frac{5}{3}$; decrescente.

28. a) $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 3$.

b) $a = 1$ e $b = -1$.

29. a) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > -1 \\ y < 0, \text{ se } x < -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 2 \\ y < 0, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

30. a) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > -\frac{1}{4} \\ y < 0, \text{ se } x < -\frac{1}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < \frac{1}{3} \\ y < 0, \text{ se } x > \frac{1}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 0 \\ y < 0, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > 3 \\ y < 0, \text{ se } x < 3 \end{cases}$

31. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{4}\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

32. Os números inteiros positivos são 1, 2 e 3.

33. a) Banda **B**. **b)** Acima de 5 h.

34. Maio de 2034.

35. a) $-732{,}20 + 40 \cdot n$ **c)** 19 meses.

b) 14 meses.

36. a) $y_1 = 100 + 0{,}3 \cdot x$; $y_2 = 60 + 0{,}4 \cdot x$; $y_3 = 150$.

b) A partir de 400 km rodados.

c) A partir de 225 km rodados.

37. a) −1 **c)** −1 **e)** 1

b) −1 **d)** 1

38. a) −3 **b)** 1 **c)** −3

39. a) Plano controle **1**.

b) 7,5 GB

40. a) R$ 46,00

b) $p(x) = \begin{cases} 0{,}4x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 40 + 0{,}20(x - 100), \text{ se } x > 100 \end{cases}$

c) Item **a**: R$ 26,00.

Item **b**: $p(x) = \begin{cases} 0{,}4x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 0{,}2x, \text{ se } x > 100 \end{cases}$.

41. a) 2: R$ 33,60; 3: R$ 50,40; 4: R$ 61,60; 5: R$ 77,00.

b) $y = \begin{cases} 16{,}8x, \text{ se } x \leqslant 3 \\ 15{,}4x, \text{ se } x > 3 \end{cases}$

42. a) Para R$ 2.000,00: R$ 0,00; para R$ 4.000,00: R$ 237,23; para R$ 10.000,00: R$ 1.854,00.

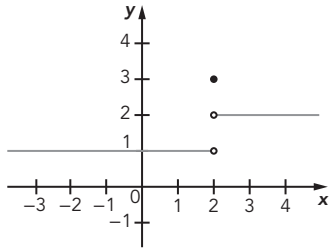
b) Não, porque o salário de Joice, com desconto de IR, é R$ 3.607,77, e o de Júlia, com o desconto de IR, é R$ 3.526,44. Portanto, ganhando R$ 3.800,00, Joice tem um salário líquido maior do que se ganhasse R$ 100,00 a menos, mesmo passando para uma faixa mais alta de imposto de renda.

43. a) Para 30 m³: R$ 232,00; para 60 m³: R$ 637,00.

b) 52 m³

c) $\begin{cases} 5,2x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 12,8x - 152, \text{ se } 21 \leqslant x \leqslant 50 \\ 14,9x - 257, \text{ se } x > 50 \end{cases}$

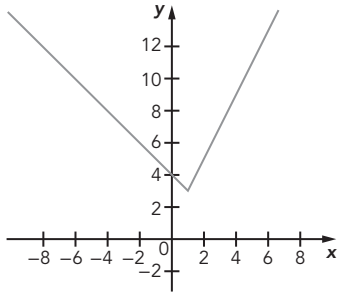
44. a)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$Im(f) = \{1, 2, 3\}$

b)



$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 3\}$

45. a) $f(x) = \begin{cases} -2, \text{ se } x < -1 \\ 3, \text{ se } x \geqslant -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ 3x, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$

46. Plano **A**: $g(x) = 120$;

plano **B**: $f(x) = \begin{cases} 90, \text{ se } x < 240 \\ \frac{3}{4}x - 90, \text{ se } x \geqslant 240 \end{cases}$.

47. a) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -2x + 4, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

b) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 4\right\}$

c) $k \geqslant 2$

48. a) $p(t) = \begin{cases} 24, \text{ se } 0 < t \leqslant 4 \\ 4t + 8, \text{ se } t > 4 \end{cases}$

b) A partir de 9 h 15 min.

Pense nisto (p. 80)

A lei da função polinomial de 1º grau $y = ax + b$ é uma expressão algébrica que relaciona 2 variáveis x e y, de modo que para cada valor de x corresponde um único valor de y. Já a equação de 1º grau $ax + b = 0$, com a e b números reais conhecidos, é uma sentença expressa por uma igualdade na qual se deve determinar o valor da incógnita x de modo que a igualdade seja satisfeita.

Pense nisto (p. 81)

Sim. Se o sistema não tiver solução, as 2 retas não se intersectam, isto é, são paralelas no plano.

Pense nisto (p. 82)

(0, 0)

Pense nisto (p. 86)

Sim.

Pense nisto (p. 93)

Não, pois, para um único valor de x, teríamos infinitos valores correspondentes de y.

Pense nisto (p. 98)

f é positiva para qualquer valor real de x, e g é negativa para qualquer valor real de x.

Pense nisto (p. 100)

$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

Interligando (p. 92)

1. 120 km/h

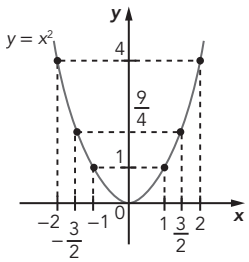
Experimente (p. 96)

- A inclinação da reta que representa a função g varia conforme o valor de a muda. Como o valor de a é fixo em f ($a = 2$), a inclinação da reta que representa f não varia.
- O ponto de intersecção com o eixo Oy tem coordenadas (0, 5), não variando em nenhuma das retas.
- A inclinação das retas obtidas é a mesma e igual a 2.
- O ponto de intersecção do gráfico da função h com o eixo Oy varia conforme o parâmetro b muda. No caso do gráfico de f, como não há variação do parâmetro b, não há variação da intersecção.
- À inclinação da reta.
- Ponto em que a intersecta o eixo Oy.

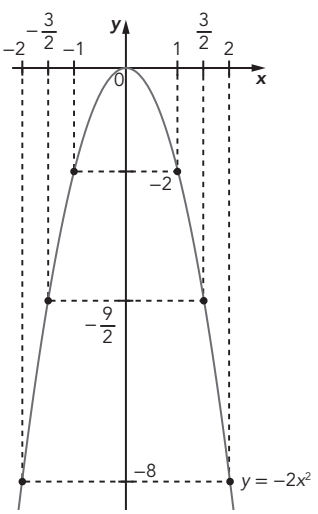
Capítulo 5

Atividades

1. a)

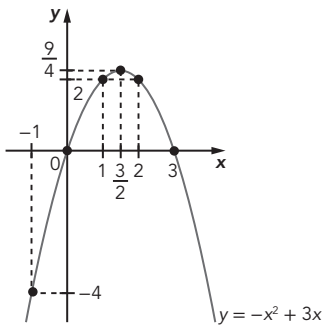


b)

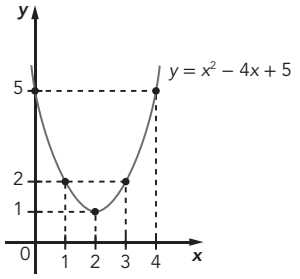


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c)



d)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. a) V **b)** V **c)** V **d)** F

3. a) $x = 0$ ou $x = 4$.

b) $x = -3$ ou $x = 5$.

c) $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{1}{3}$.

d) $x = 3$

e) $x = 0$

f) Não há zero real.

g) $x = -3$ ou $x = 5$.

h) $x = \sqrt{3}$ ou $x = 2\sqrt{3}$.

4. Resposta pessoal.

5. 100 cm

6. 10 professores.

7. a) R$ 2,00

b) 90 copos vendidos no primeiro mês.

c) 72 copos vendidos no segundo mês.

8. a) Representa a arrecadação (receita) em reais que o vendedor obtém ao vender n cocos a um preço p cada um.

b) Representa que a arrecadação ainda será de 280 reais pois, ao diminuir o preço original em 0,5 real, o número de cocos vendidos aumentará em 10 unidades.

c) $n = 70$ e $p = 4$.

9. Para $m = 1$, há 1 zero; para $m > 1$, não há nenhum zero; e, para $m < 1$, há 2 zeros.

10. a) Soma: $\frac{1}{3}$; produto: $-\frac{5}{3}$.

b) Soma: 6; produto: 5.

c) Soma: 0; produto: $-\frac{7}{2}$.

d) Soma: 3; produto: −2.

11. a) 3 **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** 2 **d)** 6

12. −3 e −8; 24.

13. 8

14. a) $S > 0$; $P > 0$. **b)** $S < 0$; $P > 0$. **c)** $S > 0$; $P < 0$.

15. a) $f(x) = (x - 5) \cdot (x - 2)$

b) $f(x) = -2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 5) = -2x \cdot (x - 5)$

c) $f(x) = -1 \cdot (x + 5) \cdot (x + 5) = -(x + 5)^2$

16. a) $V(3, -5)$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -5\}$.

b) $V\left(-\frac{1}{4}, \frac{25}{8}\right)$; $Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{25}{8}\right\}$.

c) $V(15, -450)$; $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -450\}$.

d) $V(0, -5)$; $Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -5\}$.

e) $V\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$; $Im(j) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{9}{4}\right\}$.

17. $b = 30$ e $c = -25$.

18. a) 36 semanas.

b) 18 semanas; 6 480 *downloads*.

19. a) $-0{,}2 \leqslant k \leqslant -0{,}12$

b) Resposta pessoal.

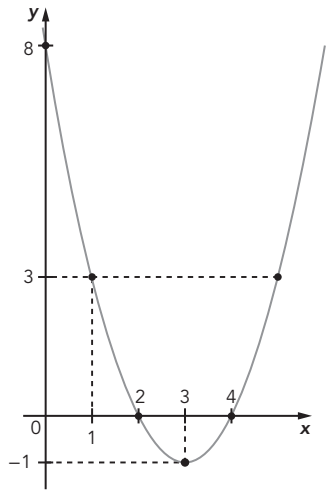
20. a) $A = -3x^2 + 150x$

b) A variação na medida de área seria maior para o segundo caso.

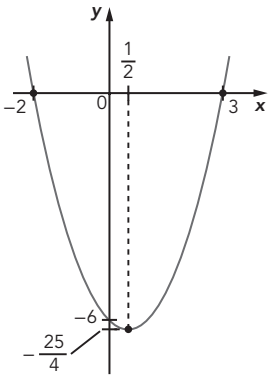
21. O de maior medida de área é um quadrado; 25 cm².

22. a) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$

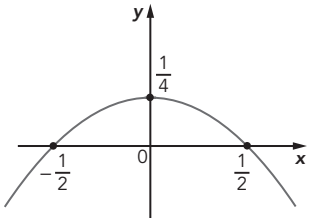
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



b) $Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{25}{4}\right\}$



c) $Im(h) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{1}{4}\right\}$



23. III

24. $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

25. Resposta pessoal.

26. a) $f(x) = -\frac{4}{13}x + \frac{4\,000}{13}$

b) É possível notar pelo gráfico que a trajetória do bondinho passa por dentro do morro do Pão de Açúcar antes de atingir o pico dele. Uma maneira de resolver seria considerar que o bondinho não sai rente ao chão dos picos, mas, sim, sustentado por cabos que ficam alguns metros acima do solo.

27. a) $y = -x^2 + 2x + 8$

b) $y = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$

28. a) 1 cm

b) $y = 2{,}5x$

c) 5º dia; 12,5 cm.

d) 2,5 cm/dia

29. a) $y < 0$ para $x < 1$ ou $x > 5$.
$y > 0$ para $1 < x < 5$.

b) $y > 0$ para $\forall\, x \neq 0$.
$\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

c) $y < 0$ para $-2 < x < 0$.
$y > 0$ para $x < -2$ ou $x > 0$.

d) $y < 0$ para qualquer x real.
$\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $y > 0$.

30. a) $x < -\frac{5}{4}$ ou $x > 1 \Rightarrow y > 0$
$-\frac{5}{4} < x < 1 \Rightarrow y < 0$

b) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \Rightarrow y > 0$
$x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2} \Rightarrow y < 0$

c) $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$
$\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$

d) $x \neq 0 \Rightarrow y > 0$
$\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$

31. **I.** V **II.** I **III.** V **IV.** V **V.** F **VI.** F **VII.** V

32. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Sim; com o vértice da parábola localizado no ponto (0, 0); concavidade voltada para cima.

d) $a = 0{,}1$

e) A função pode ser usada para descrever o fenômeno estudado por Marcela.

33. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 5\}$

b) $S = \mathbb{R}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 5\}$

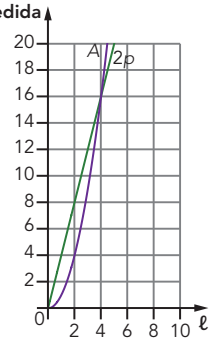
e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{3}\right\}$

34. a) R$ 400.000,00

b) Como $x > 0$, devemos ter $0 < x < 20$ ou $x > 100$.

c) $40 < x < 80$

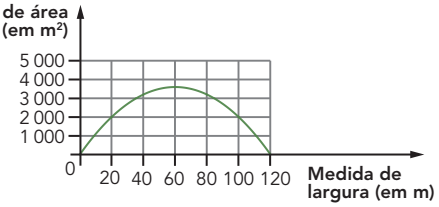
35. a)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Sim; sim.

36.



37. a) $h = \frac{\sqrt{3}\ell}{2}$; $A = \frac{\sqrt{3}\ell^2}{4}$.

b) Diretamente proporcional entre h e ℓ e diretamente proporcional ao quadrado entre A e ℓ.

38. a) Ritmo médio e medida de velocidade média: inversamente proporcionais; medida de velocidade média e medida de intervalo de tempo para percorrer 6 km: inversamente proporcionais; medida de intervalo de tempo para percorrer 6 km e ritmo médio: diretamente proporcionais.

b) 20 km/h; menor.

Pense nisto (p. 108)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 109)

Porque, se $a = 0$, a função é escrita como $f(x) = bx + c$, que não é de 2º grau.

Pense nisto (p. 112)

Duas soluções reais ou nenhuma.

Pense nisto (p. 123)

A abscissa do vértice é a média aritmética das raízes da equação ou ainda podemos dizer que a abscissa do vértice é o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são os dois zeros reais.

Pense nisto (p. 124)

O zero da função de multiplicidade 2 coincide com a abscissa do vértice.

Interligando (p. 116)

1. Domínio: $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 16\}$.

2. $N(x) = \frac{x}{16} \cdot 10$

3. A função obtida é uma função afim, pois pode ser descrita pela lei $y = ax + b$, em que $a = \frac{10}{16} = 0{,}625$ e $b = 0$.

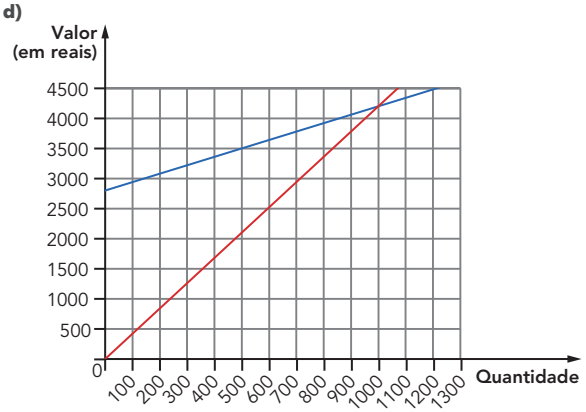
Educação financeira (p. 121)

a) Resposta pessoal.

b) $C(x) = 2800 + 1{,}4 \cdot x$

c) $R(x) = 4{,}20 \cdot x$

d)



Banco de imagens/Arquivo da editora

e) Não; sim.

f) $x = 1000$

g) $L(x) = 2{,}8x - 2800$. O lucro é negativo para valores de $x < 1000$, nulo para $x = 1000$ e positivo para $x > 1000$.

h) $C(n) = -21n + 4200$

i) $L(n) = -1{,}5n^2 + 58n$

j) 19 aumentos; R$ 560,50.

k) R$ 6,10; 715 brigadeiros.

Experimente (p. 132)

a) O comportamento dos pontos se parece mais com uma reta do que com uma parábola, indicando que a relação se dá por uma função afim, e não quadrática.

b) Os valores apresentados são, aproximadamente, $a = 25{,}17$ e $b = -0{,}14$.

c) 12,435 m/s; sim.

d) Os dados parecem formar uma parábola, indicando o comportamento de uma função quadrática.

e) Não.

f) A curva representando uma função quadrática é a mais apropriada, pois a relação entre a compressão da mola (representada no gráfico por x) e a energia cinética medida no experimento (representada no gráfico por y) é representada graficamente por uma parábola.

Viralize! (p. 138)

1. O grupo com o melhor aumento no desempenho foram os estudantes pretos, pardos e indígenas oriundos de escolas públicas matriculados nos cursos menos concorridos. Os grupos que apresentaram menor variação na categoria de cursos menos concorridos foram os estudantes oriundos de escolas particulares.

2. Respostas pessoais.

Para fundamentar saberes (p. 140)

1. **a)** 4 L **b)** 1000 km

2. Alternativa **c**.

3. Alternativa **b**.

4. **a)** $-8x^2 + 72x$ **b)** 4,5 cm; 162 cm².

5. Alternativa **a**.

6. Alternativa **d**.

UNIDADE 3

Abertura de Unidade (p. 142)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

Capítulo 6

Atividades

1. **a)** F **b)** V **c)** F **d)** V **e)** F **f)** F

2. **a)** R_2 **b)** 9 cm e 15 cm.

3. Sim, pois eles têm dois pares de ângulos congruentes, que medem 48° e 90°. O terceiro ângulo, portanto, mede 42° nos dois triângulos, pois 180° − 48° − 90° = 42°.

4. $A'B' = 2{,}4$ cm; $B'C' = 6{,}6$ cm; $C'D' = 4{,}4$ cm; $D'A' = 3{,}6$ cm.

5. Não, pois, se os ângulos da base medem 40°, o outro ângulo mede 100° (pois 40° + 40° + 100° = 180°). No entanto, pode também ocorrer o caso de os ângulos da base medirem 70° e o outro 40° (pois 70° + 70° + 40° = 180°). Se isso ocorrer, os triângulos também não serão semelhantes.

6. $AB = 40$ m, $BC = 80$ m, $CD = 100$ m e $AD = 54$ m.

7. $\overline{AB} \cong \overline{XY}$, $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$ e $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$; e $\hat{A} \cong \hat{X}$, $\hat{B} \cong \hat{Y}$ e $\hat{C} \cong \hat{Z}$.

8. Resposta pessoal.

9. Resposta pessoal. Pelo critério LLL, os triângulos são congruentes.

10. Critério LLL; $x = 30°$.

11. Resposta pessoal.

12. Resposta pessoal.

13. 28 m

14. **a)** Sim, pois $\overline{AD} \cong \overline{CD}$ (lados do quadrado $ABCD$), os ângulos $A\hat{D}R$ e $R\hat{D}C$ medem 45° (triângulos retângulos e isósceles) e o lado $\overline{DR}$ é comum. Logo, pelo critério LAL, os triângulos ADR e DCR são congruentes.

b) Sim, pois os pontos M e N são pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, então $\overline{AM} \cong \overline{CN}$. Como $\overline{AM} \cong \overline{ST}$ (paralelogramo $AMTS$), então $\overline{CN} \cong \overline{ST}$. Além disso, os ângulos agudos dos triângulos RST e PNC medem 45° (triângulos retângulos e isósceles). Logo, pelo critério ALA, os triângulos RST e PNC são congruentes.

c) $\frac{1}{3}$

d) 2

15. Não, pois os triângulos têm o lado $\overline{AB}$ e o ângulo de medida 30° comuns. Além disso, $AD = AC = 12$ cm e, como o ponto C pertence ao lado $\overline{BD}$, podemos dizer que $BC < BD$ e, então, os triângulos ABC e ABD não são congruentes.

16. **a)** $x = \frac{10}{3}$; $y = \frac{25}{3}$. **b)** $x = 6$; $y = 2$. **c)** $x = \frac{10}{3}$; $y = \frac{18}{5}$.

17. **I**: 80 m; **II**: 60 m; **III**: 40 m.

18. 1 e 8 (caso LAL), 2 e 5 (caso LLL ou AA), 3 e 6 (caso LLL) e 4 e 7 (caso AA).

19. **a)** $x = 2$; $y = 3$. **b)** $x = 8$; $y = 10$.

20. **a)** 3,75 m

b) Aproximadamente 1,34 m.

21. **a)** 67,5 m

b) Aproximadamente 6,22 metros.

22. **a)** $x = 12$ m **b)** $x = 40$ m

23. **a)** $AB = 6$ **b)** $AB = \frac{4}{5}$

24. $\frac{2}{3}$

25. Resposta pessoal.

26. **a)** 9,5 cm

b) Resposta pessoal.

27. **a)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{16}$

b) $\frac{1}{4}$ **d)** 96 cm²

28. **a)** $h_2 = 6$ cm

b) 7,5 cm² e 30 cm².

c) Resposta pessoal.

29. 16

30. 12 cm

31. $x = \frac{8}{3}; y = \frac{20}{3}$.

32. **a)** $x = \frac{\sqrt{5}}{2}; y = \frac{5}{2}$.

b) $x = \frac{5}{2}; y = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

33. 2,4 m e 1,2 m.

34. Aproximadamente 50,16 m.

35. **a)** $3\sqrt{3}$ cm **c)** $8\sqrt{2}$ cm

b) $2\sqrt{2}$ cm **d)** 2 cm

36. Medida dos catetos: $2\sqrt{6}$ cm e $2\sqrt{10}$ cm; medida de altura relativa à hipotenusa: $\sqrt{15}$ cm.

37. 3 m

38. 24 m

39. 2,5 km

40. Medida da base: 1,8 m; medida da altura: 2,4 m.

41. $9\sqrt{2}$ cm

42. 36 m

43. 2,1 m

44. **a)** Aproximadamente 1280 m.

b) Aproximadamente 707 m.

45. **a)** 500 m

b) 1000 m

c) Resposta pessoal. O referencial utilizado para a pessoa 1 (rosa dos ventos) é fixo, enquanto o referencial utilizado para a pessoa 2 muda conforme a posição onde ela se encontra.

46. Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 145)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 152)

Se 2 triângulos são semelhantes e a razão de semelhança é 1, então os lados são respectivamente congruentes e, consequentemente, os triângulos são congruentes.

Pense nisto (p. 154)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 157)

Se os ângulos congruentes não forem os compreendidos entre os lados correspondentes proporcionais, não podemos garantir que os triângulos sejam semelhantes.

Pense nisto (p. 160)

Não têm uma unidade de medida.

Pense nisto (p. 161)

8

Pense nisto (p. 164)

Utilizando a relação métrica no triângulo retângulo: $b^2 = a \cdot m \Rightarrow b^2 = (2 + 3) \cdot 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow b^2 = 15 \Rightarrow b = \sqrt{15}$. Outra maneira também seria aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo ABC: $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow b^2 + 10 = 25 \Rightarrow b^2 = 15$; ou seja, $b = \sqrt{15}$ cm.

Experimente (p. 167)

Resposta pessoal.

Interligando (p. 170)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

Capítulo 7

Atividades

1. **a)** $\text{sen } \hat{A} = \frac{15}{17}; \cos \hat{A} = \frac{8}{17}; \tan \hat{A} = \frac{15}{8}$.

b) $\text{sen } \hat{C} = \frac{8}{17}; \cos \hat{C} = \frac{15}{17}; \tan \hat{C} = \frac{8}{15}$.

2. **a)** $\frac{2}{3}$ **b)** 9 m

3. Resposta pessoal.

4. **a)** $\text{sen } 30° = 0{,}500$

b) $\cos 30° = 0{,}866$

c) $\tan 30° = 0{,}577$

• Respostas pessoais.

5. **a)** 240 m **b)** $\alpha = 41°$

6. Aproximadamente 100 m.

7. Aproximadamente 38,4 m.

8. **a)** Aproximadamente 5,57 m.

b) A rampa não é acessível.

9. Respostas pessoais.

10. **a)** Na trilha **2**. **b)** 377 m

11. Aproximadamente 8,77 km.

12. Aproximadamente 1159 m.

13. O seno de um ângulo agudo é definido, no triângulo retângulo, pela razão entre a medida de comprimento do cateto oposto a esse ângulo e a medida de comprimento da hipotenusa. Como a hipotenusa corresponde ao lado de maior medida num triângulo retângulo, essa razão está necessariamente entre 0 e 1. Para o cosseno vale a mesma ideia.

A tangente de um ângulo agudo é a razão entre a medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo e a medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo. Pode ocorrer de o cateto oposto medir mais ou menos (ou até tenha a mesma medida) do que o adjacente, de modo que a tangente possa assumir qualquer valor real positivo.

14. **a)** Aproximadamente 63°.

b) 45°.

15. **a)** Resposta pessoal.

b) 15 andares.

16. **a)** Não.

b) Aproximadamente 37° e 53°.

17. **a)** $x = 8$ **c)** $x = 3\sqrt{2}$

b) $x = 6\sqrt{2}$ **d)** $x = 4$

18. $3\sqrt{3}$ m; 3 m.

19. $4\sqrt{3}$ m

20. $5(\sqrt{3} + 3)$ cm

21. $(8\sqrt{3} + 30)$ cm

22. **a)** 20 m **b)** $20\sqrt{3}$ m

23. Aproximadamente 3,4 km.

24. Não, pois uma rampa com declividade de 30% apresenta ângulo de inclinação α, tal que $\tan \alpha = 0{,}3$. Consultando a tabela de razões trigonométricas, obtemos que α mede aproximadamente 17°.

25. **a)** Sim; 16 cm.

b) Não. Resposta pessoal.

26. 4,5 m

27. **a)** $x = 6\sqrt{2}$ cm; $y = 6$ cm.

b) $x = 12$ cm; $y = 10$ cm.

28. **a)** $6(2 + \sqrt{3})$ cm **b)** $9\sqrt{3}$ cm²

29. $H = h \cdot \left(\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \beta}\right)$ u.c.

30. Resposta pessoal.

31. Aproximadamente 914,39 cm.

Pense nisto (p. 173)

$\frac{3}{5} = 60\%$

Pense nisto (p. 174)

45°

Pense nisto (p. 176)

Como 1° = 60' (60 minutos) e 1' = 60'' (60 segundos), temos $0{,}2° = 0{,}2 \cdot 60' = 12'$.

Pense nisto (p. 180)

É o cateto que está oposto ao ângulo de medida 30°, ou o cateto adjacente ao ângulo de medida 60°.

Experimente (p. 179)

Resposta pessoal.

Interligando (p. 184)

1. Resposta pessoal.

2. Respostas pessoais.

3. 78,94 cm, portanto está de acordo com o parâmetro estabelecido para acessibilidade.

Capítulo 8

Atividades

1. **a)** 78 cm² **d)** 36 m²

b) 75 m² **e)** $48\sqrt{3}$ dm²

c) 192 dm² **f)** 25 mm²

2. 3600 m²

3. 48 m²

4. 10 800 azulejos.

5. 40 m²

6. 8 dm e 18 dm.

7. **a)** $A_Q = 576$ m²; $A_R = 432$ m².

b) $\frac{12}{13}$

8. **a)** **I**, **II** e **III**.

b) Lucas; 2800 m².

9. R$ 206.400,00

10. 88,4 m²

11. 4 m²

12. **a)** $A_I = 400$ m², $A_{II} = 2250$ m² e $A_{III} = 2550$ m².

b) Aproximadamente 51%.

c) R$ 2.167.500,00

13. Resposta pessoal.

14. **a)** $10\,000 \text{ m}^2 : (2 \cdot 2) \text{ m}^2 = 2500$; $10\,000 \text{ m}^2 : (3 \cdot 2) \text{ m}^2 \simeq 1667$.

b) 400 mudas/hectare

c) $a = b = 1$ m

15. **a)** 90 cm² **c)** $30\sqrt{3}$ cm²

b) 40 cm²

16. 72 m²

17. **a)** $16\sqrt{3}$ m² **c)** $12\sqrt{2}$ cm²

b) $32\sqrt{2}$ m² **d)** $20\sqrt{2}$ m²

18. **a)** 48 cm² **d)** $36\sqrt{5}$ dm²
b) $16\sqrt{6}$ m² **e)** 63 m²
c) $9\sqrt{15}$ m²
19. 144 cm²
20. 18 cm²
21. **a)** Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.
22. 12,5%
23. 32 km²
24. $2 \cdot (1 + \sqrt{3})$ cm²
25. $A_I = 5$ u.a.; $A_{II} = 9$ u.a.; $A_{III} = 8$ u.a.
26. Resposta pessoal.
27. **a)** Aproximadamente 6,93 m.
b) Aproximadamente 180 mudas por hectare.
c) Não. Esse produto pode ser a medida de área de um paralelogramo composto de dois desses triângulos de lado medindo ℓ.
28. **a)** 96 dm² **b)** $6\sqrt{2}$ dm²
29. **a)** $24\sqrt{7}$ cm² **b)** 150 m²
30. 12150 km²
31. Resposta pessoal.
32. **a)** 204 m² **c)** 348 m²
b) 75 m² **d)** 60 m²
33. R$ 324.000,00
34. 4,5 dm e 7,5 dm.
35. **a)** 80 m **b)** $3200\sqrt{3}$ m²
36. **a)** 4,08 m **b)** 1,26 m²
37. Resposta pessoal.
38. Resposta pessoal.
39. **a)** $\sqrt{3}$ cm **c)** $24\sqrt{3}$ cm²
b) 2,5 cm **d)** $162\sqrt{3}$ cm²
40. $96\sqrt{3}$ cm²
41. $0{,}96\sqrt{3}$ m²
42. **a)** $18\sqrt{3}$ cm² **b)** $10\sqrt{3}$ cm
43. 11,25 cm²
44. $\frac{9}{16}$
45. **a)** 121π dm² **c)** 256π cm²
b) 144π m²
46. **a)** 12π m² **b)** 8π m²
47. **a)** 52π m² **b)** 81π m²
48. Aproximadamente 0,7824 m².
49. **a)** 4π dm² **b)** $4(\pi - 2)$ dm²
50. **a)** 6 assentos. **b)** 2815 cm²
51. 30184 pessoas.
52. 49π cm²; 81π cm²; 225π cm².
53. 156%
54. 200 cm²
55. **a)** $\frac{4\pi}{3}$ m² **c)** 18π m²
b) 27π dm² **d)** 9π cm²
56. $\frac{4(5\pi - 3)}{3}$ cm²
57. **a)** 3π m² **c)** 25π m²
b) $9(\pi - 2)$ m²
58. R$ 1.320,00
59. $\left(4\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$ cm²
60. 231π cm²

Pense nisto (p. 196)
Sim; sim.

Pense nisto (p. 201)
Sim.

Pense nisto (p. 202)
Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 202)
Sim.

Pense nisto (p. 209)
Sim.

Pense nisto (p. 215)
Resposta pessoal.

Interligando (p. 194)
1. Sim; resposta pessoal.
2. O quadrado *CDEF* é a unidade-padrão para a medida de área do mapa. Utilizando essa medida de área, teremos uma estimativa para medida de área da região poligonal e, desse modo, conseguimos estimar a medida de área real da região.
3. Se houver informação da medida de distância real entre 2 pontos do mapa, é possível. Resposta pessoal.

Viralize (p. 217)
1. Efeito estufa é um fenômeno natural que impede a perda de calor e mantém o planeta Terra aquecido, possibilitando inclusive a manutenção da vida. Contudo, devido às ações humanas, está ocorrendo o aumento da concentração de gases na atmosfera, levando ao aumento da medida de temperatura média global. Os gases conhecidos como gases de efeito estufa, regulados pelo Protocolo de Quioto, são: dióxido de carbono (CO_2), metano (CH_4) e óxido nitroso (N_2O), hexafluoreto de enxofre (SF_6) e duas famílias de gases, hidrofluorcarbono (HFC) e perfluorcarbono (PFC).
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.

Para fundamentar saberes (p. 218)
1. Alternativa **e**.
2. Alternativa **e**.
3. Alternativa **d**.
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **a**.
6. Alternativa **c**.
7. Alternativa **c**.

UNIDADE 4

Abertura de Unidade (p. 220)
1. Resposta pessoal.
2. A altura é a medida da distância entre o pico e qualquer ponto abaixo dele, seja sua base, uma cidade encravada na montanha ou o próprio mar.

Capítulo 9

Atividades
1. **a)** $\frac{\pi}{6}$ rad **c)** $\frac{2\pi}{3}$ rad **e)** $\frac{3\pi}{2}$ rad
b) $\frac{\pi}{12}$ rad **d)** $\frac{7\pi}{6}$ rad **f)** $\frac{5\pi}{3}$ rad
2. **a)** 60°
b) 90°
c) 45°
d) 36°
e) Aproximadamente 28,65°.
f) 225°
3. Aproximadamente 60 m.
4. Aproximadamente 16,75 cm.
5. Nenhum.
6. Aproximadamente 30 voltas.
7. Aproximadamente 3,927 cm.
8. 77° 30'
9. **a)** $\frac{\pi}{3}$ rad **b)** 2π cm
10. Aproximadamente 125 m.
11. Resposta pessoal.
12. Aproximadamente 25,13 cm.
13. Aproximadamente 71,5 cm.
14. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{4}$.
15. $A: x = 0$; $B: x = \frac{\pi}{2}$; $C: x = \pi$; $D: x = \frac{3\pi}{2}$.
16. **a)** A: 0; B: $\frac{\pi}{3}$; C: $\frac{2\pi}{3}$; D: π; E: $\frac{4\pi}{3}$; F: $\frac{5\pi}{3}$.
b) Medida de perímetro: 6 u.c.; medida de área: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ u.a.
17. A: $\frac{2\pi}{9}$; C: $\frac{11\pi}{9}$; D: $\frac{16\pi}{9}$.
18. 2
19. **a)** 0 **e)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **f)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **g)** 0
d) $\frac{1}{2}$ **h)** $-\frac{1}{2}$
20. **a)** sen 75° < sen 85°
b) sen 100° > sen 170°
c) sen 260° < sen 250°
d) sen 300° > sen 290°
e) sen 278° = sen 262°
21. **a)** 0,76604 **c)** −0,64279
b) −0,76604 **d)** 0,95106
22. **a)** $a > 0$ **b)** $-a$
23. **a)** $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
b) $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$
c) $S = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
d) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
24. A calculadora estava configurada em RAD e não em DEG.
25. **a)** 2 **b)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
26. **a)** 0 **d)** 1
b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{1}{2}$
27. **a)** cos 65° > cos 85°
b) cos 91° < cos 89°
c) cos 50° < cos 340°
d) cos 190° = cos 170°
28. **a)** F **b)** V **c)** F **d)** F
29. Medida de perímetro: $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ u.c.; medida de área: $\frac{\sqrt{3}}{8}$ u.a.
30. Resposta pessoal.
31. **a)** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
b) $S = \{0\}$
c) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$
d) $S = \varnothing$
e) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
32. Resposta pessoal.

33. $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

34. $-\frac{4}{5}$

35. Não.

36. $m = 0$ ou $m = \frac{8}{5}$.

37. Sim. Sabemos que sen 20° = cos 70°, pois 20° e 70° são ângulos complementares. Logo, $\text{sen}^2\,20° + \text{sen}^2\,70° = \cos^2 70° + \text{sen}^2\,70° = 1$, o que garante que a afirmação é verdadeira.

38. $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

39. **a)** 0 **b)** $\sqrt{3}$ **c)** ∄ **d)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

40. $4 - 2\sqrt{3}$

41. **a)** V **b)** F **c)** V **d)** F

42. Resposta pessoal.

43. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

44. $-2\sqrt{6}$

45. $-\frac{\sqrt{17}}{17}$

46. $\text{sen } 58° = \frac{8\sqrt{89}}{89}$; $\tan 302° = -\frac{8}{5}$.

47. $A = 20$

Pense nisto (p. 223)

Não; sim.

Pense nisto (p. 225)

A medida de comprimento do arco é igual à medida angular desse arco em radianos.

Pense nisto (p. 229)

Porque são retângulos, têm um lado comum e hipotenusas cujas medidas são iguais à medida do raio da circunferência trigonométrica.

Pense nisto (p. 231)

$P'(0, \text{sen } \alpha)$.

Pense nisto (p. 234)

$P'(\cos \alpha, 0)$.

Pense nisto (p. 237)

Sim. Não.

Pense nisto (p. 239)

Não.

Pense nisto (p. 242)

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, o valor de $\cos \alpha = 0$. Desse modo, $\tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{0}$, o que não é possível.

Pense nisto (p. 242)

Se uma razão $\frac{a}{b} = 2$, o que se pode concluir é que $a = 2b$ e, não necessariamente, $a = 2$ e $b = 1$.

Interligando (p. 243)

a) Resposta pessoal.

b) n deve ser um divisor de π rad, ou seja, de 180°.

c) Passou a ter a mesma medida de cada quadradinho da malha, isto é: $\frac{h}{n} = \frac{h}{6}$ u.c.

d) $\frac{\pi}{6}\left(r + \frac{h}{2}\right)$ u.c.

Capítulo 10

Atividades

1. $4\sqrt{6}$ cm

2. $AB \simeq 6{,}57$ cm; $BC \simeq 4{,}03$ cm.

3. Aproximadamente 407 m.

4. Resposta pessoal.

5. **a)** Aproximadamente 1811 m. **b)** Aproximadamente 1171 m.

6. Resposta pessoal.

7. $\frac{\sqrt{15}}{8}$

8. 15 cm

9. **a)** Aproximadamente 743 m. **b)** Aproximadamente 887 m. **c)** 498 m

10. $\sqrt{13}$ cm

11. 2,8 km

12. Resposta pessoal.

13. Aproximadamente 191,6 m.

14. 36 min

15. Resposta pessoal.

16. Resposta pessoal.

17. $-\frac{24}{7}$

18. 7 cm

19. Obtusângulo.

20. $\sqrt{3}$ km

21. $x = 1$; $y = 60°$. O triângulo ABC é retângulo.

22. Sim, é possível, e o valor de x é $4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Interligando (p. 248)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Respostas pessoais.

Viralize! (p. 256)

1. **a)** Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

d) Não.

e) Para uma melhor percepção de profundidade, o cérebro precisa de mais imagens com perspectivas diferentes para poder estimar.

2. Resposta pessoal.

Para fundamentar saberes (p. 258)

1. Alternativa **b**.

2. Alternativa **a**.

3. Alternativa **c**.

4. Alternativa **c**.

5. Alternativa **b**.

6. Alternativa **c**.

7. Alternativa **b**.

8. Alternativa **e**.

9. **a)** $CD = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, $\text{med}(A\hat{B}D) = 60°$, $\text{med}(C\hat{B}D) = 120°$.

b) $d^2 + 6\,384d - 204\,544 = 0$

UNIDADE 5

Abertura de Unidade (p. 260)

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

Capítulo 11

Atividades

1. **a)** Intenção de voto para prefeito. Qualitativa. As respostas possíveis dessa variável são: votar no candidato **A**, votar no candidato **B**, indeciso e branco ou nulo.

b) 1764 835 eleitores registrados. 2 650 eleitores entrevistados.

c)

Tabela de frequência

Intenção de voto	Frequência absoluta
Candidato **A**	1715
Candidato **B**	691
Indeciso	141
Votar em branco/Anular	103
Total	**2650**

Dados elaborados para fins didáticos.

2.

Tabela de frequência

Frequência semanal	Frequência absoluta (F_a)	Frequência relativa (F_r)
1	2	0,08
2	6	0,24
3	8	0,32
4	5	0,20
5	3	0,12
6	1	0,04
Total	**25**	**1,00**

Dados elaborados para fins didáticos.

3.

Tabela de frequência

Idade	Frequência absoluta (F_a)	Frequência relativa (F_r)
18 ⊢ 25	5	0,20 ou 20%
25 ⊢ 32	8	0,32 ou 32%
32 ⊢ 39	7	0,28 ou 28%
39 ⊢ 46	3	0,12 ou 12%
46 ⊢ 53	2	0,08 ou 8%
Total	**25**	**1,00 ou 100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

4. Os dados da amostra confirmam a expectativa.

5. a) Todos os estudantes regularmente matriculados nesse curso pré-vestibular.

b) População: 2475 estudantes. Amostra: 50 estudantes.

c) **I**, **II**, **V** e **VII**.

d) Respostas pessoais.

6. a)

Tabela de frequência

Intervalo de notas	Frequência absoluta (F_a)	Frequência relativa (F_r)
1,0 ⊢ 2,5	5	Aproximadamente 0,17
2,5 ⊢ 4,0	5	Aproximadamente 0,17
4,0 ⊢ 5,5	8	Aproximadamente 0,27
5,5 ⊢ 7,0	6	0,2
7,0 ⊢ 8,5	3	0,1
8,5 ⊢ 10,0	3	1,00

Dados elaborados para fins didáticos.

b) 20%

7. $a = 24$; $b = 6\%$; $c = 0{,}23$; $d = 23\%$; $e = 36$; $f = 0{,}09$; $g = 0{,}45$; $h = 45\%$; $i = 68$; $j = 0{,}17$; $k = 17\%$.

8. a) 18 **b)** 5% **c)** 75%

Pense nisto (p. 265)

Porque essa amostra é mais representativa de todos os alunos matriculados na academia do que ao selecionar uma amostra dos alunos que frequentam a academia. Nesse caso, a pesquisa coletaria informações apenas daqueles que frequentam a academia no período de realização da pesquisa, desconsiderando a opinião dos alunos matriculados e que, por algum motivo, não estejam frequentando a academia nesse período.

Pense nisto (p. 268)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 268)

Resposta pessoal.

Interligando (p. 269)

1. a) Resposta pessoal. **b)** Resposta pessoal.

2. a) Resposta pessoal. **c)** 84,95%

b) Resposta pessoal.

Capítulo 12

Atividades

1. a) Facilitar a análise comparativa.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

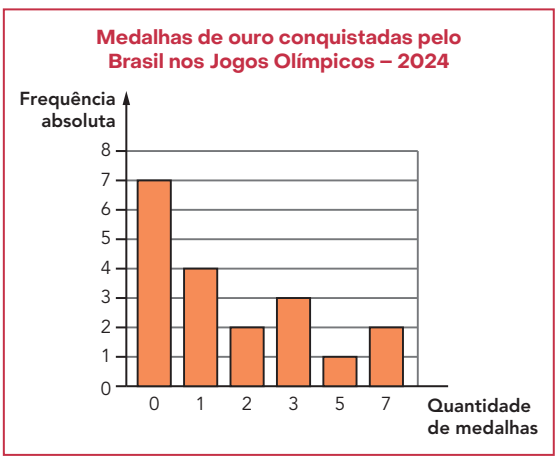
2. a)

Medalhas de ouro conquistadas pelo Brasil nos Jogos Olímpicos – 2024

Quantidade de medalhas	Frequência absoluta (F_a)	Frequência relativa (F_r)
0	7	Aproximadamente 0,368
1	4	Aproximadamente 0,211
2	2	Aproximadamente 0,105
3	3	Aproximadamente 0,158
5	1	Aproximadamente 0,053
7	2	Aproximadamente 0,105
Total	**19**	**1,00**

Fonte dos dados: COMITÊ OLÍMPICO DO BRASIL. Time Brasil. Disponível em: https://tedit.net/8efisi. Acesso em: 9 ago. 2024.

b)



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: COMITÊ OLÍMPICO DO BRASIL. Time Brasil. Disponível em: https://tedit.net/8efisi. Acesso em: 9 ago. 2024.

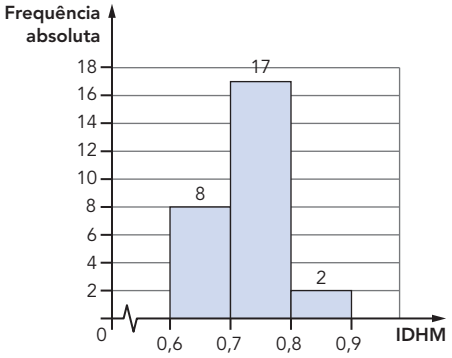
3. a)

IDHM, em 2021, de todas as unidades federativas do Brasil

IDHM	Frequência absoluta (F_a)	Frequência relativa (F_r) aproximada
0,6 ⊢ 0,7	8	29,63%
0,7 ⊢ 0,8	17	62,96%
0,8 ⊢ 0,9	2	7,41%
Total	**27**	**1,00 ou 100%**

Fonte dos dados: PNUD. Disponível em: https://tedit.net/g3kg3k. Acesso em: 9 jun. 2024.

IDHM, em 2021, de todas as unidades federativas do Brasil



Banco de imagens/Arquivo da editora

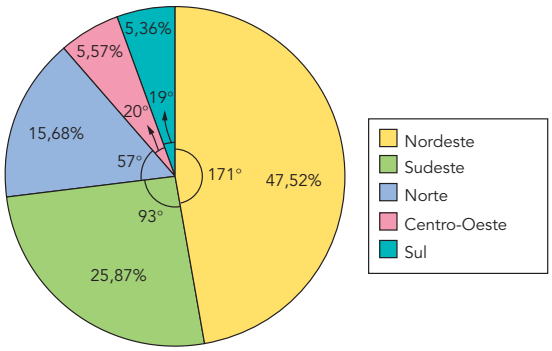
Fonte dos dados: PNUD. Disponível em: https://tedit.net/g3kg3k. Acesso em: 9 jun. 2024.

b) Aproximadamente 70,37%.

4. a) Respectivamente, 2,10; 0,17; 2,10 e 0,31.
b) Aproximadamente 33,3%
c) Apenas 1 (o RS).

5.

Número de egressos no Enem 2023 que solicitaram isenção da taxa de inscrição por região no Brasil



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: INEP. Sinopses Estatísticas. Enem. Disponível em: https://tedit.net/3n30pg. Acesso em: 6 ago. 2024.

6. a) 36°
b) 36 estudantes; 72°.

7. Alternativa **e**.

8. a) 360 pessoas
b) Reprovam: 90°; aprovam: 270°.
c) 78 pessoas.

9. a) V **b)** F **c)** V **d)** V

10. a) 2 500 km²; 625 km².
b) 60%
c) 80%
d) Aproximadamente 17 857.

11. Alternativa **d**.

12. a) Respostas pessoais.
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.

13. a) Os eixos não apresentam unidade de medida.
b) Positiva.
c) Não.

Pense nisto (p. 275)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 277)

O diagrama teria apenas uma linha. Os dados apresentados em uma única linha não seriam úteis para nenhuma análise.

Pense nisto (p. 280)

Resposta pessoal.

Pense nisto (p. 281)

S: 7° 53' 2,4"
SE: 49° 21' 21,6"
N: 45° 17' 16,8"
CO: 12° 10' 4,8"
NE: 245° 18' 14,4"

Pense nisto (p. 281)

900 *pizzas*.

Interligando (p. 285)

1. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

Experimente (p. 287)

O valor verificado é aproximadamente 0,879.

Viralize! (p. 290)

1. Aproximadamente 62%.
2. 287 447 médicas.
3. Resposta pessoal.
4. Resposta pessoal.
5. Resposta pessoal.
6. Resposta pessoal.

Para fundamentar saberes (p. 292)

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **c**.
3. Alternativa **e**.
4. Alternativa **a**.
5. Alternativa **b**.

LISTA DE SIGLAS

EEAR-SP: Escola de Especialistas de Aeronáutica (São Paulo)

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

Famerp-SP: Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto (São Paulo)

Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)

Uece: Universidade Estadual do Ceará

Uerj: Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Ufes: Universidade Federal do Espírito Santo

UFG-GO: Universidade Federal de Goiás

UFJF-Pism-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora/ Programa de Ingresso Seletivo Misto (Minas Gerais)

Ufscar-SP/Unicamp Indígena: Universidade Federal de São Carlos (São Paulo) e Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)

Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (São Paulo)

Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)

Unifesp: Universidade Federal de São Paulo

Unitins-TO: Universidade Estadual do Tocantins

Vunesp/Provão paulista: Fundação para o Vestibular da Unesp

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

Para a concepção desta coleção, diversos livros, artigos científicos, documentos oficiais do governo, revistas científicas, dissertações e *sites* foram consultados de modo a trazer material atualizado e que visa dar suporte às aprendizagens previstas para o Ensino Médio. Conheça as principais referências bibliográficas deste Volume.

BARBOSA, João L. M. *Geometria euclidiana plana*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

Esse livro proporciona uma noção ampliada do que se ensina em sala de aula. Foi referencial bibliográfico para a elaboração desta coleção. A Geometria euclidiana plana é apresentada de um ponto de vista que extrapola os tópicos do Ensino Básico, além de permitir a familiaridade com fatos geométricos por meio de teoria, exercícios, problemas e comentários. O livro foi consultado para a elaboração dos conceitos relacionados à semelhança de triângulos e medida de área de figuras geométricas planas.

BORBA, Marcelo de Carvalho *et al*. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Referência para o uso de tecnologias proposto nesta coleção, o livro apresenta uma visão da aplicação de tecnologias em Educação Matemática, exemplificando questões teóricas e propostas de atividades, bem como dissertando sobre o presente e o futuro da sala de aula de Matemática.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

Esse livro tornou-se referência de consulta sobre História da Matemática. Nele são apresentados e explicados aspectos da Matemática, considerando-se a ordem cronológica e o local dos acontecimentos, desde a origem do conceito de número até os desenvolvimentos matemáticos do século XX. No desenvolvimento dos capítulos, são apresentadas definições matemáticas importantes e as pessoas que trabalharam nelas. Esse livro também foi referência para a elaboração de textos e problemas históricos abordados nesta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://tedit.net/1qo53v. Acesso em: 4 set. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). A BNCC também estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam no decorrer de cada ano da escolaridade básica. Por isso, todos os volumes desta coleção foram desenvolvidos buscando atender a esses requisitos previstos na BNCC.

BRASIL. Ministério da Educação. *Computação*: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://tedit.net/93oura. Acesso em: 5 set. 2024.

Em 2022, a BNCC foi atualizada com diretrizes específicas para incorporar o ensino de computação no currículo escolar brasileiro. O objetivo com esse documento é promover o desenvolvimento de competências relacionadas à cultura digital e ao pensamento computacional entre os estudantes. As diretrizes estabelecidas foram fundamentais para a criação de seções e atividades incluídas nesta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica. Brasília*, DF: MEC, 2013. Disponível em: https://tedit.net/enrd4x. Acesso em: 5 set. 2024.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica (DCNs) constituem um conjunto de normas que estabelecem os princípios, fundamentos e procedimentos a serem seguidos na Educação Básica. O objetivo dessas diretrizes é orientar e apoiar escolas e redes de ensino na elaboração de seus projetos pedagógicos.

Além de servir de guia para o desenvolvimento pedagógico, as DCNs também fornecem importantes subsídios para a criação de material didático. Elas foram consultadas e consideradas durante a elaboração deste Volume, garantindo que o conteúdo esteja alinhado com as melhores práticas educacionais e as exigências curriculares nacionais.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019a. Disponível em: https://tedit.net/zj1xba. Acesso em: 5 set. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019b. Disponível em: https://tedit.net/3pnyp2. Acesso em: 5 set. 2024.

Conforme a BNCC, os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) devem ser integrados aos currículos e às propostas pedagógicas de maneira transversal e integradora. Após a homologação da BNCC, o Ministério da Educação elaborou 2 documentos para esclarecer a inserção desses temas, que serviram de referência para a concepção desta coleção.

CLUBES de Matemática da Obmep. *Atividade*: a razão áurea. Disponível em: https://tedit.net/6iow91. Acesso em: 1º set. 2024.

Nesse roteiro de atividade constam explicações teóricas, consultadas na elaboração deste Volume, do número de ouro, divisão de um segmento de reta em média e extrema razão, retângulo áureo, atividades teóricas que "levam" ao número de ouro, aplicativos para investigar a razão áurea em manifestações artísticas, galeria de vídeos e sugestões de leitura complementar.

CLUBES de Matemática da Obmep. *Sala de estudo*: diagrama de Venn. Disponível em: https://tedit.net/gyp9xv. Acesso em: 1º set. 2024.

Nesse artigo há um pouco da bibliografia do matemático inglês John Venn (1834-1923), apresentação do diagrama de Venn com exemplos extraídos de concursos públicos e a importância do diagrama para visualizar e entender propriedades dos conjuntos, bem como atividades de raciocínio lógico.

CRESPO, Antônio A. *Estatística fácil*. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

Esse livro, destinado a cursos básicos de Probabilidade e Estatística no Ensino Superior, trata da análise de dados com atenção especial para métodos gráficos, conceitos básicos de probabilidade e variáveis aleatórias, bem como os tópicos principais de inferência estatística. O livro foi consultado na elaboração dos conceitos relacionados à Probabilidade e à Estatística em todos os volumes desta coleção.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. *Fundamentos de Matemática Elementar 9*: Geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

A Geometria plana, geralmente tratada no Ensino Básico, é abordada nesse livro. Os capítulos I a XI apresentam um estudo posicional das figuras geométricas planas. Os capítulos XII a XIX oferecem um tratamento métrico a essas figuras com destaque para os cálculos de medidas de perímetro e de área. O livro foi consultado para a elaboração dos conceitos relacionados à semelhança de triângulos, congruência de triângulos, trigonometria no triângulo retângulo e áreas de figuras geométricas planas.

EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

Essa edição é a primeira tradução completa para o português do texto grego do livro original de Euclides. Além de definições, postulados e axiomas, são demonstradas nela proposições que envolvem a Geometria euclidiana, o desenho geométrico e a Aritmética. Tais conceituações geométricas foram referências para a elaboração dos conteúdos e demonstrações geométricos ao longo desta coleção.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

Além da narrativa histórica, que abarca a História da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos, o livro adota recursos pedagógicos, por exemplo, exercícios ao fim de cada capítulo. Alguns capítulos são introduzidos por panoramas culturais da época e, como um todo, o livro foi fonte de consulta para a elaboração de textos históricos para esta coleção.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos de Física 1*: Mecânica. 9. ed. São Paulo: LTC, 2012. v. 1.

O livro apresenta, de maneira objetiva, o campo da Física conhecido como Mecânica. Nesse campo, há diversas situações em que são construídas relações entre 2 grandezas, o que foi amplamente utilizado para construir questões contextualizadas nos capítulos relacionados às funções.

IBGE EDUCA. Disponível em: https://tedit.net/c1qa3c. Acesso em: 4 set. 2024.

Portal do IBGE voltado para estudantes, educadores e todos aqueles que estão em busca de conhecimento atualizado sobre o Brasil. Nele é possível encontrar diversos mapas, gráficos, vídeos, livros digitais e jogos divertidos para conhecer melhor o Brasil.

LIMA, Elon L. *Medida e forma em Geometria*: comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar).

As curiosidades históricas que foram selecionadas revelam que a determinação de medidas de área e de medidas de volume está entre as primeiras noções geométricas que despertaram o interesse do ser humano. A Geometria é introduzida no livro situando-a no contexto histórico de seu surgimento, facilitando o estudo de noções de medida em Geometria: a medida de segmentos de reta, a medida de área de figuras geométricas planas e a medida de volume de figuras geométricas espaciais. O livro foi consultado para a elaboração dos conceitos relacionados à Geometria desta obra.

NOVAES, Regina. Os jovens de hoje: contextos, diferenças e trajetórias. *In*: ALMEIDA, Maria Isabel Mendes de; EUGENIO, Fernanda (org.). *Culturas jovens*: novos mapas do afeto. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2006.

Nessa obra, retrata-se a multiplicidade dos jovens sem nenhum viés preconceituoso, o que também é um preceito defendido por esta coleção. O livro reúne artigos de cientistas sociais que se dedicam a entender os problemas enfrentados atualmente pelas juventudes urbanas no Brasil.

PÓLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Nesse livro, o autor analisa métodos criativos de resolução de problemas, revela as 4 etapas básicas da resolução de qualquer problema e sugere maneiras de trabalhar os problemas em sala de aula. Foi utilizado também como fonte de consulta para estabelecer as metodologias relacionadas à resolução de problemas nesta coleção.

RECURSOS educacionais multimídia para a matemática do Ensino Médio. Disponível em: https://tedit.net/57kjdf. Acesso em: 4 set. 2024.

Portal com diversos recursos educacionais de Matemática para o Ensino Médio, como programas audiovisuais, atividades práticas e *softwares* que abordam os conteúdos de Matemática do Ensino Básico. Os recursos audiovisuais apresentam os conceitos matemáticos em situações do cotidiano, fazendo com que o espectador conheça, de maneira simples, sua aplicação.

ROSA, Milton; OREY, Daniel C. *Influências etnomatemáticas em salas de aula*: caminhando para a ação pedagógica. 1. ed. Curitiba: Appris Editora, 2017.

O livro busca integrar os conteúdos matemáticos com as abordagens pedagógicas utilizadas no ensino e na aprendizagem da Matemática, ressaltando as influências e a presença da Etnomatemática em sala de aula, tal como apresentado em seções e atividades desta coleção. O livro reconhece que a aquisição do conhecimento matemático pode ser influenciada pelas considerações culturais dos indivíduos que fazem parte da comunidade escolar.

WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C. de O.; CARMO, Manfredo P. *Trigonometria e números complexos*. Rio de Janeiro: SBM, 2010. (Coleção do Professor de Matemática).

Esse livro traz os conceitos principais da Trigonometria e as respectivas demonstrações. Também apresenta atividades contextualizadas interessantes. Propostas relacionadas a essas temáticas foram desenvolvidas, nesta coleção, com referencial nesse livro, por exemplo para a elaboração dos conceitos relacionados à Trigonometria no triângulo retângulo, à Trigonometria em triângulos quaisquer e à circunferência trigonométrica.

WING, Jeannette. *Pensamento computacional*: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia (RBECT)*, Ponta Grossa (Paraná), v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://tedit.net/gzsm98. Acesso em: 5 set. 2024.

O pensamento computacional é uma habilidade fundamental para todos, pois envolve, com destaque, a resolução de problemas e a identificação de padrões, que são processos inerentes à atividade matemática e a situações cotidianas. Na publicação original, traduzida para o português e consultada para a elaboração desta coleção, a autora disserta sobre os estudos relacionados ao pensamento computacional.

TRANSCRIÇÃO DE ÁUDIOS

Podcast 1 – Funções

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre funções, uma ferramenta muito útil para determinar relações entre grandezas.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Quando falamos de função, estamos tratando de uma relação matemática que mostra a dependência unívoca entre duas variáveis, ou seja, para cada valor de uma variável corresponde um único valor de outra variável. Neste contexto, podemos falar sobre diferentes tipos de funções, como a função afim [vírgula sonora] e a função quadrática, [vírgula sonora] abordando diferentes características e seus gráficos num plano cartesiano.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

Para começar, é importante entender o conceito de função afim. A função afim é uma das mais simples e fundamentais no estudo da Matemática. Ela é representada por uma reta no plano cartesiano. A função afim é amplamente utilizada em diversas áreas do conhecimento, como Física, Economia e Engenharia, para modelar situações em que há uma relação linear entre duas variáveis.

Por outro lado, a função quadrática é um pouco mais complexa e é representada por uma parábola no plano cartesiano. A função quadrática é extremamente importante em várias áreas, como na Física, para descrever o movimento de projéteis, e na Economia, para analisar curvas de custo e receita.

Além das funções afim e quadrática, existem muitos outros tipos de funções que desempenham papéis cruciais na Matemática e em outras disciplinas. Por exemplo, a função exponencial, que é usada para modelar crescimento populacional e decaimento radioativo, e a função logarítmica, que é fundamental em cálculos de escalas logarítmicas e em algoritmos de computação.

Estes são conhecimentos essenciais se quisermos conhecer a relação matemática entre duas grandezas.

Mas também é possível estimarmos a relação entre duas grandezas analisando alguns valores delas, como veremos a seguir.

[vinheta de transição]

Imagine, por exemplo, que você queira uma expressão matemática que relacione o preço de um apartamento em um bairro residencial à medida de área em metros quadrados. Bem, sabemos que há muitos fatores que interferem nesse preço, como quantidade de quartos, se há ou não suítes, vagas na garagem, etc. Porém, boa parte desses fatores interfere no tamanho do imóvel, então faz sentido pensarmos que há uma relação entre a medida de área do imóvel e seu preço, concorda?

E essa relação provavelmente pode ser aproximada a uma função afim, ou seja, uma função do primeiro grau. [vírgula sonora]

Se você fizer uma pesquisa de preços em determinado bairro e representá-los em um plano cartesiano, relacionando os preços com as medidas de área dos apartamentos, você terá vários pontos dispersos, um para cada valor, porém boa parte deles estarão muito próximos a uma reta. Como já falamos, o gráfico de qualquer função afim é sempre uma reta, portanto, observando a inclinação dessa reta e os pontos pelos quais ela passa, poderíamos escrever a expressão matemática da função afim. Então, se precisássemos estimar o valor de um imóvel de oitenta metros quadrados nesse bairro, uma boa estimativa seria substituir por oitenta a grandeza que representa a medida de área do apartamento, em metros quadrados, na função encontrada.

Essa técnica se chama regressão linear, [vírgula sonora] e ela pode ser aplicada sempre quando verificarmos que um conjunto de pontos do gráfico se aproxima de uma reta, determinando assim uma expressão que relaciona as grandezas analisadas. Legal, né?

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

Estudar funções não é apenas uma atividade teórica; é uma habilidade prática que pode ser aplicada em diversas situações do dia a dia. Desde calcular a trajetória de um objeto em movimento até prever tendências econômicas, o conhecimento sobre funções nos permite entender e modelar o mundo ao nosso redor de maneira precisa e eficiente.

Portanto, ao mergulharmos no estudo das funções, estamos não apenas aprendendo conceitos matemáticos, mas também desenvolvendo ferramentas que nos ajudarão a resolver problemas reais e a tomar decisões em nossas vidas.

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Podcast 2 – Prática de pesquisa

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre a água no planeta e sua importância.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

Para isso, vamos abordar a prática da pesquisa científica e do olhar investigativo, além de explorar situações que permitem compreender e repensar a realidade e atuar sobre ela.

Vamos falar sobre a porção do planeta Terra composta de água: a hidrosfera.

Mas o que seria isso? [vírgula sonora]

Bom, a hidrosfera engloba toda a água da superfície terrestre, como os oceanos, os lagos, os rios e a água subterrânea. [efeito sonoro de água até a vinheta de transição]

Apesar de toda essa água, o que temos disponível para o nosso consumo, ou seja, o que pode ser tratada para uso, é menor do que 1%.

Com essa informação, você deve estar se perguntando: A água potável pode acabar? [vírgula sonora] Será que é possível utilizar os outros 99% de água disponível na hidrosfera? [vírgula sonora]

Esses são alguns tópicos que vamos estudar em breve, não perca!

[vinheta de transição]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

Para compreender a porcentagem de água potável disponível, precisamos avaliar a constituição da água no planeta. De acordo com a quantidade de sais minerais presentes na água, ela pode ser classificada como doce [vírgula sonora], salgada [vírgula sonora] ou salobra [vírgula sonora]. A água doce representa 3% do total de água no planeta; e a água que consumimos, chamada de água potável, representa menos de 1% da água doce. É essa pequena quantidade de água disponível que nos leva a ficarmos atentos para o uso consciente.

Não é de se espantar que algumas previsões da Organização das Nações Unidas (a ONU) apontam que, no ano de 2050, com o aumento da população e o consequente aumento do consumo de água potável, o problema de escassez será ainda mais grave.

E qual é a importância da água para os seres humanos? [vírgula sonora]

A água constitui 60% da massa corporal de um ser humano adulto. No organismo, a água participa de processos como a regulação da medida de temperatura corporal por meio da sudorese, a eliminação de toxinas por meio da urina e outras inúmeras reações químicas do metabolismo.

Por isso, é necessário sempre otimizar o consumo de água para evitar desperdícios!

Contudo, há atividades humanas que aumentam a demanda por água. Vamos estudar com mais detalhes quais atividades são essas.

[vinheta de transição]

Toda a água presente na hidrosfera se movimenta continuamente. Você sabe como é chamado esse movimento? Chama-se ciclo hidrológico ou ciclo da água. [vírgula sonora]

A água presente na superfície da Terra vem da evaporação dos corpos de água ou da transpiração de animais e de plantas. Em determinadas regiões da atmosfera, o vapor de água se condensa e forma nuvens. As gotículas de água, que constituem as nuvens, formam gotas maiores e precipitam, podendo retornar à superfície da Terra no formato de chuva, no estado líquido, ou no formato de granizo ou neve, no estado sólido.

E você sabia que na atmosfera terrestre também existem rios? [vírgula sonora] Pois é, eles estão logo acima do Brasil e são conhecidos como rios voadores.

E o que são esses rios? [vírgula sonora]

Eles são massas de ar carregadas de vapor de água impulsionadas pelo vento. Note que a Floresta Amazônica, que apresenta uma grande biodiversidade e uma extensa área verde, funciona como uma bomba de água. Ela libera enorme quantidade de água pela evapotranspiração. Na atmosfera, essa água chega e é transportada pelas massas de ar para outras regiões da América do Sul, levando chuvas para diversas regiões do Brasil. Mais um motivo para nos preocuparmos com a preservação dessa e das demais florestas brasileiras e do mundo!

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

Agora que você conheceu alguns motivos da importância do uso consciente da água, reveja com os colegas e familiares suas ações e reflitam quais atitudes de conservação da água podem ser tomadas na escola e no local onde vocês vivem. E não deixem de compartilhar as boas ideias que surgirem!

Esperamos que as propostas apresentadas sejam proveitosas e que, com o conhecimento da ciência, tenhamos ferramentas e argumentos para consumir a água de forma consciente.

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Podcast 3 – Estatística e Probabilidade

[VINHETA DE ABERTURA]

TRILHA SONORA: MÚSICA INSTRUMENTAL

Locutor [apresentação do *podcast*]:

Olá! Seja bem-vindo ao nosso *podcast* de Matemática e suas Tecnologias.

Neste episódio, falaremos sobre dois temas muito interessantes da Matemática: Estatística e Probabilidade.

Vamos lá!

[VINHETA DE ENTRADA NO EPISÓDIO]

Locutor [introdução ao bloco]:

A Estatística é um ramo da Matemática que auxilia no tratamento e na análise de dados. Imagine que você pretenda abrir uma empresa: terá que gastar um bom dinheiro em instalação, funcionários, maquinário e estoque. Depois de tudo feito, você percebe que a margem de lucro para o seu negócio é muito baixa ou que há muita concorrência ou ainda que aquilo que vende ou produz não tem vantagem competitiva. Como a empresa não vai para frente, o que resta é fechar as portas. Ainda bem que estamos só na imaginação, não é mesmo? Mas isso infelizmente acontece na vida real.

Para evitar que esse cenário aconteça, muitos empreendedores, antes de abrir um novo negócio, contam com um estudo estatístico que lhes dá muitas informações sobre concorrência, impostos, público-alvo, entre outros. Esse estudo conta com uma série de estratégias para tratamento e apresentação dos dados, como gráficos, medidas de tendência central e ainda muitas outras ferramentas que serão objeto de estudo no seu futuro escolar.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [sobre o tema escolhido]:

E são só as empresas que usam a Estatística? Não! Governos, instituições de ensino, institutos de pesquisas, organizações não governamentais, enfim, todos aqueles que querem fazer estudos sobre tendências, lançamentos de produtos, pesquisas de opinião e de satisfação e assim por diante. Como é muito usada comercialmente, a Estatística demanda muitos profissionais e há empresas especializadas em tratamento de dados que, por sua vez, são contratadas por outras empresas para obter informações importantes para o seu ramo de negócio.

Atualmente, com a internet, os nossos dados são armazenados em grandes arquivos, e empresas de tecnologia tratam e utilizam essas informações para vendê-las a empresas de comércio virtual. Já experimentou dar um clique em um tênis que você achou bonito em um anúncio virtual? Logo depois seu monitor ou celular estará cheio de propaganda de tênis, estou certa? O que aconteceu foi que a internet usou a informação para oferecer diretamente algo de seu interesse. O que você acha disso?

Ah! Não podemos esquecer que a Estatística também é usada em testes de remédios e vacinas e pode ajudar a agricultura na previsão de fenômenos como chuvas e geadas. Enfim, a Estatística é um ramo de grande utilidade para os seres humanos.

Agora, vamos falar um pouco sobre Probabilidade!

A Probabilidade é um ramo da Matemática que estuda a chance de ocorrência de eventos. Ela nos ajuda a entender e quantificar a incerteza em diversas situações do cotidiano. Ao analisar a probabilidade, podemos prever a possibilidade de diferentes resultados de um experimento ou evento, mesmo sem ter certeza do que exatamente irá acontecer. Esse conceito é fundamental para a tomada de decisões, pois nos permite avaliar riscos e benefícios com base em dados e padrões observados.

Já jogou algum jogo de tabuleiro que utilizasse dados?

Imagine um jogo de estratégia no qual você tem que conquistar territórios e joga os dados conforme o número de exércitos que possui.

Pois bem, pense que você tem que disputar um território e só pode jogar um dado, e o seu oponente, que está defendendo o território e que tem mais exércitos que você, pode jogar três dados. Você ganha a disputa se tirar um número maior do que qualquer número dos três dados que ele jogar. Será que vale a pena? Antes de jogar jogos de estratégia que utilizem dados, fique ciente das probabilidades de cada jogada. Esse é apenas um dos exemplos da Probabilidade em nossa vida. Existem inúmeros. A Probabilidade e a Estatística estão à nossa disposição, nos mais diversos serviços, basta estudá-las.

[VÍRGULA SONORA]

Locutor [considerações finais]:

Continue estudando e, antes de tomar passos importantes, reúna os dados, veja as possibilidades e probabilidades e siga em frente.

[VINHETA DE ENCERRAMENTO DO ASSUNTO]

Locutor [encerramento]:

Chegamos ao final deste *podcast*! Espero que tenha gostado do conteúdo.

Até a próxima e bons estudos!

[VINHETA FINAL]

Manual do Professor

Matemática
e suas Tecnologias

Matemática

Apresentação

Caro professor,

Pautado no desenvolvimento de habilidades e competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e na organização dos componentes curriculares em quatro áreas do conhecimento, o Novo Ensino Médio propõe a redistribuição da carga horária do segmento e pretende flexibilizar a oferta de ensino, com a possibilidade de aprofundamento em itinerários formativos, incentivando o protagonismo e a autonomia dos estudantes.

Esta coleção tem o objetivo de servir de suporte para suas aulas de Matemática. Neste Manual do Professor, você encontra informações que o auxiliam no trabalho com as propostas didáticas da coleção durante o ano letivo.

Acreditamos que o ensino de Matemática é fundamental para a formação de cidadãos críticos e conscientes de seu papel na sociedade, uma vez que possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia e das habilidades de interpretação, argumentação e análise em diversas situações cotidianas. Além disso, propicia aos estudantes fazer conjecturas, tomar decisões e compreender melhor a realidade na qual estão inseridos, tornando-os aptos a nela intervir quando necessário.

Neste cenário, concebemos esta coleção contemplando os requisitos da BNCC em situações contextualizadas e que consideram a interação da Matemática com outras áreas do conhecimento e com os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs).

Além dos pressupostos metodológicos da coleção, apresentamos neste Manual orientações específicas que potencializarão o desempenho docente em sala de aula.

Esperamos que todos esses elementos contribuam com sua prática docente e sejam o ponto de partida para a construção de um processo de ensino e aprendizagem significativo.

Os autores

Sumário

Orientações gerais 316

1. O Novo Ensino Médio 316
1.1 O contexto legislativo 316
1.2 As principais mudanças 317

2. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) 317
2.1 As competências e as habilidades da BNCC de Ensino Médio 318
2.2 As interdisciplinaridades, os Temas Contemporâneos Transversais e os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável 319

3. A educação integral e a sociedade contemporânea 320
3.1 O estudante protagonista da aprendizagem 321
3.2 Algumas reflexões sobre a prática docente 321
3.2.1 O trabalho individual e em grupos e possíveis formas de organização das turmas 322
3.3 A educação digital 322
3.3.1 O pensamento computacional 323
3.4 As culturas juvenis e os diferentes perfis de estudantes 323
3.5 A Cultura de Paz em sala de aula 324
3.6 As capacidades de argumentação e de leitura 324
3.7 O pluralismo de ideias e a produção de análises críticas, criativas e propositivas 325
3.8 A resolução e a elaboração de problemas 325
3.9 A investigação científica e os raciocínios lógico-matemáticos 325
3.10 A História da Matemática e a Etnomatemática 326
3.11 Recursos apoiados nas tecnologias digitais 327

4. Por uma educação inclusiva 328

5. As avaliações 328
5.1 O planejamento das avaliações e os tipos de avaliação 329
5.1.1 Avaliação diagnóstica 329
5.1.2 Avaliação formativa 329
5.1.3 Avaliação comparativa 329
5.1.4 Avaliação ipsativa 329
5.1.5 Avaliação somativa 329
5.2 Trabalhando o Enem em sala de aula: estratégias para melhorar o desempenho dos estudantes 330

6. A coleção 330
6.1 A abordagem teórico-metodológica e os pressupostos da coleção 330
6.2 A estrutura da coleção 330
6.3 Sugestões de cronogramas para a coleção 331
6.4 Os Objetos Educacionais Digitais da coleção 335

7. Referências complementares para aprofundamento 335
7.1 Livros para aprofundamento e formação continuada 335
7.2 História da Matemática 336
7.3 Ensino e aprendizagem em Matemática e Educação Matemática 336
7.4 Avaliação 337
7.5 Recursos educacionais digitais 337
7.6 Sugestões de revistas 338
7.7 Sugestões de *sites* 338
7.8 Questões curiosas de Matemática, jogos e desafios de raciocínio quantitativo 338
7.9 Filmes sobre Matemática e personalidades da área 338

Orientações específicas 339

Introdução ao Volume 1 339
Unidade 1 339
Unidade 2 344
Unidade 3 348
Unidade 4 352
Unidade 5 357
Resoluções 360

Referências bibliográficas comentadas 398

ORIENTAÇÕES GERAIS

1. O novo Ensino Médio

As discussões sobre um novo molde para esse segmento, mais atrativo e adequado à realidade, são antigas. O Novo Ensino Médio foi estabelecido pela Lei n. 13.415/2017, entretanto, sua origem remonta ao Projeto de Lei n. 6.840, de 2013, em paralelo a um movimento não governamental (Movimento pela Base) voltado para a criação e implementação de uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A demanda por um novo modelo vinha, portanto, de variados segmentos ligados à educação, da sociedade e do governo, principalmente buscando adequar o ensino às diversas mudanças (principalmente sociais e tecnológicas) ocorridas no século XXI.

Moehlecke (2012) discorre sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), aprovadas em 2011, dizendo que elas já apontavam para um modelo com uma grade curricular mais atrativa e flexível, capaz de atrair os estudantes e combater a repetência e a evasão. Para isso, a ideia é uma estrutura curricular articulada a uma base conceitual unificada, acrescida de uma parte diversificada, capaz de atender à multiplicidade de interesses dos jovens. Essas discussões envolvem uma série de fatores e desafios, que buscam conciliar a Lei de Diretrizes com as Bases da Educação Nacional (LDB, Lei n. 9.394/1996), a criação e implantação da Base Nacional Comum Curricular, as matrizes do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), a atualização da matriz de avaliação do Novo Exame Nacional do Ensino Médio (novo Enem), as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e as diversas realidades regionais do país.

1.1 O contexto legislativo

A primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, aprovada no Brasil em 1961, regularizou os Conselhos Estaduais e o Conselho Federal de Educação, deu autonomia aos estados e descentralizou a educação, introduzindo o ensino obrigatório e sem menção direta ao que atualmente entendemos como Ensino Médio. Em 1971, na segunda LDB, houve a definição de ensino obrigatório dos 7 aos 14 anos, com um núcleo comum a ser partilhado pelos 1º e 2º graus de ensino.

A Constituição de 1988 trouxe uma série de princípios fundamentais para guiar a educação no Brasil, tendo o Estado a obrigação de garanti-los, e, após sua promulgação, a LDB de 1971 foi considerada ultrapassada. Entretanto, apenas em 1996 foi publicada uma nova LDB, tornando-se um marco histórico e legislativo, pois com ela uma série de questões curriculares foram estabelecidas tanto para a Educação Básica – como o próprio Ensino Médio – quanto para o Ensino Superior.

Depois, em 2001, a promulgação do Plano Nacional de Educação (Lei n. 10.172/2001) estabeleceu metas para um período de 10 anos. Uma dessas metas é a garantia de acesso ao Ensino Médio a todos os estudantes que concluam o Ensino Fundamental em idade regular. Posteriormente, em 2007, foi iniciado o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação (Fundeb), sendo também um importante marco no desenvolvimento do Ensino Básico no país.

Além disso, a LDB proporcionou a criação das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), que servem como orientação para a elaboração de currículos com uma série de princípios para guiar e definir as finalidades do Ensino Médio.

Em 2017, estabeleceu-se e publicou-se a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento norteador dos currículos na Educação Básica e fornece subsídios para que os sistemas educacionais públicos e particulares estejam alinhados às diretrizes curriculares no que se refere a conhecimentos essenciais e competências e habilidades a serem desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica. Esse documento indica:

- as **competências gerais** que os estudantes devem desenvolver em todas as áreas do conhecimento;
- as **competências específicas** de cada área de conhecimento e dos respectivos componentes curriculares (as disciplinas);
- os conteúdos mínimos que os estudantes devem aprender estabelecidos por **objetos de conhecimento** e **habilidades** a serem desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica.

Assim, a BNCC passa a estabelecer a progressão e o sequenciamento dos conteúdos e habilidades mínimos de cada área do conhecimento e componente curricular para todos os anos da Educação Básica.

Vale destacar que a BNCC não define um currículo fechado: ela estabelece conteúdos mínimos que devem ser abordados, cabendo às Secretarias de Educação e às escolas a responsabilidade de elaborar currículos e projetos pedagógicos que atendam às necessidades locais e regionais, utilizando a BNCC como referência.

Também em 2017, foi instituído pela Lei n. 13.415/2017 o modelo do Novo Ensino Médio, que seria implementado de maneira escalonada entre 2022 e 2024. Esse modelo propôs uma reformulação da etapa final da Educação Básica, com maior flexibilidade e personalização da aprendizagem por meio de itinerários formativos específicos. A lei previa que as aprendizagens definidas na BNCC do Ensino Médio seriam organizadas por áreas do conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas), tendo uma complementação a partir de 5 itinerários formativos, que possibilitariam aprimoramento dentro de uma das áreas do conhecimento ou do ensino técnico profissionalizante.

De acordo com a própria BNCC:

> a dinâmica social contemporânea nacional e internacional, marcada especialmente pelas rápidas transformações decorrentes do desenvolvimento tecnológico, impõe desafios ao Ensino Médio. Para atender às necessidades de formação geral, indispensáveis ao exercício da cidadania e à inserção no mundo do trabalho, e responder à diversidade de expectativas dos jovens quanto à sua formação, a escola que acolhe as juventudes tem de estar comprometida com a educação integral dos estudantes e com a construção de seu projeto de vida (Brasil, 2018, p. 464).

Essa mudança estrutural foi motivada por uma modernização no currículo, resultante do entendimento de que a sociedade passou por diversas mudanças estruturais nos últimos anos, principalmente no que diz respeito ao uso cada vez maior das tecnologias, de modo que é fundamental um currículo que dialogue com os interesses e as necessidades dos estudantes, proporcionando-lhes maior poder de escolha e motivação. Assim,

é possível conectá-los mais facilmente ao mercado de trabalho e à vida acadêmica, possibilitando também o desenvolvimento de habilidades socioemocionais e reflexões sobre seu futuro ao construírem seus projetos de vida.

O modelo de Ensino Médio iniciado em 2022 sofreu diversas críticas de vários setores ligados à educação. Debates envolvendo infraestrutura de escolas públicas, oferecimento de itinerários formativos, capacitação docente, diminuição da carga horária de disciplinas básicas, entre outros, fizeram com que o Governo Federal lançasse, em 2023, o Projeto de Lei n. 5.230 para reestruturação do Novo Ensino Médio, que foi aprovado em agosto de 2024 como a Lei n. 14.945/2024, a ser implementada a partir de 2025. As principais mudanças estão na distribuição da carga horária e na ampliação dos conteúdos da formação básica curricular.

1.2 As principais mudanças

A seguir, apresentamos as principais mudanças do Novo Ensino Médio entre as propostas de 2017 e 2024.

- **Carga horária ampliada**: Na Lei n. 13.415/2017, a proposta era de uma carga de 3 000 horas, considerando os 3 anos da etapa do Ensino Médio, com 1800 horas de formação básica e 1200 horas de itinerários formativos. Na Lei n. 14.945/2024, as 3 000 horas foram mantidas, mas foi estabelecida a carga horária de 2 400 horas para componentes curriculares obrigatórios e 600 horas para itinerários formativos em áreas do conhecimento optativas. Essa é uma das principais mudanças e visa atender à necessidade de maior carga horária para o desenvolvimento de projetos em escolas de tempo integral e à criação de espaço para o desenvolvimento dos itinerários formativos.
- **Componentes curriculares obrigatórios**: Em todos os anos, os estudantes cursarão os seguintes componentes curriculares: Língua Portuguesa, Matemática, Biologia, Física e Química, História, Geografia, Filosofia e Sociologia, Língua Inglesa, Arte e Educação Física, sendo Língua Espanhola facultativa.
- **Itinerários formativos**: Segundo o Ministério da Educação:

  > os itinerários formativos são o conjunto de disciplinas, projetos, oficinas, núcleos de estudo, entre outras situações de trabalho, que os estudantes poderão escolher no Ensino Médio. Os itinerários formativos podem se aprofundar nos conhecimentos de uma área do conhecimento (Matemática e suas Tecnologias, Linguagens e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e da formação técnica e profissional (FTP) ou mesmo nos conhecimentos de duas ou mais áreas e da FTP. As redes de ensino terão autonomia para definir quais itinerários formativos irão ofertar, considerando um processo que envolva a participação de toda a comunidade escolar.
  >
  > BRASIL. Ministério da Educação. *Novo Ensino Médio*: perguntas e respostas. Disponível em: https://tedit.net/82fe92. Acesso em: 4 set. 2024.

  As escolas devem oferecer diferentes possibilidades de itinerários e dialogar abertamente com os estudantes para que eles possam escolher, de modo consciente, os itinerários que mais lhes interessam.
- **Ensino Técnico**: Uma opção de escolha do estudante, com previsão de 2100 horas para formação básica e 900 horas relacionadas ao ensino profissionalizante, sendo no máximo 1200 horas para cursos técnicos que exigem mais carga horária, ocupando parte das horas de formação geral básica.
- **Ensino a distância e noturno**: A Lei estabelece que a carga horária da formação geral dos estudantes deve ser oferecida presencialmente. O texto obriga os estados a manterem, em todas as cidades, ao menos uma escola da rede pública com Ensino Médio no período noturno, se houver demanda comprovada nesse turno.
- **Escola de tempo integral**: Uma das bandeiras do Novo Ensino Médio é a Política de Escolas de Tempo Integral. Embora nem todas as escolas tenham que, obrigatoriamente, passar para a modalidade de tempo integral, a lei do Novo Ensino Médio incentiva que o número de escolas nessa modalidade seja progressivamente ampliado. Isso já vinha sendo proposto pelo Plano Nacional de Educação (PNE), estabelecido em 2014. O PNE tem como meta "6: oferecer educação em tempo integral em, no mínimo, 50% (cinquenta por cento) das escolas públicas, de forma a atender, pelo menos, 25% (vinte e cinco por cento) dos(as) alunos(as) da educação básica" (disponível em: https://tedit.net/6q40wv; acesso em: 17 set. 2024).

2. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC definiu um conjunto de conhecimentos e competências que devem ser oferecidos aos estudantes, estabelecendo diretrizes para uniformizar os conteúdos essenciais a serem ensinados em todas as escolas do país. Seu objetivo é garantir uma formação de qualidade para todos os estudantes, independentemente de sua localização geográfica.

Ela valoriza o desenvolvimento de competências e habilidades que permitam aos estudantes resolver problemas, tomar decisões, trabalhar em equipe e se adaptar às constantes mudanças do mundo, definindo os conteúdos mínimos que eles devem aprender e os objetos de conhecimento e as habilidades a serem desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica.

A organização por áreas do conhecimento permite aos docentes trabalharem de maneira integrada, articulando os diferentes conhecimentos e promovendo a interdisciplinaridade, além de auxiliar no desenvolvimento de competências específicas de cada área do conhecimento e dos respectivos componentes curriculares.

O trabalho pedagógico envolve um planejamento que articula teoria e prática, permitindo aos estudantes não apenas adquirir conhecimentos, mas também saber aplicá-los em diferentes contextos. As competências gerais estabelecem diretrizes amplas, como o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo, enquanto as habilidades indicam ações mais concretas, como a resolução de problemas ou a análise de fenômenos, incentivando o uso de diversas metodologias de ensino, como projetos, trabalho em grupo e utilização de tecnologias. É fundamental que os professores conheçam os objetivos e os princípios da BNCC para planejar as aulas de maneira eficiente, aplicando diferentes metodologias.

Vale reforçar que a BNCC serve como referência para a construção dos currículos estaduais, que são elaborados considerando as demandas e os contextos regionais específicos de cada localidade. Esses currículos, ao refletir as particularidades culturais, sociais e econômicas de suas regiões, permitem uma maior proximidade entre a prática pedagógica e a realidade dos estudantes, incluindo a criação, remodelação ou adaptação de

habilidades e competências. Além disso, o docente tem autonomia para adaptar os materiais didáticos e as metodologias propostas, alinhando-os tanto ao Projeto Político-Pedagógico (PPP) da escola quanto aos currículos estaduais, garantindo, assim, que o processo de ensino-aprendizagem seja relevante e significativo para os estudantes em seus variados contextos.

Dica

- MILANI, N. O. O Projeto Político Pedagógico – PPP como instrumento de comunicação e interação entre a comunidade escolar e a mediação do pedagogo. *In*: *Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE*. Governo do Estado: Secretaria de Educação do Paraná, 2014. Disponível em: https://tedit.net/m6wqh9. Acesso em: 17 set. 2024.

  O documento discute a importância do Projeto Político Pedagógico (PPP) como uma ferramenta essencial para promover a comunicação e a interação na comunidade escolar, destacando o papel do professor como mediador. A leitura dele promove a melhor compreensão de como o PPP pode contribuir para um ambiente educacional mais colaborativo e eficaz.

2.1 As competências e as habilidades da BNCC de Ensino Médio

De acordo com a BNCC, competência é a mobilização e a articulação de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para a resolução de problemas de situações cotidianas relacionados ao meio ambiente, aos princípios éticos, à cidadania, ao mundo do trabalho, entre outras questões de urgência social. Por meio da indicação clara do que os estudantes devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC.

O desenvolvimento de habilidades e competências reforça a necessidade de um conjunto mínimo de aprendizagens essenciais. Desse modo, na BNCC são estabelecidas 10 competências gerais para a Educação Básica, que perpassam todas as áreas de conhecimento, articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, conforme disposto na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. As competências gerais visam ao desenvolvimento integral do estudante, preparando-o para a vida em sociedade, o trabalho e a continuidade dos estudos.

A descrição das 10 competências gerais, assim como todo o texto da BNCC, pode ser encontrada no *site* do Ministério da Educação (disponível em: https://tedit.net/q0hay4; acesso em: 4 set. 2024).

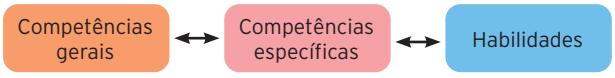
A BNCC estabelece, também, as competências específicas. No Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias têm 5 competências específicas que são desenvolvidas ao longo dos 3 anos. Além disso, a BNCC organiza o ensino da Matemática no Ensino Médio em 3 Unidades temáticas:

- *Números* e *Álgebra*;
- *Geometria* e *Medidas*;
- *Probabilidade* e *Estatística*.

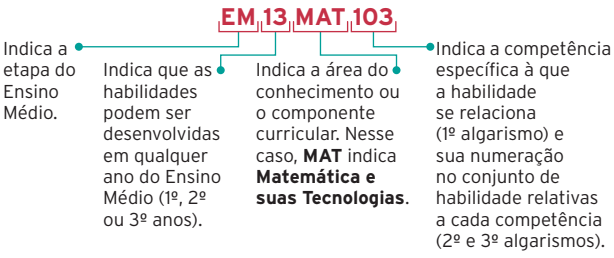
As Unidades temáticas agrupam conteúdos correlatos e facilitam o trabalho pedagógico, dividindo-se em habilidades específicas que detalham as expectativas de aprendizado em cada etapa. Essas habilidades são organizadas para permitir que o estudante desenvolva competências progressivamente, consolidando o aprendizado por meio de atividades que integram teoria e prática, sempre com uma abordagem contextualizada e conectada à realidade dos estudantes.

> Diante dessas considerações, a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (Brasil, 2018, p. 528-529).

No desenvolvimento das competências gerais, é essencial que os estudantes também trabalhem os princípios das competências específicas de cada área do conhecimento, o que se concretiza por meio do trabalho com as habilidades de cada componente curricular.



As competências e habilidades tanto se diferenciam quanto se encadeiam em diferentes graus de complexidade e amplitude no decorrer do Ensino Médio, sendo necessárias a análise e a compreensão de como isso ocorre na prática. Nesta coleção, utilizaremos a sigla **CG** para nos referirmos às competências gerais da BNCC para a Educação Básica. Para isso, nomeamos a primeira competência como **CG01**, a segunda como **CG02**, e assim sucessivamente. Além disso, usaremos a sigla **CEMAT01** para nos referirmos à competência específica **1** de Matemática e suas tecnologias, **CEMAT02** para a competência específica **2** de Matemática e suas tecnologias, e assim em diante. Também utilizaremos os códigos de cada habilidade presentes no documento da BNCC, cujo detalhamento está apresentado no exemplo a seguir.



A seguir, exemplificaremos o trabalho com as competências gerais, as competências específicas e as habilidades nesta coleção.

A competência geral **CG01** (texto a seguir), por exemplo, é favorecida no estudo da Unidade **3** do Volume **1** nos momentos em que se propõe ao estudante que reconheça e coloque em prática conhecimentos historicamente construídos, como nas seções que apresentam um apanhado histórico do desenvolvimento de conceitos matemáticos e da aplicabilidade deles na atualidade e na resolução de problemas.

Ao analisarmos, por exemplo, o capítulo **6** dessa Unidade **3**, a **CG01** é abordada em situações em que os estudantes refletem sobre os problemas que lhes são apresentados – tanto relacionados a semelhança de triângulos quanto a triângulos retângulos – e mobilizam conhecimentos matemáticos para investigar e desenvolver soluções criativas para solucionar os problemas.

Ainda nesse capítulo, os estudantes utilizam conceitos e definições para compreender características dos triângulos e aplicam conceitos e procedimentos para medir segmentos de reta ou medir ângulos. Com isso, é favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**. Isso ocorre porque, no capítulo, os estudantes exploram relações de congruência, relações de semelhança e relações trigonométricas envolvendo triângulos e aplicam esses conhecimentos em contextos diversos, incluindo a acessibilidade.

Para acompanhar o desenvolvimento das habilidades e das competências previstas, consulte a lista indicada no início das *Orientações específicas* de cada Unidade. A completude do trabalho com todas as respectivas habilidades e competências específicas de Matemática e suas Tecnologias, bem como das competências gerais da BNCC, é obtida ao longo dos Volumes desta coleção, tanto no Livro do Estudante quanto nas orientações apresentadas neste Manual.

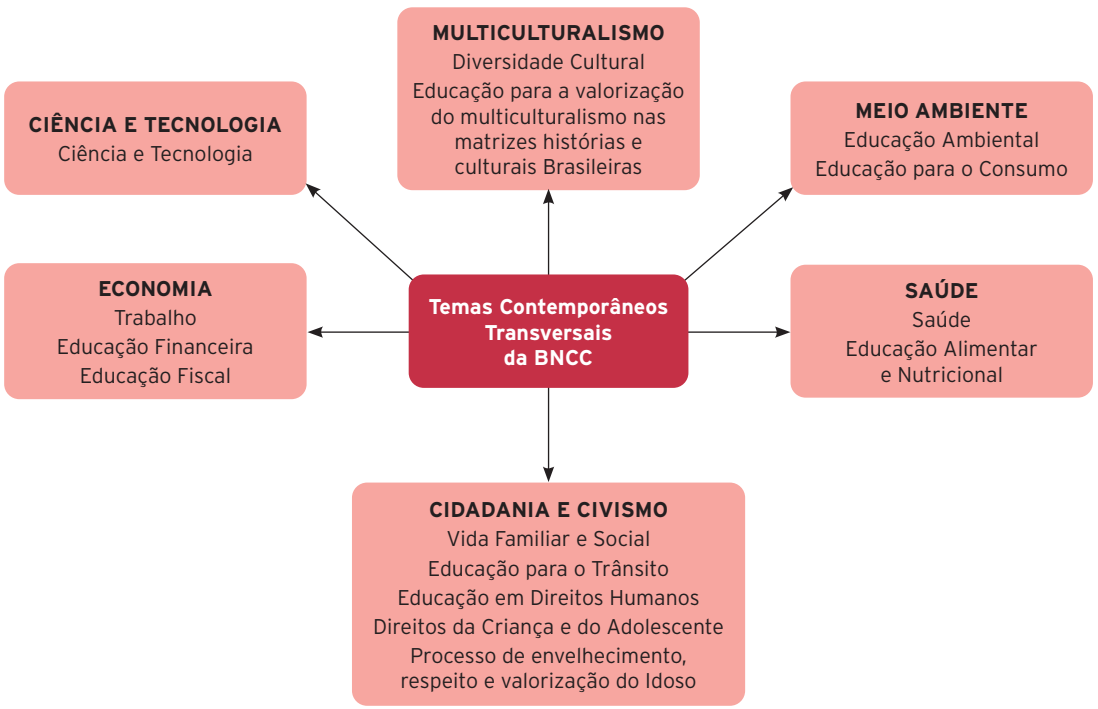
2.2 As interdisciplinaridades, os Temas Contemporâneos Transversais e os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

A interdisciplinaridade refere-se à abordagem educacional na qual diferentes áreas do conhecimento se conectam, rompendo as barreiras tradicionais individualizadas dos componentes curriculares (das disciplinas). Por meio da interdisciplinaridade, os estudantes exploram conceitos e questões a partir de múltiplas perspectivas, integrando conhecimentos e habilidades de diversas áreas do conhecimento.

Nessa perspectiva, os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) estabelecidos pela BNCC são assuntos de relevância atual que perpassam diferentes áreas do conhecimento e são considerados essenciais para a formação integral dos estudantes. Eles são chamados de "transversais" porque não pertencem a um único componente curricular, em vez disso, são abordados de maneira integrada em diversas áreas do conhecimento, promovendo uma visão ampla da educação.

> Os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) buscam uma contextualização do que é ensinado, trazendo temas que sejam de interesse dos estudantes e de relevância para seu desenvolvimento como cidadão. O grande objetivo é que o estudante não termine sua educação formal tendo visto apenas conteúdos abstratos e descontextualizados, mas que também reconheça e aprenda sobre os temas que são relevantes para sua atuação na sociedade (Brasil, 2019a, p. 7).

A BNCC propõe, atualmente, os seguintes TCTs organizados em 6 macroáreas:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019. p. 8. Disponível em: https://tedit.net/3acdu3. Acesso em: 4 set. 2024.

Nesta coleção, diversos aspectos são contemplados a partir dos TCTs e exploram, sobretudo, questões da realidade social brasileira e do mundo, integrando-as às demais áreas do conhecimento.

A integração dos TCTs por meio da interdisciplinaridade auxilia os estudantes a desenvolverem competências gerais, como o pensamento crítico, a resolução de problemas complexos, a comunicação eficaz e a colaboração. Essas competências são essenciais para que eles se tornem cidadãos conscientes e atuantes. De fato, a interdisciplinaridade facilita a contextualização do aprendizado, mostrando como os conhecimentos adquiridos em diferentes disciplinas são aplicáveis na vida real. Ao estudar, por exemplo, o Tema Contemporâneo Transversal *Diversidade Cultural*, os estudantes podem entender a importância do respeito às diferenças tanto no campo social (Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) quanto no artístico (Linguagens e suas Tecnologias) e até na análise de dados estatísticos (Matemática e suas Tecnologias).

No contexto educacional, os TCTs são frequentemente incorporados ao currículo por meio de projetos interdisciplinares, debates, atividades práticas e reflexões que incentivam os estudantes a pensar criticamente e agir de maneira responsável em relação ao mundo ao seu redor.

Além dos TCTs, nesta coleção abordamos os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) da Agenda 2030 da ONU, que são compostos de 17 metas globais para a promoção de um desenvolvimento mais inclusivo, sustentável e justo em todo o mundo. Esses objetivos envolvem diversos desafios contemporâneos, como a erradicação da pobreza, a igualdade de gênero, a garantia de educação de qualidade e a ação contra as mudanças climáticas.

Reprodução/ONU

Fonte dos dados: NAÇÕES UNIDAS BRASIL. *Objetivos de desenvolvimento sustentável*. Disponível em: https://tedit.net/dgwz7m. Acesso em: 4 set. 2024.

A abordagem dos ODS, bem como dos TCTs, também permite um trabalho interdisciplinar que integra conhecimentos de diversas áreas às questões de urgência global que interferem diretamente na vida dos estudantes. Dessa maneira, contribui-se para a formação de cidadãos envolvidos com o bem comum.

Ao integrar ODS e TCTs, contribui-se para o incentivo dos estudantes à percepção de como as questões globais se conectam com a realidade local e como podem colaborar para um mundo mais justo e sustentável.

Uma sugestão de trabalho interdisciplinar envolvendo TCTs, ODS e Matemática presente na coleção envolve a sustentabilidade e o consumo consciente, trabalhando o TCT *Educação Ambiental* e o ODS **12** (Consumo e produção responsáveis): os estudantes podem investigar o consumo de água, de energia elétrica ou de outros recursos em seus domicílios ou na escola. Com os dados coletados, eles podem usar conhecimentos e ferramentas matemáticos para calcular médias, criar gráficos e projetar possíveis economias. O projeto pode incluir também a criação de uma campanha de conscientização com base nos resultados. Assim, abordam-se conhecimentos de Física (Energia), Biologia (Meio Ambiente), Geografia (Recursos Hídricos) e Matemática (Estatística).

Projetos como esses não só integram o aprendizado matemático com questões relevantes da atualidade, mas também incentivam os estudantes a desenvolverem uma compreensão crítica e analítica do mundo ao seu redor. De qualquer maneira, ao desenvolvê-los é importante o professor promover adaptações de acordo com a realidade local da comunidade e o contexto em que os estudantes estão inseridos. Para isso, é preciso investigar e identificar situações que possam ser trabalhadas de maneira interdisciplinar. Inclusive, os próprios estudantes podem sugerir temas ou problemas que eles identificam na região onde moram, sejam sociais, sejam econômicos ou desafios ambientais, por exemplo.

Essas adaptações também podem ser realizadas em conjunto com professores de outras áreas do conhecimento. Para isso, vocês podem organizar um momento semanal para fazer e compartilhar planejamentos em relação a temas, recursos didáticos, estratégias e ideias de atividades para implementar. Essa prática contribui para a troca de experiências e para o ajuste da proposta às necessidades e à realidade dos estudantes.

3. A educação integral e a sociedade contemporânea

A educação integral é definida na BNCC como uma proposta de formação ampla e visa promover o desenvolvimento cognitivo, físico, social, emocional e cultural dos estudantes. Desse modo, as diretrizes estão respaldadas no compromisso com a compreensão das singularidades e diversidades dos sujeitos, pois entende-se que a juventude não é simplesmente um período entre a infância e a fase adulta, mas uma etapa do desenvolvimento humano com características biológicas, psicológicas, sociais e culturais próprias.

Vivemos uma era de transformações rápidas e profundas, marcadas por avanços tecnológicos, mudanças sociais e ambientais, e uma crescente interconexão global, afetando diretamente a educação e o mundo do trabalho. O avanço das tecnologias digitais, a inteligência artificial e a automação estão transformando o mercado de trabalho e as relações humanas. Nesse contexto, a educação precisa ir além da mera transmissão de conhecimento técnico; deve capacitar os estudantes a serem pensadores críticos, solucionadores de problemas e cidadãos conscientes, capazes de se adaptar e inovar em um ambiente incerto e em evolução.

É essencial que a educação se preocupe com o desenvolvimento integral dos estudantes, considerando tanto o aspecto cognitivo quanto as dimensões emocional, social e ética. A formação de cidadãos responsáveis, solidários e empáticos é indispensável para a construção de uma sociedade mais justa e sustentável.

A proposta da BNCC e desta coleção é promover uma educação voltada ao desenvolvimento pleno e plural de ideias, ao convívio social republicano, à cultura de paz, à saúde mental dos estudantes e ao respeito às questões climáticas e ambientais, preparando-os para o exercício da empatia, da cooperação, da argumentação construtiva e do respeito ao meio ambiente, entendendo que eles são seres atuantes e protagonistas.

3.1 O estudante protagonista da aprendizagem

A BNCC traz em seus textos o desenvolvimento da autonomia, que corresponde a uma parte importante no processo de formação dos cidadãos. Esta coleção compreende que a autonomia estudantil vai além do simples ato de estudar de modo independente; ela envolve a capacidade de tomar decisões informadas, gerir o tempo, estabelecer metas e refletir sobre o próprio aprendizado. A partir do momento em que os estudantes desenvolvem a própria autonomia, deixam de ser meros ouvintes recebedores de informação, assumindo um papel de protagonismo na própria aprendizagem.

O desenvolvimento da autonomia nos estudantes é um processo gradual que requer suporte e orientação dos educadores. Professores desempenham um papel crucial ao criar ambientes de aprendizagem que incentivam a experimentação, a tomada de riscos e a reflexão crítica.

Para alcançar esse objetivo, uma das tendências pedagógicas em voga atualmente é conhecida como metodologias ativas. Nesse tipo de metodologia, o conhecimento não se origina exclusivamente da escola e do professor. Ele é proveniente também do que cada estudante sabe sobre determinado assunto. Segundo o professor José Morán (2015), as metodologias ativas podem ser um ponto de partida de avanço para processos mais profundos de reflexão, integração cognitiva, generalização e reelaboração de novas práticas. Ele afirma que estudantes se tornam mais proativos quando se envolvem em atividades que mobilizam ações desafiadoras e quando podem argumentar, testar hipóteses e experimentar novas situações.

No artigo "Mudando a educação com metodologias ativas", Morán traz apontamentos importantes que ajudam a compreender o que são as metodologias ativas e quais são os impactos do uso delas na aprendizagem dos estudantes. Sintetizamos a seguir os principais itens abordados no artigo.

1 As relações de ensino e aprendizagem são processos interligados que constituem relação simbiótica, profunda, constante entre o que chamamos mundo físico e mundo digital. Não são 2 mundos ou espaços, mas um espaço estendido, uma sala de aula ampliada, que se mescla. Nesse sentido, a educação formal é cada vez mais *blended*, ou seja, misturada ou híbrida, porque não acontece só no espaço físico da sala de aula, mas nos múltiplos espaços do cotidiano, que incluem os digitais.

2 O professor deve compreender que as tecnologias também são modos de comunicação com os estudantes, sujeitos nascidos em uma era de pleno desenvolvimento tecnológico. A interligação entre sala de aula e ambientes virtuais é fundamental para abrir a escola para o mundo e trazer o mundo para dentro da escola.

3 Desafios são importantes, por isso, junto com outras atividades, quando bem planejados, acompanhados e mediados, podem mobilizar as competências e habilidades desejadas, sejam intelectuais, sejam emocionais, pessoais ou comunicacionais. Exigem pesquisar, avaliar situações, observar pontos de vista diferentes, assumir alguns riscos, aprender pela descoberta e caminhar do simples para o complexo. Nas etapas de formação na Educação Básica, os estudantes precisam de acompanhamento de profissionais mais experientes para ajudá-los a conscientizar-se de alguns processos, estabelecer conexões não percebidas, superar etapas mais rapidamente e ser confrontados com novas possibilidades.

4 Uma proposta interessante é a prática de jogos colaborativos, visto que a geração atual é acostumada a jogar e a se comunicar, muitas vezes, na linguagem própria dos *games*. Assim, ao utilizá-los é possível gerar, além de um ambiente de competição, um ambiente colaborativo, de estratégia, com etapas, objetivos e habilidades bem definidas.

5 O professor tem papel importante no trabalho com as metodologias ativas, pois é o articulador de etapas, processos, resultados, lacunas e necessidades, seguindo percursos dos estudantes individualmente ou em grupos e conduzindo o desenvolvimento da aula ou de um projeto.

6 O trabalho com projetos é uma boa oportunidade de inserir metodologias ativas de aprendizagem na escola, sempre atentando ao fato de que o aprendizado ocorre com base em problemas e situações reais. Nesse sentido, trabalhar com projetos de vida pode ser um bom início para conquistar e aproximar os estudantes, além de fazê-los sentir-se responsáveis pela própria aprendizagem.

Como exemplos pedagógicos que reforçam a autonomia dos estudantes, podemos citar a sala de aula invertida, a gamificação, a aprendizagem baseada em projetos, o uso de portfólios e a autoavaliação. Além disso, é importante que os educadores forneçam *feedback* construtivo e oportunidades para que os estudantes ajustem as estratégias de aprendizagem com base nas reflexões sobre o desempenho.

3.2 Algumas reflexões sobre a prática docente

Como comentamos, o papel do professor não é ser transmissor ou detentor dos conteúdos. Ao contrário, o professor deve ser um facilitador, um guia que orienta os estudantes na jornada de aprendizagem, incentivando a curiosidade, a criatividade e o pensamento crítico.

E, nesse sentido, a formação continuada dos professores, bem como a incorporação de novas tecnologias e metodologias ativas, são fundamentais para que a educação acompanhe as demandas da sociedade contemporânea. Assim como os estudantes têm novas competências a desenvolver, os professores têm competências a exercitar: facilitar o aprendizado, mediar conflitos e avaliar conscientemente são apenas algumas de suas atribuições. Em um cenário educacional que valoriza cada vez

mais a autonomia, o pensamento crítico e o protagonismo dos estudantes, o professor assume uma função central na formação de cidadãos capazes de atuar de maneira ética e responsável na sociedade contemporânea.

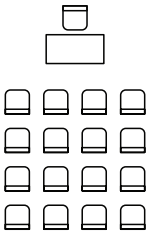
3.2.1 O trabalho individual e em grupos e possíveis formas de organização das turmas

Desenvolver trabalhos em sala de aula de maneira individual e em grupo tem papel essencial no desenvolvimento das habilidades e competências dos estudantes. A organização em grupo, além de ser um momento que propicia a expressão de ideias e o diálogo, permite a promoção do respeito mútuo, da empatia, da cooperação e do senso crítico. Ao interagir durante as atividades desenvolvidas, os estudantes desenvolvem a comunicação, a reflexão e a argumentação, que são fundamentais em um processo de aprendizagem colaborativa.

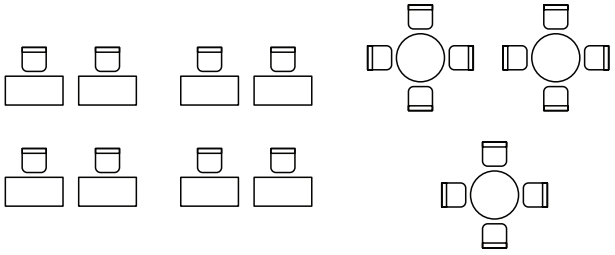
Os trabalhos em grupo permitem a troca de ideias e discussões sobre as diferentes estratégias em que estudantes pensaram, pois todos eles podem participar de maneira ativa. Porém, o professor sempre deve estar atento para realizar ajustes conforme a necessidade, como estabelecer regras para que toda a turma possa opinar, além de respeitar e acolher a opinião dos colegas.

Nesse sentido, é necessário considerar outras maneiras de organização da sala de aula, evitando disposições sempre enfileiradas e explorando organizações em formatos circulares, mesas-redondas e estações de trabalho. Assim, os estudantes têm mais oportunidades de colaborar entre si, ouvir e compartilhar ideias.

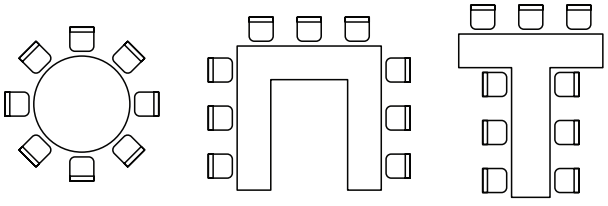
Ilustrações: Fagreia/Shutterstock



A disposição dos estudantes no modelo tradicional é oportuna nos momentos de trabalho individual.



A disposição em duplas ou em pequenos grupos promove a troca de saberes e um diálogo maior e inclusivo entre os estudantes.



A disposição de todos os estudantes no modelo circular, em U ou em T, por exemplo, favorece o debate coletivo e a troca de ideias e opiniões.

Além disso, durante o planejamento de aulas em grupo, o professor precisa considerar a heterogeneidade dos estudantes, variando os integrantes e garantindo que as atividades estejam de acordo com o nível de conhecimento e com a faixa etária da turma.

3.3 A educação digital

Um aspecto a ser considerado no trabalho com os estudantes é o uso de tecnologias da informação e comunicação, incluindo aquelas voltadas ao entretenimento.

> O grande desafio de educadores, pesquisadores, é compreender de que forma as tecnologias da informação e comunicação podem funcionar como meio de auxílio para o desenvolvimento do ensino. Sabendo que os jovens são produtores de informação e não simplesmente passivos consumidores, é preciso criar estratégias de uso das redes sociais que servem como interatividade e aprendizagem de grupos, pois os relacionamentos e as trocas de experiência acontecem através destas redes.
>
> [...]
>
> O processo de aprendizado com a utilização das tecnologias da informação e comunicação é de colaboração, onde é possível o que temos de conhecimento contribuir com o aprendizado do outro. Aprender colaborativamente significa desenvolver habilidades como: analisar, refletir, selecionar, atribuir significado, devolver a informação de acordo com a sua interpretação e contribuir numa discussão para o aprendizado do outro.
>
> Essa característica de sociabilidade deve ser aproveitada para a estimulação dos novos conhecimentos. Diante das tecnologias da informação e comunicação é possível escortinar-se um mundo ainda mais ávido em busca da construção de conhecimentos que não somente serão escolares, mas também outros tipos de conhecimento.
>
> [...]
>
> Os meios de comunicação e informação são imprescindíveis para ocorrer [a] interação e se articulam para contribuir cada vez mais com as possibilidades de acesso, convergência de meios tecnológicos e de mídias, que permitem o acesso ao conhecimento de qualquer lugar e parte do mundo modificando substancialmente as várias formas de pensar, comunicar e educar (Milani, 2012, p. 165 e 168).

A escola não pode ignorar o espaço que a comunicação e as tecnologias ocupam na vida dos jovens na atualidade. No entanto, é preciso orientá-los no uso desses novos conteúdos e oferecer diferentes tipos de letramento para que eles possam elaborar com a escola e além da escola. Utilizamos aqui o conceito de letramento como prática social e leitura do mundo, mais do que como alfabetização.

Na abordagem da utilização de tecnologias da informação e comunicação, é preciso considerar as diretrizes da Norma sobre Computação na Educação, aprovada em 2022, pois ela estabelece a importância da integração do ensino de computação de modo transversal no currículo escolar durante toda a Educação Básica, o que permite preparar os estudantes não somente para usar tecnologias, mas também para compreender os fundamentos da computação, incluindo desde o pensamento computacional até a linguagem básica de programação. Assim, os estudantes se desenvolvem criticamente para o mundo digital, passando

de usuários passivos a criadores ativos, o que fomenta a inovação e a resolução de problemas.

Ademais, a Política Nacional de Educação Digital (Pned) ressalta a necessidade de preparar a sociedade para os desafios impostos pela transformação digital, destacando a relevância da formação de pessoas capazes de usar tecnologias de maneira crítica e ética, o que promove o letramento digital em todos os níveis da Educação Básica.

A Pned sugere ações desde capacitar professores até ampliar o acesso à internet e aos dispositivos eletrônicos em todas as escolas do país. Essas iniciativas visam contribuir para a redução das desigualdades educacionais e a garantia de que todos os estudantes tenham oportunidades de desenvolver habilidades digitais.

3.3.1 O pensamento computacional

Podemos compreender o pensamento computacional como uma competência associada à resolução de problemas, apoiando-se ou não, para tanto, nas tecnologias e na computação. Utilizar recursos do pensamento computacional em sala de aula não significa necessariamente fazer programas de computador ou outro tipo de *software*. Esse conceito diz respeito ao desenvolvimento de uma representação de raciocínio lógico e por etapas, compreendendo a presença de padrões, a elaboração de passos e testes, a validação de resultados, além da generalização pela abstração. Portanto, algoritmos, fluxogramas, esquemas ou mesmo roteiros com etapas passo a passo a serem cumpridas, usados no processo de aprendizagem, podem ser compreendidos como recursos para o desenvolvimento do pensamento computacional. E esses são importantes recursos que podem auxiliar os estudantes a identificarem relações entre os objetos representados, como na organização das etapas de uma tarefa, na representação de árvore de possibilidades, entre outras situações.

O complemento da BNCC para Computação lista 7 competências gerais a serem desenvolvidas no Ensino Médio. Para acessar esse documento, visite: https://tedit.net/0ppe9e (acesso em: 3 set. 2024).

É importante destacar que pesquisas, estudos e aplicações envolvendo o pensamento computacional na educação já existem há quase 20 anos e, de acordo com a BNCC, esse tipo de raciocínio pode ser mobilizado em todas as etapas da Educação Básica, em diversos componentes curriculares, além de Matemática. Por isso, o pensamento computacional também pode ser entendido como um tema contemporâneo que é transversal ao currículo escolar. Caratti e Vasconcelos (2023) recuperam o trabalho de Brackmann sobre as bases, ou os pilares, do pensamento computacional (PC) e sua aplicabilidade.

> [...] Brackmann (2017) discorre sobre quatro pilares do PC: a) decomposição, na qual um problema considerado complexo pode ser dividido em problemas menores e mais fáceis de serem resolvidos; b) reconhecimento de padrões, em que cada problema menor pode ser analisado em profundidade e comparado com outros problemas já solucionados anteriormente; c) abstração, em que somente os detalhes relevantes para a solução do problema são considerados, sendo descartados os outros que não contribuem para esta; e d) algoritmo, que constitui a criação ou definição dos passos necessários para a solução dos problemas encontrados.
>
> É importante destacar que os pilares do PC supracitados podem ser integrados em diversas disciplinas escolares. Por exemplo, em Ciências, a decomposição pode ser utilizada para estudar sistemas do corpo humano ou ecossistemas, dividindo-os em sistemas menores ou componentes para entender melhor o conjunto; o reconhecimento de padrões pode ser aplicado em História para identificar tendências em eventos históricos, como causas e consequências, com o objetivo de prever possíveis resultados de conflitos atuais; a abstração pode ser empregada em Línguas para analisar textos literários, concentrando-se em elementos essenciais, contextos, temas e símbolos abstratos para interpretar significados mais profundos; e o uso de algoritmos pode ser explorado em Música para compreender a estrutura de partituras (Caratti; Vasconcelos, 2023, p. 3).

Desse modo, é importante perceber que as técnicas do pensamento computacional se consolidam como uma abordagem sistemática de resolução de problemas, envolvendo o uso de conceitos e métodos próprios da Ciência da Computação. Ele não se limita ao uso de computadores nem à Matemática, mas abrange um conjunto de habilidades cognitivas e atitudes que permitem abordar e solucionar problemas complexos de maneira eficiente.

3.4 As culturas juvenis e os diferentes perfis de estudantes

A escola deve ser um espaço que acolhe e valoriza a diversidade dos jovens, reconhecendo suas múltiplas dimensões de desenvolvimento – intelectual, físico, afetivo, social e cultural. A BNCC reforça que a educação deve partir da realidade que os estudantes vivenciam, e não de uma seleção prévia de conteúdos descontextualizados. Nesse sentido, compreender e integrar as culturas juvenis, com toda a sua pluralidade, é essencial para construir uma educação significativa e transformadora.

Para melhor entender o conceito de culturas juvenis, é preciso assimilar que as maneiras de ser jovem são inúmeras e dependem de gênero, raça, cor, etnia, classe social, território, religião, geração, entre outros; de acordo com as mesmas variáveis, há diferentes maneiras de ser estudante. Diante desse contexto, cabe à escola proporcionar aos jovens a possibilidade de experimentar diferentes modos de vivenciar a juventude considerando, para tanto, as chamadas culturas juvenis. Entendemos como culturas juvenis as articulações que os jovens estabelecem com base na produção cultural de massa, no estilo de vida e nas práticas sociais em grupo ou em rede e que se expandem pelo espaço urbano.

Um exemplo é a exploração de atividades culturais envolvendo *rap*, grafite ou o próprio *funk*, que, muitas vezes, são subvalorizadas por fazerem parte da cultura dos jovens das camadas populares, que já são marginalizados por sua origem socioeconômica. Ao permitir que os jovens se expressem por meio dessas manifestações artísticas, se assim desejarem, a escola oportuniza a expressão de sentimentos e que eles sejam reconhecidos, ganhem visibilidade e se autoafirmem.

As culturas juvenis são diversas, refletindo a variedade de experiências, interesses e contextos dos jovens brasileiros. Essa diversidade abrange uma ampla gama de realidades socioeconômicas, personalidades, diferenças de aprendizagem, e perfis psicológicos e cognitivos, além de incluir diferenças entre áreas urbanas e áreas rurais. Cada estudante traz consigo uma bagagem única de vivências que deve ser reconhecida e valorizada dentro da sala de aula.

O contexto pós-pandêmico ampliou ainda mais esses desafios, revelando desigualdades preexistentes e criando novas barreiras para muitos jovens, ressaltadas pelo resultado do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) de 2022. Nesse cenário, trabalhar com diferentes perfis de estudantes requer uma abordagem que considere a pluralidade uma característica inerente da sociedade, sem adotar posturas capacitistas ou juízos de valor. A escola deve ser um lugar onde todos os estudantes se sintam respeitados e reconhecidos, independentemente das diferenças.

Ao considerar as culturas juvenis na construção do currículo, a escola deve propiciar que os próprios estudantes levem suas experiências e vivências para o ambiente de aprendizagem. Isso não apenas enriquece o processo educativo, mas também fortalece o vínculo entre o estudante e o conteúdo, tornando o aprendizado mais relevante e conectado à própria realidade.

Por fim, o projeto de vida, enquanto ferramenta pedagógica, também deve ser abordado nesse momento de compreensão das aflições e expectativas dos jovens do Ensino Médio, pois ajuda os estudantes a refletirem sobre seus objetivos e aspirações, integrando suas vivências pessoais e culturais com suas expectativas para o futuro. No entanto, é crucial que essa reflexão seja ancorada em uma visão realista das possibilidades e limitações que o mundo do trabalho impõe, especialmente para a população mais vulnerável, pois um dos objetivos da educação é que os jovens compreendam a sua realidade e passem a transformá-la, percebendo, e isso é fundamental, porque as transformações no mundo do trabalho, impulsionadas pelas tecnologias, criam novas oportunidades, mas também desafios significativos.

3.5 A Cultura de Paz em sala de aula

O trabalho com a BNCC pressupõe articulações entre os envolvidos no processo educativo – estudantes, professores e equipe gestora –, de modo a garantir as condições básicas de vida e a criação de mecanismos que favoreçam a atuação e o protagonismo da comunidade escolar na construção da democracia e na garantia e efetivação de direitos e justiça social. Nesse sentido, para assegurar a boa convivência no ambiente escolar e a Cultura de Paz, é preciso adotar uma postura na qual a educação seja um fator essencial e contribua para o combate à violência, à intimidação sistemática (*bullying*) e às ações excludentes e preconceituosas.

O texto a seguir reflete o que se espera ao propor um ambiente escolar para promoção da Cultura de Paz.

> [...] A educação se dá para além do ambiente escolar, sendo composta pelo tempo e contexto em que as aprendizagens acontecem, em espaços formais e não formais de educação e a partir da interação de diferentes sujeitos sociais. Dessa forma, é preciso respeitar, ouvir e valorizar a diversidade de participantes que constroem esse espaço, na perspectiva de atuação conjunta dos agentes da rede de proteção na intenção de restabelecer "os valores e a segurança necessários para um ambiente educacional saudável, no qual a justiça, a igualdade, o respeito, a solidariedade e a consideração entre as pessoas prevalecem" [...].
>
> Ao se propor um ambiente escolar para a promoção da Cultura de Paz e de convivências respeitosas, possibilita-se que a escola cumpra a sua função fundamental: promover aprendizagens as quais devem estar em consonância com as demandas pessoais e coletivas, de forma a fortalecer os/as estudantes como sujeitos de direitos que pensam, criticam, refletem, agem coletivamente, para entender, compreender e experimentar o mundo, desenvolver-se [...].
>
> Assim, a educação para a Cultura da Paz propõe mudanças inspiradas em valores como justiça social, diversidade, respeito e solidariedade, aliadas às ações fundamentadas na educação, saúde, cultura, esporte, participação cidadã e melhoria da qualidade de vida no território de responsabilidade compartilhada entre educação e diversos setores da sociedade [...].
>
> [...]
>
> Assim, as orientações e ações voltadas para a promoção da cidadania e garantia dos Direitos Humanos e Cultura de Paz pautam-se na compreensão das diversas formas de violências, violações de Direitos Humanos e suas ocorrências no campo dos direitos civis, políticos, econômicos, sociais, culturais e ambientais (Distrito Federal, 2020, p. 11-13).

A perspectiva de enfrentamento e prevenção à violência contra os jovens do Ensino Médio é um dos grandes desafios da escola, dos familiares e responsáveis e de toda sociedade. Nesta coleção, oportunizamos aos estudantes o uso das tecnologias como meio de disseminação e produção de conhecimento, auxiliando-os a desenvolver boas práticas e consciência crítica em relação a elas, mobilizando com mais ênfase a **CG05**.

3.6 As capacidades de argumentação e de leitura

O processo de leitura inferencial favorece a organização das relações de significado dentro do texto e determina os significados que o leitor é capaz de estabelecer considerando todas as possibilidades de interpretação que um texto pode oferecer. A produção de sentidos de um texto está conectada ao contexto e à interação entre o autor e o leitor.

Ao oferecer aos estudantes atividades de leitura orientada, favorecemos o desenvolvimento de estratégias cognitivas e metacognitivas. No trabalho em sala de aula, é possível ver quão desafiadores são o ensino-aprendizagem e a produção de textos argumentativos, e, para que os estudantes construam o próprio conhecimento, cabe propor atividades contextualizadas e que favoreçam o desenvolvimento da criticidade e do protagonismo cidadão.

Ao produzir um texto argumentativo, os estudantes podem utilizar alguns tipos de raciocínio lógico: o indutivo (parte de fatos particulares para uma conclusão geral), o dedutivo (parte do enunciado geral para provar um fato particular), a analogia (provas de acordo com semelhanças entre os casos), a dedução

(parte de uma regra para obter a conclusão) e a abdução (conclusões com base em premissas).

Nas aulas de Matemática, ao incentivar o trabalho com orientações e roteiros de estudo e pesquisa, mobilizamos as habilidades de leitura, escrita, oralidade e escuta reflexiva dos estudantes, ampliando as estruturas que compõem o letramento matemático nos sujeitos e permitindo, também, o desenvolvimento desses tipos de raciocínio lógico. Os estudantes, ao falarem e ouvirem os pares em sala de aula, aprendem e ressignificam saberes. Comunicar-se durante as aulas de Matemática é um processo complexo, pois o indivíduo precisa se apoiar em duas linguagens para tanto: a materna, para comunicação universal, e a linguagem matemática, com símbolos e características próprias.

Nesta coleção, incentivamos o processo de leitura inferencial e o desenvolvimento do raciocínio argumentativo em diversas oportunidades, sobretudo nas aberturas de Unidades e nas seções – nas quais os estudantes devem ler um texto, interpretá-lo e tirar as próprias conclusões –, nas atividades envolvendo a elaboração e a resolução de problemas, nas propostas de debate com os colegas, e ao serem solicitados a argumentar sobre a maneira como chegaram às respostas encontradas.

3.7 O pluralismo de ideias e a produção de análises críticas, criativas e propositivas

Produzir análises críticas, criativas e propositivas nas aulas de Matemática é de grande importância para a formação dos estudantes, pois os auxilia a ser capazes de compreender e entender o que precisa ser modificado na realidade que vivem. Durante as aulas, o professor pode promover um ambiente de pluralismo de ideias, ou seja, em que concepções diferentes sejam debatidas e confrontadas de maneira sistêmica. Assim, contribui-se para que os estudantes argumentem, reflitam criticamente e proponham possibilidades de soluções para problemas que precisam ser resolvidos.

Um exemplo de análise crítica em Matemática ocorre quando os estudantes são incentivados a interpretar tabelas e gráficos estatísticos, questionando os dados e analisando situações econômicas e sociais. Já a criatividade, pode aparecer quando os estudantes procuram soluções alternativas para problemas complexos.

Debates atuais, como a uberização da economia, exemplificam a integração dessas habilidades com a Matemática, que pode ser usada na análise do impacto financeiro desse modelo de negócio. Pode-se, por exemplo, desafiar os estudantes a calcular a renda média de motoristas de aplicativos considerando, para isso, as variáveis necessárias, como o custo de manutenção do veículo, a quantidade de horas trabalhadas e as tarifas e taxas cobradas. Desse modo, contribui-se para a promoção de debates sobre a sustentabilidade financeira desse tipo de trabalho, analisando-se, também, as implicações sociais.

Além disso, ao fazer o confronto das diferentes concepções sobre uberização ou outros temas atuais da sociedade, o professor precisa incentivar os estudantes a respeitar as diversas experiências que vivem ou viveram e os diferentes modos de pensar sobre isso. Nesse sentido, a Matemática não fica limitada a propor somente respostas objetivas, ela também propõe reflexões sobre a multiplicidade de perspectivas que existem em uma sociedade plural. Realizar o confronto de ideias de maneira respeitosa e colaborativa contribui para que os estudantes valorizem e respeitem diferentes pontos de vistas.

3.8 A resolução e a elaboração de problemas

Na área de Matemática, a BNCC ressalta que os professores devem incentivar os estudantes apresentando problemas da vida real que sejam usados como ponto de partida para situações didáticas em que se desenvolvam a criatividade, o pensamento crítico e a colaboração.

Elaborar e resolver problemas exigem um ambiente de comunicação e escuta, além de cooperação e argumentação. É importante que os estudantes percebam que a habilidade de resolver problemas não está relacionada somente com as aulas de Matemática, pois ela será mobilizada ao longo de toda a vida, em diversas situações do cotidiano.

O precursor das ideias acerca da resolução de problemas foi o matemático e professor húngaro George Pólya (1887-1985), que estabeleceu passos a serem seguidos na resolução de um problema, descritos a seguir, sinteticamente, de acordo com Pólya (2006).

- Compreender o problema: o que se pede; quais são os dados.
- Elaborar um plano: estratégias para resolver o problema; como organizar os dados.
- Executar o plano: executar as estratégias; fazer os cálculos.
- Fazer a verificação ou o retrospecto: verificar se a solução está correta; se há outras maneiras de resolver o problema.

Além disso, a resolução e a elaboração de problemas contribuem para investigação, levantamento e teste de hipóteses, elaboração de argumentos e de ideias matemáticas e para o compartilhamento de diferentes saberes.

Nesse contexto, ao avaliar a elaboração de problemas dos estudantes, o professor precisa analisar aspectos relacionados a clareza da formulação, relação do problema com o conteúdo trabalhado e se a produção é inédita. Por fim, para tornar a elaboração de problemas uma prática enriquecedora, é fundamental que os estudantes compartilhem entre si os problemas criados, não somente para resolver, mas também para discutir se a produção está clara e completa.

Ao longo desta coleção, há diversas e variadas possibilidades de trabalhar com resolução de problemas em temas da realidade ou em contextos didáticos. Aproveite a oportunidade e crie um ambiente de investigação e construção de saberes com os estudantes.

3.9 A investigação científica e os raciocínios lógico-matemáticos

O ato de investigar é praticado pelos jovens desde a infância. Todo jovem é curioso e tende a explorar e buscar mais informações sobre algo que lhe chama a atenção. Nessa perspectiva, é importante o ensino de Matemática também buscar possibilidades de despertar o interesse dos indivíduos.

A prática de pesquisa também serve de aporte interessante por envolver saberes prévios, questionamentos, levantamento e

teste de hipóteses, verificações de resultados, elaboração de modelos matemáticos, entre outros. Pesquisar significa informar-se sobre algo, investigar, examinar minuciosamente determinado tema ou problema. É uma ação em busca de conhecimento.

Deve ficar claro para os estudantes que a pesquisa não significa apenas a busca de algum tema na internet, como muitos deles podem pensar. É importante que eles compreendam que a pesquisa resulta de uma ação iniciada pela curiosidade ou inquietação de uma ou mais pessoas sobre determinado assunto ou problema. Uma pesquisa é uma investigação.

Nesta coleção, um tipo de pesquisa proposto é o que chamamos de pesquisa bibliográfica, que consiste na coleta de informações sobre o tema em textos, livros, artigos, *sites*, ou seja, as fontes de informação. Sempre que explorar o trabalho com as fontes de informação, retome com os estudantes a necessidade de avaliá-las.

Além disso, saber pensar matematicamente é relacionar situações de contextos diferentes para descobrir novas estratégias e soluções e interpretá-las utilizando, para tanto, diversos tipos de raciocínios argumentativos como ferramenta.

A investigação em Matemática apresenta-se como uma metodologia que:

> tem por objetivo oferecer oportunidade para os estudantes vivenciarem uma experiência semelhante ao do investigador matemático e, assim, motivá-los a estudarem Matemática, por meio do desafio de descobrir relações matemáticas apresentadas em situações matemáticas específicas. Desta forma, levar o estudante a ter uma visão do que é fazer Matemática, bem como sentir prazer no fazer Matemática (Varizo; Magalhães, 2016, p. 2).

Nesta coleção, apresentamos algumas possibilidades para a introdução de atividades que potencializem o desenvolvimento desses modos de raciocinar, sobretudo a dedução, a indução, a abdução e o raciocínio por analogia, como dito anteriormente.

A dedução é o modo de inferência mais simples e se caracteriza pela inferência que mostra de que maneira, seguindo determinada regra geral, se estabelece um caso particular.

> No método dedutivo consideramos a forma mais certa para nós, ou seja, caminhos verdadeiros, concluintes e resultados. Exemplo: "Hoje está calor e o asfalto está quente". Esse método é comum para testar hipóteses já existentes, dadas por *axiomas*, para comprovar teorias, nomeadas de *teoremas* (Lascane; Homsy; Monteiro, 2020, p. 122).

Na indução, ao contrário da dedução, parte-se da premissa menor e busca-se a generalização. A verificação da teoria é feita por experimentação. Enquanto processo lógico-analítico, a indução é passível de ser experimentada e, consequentemente, comprovada. Por trás do raciocínio indutivo está um passo essencial: a atitude indutiva à qual é submetido o pesquisador. Ter uma atitude indutiva requer saber observar detalhes em sua experiência e formular hipóteses que podem ou não ser verdadeiras.

Na abdução se dá o processo de formação de hipóteses explicativas que ajudam na compreensão de certos fenômenos, e a consideramos ponto de partida do raciocínio indutivo. Na Matemática, assim como em outras ciências, a abdução envolve a busca por explicações ou hipóteses. Diferentemente da dedução, que começa com hipóteses e verifica se as conclusões são verdadeiras, a abdução parte de uma verdade presumida para identificar possíveis hipóteses que a expliquem.

No raciocínio por analogia, a inferência se dá pela identificação de semelhanças entre diferentes situações ou objetos. Assim, transferem-se conhecimentos ou conclusões de um contexto familiar para outro menos conhecido sob a premissa de que, se os casos são similares em alguns aspectos, podem ser similares em outros também. Apesar de não ser conclusivo como a dedução ou a indução, o raciocínio por analogia é muito usado na formulação de hipóteses e no desenvolvimento de novas ideias.

3.10 A História da Matemática e a Etnomatemática

A BNCC ressalta a importância do trabalho com os diferentes saberes e culturas e com o conhecimento produzido pela humanidade ao longo do tempo e do espaço. Para tanto, há 2 tendências metodológicas, também destacadas nesse documento oficial, que podem servir de aporte para esse trabalho: a História da Matemática e a Etnomatemática.

Em relação à História da Matemática, a BNCC traz vários destaques. Reproduzimos a seguir um exemplo.

> [...] A Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau (Brasil, 2018, p. 463).

O livro *História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores*, escrito pelos professores brasileiros Iran Abreu Mendes (Universidade Federal da Paraíba) e Miguel Chaquiam (Universidade Federal do Rio Grande do Norte), traz um panorama explicitador e incentivador da abordagem de conteúdos a partir da História da Matemática. A seguir, alguns pontos essenciais abordados por eles (Mendes; Chaquiam, 2016).

1. Ao explorar a História da Matemática, é necessário compreender que, na verdade, trata-se de histórias no plural, pois estão conectadas, integradas ou mesmo tecidas em meio a outras histórias das mais diversas qualidades.

   São histórias e descobertas frutos de diferentes pessoas sobre a produção de ideias matemáticas e as materializações em múltiplas linguagens representativas, e talvez seja também dessa multiplicidade que surge a característica plural de tais histórias. Esquecer ou desprezar essa pluralidade é empobrecer qualquer abordagem dita ou concebida como transversal, integrada ou até mesmo contextualizada para a Matemática que se ensina.
2. As histórias consideradas importantes para o desenvolvimento da aprendizagem matemática dos estudantes em sala de aula são aquelas que têm a vocação de explicar a organização conceitual das matemáticas produzidas no tempo e no espaço.

3. Uma das justificativas mais comuns sobre a indicação do uso didático ou pedagógico das informações históricas nas atividades de ensino de Matemática é que ela amplia a compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais dessa área, representando uma contribuição didática para o trabalho do professor e fortalecendo as competências formativas para o exercício de ensino.
4. O uso da história nas aulas de Matemática amplia a visão sobre os aspectos formativos, informativos e utilitários, conduzindo os estudantes ao acervo cultural dessa ciência com a finalidade de desenvolver o interesse pelo assunto e estimular a preservação da memória intelectual humana.
5. É necessário que o professor redirecione o uso das histórias e promova um exercício de investigação mais ampliado, propiciando a criação de um cenário no qual as histórias do desenvolvimento conceitual sejam agregadas às informações existentes. É preciso explicar que o conhecimento a ser aprendido contribuirá para a ampliação das estratégias de pensamento e, consequentemente, ajudará os estudantes na produção de conhecimento.
6. Podem ser desenvolvidos alguns projetos de investigação sobre as histórias dos seguintes tópicos matemáticos: números de Fibonacci; problema das quatro cores; fractais; razão áurea; retângulo de ouro; números imaginários; números complexos; números irracionais; fórmula de Euler; Matemática e arquitetura; Matemática e arte islâmica; Matemática e música; barras de Napier; triângulo de Pascal; Trigonometria e polígonos regulares; sólidos de Platão; simetria em diversas culturas; transformações geométricas no plano; desenvolvimento das ideias sobre funções; entre outros.

Ao se apoiar nas concepções do uso da História da Matemática em sala de aula, o professor deve adotar uma postura de escuta reflexiva e conduzir as discussões a partir dos questionamentos que os estudantes farão sobre as informações e histórias às quais terão acesso. É importante fomentar discussões sobre os diferentes contextos em que os conceitos surgiram e levantar os possíveis saberes que os estudantes trazem sobre eles. O uso de literatura pode ser um caminho bastante interessante para isso.

Nesta coleção, destacamos diversos momentos para a apresentação da História da Matemática ao longo do desenvolvimento dos capítulos.

Há mais de duas décadas, o termo Etnomatemática saiu dos meios acadêmicos e adentrou os documentos oficiais, currículos, programas de ensino e materiais didáticos das escolas. O professor Ubiratan D'Ambrosio (1932-2021) foi o precursor e principal cientista brasileiro a se dedicar ao tema. Em razão de suas ideias e produções acadêmicas, que contemplam todos os níveis de ensino da Matemática, ele se tornou um profissional reconhecido, respeitado e referenciado mundialmente.

Na obra *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*, D'Ambrosio esclarece que a palavra Etnomatemática nasceu das raízes *tica*, *matema* e *etno* para significar que há várias maneiras, técnicas e habilidades (*ticas*) de explicar, de entender, de lidar e de conviver (*matema*) com distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (*etnos*).

Nessa mesma obra, ele define o conceito: Etnomatemática é a Matemática praticada por grupos culturais, como comunidades urbanas e comunidades rurais, trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma faixa etária específica, sociedades indígenas e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns.

A Etnomatemática tem o objetivo de preservar e estudar as particularidades de cada indivíduo, as culturas e os conhecimentos matemáticos adquiridos, pois compreende que o ser humano se desenvolve continuamente e, por isso, ressignifica as técnicas e adota novas, compondo a própria maneira de explicar a realidade. Tais conhecimentos são transmitidos pela interação e a comunicação em ambientes distintos nos quais os sujeitos circulam, incluindo a escola, o trabalho, a comunidade ou o bairro em que residem, entre outros.

Apoiar-se nos pressupostos da Etnomatemática é um caminho promissor para trabalhar com o contexto dos estudantes, pois considera e valoriza os saberes que trazem, constituídos pelas vivências deles e pela localização temporal e espacial na qual circulam. Há várias possibilidades de mobilizar tais saberes ao longo das aulas de Matemática, por exemplo: ao discutir o orçamento doméstico de uma família, é possível identificar práticas culturais para lidar com o consumo e com o alimento.

Fernandes da Costa (2021) traz um trabalho interessante relacionando Etnomatemática e decolonialidade. Ambas as abordagens incentivam a descolonização do currículo educacional, promovendo a inclusão de conhecimentos e práticas matemáticas de diferentes culturas no ensino formal. Isso contribui para uma educação mais inclusiva e representativa, desafiando a hegemonia do pensamento eurocêntrico, que historicamente impôs uma visão única de conhecimento. Ao destacar a diversidade das práticas matemáticas, a Etnomatemática apoia o movimento decolonial ao mostrar que há múltiplas formas legítimas de compreender e trabalhar a Matemática.

3.11 Recursos apoiados nas tecnologias digitais

Em um mundo globalizado e em constante desenvolvimento científico e tecnológico, é importante a escola se integrar a práticas que propiciem aos estudantes vivenciar essa realidade com aplicação ao ensino. Nesta coleção, sugerimos explorar com os estudantes recursos tecnológicos em diversas oportunidades, como ao propor a utilização de *softwares* de Geometria dinâmica, de planilhas eletrônicas, de calculadoras, entre outros.

Há diversos *sites* e aplicativos para desenvolver atividades de Geometria dinâmica (como o GeoGebra, o Graphmática, o Winplot) e dinamizar e diversificar as estratégias em sala de aula. Também há diversos aplicativos de planilhas eletrônicas para computador e *smartphone* ou *on-line*. O uso e as funcionalidades dessas planilhas são similares e muitas estão disponíveis em português.

Na escolha do *software* ou aplicativo a ser trabalhado, é preciso atentar para que o programa apresente todas as funcionalidades necessárias ao desenvolvimento das atividades propostas em sala de aula. Previamente, é importante explorar o programa e, no começo da aula, auxiliar os estudantes nas explorações iniciais e na identificação das ferramentas, dos códigos e das configurações disponíveis, além da maneira de acessá-las, de modo que o desenvolvimento das atividades seja possível, proveitoso e promova o desenvolvimento das habilidades esperadas.

A calculadora também é um recurso bastante utilizado em situações cotidianas por boa parte das pessoas e pode ser uma

ferramenta eficiente para correção de erros, averiguação de respostas e teste de hipóteses, sendo possível utilizá-la como instrumento de autoavaliação ou investigação.

Diversos outros recursos podem ser adaptados para ampliar o engajamento dos estudantes e favorecer a aprendizagem: *blogs* ou *fotologs* para armazenamento de projetos ou pesquisas realizadas pelos estudantes; aplicação de *quizzes* interativos, desenvolvimento de vídeos, animações interativas e *podcasts*, por exemplo.

O uso das ferramentas também deve ser feito com responsabilidade. Em uma época em que se discute a veracidade das informações, compreender e utilizar corretamente ferramentas digitais de pesquisa é fundamental para evitar *fake news*. Assim, a prática de pesquisa pode ser incentivada e adotada na abordagem de todos os conteúdos matemáticos.

4. Por uma educação inclusiva

Para incluir estudantes com deficiência, o professor deve favorecer a interação e o respeito à diversidade em sala de aula. A seguir, apresentamos algumas orientações para contribuir em sua prática pedagógica.

- Conheça os estudantes, para que eles sejam assistidos de modo adequado. Sugerimos uma conversa com os estudantes e os familiares e/ou responsáveis para compreender o contexto deles e entender as potencialidades e dificuldades.
- Pergunte a cada estudante com deficiência qual é a melhor maneira de auxiliá-lo ao perceber uma dificuldade.
- Caso os familiares ou responsáveis façam a entrega de algum documento ou relatório de profissionais de saúde externos, é importante analisar com cautela quais são as orientações desses profissionais sobre as adaptações necessárias para o estudante na escola e em sala de aula.
- Valorize as potencialidades dos estudantes e incentive sua participação de maneira ativa durante as aulas.
- Sempre que possível, planeje as aulas e atividades com acessibilidade, favorecendo a inclusão de todos os estudantes. Além disso, capacite-se de variados formatos sobre inclusão e educação especial e atualize-se para explorar novas metodologias e tecnologias assistivas.
- Atente a possíveis preconceitos ou *bullying* em sala de aula e na escola e não permita qualquer ação capacitista ou prática que diminua as potencialidades do estudante com deficiência. Sugerimos o estudo e o aprofundamento sobre os vieses inconscientes do capacitismo.

Para aprimorar ainda mais a prática pedagógica, seguem dicas para o dia a dia em sala de aula.

- Se houver estudantes surdos ou com deficiência auditiva, ao passar um vídeo em sala, verifique se a resolução está boa, se o áudio está bom. Em alguns casos, é necessário ativar a legenda dos vídeos ou apresentá-lo com Libras.
- Se houver estudantes com deficiência física ou mobilidade reduzida, faça adaptação na organização do espaço da sala de aula para garantir a acessibilidade. Outra possibilidade é ajustar materiais e equipamentos didáticos, como usar pranchetas ou suportes de escrita para estudantes com dificuldade em usar a mesa convencional.
- Se houver estudantes com deficiência intelectual, seja objetivo ao falar e certifique-se de que ele compreendeu a informação. Estimule o estudante a participar ativamente do processo de ensino e aprendizagem, perguntando sobre suas dificuldades e quais recursos podem ajudá-lo.
- Se houver estudantes com cegueira, baixa visão e/ou visão monocular, entregue a ele atividades com uma fonte maior ou diferente do padrão.
- Se houver estudantes com o Transtorno do Espectro Autista, sempre verifique com ele qual recurso atende melhor a suas necessidades, considerando sua condição.
- Se houver estudantes com altas habilidades/superdotação, avalie a necessidade de oferecer conteúdo ou material diferenciado para incentivar seu desenvolvimento contínuo.

Sua dedicação em criar um ambiente inclusivo fará uma grande diferença na trajetória educacional dos estudantes com deficiência.

Dica

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. *Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva*. Brasília, DF: MEC, 2008.

  Essa política, em conformidade com o documento disponível no portal do Ministério da Educação e Cultura (MEC), estabelece as diretrizes fundamentais para a inclusão de estudantes com necessidades educacionais especiais no sistema regular de ensino. Também enfatiza a importância de garantir o acesso, a participação e a aprendizagem de todos os estudantes, independentemente das condições físicas, sensoriais, intelectuais ou múltiplas.

- GUIMARÃES, M. C. A.; BORGES, A. A. P.; VAN PETTEN, A. M. V. N. Trajetórias de alunos com deficiência e as políticas de educação inclusiva: da Educação Básica ao Ensino Superior. *Revista Brasileira de educação especial*, n. 27, 2021. Disponível em: https://tedit.net/b7t7jm. Acesso em: 18 set. 2024.

  No texto, os autores analisam as experiências e os desafios enfrentados por estudantes com deficiência ao longo de sua jornada educacional, desde a Educação Básica até o Ensino Superior, à luz das políticas de inclusão. Esse artigo oferece *insights* interessantes sobre como apoiar efetivamente esses estudantes e implementar práticas inclusivas que promovam a equidade e a continuidade educacional.

5. As avaliações

Conceituamos avaliação não como uma etapa isolada, mas como parte do processo educativo, no qual o professor, os estudantes, outros profissionais da escola e os familiares ou responsáveis legais dos estudantes participam ativamente.

Os vários tipos de avaliação fornecem dados sobre o desempenho dos estudantes. Cada um deles tem características e objetivos pedagógicos distintos, por isso é importante conhecer e aplicar o tipo adequado de avaliação em cada momento do processo educacional. Citaremos alguns exemplos de avaliação para que você os utilize em momento oportuno: diagnóstica, formativa, comparativa, ipsativa e somativa.

A escolha de um instrumento avaliativo deve sempre partir do objetivo do educador em relação ao que se pretende avaliar e sobretudo ao uso que dará aos resultados, pois eles podem servir a mais de um tipo de avaliação.

5.1 O planejamento das avaliações e os tipos de avaliação

Toda avaliação parte de um planejamento prévio, quando são definidos, pelo educador, os critérios avaliativos, geralmente considerando os objetivos de sua avaliação e o conteúdo ou conjunto de competências e habilidades que se pretende avaliar e que estejam em consonância com o currículo.

Portanto, o planejamento da avaliação deve especificar quais critérios/habilidades pretende-se avaliar e pode fazer parte do planejamento anual ou de cada etapa letiva.

5.1.1 Avaliação diagnóstica

Esse tipo de avaliação é realizado no início de um semestre ou ano letivo, ou de uma Unidade ou capítulo do material didático, com o objetivo de identificar o nível de conhecimento e as necessidades de aprendizagem dos estudantes. Tem como principal função mapear conhecimentos prévios, habilidades, dificuldades e interesses pelos temas propostos aos estudantes. Permite que o professor planeje e adapte as próprias estratégias de ensino de acordo com as necessidades específicas de cada turma e de cada estudante, promovendo uma aprendizagem mais personalizada e eficaz. Além disso, a avaliação diagnóstica ajuda a detectar possíveis lacunas no conhecimento dos estudantes, possibilitando intervenções pedagógicas precoces que visam corrigir essas deficiências antes que se tornem obstáculos maiores ao aprendizado. Para que isso ocorra, é necessário haver por parte da escola e, principalmente, dos educadores correções de rumo e criações de estratégias pedagógicas eficazes.

A seguir, citamos 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Testes diagnósticos: testes que avaliam conhecimentos específicos e habilidades dos estudantes em uma variedade de formatos, como perguntas objetivas, questões abertas e problemas de resolução.
- Questionários de autoavaliação: instrumentos com os quais os estudantes refletem sobre as próprias habilidades e conhecimentos. Esses questionários podem incluir perguntas sobre as percepções de pontos fortes e áreas de dificuldade em diversos componentes curriculares.

5.1.2 Avaliação formativa

A avaliação formativa tem como objetivo principal fornecer *feedback* contínuo a cada estudante, possibilitando ajustes imediatos no processo de ensino e aprendizagem. Esse tipo de avaliação tem por objetivo monitorar o progresso dos estudantes ao longo do processo educativo, identificar dificuldades, esclarecer dúvidas e reforçar a compreensão dos conteúdos antes que as dificuldades de aprendizagem se tornem maiores.

A seguir, citamos 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Observações em sala de aula: a observação sistemática das interações e do comportamento dos estudantes durante as atividades de ensino pode fornecer informações valiosas sobre suas habilidades sociais, motivação e compreensão dos conteúdos.
- Diários de reflexão ou de aprendizagem: ferramentas com as quais os estudantes registram as próprias experiências de aprendizagem, reflexões, dúvidas e progressos diários ou semanais.

5.1.3 Avaliação comparativa

A avaliação comparativa envolve a comparação do desempenho de um estudante com o de outros estudantes a partir de critérios preestabelecidos. Tem por objetivo situar o desempenho individual dentro de um contexto maior, identificando tanto quem se destaca quanto aqueles que precisam de apoio adicional. Esse modo de avaliação ajuda a identificar padrões de desempenho e diferenças significativas entre grupos de estudantes, fornecendo dados importantes para a tomada de decisões pedagógicas e políticas educacionais. É comum no Ensino Médio, especialmente em contextos competitivos de vestibulares e avaliações nacionais padronizadas, como o Enem.

Citamos a seguir 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Simulados: testes como o Enem, que avaliam os estudantes em uma variedade de componentes curriculares, fornecendo um panorama do desempenho educacional em nível nacional. Os simulados podem ser organizados com questões de provas aplicadas em anos anteriores.
- *Rankings* de desempenho: listagens que ordenam os estudantes com base nos resultados deles em avaliações específicas. Essa técnica é comum em concursos e vestibulares, que utilizam, por exemplo, escalas de avaliação.

5.1.4 Avaliação ipsativa

A avaliação ipsativa, no contexto educacional, foca o progresso pessoal dos estudantes ao longo do tempo. Além disso, permite a eles perceber melhorias, identificar áreas de crescimento e estabelecer metas pessoais, podendo também ser associada ao desenvolvimento do projeto de vida. Essa abordagem contrasta com as demais avaliações citadas.

A avaliação ipsativa é particularmente motivadora, pois destaca as conquistas individuais e incentiva a autoeficácia e a autoestima, e também detecta lacunas para melhorias.

A seguir, citamos 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Portfólios: coleta de trabalhos anteriores dos estudantes que possam evidenciar suas habilidades e conhecimentos prévios.
- Autoavaliações e avaliações por pares: questionários ou reflexões escritos pelos próprios estudantes avaliando seu progresso em relação a metas estabelecidas, que podem também compor o portfólio do estudante como registro do seu desenvolvimento anual no processo de ensino e aprendizagem.

5.1.5 Avaliação somativa

A avaliação somativa é uma abordagem que visa avaliar a aprendizagem dos estudantes ao final de um período instrucional, como um semestre ou ano letivo. O principal objetivo é determinar se os estudantes alcançaram as metas de aprendizagem estabelecidas e qual nível de competência demonstram em relação aos conteúdos curriculares. Essa avaliação é frequentemente utilizada para atribuir notas, promover ou reter estudantes, fornecendo informações sobre a eficácia do ensino, e tem função regulatória, subsidiando decisões de recuperação, conselhos de classe, reprovações.

São citados, a seguir, 2 exemplos de avaliações desse tipo.

- Provas escritas: são uma maneira tradicional de avaliação, com as quais os estudantes respondem a perguntas ou realizam tarefas em um período determinado.
- Trabalhos escritos: podem incluir ensaios, relatórios de laboratório, resenhas de livros, pesquisas, entre outros.

5.2 Trabalhando o Enem em sala de aula: estratégias para melhorar o desempenho dos estudantes

O Enem é uma das principais portas de entrada para o Ensino Superior no Brasil. Criado em 1998 pelo Ministério da Educação (MEC), avalia a qualidade do Ensino Médio e oferece acesso a programas de ingresso no Ensino Superior, tanto governamentais como de redes privadas. A seguir, apresentamos estratégias específicas para trabalhar o Enem nas aulas de Matemática.

1. Revisão dos conceitos fundamentais: priorizar a revisão de tópicos essenciais que são frequentemente abordados no Enem.

2. Resolução de problemas contextualizados: utilizar problemas que envolvam situações cotidianas para demonstrar a aplicação prática da Matemática.

3. Simulados e exercícios práticos: familiarizar os estudantes com o formato do exame e melhorar as habilidades de gerenciamento de tempo.

4. Uso de tecnologia educacional: incorporar ferramentas tecnológicas para diversificar os métodos de ensino e engajar os estudantes.

6. A coleção

6.1 A abordagem teórico-metodológica e os pressupostos da coleção

A BNCC preconiza que o ensino de Matemática deve se pautar nos contextos integrados pelos estudantes e, sobretudo, no protagonismo de cada um deles no processo de ensino e aprendizagem. Para isso realmente ocorrer em sala de aula, é essencial que as práticas pedagógicas possibilitem a participação e a ação dos estudantes.

É importante ressaltar que a aula tradicional não deve ser descartada, pois também possibilita um tipo de aprendizagem que contempla especificidades de determinados conteúdos e para certos públicos. Entretanto, outras práticas pedagógicas podem e devem ser utilizadas trazendo diferentes tipos de significação para os estudantes.

A BNCC sugere que sejam exploradas a resolução de problemas, o raciocínio lógico-matemático, a modelagem matemática, o pensamento computacional e as investigações em sala de aula. Essas práticas, bem como todo o conteúdo que compõe a BNCC e que é fundamento para a abordagem teórico-metodológica desta coleção, são resultado de pesquisas em educação, Educação matemática e letramento matemático, em estudos sobre culturas, mercado de trabalho e desenvolvimento tecnológico, entre outros temas.

6.2 A estrutura da coleção

Esta coleção é composta de 3 Volumes para os Ensino Médio, organizados em Unidades e capítulos. Os conteúdos são introduzidos tomando como base situações-problema ou textos contextualizados, seguidos pela formalização dos conceitos e boxes e/ou seções que complementam a teoria apresentada e têm como objetivos:

- contribuir para a inserção dos estudantes na sociedade em que vivem, proporcionando a eles conhecimentos básicos de teoria e prática de Matemática;
- incentivar a curiosidade, o interesse e a criatividade dos estudantes para que explorem novas ideias e descubram caminhos para a aplicação dos conceitos adquiridos, auxiliando-os na resolução de problemas;
- desenvolver o senso crítico por meio da leitura e da interpretação matemática de fatos e dados publicados;
- desenvolver hábitos de estudo, rigor, precisão, ordem, clareza, concisão, iniciativa, raciocínio, perseverança, responsabilidade, cooperação, crítica, debate e uso correto da linguagem;
- desenvolver a capacidade de classificar, seriar, relacionar, reunir, representar, analisar, sintetizar, conceituar, deduzir, provar e julgar;
- possibilitar o reconhecimento da inter-relação entre os vários campos da Matemática e desta com outras áreas do conhecimento;
- desenvolver o uso do pensamento e a capacidade de elaborar hipóteses, descobrir soluções, estabelecer relações e tirar conclusões;
- proporcionar atividades lúdicas e desafiadoras, incentivando o gosto pela Matemática e o desenvolvimento do raciocínio.

O texto da obra foi elaborado em linguagem acessível, que "conversa" com o leitor, em interação contínua, para possibilitar aos estudantes que compreendam as definições e as propriedades centrais da Matemática em nível elementar.

Indicamos, a seguir, como as Unidades do Livro do Estudante estão organizadas e detalhamos as funções das seções e dos boxes que compõem os Volumes desta coleção.

As respostas das atividades estão no final do Livro do Estudante. Neste Manual, as respostas também aparecem próximas às atividades, em outra cor, junto de algumas resoluções. As demais resoluções completas e comentadas das atividades propostas estão disponíveis nas *Orientações específicas* deste Manual.

Produções em foco

Essa seção, apresentada no início de cada Volume, tem como objetivo ensinar os estudantes a criar diferentes tipos de mídia. Para desenvolver habilidades práticas e tecnológicas, são apresentados minitutoriais que combinam imagens e textos para orientar na produção de mídias como *podcasts*, vídeos, infográficos, mapas conceituais, entre outros.

Unidade e capítulo

Cada Volume do Livro do Estudante está organizado em 5 Unidades e cada uma delas apresenta-se subdividida em capítulos visando facilitar a aprendizagem. Se considerar oportuno, você pode inverter a ordem das Unidades ou de conteúdos específicos, desde que a reorganização tenha sequência lógica e considere o nível de complexidade de cada um deles. Você pode, por exemplo, solicitar aos estudantes que façam uma atividade

proposta em um boxe ou uma seção para avaliação de conhecimentos prévios ou como incentivo para estudos posteriores.

Cada Unidade é iniciada com uma abertura, em uma dupla de páginas, com uma ou mais imagens e textos relacionados aos conteúdos que serão abordados. Na maioria das vezes, a abertura remete aos TCTs e aos temas interdisciplinares que despertam a curiosidade dos estudantes, apresentando assuntos para debates e atividades que contribuem para a formação integral deles por promover o desenvolvimento das habilidades de interpretação e argumentação.

Nas *Orientações específicas* deste Manual há indicações de como conduzir o trabalho com as aberturas; no entanto, os temas propostos possibilitam diversas abordagens envolvendo professores de outros componentes curriculares, os familiares ou responsáveis e a comunidade escolar. Explore as aberturas de acordo com as características da turma.

Atividades resolvidas e Atividades

As atividades presentes nesta coleção são variadas e apresentadas sequencialmente em cada capítulo, em gradação de dificuldade, para que os estudantes apliquem os conteúdos estudados. As atividades e os problemas propostos visam conduzir os estudantes à compreensão de conceitos e propriedades, sem, contudo, negligenciar o desenvolvimento das técnicas de cálculo. Estas, à medida que são abordadas, são aplicadas na resolução de problemas.

Também são propostas atividades mais desafiadoras, bem como para resolução e elaboração de problemas, uso de tecnologias digitais e troca de ideias, opiniões e argumentações entre os estudantes. Muitas atividades são contextualizadas e exploram situações do cotidiano dos estudantes. Elas os incentivam a utilizar diferentes estratégias de resolução e registro e, também, diversos materiais, como instrumentos de medição, instrumentos de construção geométrica, calculadora e outros recursos tecnológicos que os auxiliam a compreender conceitos e adquirir novos conhecimentos.

Experimente

Seção dedicada a atividades práticas que envolvem o uso de tecnologias digitais. Por meio de tutoriais passo a passo, os estudantes são orientados a utilizar ferramentas tecnológicas específicas para desenvolver habilidades importantes.

Cada atividade é apresentada de forma objetiva e clara, visando não só a familiarização dos estudantes com as tecnologias, mas também a aplicação desses recursos no estudo da Matemática.

Interligando

Essa seção visa promover a interdisciplinaridade, conectando a Matemática com outras áreas do conhecimento ou com diferentes temas dentro da própria Matemática. Para isso, apresenta textos, imagens e atividades que exploram essas conexões, permitindo aos estudantes verem a Matemática em contextos variados, alguns dos quais se relacionam aos TCTs e a questões relevantes e atuais.

Educação financeira

A Educação financeira é trabalhada nessa seção de modo contextualizado, com temas de interesse dos estudantes conectados a situações reais e relevantes do dia a dia. Para isso, a seção utiliza uma combinação de textos, imagens, gráficos e tabelas para explicar conceitos financeiros, além de propor atividades que estimulam a aplicação prática do que foi aprendido. Os TCTs *Educação Fiscal*, *Trabalho* e *Educação para o Consumo* são explorados para fornecer uma visão ampla e crítica da gestão financeira pessoal e suas implicações sociais.

Projeto

Essa seção, que ocorre uma vez em cada Unidade, propõe projetos que incentivam os estudantes a participarem de ações na comunidade, conectando o trabalho pedagógico aos TCTs e aos ODS.

Cada projeto é apresentado por meio de situações-problema que desafiam os estudantes a aplicar seus conhecimentos e habilidades de maneira prática. Além disso, a seção frequentemente sugere ou utiliza uma das mídias apresentadas na seção *Produções em foco*, promovendo o uso criativo e eficiente da tecnologia.

Boxes

Os boxes desta coleção são organizados para complementar e enriquecer o conteúdo principal com diferentes objetivos.

- ***Observação***: apresenta informações acessórias e complementares ao texto principal.
- ***Pense nisto***: desperta a curiosidade dos estudantes ou aprofunda conteúdos específicos com questionamentos que possam ser discutidos em dupla ou grupos, incentivando a troca de ideias entre os estudantes.
- ***Dica***: apresenta sugestões complementares ao conteúdo, podendo incluir indicações de *sites*, textos, *podcasts*, entre outros recursos.
- ***História da Matemática***: tem o objetivo de apresentar textos e informações relacionados a esse tema, ilustrando a construção do conhecimento com exemplos de problemas históricos ou curiosidades.

Viralize!

Seção encontrada ao final de cada Unidade com textos de diferentes mídias que abordam TCTs, além de questões relacionadas a ética e cidadania. A intenção é incentivar os estudantes a refletirem criticamente sobre temas atuais e de grande relevância social. Há também questões de interpretação, opinião pessoal com argumentação e proposta de pesquisa.

Para fundamentar saberes

Seção que está presente ao final de cada Unidade e é dedicada ao aprofundamento e à consolidação dos conteúdos trabalhados, por meio de questões autorais e de provas oficiais que estimulam o raciocínio crítico e a capacidade de análise dos estudantes.

Perguntas para autoavaliação fazem parte dessa seção com o objetivo de promover a reflexão dos estudantes sobre o processo de aprendizagem, englobando tanto os conhecimentos adquiridos quanto aspectos atitudinais e socioemocionais.

6.3 Sugestões de cronogramas para a coleção

Sugerimos que o professor que vai conduzir as aulas com esta coleção tenha, prioritariamente, formação disciplinar em Matemática. Em composição com esse professor, outros podem e devem ser convidados a trabalhar coletivamente nas aulas interdisciplinares.

Para um bom planejamento e execução desse trabalho coletivo, é importante que os professores envolvidos planejem juntos, em cada oportunidade, o cronograma de atuação e como será o papel de cada um deles no decorrer das aulas.

Para colaborar com o planejamento de seu trabalho ao utilizar cada Volume desta coleção, apresentamos uma sugestão de distribuição dos conteúdos a ser organizada em cronogramas bimestrais, trimestrais e semestrais. No entanto, você pode organizar os capítulos e as Unidades seguindo critérios de seleção dos temas de acordo com as necessidades da turma e levando em conta a carga horária semanal do componente curricular, as propostas curriculares do estado onde se situa a escola e o projeto pedagógico desta instituição.

Ao longo do ano letivo, também é importante considerar a possibilidade e a necessidade de replanejamento, tendo em conta tanto o desenvolvimento individual e coletivo dos estudantes quanto os resultados das avaliações aplicadas. Desse modo, torna-se mais factível o planejamento das aulas considerando a realidade dos estudantes, os conhecimentos prévios deles e as eventuais necessidades de recuperação de aprendizagens antes de seguir com determinado estudo.

Para a elaboração da sugestão de cronograma a seguir, foram consideradas 40 semanas letivas, conforme previsto pela Lei Federal n. 13.415 de 2017.

Volume 1

<table>
<tr><th colspan="2">Unidade e capítulo</th><th colspan="4">Sugestão de cronograma</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 1: Conjuntos e conjuntos numéricos</td><td>Capítulo 1: Conjuntos</td><td>Semanas 1 e 2</td><td rowspan="2">1º bimestre</td><td rowspan="3">1º trimestre</td><td rowspan="6">1º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Conjuntos numéricos</td><td>Semanas 3 a 6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Unidade 2: Funções de 1º grau e de 2º grau</td><td>Capítulo 3: Funções</td><td>Semanas 7 a 9</td></tr>
<tr><td>Capítulo 4: Função afim</td><td>Semanas 10 a 13</td><td rowspan="3">2º bimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 5: Função quadrática</td><td>Semanas 14 a 18</td><td rowspan="4">2º trimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Unidade 3: Semelhança e trigonometria no triângulo retângulo</td><td>Capítulo 6: Semelhança e congruência de figuras planas</td><td>Semanas 19 a 22</td></tr>
<tr><td>Capítulo 7: Trigonometria no triângulo retângulo</td><td>Semanas 23 e 24</td><td rowspan="3">3º bimestre</td><td rowspan="6">2º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 8: Área de figuras planas</td><td>Semanas 25 a 29</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 4: Circunferência trigonométrica e leis dos senos e dos cossenos</td><td>Capítulo 9: Circunferência trigonométrica</td><td>Semanas 30 a 33</td><td rowspan="3">3º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 10: Trigonometria em triângulos quaisquer</td><td>Semanas 34 e 35</td><td rowspan="3">4º bimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 5: Estatística básica</td><td>Capítulo 11: Noções básicas de Estatística</td><td>Semanas 36 e 37</td></tr>
<tr><td>Capítulo 12: Representações gráficas</td><td>Semanas 38 a 40</td></tr>
</table>

Volume 2

<table>
<tr><th colspan="2">Unidade e capítulo</th><th colspan="4">Sugestão de cronograma</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 1: Funções exponenciais e funções logarítmicas</td><td>Capítulo 1: Função exponencial</td><td>Semanas 1 a 4</td><td rowspan="3">1º bimestre</td><td rowspan="3">1º trimestre</td><td rowspan="5">1º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Função logarítmica</td><td>Semanas 5 a 8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 2: Matrizes e sistemas lineares</td><td>Capítulo 3: Matrizes</td><td>Semanas 9 e 10</td></tr>
<tr><td>Capítulo 4: Sistemas lineares</td><td>Semanas 11 a 15</td><td rowspan="3">2º bimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Unidade 3: Geometria espacial</td><td>Capítulo 5: Noções de Geometria espacial de posição</td><td>Semanas 16 a 18</td><td rowspan="2">2º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 6: Prismas e pirâmides</td><td>Semanas 19 a 23</td></tr>
<tr><td>Capítulo 7: Cilindros, cones e esferas</td><td>Semanas 24 a 30</td><td rowspan="2">3º bimestre</td><td rowspan="4">2º semestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 4: Análise de medidas e representações gráficas</td><td>Capítulo 8: Medidas em Estatística</td><td>Semanas 31 a 33</td><td rowspan="3">3º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 9: Quartis, percentis e box-plot</td><td>Semanas 34 e 35</td><td rowspan="3">4º bimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 5: Funções trigonométricas</td><td>Capítulo 10: Fenômenos periódicos e função seno</td><td>Semanas 36 a 38</td></tr>
<tr><td>Capítulo 11: Função cosseno</td><td>Semanas 39 e 40</td></tr>
</table>

Volume 3

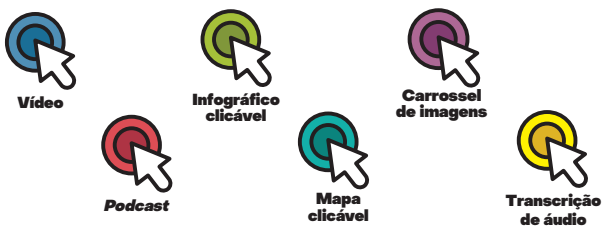
<table>
<tr><th colspan="2">Unidade e capítulo</th><th colspan="4">Sugestão de cronograma</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 1: Sequências e Matemática financeira</td><td>Capítulo 1: Sequências e progressões</td><td>Semanas 1 a 4</td><td rowspan="2">1º bimestre</td><td rowspan="3">1º trimestre</td><td rowspan="5">1º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2: Matemática comercial e financeira</td><td>Semanas 5 a 9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 2: Grandezas e medidas</td><td>Capítulo 3: Sistema Internacional de Unidades</td><td>Semanas 10 a 12</td><td rowspan="3">2º bimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 4: Outras unidades de medida</td><td>Semanas 13 a 15</td><td rowspan="3">2º trimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 3: Pensamento computacional</td><td>Capítulo 5: Algoritmos e fluxogramas</td><td>Semanas 16 a 19</td></tr>
<tr><td>Capítulo 6: Noções de programação</td><td>Semanas 20 a 22</td><td rowspan="2">3º bimestre</td><td rowspan="4">2º semestre</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Unidade 4: Combinatória e probabilidade</td><td>Capítulo 7: Análise combinatória</td><td>Semanas 23 a 26</td></tr>
<tr><td>Capítulo 8: Probabilidade</td><td>Semanas 27 a 30</td><td rowspan="3">3º trimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Unidade 5: Geometria analítica, transformações geométricas e ladrilhamento</td><td>Capítulo 9: Noções de Geometria analítica</td><td>Semanas 31 a 34</td><td rowspan="3">4º bimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 10: Transformações geométricas no plano</td><td>Semanas 35 a 38</td></tr>
<tr><td>Capítulo 11: Ladrilhamento do plano</td><td>Semanas 39 e 40</td></tr>
</table>

6.4 Os Objetos Educacionais Digitais da coleção

Utilizar linguagens e tipos de mídia é fundamental para alcançar diversos públicos, pois cada estudante tem particularidades e maneiras de aprender melhor. Enquanto alguns assimilam informações de maneira mais produtiva por meio de vídeos, outros podem tirar melhor proveito de infográficos ou mapas interativos. Essa variedade também pode contribuir para sanar lacunas de conhecimentos prévios e apoiar diferentes modos de aprendizagem, ajudando a tornar o aprendizado mais acessível e significativo.

Nesse sentido, os Objetos Educacionais Digitais (OEDs) desta coleção podem ser utilizados com a finalidade de retomar, aprofundar, complementar ou apresentar novos conteúdos e temas, promovendo a compreensão e oferecendo várias maneiras de interagir com o livro. Além disso, alguns exemplos apresentados de modo mais simples também podem auxiliar na aprendizagem e respeitar as diversas trajetórias e perfis de cada estudante.

Nesta coleção constam vídeos, *podcasts*, infográficos clicáveis, mapas clicáveis e carrossel de imagens. Esses OEDs são indicados no sumário do Livro do Estudante e também nas páginas sugeridas para o trabalho, permitindo sua utilização de maneira integrada ao conteúdo.



7. Referências complementares para aprofundamento

Todos os *sites* foram acessados em 9 de setembro de 2024.

7.1 Livros para aprofundamento e formação continuada

- *A Matemática no Ensino Médio*, de Elon Lages Lima, Paulo César Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César de Oliveira Morgado. v. 1-4. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

  Nos Volumes de 1 a 3, são apresentados, de modo aprofundado, os principais conteúdos estudados em Matemática no Ensino Médio; no Volume 4 são apresentadas as soluções de todos os exercícios propostos nos Volumes anteriores.

- *Análise combinatória e probabilidade*, de Paulo Cezar Pinto Carvalho, Augusto César de Oliveira Morgado, Pedro Fernandez e João Bosco Pitombeira. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

  O livro aborda os princípios fundamentais da análise combinatória e da Probabilidade, oferecendo uma base sólida para o ensino desses tópicos no Ensino Médio.

- Coleção do Professor de Matemática IMPA/VITAE, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

  A coleção oferece um excelente material de consulta, aprofundamento e pesquisa para o professor de Matemática do Ensino Médio.

- *Como educar crianças anticapacitistas*, de Mariana Rosa e Karla Garcia Luiz. 1. ed. Florianópolis: Ed. das autoras, 2023.

  O livro oferece orientações práticas e teóricas para educar crianças e jovens de maneira inclusiva e anticapacitista, promover a igualdade e o respeito às diferenças e criar um ambiente de aprendizado mais justo e acolhedor para todos os estudantes.

- *Construções geométricas*, de Eduardo Wagner. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

  Métodos clássicos e modernos de construções geométricas são apresentados no livro proporcionando ferramentas práticas para ensinar Geometria de maneira visual e interativa.

- *Coordenadas no espaço*, de Elon Lages Lima. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

  O livro apresenta uma introdução detalhada ao sistema de coordenadas no espaço, facilitando a compreensão de conceitos tridimensionais essenciais para o Ensino Médio.

- *Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios*, de Elon Lages Lima. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

  O livro oferece uma abordagem completa sobre coordenadas no plano, incluindo a resolução detalhada de exercícios, ideal para professores que buscam aprofundar o conhecimento dos estudantes.

- *Dificuldades específicas de aprendizagem*: ideias para trabalhar com dislexia, discalculia, disgrafia, TDAH, TEA, síndrome de Asperger e TOC, de Diana Hudson. Tradução de Guilherme Suma. Petrópolis, RJ: Vozes, 2019.

  O livro traz a descrição e análise de diversos tipos de dificuldades de aprendizagem, auxiliando na conscientização e formação de educadores a respeito desse tema e oferecendo uma série de atividades que podem ser trabalhadas com os estudantes.

- *Introdução à Geometria espacial*, de Paulo Cezar Pinto Carvalho. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

  O livro apresenta uma introdução abrangente à Geometria espacial, cobrindo conceitos fundamentais e aplicações práticas.

- *Introdução à lógica*, de Cezar A. Mortari. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

  O livro aborda inferência, dedução, indução e outras conceituações e mostra a diferença entre a lógica clássica e a não clássica.

- *Introdução às técnicas de demonstração na Matemática*, de John A. Fossa. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O autor convida o leitor a "mergulhar" no caminho das argumentações em Matemática.

- *Logaritmos*, de Elon Lages Lima. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

  Nesse livro, o autor oferece uma explicação clara e concisa sobre logaritmos, facilitando o ensino desse conteúdo no Ensino Médio.

- *Medida e forma em Geometria*, de Elon Lages Lima. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

  A relação entre medida e forma na Geometria é abordada nesse livro, fornecendo uma base teórica e prática para professores.

- *Meu professor de Matemática e outras histórias*, de Elon Lages Lima. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

  Histórias e experiências do autor com a Matemática são relatadas no livro, oferecendo uma perspectiva inspiradora e motivadora.

- *Os Elementos de Euclides*, traduzido por Irineu Bicudo. 1. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

  Trata-se da primeira tradução completa do texto grego para a Língua Portuguesa. A obra da Antiguidade clássica contém definições, postulados, demonstrações de 465 proposições em forte sequência lógico-dedutiva, referentes à Geometria plana e à Geometria espacial. Há também capítulos destinados à teoria dos números.

- *Progressões e Matemática financeira*, de Eduardo Wagner, Augusto César de Oliveira Morgado e Sheila Zani. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

  O livro aborda progressões aritméticas e progressões geométricas, além de conceitos de Matemática financeira, proporcionando uma aplicação prática dos conteúdos matemáticos no Ensino Médio.

- *Trigonometria e números complexos*, de Eduardo Wagner, Augusto César de Oliveira Morgado e Manfredo Perdigão do Carmo. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

  O livro oferece uma abordagem detalhada sobre Trigonometria e números complexos com foco em aplicações práticas e teóricas.

7.2 História da Matemática

- *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática, de Gilberto G. Garbi. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

  A obra faz um relato da construção do conhecimento matemático em 4 milênios, destacando a vida e as contribuições de grandes matemáticos, a Matemática contemporânea e as mulheres da Matemática.

- *Cinema e História da Matemática*: entrelaços possíveis, de Romélia Mara Alves Souto. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

  A autora discute relações possíveis entre o cinema e a História da Matemática, considerando que tais relações podem construir um ambiente favorável à aprendizagem.

- Coleção História da Matemática para professores.

  Com os dois primeiros livros lançados em 2009, a coleção visa à divulgação e ao uso das produções acadêmicas provenientes de estudos e pesquisa na História da Matemática.

  Em particular, destacamos: o livro *A descoberta do teorema de Pitágoras*, de Sofia Cardoso Marques (1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011), no qual a autora descreve o resultado e as aplicações desse teorema em algumas civilizações antigas, contextualizando-o na cultura e nos conhecimentos dessas civilizações; e o livro *Matemática e medida*: três momentos históricos, de John A. Fossa (org.) (1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009), que apresenta aspectos histórico-epistemológicos importantes para o desenvolvimento de alguns conceitos em Matemática, como medidas.

- Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.

  Essa coleção procura dar ao leitor uma visão abrangente da história da descoberta da Matemática. Está dividida em 6 Volumes, estruturados em tópicos curtos, denominados cápsulas, nos quais é abordado algum assunto ligado à história da criação e do desenvolvimento de um grande tema matemático.

  Entre os Volumes, destacamos: *Números e numerais*, de Bernard H. Gundlach (1. ed. São Paulo: Atual, 1992); *Geometria*, de Howard Eves (1. ed. São Paulo: Atual, 1992); e *Trigonometria*, de Edward S. Kennedy (1. ed. São Paulo: Atual, 1992).

- *História da Matemática*, de Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

  Nessa edição, destacamos os capítulos "Legados do século vinte" e "Tendências recentes", que discorrem, entre outros assuntos, sobre o último teorema de Fermat.

- *História da Matemática*, de Howard Eves. 1. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

  Na introdução de alguns capítulos, encontramos um relato do panorama cultural e histórico da época em questão.

- *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, de Tatiana Roque. 1. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

  O livro aborda diferentes sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Antiguidade até o século XIX, mostrando que práticas diversas sempre coexistiram na busca por soluções diferentes para problemas semelhantes.

- *O último teorema de Fermat*, de Simon Singh. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 1998.

  O livro conta a história da busca épica para resolver um dos maiores enigmas da Matemática de todos os tempos.

7.3 Ensino e aprendizagem em Matemática e Educação Matemática

- *A arte de resolver problemas*, de George Pólya. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

  O autor analisa nesse livro métodos criativos de resolução de problemas, revela as 4 etapas básicas de uma resolução e sugere estratégias a serem desenvolvidas.

- Coleção Tendências em Educação matemática.

  A coleção é voltada para profissionais da área que buscam refletir sobre Educação matemática, a qual está embasada no princípio de que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões. A coleção conta com diversas obras, entre as quais destacamos: *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos estudantes, de Helena Noronha Cury (2. ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2007), em que a autora defende a ideia de que a análise de erros é uma abordagem de pesquisa e também uma possibilidade metodológica se os estudantes forem levados a questionar e refletir sobre as próprias soluções; *Informática e Educação matemática*, de Marcelo de Carvalho Borba e Miriam Godoy Penteado (5. ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2007), com apresentação de exemplos de uso da informática com estudantes e professores em que se debatem temas ligados às políticas governamentais para a informática educativa e

outras questões epistemológicas e pedagógicas; *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*, de Vanessa Sena Tomaz e Maria Manuela Martins Soares David (1. ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2008), no qual, pensando em uma formação integral dos estudantes, os autores ressaltam a importância de tratar o ensino da Matemática levando em conta contextos sociais e a visão interdisciplinar da relação ensino-aprendizagem.

- *Educação Matemática*: da teoria à prática, de Ubiratan D'Ambrosio. 23. ed. Campinas: Papirus, 2014.

  O autor discute inovações na prática docente, propondo reflexões sobre o ensino de Matemática.

- *Educação Matemática*: pesquisa em movimento, de Maria Aparecida Viggiani Bicudo e Marcelo de Carvalho Borba (org.). 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

  Esse livro é fruto dos trabalhos de investigação na área da Educação matemática desenvolvidos por professores pesquisadores do programa de pós-graduação em Educação Matemática da Unesp, do *campus* de Rio Claro (SP). Divide-se em 16 capítulos, escritos por vários professores, que expõem ideias, dúvidas, questionamentos e relatos de experiências na área.

- *Educar por competências*: o que há de novo?, de José Gimeno Sacristán e outros. 1. ed. Porto Alegre: Artmed, 2011.

  A obra apresenta discussões sobre a educação por competências, incluindo um capítulo destinado à avaliação de aprendizagens.

- *Ensinando Matemática para adolescentes*, de Paul Chambers e Robert Timlin. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

  A obra traz sugestões de uso de recursos, planos de aula e discute como avaliar o progresso do estudante de maneira efetiva.

- *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade, de Ubiratan D'Ambrosio. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

  Essa obra apresenta e discute a Etnomatemática levando em conta a realidade sociocultural do estudante, o ambiente em que vive e o conhecimento que traz de casa.

- *Investigações matemáticas na sala de aula*, de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

  Nessa obra, os autores portugueses propõem uma reflexão sobre atividades de investigação em Matemática, suas vantagens e dificuldades.

- *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio, de Estela Kaufman Fainguelernt e Katia Regina Ashton Nunes. 1. ed. Porto Alegre: Penso, 2012.

  Os autores buscam incentivar o professor a procurar novas ideias para uso em sala de aula que o incentivem e também motivem os estudantes para a aprendizagem em Matemática no Ensino Médio.

- *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador, de Jo Boaler. Porto Alegre: Penso, 2018.

  A autora é precursora de uma abordagem que busca incentivar o potencial dos estudantes mediante metodologias ativas de aprendizagem e criatividade.

- *Modelagem em Educação matemática*, de João Frederico da Costa de Azevedo Meyer, Ademir Donizeti Caldeira e Ana Paula dos Santos Malheiros. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

  Os autores desse livro levam o leitor a refletir sobre aspectos da modelagem e suas relações com a Educação matemática.

- *Práticas de modelagem matemática na Educação matemática*, de Lourdes Maria Werle de Almeida, Jussara de Loiola Araújo e Eleni Bisognin. 1. ed. Londrina: Eduel, 2011.

  As autoras descrevem experiências em sala de aula e resultados de pesquisas com modelagem matemática.

- *Tecnologias digitais e Educação matemática*, de Marcelo C. Borba e Aparecida Chiari (org.). 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

  Os autores exploram a importância e o potencial das tecnologias digitais para educação e aprendizagens em Matemática.

7.4 Avaliação

- *A avaliação da aprendizagem escolar*, de Celso Antunes. 10. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012. (Coleção Na sala de aula).

  A obra apresenta sugestões de práticas, expõe princípios e debate estratégias e modelos avaliativos.

- *As competências para ensinar no século XXI*: a formação de professores e o desafio da avaliação, de Philippe Perrenoud e Monica Gather Thurler. 1. ed. São Paulo: Penso, 2002.

  O livro traz para o leitor os textos nos quais os autores suíços apoiaram suas falas na vinda ao Brasil, em 2001, em conferências que contavam com a participação dos educadores brasileiros Lino de Macedo, Nilson José Machado e Cristina D. Allessandrini.

- *Avaliação de aprendizagem na escola*: estudos e proposições, de Cipriano Carlos Luckesi. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

  A obra é constituída por alguns artigos escritos pelo autor que posicionam a avaliação como um ato seletivo e inclusivo.

- *Avaliação em Matemática*: pontos de vista dos sujeitos envolvidos na Educação Básica, de César Augusto do Prado Moraes. 1. ed. Jundiaí: Paco, 2012.

  O livro investiga as concepções de avaliação em Matemática na Educação Básica, analisando também os processos avaliativos usados pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e pelo Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp).

- *Avaliação escolar*: vários enfoques e uma só finalidade, melhorar a aprendizagem, de Adriana Patrício Delgado *et al*. 1. ed. Jundiaí: Paco, 2015.

  A obra traz parte da produção acadêmica sobre avaliação, contribuindo para a formação docente.

- *Educação*: competência e qualidade, de Nilson José Machado. 2. ed. São Paulo: Escrituras, 2010. (Coleção Ensaios transversais).

  Nesse livro, o autor convida a uma reflexão sobre a formação na Educação Básica, o significado da qualidade no terreno educacional e as competências a serem desenvolvidas.

7.5 Recursos educacionais digitais

O portal principal da coleção *M3 Matemática Multimídia* contém recursos educacionais em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp-SP. Os recursos podem ser buscados pelas mídias (experimentos, vídeos, *softwares* ou áudios) ou pelos temas centrais (análise de dados e Probabilidade, Geometria e medidas ou números e funções). Disponível em: https://tedit.net/jb7qn1.

7.6 Sugestões de revistas

- *Educação Matemática em Revista*

  É uma publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) que aborda assuntos de interesse para o professor e pesquisador de Matemática. Para os interessados, é possível conseguir mais informações no *site* disponível em: https://tedit.net/6uycfr.

- *Revista do Professor de Matemática* (RPM)

  Publicação destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Disponível em: https://tedit.net/rvit8y.

- *Nova Escola*

  A revista auxilia o educador na complexa tarefa de ensinar. Há reflexões e artigos sobre temas atuais de educação, bem como propostas e relatos de atividades em sala de aula. Disponível em: https://tedit.net/tbxqam.

7.7 Sugestões de *sites*

- Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática João Affonso Pascarelli. Disponível em: https://tedit.net/frda0y.

  Nesse *site*, é possível participar de cursos para professores destinados a atualização profissional, oficinas, palestras e seminários.

- Laboratório de Ensino de Matemática (Unicamp). Disponível em: https://tedit.net/wl8lkg.

  Site do Laboratório de Ensino de Matemática da Unicamp-SP (IMECC – Unicamp) com indicações de cursos, seminários, eventos e publicações que incentivam o aperfeiçoamento de professores da Educação Básica.

- Laboratório de Matemática – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (Unesp). Disponível em: https://tedit.net/rqasoz.

  No *site*, é possível encontrar ideias de jogos para o ensino da Matemática desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

- Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: https://tedit.net/r0gova.

  É o *site* oficial da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), sob responsabilidade do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa), situado no Rio de Janeiro. Estão disponíveis para *download* as provas com gabaritos de vários anos da OBM, nos diversos níveis.

- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Disponível em: https://tedit.net/rvlj0j.

  Nesse *site* é possível obter as provas resolvidas das edições anteriores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Além disso, há um banco de questões separadas por níveis.

  O *site* também conduz a um canal chamado Portal de Matemática OBMEP, no qual são disponibilizadas videoaulas com professores selecionados, voltadas para estudantes e professores, além de conteúdos interativos, vídeos e materiais que podem ser baixados.

- Mathema. Disponível em: https://tedit.net/6uno05.

  Nesse *site*, o professor encontra informações sobre o Ensino Médio, cursos de aperfeiçoamento profissional, sugestões de livros, revistas, *sites*, *softwares* e vídeos que visam melhorar a prática docente, bem como reflexões sobre temas relacionados à Educação matemática.

- Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponível em: https://tedit.net/0sb2ne.

  No *site* há indicação de eventos regionais, nacionais e até internacionais. Também estão listados grupos de pesquisa de universidades em todo o Brasil e laboratórios de Educação matemática de todas as regiões.

7.8 Questões curiosas de Matemática, jogos e desafios de raciocínio quantitativo

- *Conexões matemáticas educacionais*: aprendendo novas e explorando antigas, de Ruy Madsen Barbosa. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

  O livro explora brincadeiras com retângulos mágicos, quadrados "bem comportados", cubos, policubos e dominós, estabelecendo conexões com teoria dos números, análise combinatória, etc.

- *Matemática e Arte*, de Dirceu Zaleski Filho. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

  O autor propõe aproximar a Matemática e a Arte no ensino, analisando e integrando a História da Matemática e a História da Arte e sugerindo novas possibilidades de trabalho em sala de aula.

- *Revisitando conexões matemáticas com brincadeiras, explorações e materiais pedagógicos*, de Ruy Madsen Barbosa. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

  O autor elege objetos geométricos como pontos de partida para atividades e reflexões.

7.9 Filmes sobre Matemática e personalidades da área

- *O homem que viu o infinito* (2015)

  O filme conta a história de Snirivasa Ramanujan, matemático indiano de origem simples, mas considerado um dos maiores matemáticos do século XX.

- *O jogo da imitação* (2015)

  Nesse filme, ambientado durante a Segunda Guerra Mundial, Alan Turing e equipe auxiliam o governo britânico a desvendar um código secreto nazista, mostrando a origem dos computadores e a aplicação da Matemática na criptografia.

- *Uma mente brilhante* (2001)

  O filme conta a história de John Nash, famoso matemático americano que sofria de esquizofrenia. Nash é responsável por diversas descobertas com aplicações na Economia, que lhe renderam um prêmio Nobel.

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS

Introdução ao Volume 1

Este volume é composto de 12 capítulos, organizados em 5 Unidades, abordando diversas habilidades e competências específicas da Matemática e suas Tecnologias previstas para o Ensino Médio na BNCC, bem como competências gerais da Educação Básica e Temas Contemporâneos Transversais.

Na Unidade **1** – "Conjuntos e conjuntos numéricos", serão exploradas noções básicas de conjuntos, com o objetivo de resgatar, consolidar e aprofundar conhecimentos que os estudantes trazem dos Anos Finais do Ensino Fundamental, fazendo uso da notação e da linguagem matemática. Também são vistas as relações de pertinência e inclusão, bem como as operações entre conjuntos e o estudo de conceitos estruturantes como o de razão, de proporção e de porcentagem e suas aplicações nas práticas do cotidiano. Essas noções são importantes para a vivência das aprendizagens previstas nas próximas Unidades.

Na Unidade **2** – "Funções de 1º grau e de 2º grau", são abordados assuntos como o conceito de função, domínio e imagem de uma função, construção de gráficos de funções, a taxa de variação de uma função, interpretação do gráfico de uma função para resolver problemas, estudo de máximos ou mínimos de uma função quadrática, o estudo da função afim e da função quadrática aplicada a modelagem de custos, receitas, lucros e investimentos.

Na Unidade **3** – "Semelhança e trigonometria no triângulo retângulo", são apresentados, por meio de situações e contextos que fazem parte do cotidiano, os conceitos que fazem parte do eixo de Geometria e Medidas, como razões trigonométricas e relações métricas, áreas e suas relações, além de apresentar diferentes oportunidades para o desenvolvimento do letramento matemático.

Na Unidade **4** – "Circunferência trigonométrica e lei dos senos e dos cossenos", são abordados arcos, ângulos, congruências e simetrias na circunferência trigonométrica, assim como a determinação dos valores de seno, cosseno e tangente de pontos pertencentes à circunferência trigonométrica. Com esses conceitos estabelecidos, serão apresentadas a lei dos senos e a lei dos cossenos como ferramentas para mensurar distâncias que não podem ser medidas diretamente.

Na Unidade **5** – "Estatística básica", por meio de situações e contextos que fazem parte do cotidiano, são apresentados não só conceitos que fazem parte do eixo de Probabilidade e Estatística, como variáveis quantitativas e qualitativas, população, amostra e o uso de gráficos, mas também diferentes oportunidades de desenvolvimento do letramento matemático.

O estudo de diferentes conteúdos, objetos do conhecimento, habilidades e competências permite o desenvolvimento de distintas abordagens nas aulas e, de maneira análoga, exige uma gama diversificada de conhecimentos prévios dos estudantes. Assim, apresentamos a seguir orientações didáticas e abordagens específicas para o Volume, a fim de nortear seu trabalho nas aulas.

Para além dessas sugestões, conforme exposto nas *Orientações gerais* deste Manual, é importante organizar previamente os diferentes modelos avaliativos – no início de cada bloco pedagógico (Unidade ou capítulo, por exemplo), durante o desenvolvimento dos blocos e ao término dos estudos – e fazer uso dos resultados para o planejamento e replanejamento das aulas e das metodologias de ensino.

Por exemplo, para diagnosticar tanto as aprendizagens já efetivadas quanto aquelas que precisam ser retomadas e/ou recuperadas, mobilize os conhecimentos prévios dos estudantes no início de um bloco pedagógico. Após o estudo de um tópico, seção ou capítulo, cada estudante, individual ou coletivamente, e mediado por você, pode mensurar as aprendizagens e verificar como está desenvolvendo as habilidades relacionadas aos conteúdos e objetos do conhecimento mobilizados. Além disso, ao término da Unidade ou no decorrer do estudo dela, sugira as atividades autorais e as questões de exames de larga escala apresentadas na seção *Para fundamentar saberes* para mobilizar e avaliar os diversos conteúdos e replanejamento das aulas e das metodologias de ensino.

Unidade 1: Conjuntos e conjuntos numéricos

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:
CG06, CG08, CG09 e CG10.

Competência de outras áreas do conhecimento:
CECNT02.

Temas Contemporâneos Transversais:
Ciência e Tecnologia; *Diversidade Cultural*; *Educação Alimentar e Nutricional*; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso*; *Saúde*; *Trabalho*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Compreender e usar a notação simbólica básica dos conjuntos.
- Reconhecer e utilizar as operações entre conjuntos, como união, interseção e diferença.
- Identificar números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.
- Identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números racionais.
- Reconhecer e utilizar aproximações racionais para os números irracionais.
- Localizar os números reais (racionais ou não) na reta numerada.
- Generalizar o conceito de módulo de um número inteiro para o universo real.
- Utilizar as propriedades dos números reais.
- Compreender as características do conjunto dos números complexos.

- Caracterizar e reconhecer os intervalos reais, bem como aplicar as operações de união e interseção com esses intervalos.
- Consolidar conceitos estudados no Ensino Fundamental como razão, proporção e porcentagens.

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

Ao trabalhar questões relacionadas a alimentação saudável e autocuidado físico, a abertura dessa Unidade favorece o trabalho com o TCT *Educação Alimentar e Nutricional*, bem como com a competência geral CG08 da BNCC. Além disso, possibilita a promoção positiva da cultura, história e imagem quilombola.

Explore a abertura da Unidade e o texto apresentado nesse Manual com os estudantes, possibilitando reflexões sobre o cultivo da mandioca e sobre como esse alimento é fundamental na cultura dos povos quilombolas.

Comente com os estudantes que a mandioca é um tubérculo de origem amazônica e que pertence à biodiversidade brasileira, fazendo parte da cultura alimentar de povos tradicionais, como os quilombolas e os indígenas, sendo um alimento historicamente comum no cotidiano do brasileiro, apresentando uma diversidade de maneiras de consumo que variam nas diferentes regiões do país. Além disso, a mandioca é produzida em grande parte por culturas familiares, que se dá pela facilidade de adaptação da planta a diferentes ecossistemas do Brasil, baixo custo de produção e versátil aproveitamento de toda a planta.

Na atividade **1**, solicite a cada estudante que faça uma reflexão individual sobre seus hábitos alimentares. Após a reflexão individual, peça a eles que compartilhem suas respostas com a turma. Promova um debate sobre os desafios e as vantagens de manter uma alimentação saudável.

O trabalho nessa abertura da Unidade pode ser ampliado, solicitando aos estudantes que realizem pesquisas e análises sobre a produção e o consumo de mandioca no Brasil, com um foco especial nas comunidades quilombolas.

Incentive-os a usar em suas análises cálculos com porcentagens, razão, proporção. Assim, além de aprenderem a importância da mandioca na cultura quilombola, também terão a oportunidade de desenvolver habilidades matemáticas e analíticas.

Capítulo 1

Este capítulo possibilita o trabalho envolvendo conjuntos. Ao iniciar o estudo com cada um dos temas dos tópicos apresentados – "Introdução", "Igualdade de conjuntos", "Subconjuntos – relação de inclusão", "Intersecção de conjuntos e união de conjuntos", "Números de elementos da união de 2 conjuntos finitos" e "Diferença entre conjuntos" – questione os estudantes sobre o que eles conhecem de cada um dos temas, a fim de diagnosticar o nível de proficiência da turma.

Esse é um bom momento para desenvolver uma proposta de intervenção para as aprendizagens com foco no esclarecimento de dúvidas, consistindo na retomada dos conceitos de conjuntos, conjuntos numéricos, porcentagem, razão e proporção.

Iniciamos o estudo do capítulo com uma introdução, apresentando alguns conceitos básicos relacionados ao estudo dos conjuntos, além de apresentar o precursor da Teria do Conjuntos, Georg Cantor. As orientações para o professor trazem uma sugestão de um estudo complementar envolvendo a leitura do livro *Cantor*, de Jean-Pierre Belna (v. 25, São Paulo: Estação Liberdade, 2011, coleção Figuras do Saber). Se possível, mobilize os estudantes a organizarem um clube de leitura de Matemática, interligando a Matemática com a Literatura para promover uma aprendizagem ativa e o engajamento dos estudantes no processo de construção do conhecimento.

Proposta para o professor

O texto a seguir explora uma proposta que envolve o clube de leitura Matemática, cujo foco é direcionar o trabalho do professor para o uso desta possibilidade de aprendizagem.

- STACHELSKI, Alessandra Heckler. *Clube de leitura com Matemática*: uma prática com estudantes do Ensino Médio. Orientador: Stormowski, Vandoir. 2021. 91 p. Trabalho de conclusão de graduação (Matemática: Licenciatura) – Instituto de Matemática e Estatística, Porto Alegre, BR-RS, 2021. Disponível em: https://tedit.net/fzific. Acesso em: 3 ago. 2024.

No boxe "Pense nisto" da página 17, mostre aos estudantes a importância das minúcias na notação simbólica de conjuntos: {a} é um conjunto de um elemento, enquanto {{a}} é um conjunto cujo único elemento é um conjunto.

O objetivo do boxe "Pense nisto" da página 18 é levar os estudantes a investigar a relação entre o número de elementos de um conjunto e o número de subconjuntos dele. Analise o nível de compreensão dos estudantes sobre o tema e, se concluir que estão com dificuldades em obter a relação solicitada, peça a eles que listem todos os subconjuntos de um conjunto com 0, 1, 2, 3 e 4 elementos, buscando evidenciar que a relação entre o número de elementos de um conjunto e o número de subconjuntos que ele tem equivale a 2^n. Nesse processo, destaca-se o fato de que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, assim como o próprio conjunto.

Ao trabalhar com o primeiro boxe "Pense nisto" da página 20, ressalte o conceito de união de conjuntos e de conjunto vazio. Explore com os estudantes o que aconteceria com $A \cup B$ se, pelo menos um dos dois conjuntos tivesse um; nesse caso a união entre os conjuntos não seria vazia, como é suposto inicialmente. Assim, para que a união entre os conjuntos seja igual ao conjunto vazio, então tanto o conjunto A quanto o conjunto B devem ser iguais ao conjunto vazio.

No segundo boxe "Pense nisto" da página 20, oriente os estudantes a inserir informações no diagrama de Venn para perceberem que, se a intersecção entre os dois conjuntos for vazia, o número de elementos da operação de união será $n(A) + n(B)$. Se julgar necessário, a depender das dificuldades da turma, forneça mais exemplos de conjuntos A e B em que isso ocorra. Se a turma não apresentar dificuldades basilares, solicite aos estudantes que listem exemplos de conjuntos que evidenciam essa condição.

O trabalho com a seção de atividades da página 21 possibilita o diagnóstico das dúvidas recorrentes, indicando quais aprendizagens precisam ser recuperadas. Durante a resolução das questões, é importante salientar que a solução de alguns problemas que têm a mesma estrutura pode ser obtida utilizando os mesmos procedimentos ou algoritmos, como o uso do diagrama de Venn ou outra estratégia que lhes trouxer mais segurança.

Na atividade **8**, comente com os estudantes que o diagrama de Venn pode ser usado tanto para representar os elementos de um conjunto quanto para representar o total de elementos ali contidos (conjunto universo), como é o caso do diagrama que aparece nessa atividade. Nela, os estudantes são instigados a elaborar uma situação-problema. Solicite a eles que troquem a elaboração com um colega para que debatam os resultados. Esse momento possibilita que os estudantes formulem e descubram problemas criativos e resolvam as questões formuladas, concluindo que pode existir mais de uma maneira de se escrever e resolver uma mesma situação-problema.

Interligando

Explique aos estudantes que K, na medida de temperatura superficial, significa Kelvin, uma unidade de medida de temperatura usada em Química e Física (componentes curriculares da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias). Pergunte se já usaram essa unidade de medida e de que modo o fizeram. Comente que, para converter graus Celsius para Kelvin, basta adicionar 273,15 (pois 0 °C = 273,15 K).

Na atividade **2** dessa seção, destaque a contribuição de Annie Jump Cannon na classificação espectral de Harvard e promova a imagem positiva das mulheres na ciência. Incentive reflexões sobre as dificuldades e conquistas das mulheres em diversas áreas.

Mais informações sobre Annie Jump Cannon podem ser obtidas no episódio #26 do *podcast* Clube de Astronomia, disponível em: https://tedit.net/fo5tle (acesso em: 2 jul. 2024).

Essa seção favorece o TCT *Ciência e Tecnologia* e a competência específica **2** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC.

Projeto

O objetivo do projeto é fornecer informações que auxiliem os estudantes e a comunidade na escolha de uma profissão, aplicando o conhecimento de conjuntos e preparando-os para o mercado de trabalho.

Durante o projeto, os estudantes vão pesquisar profissões de diversas áreas do conhecimento, organizá-las em conjuntos, interagir com diferentes profissionais e organizar uma feira de profissões no espaço escolar.

A realização de uma feira com a participação de convidados promove o desenvolvimento da competência geral CG06 e da CG10 da BNCC, possibilitando aos estudantes valorizar os saberes e as vivências dos profissionais, criando um ambiente onde a comunidade pode explorar diferentes áreas do conhecimento e carreiras, e proporcionando um melhor entendimento das relações próprias do mundo do trabalho.

Além disso, ao participarem desse projeto, os estudantes desenvolvem competências como liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade, contribuindo para a construção de seus projetos de vida de forma consciente e informada.

A realização da feira de profissões também está alinhada ao TCT *Trabalho* e ao ODS **8**, que buscam promover o crescimento econômico inclusivo e sustentável, além de proporcionar trabalho digno para todos.

Para começar

Se considerar oportuno, peça aos estudantes que leiam os textos: Flexibilidade no trabalho é prioridade para geração Z, diz estudo, do *site Correio Braziliense*, publicado em 31 de março de 2024 e disponível em: https://tedit.net/8qjjmb (acesso em: 2 jul. 2024); Quais são as profissões do futuro? Descubra as carreiras que serão tendência, da revista *Exame*, publicado em 4 de janeiro de 2024 e disponível em: https://tedit.net/emyb8u (acesso em: 2 jul. 2024).

Em seguida, promova uma conversa sobre o que leram. Incentive-os a refletir sobre como eles acreditam que o mercado de trabalho mudou desde a época de seus avós até os dias de hoje. Pergunte se eles consideram importante manter um equilíbrio entre a vida profissional e a pessoal e se acreditam que a escolha da profissão pode influenciar nesse equilíbrio.

Desenvolvimento do projeto

Organize os estudantes em 7 grupos. Na "Etapa 1", cada grupo pesquisa ao menos 7 profissões e as classifica por área do conhecimento: Ciências Exatas, Ciências Humanas, Ciências Biológicas ou na intersecção de 2 ou mais áreas. Convide outros professores para colaborar. Use o esquema de setores do Livro do Estudante para auxiliar na classificação, explicando que cada profissão deve ser classificada em apenas um setor.

Na "Etapa 2", cada grupo apresenta suas profissões e classificações. Auxilie na organização dos dados na lousa, usando o conectivo "e" para identificar profissões nas intersecções entre as áreas.

Exemplo de classificação:

Ciências Exatas (E): engenheiro, matemático, físico, programador.

Ciências Humanas (H): professor, psicólogo, advogado, historiador.

Ciências Biológicas (B): biólogo, médico, veterinário, farmacêutico.

Intersecção Exatas e Humanas ($E \cap H$): economista.

Intersecção Humanas e Biológicas ($H \cap B$): psicólogo.

Intersecção Exatas e Biológicas ($E \cap B$): bioinformático (ou bioinformata).

Intersecção Humanas, Exatas e Biológicas ($H \cap E \cap B$): professor de Educação Infantil.

Promova uma conversa para consenso sobre as classificações e inclusão de outras profissões. Incentive a criação de algoritmos simples para organizar as informações.

Na "Etapa 3", defina o espaço escolar para a feira. Se necessário, use salas de aula para diferentes setores.

Na "Etapa 4", os estudantes convidam profissionais de diversas áreas, incluindo professores, parentes, pais de colegas, ex-estudantes, e, se possível, um profissional de recursos humanos ou psicólogo para orientação vocacional. Defina locais, datas e horários com outros professores e coordenadores.

Na "Etapa 5", os estudantes devem verificar a disponibilidade dos profissionais convidados para definir a melhor opção para a feira.

Na "Etapa 6" e na "Etapa 7", os grupos preparam e divulgam o material sobre as profissões e a feira, criando materiais impressos e/ou digitais e divulgando o evento por diferentes canais.

A organização da feira é uma ótima oportunidade para os alunos trabalharem em equipe. Cada etapa, da pesquisa inicial à montagem dos estandes, exige colaboração e comunicação eficaz. Certifique-se de que a turma e os grupos distribuem entre si as tarefas entre os grupos (recepção, apoio, distribuição de materiais, etc.) e prepare o espaço.

Durante a feira, incentive os estudantes a ouvir os profissionais convidados, compreendendo suas trajetórias e desafios, para desenvolver maior compreensão e respeito pelas profissões.

Produto final

Antes do evento, certifique-se de que todos estão no local e preparados para suas tarefas. Durante o evento, acompanhe os grupos e garanta que as atividades ocorram conforme planejado, oferecendo assistência se necessário. Faça anotações para a avaliação.

Avaliação do projeto

Após o evento, avalie com os estudantes os pontos positivos e negativos do projeto. Questione sobre a participação da comunidade, dificuldades, acertos, erros e melhorias possíveis. Analise as respostas coletivamente, documente os pontos discutidos e desenvolva um plano de ação para futuros eventos.

Capítulo 2

Este capítulo aborda conjuntos numéricos, porcentagem, razão e proporção, conceitos essenciais para o Ensino Médio. Inicialmente, explore o conjunto dos números naturais e seus subconjuntos, como os números primos, utilizando, por exemplo, o Crivo de Eratóstenes.

Mostre aos estudantes como encontrar números primos com o Crivo de Eratóstenes, inclusive acima de 100. Construa o crivo com os estudantes e peça que identifiquem até que número foram riscados outros números. Comente que precisamos procurar apenas até a raiz quadrada de 100, ou seja, 10. Como 8, 9 e 10 já foram riscados, riscou-se até o 7. Não há múltiplos de 11, 13, 17, 19, etc., não riscados quando procuramos múltiplos de 2, 3, 5 e 7.

Proposta para o professor

Para mais informações sobre a técnica conhecida como Crivo de Eratóstenes, acesse a videoaula *Crivo de Eratóstenes*, da organização Khan Academy, disponível em: https://tedit.net/0vsed2 (acesso em: 16 set. 24).

O filme indicado na página 27 serve como um disparador de aprendizagem para reflexões sobre conjuntos e a importância da notação matemática. Inspirado na biografia de Srinivasa Ramanujan, um matemático indiano autodidata – hoje reconhecido como um dos grandes contribuidores para o campo da Matemática – o filme aborda questões além do estudo matemático, destacando a superação de preconceitos.

Explore trechos do filme ou organize uma roda de conversa para enriquecer o aprendizado.

Se houver dificuldades com a reflexão proposta no boxe "Pense nisto" da página 27, uma possibilidade é notar que podemos escrever: $2 = 2 \cdot \mathbf{1}$; $4 = 2 \cdot \mathbf{2}$; $6 = 2 \cdot \mathbf{3}$; $8 = 2 \cdot \mathbf{4}$; $10 = 2 \cdot \mathbf{5}$, ..., o que nos sugere que um número natural par pode ser escrito na forma $2n$, em que n é um número natural qualquer.

Na atividade **4** da página 30, revise a leitura e escrita de números grandes e o algoritmo da divisão com zero no quociente. No boxe "Observação" da página 31, explore o método dedutivo, comum no Ensino Médio, junto com verificações empíricas e raciocínio indutivo.

Ao estudar números racionais, resgate e consolide conceitos fundamentais, usando exemplos práticos e retomando porcentagem. Reforce conhecimentos anteriores e mobilize o repertório de resolução de problemas.

Ressalte que o diagrama na página 32 demonstra relações de inclusão dos conjuntos, mas as proporções representadas não devem ser usadas para inferir a quantidade de elementos, pois conjuntos dos números naturais, racionais e irracionais possuem infinitos elementos.

Na primeira pergunta do boxe "Pense nisto" da página 34, os estudantes podem determinar a fração geratriz de 2,0454545..., conforme indicado a seguir.

Seja a dízima periódica $t = 2{,}0454545\ldots$

Temos:

$$\begin{cases} 10 \cdot t = 20{,}4545\ldots \ \mathbf{1} \\ 1000 \cdot t = 2045{,}4545\ldots \ \mathbf{2} \end{cases}$$

Subtraindo **1** de **2**, obtemos:

$$990t = 2025 \Rightarrow t = \frac{2025}{990} = \frac{45}{22}$$

Na segunda pergunta, do mesmo boxe "Pense nisto", todas essas frações geratrizes podem ser obtidas por meio do método apresentado no Livro do Estudante.

Seja a dízima periódica $t = 0{,}333\ldots$

Temos:

$$\begin{cases} t = 0{,}333\ldots \ \mathbf{1} \\ 10 \cdot t = 3{,}333\ldots \ \mathbf{2} \end{cases}$$

Subtraindo **1** de **2**, obtemos:

$$9t = 3 \Rightarrow t = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Seja a dízima periódica $t = 0{,}666\ldots$

Temos:

$$\begin{cases} t = 0{,}666\ldots \ \mathbf{1} \\ 10 \cdot t = 6{,}666\ldots \ \mathbf{2} \end{cases}$$

Subtraindo **1** de **2**, obtemos:

$$9t = 6 \Rightarrow t = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Seja a dízima periódica $t = 0{,}999\ldots$

Temos:

$$\begin{cases} t = 0{,}999\ldots \ \mathbf{1} \\ 10 \cdot t = 9{,}999\ldots \ \mathbf{2} \end{cases}$$

Subtraindo **1** de **2**, obtemos:

$$9t = 9 \Rightarrow t = \frac{9}{9} = \frac{3}{3} = 1$$

É importante que os estudantes percebam que $0{,}999\ldots = 1$, mas que, por exemplo, $0{,}9999999 \neq 1$.

A classificação proposta na atividade **11** favorece o desenvolvimento da argumentação matemática e da competência específica CEMAT05 da BNCC.

O estudo dos números irracionais começa com a análise histórica de segmentos de reta não comensuráveis. Destaque as contribuições de diversos estudiosos para esse estudo.

O resgate histórico, feito de maneira recorrente por meio do boxe "História da Matemática", é fundamental para que os estudantes compreendam o contexto e a evolução dos conceitos matemáticos, valorizando as descobertas e inovações que moldaram o conhecimento atual.

Ao iniciar o trabalho com o tópico "Localização geométrica do conjunto dos números reais", retome com os estudantes as estratégias de localização de números naturais, inteiros e

racionais na reta numérica, ampliando as aprendizagens para a localização de números reais na reta. No exemplo, que envolve a localização de números irracionais, é importante retomar o conceito de raiz quadrada aproximada com os estudantes, uma vez que esse conhecimento pode auxiliar na localização dos números reais na reta numérica.

O trabalho envolvendo intervalos reais, iniciado a partir do tópico "Intervalos reais", pode ser mais efetivo se realizado com o suporte de um *software* de Geometria dinâmica. Se você tiver acesso a um laboratório de informática ou a *notebooks* nos quais os estudantes possam trabalhar individualmente ou em duplas, faça a reserva antecipada da sala ou dos equipamentos.

Se algum estudante estiver utilizando o *software* de Geometria dinâmica pela primeira vez, é interessante que explore as ferramentas, criando pontos, segmentos de retas, polígonos e círculos. Os *softwares* costumam chamar esses elementos de objetos e oferecem recursos para alterá-los, ocultá-los ou excluí-los. Utilizando a ferramenta "Mover" e clicando em um ponto, dever ser possível arrastá-lo para outra posição. Isso pode ser feito com os extremos de um segmento de reta qualquer, por exemplo.

Solicite aos estudantes que criem um ponto A qualquer na área na janela de trabalho. Em seguida, peça-lhes que criem um segmento $\overline{AB}$. Proponha aos estudantes que meçam o comprimento do segmento $\overline{AB}$ com uma ferramenta de medição do próprio *software*. Peça a eles que criem outros segmentos de reta, com uma das extremidades em A, e que tenham a mesma medida do segmento $\overline{AB}$. Para isso, eles podem criar um segmento $\overline{AC}$ de qualquer medida de comprimento, identificar sua medida e depois arrastar o ponto C até que a medida seja a desejada.

Solicite aos estudantes que criem dez segmentos de reta com uma extremidade em A e com a mesma medida do segmento $\overline{AB}$. Ao final dessa proposta, questione-os sobre que tipo de intervalos eles construíram, com base no que foi explorado em sala de aula e de acordo com o material.

No tópico "Porcentagem", explore exemplos sobre a evolução de salários e questione métodos alternativos de resolução. As atividades da seção "Atividades" das páginas 47, 48 e 49 permitem aferir aprendizagens. O trabalho com porcentagens retoma operações com números decimais e prepara para o Ensino Médio.

Na atividade **45**, os estudantes devem criar e resolver duas situações-problema. Para isso, incentive o compartilhamento de ideias e valorize o pluralismo.

A atividade **50** aborda a competência geral CG09 da BNCC, promovendo a valorização da diversidade e a correção de desigualdades históricas e sociais mediante a análise de um texto sobre cotas nas universidades públicas.

Aproveite o tema para promover a valorização das populações indígenas e afro-brasileiras, explicando que esse sistema visa corrigir desigualdades histórias e sociais.

Interligando

Essa seção aborda a interpretação de escalas numéricas e gráficas em mapas, visando a leitura, articulação e interpretação de símbolos e códigos. Os estudantes devem selecionar instrumentos de medição, utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados.

O conceito de razão, exemplificado pela escala numérica, é aprofundado e consolidado. As atividades devem ter mínimas intervenções, pois o texto inicial fornece subsídios suficientes. Ao final, os estudantes devem:

- compreender símbolos em escalas numéricas e interpretar a escala correspondente;
- ler corretamente uma escala gráfica;
- determinar medidas reais a partir de distâncias no mapa e vice-versa;
- escrever escalas numéricas a partir de escalas gráficas e vice-versa;
- comparar escalas.

Educação financeira

Ao abordar questões relacionadas à Previdência Social, essa seção favorece o trabalho com os TCTs *Educação em Direitos Humanos*, *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso*, *Saúde* e *Trabalho*.

A partir do texto, é esperado que os estudantes compreendam que o Instituto Nacional do Seguro Social (INSS) é um órgão federal responsável pelo pagamento da aposentadoria e demais benefícios aos trabalhadores brasileiros, com exceção de servidores públicos. Para ter direito ao benefício da aposentadoria, por exemplo, o trabalhador deverá contribuir mensalmente durante determinado período ao INSS, variando de acordo com o tipo de aposentadoria. Alguns estudantes poderão trazer conhecimentos prévios sobre a tributação em folha de pagamento ou alguma experiência que um familiar já teve com o INSS.

Viralize!

Essa seção valoriza o saber indígena pré-colonial e a Etnomatemática do povo Guarani, favorecendo o TCT *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*. Destaca pratos tradicionais como tucupi, maniçoba e biju, promovendo o TCT *Diversidade Cultural*. Sugira o texto "Estrelas da autêntica gastronomia amazônica, maniçoba e pato no tucupi são patrimônios culturais do Pará" (https://tedit.net/clhcuw, acesso em: 29 jul. 2024) para análise. A seção relaciona a mandioca à decolonialidade e soberania alimentar, valorizando o conhecimento tradicional indígena e a produção familiar. Aproveite para destacar e valorizar os povos do campo, que promovem, por meio do seu trabalho, como indicado no texto, uma produção mais sustentável. Se possível, proponha uma colaboração com professores de História e Geografia para aprofundar o debate, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Para fundamentar saberes

Após o estudo da Unidade "Conjuntos e Conjuntos numéricos", os estudantes, individual ou coletivamente, e mediados por você, podem mensurar as aprendizagens e verificar como estão desenvolvendo as habilidades relacionadas à notação simbólica básica dos conjuntos, operações entre conjuntos, como união, interseção e diferença, além dos conceitos associados aos números reais.

Retome com os estudantes os conceitos abordados sobre conjuntos e Diagrama de Venn. Nas atividades **1** e **2**, aproveite para diagnosticar as aprendizagens associadas a esses objetos do conhecimento e recuperar casos persistentes de defasagem. Nas atividades **3**, **4** e **6**, aproveite para avaliar se os estudantes assimilaram as aprendizagens associadas a conjuntos numéricos,

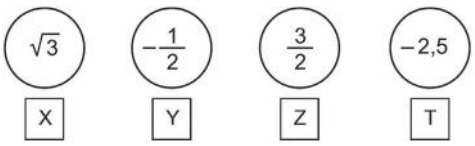
retomando as características de cada conjunto, se necessário. As atividades **5**, **8** e **9** envolvem conceitos de razão, proporção e porcentagem; observe como os estudantes mobilizam conhecimentos para resolver essas questões e, se necessário, realize uma intervenção didática a fim de mediar o processo de resolução.

Possibilite aos estudantes que partilhem conclusões para valorizar a pluralidade de ideias e ampliar o repertório de raciocínios relacionados aos conceitos abordados.

Na realização das questões da seção de autoavaliação, possibilite que os estudantes visualizem o caminho percorrido desde o início até o final da Unidade. Se preferir, solicite que registrem o que aprenderam por meio de esquemas, como mapas mentais, para fundamentar a elaboração das respostas de autoavaliação. Esse processo deve focar na identificação de lacunas de aprendizagem, bem como no planejamento e execução de propostas de recuperação.

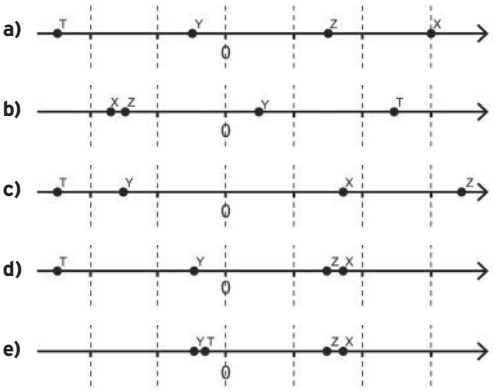
Proposta para o estudante

(Enem) Em um jogo educativo, o tabuleiro é uma representação da reta numérica e o jogador deve posicionar as fichas contendo números reais corretamente no tabuleiro, cujas linhas pontilhadas equivalem a 1 (uma) unidade de medida. Cada acerto vale 10 pontos. Na sua vez de jogar, Clara recebe as seguintes fichas:



Ilustrações: Reprodução/Enem, 2013.

Para que Clara atinja 40 pontos nessa rodada, a figura que representa seu jogo, após a colocação das fichas no tabuleiro, é:

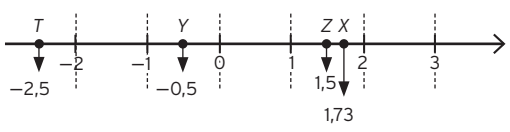


Resolução:

Precisamos posicionar corretamente os números reais na reta numérica. Para isso, inicialmente, vamos representar o valor numérico de cada ficha na forma decimal:

$X = \sqrt{3} \simeq 1{,}73$; $Y = -\frac{1}{2} = -0{,}5$; $Z = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $T = -2{,}5$

Note que os valores em ordem crescente são: $-2{,}5 < -0{,}5 < 1{,}5 < 1{,}73$, ou seja, $T < Y < Z < X$. Então, representando a seguir a figura que retrata o jogo de Clara, com os respectivos valores, temos:



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Alternativa **d**.

Unidade 2: Funções de 1º grau e de 2º grau

A BNCC nesta Unidade

Competência geral da Educação Básica:
CG05.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT01, CEMAT03, CEMAT04 e CEMAT05.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT101, EM13MAT104, EM13MAT302, EM13MAT314, EM13MAT315, EM13MAT401, EM13MAT402, EM13MAT404, EM13MAT501, EM13MAT502, EM13MAT503, EM13MAT506 e EM13MAT510.

Temas Contemporâneos Transversais:
Direitos da Criança e do Adolescente; *Diversidade Cultural*; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação Financeira*; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Construir o conceito de função usando a relação de dependência entre duas grandezas e estabelecer, quando possível, a lei que forneça a relação algébrica entre elas.
- Utilizar e interpretar a notação $y = f(x)$.
- Estabelecer o domínio de uma função a partir de sua lei.
- Relacionar o estudo da taxa média de variação de uma função aos conceitos de velocidade e aceleração escalares médias.
- Resolver problemas que envolvem uma das principais características da função afim: ter taxa média de variação constante.
- Analisar e interpretar o gráfico de uma função para extrair informações significativas a seu respeito.
- Reconhecer exemplos e resolver situações-problema em que as funções estejam contextualizadas em situações do cotidiano ou aplicadas a outras áreas do conhecimento.
- Reconhecer funções definidas por mais de uma sentença em situações cotidianas, como o cálculo do imposto de renda, o valor de uma conta de água de acordo com o consumo ou a comparação entre planos de internet.
- Calcular corretamente os valores assumidos por uma função definida por mais de uma sentença de acordo com os intervalos do domínio.
- Resolver problemas envolvendo máximos ou mínimos da função quadrática, relacionando-os também à Geometria.
- Relacionar o estudo da função afim e quadrática à modelagem de custos, receitas e lucros de empreendimentos.
- Usar *softwares* livres de Geometria dinâmica para reconhecer o traçado e a simetria das parábolas.

- Construir, ler e analisar gráficos das funções estudadas com auxílio de *softwares* livres de Geometria dinâmica.

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

A abertura da Unidade aborda os Jogos dos Povos Indígenas, retratando a diversidade cultural brasileira e, portanto, abordando o TCT *Diversidade cultural*. Uma das modalidades desse jogos, mencionada na abertura da Unidade, é o arremesso de lança. Essa atividade indígena, praticada na pesca, na caça e na defesa, pode ser modelada matematicamente usando o conceito de função, por exemplo, para calcular a medida da altura máxima atingida pela lança. Esse tipo de abordagem permite aliar o estudo matemático com a cultura e prática de povos indígenas.

Capítulo 3

Para diagnosticar tanto as aprendizagens já efetivadas quanto aquelas que precisam ser retomadas e/ou recuperadas, mobilize os conhecimentos prévios dos estudantes, no início do capítulo 3, sobre funções.

Para isso, após a explicação da noção intuitiva de função, instigue os estudantes a compartilharem situações nas quais eles reconhecem o conceito de função nas atividades do dia a dia, como: no cálculo do valor a pagar pela energia elétrica consumida em uma residência, no salário de um funcionário dado o valor da hora trabalhada, no preço a pagar em supermercado por um litro de leite em função do consumo, na medida de distância percorrida em função da medida de tempo por um carro de aplicativo, entre outras situações.

Ao explicar o conceito de funções definidas por fórmulas, diferencie domínio de imagem, propondo aos estudantes que reconheçam qual é o domínio e a imagem tanto na resolução de atividades resolvidas quanto nas situações-problema.

No boxe "Dica" da página 65, sugerimos a leitura do livro *As grandes equações*, de Robert P. Crease (Rio de Janeiro: Zahar, 2008). A leitura desse livro pode auxiliar os estudantes a compreender de maneira aprofundada as funções matemáticas, ao contextualizar o desenvolvimento delas e a aplicação no mundo real.

A atividade **8**, da seção "Atividades", além de abordar o conceito de função, também apresenta uma oportunidade para o trabalho com o TCT *Educação para o Consumo* e com o ODS **12** ao abordar o descarte de lixo eletrônico.

A atividade da seção "Experimente" da página 69 envolve a compreensão do que ocorre com a representação de um par ordenado no plano quando um de seus parâmetros é alterado. O objetivo é que, com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, o estudante possa consolidar os conceitos referentes ao plano cartesiano. Além disso, pode-se discutir a partir dela qual é a condição necessária para que um ponto esteja localizado sobre o eixo das abscissas ou sobre o eixo das ordenadas.

O objetivo do primeiro boxe "Pense nisto" da página 74 é levar o estudante a verificar que é indiferente escolher o sentido em que calculamos a variação (de x_1 para x_2 ou de x_2 para x_1).

Note que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-\left[-f(x_2) + f(x_1)\right]}{-\left(-x_2 + x_1\right)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Ressalte que a taxa de variação de uma função indica situações de crescimento ou decrescimento de uma função e que compreender o cálculo da taxa de variação, bem como interpretá-la em diferentes contextos, nos permite compreender o comportamento de diversos fenômenos, tais como a taxa de crescimento de uma população e a taxa de inflação em determinado período, além de diversos conceitos de Física, como velocidade escalar média e aceleração escalar média.

Na atividade **27**, exploramos o conceito de função associado ao ritmo de crescimento do lucro de uma empresa ao calcular a taxa de variação média do lucro em um determinado período, favorecendo a discussão de aspectos ligados a *Educação Financeira* e ao TCT *Educação para o Consumo*, além de possibilitar o diagnóstico do objetivo pedagógico da Unidade relacionado ao lucro de empreendimentos.

Na sequência são propostas atividades que abordam a discussão sobre insegurança alimentar e favorecem o desenvolvimento do TCT *Educação em Direitos Humanos* (atividade **29**) e o crescimento de usuários da internet na fase da adolescência (atividade **30**).

Interligando

As atividades dessa seção promovem a reflexão sobre conceitos de função e analisam tendências de crescimento populacional dos países mais populosos, utilizando taxas médias de variação e crescimento da população mundial. Se achar oportuno, peça aos estudantes que calculem a taxa média de variação da população com base nos dados fornecidos.

Temos: taxa média de variação $= \frac{10{,}43 - 8}{2080 - 2022} \simeq 0{,}419$; portanto, a taxa média de variação é aproximadamente 0,419 bilhões por ano.

Comente com os estudantes a variação na taxa média de crescimento populacional entre países e questione: "Por que isso ocorre?" e "Por que países como Bulgária e Sérvia podem ter uma taxa média de variação negativa?". Explique que essa variação se deve a fatores socioeconômicos, culturais e políticos, e promova uma conversa sobre esses fatores. Proponha uma pesquisa sobre a dinâmica populacional de diferentes países para aprofundar a compreensão dos estudantes da diversidade das dinâmicas populacionais e dos desafios enfrentados por diferentes nações.

Capítulo 4

Neste capítulo e no capítulo **5**, destacamos situações-problema contextualizadas para que os estudantes relacionem conceitos com o cotidiano. Exemplos como promoções e cálculos de lucro ajudam a entender variações lineares em preços e ganhos. Situações diárias, como duração da bateria e escolha de planos de internet, mostram como funções afins modelam consumo e eficiência. Compreender valores de aplicativos de corrida e consumo de gasolina permite aplicar conceitos matemáticos para gerenciar custos e otimizar recursos. Essas experiências solidificam o entendimento matemático e desenvolvem habilidades essenciais para a vida financeira e tecnológica.

No tópico "Intersecção de retas", destaque que o uso de tecnologias digitais, como *softwares* e aplicativos, contribui como suporte para a investigação matemática e para o desenvolvimento do pensamento computacional. Indicamos alguns momentos em que esses recursos podem ser usados, como nas atividades **2**, **9** e **26** da seção "Atividades"; porém, sempre que possível e oportuno, proporcione momentos que contemplem o uso desses recursos.

No item **d** da atividade **2**, ressalte que, embora o aplicativo faça a construção do gráfico para $t \in \mathbb{R}$, o problema em questão só faz sentido para valores de $t \geqslant 0$. Se necessário, oriente-os a enquadrar o gráfico para melhor visualização. Em geral, existe essa opção no menu de configurações, ou o *zoom* pode ser ajustado utilizando *scroll* do *mouse*.

Já no item **b** da atividade **9**, ressalte que, embora o aplicativo esboce os gráficos para $t \in \mathbb{R}$, deve ser considerado apenas o intervalo em que $t \geqslant 0$. Essa atividade **9** permite o desenvolvimento da habilidade EM13MAT301, relacionada ao comportamento de proporcionalidade e a representações geométricas no plano cartesiano recorrendo ou não a *softwares* de Geometria dinâmica.

O trabalho com a seção "Experimente" da página 96 é uma oportunidade para consolidar o estudo dos coeficientes angular e linear de uma reta por meio de um aplicativo de construção de gráficos.

A atividades **35** apresenta uma perspectiva interessante para a abordagem da função afim tendo em vista o contexto que relaciona o conceito estudado ao saldo de uma conta corrente.

Interligando

Para ajudar os estudantes a compreender a relação entre intervalo de tempo e deslocamento do ônibus em quilômetros, exemplifique situações práticas. Por exemplo, se o ônibus se desloca 40 km a cada meia hora, ele percorre 20 km a cada 15 minutos. Assim, ao dividir a medida de tempo pela metade, a medida do deslocamento também é reduzida proporcionalmente. Continuando, o ônibus desloca-se 10 km a cada 7,5 minutos e 5 km a cada 3,75 minutos. Esses exemplos ilustram a proporção direta entre as medidas de tempo e do deslocamento, facilitando a compreensão dos conceitos.

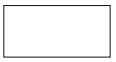
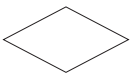
Capítulo 5

Inicie o capítulo investigando a ideia que os estudantes têm dos movimentos em trajetória de parábola, como o movimento de projéteis, a água jorrada por uma mangueira e o arremesso de um objeto, entre outros.

O boxe "Pense nisto" da página 108 traz uma reflexão sobre as modalidades de esportes a partir do campo de estudo de Cinemática, ramo da Física. É possível constatar que o movimento de um objeto submetido a um lançamento oblíquo, ou seja, um objeto lançado para cima e para a frente ao mesmo tempo, pode ser modelado por uma função definida por uma lei do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Verifique se os estudantes mencionam o arremesso de lança citado na abertura da Unidade; se não, retome com eles o assunto.

Na atividade **25**, os estudantes desenvolvem habilidades de pensamento computacional ao criar fluxogramas. Retome com eles a estrutura desse tipo de recurso, explicando cada símbolo utilizado.

Símbolo	Significado
	Início ou fim do algoritmo.
	Procedimento.
	Tomada de decisão.
	Sentido de leitura do fluxograma.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que nessa atividade não há procedimento, apenas tomada de decisão. É importante relembrar que a pergunta dentro do losango aparece com ponto de interrogação e que toda tomada de decisão tem sempre 2 saídas relacionadas às respostas binárias "sim" e "não".

Na atividade **31**, os estudantes devem categorizar as afirmações como verdadeira, falsa ou impossível. É importante destacar para eles a necessidade de verificar se todos os dados necessários para resolver uma situação-problema foram fornecidos. Por exemplo, a afirmativa **II** não pode ser categorizada como verdadeira ou falsa, pois não há dados suficientes para fazer essa determinação. Essa prática ajuda os estudantes a desenvolver habilidades críticas de análise e reconhecer a importância de informações completas e precisas na resolução de problemas.

A seção "Experimente" da página 132 aborda a ideia de construção de modelos matemáticos para descrever fenômenos naturais. Utiliza-se um procedimento matemático para descrever um fenômeno físico, nesse caso, o funcionamento de uma mola, e ajusta-se o modelo por meio da regressão linear de dados, o que favorece o desenvolvimento das competências específicas CEMAT01 e CEMAT03.

Proposta para o professor

Para expandir o estudo sobre funções por meio da contextualização, acesse o artigo "Ensino de funções voltadas às práticas do cotidiano por meio da contextualização", de Leonardo Rodrigo da Silva e Renata Gonçalves Lacerda Oliveira, publicado na *Revista Acadêmica Educação e Cultura em Debate* e disponível em: https://tedit.net/0enrkn (acesso em: 30 ago. 2024). Esse artigo oferece uma abordagem detalhada sobre a aplicação de funções matemáticas em contextos reais, proporcionando uma compreensão mais profunda e prática do tema.

Interligando

Funções em programação, como em Matemática, recebem entradas, executam operações e retornam saídas; dessa maneira, essa seção aborda o uso de funções na ciência da computação, relacionando-as com funções matemáticas. Considerando o tema proposto, destaque a importância do pensamento computacional e dos algoritmos na resolução de problemas.

Educação financeira

Nessa seção, o conceito de função é explorado ao tratar do controle financeiro de um estabelecimento comercial.

Nas atividades dessa seção, os estudantes vão explorar diversas maneiras de representação de funções. Eles definirão as leis das funções, desenvolverão representações algébricas e as representarão no plano cartesiano, criando representações gráficas. Esse processo permite uma compreensão mais abrangente e integrada das funções, facilitando a visualização e a análise de seus comportamentos.

O trabalho com essa seção favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Financeira*, por meio do estudo das funções custo, receita e lucro, explorando a relação entre elas, tratando ainda da perspectiva econômica da intersecção de duas retas, conhecido como ponto crítico ou ponto de nivelamento, que é fundamental para a análise da viabilidade de um negócio.

Ao entenderem como as funções matemáticas podem ser aplicadas para modelar e prever o comportamento financeiro de um empreendimento, os estudantes desenvolvem habilidades essenciais para o planejamento e a gestão eficaz de recursos. A integração desses conceitos prepara os estudantes para enfrentar desafios que envolvem o empreendedorismo.

Projeto

O projeto "Cultivos agrícolas sustentáveis" propõe um modelo de produção agrícola agroecológico, incentivando sistemas sustentáveis de produção de alimentos com técnicas que mantêm os ecossistemas. O objetivo é conscientizar os estudantes do uso sustentável do solo, beneficiando comunidades e natureza.

Espera-se que a turma compreenda a importância da agricultura na produção de alimentos e o manejo sustentável. A criação de um *blog* promove a competência geral CG05 da BNCC, incentivando o uso de tecnologias digitais para obter e divulgar informações sobre alimentos e o impacto dos defensivos agrícolas.

O projeto visa contribuir com a comunidade, evitar contaminação por defensivos agrícolas, conservar ecossistemas e aumentar a quantidade de alimentos seguros.

Para começar

Peça aos estudantes que leiam os dois textos: um sobre problemas do uso indevido de defensivos agrícolas e outro sobre técnicas para evitá-los. Promova uma discussão sobre os benefícios e malefícios dos defensivos agrícolas, abordando questões como:

- Abastecimento dos mercados no Brasil.
- Origem dos legumes, frutas e verduras no estado.
- Proteção dos trabalhadores rurais.
- Vantagens do uso de agrotóxicos para produtores.
- Impacto negativo nos seres vivos.
- Grupos beneficiados pelo uso de pesticidas.

Organize os estudantes em 7 grupos para iniciar o projeto, garantindo acesso a um computador com internet para pesquisas.

Desenvolvimento do projeto

Na "Etapa 1", garanta que os estudantes usem fontes confiáveis. Para solos, consulte o *site* da Embrapa, disponível em: https://tedit.net/1xad4d (acesso em: 5 out. 2024). Para clima, use os dados do IBGE, disponível em: https://tedit.net/1k1yij (acesso em: 5 out. 2024).

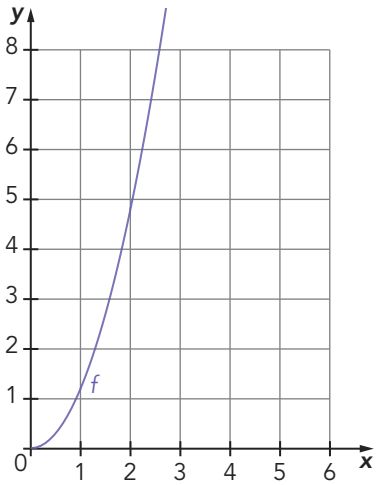
Dados sobre as produções já praticadas em cada estado brasileiro podem ser encontrado no *site* do IBGE, disponível em: https://tedit.net/tg8zyd (acesso em: 5 out. 2024). Outras fontes confiáveis incluem universidades e instituições agronômicas.

Na "Etapa 2", sugira o uso do manual do Senar, disponível em: https://tedit.net/nffyxs (acesso em: 19 jul. 2024). Os estudantes devem levantar informações sobre defensivos agrícolas, instruções de aplicação e quantidade indicada por metro quadrado. Intervenha para orientar a pesquisa técnica.

Após a coleta de dados, os estudantes estabelecerão a lei da função que determina a quantidade de defensivo agrícola recomendada por metro quadrado. A quantidade deve ser considerada em uma única unidade de medida e relacionada a 1 m^2. O gráfico terá o eixo horizontal com a medida do lado da região quadrada e o eixo vertical com a quantidade de fertilizante por metro quadrado.

A função será do tipo $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = ax^2$, em que a é a quantidade de defensivo agrícola recomendada por metro quadrado e x é a medida do lado da região quadrada.

Espera-se que o gráfico da função seja similar ao gráfico apresentado a seguir:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráfico que representa a lei $y = 1{,}2x^2$.

Na "Etapa 3", os estudantes pesquisam a quantidade de defensivos agrícolas em sistemas agroecológicos, como na publicação da Embrapa: https://tedit.net/sy5cbd (acesso em: 5 out. 2024). Um exemplo é o consórcio de milho, feijão e abóbora, usado por povos indígenas: https://tedit.net/jv2oog (acesso em: 5 out. 2024).

Na "Etapa 4", os estudantes usam as informações para criar o texto do *blog*, com linguagem adequada ao público-alvo. Os modelos devem ter embasamento teórico e ser vantajosos para os produtores, sem perdas significativas na produção.

A criação de um modelo de produção agrícola fundamentado em um sistema agroecológico contribui para o ODS **2**, promovendo a criação de sistemas sustentáveis de produção de alimentos e envolvendo a utilização de técnicas agrícolas que, ao mesmo tempo que mantêm a produção, ajudam a preservar os ecossistemas.

Na "Etapa 5", os estudantes criam uma página para publicação. Auxilie-os na escolha de um *site* com hospedagem gratuita.

Na "Etapa 6", os grupos reúnem todas as informações de maneira coesa e interessante, com atenção ao aspecto visual da página para atrair leitores.

Produto final

Criação de um texto detalhado e visualmente atraente. Acompanhe todo o processo, observando a participação dos estudantes para a avaliação.

Avaliação do projeto

Reserve tempo para que os grupos compartilhem seus resultados. Proponha reflexões sobre melhorias, desafios e aprendizados. Avalie o alcance da divulgação dos resultados do projeto pela quantidade de visitas e tempo de permanência na página. Se houver poucos acessos, proponha uma melhora na divulgação.

Viralize!

Essa seção aborda a política de cotas no Brasil, destacando o TCT *Direitos da Criança e do Adolescente*, além de abordar o ODS **4** e o ODS **10**. A política de cotas auxilia pessoas de baixa renda a acessarem universidades, promovendo crescimento e mudanças sociais e econômicas.

A atividade **2** propõe pesquisa sobre os direitos da criança e do adolescente na educação e o papel do governo, promovendo entendimento dos direitos fundamentais e reflexão sobre políticas públicas educacionais.

Seu papel é mediar a atividade, apresentando dados históricos e científicos, se necessário, para dissuadir opiniões que firam os direitos humanos. Compreender a diferença entre equidade e igualdade é fundamental para orientar os estudantes, promovendo um ambiente de aprendizado que valorize a diversidade e busque soluções justas e inclusivas para as desigualdades educacionais.

Para fundamentar saberes

Nessa seção são abordadas situações-problema que contemplam a noção intuitiva de funções, a interpretação de gráficos de funções de 1º e de 2º grau, o uso de fórmulas para representar relações de função, e a determinação de valores máximo e mínimo de uma função. Assim, as atividades propostas mobilizam as habilidades EM13MAT101, EM13MAT302, EM13MAT314, EM13MAT401, EM13MAT402, EM13MAT404, EM13MAT501, EM13MAT502, EM13MAT503, EM13MAT510, além de competências como: utilização de estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, incluindo a análise da plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo que se construa uma argumentação consistente. As atividades também mobilizam os TCTs *Educação para o Consumo* e *Educação Financeira*, bem como o raciocínio lógico-matemático e a dedução.

A atividade **1**, por exemplo, explora a eficiência de um veículo, que pode ser avaliada pela quantidade de quilômetros que ele é capaz de percorrer com um litro de combustível. A atividade **5** explora o conceito de função no contexto financeiro comtemplando os TCTs *Educação Financeira* e *Educação para o Consumo*, favorecendo o desenvolvimento da habilidade EM13MAT304. Já a atividade **6** contempla as habilidades EM13MAT302 e EM13MAT503 ao explorar de forma contextualizada o conceito de máximo de uma função, por meio do cálculo da medida da altura máxima de um saque em um jogo de voleibol, que atinge o teto de um ginásio.

Ao propor aos estudantes que resolvam as situações-problema dessa seção, é importante verificar se conseguem converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º e de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos em que uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e Geometria dinâmica, entre outros materiais. Além disso, é necessário verificar se os estudantes são capazes de reconhecer exemplos e resolver situações-problema em que as funções estejam contextualizadas em situações do cotidiano ou aplicadas a outras áreas do conhecimento, bem como se relacionam o conceito da função afim e quadrática à modelagem de custos, receitas e lucros de empreendimentos.

Proposta para o estudante

(Enem) O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350.000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150.000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) $100n + 350 = 120n + 150$

b) $100n + 150 = 120n + 350$

c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$

d) $100(n + 350\,000) = 120(n + 150\,000)$

e) $350(n + 100\,000) = 150(n + 120\,000)$

Resolução:

Empresa 1: $P_1(n) = 100\,000n + 350\,000$.

Empresa 2: $P_2(n) = 120\,000n + 150\,000$.

A contratação será indiferente quando $P_1 = P_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 100\,000n + 350\,000 = 120\,000n + 150\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow 100n + 350 = 120n + 150$

Alternativa **a**.

Unidade 3: Semelhança e trigonometria no triângulo retângulo

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:
CG01, CG03, CG07, CG09 e CG010.

Competência específica da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT03.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT301, EM13MAT307 e EM13MAT308.

Competência de outras áreas do conhecimento:
CECNT01.

Temas Contemporâneos Transversais:
Diversidade Cultural; *Educação Ambiental*; *Educação em Direitos Humanos*; *Educação para o Trânsito*; *Vida Familiar e Social*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Revisar e aprofundar conceitos estudados nos Anos Finais do Ensino Fundamental, como segmentos proporcionais, teorema de Tales, triângulos semelhantes e teorema de Pitágoras.
- Compreender e ampliar o conceito geral de semelhança.
- Identificar a semelhança entre figuras planas, ampliando e reduzindo figuras segundo uma razão e identificando os elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e os que se modificam (medida dos lados, medida de perímetro e medida de área).
- Calcular a razão entre as medidas dos lados de figuras planas semelhantes e também entre as medidas de área de suas superfícies.
- Compreender a congruência de triângulos como um caso particular da semelhança de triângulos.
- Resolver problemas cotidianos associados a triângulos semelhantes e congruentes.
- Utilizar a semelhança de triângulos para estabelecer as relações métricas no triângulo retângulo.
- Usar o teorema de Pitágoras, bem como suas aplicações.
- Utilizar a semelhança de triângulos na introdução dos conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo.
- Deduzir os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis (30°, 45° e 60°).
- Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas, reconhecendo sua importância no cálculo de medida de distâncias inacessíveis.
- Usar corretamente a calculadora científica e a tabela de razões trigonométricas para obter as razões trigonométricas de outros ângulos agudos.
- Consolidar os conceitos de área e perímetro de figuras planas.
- Resolver problemas que envolvam situações do cotidiano, abrangendo o cálculo de medida de área e de medida de perímetro de regiões planas e escalas de mapas e plantas.
- Relacionar as principais unidades de medidas de áreas.

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

A abertura da Unidade favorece o desenvolvimento dos TCTs *Educação em Direitos Humanos* e *Vida Familiar e Social*, além da competência geral CG10 e da competência específica CEMAT03.

Se houver disponibilidade dos estudantes, peça que observem, no caminho da escola para casa, como são as rampas de acessibilidade e façam anotações sobre elas. Os estudantes poderão utilizar essas percepções no decorrer da unidade. Além disso, questione o que eles entendem por acessibilidade e o que acontece no dia a dia das pessoas quando não há acessibilidade, aproveitando esse momento para promover o desenvolvimento de empatia e de cooperação entre os estudantes da turma.

Capítulo 6

Esse capítulo aborda os conceitos fundamentais de semelhança e congruência de figuras planas, com foco especial em triângulos. Ao tratar de semelhança, trabalha-se com o conceito de razão, critérios de semelhança: AA (ângulo-ângulo), LAL (lado-ângulo-lado) e LLL (lado-lado-lado), além de apresentar casos que contextualizam o tema.

Ao tratar de congruência, faz-se um estudo que abrange seu conceito, condições e critérios para determinar a congruência de triângulos: LLL (lado-lado-lado), LAL (lado-ângulo-lado), ALA (ângulo-lado-ângulo) e LAAo (lado-ângulo adjacente-ângulo oposto). Os casos de congruência são estudados nos Anos Finais do Ensino Fundamental, de acordo com a habilidade EF08MA14 da BNCC. Se julgar necessário, retome a explicação com a justificativa de cada caso e comente o fato de a congruência ser um caso particular da semelhança de triângulos. Além disso, são abordados o teorema de Tales e o teorema da Semelhança como meios de comprovação dos critérios de semelhança de triângulos, e faz-se um estudo sobre triângulos retângulos e suas relações métricas, destacando o teorema de Pitágoras e suas aplicações.

Proposta para o professor

No vídeo *Geometria – Aula 58 – Teorema de Tales através de áreas*, do Programa de Iniciação Científica da Obmep (10 min 10 s) disponível em: https://tedit.net/xwnw0h (acesso em: 17 jul. 2024), é apresentada uma demonstração do teorema de Tales por meio de medidas de área.

É importante que os estudantes compreendam que, ao usar o teorema de Tales, é possível escolher quaisquer 2 segmentos de reta de uma transversal, e não apenas segmentos de reta adjacentes. Na proporção dada, consideramos a razão entre os segmentos e sua correspondente.

As atividades **1** a **6** tratam de semelhança entre formas geométricas planas, como retângulo, triângulo e trapézio.

As atividades **7** a **25** visam auxiliar no desenvolvimento da habilidade EM13MAT308 por meio de situações-problema contextualizadas que exigem a interpretação e modelagem do estudante e outras envolvendo semelhança e congruência em questões envolvendo triângulos.

Após solicitar aos estudantes que façam as atividades, reserve um tempo para que eles as resolvam. Depois, pode-se elaborar um painel de soluções, em que alguns estudantes apresentam suas resoluções na lousa, a fim de analisar e debater o que foi apresentado. Dessa forma, contribui-se para o pluralismo de ideias.

Na atividade **25**, pode-se organizar os estudantes em grupos para que eles possam elaborar um problema envolvendo semelhança de triângulos. Após a elaboração, os grupos podem trocar entre si os problemas para resolvê-los. Ao final, faça um momento de apresentação para a turma dos problemas criados.

No tópico "Razão entre as medidas de área de triângulos semelhantes", ao abordar a semelhança de triângulos, há também um momento para tratar das consequências da semelhança de triângulos, que relacionam a razão k de semelhança com a razão entre as medidas das alturas, das medianas, das bissetrizes e de áreas. Para demonstrar essa relação, é necessário relembrar que a medida de área de um triângulo é calculada por $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$.

Nas atividades **28** a **34**, visa-se desenvolver a habilidade EM13MAT308 por meio de questões que envolvem diferentes propriedades e características de triângulos, incluindo suas relações métricas.

Interligando

Essa seção favorece o TCT *Diversidade Cultural*, abordando a imagem de representantes de 5 etnias nativas dos continentes. Desenvolve as competências gerais CG01 e CG03 ao valorizar a diversidade cultural, social, demográfica e histórica por meio do trabalho do artista Eduardo Kobra.

É possível desenvolver essa seção com professores de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas ou professores de Linguagens e suas Tecnologias ao abordar as artes plásticas e a diversidade cultural. Sugira aos estudantes pesquisar artistas que usam formas geométricas, como Escher, Kandinsky e Mondrian.

Capítulo 7

Neste capítulo, o foco é a aplicação da trigonometria em triângulos retângulos. Nele, são introduzidas as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, que relacionam os lados de um triângulo retângulo com seus ângulos agudos. Essas razões permitem calcular medidas desconhecidas em um triângulo retângulo, desde que se conheçam algumas de suas medidas.

O trabalho com esse conteúdo apresenta uma variedade de situações-problema, como o cálculo da medida da altura de um edifcio e a determinação da medida de distância entre dois pontos. Sendo assim, ao longo do capítulo serão mostrados exemplos práticos que ilustram a aplicação das razões trigonométricas em situações contextualizadas.

O tópico "Introdução" retoma o tema da abertura da Unidade, tratando da acessibilidade conferida pelas rampas no trânsito, de forma que sejam trabalhados os TCTs *Educação para o Trânsito* e *Educação em Direitos Humanos*. Aproveite esse momento para propor uma conversa sobre imprudências que podem acontecer no trânsito, como atravessar a rua quando o semáforo está vermelho e transitar de maneira irregular pela ciclofaixa.

No tópico "Seno e cosseno de um ângulo agudo", ao calcular os valores aproximados de seno, cosseno e tangente de 40°, utiliza-se uma calculadora. Para instruir os estudantes sobre como fazer esse tipo de cálculo em uma calculadora, comente com eles que, em algumas calculadoras científicas, não há a tecla com o sinal de igual e que, nesse caso, deve-se apertar a tecla OK.

Nas atividades **1** a **16**, visa-se desenvolver a habilidade EM13MAT308 ao tratar de questões que envolvem medidas e razões trigonométricas.

Na atividade **4**, espera-se que haja diferenças entre os valores encontrados pelos estudantes e que eles percebam que pode haver erro de aproximação no momento da representação do triângulo, ao utilizar o transferidor e a régua. Outro erro que pode ocorrer é durante a medição dos lados do triângulo.

A troca de ideias proposta na atividade **9** representa um bom momento para promover o trabalho com o TCT *Vida Familiar e Social* e a competência específica CEMAT03, utilizando estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, além da competência geral CG10 (responsabilidade e cidadania).

O trabalho com esse tipo de atividade é um bom momento para promover a empatia e a cooperação. Oriente os estudantes para que circulem pela escola, a fim de localizar rampas ou pontos em que faltem soluções de acessibilidade.

A seção "Experimente" da página 179 tem como objetivo apresentar aos estudantes uma maneira de obter os valores da tabela trigonométrica. Explique a eles que essa estratégia pode ser útil para calcular valores de seno, cosseno e tangente de ângulos agudos, cujos valores numéricos não são inteiros.

Ao abordar o tópico "Triângulo equilátero", se julgar necessário, retome com os estudantes os conceitos de bissetrizes, medianas e alturas de um triângulo.

Nas atividades **17** a **31**, a habilidade EM13MAT308 é desenvolvida por meio situações-problema contextualizadas que envolvem cálculos de medidas usando razões trigonométricas e outras propriedades de figuras planas.

Na atividade **28**, desenvolve-se a habilidade EM13MAT307, ao propor o cálculo da medida de área do triângulo isósceles em que se tem a medida de um dos lados e a medida de um ângulo interno.

Interligando

Essa seção trabalha os TCTs *Educação em Direitos Humanos*, e *Vida Familiar e Social*, além do ODS **10**, por meio da apresentação de diferentes tipos de acessibilidade, além de trazer discussões sobre capacitismo.

Estudar o tema dos tipos de acessibilidade (atitudinal, arquitetônica, metodológica, comunicacional e digital) e o capacitismo oferece uma excelente oportunidade para trabalhar a empatia e a cooperação entre os estudantes.

Para essa seção, é possível desenvolver aulas em conjunto com professores de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, ao trabalhar acessibilidade e capacitismo.

Projeto

O projeto favorece a competência geral CG07 da BNCC, e o desenvolvimento do TCT *Educação Ambiental*, por meio da discussão de prevenção de deslizamentos de terra. Promova uma conversa sobre o "Texto 1" e questione os estudantes a respeito da identificação e da prevenção de deslizamentos, seja por causas naturais, seja humanas. Questione se há risco de deslizamento na região onde vivem.

Mapear áreas de risco de deslizamentos contribui para o ODS **11** – Cidades e comunidades sustentáveis, garantindo acesso a habitação segura. O objetivo do projeto é fornecer informações para prevenir deslizamentos de terra. Os estudantes vão pesquisar causas, organizar dados, verificar pontos de deslizamento na região, identificar taludes e calcular ângulos de inclinação, para depois organizar essas informações em um *blog* para a comunidade.

A apresentação de um relatório sobre riscos de deslizamentos promove a competência geral CG07 da BNCC, permitindo aos estudantes argumentar com a comunidade sobre prevenção de tragédias, promovendo consciência socioambiental e cuidado mútuo. Desenvolvem habilidades como liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

Para começar

Peça aos estudantes que leiam os textos sugeridos e verifiquem a representação dos triângulos no "Texto 2". Promova uma conversa sobre as causas de desastres naturais e a importância do cuidado com o planeta, focando em deslizamentos de terra. Pergunte se já viram notícias ou presenciaram deslizamentos e discuta causas e ações de prevenção.

Relacione a teoria com a prática, destacando a importância do conteúdo para situações reais e preservação de vidas. Ajude a definir as regiões a serem analisadas, como áreas com construções em morros e encostas, usando curvas de nível para a definição.

Desenvolvimento do projeto

Organize os estudantes em grupos conforme a quantidade de regiões a serem estudadas.

Na "Etapa 1", cada grupo pesquisa causas de deslizamentos e verifica se ocorrem na região analisada, usando textos base e outras fontes confiáveis. Se possível, convide professores de Geografia e Biologia para participar.

Na "Etapa 2", cada grupo apresenta as causas encontradas e informações da região. Auxilie na organização dos dados na lousa, destacando cada região.

Na "Etapa 3", defina locais para pesquisa de campo e oriente sobre registros em fotos e vídeos, marcando local e data, e obtendo autorização dos proprietários.

Na "Etapa 4", os estudantes podem consultar engenheiros para identificar áreas de risco. Se não encontrarem, podem registrar taludes conforme normas. Use *software* de Geometria dinâmica para calcular a inclinação dos taludes a partir de fotos laterais.

Na "Etapa 5", combine local, data e horários para a apresentação do relatório. Auxilie na criação do *blog* com informações e imagens da região. Verifique se algum profissional da escola pode ajudar.

O relatório no *blog* deve conter causas de deslizamentos, pontos de risco e ações preventivas.

Na "Etapa 6" e na "Etapa 7", os grupos preparam e divulgam o material do relatório. Certifique-se de que os grupos distribuem entre si as tarefas e de que o o espaço preparado para a apresentação é adequado.

Produto final

Antes do evento, certifique-se de que cada grupo está no local e preparado para a apresentação do *blog*. Durante o evento, acompanhe os grupos, garantindo que as atividades ocorram no tempo previsto e oferecendo assistência se necessário. Faça anotações para a avaliação.

Avaliação do projeto

Após a apresentação, levante pontos positivos e negativos identificados pelos estudantes. Questione sobre a opinião da comunidade, a aplicabilidade das orientações, as dificuldades, os acertos, os erros e as possíveis melhorias.

Colabore com professores de Geografia e Biologia para trabalhar as causas dos deslizamentos.

Capítulo 8

Nesse capítulo, exploraremos os métodos para calcular a medida de área de diversas figuras planas, como retângulos, quadrados, paralelogramos, triângulos, losangos, trapézios, polígonos regulares e círculos. Ao longo do capítulo serão apresentadas as equações para calcular a medida de área de cada figura plana, acompanhadas de exemplos práticos para ilustrar sua aplicação.

No tópico "O que é área", tem-se o contexto histórico do sistema métrico decimal. Pode-se trabalhar o tópico em parceria com o professor de História.

Na atividade **3**, se julgar necessário, relembre as propriedades de proporção com os estudantes.

A atividade **14** favorece o trabalho com o TCT *Educação Ambiental* e pode ser usada para promover positivamente os povos do campo, uma vez que apresenta estratégias de recuperação florestal por meio da plantação de mudas e utiliza uma unidade de medida comumente usada para expressar medidas de áreas rurais, como terras de cultivo, pastagens e propriedades agrícolas.

O objetivo do boxe "Pense nisto" da página 196 é destacar ao estudante que a medida de área do quadrado, do retângulo e do paralelogramo podem ser calculadas recorrendo à mesma fórmula, já que o retângulo e o quadrado são paralelogramos.

Na atividade **23**, peça aos estudantes que encontrem outras divisões que permitam calcular a medida de área da região sombreada.

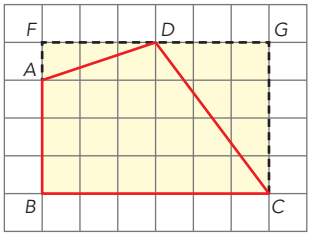
No primeiro boxe "Pense nisto", da página 202, para auxiliar na pesquisa, os estudantes podem acessar as normas da confecção da bandeira nacional, previstas na Lei n. 5.700, de 1º de setembro de 1971 (disponível em: https://tedit.net/b2pkcw; acesso em: 11 jul. 2024).

Na atividade **29**, se julgar necessário, relembre as propriedades de proporção com os estudantes.

A atividade **38** trabalha a competência geral CG09 (empatia e cooperação) por meio do trabalho em equipe e do cálculo de estimativas. Pode-se recomendar aos estudantes que usem o método do trapézio e do retângulo para comparar qual pareceu mais fácil e qual pareceu mensurar melhor.

Na atividade resolvida **6** é apresentada uma maneira de medir a área da figura *ABCD*. A seguir apresentamos outra maneira de calcular essa medida.

Primeiro, precisamos inscrever a figura *ABCD* em um retângulo conforme mostra a imagem a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de área *A* do quadrilátero *ABCD* será a medida de área do retângulo *BCGF* menos a soma das medidas de área dos triângulos retângulos *AFD* e *CGD*.

$A_{BCGF} = 6 \cdot 4 = 24$

$A_{AFD} = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1{,}5$

$A_{CGD} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

$A_{ABCD} = A_{BCGF} - (A_{AFD} + A_{CGD}) = 24 - (1{,}5 + 6) = 16{,}5$

Logo, a medida de área do quadrilátero *ABCD* é 16,5 cm^2.

No tópico "Área do setor circular", nos dois casos apresentados, as equações da medida de área do setor foram obtidas por meio de regra de três. Para que não seja preciso apropriar-se de "novas fórmulas", o mesmo procedimento pode ser usado na resolução de problemas nos quais se necessita calcular a medida de área de setores circulares, conforme exemplificado na atividade resolvida **11**.

Destaque que a figura (superfície colorida)do item **b** da atividade **57** é denominada segmento circular.

Interligando

Essa seção apresenta uma oportunidade para o trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, mais especificamente com o componente curricular Geografia. Antes de iniciar o trabalho com essa seção, questione os estudantes sobre os conhecimentos que eles têm sobre o uso de escalas.

Na página do IBGE, disponível em: https://tedit.net/af2qgh (acesso em: 15 jul. 2024), os estudantes podem baixar o mapa político do Brasil na extensão ".pdf". Em seguida, será necessário fazer a conversão para a extensão ".jpg". Na internet existem várias maneiras gratuitas de fazer essa conversão. Outra opção é fazer uma captura de tela do mapa do IBGE e salvá-la no computador na extensão ".jpg".

Ao calcular a medida de área do polígono, o *software* deve apresentar o resultado com uma casa decimal. Para alterar essa configuração, é preciso localizar as opções de arredondamento, nas configurações.

Viralize!

Essa seção aborda o TCT *Educação Ambiental* e o ODS **13** no contexto das mudanças climáticas. A análise do texto ajuda os estudantes a entenderem a complexidade dos sistemas naturais e humanos e a desenvolverem uma consciência crítica sobre os impactos ambientais das atividades econômicas. Eles aprendem como práticas pecuárias contribuem para as mudanças climáticas e como adequações podem mitigar esses impactos.

Sugere-se desenvolver aulas em conjunto com professores de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, em especial professores de Biologia e de Geografia, para explorar o efeito estufa e mudanças climáticas.

Para fundamentar saberes

As questões **2** a **4** apresentam situações contextualizadas em que os estudantes devem usar propriedades e medidas de triângulos para solucioná-las; desse modo, essas atividades contribuem para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT308.

Por fim, no momento de autoavaliação da Unidade, auxilie os estudantes a verbalizar suas dificuldades, bem como suas facilidades. Assim, pode-se propor estratégias de sala de aula invertida, a fim de recompor as aprendizagens que possam parecer sensibilizadas nesse momento de autoavaliação.

Proposta para o estudante

(Enem) Um cliente vai a uma loja de materiais de revestimento cerâmico para adquirir porcelanato para a substituição do piso de uma sala com formato retangular, com área total de 36 m^2. O vendedor dessa loja lhe oferece dois projetos.

- Projeto **A**: porcelanato quadrado, com 0,60 m de lado, para ser disposto de maneira que a diagonal do quadrado seja paralela ao contorno da sala. Custo da caixa com 10 peças: R$ 60,00.
- Projeto **B**: porcelanato quadrado, com 0,40 m de lado, para ser disposto de maneira que os lados do quadrado sejam paralelos ao contorno da sala. Custo da caixa com 12 peças: R$ 40,00.

O vendedor informa que a fábrica recomenda a compra de uma quantidade adicional do número de peças para eventual necessidade de cortes e para reserva. No caso do projeto **A**, devem ser adquiridos 25% a mais, e no caso do projeto **B**, uma quantidade 10% maior do que o valor exato da área de recobrimento.

O cliente decide, então, que irá adotar o projeto de menor custo.

O custo mínimo que o cliente deverá ter, em conformidade com seu objetivo e com as informações apresentadas, será de:

a) R$ 600,00.
b) R$ 660,00.
c) R$ 720,00.
d) R$ 780,00.
e) R$ 840,00.

Resolução:

Projeto **A**:

$A = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$; ou seja, $A = 0{,}36$ m^2.

Quantidade do porcelanato: $\frac{36}{0{,}36} = 100$

Como devem ser adquiridos 25% a mais, teremos 125 de porcelanato resultando em 13 caixas com o valor total de R$ 780,00 (dado por 13 · R$ 60,00).

Projeto **B**:

$A = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$; ou seja, $A = 0{,}16$ m^2.

Quantidade do porcelanato: $\frac{36}{0{,}16} = 225$

Como devem ser adquiridos 10% a mais, teremos 247,5 de porcelanato resultando em 21 caixas com o valor total de R$ 840,00 (dado por 21 · R$ 40,00).

Alternativa **d**.

Unidade 4: Circunferência trigonométrica e lei dos senos e dos cossenos

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:
CG01, CG02, CG03, CG07, CG09 e CG010.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT02 e CEMAT03.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT202, EM13MAT308 e EM13MAT314.

Competência de outras áreas do conhecimento:
CECNT01 e CECNT03.

Temas Contemporâneos Transversais:
Ciência e Tecnologia e *Educação Ambiental*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Reconhecer arcos, ângulos, congruências e simetrias na circunferência trigonométrica.

- Relacionar corretamente as unidades de medida de arcos e ângulos, distinguir medida angular e linear de arco.
- Fazer a correta leitura da circunferência trigonométrica, do seno, do cosseno e da tangente (quando existir) de um número real.
- Generalizar as relações fundamentais $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ estudadas no triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica.
- Resolver problemas envolvendo medidas de lados e ângulos de triângulo acutângulos e obtusângulos, bem como outros problemas de Geometria plana.
- Usar o teorema dos senos, o teorema dos cossenos e a trigonometria do triângulo retângulo para resolver problemas diversos, como os de distâncias impossíveis de serem medidas diretamente.

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

A abertura da Unidade propõe uma investigação acerca do alpinismo, que é uma prática de aventura, cujo objetivo é o de alcançar o cume de montanhas e picos. Por trás desse esporte existe uma ciência própria, que, a partir dos conhecimentos de trigonometria, desempenha um papel vital na navegação e no planejamento de rotas de alpinismo. A maneira como um alpinista utiliza-se dos conhecimentos sobre as leis dos senos e dos cossenos configura-se como um campo de estudo da Etnomatemática, já que busca compreender como esse grupo cultural concebe, desenvolve e utiliza ideias matemáticas em seus contextos.

Para ter acesso a exemplos interessantes da diferença entre altura e altitude, consulte o artigo "A altura de uma montanha é medida em relação à base ou ao nível do mar?", da *Super Interessante*, de 18 abr. 2011, disponível em: https://tedit.net/zvyosq (acesso em: 18 jul. 2024).

Capítulo 9

A abertura do capítulo apresenta o conceito de arco de circunferência, permitindo o reconhecimento de arcos e ângulos por ele formados. Pretende-se desse modo relacionar o arco de circunferência com o respectivo ângulo central.

O vídeo sugerido no boxe "Dica" da página 222 possibilita explorar o processo de cálculo do número π em situações do dia a dia em que esse número aparece.

Proposta para o professor

Para explorar a aplicação do número π, o *site* Jet Propulsion Laboratory, disponível em: https://tedit.net/w43epc (acesso em: 18 jul. 2024), disponibiliza algumas atividades, que se mostram interessantes para serem trabalhadas juntamente com professores da área de Linguagens e suas Tecnologias.

Outra sugestão para explorar o número π é o *site* Atractor, disponível em: https://tedit.net/yvvdu3 (acesso em: 18 jul. 2024). Nesse *site* é possível realizar uma pesquisa da posição de uma sequência de números entre os decimais do número π.

No tópico "Medida angular e medida linear de arco", ressalte que a medida angular não possui relação de dependência com a medida do raio da circunferência em que o arco está contido, enquanto a medida linear possui relação de dependência com o raio. Discuta com os estudantes que, sendo α a medida angular, c a medida linear de um arco e r a medida do raio da circunferência correspondente, pode-se escrever a relação $c = \alpha \cdot r$, em que, para um ângulo central igual a 2π (360°), tem-se a conhecida expressão da medida de comprimento da circunferência $c = 2\pi r$.

No "Pense nisto" da página 225, é interessante destacar esse fato previamente por meio da apresentação de informações importantes para a apresentação da circunferência trigonométrica.

As atividades **3** e **4** permitem explorar a relação de dependência da medida linear de um arco com a medida do raio da circunferência correspondente e sua medida angular.

Ao trabalhar com a atividade **8**, chame a atenção dos estudantes para o fato dos dois ponteiros (minuto e hora) do relógio se moverem juntos, porém com variações diferentes. O ponteiro do minuto sofre uma variação angular de 6° a cada minuto, enquanto o ponteiro da hora sofre uma variação angular de 0,5° a cada minuto. O ângulo formado entre esses ponteiros levará em consideração esses fatores.

A atividade **11** permite exercitar a curiosidade intelectual ao promover a formulação e resolução de problemas, em que são necessários criar soluções e testar suas hipóteses. Instigue os estudantes indagando-os se a lógica utilizada por eles serviria também para um relógio de Sol, que é um dispositivo usado para medir o tempo com base na posição do Sol no céu e da sombra formada nele (pelo gnômon). Tal atividade pode ser desenvolvida com professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, explorando o TCT *Ciência e Tecnologia* e desenvolvendo a habilidade EM13CNT301.

Proposta para o professor

Para conhecer a construção de um relógio de Sol, acesse o artigo "Como construir um relógio de Sol com os alunos", da *Nova Escola*, disponível em: https://tedit.net/devdra (acesso em: 3 ago. 2024). Os planos de aulas disponibilizados podem ser desenvolvidos em parceria com professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Antes de abordar o tópico "Circunferência trigonométrica", se julgar necessário, revise os conceitos de plano cartesiano, coordenadas de um ponto, abscissa e ordenada. Explore com os estudantes as características de cada quadrante presente na circunferência trigonométrica, assim como o sentido de orientação positivo (anti-horário) e a possibilidade de trabalhar com o sentido negativo (horário) na resolução de problemas.

No "Pense nisto" da página 229, demonstre que os triângulos POQ e $P'OQ$ são congruentes porque são retângulos, possuindo um lado comum e hipotenusas cujas medidas são iguais à medida do raio. Aborde o fato de que as simetrias serão fundamentais no estudo do seno, cosseno e tangente de pontos simétricos na circunferência trigonométrica.

Para a realização da atividade **16**, chame a atenção para o fato de o ângulo central da circunferência onde o hexágono está inscrito ser dividido em seis arcos idênticos, pois o polígono é

regular. Se julgar necessário, demonstre que, ao repartir o hexágono regular em seis triângulos semelhantes, cada um deles será equilátero.

O objetivo da atividade do boxe "Pense nisto" da página 231 é lembrar ao estudante que, nesse caso, a ordenada do ponto *P* é a medida algébrica de *OP*'.

Ao iniciar o tópico "Seno", é importante relembrar o conceito de seno já estudado, porém aplicado ao triângulo retângulo, como sendo a medida do cateto oposto a um ângulo em razão da medida da hipotenusa desse triângulo. Se necessário, faça isso, também, ao iniciar os tópicos (Cosseno e Tangente). Além disso, discuta o conceito de projeção ortogonal e como ela será utilizada na projeção de um ponto *P* da circunferência trigonométrica sobre o eixo das ordenadas, que será chamado de eixo dos senos.

É fundamental que os estudantes compreendam que a circunferência trigonométrica se trata de uma circunferência unitária (cujo raio mede 1) e que o eixo dos senos possui uma orientação, podendo seu valor variar de –1 até 1. Enfatize que, no 1º e 2º quadrantes, a ordenada de *P* é um número positivo, enquanto, no 3º e 4º quadrantes, a ordenada de *P* é um número negativo.

A utilização de calculadoras científicas na determinação de senos de valores reais não notáveis é fundamental. Porém, atente-se ao fato de que, em alguns modelos de calculadora, a sequência de teclas que devem ser pressionadas pode ser diferente. Acompanhe o passo a passo para a utilização do algoritmo da calculadora científica, seja o ângulo medido em graus, seja radianos. A utilização de tal instrumento promove o TCT *Ciência e Tecnologia*.

As atividades **19** e **23** devem ser usadas como atividades de fixação para que os estudantes determinem as medidas de seno para ângulos notáveis e seus simétricos. Atente-se ao fato de a atividade **23** explorar o conceito de equação trigonométrica, o que implicará mais de uma solução real em boa parte dos itens da atividade.

Aproveite a atividade **24** como um momento prático para que os estudantes com suas calculadoras científicas, utilizando-se de diferentes de estratégias, analisem a plausibilidade dos resultados e os adéquem às soluções propostas (CEMAT03).

O objetivo da atividade do boxe "Pense nisto" da página 234 é lembrar ao estudante que, nesse caso, a abscissa do ponto *P* é a medida algébrica de *OP*'.

Ao iniciar o tópico "Cosseno", reforce que a projeção ortogonal de um ponto *P* da circunferência trigonométrica será feita agora sobre o eixo das abscissas, que será chamado de eixo dos cossenos.

Assim como acontece com o eixo dos senos (eixo das ordenadas), o eixo dos cossenos possui uma orientação, podendo seu valor variar de –1 até 1. Enfatize que, no 1º e 4º quadrantes, a abscissa de *P* será um número positivo, ao passo que no 2º e 3º quadrantes, a abscissa de *P* será um número negativo.

A atividade **26** deve ser usada para fixação, a fim de que os estudantes determinem as medidas de cosseno para os simétricos dos ângulos notáveis. Já a atividade **27** permite que o estudante estime e compare medidas de cosseno de pontos da circunferência trigonométrica que não são ângulos notáveis e nem simétricos. Para isso, instigue-os a analisar esses cossenos a partir de suas projeções ortogonais e como elas se relacionam com o eixo do cosseno, utilizando-se da comparação.

A atividade **30** pode ser realizada em duplas e proporciona aos estudantes a chance desenvolver a habilidade EM13MAT308, ao aplicar as relações métricas e as noções de congruência e semelhança de triângulos para resolver a questão proposta por eles.

No tópico "Relação fundamental da Trigonometria", apresente essa relação como sendo uma importante identidade na trigonometria, já que a partir dela é possível estabelecer uma relação entre o seno e o cosseno de um ângulo. Mostre, se julgar necessário, que outras identidades trigonométricas são derivadas dessa relação fundamental, como a tangente. Além disso, chame a atenção para o fato de a relação fundamental da Trigonometria poder ser aplicada em expressões trigonométricas com o intuito de simplificá-las.

A atividade **38** é um bom exemplo de utilização da relação fundamental da Trigonometria como ferramenta que permite a simplificação e a resolução de uma equação trigonométrica. Mostre que sem essa relação o processo de resolução dessa atividade se torna complexo.

Inicie os estudos do tópico "Tangente" , reforçando que a projeção ortogonal de um ponto *P* da circunferência trigonométrica será feita agora sobre um novo eixo, que será adicionado à circunferência trigonométrica. O eixo das tangentes é obtido ao se tangenciar por uma reta perpendicular ao eixo dos cossenos a circunferência no ponto *A*(1, 0). O ponto *A* é a origem do eixo das tangentes, e seu sentido positivo (para cima) coincide com o do eixo dos senos. Unindo o centro *O* à extremidade *P* de um arco, determinamos a reta $\overleftrightarrow{OP}$, que intersecta o eixo das tangentes no ponto *T*. O valor da tangente de um ponto *P* pertencente à circunferência trigonométrica será igual à medida algébrica do segmento de reta $\overline{AT}$. Ressalte que, para um ponto *P* associado ao arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida angular igual a 90° ou 270°, o valor de tangente não existirá.

Para a tangente, demonstre que seu valor será positivo para pontos pertencentes ao 1º e 3º quadrantes e negativo para pontos pertencentes ao 2º e 4º quadrantes. Diferentemente do seno e do cosseno, o valor da tangente não varia no intervalo de –1 até 1, sendo seu valor ilimitado, como abordado pelo boxe "Pense nisto" da página 239.

As atividades **39** e **41** devem ser usadas para fixação, a fim de que os estudantes determinem as tangentes simétricas aos arcos notáveis e explorem os valores de tangente para arcos não notáveis nem simétricos.

A proposta do primeiro boxe "Pense nisto" da página 242 é levantar a discussão sobre o fato de 90° e 270° não possuírem tangente. A partir da ideia de que a tangente é dada pela razão $\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ e sendo $\cos 90° = 0$ e $\cos 270° = 0$, como não pode existir divisão por zero, não é possível obter um valor de tangente para esses pontos da circunferência trigonométrica.

Para resolver as atividades de **43** a **46**, será necessário a utilização da relação fundamental da Trigonometria, como sendo uma forma de simplificar as equações trigonométricas.

Interligando

Essa seção explora a ideia de anamorfose, que é uma representação distorcida de uma imagem em um plano ou em outra superfície que, quando são refletidas por um espelho curvo, transformam a imagem original. A seção permite interdisciplinaridade sobretudo com a área de Linguagens e suas Tecnologias, podendo trabalhar em conjunto com o professor de Arte ao explorar um conceito de óptica geométrica.

Capítulo 10

A abertura do capítulo apresenta uma situação que permite explorar a utilização da lei dos senos no processo de medida de uma distância real entre dois pontos. Ressalte que a situação é modelada com a construção de um triângulo (*AEB*), em que são conhecidas as medidas de dois ângulos internos e a medida de um dos lados. A medida de distância a ser descoberta, que corresponde ao lado $\overline{AB}$ do triângulo, pode ser compreendida pelo olhar das Ciências da Natureza e suas Tecnologias como sendo o deslocamento escalar. É muito comum que os engenheiros civis, ao construir estradas, pontes e viadutos, façam uso de um equipamento chamado teodolito para determinação de ângulos. Tal prática desenvolve a habilidade EM13CNT301 na tentativa de empregar instrumentos de medição para resolver uma situação-problema.

Na seção "Atividades", se achar necessário, revise o conceito de ângulo inscrito e a relação entre a medida do ângulo inscrito e a medida de comprimento do arco correspondente. Em sequência, utilize as atividades **1** e **2** como exercícios de fixação para discutir a lei dos senos, em que as medidas dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos. Para resolver a atividade **2**, será necessário a utilização da tabela de razões trigonométrica ou de uma calculadora científica.

As atividades **3**, **5** e **9** propiciam o desenvolvimento da habilidade EM13MAT308, ao aplicar a lei dos senos para resolver problemas com contextos de medidas de distâncias, os quais se assemelham àqueles realizados por engenheiros ou topógrafos. Essas atividades representam aplicações reais da lei dos senos em situações cotidianas e estimulam a curiosidade e o interesse dos estudantes por tais profissões.

O tópico "Lei dos cossenos" introduz problemas para determinar medidas entre pontos. Reforce que, ao contrário da lei dos senos, a lei dos cossenos requer a medida de dois lados de um triângulo e o ângulo entre eles. Demonstre a lei dos cossenos usando o triângulo *ABC* e relações trigonométricas.

As atividades **11**, **13, 14** e **20** propiciam o desenvolvimento da habilidade EM13MAT308, ao aplicar a lei dos cossenos para resolver problemas com contextos cotidianos, como a viabilidade de construir uma passarela sobre uma rodovia a partir de duas passarelas já existentes, que formam um triângulo com a nova. Na atividade **14**, faça um paralelo com o conceito de velocidade média, estudado nas Ciências da Natureza e suas Tecnologias, o que possibilita o desenvolvimento da habilidade EM13MAT314.

Ao trabalhar a atividade **21**, caso julgue pertinente, retome com os estudantes que:

- triângulo retângulo é aquele que apresenta 1 ângulo interno reto e 2 internos agudos (medida angular menor do que 90°);
- triângulo acutângulo é aquele que apresenta os 3 ângulos internos agudos;
- triângulo obtusângulo é aquele que apresenta 1 ângulo interno obtuso (medida angular maior do que 90° e menor do que 180°) e 2 ângulos internos agudos;
- o maior dos lados sempre está oposto ao maior dos ângulos internos.

Interligando

Nessa seção, a atividade de pesquisa instiga o estudante a avaliar a necessidade da Trigonometria no mundo contemporâneo, compreendendo sua evolução histórica. Espera-se que o estudante entenda a importância de aprender Trigonometria no Ensino Médio. Se possível, sugira aplicativos ou páginas para elaborar mapas conceituais sobre o assunto, usando a tecnologias para otimizar o aprendizado. Se necessário, apresente na lousa a base essencial do estudo de Trigonometria e sugira que os estudantes verifiquem o que já aprenderam.

A busca por informações visa verificar a veracidade dos dados fornecidos por *sites* de Inteligência Artificial, comparando-os com fontes confiáveis. Os estudantes devem buscar informações, trabalhar com IA e produzir um relatório comparativo. Organize uma roda de conversa para compartilhar conclusões dos relatórios, promovendo discussão.

Projeto

O objetivo é conscientizar estudantes e a população de um problema ambiental que afeta a vida marinha. Os estudantes devem pesquisar causas, impactos e a importância dos mares e oceanos, propondo soluções para minimizar o problema.

As pesquisas ajudam a divulgar informações e mobilizar a população para consumir de forma responsável, desenvolvendo a competência geral CG07 da BNCC. Ao planejarem e promoverem ações de conscientização sobre o lixo no mar, os estudantes trabalham coletivamente e propõem soluções sustentáveis, promovendo a competência geral CG10 da BNCC, o TCT *Educação Ambiental* e o ODS **14**.

O projeto também desenvolve a habilidade EM13MAT308 ao incentivar ações comunitárias que envolvem o cálculo da medida de perímetro usando a lei dos senos ou dos cossenos.

Para começar

Peça aos estudantes que leiam o texto e discutam o tema. Comente que a poluição nos oceanos, especialmente pelo microplástico, é um problema crítico. Certifique-se de que os grupos distribuam entre si as tarefas e que participem efetivamente.

Esse projeto pode ser desenvolvido com auxílio de um professor de Biologia ou um professor de Geografia.

Desenvolvimento do projeto

Organize os estudantes em 6 grupos.

Na "Etapa 1", cada grupo pesquisa um tema e compartilha informações. Assuntos que podem surgir incluem:

- impacto do plástico nos animais marinhos;
- ilhas de lixo;
- cultura de reciclagem e coleta seletiva.

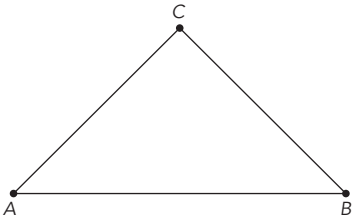
Na "Etapa 2", verifique se os estudantes entendem que o lixo marinho é um problema de todos e que ações individuais são importantes (consumir menos plástico, reaproveitar produtos, descarte correto, etc.). Explique como o lixo em rios chega aos mares e discuta o descarte de lixo por navios.

Na "Etapa 3", os estudantes identificam locais com acúmulo de lixo, como praias, rios ou lagos, por meio de pesquisas ou consulta à prefeitura. Explique como o lixo chega aos oceanos, mesmo de áreas distantes do litoral.

Na "Etapa 4",os estudantes devem fotografar o lixo na água e comparar após cada período.

Se julgar pertinente dê um exemplo de como realizar a medição. Por exemplo, considerando um triângulo *ABC*, para

determinar a medida de distância de uma embarcação, ou outro ponto de referência, em determinado ponto C de coleta no mar, podemos inicialmente considerar 2 pontos, A e B, em terra cuja distância entre eles possa ser medida. Depois, com auxílio de um teodolito, medir os ângulos $C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ e utilizando inicialmente a lei dos senos, determinar as medidas AC e BC.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Para usar o teodolito, veja se é possível obtê-lo em uma universidade local ou com um profissional. Se não, instrua os estudantes a representar um triângulo no papel e medir os ângulos com um transferidor, usando as coordenadas geográficas.

Na "Etapa" 5, os estudantes resumem o que estudaram para apresentar à população.

Na "Etapa 6", auxilie na escolha de profissionais para palestrar, como biólogos ou trabalhadores da coleta seletiva. Se não conseguirem contato, busquem vídeos *on-line* relevantes.

Na "Etapa 7", auxilie-os a escolher um espaço da escola que comporte a comunidade próxima ao rio/lago/praia escolhidos e que seja adequado ao público-alvo.

Produto final

As ações do projeto devem ser divulgadas em um *blog* da escola ou criado para isso. Valide todas as informações antes de postar e incentive a participação da população com perguntas, comentários e sugestões. Faça anotações para a avaliação.

Avaliação do projeto

Após o monitoramento e as ações de conscientização, levante pontos positivos e negativos com os estudantes.

Viralize!

Nessa seção, explore a formação de imagens no cinema 3D e sua relação com a Trigonometria, destacando a presença da ciência e da tecnologia no cotidiano. Na atividade **1**, se houver estudantes com deficiência visual, sugira atividades adaptadas ou em grupos para promover inclusão e cooperação. Na atividade **2**, proponha um debate sobre a acessibilidade nos cinemas para pessoas com transtorno do espectro autista, surdos e cegos, incentivando a empatia.

Proposta para o professor

Para saber mais da tecnologia 3D, acesse:

- Cinema e a tecnologia 3D. *Eu percebo*. Disponível em: https://tedit.net/l0oc9f. Acesso em: 9 jul. 2024.
- O 3D e a trigonometria. *Isto é Matemática*. Disponível em: https://tedit.net/kwwbs8. Acesso em: 9 jul. 2024.
- Como é realizada a projeção em 3D no cinema? *Ciência Hoje*, jul. 2010. Disponível em: https://tedit.net/8znx9h. Acesso em: 9 jul. 2024.

Para fundamentar saberes

Discuta com os estudantes a atividade **1**, retomando o debate a respeito da variação angular sofrida pelo ponteiro das horas e dos minutos, lembrando que eles se movem juntos, de modo que o ponteiro do minuto sofre uma variação angular de 6° a cada minuto, enquanto o ponteiro da hora sofre uma variação angular de 30° a cada hora. O ângulo formado entre esses ponteiros levará em consideração esses fatores.

Na atividade **2**, será possível abordar a projeção ortogonal de um ponto sobre a circunferência trigonométrica no eixo dos cossenos, de forma analítica, para realizar a comparação de medidas de cosseno para diferentes arcos.

As atividades **3** a **4** propiciam o desenvolvimento da habilidade EM13MAT308, ao incentivar os estudantes a utilizar a lei dos senos e a lei dos cossenos em triângulos para determinar a medida de lados desconhecidos.

A atividade **8**, além de desenvolver a habilidade EM13MAT308, permite uma interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias ao abordar o conceito de torque, que envolve uma força aplicada sobre um braço mecânico, e consequentemente desenvolvendo a habilidade EM13CNT101.

Proposta para o estudante

(Uece) Em um relógio analógico circular usual, quando a hora observada é 6 h 20 min, a medida em graus do menor ângulo entre o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos é:

a) 68.

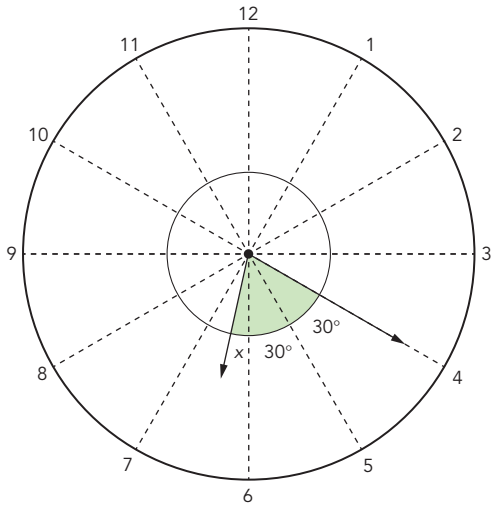
b) 62.

c) 65.

d) 70.

Resolução:

Considere a imagem a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Em 60 minutos, o ponteiro das horas rotaciona 30 graus; então, em 20 minutos, o ponteiro das horas rotaciona $\theta = \frac{20\text{ min} \cdot 30°}{60\text{ min}} = 10°$.

Como o ângulo entre as posições 4 e 6 mede $2 \cdot 30° = 60°$, segue que a resposta será $60° + 10° = 70°$.

Alternativa **d**.

Unidade 5: Estatística básica

A BNCC nesta Unidade

Competências gerais da Educação Básica:
CG04, CG05, CG07, CG09 e CG010.

Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias:
CEMAT01, CEMAT02 e CEMAT03.

Habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT202, EM13MAT406 e EM13MAT407.

Competência de outras áreas do conhecimento:
CECNT03.

Temas Contemporâneos Transversais:
Educação em Direitos Humanos; *Educação para o Consumo*; *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras*; *Saúde*; *Trabalho*.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Reconhecer a importância da Estatística no cotidiano e suas contribuições às mais diversas áreas.
- Identificar e classificar variáveis em quantitativas ou qualitativas.
- Reconhecer a população (ou universo estatístico) e a amostra em uma pesquisa.
- Reconhecer as etapas de uma pesquisa estatística.
- Conhecer dois dos métodos probabilísticos de amostragem mais usados em pesquisas: a amostragem aleatória simples e a amostragem proporcional estratificada.
- Interpretar e construir tabelas de frequência a partir dos dados brutos.
- Construir tabelas de frequência em planilhas eletrônicas.
- Introduzir o conceito de frequência relativa.
- Construir gráficos em planilhas eletrônicas.
- Construir gráficos para representar e resumir um conjunto de dados.
- Interpretar representações gráficas diversas, como os gráficos de setores, de barras, de linhas, histogramas e pictogramas.

Orientações didáticas para o desenvolvimento das aulas

Abertura da Unidade

Essa abertura favorece o desenvolvimento do TCT *Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras* ao propor um texto sobre a importância dos povos indígenas para a preservação da natureza e ao propor uma conversa sobre o termo "decolonialidade".

Se houver disponibilidade e interesse dos estudantes, pode-se propor uma pesquisa para chegar a uma definição mais concreta de decolonialidade e uma reflexão sobre como essa perspectiva pode afetar os estudos em Matemática. Pode-se mencionar como exemplo de Matemática decolonial a perspectiva Etnomatemática.

Proposta para o professor

Para saber mais de Etnomatemática, leia o livro a seguir:

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática*: arte ou técnica de explicar e conhecer. São Paulo: Ática, 1990.

Capítulo 11

O capítulo aborda o conceito de universo estatístico e o uso de amostras representativas para realizar pesquisas. Posteriormente, apresentam-se as etapas fundamentais de uma pesquisa estatística, a saber: planejamento, coleta de dados, apuração, exposição e interpretação dos dados, enfatizando a importância de cada uma delas para a obtenção de uma pesquisa adequada. Além disso, discute as técnicas de amostragem, como a aleatória simples e a proporcional estratificada, destacando que a escolha da técnica deve refletir as características da população. O texto também define variáveis qualitativas e quantitativas, explicando a organização dos dados em tabelas de frequência para facilitar a análise. Esse capítulo, em consonância com as competências gerais CG04, CG05 e CG10, visa preparar os trabalhos para o domínio completo da habilidade EM13MAT406.

As questões da seção "Atividades" visam preparar os trabalhos para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT406. Os itens **a** e **b** da atividade **1** tratam de conceitos básicos da estatística que fazem parte dos conhecimentos prévios dos estudantes e que também serão trabalhados neste capítulo. A partir do item **c** da atividade **1**, trabalha-se com o conceito de frequências, inicialmente com a construção de tabelas. Ao longo desse desenvolvimento, trabalha-se também os cálculos envolvendo os trabalhos com frequência absoluta e frequência relativa.

Interligando

Sugere-se que essa seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Geografia, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. A seção trata do contexto histórico do censo e da sua importância juntamente com a criação do Instituo Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Proposta para o professor

Para saber mais da área de conhecimento Educação Estatística, tal como é concebida por alguns pesquisadores da Educação Matemática, recomenda-se a leitura de:

ARAÚJO, Ednei Leite de. *Concepções de educação estatística*: narrativas de professores membros do GT-12 da SBEM. Curitiba, 2017. Disponível em: https://tedit.net/r6n0c7. Acesso em: 2 set. 2024.

Projeto

Essa seção desenvolve as competências gerais CG04, CG05 e CG10 da BNCC e as habilidades EM13CNT302 e EM13CNT310, além dos TCTs Saúde e *Educação para o Consumo*.

O projeto incentiva o uso consciente da água na comunidade escolar por meio de *podcasts* temáticos, mostrando que ações individuais e coletivas ajudam a reduzir problemas relacionados ao consumo de água.

Se julgar oportuno, inicie o trabalho com a temática sugerindo aos estudantes que realizem o *tour* virtual da Exposição Virtual Rios em Movimento, disponível em: https://tedit.net/zb4do0 (acesso em: 20 set. 2024). A exposição tem o objetivo de informar e conscientizar da preservação de rios e nascentes. Depois, promova uma conversa com os estudantes sobre o consumo consciente da água e das possibilidades em ser mais assertivos nas campanhas de conscientização. Questione-os sobre como eles lidam com o consumo e o uso consciente da água.

A campanha de conscientização contribui para o ODS **6** – Água potável e Saneamento, promovendo uma reflexão sobre a garantia da disponibilidade e manejo sustentável da água potável e saneamento para todos e a conscientização sobre o uso sustentável da água.

Para começar

Discuta os ideais desse projeto com os estudantes por meio dos seguintes questionamentos:

- Como podemos contribuir para um futuro sustentável?
- Como podemos engajar as pessoas em assumir a responsabilidade conjunta pelo uso consciente da água?
- Uma campanha voltada para a conscientização é necessária para reduzir o desperdício de água?

Desenvolvimento do projeto

Organize os estudantes em 4 grupos para criar *podcasts* sobre consumo de água, focando em um dos temas apresentados no livro do estudante. Auxilie na divisão dos grupos e escolha dos temas.

Na "Etapa 1", os grupos devem pesquisar consumo e economia de água. Incentive o uso de fontes confiáveis, como *sites* do governo e ONU. Auxilie na coleta de dados e desenvolvimento de questionários.

Na "Etapa 2", os grupos devem apresentar os resultados das pesquisas para a turma. Promova discussões para complementar informações e escolher pontos relevantes para os roteiros.

Na "Etapa 3", os grupos devem fazer os roteiros dos *podcasts*. Criem juntos um modelo de roteiro e oriente sobre a linguagem adequada ao público-alvo.

Na "Etapa 4" e na "Etapa 5", auxilie os estudantes na definição de datas, horários e espaços para apresentar os *podcasts*. Oriente-os a preparar os materiais de divulgação e a testar os equipamentos antes do evento.

Produto final

Os estudantes devem divulgar os *podcasts* na escola e na comunidade. Certifique-se de que os grupos divulgaram datas e horários. Acompanhe a divulgação e esteja disponível para assistência.

Avaliação do projeto

Promova uma reflexão sobre a produção dos *podcasts* e o impacto na comunidade. Pergunte: "Como o projeto impactou a comunidade?", "As informações foram novidade?", "O que poderia convencer mais pessoas?" e "O objetivo foi alcançado?".

Capítulo 12

O capítulo aborda a importância das representações gráficas para a reunião, análise e interpretação de dados. Ele apresenta os seguintes tipos de gráficos: gráfico de barras, gráfico de colunas, histograma, diagrama de ramos e folhas, gráfico de linhas, gráfico de setores, pictograma e gráfico de dispersão. No capítulo é ilustrado cada um dos tipos de gráfico e explicado quando a utilização de cada um deles é recomendada. Esse capítulo, em consonância com as competências gerais CG07 e CG09, visa trabalhar as habilidades EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT406 e EM13MAT407 e favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

As atividades visam auxiliar no desenvolvimento das habilidades EM13MAT102, EM13MAT104, EM13MAT406 e EM13MAT407. Nas atividades **1** a **4**, trabalha-se com dados da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, em que se deve elaborar e interpretar diagramas de ramos e folhas e gráficos de coluna.

Na seção "Experimente" das páginas 287, 288 e 289, propõe-se a elaboração de um gráfico de dispersão por meio de um *software* de planilha eletrônica, favorecendo o desenvolvimento das habilidades EM13MAT406 e EM13MAT407. Além disso, por meio da análise da tabela de IDHM por cor, tem-se o desenvolvimento das habilidades EM13MAT102 e EM13MAT104.

Aproveite o momento para conversar com os estudantes sobre a importância desse tipo de índice e suas contribuições para uma sociedade igualitária.

Comente que, se a linha de tendência for uma reta descendente, a correlação será negativa. Isso quer dizer que, quando uma das variáveis aumenta, a outra diminui, mas não necessariamente de maneira inversamente proporcional.

Além disso, quando o coeficiente de correlação estiver próximo de -1, mais forte será a associação negativa; consequentemente, a linha de tendência (que é descendente) se ajustará muito bem aos pontos da nuvem. Se o coeficiente for exatamente igual a -1, então a linha passará por todos os pontos da nuvem.

Interligando

Sugere-se que essa seção seja trabalhada em conjunto com o professor de Língua Portuguesa, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias. A seção aborda os diferentes tipos de gráficos que podem ser utilizados para apresentar dados e como o mau uso deles pode resultar em *fake news*. Aproveite essa temática para, em colaboração com o professor de Língua Portuguesa, promover uma conversa sobre textos que apresentam incoerências ou informações não confiáveis. Se possível, selecionem juntos textos para analisar com os estudantes.

Se julgar oportuno, leia com os estudantes o texto "Antídoto contra a desinformação: 7 passos para identificar uma notícia falsa", do Tribunal Superior Eleitoral, de 2 de novembro de 2023, disponível em: https://tedit.net/w4hhlp (acesso em: 20 set. 24).

Viralize!

Essa seção desenvolve os TCTs *Educação em Direitos Humanos* e *Trabalho* e o ODS **5**, analisando a ascensão das mulheres no mercado de trabalho, a proporção de médicos por gênero e os obstáculos ao crescimento profissional feminino. Auxilie os estudantes na análise matemática e social do texto.

Proponha uma roda de conversa sobre os desafios das mulheres no mercado de trabalho, destacando o progresso na igualdade de gênero na medicina. A seção trabalha as competências gerais CG07 e CG09 da BNCC, promovendo direitos humanos, empatia, diálogo, resolução de conflitos e valorização da diversidade. Também desenvolve a competência específica CEMAT03 da BNCC.

Na atividade **4**, oriente sobre fontes seguras de pesquisa. Na atividade **5**, guie os estudantes na apresentação de um trabalho de pesquisa, gerenciamento do tempo, estruturação da exposição e escuta ativa. Se não houver computador, sugira cartazes. Na atividade **6**, encoraje franqueza e respeito, promovendo um posicionamento ético e empático.

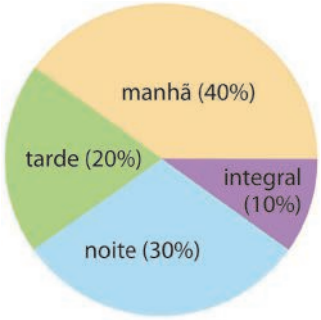
Para fundamentar saberes

As atividades dessa seção podem ser usadas para mobilizar e avaliar os diversos conteúdos estudados. Por exemplo, as atividades **3** e **4** e **5** mobilizam conhecimentos relacionados à interpretação de gráficos.

Por fim, no momento de autoavaliação da Unidade, recomenda-se que esse momento seja realizado em grupo. Auxilie os estudantes a verbalizar suas dificuldades, bem como suas facilidades; assim, pode-se propor estratégias de sala de aula invertida, a fim de recompor as aprendizagens que possam parecer sensibilizadas nesse momento de autoavaliação.

Proposta para o estudante

(Provão paulista) Uma escola tem alunos nos turnos da manhã (40%), da tarde (20%) e da noite (30%), e, ainda, alunos no turno único de tempo integral (10%). O gráfico de "*pizza*" mostra essas porcentagens, ilustradas por setores circulares com ângulos proporcionais às porcentagens.



Reprodução/Saresp, 2023.

O ângulo, em graus, do setor de círculo correspondente ao turno da manhã é:

a) 72°. **b)** 90°. **c)** 120°. **d)** 108°. **e)** 144°.

Resolução:

Calculando 40% de 360°:

$0{,}4 \cdot 360° = 144°$

Alternativa **e**.

Resoluções

Unidade 1

Capítulo 1

Atividades

1. $H = \{-1, 0, 2, 4, 9\}$

$A = \{x \mid x \in H \text{ e } x < 1\} = \{-1, 0\}$

$B = \left\{x \mid x \in H \text{ e } \frac{2x-1}{3} = 1\right\}$; como $\frac{2x-1}{3} = 1 \Rightarrow x = 2$, temos $B = \{2\}$

$C = \{x \mid x \in H \text{ e } x \text{ é um quadrado perfeito}\} = \{0, 4, 9\}$

$D = \{x \mid x \in H \text{ e } x < 0\} = \{-1\}$

$E = \{x \mid x \in H \text{ e } 3x + 1 = 10\}$; como $3x + 1 = 10 \Rightarrow x = 3 \notin H$, temos $E = \varnothing$

7. Sejam:

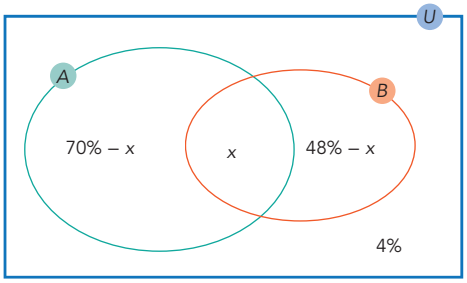
- U o conjunto dos estudantes dessa turma;
- F o conjunto dos estudantes de U que jogam futebol;
- V o conjunto dos estudantes de U que jogam vôlei.

$n(U) = 36$; $n(F) = 16$; $n(V) = 12$ e $n(F \cap V) = 5$

Seja também x o número de estudantes que não jogam nem futebol, nem vôlei. Temos:

$n(U) = x + 11 + 5 + 7 \Rightarrow 36 = x + 23 \Rightarrow x = 13$; ou seja, 13 estudantes.

9. Seja A o conjunto de moradores que compram no mercado **A** e B o conjunto de moradores que compram no mercado **B** e x o percentual de moradores que compram em ambos os mercados. Então, temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Desse modo, o percentual de moradores que compram exclusivamente no mercado **A** é $70\% - x$ e o percentual de moradores que compram exclusivamente no mercado **B** é $48\% - x$.

Então, temos:

$(70\% - x) + (48\% - x) + x + 4\% = 100\% \Rightarrow x = 22\%$

O percentual de moradores que compram exclusivamente em um dos mercados é, portanto, $100\% - 4\% - 22\% = 74\%$, ou seja, 74% dos moradores.

Capítulo 2

Atividades

1. **a)** $A = \{5, 6, 7, 8, \ldots\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$A \cap B = \{5, 6\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$.

b) $A = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ e $B = \{3, 4, 5, \ldots\}$.

$A \cap B = B$; $A \cup B = A$.

c) $A = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$A \cap B = B$; $A \cup B = A$.

d) $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.

$A \cap B = \{3\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4.
$$\begin{array}{r|l} 8\,516\,000 & 5 \\ 35 & 1\,703\,200 \\ \quad 1 & \\ \quad 16 & \\ \quad\;\; 10 & \\ \quad\quad\; 0 & \\ \quad\quad\;\; 0 & \end{array}$$

Um milhão, setecentos e três mil e duzentos quilômetros quadrados; resposta pessoal.

7. Nas primeiras 9 páginas (1 a 9), são usados 9 algarismos.

Da página 10 a 99 (há um total de 90 páginas), são usados $90 \cdot 2$ algarismos $= 180$ algarismos.

Da página 100 a 206 (há um total de 107 páginas), são usados $107 \cdot 3$ algarismos $= 321$ algarismos.

Logo, o total de algarismos usados é 510 $(9 + 180 + 321 = 510)$.

9. O número de trufas de chocolate ao leite e de chocolate branco vendidas pelo fornecedor é, respectivamente, 280 e 200, pois $35 \cdot 8 = 280$ e $25 \cdot 8 = 200$.

$\text{mdc}(280, 200) = 2^3 \cdot 5 = 40$.

Assim, cada caixa passará a conter 40 trufas, sendo necessárias 7 caixas $(280 : 40 = 7)$ para as trufas de chocolate ao leite e 5 caixas $(200 : 40 = 5)$ para as trufas de chocolate branco, totalizando 12 caixas $(5 + 7 = 12)$.

10. **a)** De $-3\,265$ a -1741, há um total de 1525 números inteiros, pois $-1741 - (-3\,265) + 1 = 1525$.

b) $-1741 - 268 = -2\,009$.

c) Podemos calcular a média aritmética entre $-3\,265$ e -1741, que é $[-3\,265 + (-1741)] : 2 = -2\,503$.

Outra opção seria pensar que, entre os extremos A e B, encontramos 1523 pontos que representam números inteiros na reta numérica, então devemos determinar, entre eles, o ponto central.

Como $1523 : 2 = 761{,}5$, a marcação correspondente ao 762º ponto a partir de A é o ponto médio e esse ponto representa o número $-3\,265 + 762 = -2\,503$.

11. **a)** Falso, pois existe $x = \frac{1}{3}$, por exemplo, tal que $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ e $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$.

b) Verdadeiro.

c) Falso, pois $-\frac{17}{9} \in \mathbb{Q}$.

d) Falso, pois $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$, por exemplo.

12. **a)** $0{,}05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

b) $1{,}05 = \frac{105}{100} = \frac{21}{20}$

c) $-2{,}25 = -\frac{225}{100} = -\frac{9}{4}$

13. **a)** $\frac{4}{5} + \frac{8}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

b) $\frac{3}{125} = \frac{24}{1000} = 0{,}024$

c) $\frac{5}{16} - \frac{16}{5} = \frac{25 - 256}{80} = -2{,}8875$

14. Seja x o valor do bônus que Lídia recebeu. Ela utilizou $\frac{2x}{9}$ para pagar a fatura do cartão, ficando então com $\frac{7x}{9}$. Desse valor, empregou $\frac{11}{14}$ para comprar um presente, isto é, usou $\frac{11}{14} \cdot \frac{7x}{9} = \frac{11x}{18}$.

Daí: $\frac{2x}{9} + \frac{11x}{18} + 90 = x \Rightarrow x = 540$.

Logo, o valor do bônus recebido foi R$ 540,00.

15. Devemos analisar o número de soluções inteiras não negativas de cada equação. Seja x o número de moedas de R$ 0,25 e y o número de moedas de R$ 0,50.

Para formar R$ 3,00, temos a equação $0{,}25x + 0{,}50y = 3$.

Multiplicando ambos os membros por 4, temos $x + 2y = 12$.

Como $2y$ é par para todo y inteiro, para a adição resultar 12, x deve ser par:

x	0	2	4	6	8	10	12
y	6	5	4	3	2	1	0

Então há 7 maneiras.

Para formar R$ 5,00, temos a equação $0{,}25x + 0{,}50y = 5$.

Multiplicando ambos os membros por 4, temos $x + 2y = 20$.

Note que x deve ser par:

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Então há 11 maneiras.

16. Como $-\frac{29}{5} = -5{,}8$, a medida do segmento de reta $\overline{AH}$ é: $-5{,}8 - (-14{,}2) = 8{,}4$.

Dividindo 8,4 por 7, obtemos 1,2 (medida de cada subdivisão na parte da reta dada).

Assim, o número racional representado pelo ponto F é: $-14{,}2 + 5 \cdot 1{,}2 = -8{,}2 = -\frac{41}{5}$.

17. **a)** $\begin{cases} x = 0{,}444\ldots & 1 \\ 10x = 4{,}444\ldots & 2 \end{cases}$

Subtraindo 1 de 2: $9x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$

b) $\begin{cases} x = 1{,}12333\ldots & 1 \\ 100x = 112{,}3333\ldots & 2 \\ 1000x = 1123{,}3333\ldots & 3 \end{cases}$

Subtraindo 2 de 3:

$900x = 1011 \Rightarrow x = \frac{1011}{900} = \frac{337}{300}$

c) $\begin{cases} x = 0{,}02323\ldots & 1 \\ 10x = 0{,}2323\ldots & 2 \\ 1000x = 23{,}2323\ldots & 3 \end{cases}$

Subtraindo 2 de 3:

$990x = 23 \Rightarrow x = \frac{23}{990}$

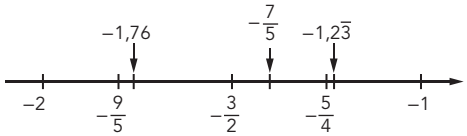
19. **a)** $0{,}2 = \frac{1}{5}$; $1{,}\overline{3} = \frac{4}{3}$ e $0{,}8 = \frac{4}{5}$. Então: $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$.

b) $2{,}\overline{8} = \frac{26}{9}$ e $1{,}\overline{6} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$. Então: $\frac{26}{9} : \frac{5}{3} = \frac{26}{15}$.

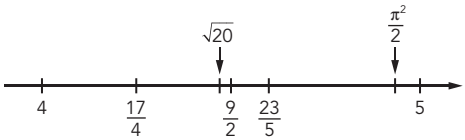
c) $\left[\frac{3}{5} : \left(-\frac{1}{4}\right) + 2\right]^2 = \frac{4}{25}$

20.

Banco de imagens/Arquivo da editora



21.



São irracionais: $\sqrt{20}$ e $\frac{\pi^2}{2}$.

23. **a)** Falsa, pois, se $x = -2{,}3$, então $-x = 2{,}3 \in \mathbb{R}_+$, por exemplo.

b) Falsa, pois, se $x = \frac{1}{2}$, então $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, por exemplo.

c) Falsa, pois, por exemplo, se $x = -5$, temos $2 \cdot x = -10$ e $3 \cdot x = -15$; então, $2x > 3x$.

d) Verdadeira.

e) Falsa, pois, se $x + 2 < x$, então $0x < -2 \Rightarrow 0 < -2$, o que é um absurdo.

24. **a)** Vazio, pois $x^3 = -8 \Rightarrow x = -2 \notin \mathbb{N}$.

b) Unitário, pois $x^4 = 16 \Rightarrow x = 2$ (não serve) ou $x = -2$.

c) Unitário, pois $-\frac{1}{5} = -0{,}2$ e $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$. O único inteiro entre $-0{,}2$ e $0{,}\overline{6}$ é 0.

d) Vazio, pois $x^2 < 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$.

e) Vazio, pois $|x| = -4$, ou seja, não existe $x \in \mathbb{R}$, pois para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos $|x| \geqslant 0$.

f) Unitário, pois $x^5 = 0 \Rightarrow x = 0 \in \mathbb{Q}$.

g) Unitário, pois $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

h) Vazio, pois $x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

25. Sendo $x = 20$ e $y = 10$, temos:

$A = \sqrt{\frac{20}{10}} = \sqrt{2} \in \mathbb{I}$, portanto é irracional.

$B = \sqrt{20 - \frac{20}{10}} = \sqrt{18} \in \mathbb{I}$, portanto é irracional.

$C = \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{Q}$, portanto é racional.

$D = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{9} = 3 \in \mathbb{Q}$, portanto é racional.

$E = \sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, portanto é irracional.

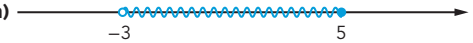
26. **a)** $(1{,}73)^2 < 3 < (1{,}74)^2$; $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$; assim, 1,73 e 1,74 são aproximações por falta e por excesso de $\sqrt{3}$ com erro menor do que 0,01.

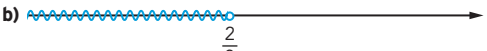
b) $(1{,}732)^2 < 3 < (1{,}733)^2$; $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$; assim, 1,732 e 1,733 são aproximações por falta e por excesso de $\sqrt{3}$ com erro menor do que 0,001.

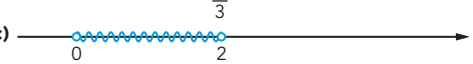
27. $a = -\frac{5}{3} = -1{,}\overline{6}$; $b = -\frac{4}{3} = -1{,}\overline{3}$; $c = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; aproximando $\sqrt{2}$ por 1,4, obtemos o valor aproximado $-0{,}\overline{93}$; $d = -1$, pois o módulo de -1 é 1.

Em ordem crescente, temos: $a < b < d < c$.

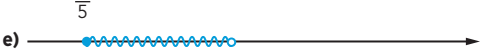
29.

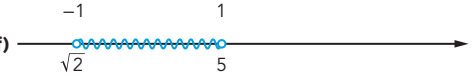
a)


b)


c)


d)

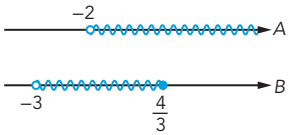
e)


f)


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

31.



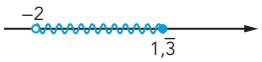
a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\} =]-3, +\infty[$

b) $A \cap B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant \frac{4}{3}\right\} = \left]-2, \frac{4}{3}\right]$

c) $A - B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{4}{3}\right\} = \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$

d) $B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant -2\} =]-3, -2]$

32.



Há 3 números inteiros: −1, 0 e 1.

36. **a)** $2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$

b) $12x = 5x + 5 \Rightarrow x = \frac{5}{7}$

c) $8 - 4x = 3x + 15 \Rightarrow x = -1$

d) $2x - 2 = 3x - 6 \Rightarrow x = 4$

37. Tocantins: $\frac{1511460}{227424} \simeq 6{,}65$; ou seja, aproximadamente 6,65 habitantes/km^2.

Mato Grosso do Sul: $\frac{2757013}{357142} \simeq 7{,}72$; ou seja, aproximadamente 7,72 habitantes/km^2.

Sergipe: $\frac{2210004}{21938} \simeq 100{,}74$; ou seja, aproximadamente 100,74 habitantes/km^2.

Portanto, o estado menos densamente povoado entre os citados é o Tocantins.

40. **a)** $\frac{10}{40} = 0{,}25 = 25\%$; portanto, $x = 25$.

b) $\frac{3{,}6}{72} = \frac{36}{720} = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\%$; portanto, $x = 5$.

c) $\frac{120}{150} = \frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\%$; portanto, $x = 80$.

d) $\frac{136}{400} = \frac{34}{100} = 0{,}34 = 34\%$; portanto, $x = 34$.

e) $\frac{150}{120} = 1{,}25 = 125\%$; portanto, $x = 125$.

41. **a)** Número de estudantes de Biologia: $120 - 48 - 36 = 36$.

A razão é $\frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

b) $\frac{F}{Q} = \frac{48}{36} = \frac{4}{3}$

c) Seja n o número de estudantes. Devemos ter:

$\frac{n + 36}{n + 120} = \frac{2}{5}$ (ou 40%)

Então: $5n + 180 = 2n + 240 \Rightarrow n = 20$.

42. Fabricante **A**: $\frac{15}{150} = 0{,}1 = 10\%$ (10% de peças defeituosas, então o lote foi reprovado).

Fabricante **B**: $\frac{10}{250} = \frac{40}{1000} = \frac{4}{100} = 0{,}04 = 4\%$ (4% de peças defeituosas, então o lote foi aprovado).

Fabricante **C**: $\frac{11}{180} = 0{,}06\overline{1} \simeq 6{,}1\%$ (aproximadamente 6,1% de peças defeituosas). Podemos também calcular $5\% \cdot 180 = 9$. Assim, para o lote ser aprovado, deve haver, no mínimo, 171 peças boas ($180 - 9 = 171$). Então, o lote foi reprovado.

Fabricante **D**: $\frac{10}{200} = \frac{5}{100} = 0{,}05 = 5\%$ (5% de peças defeituosas, logo, há 95% de peças boas, então o lote foi aprovado).

Fabricante **E**: $\frac{13}{230} \simeq 0{,}056 \simeq 5{,}6\%$ (aproximadamente 5,6% de peças defeituosas, então o lote foi reprovado).

43. Janeiro: 1710 voos no horário ($0{,}95 \cdot 1800 = 1710$) e 90 voos com atraso.

Fevereiro: 1215 voos no horário ($0{,}90 \cdot 1350 = 1215$) e 135 voos com atraso.

Bimestre: o percentual pedido é $\frac{2925}{3150} \simeq 0{,}92857$, ou seja, aproximadamente 92,86%.

44. **a)** $0{,}3 \cdot 1200 = 360$; ou seja, 360 estudantes concluíram o Ensino Médio em escola particular e, entre eles, $0{,}35 \cdot 360 = 126$; ou seja, 126 não fizeram curso preparatório.

O percentual pedido é $126 : 1200 = 0{,}105 = 10{,}5\%$.

b) Não seria possível determinar o número de estudantes que concluíram o Ensino Médio em escola particular mas não fizeram curso preparatório (item **a**). No entanto, seria possível determinar o percentual. Sendo x o número total de estudantes pesquisados, o percentual pedido é: $0{,}35 \cdot (0{,}3 \cdot x) : x = 0{,}105 = 10{,}5\%$.

c) Seria possível. Considerando x o número total de estudantes matriculados, temos que $0{,}7 \cdot x$ estudantes concluíram o Ensino Médio em escola pública. Sejam s e n respectivamente o número de estudantes de escolas públicas que fizeram e não fizeram curso preparatório. Daí, $\frac{s}{n} = \frac{2}{3} \Rightarrow s = \frac{2n}{3}$.

Como $s + n = 0{,}7x$, temos:

$\frac{2n}{3} + n = 0{,}7x \Rightarrow \frac{n}{x} = \frac{2{,}1}{5} = 0{,}42 = 42\%$

Como $s + n = 0{,}7x$ e $n = 0{,}42x$, concluímos que $s = 0{,}28x$ e a porcentagem pedida é $\frac{s}{x} = 0{,}28 = 28\%$.

46. **a)** Seja x o número total de páginas do livro.

$0{,}4x + 76 = \frac{2x}{3} \Rightarrow x = 19 \cdot 15 = 285$; ou seja, 285 páginas.

b) $0{,}4 \cdot 285 = 114$; ou seja, 114 páginas.

47. Quantidade de prata na liga: $0{,}52 \cdot 1200$ g $= 624$ g.

Quantidade de ouro na liga: 1200 g $- 624$ g $= 576$ g.

Sendo x a medida de massa de prata retirada, temos:

$\frac{624 - x}{1200 - x} = 0{,}4 \Rightarrow 624 - x = 480 - 0{,}4x \Rightarrow x = 240$

Poderíamos também ter feito:

$\frac{576}{1200 - x} = 0{,}6 \Rightarrow x = 240$. Assim, $x = 240$ g.

48. **a)** $\frac{65}{80} = 0{,}8125 = 81{,}25\%$

b) Sendo n o número de arremessos pedidos, temos:

$\frac{65 + n}{80 + n} = 0{,}9 \Rightarrow 65 + n = 0{,}9(n + 80) \Rightarrow n = 70$

Portanto, deveria ter feito 70 arremessos a mais.

49. **a)** 1 cm na planta corresponde a 250 cm reais, isto é:

$\begin{cases} 1 \text{ cm na planta} \text{ —— } 2{,}5 \text{ m reais} \\ x \text{ —— } 12 \text{ m reais} \end{cases} \Rightarrow x = 4{,}8 \text{ cm}$

$\begin{cases} 1 \text{ cm na planta} \text{ —— } 2{,}5 \text{ m reais} \\ y \text{ —— } 5 \text{ m reais} \end{cases} \Rightarrow y = 2 \text{ cm}$

A medida de área do retângulo na planta será:
$4{,}8 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 9{,}6 \text{ cm}^2$.

b) $1{,}2 \cdot \frac{1}{250} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{250} = \frac{3}{625} = 3 : 625$

$\begin{cases} 3 \text{ cm na planta} \text{ —— } 6{,}25 \text{ m reais} \\ x \text{ —— } 12 \text{ m reais} \end{cases} \Rightarrow x = 5{,}76 \text{ cm}$

$\begin{cases} 3 \text{ cm na planta} \text{ —— } 6{,}25 \text{ m reais} \\ y \text{ —— } 5 \text{ m reais} \end{cases} \Rightarrow y = 2{,}4 \text{ cm}$

As medidas das dimensões serão 5,76 cm × 2,4 cm.

50. **a)** O aumento de matrículas de pretos, pardos e indígenas foi de 8 575 − 4 484 = 4 091; então o percentual de aumento foi: 4 091 : 4 484 ≃ 0,9123, ou seja, aproximadamente 91,23%.

b) Podemos fazer a seguinte proporção:

$\begin{matrix} 8\,575 \text{ ——} & 26{,}5\% \\ x \text{ ——} & 100\% \end{matrix} \Rightarrow 26{,}5x = 857\,500 \Rightarrow x \simeq 32\,358{,}49$

O número de estudantes matriculados é de 32 358 (o número obtido não é inteiro, pois os dados da notícia foram arredondados).

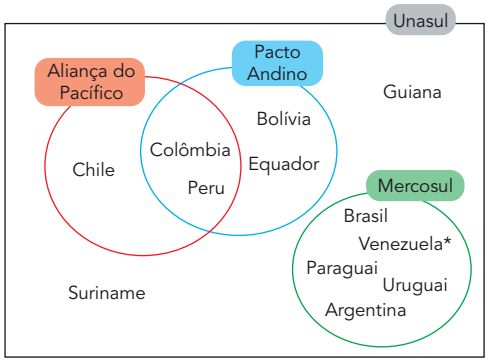
c) Devemos calcular 1,2% de 32 358: 0,012 · 32 358 = 388,296.

Assim, 388 indígenas se matricularam na Unicamp.

d) Em 2017, foram 30 264 matrículas; e, em 2022, 32 358. A diferença em números absolutos é de 2 094; percentualmente, é de 2 094 : 30 264 ≃ 0,06919, ou seja, aproximadamente 6,92%.

Para fundamentar saberes

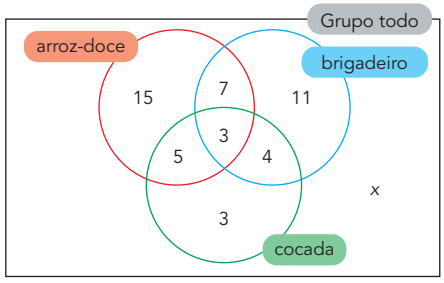
1. **b)**



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

*País suspenso do bloco em 2016.

2.



a) Temos, no total, 48 pessoas, pois 15 + 11 + 3 + 5 + 3 + 4 + + 7 = 48.

b) Para encontrar o valor representado por x no diagrama, do total de pessoas, devemos excluir as que gostam de pelo menos um dos doces, então: 57 − 48 = 9; ou seja, 9 pessoas.

c) No conjunto de pessoas que gostam somente de arroz-doce, notamos que são 15 pessoas.

3. **a)** Verdadeira. Se $y = \sqrt{2}$, por exemplo, então $y \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, que é irracional.

Se $y = \sqrt{3}$, por exemplo, então $y \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$, que é racional. Desse modo, $y \cdot \sqrt{3}$ pode ser racional ou irracional.

b) Verdadeira. Note que se $x + y$ fosse racional, y deveria ser racional.

c) Verdadeira. Se $x \in \mathbb{Q}$, $x^2 \in \mathbb{Q}$, então $y - x^2$ é irracional.

d) Verdadeira. Se x é um racional não nulo, obrigatoriamente $x \cdot y$ é irracional.

e) Falsa. Se $x = 2$ e $y = \sqrt{3}$, por exemplo, então $x^3 \cdot y^2 = 8 \cdot 3 = 24$, que é racional.

4. Uma maneira para justificar as afirmações é considerar valores possíveis (respeitando a escala apresentada na reta real) para a e b, e fazer os cálculos propostos:

Para $a = -1{,}4$ e $b = 0{,}6 = \frac{3}{5}$, por exemplo, temos:

a) Verdadeira, pois $\frac{a}{b} = -\frac{1{,}4}{0{,}6} = -2{,}\overline{3} < -1{,}4$.

b) Falsa, pois $0{,}6^2 = 0{,}36$.

c) Verdadeira, pois −1,4 + 0,6 = −0,8, que está entre a e 0, isto é, $a + b$ é um número real negativo.

d) Falsa, pois $(-1{,}4)^2 = 1{,}96 > 1$.

e) Falsa, pois 0,6 − (−1,4) = 2 > 1.

f) Falsa, pois $\frac{1}{b} = \frac{5}{3} > 1$.

5. Sendo x o número de estudantes do matutino e y o número de estudantes do noturno, inscreveram-se $\frac{15}{17} \cdot x$ (matutino) e $\frac{7}{23} \cdot y$ (noturno).

Assim, x deve ser múltiplo de 17 e y deve ser múltiplo de 23:

m(17) = {17, 34, 51, …, 238, 255, **272**, 289, …}

m(23) = {23, 46, 69, …, 161, **184**, 207, …}

Se $x = 272$ e $y = 184$, então $x + y = 456$.

Assim, $\frac{7}{23} \cdot 184 = 56$, ou seja, 56 estudantes do noturno inscreveram-se na competição, e 184 − 56 = 128, isto é, 128 estudantes não se inscreveram.

6. Como $\frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{9-1}{6} = \frac{4}{3}$ e $\frac{4}{3} : 10 = \frac{2}{15}$, temos que o ponto D representa o número $\frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{2}{15} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$. Alternativa **d**.

7. Mapa **1**: $d_{A,B} = 13 \cdot (250\,000 \text{ cm}) = 3\,250\,000 \text{ cm} = 32{,}5 \text{ km} = X$

Mapa **2**: $d_{A,C} = 10 \cdot (300\,000 \text{ cm}) = 3\,000\,000 \text{ cm} = 30 \text{ km} = Y$

Mapa **3**: $d_{A,D} = 9 \cdot (500\,000 \text{ cm}) = 4\,500\,000 \text{ cm} = 45 \text{ km} = Z$

Então, $Y < X < Z$. Alternativa **b**.

8. Como o casal vai caminhar 30 minutos por dia, durante 30 dias, deverá consumir 1 800 g de carboidratos, pois 2 · 30 · 30 = 1 800. Como cada fatia tem 15 g, serão necessárias 120 fatias, pois 1 800 : 15 = 120. Por fim, como cada pacote tem 18 fatias, serão necessários 7 pacotes, pois 120 : 18 = 6,6̄. Alternativa **d**.

9. O preço normal da geladeira é: 1,1 · 1 000 reais = 1 100 reais.

Se o pagamento for feito com o cartão de crédito da loja, o preço cai para: 0,98 · 1 100 reais = 1 078 reais.

O valor calculado (erroneamente) pela cliente foi:
1,08 · 1 000 reais = 1 080 reais.

Assim, o valor apresentado pela loja é R$ 2,00 menor do que o valor calculado pela cliente. Alternativa **a**.

Unidade 2

Capítulo 3

Atividades

2. **a)** **Medida de distância percorrida pelo avião a 900 km/h**

Medida de tempo	Medida de distância (em km)
15 min (0,25 hora)	225
0,5 hora	450
2 horas	1800
5 horas	4500

Dados elaborados para fins didáticos.

d) A medida de velocidade é inversamente proporcional à medida de tempo. Assim, se a medida de velocidade aumenta, a medida de tempo do percurso diminui: $\frac{3600}{1000} = 3{,}6$, ou seja, 3,6 horas = 3 horas e 36 minutos.

4. **a)** **Medida de tempo gasto para encher o reservatório**

Número de torneiras	Medida de tempo (em min)
1	40
4	10
8	5
10	4

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Note, na tabela anterior, que $t \cdot n = 40 \Rightarrow t = \frac{40}{n}$.

c) Como 1 min = 60 s, temos que 36 s correspondem a $\frac{36}{60} =$ = 0,6 minuto; e, desse modo, $t = 1{,}6$, ou seja, 1,6 minuto.

Então, $1{,}6 = \frac{40}{n} \Rightarrow n = 25$; ou seja, 25 torneiras.

8. **a)** $t = 0 \Rightarrow v(0) = 1800 \cdot \left(1 - \frac{0}{10}\right) = 1800$

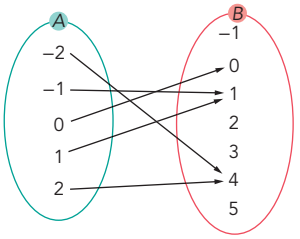
b) $t = 1 \Rightarrow v(1) = 1800 \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 1620$

A desvalorização é, portanto, 1800 − 1620 = 180; ou seja, 180 reais.

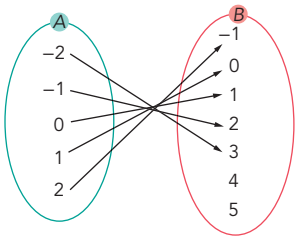
c) $1260 = 1800 \cdot \left(1 - \frac{t}{10}\right) \Rightarrow t = 3$; ou seja, 3 anos.

d) Os estudantes podem citar desvantagens como menor prazo de garantia pelo fabricante, marcas de uso, bateria com menos duração, entre outras. Como vantagens, eles podem citar a possibilidade de obter produtos de boa qualidade por um valor mais acessível e menor impacto ambiental.

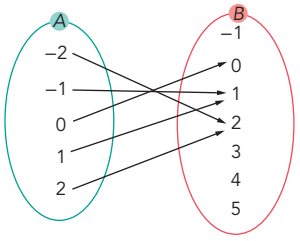
9. **a)** $D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{0, 1, 4\}$



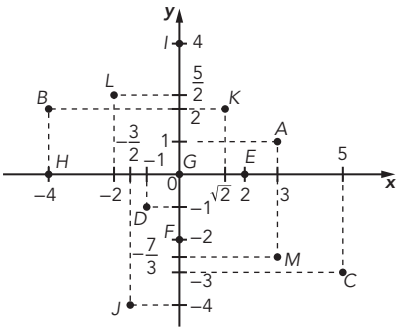
b) $D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$



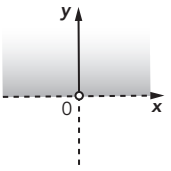
c) $D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{0, 1, 2\}$



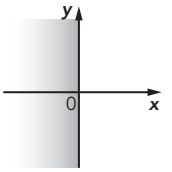
15.



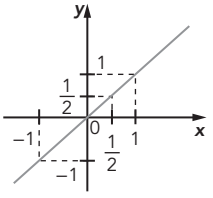
21. **a)**



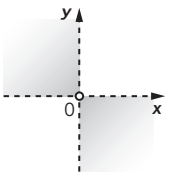
b)



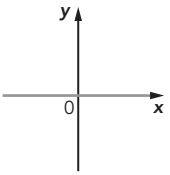
c)



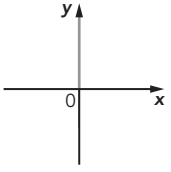
d)



e)



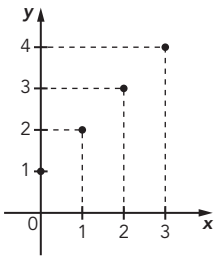
f)



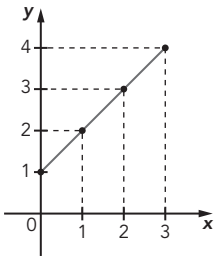
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

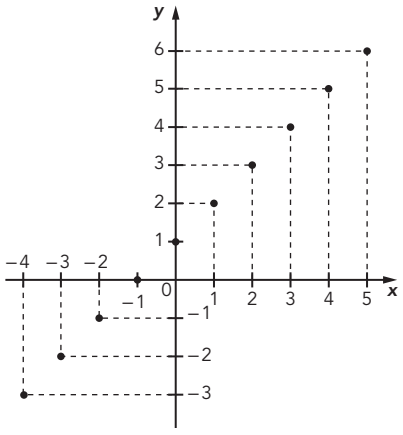
23. **a)** $A = \{0, 1, 2, 3\}$; $Im(f) = \{1, 2, 3, 4\}$



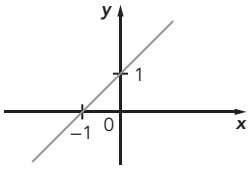
b) $A = [0, 3]$; $Im(f) = [1, 4]$



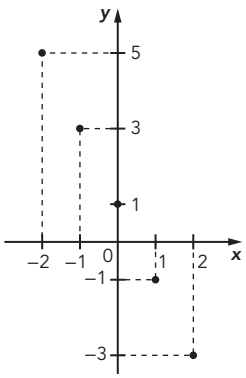
c) $A = \mathbb{Z}$; $Im(f) = \mathbb{Z}$



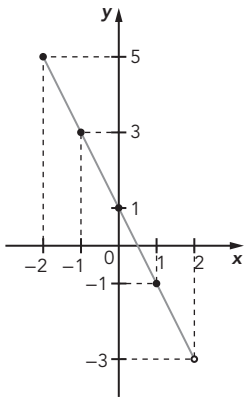
d) $A = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$



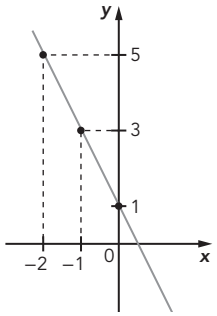
24. **a)**



b)



c)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

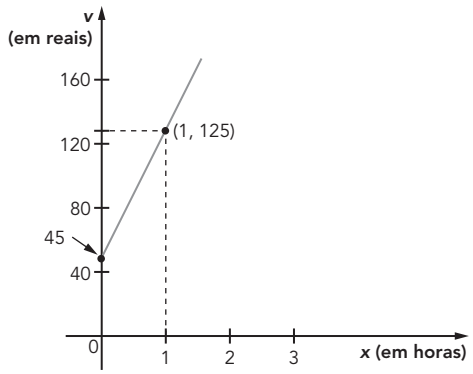
28. **a)** $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-8 + 0{,}5}{3} = -2{,}5$

b) $\frac{g(4) - g(1)}{4 - 1} = \frac{-7 - 2}{3} = -3$

Capítulo 4

Atividades

1. **c)** $v(x) = 45 + 80 \cdot x$



2. **a)** 1ª opção: $p(t) = 18$; 2ª opção: $p(t) = 2{,}5 \cdot t$.

b) Na 2ª opção, o cliente teria pagado R$ 12,50 ($2{,}5 \cdot 5 = 12{,}50$). Assim, ao escolher a 1ª opção, ele pagou R$ 5,50 a mais ($18 - 12{,}50 = 5{,}50$).

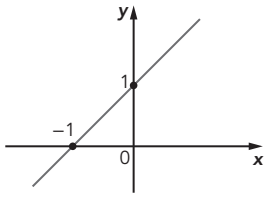
c) $18 = 2{,}5 \cdot t \Rightarrow t = 7{,}2$

Como 0,2 h = 0,2 · 60 min = 12 min, o tempo pedido é de 7 h 12 min.

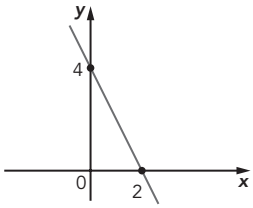
d) O encontro das 2 retas representa o ponto em que $p(t) = q(t)$, ou seja, o tempo de uso em que os 2 planos apresentam o mesmo custo.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

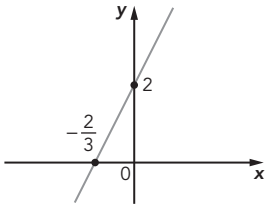
3. **a)** Usando os pontos de coordenadas (–1, 0) e (0, 1):



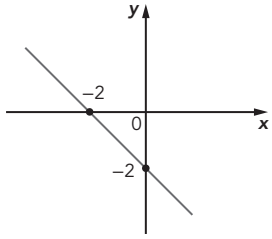
b) Usando os pontos de coordenadas (0, 4) e (2, 0):



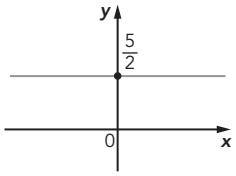
c) Usando os pontos de coordenadas (0, 2) e $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$:



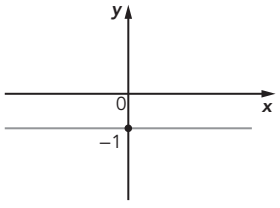
d) Usando os pontos de coordenadas (0, –2) e (–2, 0):



e)



f)



4. **a)** Se $y = ax + b$, substituindo os pontos de coordenadas (–1, 5) e (2, –4), tem-se o sistema de equações $\begin{cases} 5 = -a + b \\ -4 = 2a + b \end{cases}$, de solução $a = -3$ e $b = 2$.

Então, $y = -3x + 2$.

5. **a)** Substituindo os pontos de coordenadas (0, 0) e (–1, 3) na expressão $y = ax + b$, tem-se que $b = 0$ e $a = -3$. A equação é $y = -3x$.

b) Substituindo-se os pontos de coordenadas (–1, 1) e (0, 4) na expressão $y = ax + b$, tem-se o sistema de equações:

$\begin{cases} 1 = -a + b \\ 4 = 0 + b \end{cases} \Rightarrow b = 4$ e $a = 3$

A equação é $y = 3x + 4$.

c) Como a reta é paralela ao eixo Ox, trata-se de uma função constante, cuja lei é $y = \frac{11}{3}$ $\left(\text{ou } y - \frac{11}{3} = 0\right)$.

6. Sejam v o valor da corrida e x o número de quilômetros rodados.

$v(x) = ax + b$

$\begin{cases} 48{,}80 = a \cdot 10 + b \\ 111{,}80 = a \cdot 25 + b \end{cases} \Rightarrow a = 4{,}2$ e $b = 6{,}80$

$v(x) = 4{,}2x + 6{,}80$

Assim, $v(18) = 4{,}2 \cdot 18 + 6{,}80 = 82{,}40$, ou seja, R$ 82,40.

9. **a)** Sendo $p_n(t)$ a porcentagem de bateria da irmã mais nova, como a cada minuto o carregador carrega 1% de bateria, para t dado em minutos, temos que $p_n(t) = 30 + t$; e, para a irmã mais velha, como a cada minuto é carregado 1,5%, temos $p_v(t) = 10 + 1{,}5t$.

b) Os 2 aparelhos têm a mesma carga no ponto de intersecção no gráfico, que é o ponto de coordenadas (40, 70), indicando que isso ocorre na medida de intervalo de tempo de 40 minutos, tempo de duração da viagem, quando ambos os aparelhos alcançam 70% da carga total.

c) Temos $p_v(t) = 10 + 1{,}5t \Rightarrow 50 = 10 + 1{,}5t \Rightarrow t = \frac{40}{1{,}5} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \simeq 26{,}67$; ou seja, 26 min 40 s.

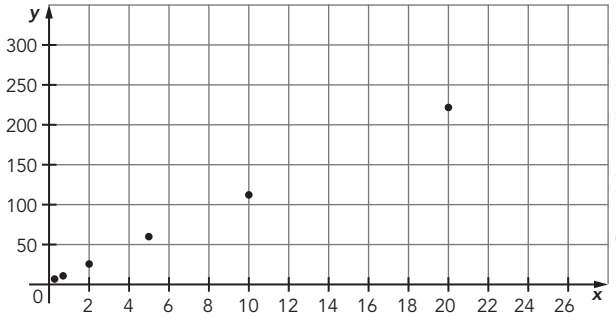
10. **a)**

Consumo de combustível

Combustível consumido (em L)	Medida de distância (em km)
0,25	2,75
0,5	5,5
2	22
5	55
10	110
20	220
30	330

Dados elaborados para fins didáticos.

b)



Banco de imagens/Arquivo da editora

Os pontos tendem a estar alinhados, descrevendo o comportamento de uma função polinomial de 1º grau.

c) Como o automóvel é capaz de percorrer uma medida de distância, em média, de 11 km por litro de combustível, temos $d = 11c$.

11. **a)**

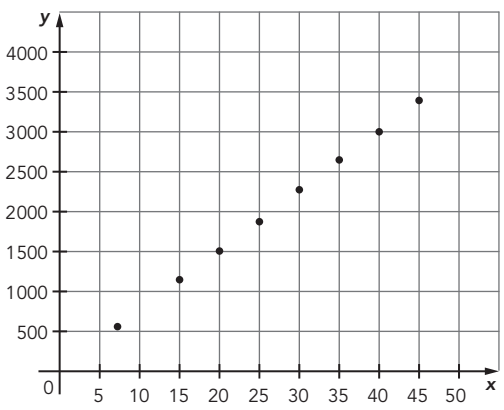
Quantidade de pessoas que devem receber o auxílio da ONG

Mês	Quantidade de pessoas	Custo (em reais)
Janeiro	7	525
Fevereiro	15	1125
Março	20	1500
Abril	25	1875
Maio	30	2250
Junho	35	2625
Julho	40	3000
Agosto	45	3375

Dados elaborados para fins didáticos.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

b)



Os pontos indicam uma tendência de estarem todos alinhados, como ocorre no caso da representação gráfica de uma função polinomial de 1º grau.

c) Como cada pessoa equivale ao custo de 75 reais, temos que $c = 75p$.

12. **a)** Para cada 3 médicos, há 6 enfermeiros, e, para cada 6 enfermeiros, há 10 técnicos de enfermagem. Portanto, a razão entre médicos e assistentes é $\frac{3}{10}$.

b) Sejam m, e e t o número de médicos, enfermeiros e técnicos, respectivamente. Assim, temos:

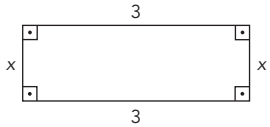
$$\begin{cases} t = \frac{5}{3}e \\ m = \frac{e}{2} \\ m + e + t = 380 \end{cases} \Rightarrow \frac{e}{2} + e + \frac{5}{3}e = 380 \Rightarrow e = 120$$

Assim, são 120 enfermeiros.

14. • Sim. Note que, se o lado mede x, o perímetro mede $4x$; se o lado mede $2x$, o perímetro mede $4 \cdot 2x = 8x$ (que é o dobro de $4x$). Como $p = 4 \cdot \ell$, temos $\frac{p}{\ell} = 4$.

• Não. Tome, por exemplo, $\ell_1 = 1 \Rightarrow A_1 = 1^2 = 1$. Dobrando a medida do lado, isto é, $\ell_2 = 2$, tem-se $A_2 = 2^2 = 4$; a medida da área quadruplica.

15.



a) Medida de perímetro do retângulo: $3 + 3 + x + x = 6 + 2x$

$x = 1$ m ⇒ medida de perímetro: 8 m

$x = 2$ m ⇒ medida de perímetro: 10 m ⟩ não dobrou

b) Sim, $A = 3 \cdot x \Leftrightarrow \frac{A}{x} = 3$. Isso mostra que a medida de área é diretamente proporcional a x. Analisemos:

$x = 2 \Rightarrow A = 3 \cdot 2 = 6$

$x = 4 \Rightarrow A = 3 \cdot 4 = 12$ ⟩ dobrou

18. Para carregar completamente a bateria em 20 minutos, é necessário que ela carregue pelo menos a uma taxa de $\frac{100\%}{20} = 5\%$ por minuto. Dentre as quatro opções, a única em que de fato a bateria estava acima de 15% após 3 minutos foi a **IV**. Então as opções **I**, **II** e **III** devem ser descartadas.

19. **a)** $f(x) = 4x + 7 \Rightarrow 0 = 4x + 7 \Rightarrow x = -\frac{7}{4}$

b) $g(x) = -3x + 9 \Rightarrow 12 = -3x + 9 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow S = \{-1\}$

c) $h(x) = ax + b \Rightarrow 0 = a \cdot \frac{2}{7} + b \Rightarrow b = -\frac{2}{7}a$. Como a e b podem ser quaisquer valores reais, podemos escolher $a = 14$, de modo que $b = -4$. Nesse caso, $h(x) = 14x - 4$.

d) Como a taxa média de variação é 0,5, temos $a = 0{,}5$. Então $j(x) = 0{,}5x + b$. Entretanto, sabemos também que $0 = 0{,}5 \cdot 17 + b \Rightarrow b = -8{,}5 \Rightarrow j(x) = 0{,}5x - 8{,}5$.

21. Sejam:

Arquibancada não numerada: x reais

Arquibancada numerada: $(x + 30)$ reais

Temos $70\% \cdot 3200 = 2240$; 2 240 na arquibancada não numerada e 960 na arquibancada numerada.

Como a renda foi de R$ 140.800,00, podemos escrever $2240 \cdot x + 960 \cdot (x + 30) = 140800 \Rightarrow x = 35$.

Assim, o ingresso para a arquibancada não numerada custava R$$ 35,00, e para a arquibancada numerada, R$ 65,00.

23. Exemplo de resposta: Um estacionamento cobra 1 real por hora de uso da vaga e proporcionalmente para frações de hora. Considere o gráfico e responda:

a) Qual é a unidade do eixo x e do eixo y para que esse seja o gráfico que representa a situação descrita no enunciado?

b) Se o estacionamento cobrasse 2 reais a entrada e um adicional de 1 real para cada hora, a relação entre tempo e preço seria diretamente proporcional? Justifique.

24. **a)** A taxa média de variação é dada por

$\frac{4050 - 4800}{2024 - 2021} = -\frac{750}{3} = -250$, ou seja, houve perda de 250 reais/ano.

b) Como a desvalorização é de 250 reais/ano, em 6 anos essa perda será de: $6 \cdot 250 = 1500 \Rightarrow 4800 - 1500 = 3300$, ou seja, o valor de mercado será de R$ 3.300,00.

c) $y = ax + b$, em que a é o valor da taxa média de variação, portanto $a = -250$, e b é o valor do equipamento, logo, $b = 4800$. Desse modo, temos que: $y = -250x + 4800$.

25. **a)** Para produzir 0 litro são gastos R$ 4.000,00; assim, o valor 4 000 corresponde ao custo fixo da empresa com outras despesas como mão de obra, manutenção, etc.

b) A taxa de variação da função é $\frac{5{,}2 - 4}{8 - 0} = \frac{1{,}2}{8} = 0{,}15$. Como os custos estão dados em milhares de reais, isso quer dizer que o valor do custo é de R$ 150,00 por litro. Logo, para produzir 1 L, são gastos R$ 150,00.

c) $7000 - 4000 = 3000$; $3000 : 150 = 20$; ou seja, 20 L.

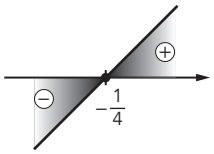
26. **a)** Sim. Como se desloca 15 km a cada meia hora, o carro passou pelo marco 40 km no início do deslocamento, pois $55 - 15 = 40$.

c) $\frac{100-70}{2-1}=30$; ou seja, 30 km/h; a taxa média de variação do deslocamento em função do tempo corresponde à medida de velocidade de um carro.

d) Os pontos tendem a estar alinhados, indicando o comportamento de uma função polinomial de 1º grau.

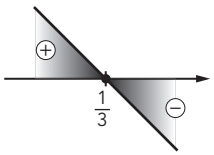
e) $y = 30x + 40$

30. **a)**



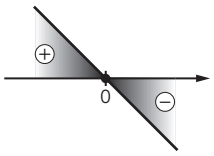
$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > -\frac{1}{4} \\ y < 0, \text{ se } x < -\frac{1}{4} \end{cases}$

b)



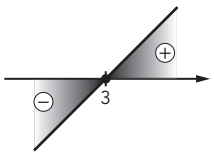
$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < \frac{1}{3} \\ y < 0, \text{ se } x > \frac{1}{3} \end{cases}$

c)



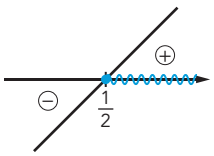
$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 0 \\ y < 0, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

d)



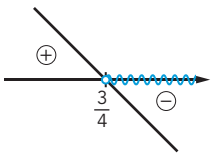
$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > 3 \\ y < 0, \text{ se } x < 3 \end{cases}$

31. **a)**



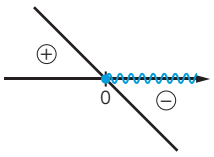
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$

b)



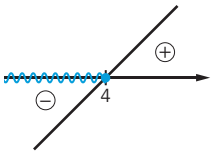
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{4}\right\}$

c)



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

d)



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

33. **a)** Para 2,5 h de trabalho, temos os seguintes valores, em reais:

Banda **A**: $800 + 250 \cdot 2{,}5 = 1425$.

Banda **B**: $650 + 280 \cdot 2{,}5 = 1350$.

É preferível contratar a banda **B**.

b) preço **A** < preço **B** $\Rightarrow 800 + 250x < 650 + 280x \Rightarrow 5 < x$, isto é, $x > 5$. Para mais de 5 h de festa, é mais econômico contratar a banda **A**.

35. **b)** 1º modo

A dívida de Aline é de R$ 732,20. Após n meses (n depósitos), a dívida dela será de $732{,}20 - 40 \cdot n$.

Assim, devemos ter $732{,}20 - 40 \cdot n < 200 \Rightarrow 13{,}305 < n \Rightarrow n > 13{,}305$. Como n é natural, devemos ter $n = 14$; ou seja, 14 meses.

2º modo

Se Aline deve menos de R$ 200,00, o saldo devedor deve ser um número maior do que −200, isto é, $-732{,}20 + 40 \cdot n > -200 \Rightarrow n > 13{,}305 \xRightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 14$; ou seja, 14 meses.

c) $-732{,}20 + 40n > 0 \Rightarrow n > 18{,}305$

Como $n \in \mathbb{N}$, devemos ter $n = 19$ meses.

36. **b)** Locadora **1** < Locadora **2** $\Rightarrow 100 + 0{,}30x < 60 + 0{,}40x \Rightarrow 400 < x$, isto é, $x > 400$. A partir de 400 km rodados.

c) Devemos ter simultaneamente:

Locadora **3** < Locadora **1** e Locadora **3** < Locadora **2**

Isto é:

$150 < 100 + 0{,}3x \Rightarrow 166{,}\overline{6} < x$ **1**

$150 < 60 + 0{,}4x \Rightarrow 225 < x$ **2**

De **1** e **2**, segue que $x > 225$; e, assim, a partir de 225 km rodados, deve-se optar pela Locadora **3**.

39. **a)** **Plano controle 1**:

Para $x = 7$, temos $y =$ R$ 65,00.

$y = 45 + (7 - 6) \cdot 20 = 65$

Plano controle 2:

$y = \begin{cases} 75, \text{ se } x \leqslant 12 \\ 75 + (x - 12) \cdot 20, \text{ se } x > 12 \end{cases}$

Para $x = 7$, temos $y =$ R$ 75,00.

Portanto, o **Plano controle 1** seria mais vantajoso.

b) A partir de determinada quantidade de dados de internet consumidos, o **Plano controle 2** passará a ser mais vantajoso financeiramente. Esse valor x está entre 6 e 12, pois, para $x = 6$, o **Plano controle 1** é o mais vantajoso, custando R$ 45,00, e, para $x = 12$, o **Plano controle 2** é o mais vantajoso, custando R$ 75,00. Assim, devemos buscar o valor de x a partir da intersecção entre a segunda sentença da função do **Plano controle 1** e a primeira sentença da função do **Plano controle 2**.

$45 + (x - 6) \cdot 20 = 75 \Rightarrow x = 7{,}5$

Portanto, não há diferença no valor a ser pago para 7,5 GB por mês e ambos os planos cobrariam R$ 75,00.

40. **a)** $100 \cdot 0{,}40 + 30 \cdot 0{,}20 = 46$; ou seja, R$ 46,00.

b) $p(x) = \begin{cases} 0{,}4x; \text{ se } 0 < x \leqslant 100 \\ \underbrace{100 \cdot 0{,}4}_{40} + \underbrace{(x - 100) \cdot 0{,}2}_{0{,}2x - 20} = 20 + 0{,}2x; \text{ se } x > 100. \end{cases}$

c) Item **a**: $130 \cdot 0{,}2 = 26$; ou seja, R$ 26,00.

Item **b**: $p(x) = \begin{cases} 0{,}4x; \text{ se } 0 < x \leqslant 100 \\ 0{,}2x; \text{ se } x > 100 \end{cases}$

41. **a)** 2: 2 · R$ 16,80 = R$ 33,60;

3: 3 · R$ 16,80 = R$ 50,40;

4: 4 · (R$ 16,80 − R$ 1,40) = R$ 61,60;

5: 5 · (R$ 16,80 − R$ 1,40) = R$ 77,00.

42. **a)** Para o rendimento de R$ 2.000,00, o imposto a pagar é de R$ 0,00; pois esse rendimento se enquadra na faixa isenta de imposto.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Para o rendimento de R$ 4.000,00; o imposto a pagar é de R$ 237,23 (pois $4\,000 \cdot 0{,}225 - 662{,}77 = 237{,}23$).

Para o rendimento de R$ 10.000,00, o imposto a pagar é de R$ 1.854,00 (pois $10\,000 \cdot 0{,}275 - 896 = 1854$).

43. **a)** Para o consumo de 30 m^3: R$ 232,00, pois $5{,}20 \cdot 20 + (30 - 20) \cdot 12{,}8 = 232$.

Para o consumo de 60 m^3: R$ 637,00, pois $5{,}20 \cdot 20 + 30 \cdot 12{,}8 + (60 - 50) \cdot 14{,}9 = 637$.

b) Os 20 m^3 iniciais custam, ao todo, R$ 104,00, pois $20 \cdot 5{,}2 = 104$.

Os 30 m^3 seguintes custam, ao todo, R$ 384,00, pois $30 \cdot 12{,}8 = 384$.

Como $517{,}8 - 104 - 384 = 29{,}8$, o consumo na 3ª faixa foi de $2\ m^3 \left(\frac{29{,}8}{14{,}9} = 2\right)$, totalizando $20\ m^3 + 30\ m^3 + 2\ m^3 = 52\ m^3$.

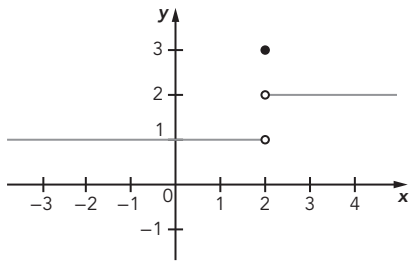
c) **Primeira sentença**: para $0 \leqslant x \leqslant 20$, temos $v(x) = 5{,}2x$.

Segunda sentença: para $21 \leqslant x \leqslant 50$, temos $v(x) = 5{,}2 \cdot 20 + 12{,}8 \cdot (x - 20) = 12{,}8x - 152$.

Terceira sentença: para $x > 50$, temos $v(x) = 5{,}2 \cdot 20 + 12{,}8 \cdot 30 + 14{,}9 \cdot (x - 50) = 14{,}9x - 257$.

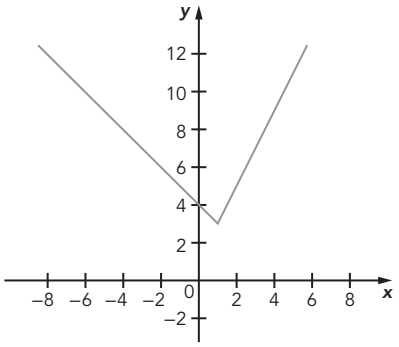
Portanto: $\begin{cases} 5{,}2x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 12{,}8x - 152, \text{ se } 21 \leqslant x \leqslant 50 \\ 14{,}9x - 257, \text{ se } x > 50 \end{cases}$

44. **a)**



$Im(f) = \{1, 2, 3\}$

b)



$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 3\}$

47. **a)** Se $x < 1$, então a função é de 1º grau e a reta passa pelos pontos de coordenadas (0, 4) e (−1, 6).

$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 4 = a \cdot 0 + b \\ 6 = a \cdot (-1) + b \end{cases} \Rightarrow b = 4 \text{ e } a = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -2x + 4$

Se $x \geqslant 1$, então a função é de 1º grau e a reta passa pelos pontos de coordenadas (1, 2) e (2, 3).

$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 2 = a \cdot 1 + b \\ 3 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 1 \Rightarrow y = x + 1$

$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -2x + 4, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

b) Se $x \leqslant 1$, então $f(x) = 5$ é equivalente a $-2x + 4 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \leqslant 1$.

Se $x \geqslant 1$, então $f(x) = 5$ é equivalente a $x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4 \geqslant 1$.

$S = \left\{-\frac{1}{2}, 4\right\}$

c) Geometricamente, é preciso determinar k de modo que o gráfico de f intersecte a reta horizontal que passa por $(0, k)$, que é o gráfico da função constante $y = k$.

Como $Im(f) = [2, \infty[$, k deve ser, no mínimo, igual a 2, isto é, $k \geqslant 2$.

48. **a)** A partir de 4 h, o preço a ser cobrado é de: $24 + 4(t - 4) = 24 + 4t - 16 = 4t + 8$

$p(t) = \begin{cases} 24, \text{ se } 0 < t \leqslant 4 \\ 4t + 8, \text{ se } t > 4 \end{cases}$

b) Sendo t o tempo dado em horas, temos:

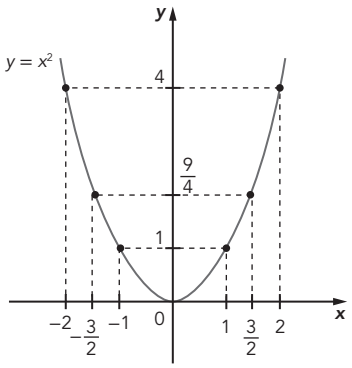
$4t + 8 = 45 \Rightarrow t = \frac{37}{4} = 9 + \frac{1}{4}$

Portanto, a partir de 9 h 15 min, o preço da diária passa a ser mais vantajoso.

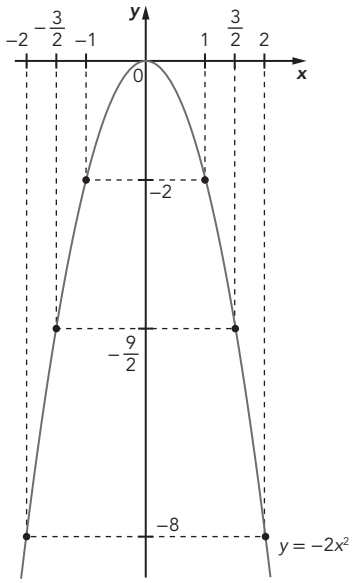
Capítulo 5

Atividades

1. **a)**



b)

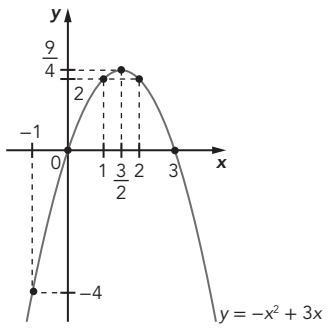


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

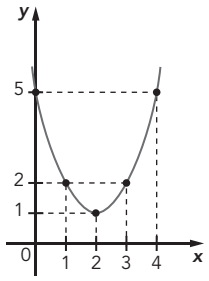
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c)



d)

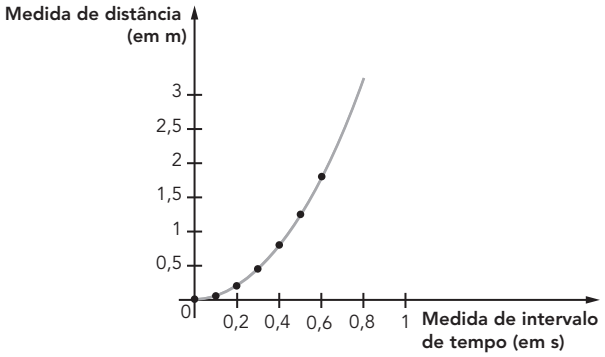


2. **a)** V. A taxa média de variação não é constante entre quaisquer 2 pontos obtidos e por isso a relação não pode ser representada por uma função afim.

b) V. Levando os dados em conta, é possível notar que, ao dobrar a medida de intervalo de tempo, a medida de distância é multiplicada por 2^2.

c) V. Se aplicarmos os valores da tabela da função, temos $d\left(\frac{1}{10}\right) = 500 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 5$; $d\left(\frac{2}{10}\right) = 500 \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^2 = 20$; e assim por diante.

d) F. O gráfico terá formato de uma parte de uma parábola de concavidade voltada para cima, pois $a = 500$, ou seja, $a > 0$.



3. **a)** $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$

b) $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 4 \cdot (-1) \cdot 15}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = -3$ ou $x = 5$

c) $x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 9 \cdot (-1)}}{2 \cdot 9} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{1}{3}$

d) $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = 3$

e) $x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} \Rightarrow x = 0$

f) $\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -11 \Rightarrow \nexists x$ real, pois $\Delta < 0$.

g) $(x + 3) \cdot (x - 5) = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 5$

h) $x = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{9 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = 2\sqrt{3}$

6. Seja n o número inicial de professores.

- No início, cada professor pagaria, em reais, $\frac{6\,400}{n}$.
- Com a desistência de 6 professores, cada um teve de pagar, em reais, $\frac{6\,400}{n - 6}$.

Do enunciado, temos que: $\frac{6\,400}{n - 6} = \frac{6\,400}{n} + 240 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6}{(n - 6)n} = \frac{3}{80}$; com $n \neq 0$ e $n \neq 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 80 \cdot 6 = 3[(n - 6)n] \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - 6n - 160 = 0 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 16$

$16 - 6 = 10$

Assim, 10 professores foram à viagem.

8. **a)** Representa a arrecadação (receita) em reais que o vendedor obtém ao vender n cocos a um preço p cada um.

b) Representa que a arrecadação ainda será de R$ 280,00, pois, ao diminuir o preço original em R$ 0,50, o número de cocos vendidos aumentará em 10 unidades.

c) Temos que:

$\begin{cases} (n + 10) \cdot (p - 0{,}5) = 280 \quad \text{I} \\ n \cdot p = 280 \quad \text{II} \end{cases}$

De I:

$np - 0{,}5n + 10p - 5 = 280 \Rightarrow np - 0{,}5n + 10p = 285$

Substituindo o valor de II:

$280 - 0{,}5n + 10p = 285 \Rightarrow n = 20p - 10$

Substituindo o valor de n em I:

$(20p - 10 + 10) \cdot (p - 0{,}5) = 280 \Rightarrow 2p^2 - p - 28 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 4$ ou $p = -\frac{7}{2}$

Como o preço precisa ser um valor positivo, temos que $p =$ R$ 4,00 e $n = 280 : 4 = 70$, ou seja, 70 cocos.

15. **a)** $x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49 - 40}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2}$; zeros: 5 e 2.

$f(x) = (x - 5) \cdot (x - 2)$

b) $x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 0}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-10 \pm 10}{-4}$; zeros: 0 e 5.

$f(x) = -2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 5) = -2x \cdot (x - 5)$

c) $x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{100 - 100}}{2 \cdot (-1)} = \frac{10}{-2}$; zero duplo: −5.

$f(x) = -1 \cdot (x + 5) \cdot (x + 5) = -(x + 5)^2$

16. **a)** $x_V = -\frac{-6}{2} = 3$ e $y_V = -\frac{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 1} = -5$.

Logo, $V(3, -5)$. Como $a > 0$, temos que $y_V = -5$ é a ordenada mínima da função, portanto $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -5\}$.

b) $x_V = -\frac{-1}{-4} = -\frac{1}{4}$ e $y_V = -\frac{(-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}{4 \cdot (-2)} = \frac{25}{8}$.

Logo, $V\left(-\frac{1}{4}, \frac{25}{8}\right)$. Como $a < 0$, temos que $y_V = \frac{25}{8}$ é a ordenada máxima da função, portanto

$Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{25}{8}\right\}$.

c) $x_V = -\frac{-60}{4} = 15$ e $y_V = -\frac{(-60)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0}{4 \cdot 2} = -450$.

Logo, $V(15, -450)$. Como $a > 0$, temos que $y_V = -450$ é a ordenada mínima da função, portanto $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -450\}$.

d) $x_V = -\frac{0}{-2} = 0$ e $y_V = -\frac{0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}{4 \cdot (-1)} = -5$.

Logo, $V(0, -5)$. Como $a < 0$, temos que $y_V = -5$ é a ordenada máxima da função, portanto $Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -5\}$.

e) $(x + 1) \cdot (2 - x) = y = -x^2 + x + 2$; $x_V = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}$ e

$y_V = -\frac{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}{4 \cdot (-1)} = \frac{9}{4}$. Logo, $V\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Como $a < 0$, temos que $y_V = \frac{9}{4}$ é a ordenada máxima da função e

$Im(j) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{9}{4}\right\}$.

18. **a)** 700 *downloads*: $y = 0{,}7$ milhar corresponde a $x = 1$.

$0{,}7 = -\frac{1}{50} \cdot 1^2 + c \cdot 1 \Rightarrow c = \frac{35 + 1}{50} = \frac{18}{25}$

Daí, $y = -\frac{1}{50}x^2 + \frac{18}{25}x$.

Devemos determinar x tal que $y = 0$:

$y = -\frac{1}{50}x^2 + \frac{18}{25}x = 0 \Rightarrow -x^2 + 36x = 0 \xRightarrow{x > 0} x = 36$;

ou seja, 36 semanas.

b) $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{18}{25}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{50}\right)} = 18$; ou seja, 18 semanas.

$y_V = -\frac{1}{50} \cdot 18^2 + \frac{18}{25} \cdot 18 = 6{,}48$; ou seja, 6,48 milhares de *downloads*, isto é, 6 480 *downloads*.

19. **a)** Para a altura máxima de medida máxima de 5 m, temos $y_V = 5$:

$-\frac{0^2 - 4 \cdot k \cdot (-25k)}{4k} = -25k \Rightarrow -25k = 5 \Rightarrow k = -0{,}2$

Já para a altura máxima de medida mínima de 3 m, temos $y_V = 3$:

$-\frac{0^2 - 4 \cdot k \cdot (-25k)}{4k} = -25k \Rightarrow -25k = 3 \Rightarrow k = -0{,}12$

Portanto, $-0{,}2 \leqslant k \leqslant -0{,}12$.

20. **a)** $3x + 3y = 150 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$ I

Medida de área (A) a ser cercada:

$x \cdot y + x \cdot 2y = x \cdot 3y = 3xy$. II

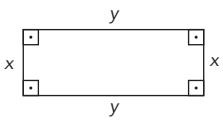
Substituindo I em II:

$A = 3 \cdot x \cdot (50 - x) \Rightarrow A = 150x - 3x^2$

b) A variação da medida de área se a largura do terreno medir 20 m ou 25 m seria de 1800 m² para 1875 m², ou seja, 75 m². Já a variação da medida de área se a largura do terreno medir 15 m ou 20 m seria de 1575 m² para 1800 m², ou seja, 225 m². Portanto, a variação na medida de área seria maior para o segundo caso.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

21.



$2y + 2x = 20 \Rightarrow x + y = 10$

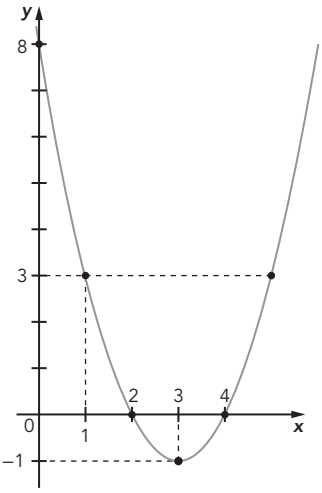
$A = x \cdot y \Rightarrow A = x \cdot (10 - x)$

$A(x) = 10x - x^2$; a medida de área é máxima se

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{-2} = 5$.

Se $x = 5$, $y = 5$. O retângulo de maior medida de área é um quadrado de lado medindo 5 cm e área 25 cm².

22. **a)**



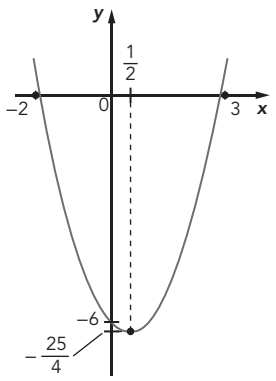
$a > 0$

Zeros da função: 2 e 4.

$V(3, -1)$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$

b)



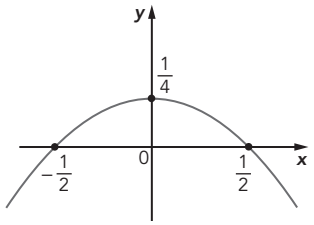
$y = x^2 - x - 6$

Zeros da função: 3 e −2.

$V\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

$Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{25}{4}\right\}$

c)



$a < 0$

Zeros da função: $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

$V\left(0, \frac{1}{4}\right)$

$Im(h) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{1}{4}\right\}$

24. 1º modo: Como a concavidade da parábola é voltada para baixo, então $a < 0$.

Como os zeros da função têm sinais contrários, o produto deles é negativo, ou seja, $\frac{c}{a} < 0$ e, como $a < 0$, então $c > 0$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

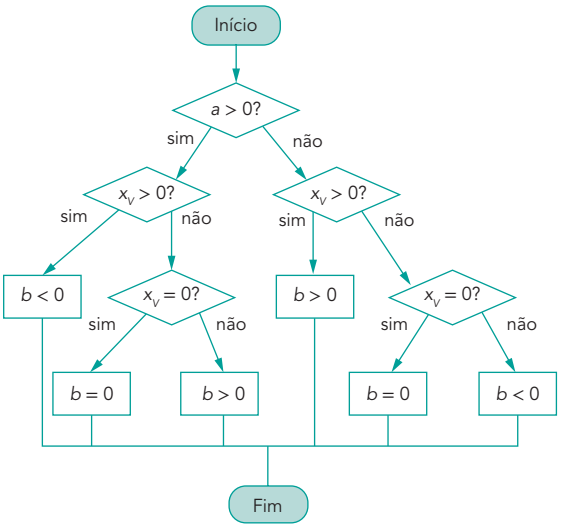
A soma dos zeros é positiva, pois o valor absoluto do zero da função positivo é maior do que o do negativo. Então, $-\frac{b}{a} > 0$ e, como $a < 0$, devemos ter $-b < 0$; daí $b > 0$.

2º modo: $a < 0$

Como a abscissa do vértice é positiva, temos $-\frac{b}{2a} > 0$; como $a < 0$, devemos ter $-b < 0 \Rightarrow b > 0$.

$x = 0 \Rightarrow y = c$; então $(0, c)$ são as coordenadas do ponto de intersecção com o eixo y. Do gráfico, temos que $c > 0$.

25.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

26. **a)** $x_{VU} = \frac{-200 + 900}{2} = 350$

$x_{VP} = \frac{0 - 600}{2} = -300$

Portanto, a reta que representa a função afim deve passar pelos pontos $(-300, 400)$ e $(350, 200)$. A função afim é definida por $f(x) = ax + b$, então temos:

$a = \frac{400 - 200}{-300 - 350} = -\frac{4}{13}$

Temos então:

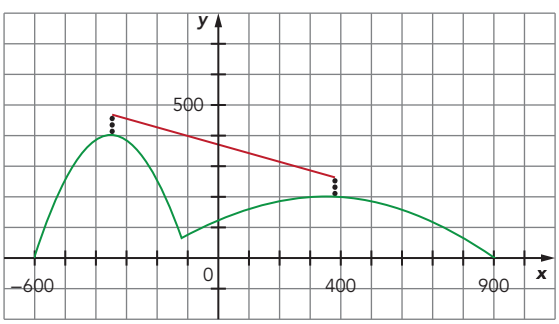
$f(x) = -\frac{4}{13}x + b$

Usando o ponto de coordenadas $(-300, 400)$:

$400 = -\frac{4}{13} \cdot 300 + b \Rightarrow b = \frac{4\,000}{13}$

Logo, $f(x) = -\frac{4}{13}x + \frac{4\,000}{13}$.

b) É possível notar pelo gráfico que a trajetória do bondinho passa por dentro do morro do Pão de Açúcar antes de atingir o pico dele. Uma maneira de resolver seria considerar que o bondinho não sai rente ao chão dos picos, mas, sim, sustentado por cabos que ficam alguns metros acima do solo, como no exemplo a seguir.



27. **a)** Os pontos de coordenadas $(-1, 5)$ e $(3, 5)$ têm a mesma ordenada e, portanto, são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola; ou seja, $x_V = \frac{-1 + 3}{2} = 1$. Assim, $x_V = -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$. Com o ponto de coordenadas $(0, 8)$, é possível concluir que $c = 8$, já que c é o valor da função para $x = 0$.

Substituindo os valores $c = 8$ e $b = -2a$, podemos escrever $y = ax^2 - 2ax + 8$. Com o ponto de coordenadas $(-1, 5)$, temos:

$5 = a \cdot (-1)^2 - 2 \cdot a \cdot (-1) + 8 \Rightarrow a = -1$

Logo, $b = 2$ e $y = -x^2 + 2x + 8$.

b) $y = a \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$

Como o ponto de coordenadas $(0, 3)$ pertence à parábola, tem-se:

$3 = a \cdot (0 - \sqrt{3}) \cdot (0 - \sqrt{3}) \Rightarrow a = 1$

$y = 1 \cdot (x - \sqrt{3})^2 = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$

28. **a)** Planta **A**: com 2 dias de vida, ela terá 5 cm, pois $2 \cdot 2{,}5 = 5$.

Planta **B**: $y = \frac{20 \cdot 2 - 2^2}{6} = 6$; ou seja, 6 cm.

A diferença pedida é 1 cm.

b) $y = 2{,}5x$

c) $\frac{20x - x^2}{6} = 2{,}5x \Rightarrow x = 0$ (data do nascimento) ou $x = 5$ (5º dia); $y = 2{,}5 \cdot 5 = 12{,}5$; ou seja, 12,5 cm.

d) Planta **A**: 2,5 cm/dia (a lei é $y = 2{,}5x$ e $a = 2{,}5$)

Planta **B**: 2,5 cm/dia, pois:

$x = 4 \Rightarrow y = \frac{20 \cdot 4 - 4^2}{6} = \frac{32}{3}$

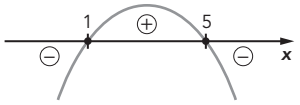
$x = 1 \Rightarrow y = \frac{20 - 1}{6} = \frac{19}{6}$

A taxa média de variação é:

$\frac{\frac{32}{3} - \frac{19}{6}}{4 - 1} = 2{,}5$; ou seja, 2,5 cm/dia.

29. **a)** $a < 0$; zero da função indicado no gráfico: 1.

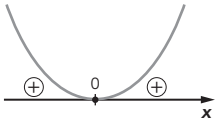
Se $x_V = 3$ e $x = 1$ é um zero da função, tem-se, pela simetria, outro zero da função para $x = 5$.



$y < 0$ para $x < 1$ ou $x > 5$.

$y > 0$ para $1 < x < 5$.

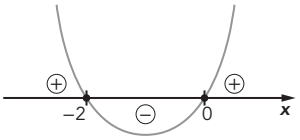
b) $a > 0$; zero da função: 0.



$y > 0$ para $\forall\, x \neq 0$.

Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

c) $a > 0$; zeros da função indicados no gráfico: −2 e 0.



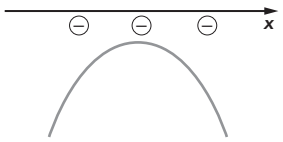
$y < 0$ para $-2 < x < 0$.

$y > 0$ para $x < -2$ ou $x > 0$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

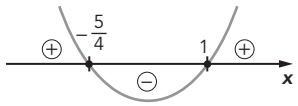
d) $a < 0$; não há zeros da função.



$y < 0$ para qualquer x real.

$\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $y > 0$.

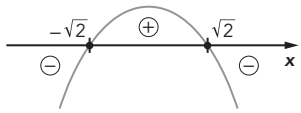
30. **a)** $a > 0$; zeros da função: $-\frac{5}{4}$ e 1.



$x < -\frac{5}{4}$ ou $x > 1 \Rightarrow y > 0$

$-\frac{5}{4} < x < 1 \Rightarrow y < 0$

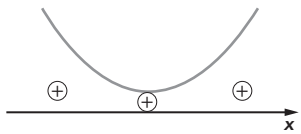
b) $a < 0$; zeros da função: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.



$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \Rightarrow y > 0$

$x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2} \Rightarrow y < 0$

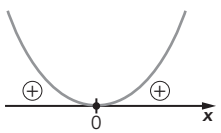
c) $a > 0$; não tem zeros da função.



Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$.

$\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

d) $a > 0$; zero da função duplo: 0.



$x \neq 0 \Rightarrow y > 0$

$\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

31. **I.** V. Não é possível afirmar, com certeza, que o gráfico da função passaria pelo ponto de coordenadas (3, −2), já que os coeficientes da função não foram definidos, mas se $a = 0{,}5$, o ponto em questão pertence ao gráfico, já que, usando a forma fatorada, temos: $-2 = a(3 - 5) \cdot (3 - 1) \Rightarrow a = 0{,}5$. Note que $a > 0$, como esperado, para que a função admita um ponto de mínimo.

II. I. Não é possível determinar y_V com as informações dadas, mas o conjunto imagem descrito poderia ser uma das possibilidades para o conjunto imagem dessa função. Se a afirmação fosse "O conjunto imagem de f **pode ser** $Im(f) = [-2, +\infty[$", a afirmação seria verdadeira.

III. V. Por admitir um ponto de mínimo, $a > 0$ e $y < 0$ para $x_1 < x < x_2$.

IV. V. Por admitir um ponto de mínimo, $a > 0$ e $x > 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$. Como $\sqrt{29} > \sqrt{25} = 5 = x_2$, temos $f(\sqrt{29}) > 0$.

V. F. Pelos zeros da função fornecidos, a lei de f é $f(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 5) = a \cdot (x^2 - 6x + 5)$ e é inviável assumir um valor para a que torne a lei da função igual à proposta na afirmação. Outra maneira de concluir que a afirmação é falsa é notar que a soma dos zeros da função precisa ser igual a 6, mas a soma dos zeros da função na proposição seria $-\frac{b}{a} = -\frac{6}{1} = -6$.

VI. F. Como $x_V = \frac{1+5}{2} = 3$, temos que $f(2) = f(4)$, pois são pontos simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola, que é a reta vertical que passa por $x = 3$.

VII. V. $x_V = 3$, e supondo $y_V = 12$, temos:

$y_V = a \cdot (3 - 1) \cdot (3 - 5) \Rightarrow a = \frac{-12}{-4} = 3 > 0$.

Então é possível se $a = 3$.

32. **b)** Os pontos são simétricos em relação ao eixo y apresentando um comportamento decrescente para valores de $x < 0$ e crescente para $x > 0$.

c) Sim; com o vértice da parábola localizado no ponto (0; 0); concavidade voltada para cima.

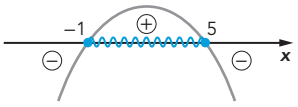
d) Usando o ponto (3; 0,9) e aplicando em $f(x) = ax^2$, obtemos:

$0{,}9 = a \cdot 3^2 \Rightarrow a = 0{,}1$

Temos, então, $f(x) = 0{,}1x^2$.

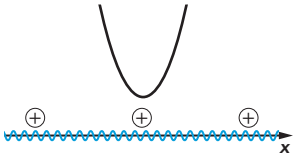
e) Como o gráfico da curva que representa a função $f(x) = 0{,}1x^2$ contém todos os pontos da tabela, podemos dizer que a função pode ser usada para descrever o fenômeno estudado por Marcela.

33. **a)** $y = -x^2 + 4x + 5$ tem $a < 0$ e zeros da função −1 e 5.



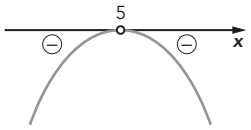
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 5\}$

b) $y = 3x^2 + x + 5$ tem $a > 0$ e não tem zeros da função reais.



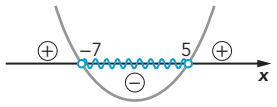
$S = \mathbb{R}$

c) $y = -x^2 + 10x - 25$ tem $a < 0$ e zero da função duplo 5.



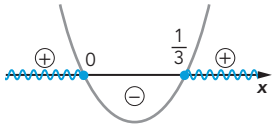
$S = \varnothing$

d) $x^2 + 2x - 35 < 0$ e $y = x^2 + 2x - 35$ tem $a > 0$ e zeros da função −7 e 5.



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 5\}$

e) $9x^2 - 3x \geqslant 0$ e $y = 9x^2 - 3x$ tem $a > 0$ e zeros 0 e $\frac{1}{3}$.



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{3}\right\}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

34. **a)** Devemos encontrar o valor máximo da função que é a ordenada do vértice da parábola

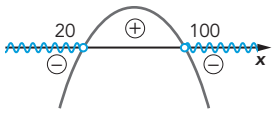
$$L_V = -\frac{30^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-500)}{4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = 400.$$

Como L é dado em milhares de reais, o lucro máximo é R$ 400.000,00.

b) $L < 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 30x - 500 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = 900 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-500) = 400$

$x = \frac{-30 \pm 20}{2 \cdot (-0{,}25)} \Rightarrow x = 20$ ou $x = 100$



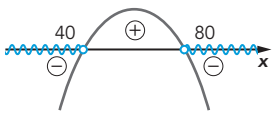
Como $x > 0$, devemos ter $0 < x < 20$ ou $x > 100$.

c) $L > 300 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 30x - 500 > 300 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 30x - 800 > 0 \Rightarrow$

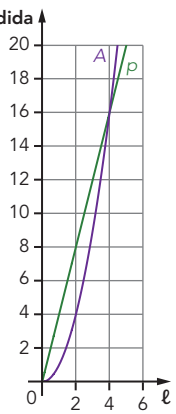
$\Rightarrow \Delta = 900 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-800) = 100$

$x = \frac{-30 \pm 10}{2 \cdot (-0{,}25)} \Rightarrow x = 80$ ou $x = 40$



Devemos ter $40 < x < 80$.

35. **a)**

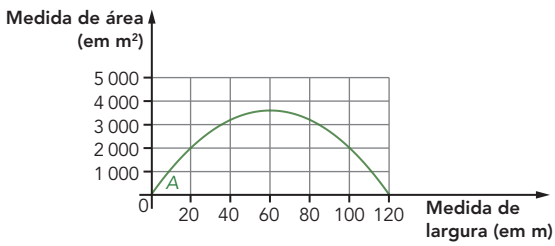


A medida de perímetro p de um quadrado é calculada multiplicando ℓ por 4. A medida de área A, por sua vez, é calculada elevando ℓ ao quadrado.

36. $2x + 2y = 240 \Rightarrow x + y = 120 \Rightarrow y = 120 - x$ I

$A = x \cdot y$ II

Substituindo I em II: $A = x \cdot (120 - x) \Rightarrow A = -x^2 + 120x$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

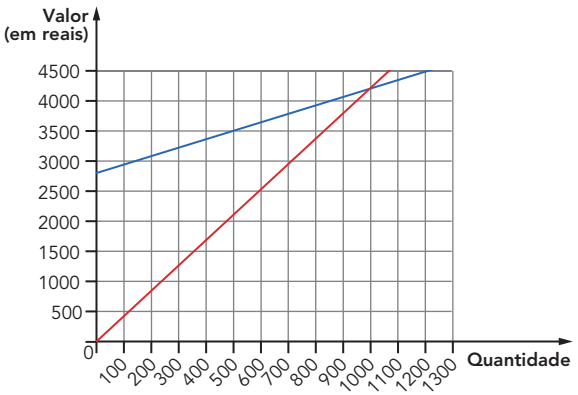
Educação financeira

a) Exemplos de resposta: aluguel do estabelecimento; contas mensais, como energia elétrica, água, telefone e internet; taxas bancárias; entre outros gastos.

b) $C(x) = 2\,800 + 1{,}4 \cdot x$

c) $R(x) = 4{,}20 \cdot x$

d)



Banco de imagens/Arquivo da editora

e) O custo não é diretamente proporcional ao número de brigadeiros vendidos, pois também depende de uma quantia fixa; a receita é diretamente proporcional ao número de brigadeiros vendidos.

f) O ponto de intersecção entre as duas retas pode ser encontrado igualando as duas funções.

$2\,800 + 1{,}4x = 4{,}20x \Rightarrow x = 1000$

Isso quer dizer que, ao vender 1000 brigadeiros, a empreendedora terá arrecadado exatamente o mesmo valor que gastou com o custo de produção.

g) $L(x) = 4{,}20x - 2\,800 - 1{,}4x \Rightarrow L = 2{,}8x - 2\,800$. O lucro é negativo para valores de $x < 1000$, nulo para $x = 1000$ e positivo para $x > 1000$.

h) $C(n) = 2\,800 + 1{,}4 \cdot (1000 - 15n) = -21n + 4\,200$

i) $L(n) = R(n) - C(n) = -1{,}5n^2 + 37n + 4\,200 - (-21n + 4\,200) =$
$= -1{,}5n^2 + 58n$

j) $n_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{58}{2 \cdot (-1{,}5)} \simeq 19{,}3$, ou seja, 19 aumentos.

Devem ser dados 19 aumentos de 10 centavos.

$L(n_V) = -1{,}5n^2 + 58n = -1{,}5 \cdot (19)^2 + 58 \cdot 19 = 560{,}50$; ou seja, R$ 560,50 de lucro máximo.

k) $4{,}2 + 19 \cdot 0{,}1 = 6{,}1$

O brigadeiro deve custar R$ 6,10.

$1000 - 15 \cdot 19 = 715$

Devem ser produzidos 715 brigadeiros.

Para fundamentar saberes

3. A função quadrática que representa o movimento parabólico da bola pode ser descrita pela lei:

$y = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 40) \Rightarrow y = a \cdot (x^2 - 40x)$.

Para $x = 30$, temos que $y = 3$, logo:

$3 = a \cdot (30^2 - 40 \cdot 30) \Rightarrow a = -\frac{1}{100}$

Como a altura máxima ocorre no eixo de simetria da parábola, $x_V = 20$ e $y_V = -\frac{1}{100} \cdot (20^2 - 40 \cdot 20) = 4$, ou seja, 4 m. Portanto, alternativa **b**.

4. **a)** Medida da área hachurada:

$2 \cdot (20 - 2x) \cdot x + 2 \cdot (16 - 2x) \cdot x = -8x^2 + 72x$.

b) A é máxima se $x = x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-72}{2 \cdot (-8)} = 4{,}5$, ou seja, 4,5 cm.

Se $x = 4{,}5$, temos $A = -8 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 72 \cdot \frac{9}{2} = 162$; ou seja, 162 cm^2.

6. A medida da altura máxima atingida pela bola a partir da altura do lançamento foi:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{6}\right)(12)}{4\left(-\frac{1}{6}\right)} = \frac{121}{6}; \text{ ou seja, } \frac{121}{6} \text{ m.}$$

Mas a bola é lançada a $\frac{3}{2}$ m de altura em relação ao solo e, portanto, a altura máxima que ela atinge em relação ao solo é de $\frac{121}{6} + \frac{3}{2} = \frac{130}{6} = 21 + \frac{2}{3}$; ou seja, $21 + \frac{2}{3}$ m.

Portanto, alternativa **d**.

Unidade 3

Capítulo 6

Atividades

1. **a)** Falsa, pois, por exemplo, as medidas dos lados de um deles podem ser 1 cm e 2 cm; e as do outro, 1 cm e 3 cm. Como $\frac{1}{2}$ é diferente de $\frac{1}{3}$, esses retângulos não são semelhantes.

b) Verdadeira.

c) Falsa, pois, por exemplo, os ângulos agudos de um dos triângulos podem ter medidas 30° e 60° e os do outro podem ter medidas 40° e 50°. Logo, não são semelhantes.

d) Verdadeira.

e) Falsa, pois, por exemplo, as bases de um deles podem medir 1 cm e 3 cm; e as do outro, 1 cm e 4 cm. Logo, não são semelhantes.

f) Falsa, pois um pode ter ângulos internos medindo 30° e 150°; e o outro, 80° e 100°. Logo, não são semelhantes.

4. A medida de perímetro do quadrilátero dado é 85 cm e a do pedido, 17 cm.

Então: $\frac{85}{17} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$.

Portanto, $\frac{85}{17} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow 5 = \frac{12}{A'B'} \Rightarrow A'B' = \frac{12}{5} \Rightarrow A'B' = 2{,}4$; $A'B' = 2{,}4$ cm. Analogamente, $B'C' = 6{,}6$ cm; $C'D' = 4{,}4$ cm; e $D'A' = 3{,}6$ cm.

12. **i.** De acordo com o enunciado, como $ABCD$ é um paralelogramo: $B\hat{A}C \cong D\hat{C}A$ (alternos internos) e $B\hat{C}A \cong D\hat{A}C$ (alternos internos).

ii. Assim, $B\hat{A}C \cong D\hat{C}A$, $B\hat{C}A \cong D\hat{A}C$ e $\overline{AC}$ é um lado comum aos triângulos, então, pelo critério ALA, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

13. Os ângulos $B\hat{A}E$ e $D\hat{A}F$ são complementares, pois $m(B\hat{A}E) + m(D\hat{A}F) + 90° = 180°$. Além disso, $E\hat{B}A$ e $B\hat{A}E$ também são complementares. Logo, $E\hat{B}A \cong D\hat{A}F$.

Por outro lado, $AB = AD$ (quadrado $ABCD$). Sendo assim, pelo critério LAAo, os triângulos AEB e DFA são congruentes e, consequentemente, $EA = DF = 12$ m e $BE = AF = 16$ m.

Portanto, $EF = EA + AF = 12$ m $+ 16$ m $= 28$ m.

Note que também seria possível utilizar o critério ALA para concluir a congruência dos triângulos AEB e DFA.

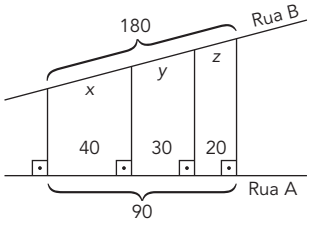
14. **a)** Sim, pois $\overline{AD} \cong \overline{CD}$ (lados do quadrado $ABCD$), os ângulos $A\hat{D}R$ e $R\hat{D}C$ medem 45° (triângulos retângulos e isósceles) e o lado $\overline{DR}$ é comum. Logo, pelo critério LAL, os triângulos ADR e DCR são congruentes.

b) Sim, pois os pontos M e N são pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, então $\overline{AM} \cong \overline{CN}$. Como $\overline{AM} \cong \overline{ST}$ (paralelogramo $AMTS$), então $\overline{CN} \cong \overline{ST}$. Além disso, os ângulos agudos dos triângulos RST e PNC medem 45° (triângulos retângulos e isósceles). Logo, pelo critério ALA, os triângulos RST e PNC são congruentes.

c) Como $\overline{PC} \cong \overline{PR}$ (dado que P é ponto médio de $\overline{CR}$) e $\overline{PN}$ é lado comum ao triângulo PNC e ao quadrado $PNTR$, podemos dizer que PNC "cabe" 2 vezes no quadrado $PNTR$. Portanto, a razão entre as medidas de área do triângulo PNC e do trapézio $RCNT$ é $\frac{1}{3}$.

d) Como $\overline{ST} \cong \overline{NC} \cong \overline{NB}$ (mostrado no item **b**) e $\overline{RT} \cong \overline{NT}$ ($\overline{RT}$ e $\overline{NT}$ lados do quadrado $NPRT$), podemos dizer que RST é congruente a BNT e BMT. Assim, RST "cabe" 2 vezes em BNM. Portanto, a razão entre as medidas de área do triângulo BMN e do triângulo RST é 2.

17.

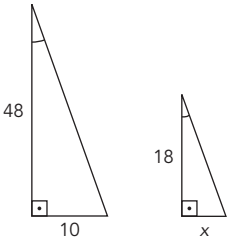


$\frac{180}{x} = \frac{90}{40} \Rightarrow x = 80$ (**I**: 80 m)

$\frac{180}{y} = \frac{90}{30} \Rightarrow y = 60$ (**II**: 60 m)

$z = 180 - (80 + 60) = 40$ (**III**: 40 m)

20. **a)** Admitindo que os raios solares sejam paralelos, os triângulos determinados pelos prédios e as respectivas sombras projetadas no solo são semelhantes pelo critério AA.

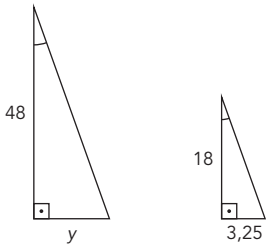


Temos $\frac{48}{10} = \frac{18}{x} \Rightarrow x = 3{,}75$.

O comprimento da sombra mede 3,75 m.

b) Admitindo que os raios solares sejam paralelos, pelo critério AA, os triângulos são semelhantes.

(3,75 − 0,50) m = 3,25 m



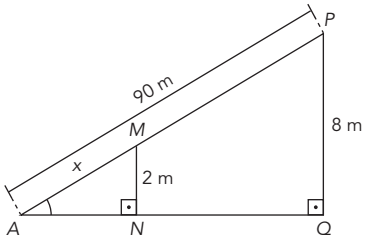
$\frac{48}{y} = \frac{18}{3{,}25} \Rightarrow y = 8{,}\overline{6}$

A sombra do prédio maior diminuiu aproximadamente 1,34 m (pois 10 m − 8,66 m = 1,34 m).

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

21. **a)**

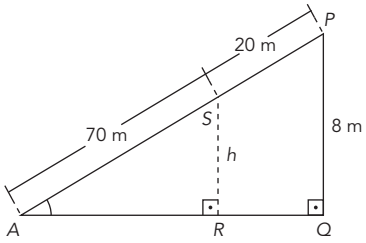


Pelo critério AA: $\triangle AMN \sim \triangle APQ \Rightarrow \frac{MN}{AM} = \frac{PQ}{AP} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{8}{90} \Rightarrow x = 22{,}5$.

Faltam 67,5 m (90 m − 22,5 m = 67,5 m) para chegar ao ponto mais alto.

b)

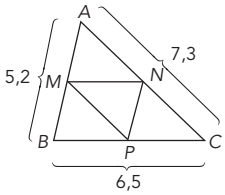


Pelo critério AA: $\triangle APQ \sim \triangle ASR \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AP}{PQ} = \frac{AS}{SR} \Rightarrow \frac{70 + 20}{8} = \frac{70}{h} \Rightarrow h \simeq 6{,}22$.

O ponto S está a aproximadamente 6,22 metros do solo.

26. Os triângulos AMN, MBP e NPC são semelhantes ao triângulo ABC pelo caso LAL.



a) $\triangle ABC \sim \triangle AMN \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{5{,}2}{6{,}5} = \frac{2{,}6}{MN} \Rightarrow MN = 3{,}25$

$\triangle ABC \sim \triangle MBP \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MP} \Rightarrow \frac{5{,}2}{2{,}6} = \frac{7{,}3}{MP} \Rightarrow MP = 3{,}65$

$\triangle ABC \sim \triangle NPC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{NP}{PC} \Rightarrow \frac{5{,}2}{6{,}5} = \frac{NP}{3{,}25} \Rightarrow NP = 2{,}6$

A medida de perímetro do $\triangle MNP$ é: 3,25 cm + 3,65 cm + + 2,6 cm = 9,5 cm.

b) Como $\triangle ABC \sim \triangle AMN$, sendo MN base média do $\triangle ABC$, temos $\frac{BC}{MN} = \frac{2}{1}$.

Analogamente, constatamos que $\frac{AC}{MP} = \frac{2}{1}$ e $\frac{AB}{NP} = \frac{2}{1}$.

Assim, os triângulos são semelhantes pelo caso LLL.

27. **a)** $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{3}{9 + 3} = \frac{4}{4 + 12} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{4}$, pois a razão entre as medidas de perímetro dos triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança.

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$, pois a razão entre as medidas de área dos triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

d) Do item anterior, sabemos que $A_{\triangle ABC} = 16 \cdot A_{\triangle ADE}$, isto é, $A_{\triangle ABC} = 16 \cdot 6\ \text{cm}^2 = 96\ \text{cm}^2$.

Podemos também fazer:

$A_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{16\ \text{cm} \cdot 12\ \text{cm}}{2} = 96\ \text{cm}^2$

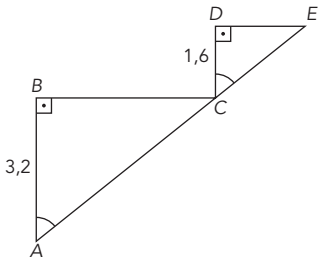
28. **a)** $\frac{AB}{DE} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{3}{h_2} \Rightarrow h_2 = 6$. Logo, $h_2 = 6$ cm.

b) A medida de área do triângulo ABC é $\frac{(5\ \text{cm}) \cdot (3\ \text{cm})}{2} = 7{,}5\ \text{cm}^2$.

A medida de área do triângulo CDE é $\frac{(10\ \text{cm}) \cdot (6\ \text{cm})}{2} = 30\ \text{cm}^2$.

c) Como $k = \frac{AB}{DE} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ e $k^2 = \frac{7{,}5}{30} = \frac{1}{4}$, a razão entre as medidas de área é $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

33.



Pelo critério AA, os triângulos BAC e DCE são semelhantes e $k = \frac{BC}{DE} = \frac{2 \cdot DE}{DE} = 2$. Temos:

$AB = 2 \cdot CD = 2 \cdot 1{,}6\ \text{m} = 3{,}2\ \text{m}$

$AC = 2 \cdot CE$

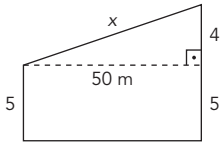
Como $AC + CE = 6$, concluímos que $CE = 2$ m e $AC = 4$ m.

Usando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos:

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2 \Rightarrow BC = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4$. Então, $DE = 1{,}2$.

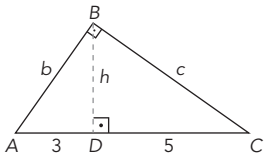
A extensão de cada um dos degraus mede 2,4 m e 1,2 m.

34.



$x^2 = 50^2 + 4^2 \Rightarrow x = \sqrt{2\,516} \simeq 50{,}1597$; ou seja, aproximadamente 50,16 metros.

36.



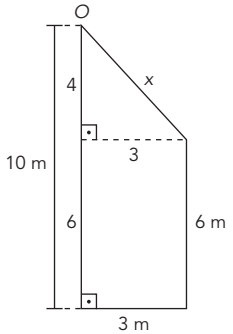
$h^2 = 3 \cdot 5 \Rightarrow h = \sqrt{15}$

$b^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$

$c^2 = 5^2 + h^2 \Rightarrow c = 2\sqrt{10}$

As medidas dos catetos são $2\sqrt{6}$ cm e $2\sqrt{10}$ cm; e a da altura relativa à hipotenusa, $\sqrt{15}$ cm.

38.



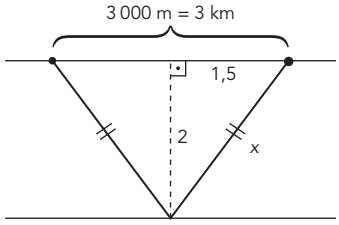
Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 4^2 + 3^2 = 5$

A medida de distância total percorrida pelo robô é 24 m (pois 10 m + 3 m + 6 m + 5 m = 24 m).

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

39.

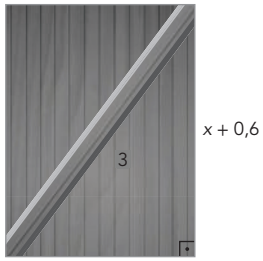


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 2{,}5$; ou seja, $x = 2{,}5$ km.

40.

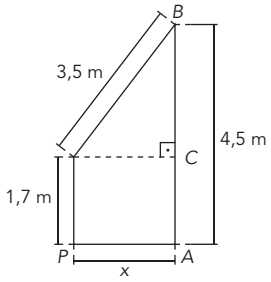


Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$3^2 = x^2 + (x + 0{,}6)^2 \Rightarrow x = \frac{-0{,}6 + 4{,}2}{2} = 1{,}8$

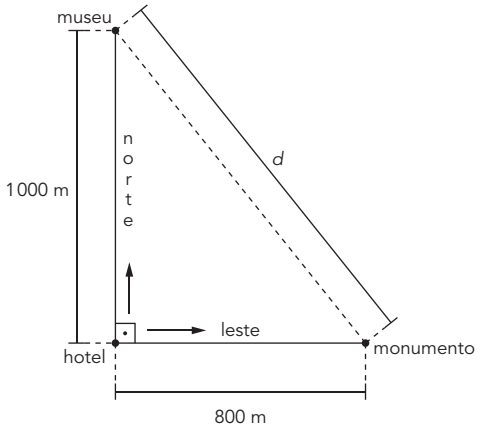
A medida da base do portão é 1,8 m e a medida da altura é 2,4 m.

43.



Seja x a medida de distância, em metros, de Paulo (P) ao pé do poste (A). Então, $(3{,}5)^2 = x^2 + (4{,}5 - 1{,}7)^2 \Rightarrow x = 2{,}1$. A medida de distância entre Paulo e o pé do poste é 2,1 m.

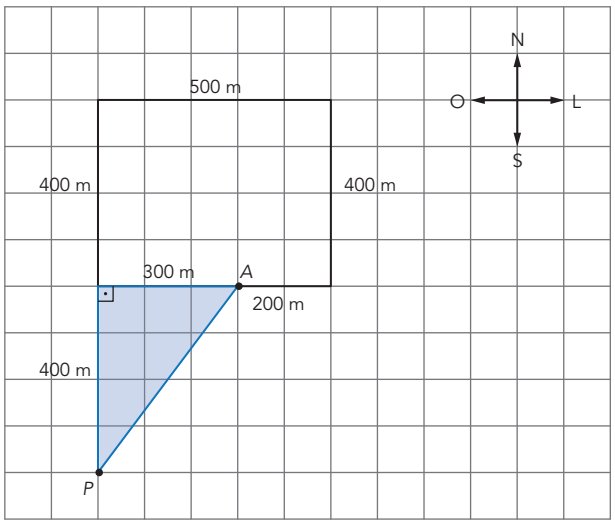
44.



a) De $d^2 = (1000)^2 + (800)^2$, tem-se $d = 100 \cdot \sqrt{164}$, isto é, aproximadamente 1280 m.

b) Andando à medida de velocidade de 2 km/h, cada grupo terá caminhado 500 m ao fim de 15 minutos. A medida de distância x entre eles é determinada pela igualdade $x^2 = (500)^2 + (500)^2$ e é aproximadamente 707 m.

45. **a)**

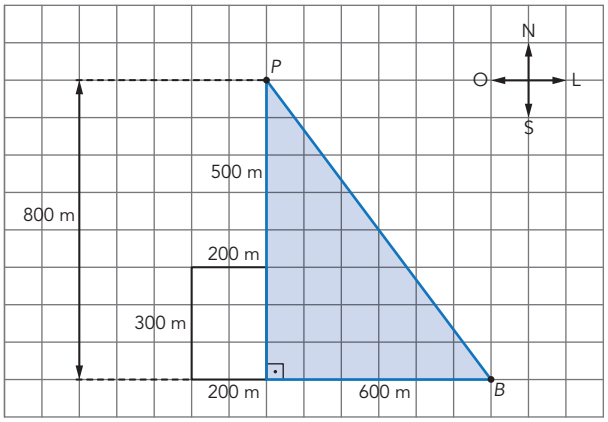


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$(PA)^2 = 300^2 + 400^2 \Rightarrow (PA)^2 = 250\,000 \Rightarrow PA = 500$

A medida de distância entre o ponto A e o ponto P é 500 m

b)



$(PB)^2 = 600^2 + 800^2 \Rightarrow (PB)^2 = 1\,000\,000 \Rightarrow PB = 1000$

A medida de distância entre o ponto P e o ponto B é de 1000 m.

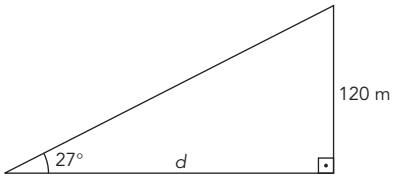
Capítulo 7

Atividades

3. Exemplos de questões:

- Quanto mede a hipotenusa do triângulo PQR?
- Qual é a medida de perímetro do triângulo PQR?

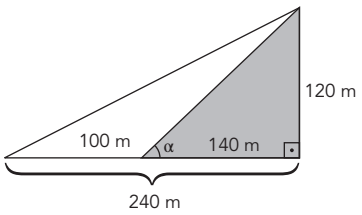
5. **a)** Seja d a medida de distância.



$\tan 27° = \frac{120}{d} \Rightarrow 0{,}5 = \frac{120}{d} \Rightarrow d = 240$; ou seja, 240 m.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

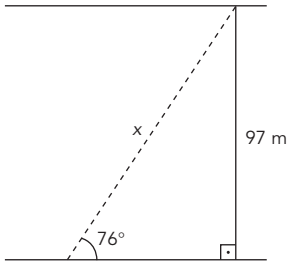
b)



$\tan \alpha = \frac{120 \text{ m}}{140 \text{ m}} \simeq 0{,}857$

O valor mais próximo que encontramos na tabela é $\alpha = 41°$.

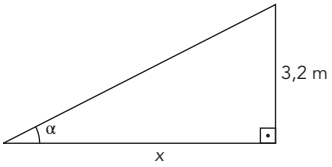
6.



$\text{sen } 76° = \frac{97}{x} \Rightarrow 0{,}97030 = \frac{97}{x} \Rightarrow x \simeq 99{,}97 \simeq 100$

A distância percorrida pelo barco mede aproximadamente 100 m.

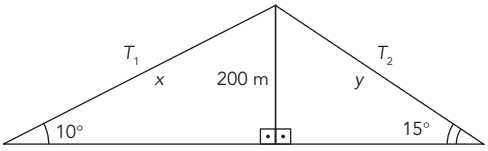
7.



$\tan \alpha = \frac{3{,}2}{x} \Rightarrow \tan \alpha = 0{,}0833 \Rightarrow \frac{3{,}2}{x} \simeq \frac{1}{12} \Rightarrow x \simeq 38{,}4$

O comprimento horizontal deve medir aproximadamente 38,4 metros.

10.



a) Sejam x e y, respectivamente, as medidas de comprimento das trilhas T_1 e T_2.

$\text{sen } 10° = \frac{200}{x} \Rightarrow x = \frac{200}{0{,}174} \simeq 1149{,}42$

Aproximando, obtemos $x = 1149$ m.

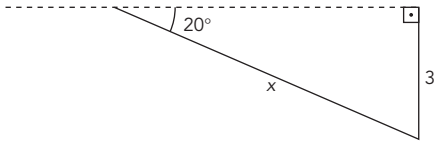
$\text{sen } 15° = \frac{200}{y} \Rightarrow y = \frac{200}{0{,}259} \simeq 772{,}2$

Aproximando, obtemos $y = 772$ m.

Portanto, a trilha **2** tem a menor medida de distância percorrida.

b) A diferença pedida é 377m (pois 1149 m − 772 m = 377 m).

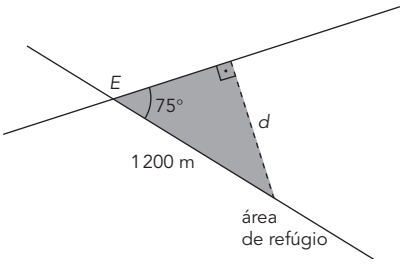
11. Seja x a medida de distância que o avião percorrerá até o pouso.



$\text{sen } 20° = \frac{3}{x} \Rightarrow 0{,}34202 = \frac{3}{x} \Rightarrow x \simeq 8{,}77$

A medida de distância que o avião percorre até o pouso é aproximadamente 8,77 km.

12.

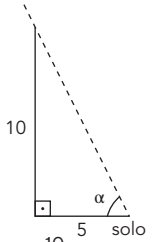


Seja d a medida de distância entre uma das vias e uma área de refúgio.

$\text{sen } 75° = \frac{d}{1200} \Rightarrow 0{,}96593 = \frac{d}{1200} \Rightarrow d \simeq 1159$

A medida de distância é aproximadamente 1159 m.

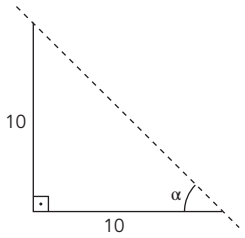
14. **a)**



$\tan \alpha = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \alpha \simeq 63°$

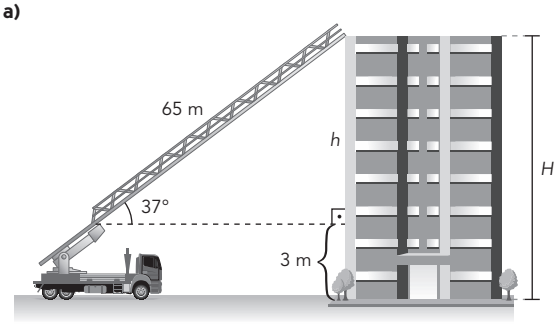
Aproximadamente 63°.

b)



$\tan \alpha = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

15. **a)**



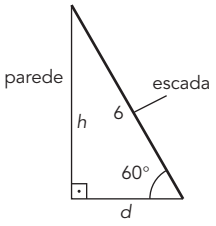
b) $\text{sen } 37° = \frac{h}{65} \Rightarrow 0{,}6 = \frac{h}{65} \Rightarrow h = 39$; ou seja, 39 m.

$H = h + 3 \Rightarrow H = 42$; ou seja, 42 m.

$42 : 2{,}8 = 15$

Portanto, o prédio tem 15 andares.

18. Sejam h a medida da altura e d a medida de distância do pé da escada à parede.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

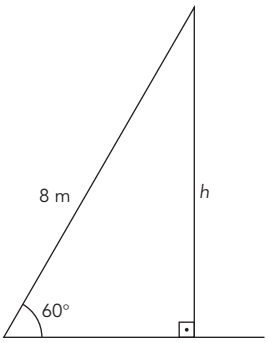
$\text{sen } 60° = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{d}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{6} \Rightarrow d = 3$

A escada atinge o ponto mais alto a uma altura de medida $3\sqrt{3}$ metros, e o pé dela dista 3 metros da parede.

19. Seja h a medida da altura.

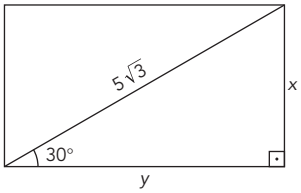
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



$\text{sen } 60° = \frac{h}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{8} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$

O objeto foi solto de uma altura de medida $4\sqrt{3}$ metros.

20. Sejam x e y as medidas dos lados do retângulo.



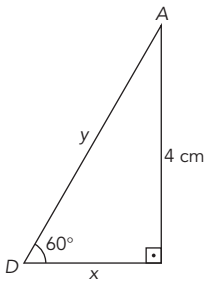
$\text{sen } 30° = \frac{x}{5\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{5\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30° = \frac{y}{5\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{5\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{15}{2}$

$2x + 2y = 5(\sqrt{3} + 3)$

O perímetro mede $5(\sqrt{3} + 3)$ cm.

21. Sejam $y = AD$ e $x = CD - 15$.



$\tan 60° = \frac{4}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$AB = CD = x + 15 = \frac{4\sqrt{3}}{3} + 15$

$\text{sen } 60° = \frac{4}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

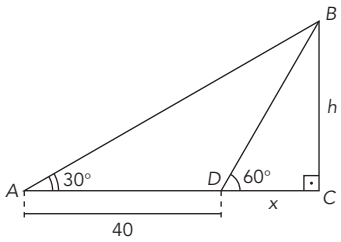
$AD = BC = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

Cálculo da medida de perímetro do paralelogramo:

$2 \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + 15\right) + 2 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} + 30$

O perímetro do paralelogramo mede $(8\sqrt{3} + 30)$ cm.

22. **a)**



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Como $\text{med}(B\hat{D}A) = 120°$, concluímos que $\text{med}(A\hat{B}D) = 30°$ e o $\triangle ABD$ é isósceles de base $\overline{AB}$. Assim, $BD = 40$ m.

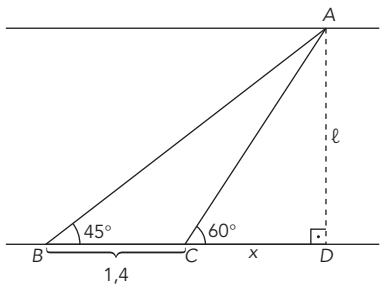
No $\triangle BCD$, temos:

$\cos 60° = \frac{x}{BD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{40} \Rightarrow x = 20$; ou seja, $x = 20$ m.

b) Seja h a medida da altura do prédio.

$\text{sen } 60° = \frac{h}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{40} \Rightarrow h = 20\sqrt{3}$; ou seja, $h = 20\sqrt{3}$ m.

23. Analise o esquema, em que $AD = \ell$ é a medida da largura do rio.



$\triangle ABD$: $\tan 45° = \frac{AD}{BD} \Rightarrow 1 = \frac{\ell}{x + 1{,}4} \Rightarrow \ell = x + 1{,}4$. I

$\triangle ACD$: $\tan 60° = \frac{\ell}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\ell}{x} \Rightarrow \ell = x\sqrt{3}$. II

Substituindo II em I: $x\sqrt{3} = x + 1{,}4 \simeq 2$.

Em II, obtemos $\ell = 2\sqrt{3} \simeq 3{,}4$. Aproximadamente 3,4 km.

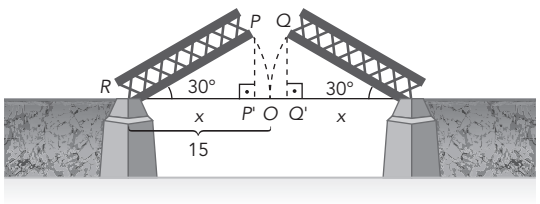
25. **a)** Sim. A medida do lado oblíquo é 16 cm

$\left(\text{sen } 30° = \frac{8}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 16\right)$.

b) Não. Exemplos de resposta:

- Dada a medida da base menor do trapézio igual a 5 cm, por exemplo, o perímetro mede $34 + 8\sqrt{3}$ cm.
- Dada a medida da base maior do trapézio igual a 20 cm, por exemplo, o perímetro mede $64 + 8\sqrt{3}$ cm.

26.



No triângulo $PP'R$, temos:

$\cos 30° = \frac{x}{PR} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

$OP' = 15 - x = 15 - \frac{15\sqrt{3}}{2}$

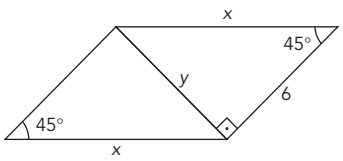
Como $OP' = OQ'$, segue que:

$PQ = P'Q' = 2 \cdot OP' \Rightarrow PQ = 2 \cdot \left(15 - \frac{15\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow PQ = 4{,}5$

Portanto, o comprimento do vão mede 4,5 metros.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

27. **a)** Num paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes e os lados opostos também são congruentes.

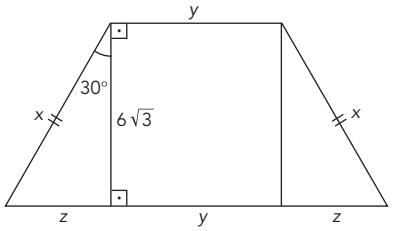


$\cos 45° = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$

$y = 6$ (a diagonal desse paralelogramo o divide em dois triângulos retângulos isósceles)

$x = 6\sqrt{2}$ cm; $y = 6$ cm

b)



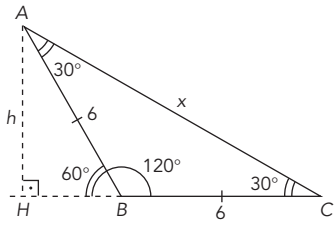
$\cos 30° = \frac{6\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 12$

$x^2 = z^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow z = 6$

$2z + y = 22 \Rightarrow y = 10$

$x = 12$ cm; $y = 10$ cm

28. **a)**



$\triangle ABH$: $\text{sen } 60° = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$.

$\triangle AHC$: $\text{sen } 30° = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 6\sqrt{3}$.

O perímetro do triângulo mede 6 cm + 6 cm + $6\sqrt{3}$ cm = $= 6 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)$ cm.

b) $\frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

A área do triângulo mede $9\sqrt{3}$ cm².

29. $\triangle BAC$: $\tan \beta = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \tan \beta = \frac{h}{AB} \Rightarrow AB = \frac{h}{\tan \beta}$.

$\triangle ABD$: $\tan \alpha = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{BD}{\frac{h}{\tan \beta}}$.

Entretanto, $BD = H - h$. Daí:

$\tan \alpha = \frac{H - h}{\frac{h}{\tan \beta}} \Rightarrow h \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = H - h \Rightarrow H = h \cdot \left(\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \beta}\right)$ u.c.

31. Sabemos que a inclinação máxima para a construção da rampa numa escola é de 8%, o que equivale a uma inclinação aproximada de 5 graus ($\tan 5° = 0{,}08749$). Podemos, então, utilizar a tangente do ângulo para determinar o comprimento mínimo da rampa.

$\tan 5° = \frac{\text{medida da altura}}{\text{medida de comprimento mínimo da rampa}}$

Com isso, temos:

$0{,}08749 = \frac{80}{\text{medida de comprimento mínimo da rampa}}$

Assim, a medida de comprimento mínimo da rampa é aproximadamente 914,39 cm.

Portanto, o comprimento mínimo da rampa deve medir aproximadamente 914,39 cm para atender às especificações de acessibilidade.

Interligando

3. Como h representa a medida da altura da bancada:

$\tan 30° = \frac{\text{medida de comprimento}}{\text{medida da altura}} \Rightarrow 0{,}57 = \frac{45}{h} \Rightarrow h \simeq 78{,}94$

A medida da altura da bancada do mostruário é 78,94 cm, portanto está de acordo com o parâmetro estabelecido para acessibilidade.

Capítulo 8

Atividades

1. **a)** $b = 6{,}5$ cm e $h = 12$ cm

$A = 6{,}5 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 78 \text{ cm}^2$

b) $\ell = 5\sqrt{3}$ m

$h = \ell^2 \Rightarrow A = \left(5\sqrt{3} \text{ m}\right)^2 = 75 \text{ m}^2$

c) $b = 16$ dm; $d = 20$ dm

Sendo h a medida da altura do retângulo, pelo teorema de Pitágoras, temos $h^2 + 16^2 = 20^2 \Rightarrow h = 12$.

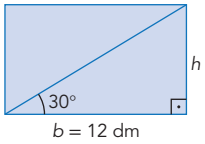
$A = 16 \text{ dm} \cdot 12 \text{ dm} = 192 \text{ dm}^2$

d) ℓ: medida do lado do quadrado.

$p = 4\ell = 24 \text{ m} \Rightarrow \ell = 6 \text{ m}$

$A = (6 \text{ m})^2 = 36 \text{ m}^2$

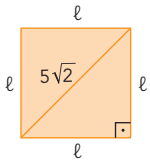
e)



$\tan 30° = \frac{h}{b} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{12} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$

$A = 12 \text{ dm} \cdot 4\sqrt{3} \text{ dm} = 48\sqrt{3} \text{ dm}^2$

f)



$\ell^2 + \ell^2 = \left(5\sqrt{2} \text{ mm}\right)^2 \Rightarrow \ell^2 = 25 \text{ mm}^2$

$A = 25 \text{ mm}^2$

4. Sejam:

- medida do lado do azulejo: ℓ
- medida da diagonal do quadrado: d
- medida de área do azulejo: A_1
- medida de área da superfície das paredes: A_2
- número de azulejos que serão usados: n

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$d = \ell \cdot \sqrt{2} \Rightarrow 15\sqrt{2}\ \text{cm} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 15\ \text{cm}$

Logo, $A_1 = (15\ \text{cm})^2 = 225\ \text{cm}^2$.

Logo, $A_2 = 54\ \text{m} \cdot 4{,}5\ \text{m} = 5\,400 \cdot 450\ \text{cm}^2$

$n \cdot A_1 = A_2 \Rightarrow n = \dfrac{5\,400 \cdot 450}{225} = 10\,800$; ou seja, 10 800 azulejos.

5. Sejam:

- medida de área do quintal: $A = 225\ \text{m}^2$
- medida do lado da piscina original (em m): x
- medida de área da piscina original: $A_1 = x^2$.
- medida de área da piscina reduzida:

$$\begin{cases} A_2 = (x-2)^2 & \textbf{1} \\ A_2 = 0{,}36 \cdot 225\ \text{m}^2 & \textbf{2} \end{cases}$$

De **1** e **2**: $(x-2)^2 = 81\ \text{m}^2 \Rightarrow x = 11\ \text{m} \Rightarrow A_1 = 121\ \text{m}^2$.

Logo, $A_1 - A_2 = 121\ \text{m}^2 - 81\ \text{m}^2 = 40\ \text{m}^2$.

8. **a)** A malha é composta de 90 quadradinhos (pois $10 \cdot 9 = 90$).

Seja A a medida de área de cada quadradinho cujo lado mede x.

$A = x^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{36\,000}{90}\ \text{m}^2 \Rightarrow x = 20\ \text{m}$

Temos:

- medida de perímetro das regiões **I**, **II** e **III**: $14x = 280$ m.
- medida de perímetro da região **IV**: $12x = 240$ m.

Logo, as regiões com medidas de perímetro iguais são **I**, **II** e **III**.

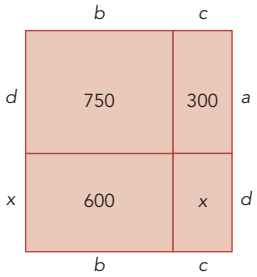
b) $A_I = 6x^2$; $A_{II} = 7x^2$; $A_{III} = 6x^2$; $A_{IV} = 6x^2$.

Logo, Lucas pretende construir na superfície de maior medida de área.

$A_{II} = 7x^2 = 7 \cdot 400\ \text{m}^2 = 2\,800\ \text{m}^2$

9. Sejam a, b, c e d as medidas das dimensões, em metros, dos retângulos que representam os lotes. Temos:

Banco de imagens/Arquivo da editora



$$\begin{cases} a \cdot b = 750\ \text{m}^2 & \textbf{1} \\ a \cdot c = 300\ \text{m}^2 & \textbf{2} \\ b \cdot d = 600\ \text{m}^2 & \textbf{3} \\ c \cdot d = x\ \text{m}^2 & \textbf{4} \end{cases}$$

De **1** e **2**: $\dfrac{b}{c} = \dfrac{750}{300} \Rightarrow b = \dfrac{5}{2}c$ **5**.

Substituindo **5** em **3**: $\left(\dfrac{5}{2}c\right) \cdot d = 600\ \text{m}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c \cdot d = 240\ \text{m}^2 \Rightarrow x = 240\ \text{m}^2$.

Assim, o preço de venda do lote de 240 m² de medida de área é:

$240 \cdot \text{R\$ } 860{,}00 = \text{R\$ } 206.400{,}00$

10. **1ª solução:**

Medida do comprimento do apartamento:

$4\ \text{m} + 2{,}4\ \text{m} + 4{,}8\ \text{m} + 3\ \text{m} = 14{,}2\ \text{m}$.

Medida de área do apartamento:

$\underbrace{(3{,}6\ \text{m} + 4{,}8\ \text{m} + 3\ \text{m})}_{11{,}4\ \text{m}} \cdot 6\ \text{m} + 3\ \text{m} \cdot 2\ \text{m} +$

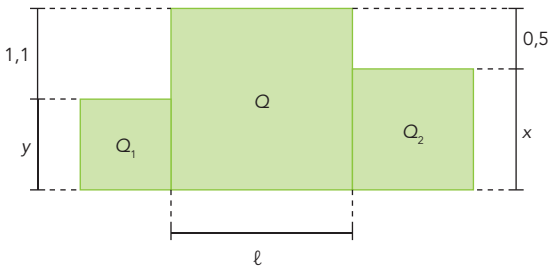
$+ (14{,}2\ \text{m} - 11{,}4\ \text{m}) \cdot 5\ \text{m} = 88{,}4\ \text{m}^2$

2ª solução:

$14{,}2\ \text{m} \cdot 6\ \text{m} + 3\ \text{m} \cdot 2\ \text{m} - (14{,}2\ \text{m} - 11{,}4\ \text{m}) \cdot 1\ \text{m} = 88{,}4\ \text{m}^2$

11. Note na figura que:

$\ell = y + 1{,}1 = x + 0{,}5 \Rightarrow \begin{cases} x = \ell - 0{,}5 \\ y = \ell - 1{,}1 \end{cases}$



Banco de imagens/Arquivo da editora

$A_{Q_1} = y^2 = (\ell - 1{,}1)^2$

$A_{Q_2} = x^2 = (\ell - 0{,}5)^2$

$A_Q = \ell^2$

Como $A_{Q_1} + A_{Q_2} + A_Q = 7{,}06\ \text{m}^2$, temos:

$(\ell - 1{,}1)^2 + (\ell - 0{,}5)^2 + \ell^2 = 7{,}06\ \text{m}^2 \Rightarrow \ell = 2\ \text{m}$

Logo, $A_Q = (2\ \text{m})^2 = 4\ \text{m}^2$.

12. **a)** Lote **I**: na planta, suas dimensões medem 2 cm × 2 cm; dimensões reais: 2 000 cm × 2 000 cm = 20 m × 20 m.

Medida de área do lote **I**: 400 m².

Lote **II**: na planta, suas dimensões medem 5 cm × 4,5 cm; dimensões reais: 5 000 cm × 4 500 cm = 50 m × 45 m.

Medida de área do lote **II**: 2 250 m².

Lote **III**: dimensões na planta:
3 cm × 6,5 cm + 3 cm × 2 cm;
dimensões reais:
30 m × 65 m + 30 m × 20 m.

Medida de área do lote **III**:
1 950 m² + 600 m² = 2 550 m².

b) Medida de área total do terreno: 5 200 m²; porcentagem pedida: $\dfrac{400\ \text{m}^2 + 2\,250\ \text{m}^2}{5\,200\ \text{m}^2} \simeq 0{,}5096$; ou seja, aproximadamente 51%.

c) 850 × 2 550 = 2 167 500; ou seja, R$ 2.167.500,00.

14. **a)** O cálculo efetuado foi a divisão entre 1 hectare e a medida de área do espaçamento.

No primeiro caso: $\dfrac{1\ \text{hectare}}{2\ \text{m} \cdot 2\ \text{m}} = \dfrac{10\,000\ \text{m}^2}{4\ \text{m}^2} = 2\,500$; ou seja, 2 500 mudas/hectare.

No segundo caso: $\dfrac{1\ \text{hectare}}{3\ \text{m} \cdot 2\ \text{m}} = \dfrac{10\,000\ \text{m}^2}{6\ \text{m}^2} \simeq 1667$; ou seja, 1667 mudas/hectare.

b) $\dfrac{1\ \text{hectare}}{5\ \text{m} \cdot 5\ \text{m}} = \dfrac{10\,000\ \text{m}^2}{25\ \text{m}^2} = 400$; ou seja, 400 mudas/hectare.

c) $\dfrac{1\ \text{hectare}}{a \cdot b} = \dfrac{10\,000\ \text{m}^2}{ab}$ precisa ser máximo para a e b naturais. Assim, $a = b = 1$ m.

15. **a)** $b = 15$ cm; $h = 6$ cm

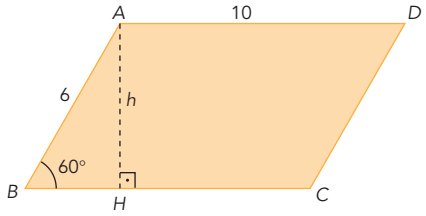
$A = 15\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm} = 90\ \text{cm}^2$

b) $b = 10$ cm; $h = 4$ cm

$A = 10\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm} = 40\ \text{cm}^2$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c)



$b = 10$ cm

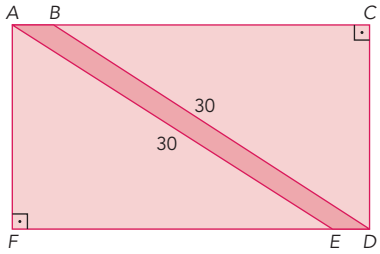
$\triangle AHB$ retângulo $\Rightarrow \operatorname{sen} 60° = \frac{h}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 3\sqrt{3}$; ou seja, $h = 3\sqrt{3}$ cm.

$A = (10 \text{ cm}) \cdot (3\sqrt{3} \text{ cm}) = 30\sqrt{3} \text{ cm}^2$

16. $\left.\begin{array}{l} \triangle AFE \text{ retângulo} \\ AE = 30 \text{ m e } AF = \frac{3}{4} \cdot FE \end{array}\right\} \Rightarrow (AF)^2 + (FE)^2 = (30 \text{ m})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AF = 18$ m



$A_{ACDF} = 504 \text{ m}^2 \Rightarrow AF \cdot FD = 504 \Rightarrow FD = 28$

Como $AF = 18$ m e $ED = FD - FE = 28$ m $- 24$ m $= 4$ m são respectivamente a medida da altura e a medida da base da passagem (paralelogramo), a área mede:

$A_{ABDE} = ED \cdot AF = 4 \text{ m} \cdot 18 \text{ m} = 72 \text{ m}^2$

Outro modo de resolução:

Primeiramente, determinam-se $FE = 24$ m e $AF = 18$ m, da maneira como foi feito anteriormente.

Como os triângulos retângulos AFE e CDB são congruentes, temos:

$A_{ACDF} = 2 \cdot A_{AFE} + A_{ABDE} \Rightarrow 504 = 2 \cdot \left(\frac{24 \cdot 18}{2}\right) + A_{ABDE} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{ABDE} = 72$; ou seja, $A_{ABDE} = 72 \text{ m}^2$.

17. **a)** $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$; ou seja, $A = 16\sqrt{3} \text{ m}^2$.

b) $BC = 8$ m

Sendo H o ponto médio de $\overline{BC}$, temos $BH = HC = \frac{BC}{2} = 4$ m.

Como ABC é um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$, o triângulo AHC é retângulo e, portanto:

$h^2 + 4^2 = 12^2 \Rightarrow h = 8\sqrt{2}$

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$; ou seja, $A = 32\sqrt{2} \text{ m}^2$.

c) Adotando o maior lado como a base, a altura h será interior ao triângulo.

$4^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = 16 - x^2$ I

$9^2 = (11 - x)^2 + h^2 \Rightarrow 81 = 121 - 22x + x^2 + h^2$ II

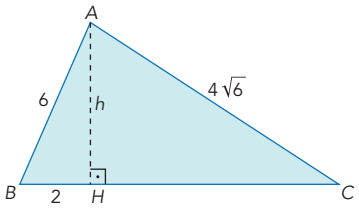
Substituindo I em II:

$81 = 121 - 22x + 16 \Rightarrow x = \frac{28}{11}$

Em I: $h^2 = 16 - \frac{784}{121} \Rightarrow h = \frac{24\sqrt{2}}{11}$

$A_{ABC} = \frac{\cancel{11} \cdot \frac{24\sqrt{2}}{\cancel{11}}}{2} = 12\sqrt{2}$; ou seja, $A_{ABC} = 12\sqrt{2} \text{ m}^2$.

d)



$\triangle AHB$ é retângulo: $h^2 + 2^2 = 6^2 \Rightarrow h = 4\sqrt{2}$.

$\triangle AHC$ é retângulo: $h^2 + (HC)^2 = (4\sqrt{6})^2 \Rightarrow HC = 8$.

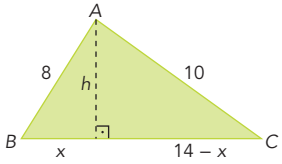
Logo, sendo $a = BH + HC = 10$, temos:

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$; ou seja, $A = 20\sqrt{2} \text{ m}^2$.

18. **a)** $b = 12$ cm e $h = 8$ cm

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$; logo, $A = 48 \text{ cm}^2$.

b) Adotando o maior lado como a base de medida b.



$\begin{cases} 8^2 = h^2 + x^2 \text{ I} \\ 10^2 = h^2 + (14 - x)^2 \Rightarrow 10^2 = h^2 + 196 - 28x + x^2 \text{ II} \end{cases}$

Substituindo I em II:

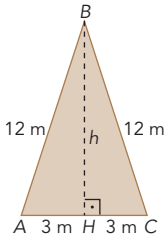
$100 = 64 + 196 - 28x \Rightarrow x = \frac{40}{7}$

Em I:

$64 = h^2 + \frac{1600}{49} \Rightarrow h = \frac{16\sqrt{6}}{7}$

$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{14 \cdot \frac{16\sqrt{6}}{7}}{2} = 16\sqrt{6}$; logo, $A = 16\sqrt{6} \text{ m}^2$.

c)

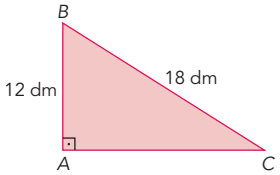


$h^2 + 3^2 = 12^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{15}$; ou seja, $h = 3\sqrt{15}$ m.

$b = AC = 6$ m

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ m} \cdot 3\sqrt{15} \text{ m} = 9\sqrt{15} \text{ m}^2$

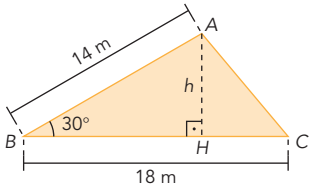
d)



$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \Rightarrow 12^2 + (AC)^2 = 18^2 \Rightarrow AC = 6\sqrt{5}$

$A = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot 12 = 36\sqrt{5}$; logo, $A = 36\sqrt{5} \text{ dm}^2$.

e)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

h: medida da altura $\overline{AH}$ do $\triangle ABC$

$\triangle AHB$ retângulo $\Rightarrow \text{sen } 30° = \frac{h}{14} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{14} \Rightarrow h = 7$; ou seja, 7 m.

A: medida de área do $\triangle ABC$

$A = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 18 \text{ m} \cdot 7 \text{ m} = 63 \text{ m}^2$

19. A folha de papel tem 42 quadradinhos, cada um dos quais com medida de área igual a:

$\ell^2 = \frac{0{,}24 \text{ m} \cdot 0{,}28 \text{ m}}{42} = 0{,}0016 \text{ m}^2 = 16 \text{ cm}^2 \Rightarrow \ell = 4 \text{ cm}$

Sendo h a medida da altura do triângulo, temos:

$h = 3 \cdot 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$

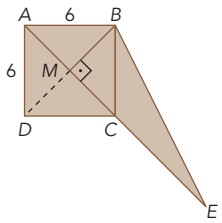
E sendo b a medida da base do triângulo, temos:

$b = 6 \cdot 4 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$

Logo, a medida de área é:

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 24 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm} = 144 \text{ cm}^2$

20.



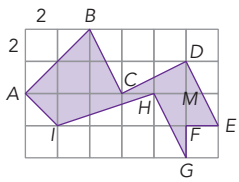
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note na figura que:

$\left.\begin{array}{l} A_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot BM \\ CE = AC = 6\sqrt{2} \text{ cm} \\ BM = \frac{BD}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow A_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \text{ cm} \cdot 3\sqrt{2} \text{ cm} =$

$= 18 \text{ cm}^2$

23.



Para calcular a medida de área da região que representa o terreno, vamos dividi-la em 5 regiões triangulares, *ABC*, *CDM*, *DEF*, *HMG* e *AHI*, em que *CDM*, *DEF* e *HMG* são congruentes entre si. Temos:

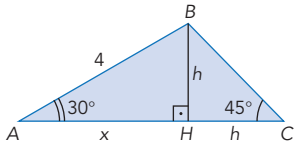
$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \text{ km} \cdot 2 \cdot 2 \text{ km} = 12 \text{ km}^2$

$A_{CDM} = A_{DEF} = A_{HMG} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \text{ km} \cdot 1 \cdot 2 \text{ km} = 4 \text{ km}^2$

$A_{AHI} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \text{ km} \cdot 1 \cdot 2 \text{ km} = 8 \text{ km}^2$

Logo, $A = A_{ABC} + 3 \cdot A_{CDM} + A_{AHI} = 12 \text{ km}^2 + 12 \text{ km}^2 + 8 \text{ km}^2 = 32 \text{ km}^2$.

24.



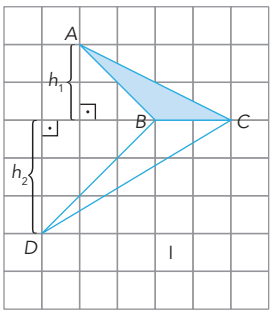
$\text{sen } 30° = \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 2$; ou seja, $h = 2$ cm.

$x^2 + h^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$; ou seja, $x = 2\sqrt{3}$ cm.

$\triangle BCH$ é isósceles $\Rightarrow CH = 2$ cm

$A_{\triangle ABC} = \frac{(x + h) \cdot h}{2} = \frac{(2\sqrt{3} + 2) \cdot 2}{2} \Rightarrow A_{\triangle ABC} = 2 \cdot (1 + \sqrt{3})$; ou seja, $A_{\triangle ABC} = 2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

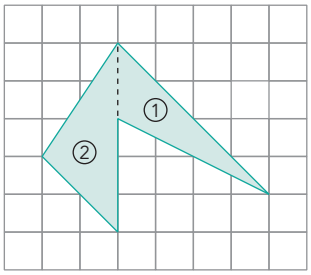
25.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$A_I = A_{\triangle ABC} + A_{\triangle BCD}$

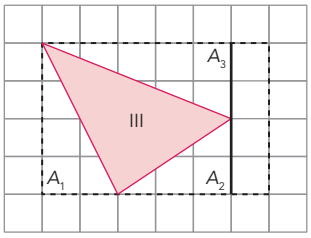
$A_I = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} = 2 + 3 = 5$; ou seja, $A_I = 5$ u.a.



Medida de área do triângulo **1**: $\frac{2 \cdot 4}{2} = 4$

Medida de área do triângulo **2**: $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$

$A_{II} = 4 + 5 = 9$; ou seja, 9 u.a.



$A_{III} = A_{\text{retângulo}} - (A_1 + A_2 + A_3) =$

$= 5 \cdot 4 - \left(\frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{5 \cdot 2}{2}\right) =$

$= 20 - (4 + 3 + 5) = 8$; ou seja, $A_{III} = 8$ u.a.

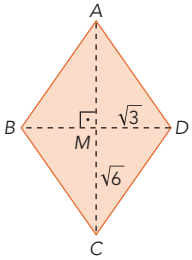
27. **a)** A medida de distância é a medida da altura h do triângulo equilátero de lado medindo 8 m. Assim, $h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \simeq 6{,}93$; ou seja, $h \simeq 6{,}93$ m.

b) $d = \frac{1 \text{ ha}}{8 \text{ m} \cdot 6{,}93 \text{ m}} = \frac{10\,000 \text{ m}^2}{55{,}44 \text{ m}^2} \simeq 180$. Então a densidade é de aproximadamente 180 mudas por hectare.

28. **a)** $D = 16$ dm e $d = 12$ dm

$A = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 16 \text{ dm} \cdot 12 \text{ dm} = 96 \text{ dm}^2$

b) M: ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.



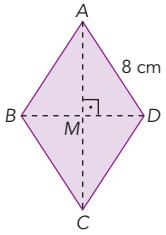
$MC = \frac{D}{2}$ e $MD = \frac{d}{2}$

$D = 2\sqrt{6}$ dm e $d = 2\sqrt{3}$ dm

$A = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \text{ dm} \cdot 2\sqrt{3} \text{ dm} = 6\sqrt{2} \text{ dm}^2$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

29. **a)**



$D = AC = 12$ cm $\Rightarrow AM = 6$ cm

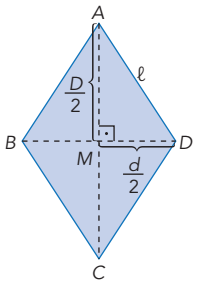
$d = BD \Rightarrow MD = \frac{d}{2}$

$\triangle AMD$ é retângulo: $(AM)^2 + (MD)^2 = (AD)^2 \Rightarrow 36 + \frac{d^2}{4} = 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 4\sqrt{7}$.

Logo, $A = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ cm} \cdot 4\sqrt{7} \text{ cm} = 24\sqrt{7} \text{ cm}^2$.

b)



$4\ell = 50 \text{ m} \Rightarrow \ell = \frac{25}{2} \text{ m}$

$\frac{d}{D} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{d}{3} = \frac{D}{4}$ I

$\triangle AMD$ é retângulo:

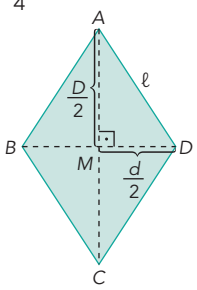
$\frac{d^2}{4} + \frac{D^2}{4} = \ell^2 \Rightarrow d^2 + D^2 = 4 \cdot \frac{625}{4} = 625$ II

De I: $\frac{d^2}{9} = \frac{D^2}{16} = \frac{d^2 + D^2}{9 + 16} \overset{\text{II}}{\Longrightarrow} \frac{d^2}{9} = \frac{D^2}{16} = \frac{625}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} d^2 = 9 \cdot 25 \Rightarrow d = 15 \\ D^2 = 16 \cdot 25 \Rightarrow D = 20 \end{cases}$

Logo, $A = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ m} \cdot 15 \text{ m} = 150 \text{ m}^2$.

30. $\ell = 1{,}25$ cm e $\frac{d}{D} = \frac{3}{4}$ I



$\triangle AMD$ é retângulo: $(AM)^2 + (MD)^2 = \ell^2 \Rightarrow \frac{D^2}{4} + \frac{d^2}{4} = (1{,}25)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow D^2 + d^2 = 4 \cdot (1{,}25)^2$. II

De I: $\frac{d}{3} = \frac{D}{4} \Rightarrow \frac{d^2}{9} = \frac{D^2}{16} \Rightarrow \frac{d^2}{9} = \frac{D^2}{16} = \frac{d^2 + D^2}{9 + 16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d^2}{9} = \frac{D^2}{16} \overset{\text{II}}{=} \frac{4 \cdot 1{,}25^2}{25} \Rightarrow \begin{cases} d = 1{,}5 \text{ cm} \\ D = 2 \text{ cm} \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} 1 \text{ cm} — 90 \text{ km} \\ 1{,}5 \text{ cm} — d_r \end{matrix}\right\} \Rightarrow d_r = 135 \text{ km}$

$\left.\begin{matrix} 1 \text{ cm} — 90 \text{ km} \\ 2 \text{ cm} — D_r \end{matrix}\right\} \Rightarrow D_r = 180 \text{ km}$

Logo, a medida de área real é:

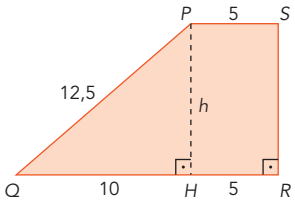
$A = \frac{1}{2} \cdot 180 \text{ km} \cdot 135 \text{ km} = 12150 \text{ km}^2$

31. Exemplo de problema: Um artista quer pintar um losango em um mural e precisa calcular a quantidade de tinta necessária para a pintura. Para cada metro quadrado de superfície da parede, serão utilizados 125 mL de tinta. Sabendo que o losango tem medida de perímetro igual a 40 m e uma diagonal medindo 16 m, calcule a quantidade de tinta necessária para a pintura.

32. **a)** $b = 10$ m; $B = 24$ m; $h = 12$ m

$A = \frac{1}{2}(10 + 24) \cdot 12 = 204$; ou seja, $A = 204 \text{ m}^2$.

b) $b = 5$ m; $B = 15$ m

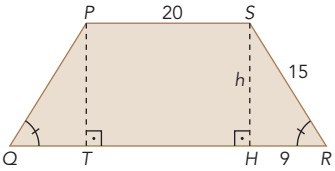


$\triangle PHQ$ é retângulo:

$(QH)^2 + (h)^2 = (PQ)^2 \Rightarrow h^2 = (12{,}5)^2 - 10^2 \Rightarrow h = 7{,}5$; ou seja, $h = 7{,}5$ m.

$A = \frac{1}{2}(5 + 15) \cdot 7{,}5 = 75$; ou seja, $A = 75 \text{ m}^2$.

c) $b = 20$ m



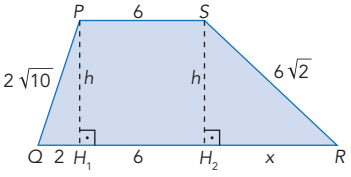
Como o trapézio é isósceles e os triângulos PTQ e SHR são congruentes, $QT = HR = 9$ m.

$B = QT + TH + HR = 9 \text{ m} + 20 \text{ m} + 9 \text{ m} = 38 \text{ m}$

$\triangle SHR$ é retângulo: $h^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow h = 12$; ou seja, $h = 12$ m.

$A = \frac{1}{2}(20 + 38) \cdot 12 = 348$; ou seja, $A = 348 \text{ m}^2$.

d) $b = 6$ m



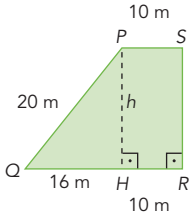
$\triangle PH_1Q$ é retângulo: $2^2 + h^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 \Rightarrow h = 6$; ou seja, $h = 6$ m.

$\triangle SH_2R$ é retângulo: $x^2 + 6^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x = 6$; ou seja, $x = 6$ m.

$B = 2 + 6 + x \Rightarrow B = 14$; ou seja, $B = 14$ m.

$A = \frac{1}{2}(6 + 14) \cdot 6 = 60$; ou seja, $A = 60 \text{ m}^2$.

33. $b = 10$ m; $B = 26$ m



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

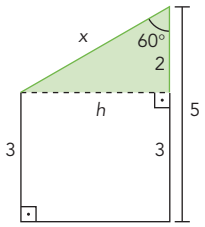
$\triangle PHQ$ é retângulo: $h^2 + 16^2 = 20^2 \Rightarrow h = 12$; ou seja, $h = 12$ m.

$A = \frac{1}{2}(10 + 26) \cdot 12 = 216$; ou seja, $A = 216$ m^2.

Logo, o preço de venda é:

216 · R$ 1.500,00 = R$ 324.000,00

35. **a)**



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Medidas reais das bases do trapézio:

3 cm · 2 000 = 6 000 cm = 60 m

5 cm · 2 000 = 10 000 cm = 100 m

$\cos 60° = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 4$; ou seja, $x = 4$ cm.

4 cm · 2 000 = 8 000 cm = 80 m

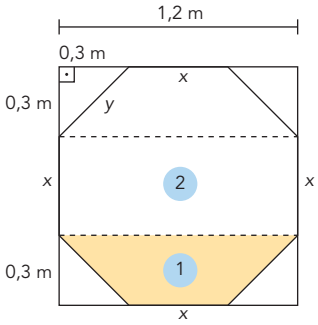
b) Medida de área do terreno: $A = \frac{(60 + 100) \cdot h}{2}$ I

$h^2 + 2^2 = x^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$; ou seja, $h = 2\sqrt{3}$ cm.

A medida real é $2\sqrt{3}$ cm · 2 000 = $40\sqrt{3}$ m.

De I, vem $A = \frac{(60 \text{ m} + 100 \text{ m}) \cdot 40\sqrt{3} \text{ m}}{2} = 3\,200\sqrt{3}$ m^2.

36. **a)**



$x = 1{,}2 \text{ m} - 2 \cdot 0{,}3 \text{ m} = 0{,}6$ m

$y^2 = (0{,}3)^2 + (0{,}3)^2 \Rightarrow y = 0{,}3\sqrt{2}$; ou seja, $y = 0{,}3\sqrt{2}$ m.

A medida de perímetro (em metros) é:

$4x + 4y = 4 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}3\sqrt{2} = 4{,}08$.

b) Medida de área pedida: $A = 2 \cdot A_1 + A_2$.

$A_1 = \frac{(1{,}2 + 0{,}6) \cdot 0{,}3}{2} = 0{,}27$

$A_2 = 1{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}72$

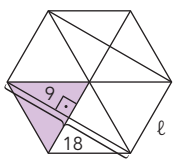
$A = 2 \cdot 0{,}27 \text{ m}^2 + 0{,}72 \text{ m}^2 = 1{,}26 \text{ m}^2$

39. **a)** $a = \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; ou seja, $a = \sqrt{3}$ cm.

b) $a = \frac{r}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$; ou seja, $a = 2{,}5$ cm.

c) $A = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$; ou seja, $A = 24\sqrt{3}$ cm^2.

d)



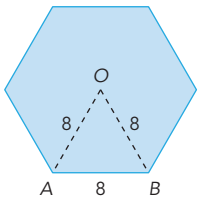
Note que o apótema do hexágono mede 9 cm.

$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 9 \Rightarrow \ell = 6\sqrt{3}$

$A = 6 \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = 162\sqrt{3}$; ou seja,

$A = 162\sqrt{3}$ cm^2.

40.

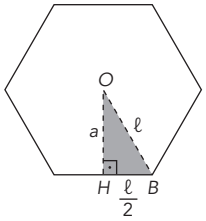


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$\triangle AOB$ é equilátero: $A_{AOB} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{AOB} = 16\sqrt{3}$; ou seja, $A_{AOB} = 16\sqrt{3}$ cm^2.

$A_{hex} = 6 \cdot A_{AOB} \Rightarrow A_{hex} = 96\sqrt{3}$; ou seja, $A_{hex} = 96\sqrt{3}$ cm^2.

41.



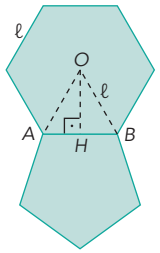
$\triangle OHB$ é retângulo:

$a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow a = 0{,}4\sqrt{3}$; ou seja, $a = 0{,}4\sqrt{3}$ m.

$p = 6 \cdot \ell \Rightarrow p = 6 \cdot 0{,}8 \text{ m} \Rightarrow p = 4{,}8$ m

$A = \frac{p \cdot a}{2} \Rightarrow A = \frac{4{,}8 \cdot 0{,}4\sqrt{3} \text{ m}}{2} = 0{,}96\sqrt{3}$ m^2

42. **a)**



$a = OH$ (O apótema do hexágono coincide com a altura do $\triangle AOB$ equilátero.)

$AB = \ell$

$a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{3}$; ou seja, $\ell = 2\sqrt{3}$ cm.

A_1: medida de área do $\triangle AOB$.

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$; ou seja, $A_1 = 3\sqrt{3}$ cm^2.

A: medida de área do hexágono.

$A = 6 \cdot A_1 \Rightarrow A = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$; ou seja, $A = 18\sqrt{3}$ cm^2.

b) $p = 5\ell \Rightarrow p = 5 \cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$; ou seja, $p = 10\sqrt{3}$ cm.

44. Como $\overline{CD}$ é paralelo ao lado $\overline{AB}$, os triângulos EDC e EAB são semelhantes e a razão de semelhança é $k = \frac{AB}{DC} = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$.

Razão entre as medidas de área dos triângulos EDC e EAB:

$\frac{A_{EAB}}{A_{EDC}} = k^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow A_{EAB} = A_{EDC} \cdot \frac{25}{9}$

Medida de área do trapézio $ABCD$:

$A_{ABCD} = \frac{(50 + 30) \cdot 10}{2} = 400$

Temos $A_{EAB} = A_{EDC} + A_{ABCD} \Rightarrow A_{EDC} \cdot \frac{25}{9} = A_{EDC} + A_{ABCD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A_{EDC}}{A_{ABCD}} = \frac{9}{16}$.

A razão pedida é $\frac{9}{16}$.

46. **a)** Medida de área do círculo maior de raio R medindo 4 m: $A_{maior} = 16\pi$.

Medida de área do círculo menor de raio r medindo 2 m: $A_{menor} = 4\pi$.

Medida da área colorida:

$A_{colorida} = A_{maior} - A_{menor} = 16\pi - 4\pi = 12\pi$.

A medida de área pedida é 12π m^2.

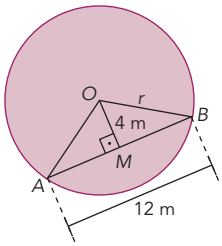
b) O semicírculo colorido de raio $r = 2$ m é equivalente ao semicírculo branco de raio medindo $r = 2$ m. Logo, a parte colorida tem medida de área equivalente à da área do semicírculo de raio medindo $R = 2$ m + 2 m = 4 m.

$$A_{colorida} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 = 8\pi$$

A medida de área pedida é 8π m^2.

47. **a)**

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



$\triangle AOB$ é isósceles: M é ponto médio de $\overline{AB}$, então

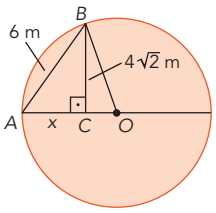
$MB = \frac{AB}{2} = 6$ m.

$\triangle OMB$ é retângulo:

$(OM)^2 + (MB)^2 = (OB)^2 \Rightarrow 4^2 + 6^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 52$; ou seja, $r^2 = 52$ m.

$A = \pi r^2 = \pi \cdot 52 = 52\pi$; ou seja, $A = 52\pi$ m^2.

b)



$\triangle ABC$ é retângulo: $x^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 6^2 \Rightarrow x = 2$; ou seja, $x = 2$ m.

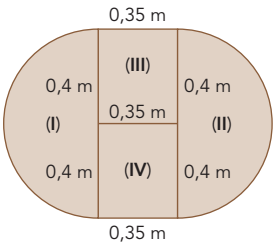
$\triangle BCO$ é retângulo:

$OB = r$; $CO = r - x = r - 2$

$\left(4\sqrt{2}\right)^2 + (r - 2)^2 = r^2 \Rightarrow r = 9$; ou seja, $r = 9$ m.

$A = \pi r^2 = \pi(9 \text{ m})^2 = 81\pi$ m^2

48.



I e **II** formam círculo de raio medindo $r = 0{,}4$ m.

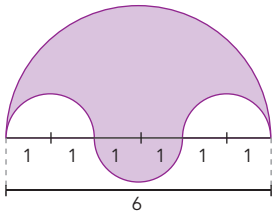
$A_{I \text{ e } II} = \pi(0{,}4 \text{ m})^2 \simeq 0{,}5024$ m^2

III e **IV** formam retângulo de dimensões medindo 0,35 m × 0,8 m.

$A_{III \text{ e } IV} = 0{,}28$ m^2

$A_{tampo} = A_{I \text{ e } II} + A_{III \text{ e } IV} = 0{,}5024 \text{ m}^2 + 0{,}28 \text{ m}^2 = 0{,}7824 \text{ m}^2$; ou seja, aproximadamente 0,7824 m^2.

49. **a)**



A_1: medida de área do semicírculo de raio $r_1 = 3$ dm.

$A_1 = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_1 = \frac{9}{2}\pi$

A_2: medida de área do semicírculo de raio $r_2 = 1$ dm.

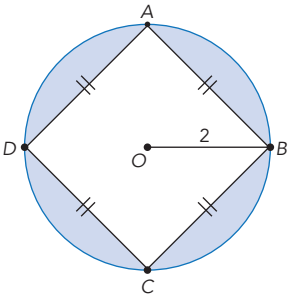
$A_2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}\pi$

A: medida de área da superfície sombreada.

$A = A_1 - A_2 \Rightarrow A = \frac{9}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi \Rightarrow A = 4\pi$

A medida de área da região sombreada é 4π dm^2.

b)



$AB = \ell$

$d = DB = 4$

$d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow 4 = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell^2 = 8$

A_1: medida de área do quadrado.

$A_1 = \ell^2 \Rightarrow A_1 = 8$; ou seja, $A_1 = 8$ dm^2.

$r = OB = 2$ dm

A_2: medida de área do círculo.

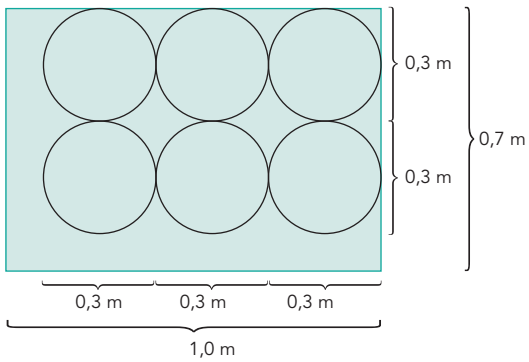
$A_2 = 4\pi$

A: medida de área da superfície sombreada.

$A = A_2 - A_1 = 4\pi - 8 \Rightarrow A = 4(\pi - 2)$

A medida de área da região sombreada é $4(\pi - 2)$ dm^2.

50. **a)**



São 6 assentos; pode haver uma sobra de 0,1 m na horizontal e 0,1 m na vertical.

b) $A_{tábua} = (0{,}7 \text{ m}) \cdot (1 \text{ m}) = 0{,}7$ m^2

$A_{círculo} = \pi \cdot (0{,}15 \text{ m})^2 \simeq 0{,}06975$ m^2

$A_{não\ aproveitada} = 0{,}7 \text{ mm}^2 - 6 \cdot 0{,}06975 \text{ m}^2 = 2\,815 \text{ cm}^2$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

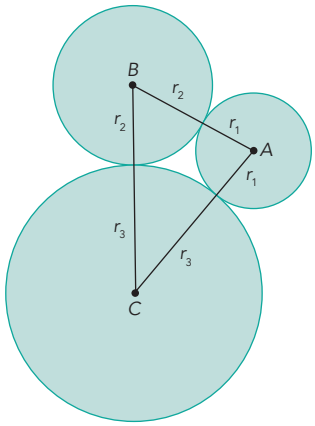
51. $r = 49$ m

A: medida de área da praça.

$A = \frac{22}{7} \cdot (49\text{ m})^2 = 7546\text{ m}^2$

Como a ocupação média era de 4 pessoas por m², então estima-se que a quantidade de pessoas presentes era 30184 (pois $4 \cdot 7546 = 30184$).

52. $\begin{cases} AB = 16\text{ cm} \Rightarrow r_1 + r_2 = 16\text{ cm} \quad \text{I} \\ BC = 24\text{ cm} \Rightarrow r_2 + r_3 = 24\text{ cm} \quad \text{II} \\ AC = 22\text{ cm} \Rightarrow r_1 + r_3 = 22\text{ cm} \quad \text{III} \end{cases}$



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

De I e II, temos:

$\begin{cases} r_1 = 16 - r_2 \\ r_3 = 24 - r_2 \end{cases} \Rightarrow r_1 + r_3 = 40 - 2r_2 = 22 \Rightarrow r_2 = 9$

Logo:

$r_1 = 16\text{ cm} - 9\text{ cm} = 7\text{ cm}$

$r_3 = 24\text{ cm} - 9\text{ cm} = 15\text{ cm}$

Assim, as medidas de área dos círculos de centros A, B e C são respectivamente $\pi r_1^2 = 49\pi$ cm², $\pi r_2^2 = 81\pi$ cm² e $\pi r_3^2 = 225\pi$ cm².

53. Sejam r e R, respectivamente, as medidas do raio do palco circular antes e do raio depois da reforma.

$2R = (100\% + 60\%) \cdot 2r \Rightarrow R = 1{,}6r$

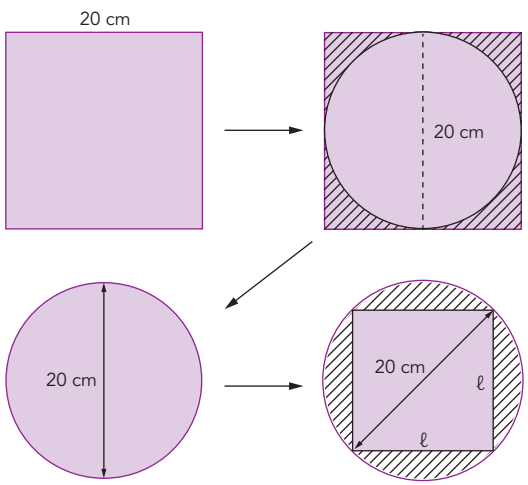
$\left.\begin{array}{l} A_{antes} = \pi \cdot r^2 \\ A_{depois} = \pi \cdot R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow A_{depois} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot (1{,}6r)^2 =$

$= 2{,}56 \cdot \pi \cdot r^2 = 2{,}56 \cdot A_{antes}$

Assim, $\frac{A_{depois}}{A_{antes}} = 2{,}56 = 256\%$.

Portanto, houve um acréscimo de $256\% - 100\% = 156\%$.

54.



$20^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow \ell^2 = 200$

Desperdício 1: $A_{quadrado} - A_{círculo} = 20^2 - \pi \cdot 10^2 \simeq 86$

Desperdício 1: 86 cm².

Desperdício 2: $A_{círculo} - A_{quadrado} = \pi \cdot 10^2 - \ell^2 \simeq 114$

Desperdício 2: 114 cm².

Medida de área total desperdiçada: $86\text{ cm}^2 + 114\text{ cm}^2 = 200\text{ cm}^2$.

55. **a)** $r = 4$ m e $\theta = 30°$

medida do ângulo central (em °)	medida de área (em m²)
360	$\pi \cdot 4^2$
30	A_{setor}

$A_{setor} = \frac{30}{360} \cdot 16\pi \Rightarrow A_{setor} = \frac{4\pi}{3}$; ou seja, $A_{setor} = \frac{4\pi}{3}$ m².

b) $r = 9$ dm e $\theta = 120°$

medida do ângulo central (em °)	medida de área (em dm²)
360	$\pi \cdot 9^2$
120	A_{setor}

$A_{setor} = \frac{120}{360} \cdot 81\pi \Rightarrow A_{setor} = 27\pi$; ou seja, $A_{setor} = 27\pi$ dm².

c) $r = 12$ m e $\theta = 45°$

medida do ângulo central (em °)	medida de área (em m²)
360	$\pi \cdot 12^2$
45	A_{setor}

$A_{setor} = \frac{45}{360} \cdot 144\pi \Rightarrow A_{setor} = 18\pi$; ou seja, $A_{setor} = 18\pi$ m².

d) $r = 6$ cm e $\theta = 90°$

medida do ângulo central (em °)	medida de área (em cm²)
360	$\pi \cdot 6^2$
90	A_{setor}

$A_{setor} = \frac{90}{360} \cdot 36\pi \Rightarrow A_{setor} = 9\pi$; ou seja, $A_{setor} = 9\pi$ cm².

56. Como a medida de área da superfície colorida ($A_{colorida}$) é igual à diferença entre a medida de área do setor circular e a medida de área do triângulo AOB, temos:

• medida de área do setor circular, A_1:

$\left.\begin{array}{l} \text{setor:} \quad A_1 \text{ — } 150 \\ \text{círculo:} \quad \pi \cdot 4^2 \text{ — } 360 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A_1}{16\pi\text{ cm}^2} = \frac{150}{360} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 = \frac{20\pi}{3}\text{ cm}^2$

• medida de área do triângulo AOB, A_2:

Temos: $AO = OB = 4$ cm e $\text{med}(A\hat{O}B) = 150° \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{med}(A\hat{O}H) = 180° - 150° = 30°$

Como o triângulo AHO é retângulo, temos:

$\text{sen } 30° = \frac{AH}{AO} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{4\text{ cm}} \Rightarrow AH = 2\text{ cm}$

Assim: $\frac{1}{2} \cdot OB \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot (4\text{ cm}) \cdot (2\text{ cm}) \Rightarrow A_2 = 4\text{ cm}^2$

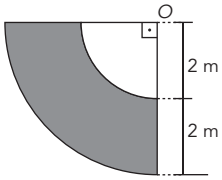
Logo, $A_{colorida} = A_1 - A_2 = \frac{20\pi}{3}\text{ cm}^2 - 4\text{ cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{colorida} = \frac{4(5\pi - 3)}{3}\text{ cm}^2$

Portanto, a medida de área da superfície colorida é $\frac{4(5\pi - 3)}{3}\text{ cm}^2$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

57. **a)**



A_1: medida de área do setor de 90° e raio r_1 medindo 4 m.

$A_1 = \frac{1}{4}\pi \cdot 16 \Rightarrow A_1 = 4\pi$

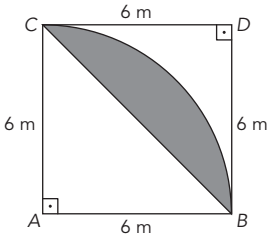
A_2: medida de área do setor de 90° e raio r_2 medindo 2 m.

$A_2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 4 \Rightarrow A_2 = \pi$

A: medida de área da região sombreada.

$A = A_1 - A_2 \Rightarrow A = 3\pi$; ou seja, $A = 3\pi\ m^2$.

b)



A_1: medida de área do setor de 90° e raio medindo $r = AB = 6$ m.

$A_1 = \frac{1}{4}\pi(6\ m)^2 = 9\pi\ m^2$

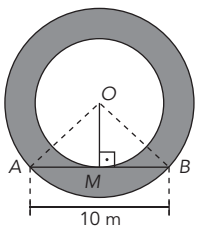
A_2: medida de área do $\triangle ABC$.

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot (6\ m) \cdot (6\ m) = 18\ m^2$

A: medida de área da região sombreada (segmento circular).

$A = A_1 - A_2 = 9\pi - 18 \Rightarrow A = 9(\pi - 2)$; ou seja, $A = 9(\pi - 2)\ m^2$.

c)



$r = OM$; $R = OB$

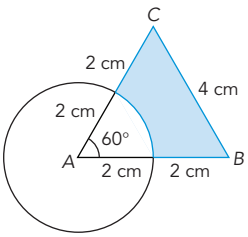
$\triangle AOB$ é isósceles, então M é ponto médio de $\overline{AB}$.

$MB = 5$ m

$\triangle OMB$ é retângulo: $(OB)^2 = (OM)^2 + (MB)^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow \pi R^2 - \pi r^2 = 25\pi$.

Logo, $A_{coroa} = \pi R^2 - \pi r^2 = 25\pi$; ou seja, $A_{coroa} = 25\pi\ m^2$.

59.



Medidas de área, em cm^2:

$A_{\triangle} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

$A_{setor} = \frac{\pi \cdot 2^2}{6} = \frac{2\pi}{3}$

$A_{pedida} = \left(4\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$

60. A medida de comprimento da circunferência maior do relógio é 32π cm, ou seja, $2\pi R = 32\pi$ cm $\Rightarrow R = 16$ cm

Logo, a medida de área do círculo maior é $A_1 = 256\pi\ cm^2$.

O círculo interno tem 10 cm de medida do diâmetro, ou seja, $D = 2r = 10$ cm $\Rightarrow r = 5$ cm.

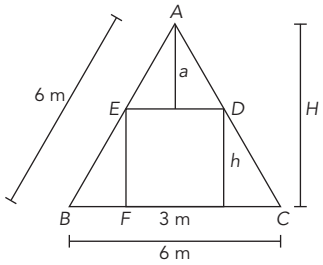
Assim, a medida de área do círculo menor é $A_2 = 25\pi\ cm^2$.

Portanto, a medida de área da placa é:

$A = A_1 - A_2 = 256\pi\ cm^2 - 25\pi\ cm^2 \Rightarrow A = 231\pi\ cm^2$.

Para fundamentar saberes

1.



O triângulo ABC é equilátero, logo $H = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Os triângulos ABC e AED são semelhantes, então:

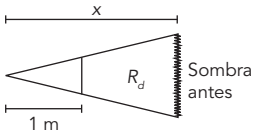
$\frac{6}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{a} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$H - a = h \Rightarrow 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

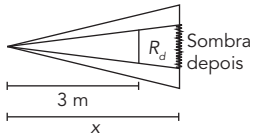
Portanto, a medida da altura, em metros, é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Alternativa **e**.

2. Antes:



Depois:



Sejam,

R_d: medida do raio do disco;

R_{S_1}: medida do raio da sombra antes;

R_{S_2}: medida do raio da sombra depois.

Pela semelhança de triângulo, temos:

$\frac{R_d}{R_{S_1}} = \frac{1}{x} \Rightarrow R_{S_1} = R_d \cdot x$ I

$\frac{R_d}{R_{S_2}} = \frac{3}{x} \Rightarrow 3R_{S_2} = R_d \cdot x$ II

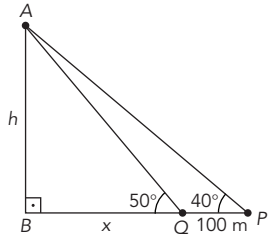
Por I e II, temos:

$R_{S_1} = 3R_{S_2}$

$\frac{A_1}{A_2} = 9$

Alternativa **e**.

3. Dos triângulos retângulos da figura, obtemos:



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\begin{cases}\tan 50° = \dfrac{h}{x}\\ \tan 40° = \dfrac{h}{x+100}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = \dfrac{h}{1{,}19}\\ x + 100 = \dfrac{h}{0{,}84}\end{cases} \Rightarrow$$

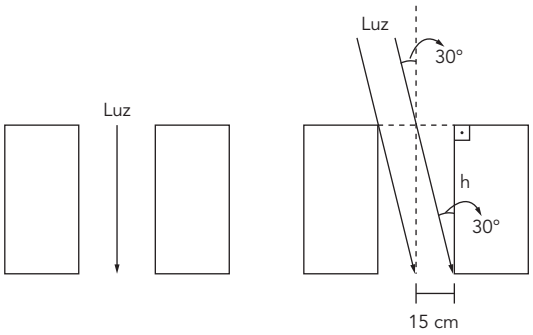
$$\Rightarrow \frac{h}{1{,}19} + 100 = \frac{h}{0{,}84} \Rightarrow h = 285{,}6$$

Logo, a altura $\overline{AB}$ mede 285,6 metros.

Alternativa **d**.

4. Considere a vista frontal do pergolado.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Seja h a medida da altura das vigas do pergolado.

No momento em que os raios de luz determinam 30° com a vertical, tem-se o desejado. Assim, aproximando $\sqrt{3}$ para 1,7, temos:

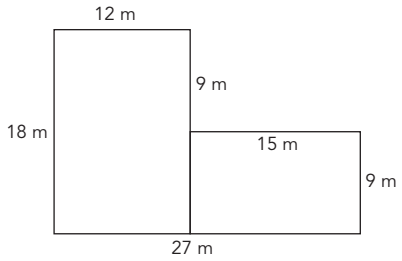
$\tan 30° = \dfrac{15}{h} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{15}{h} \Rightarrow h = 15\sqrt{3} \Rightarrow h \simeq 26$

Logo, a altura da viga mede aproximadamente 26 cm.

Alternativa **c**.

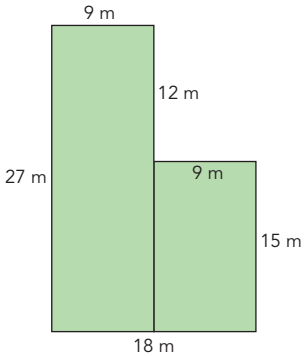
5. A medida de área de cada peça de cerâmica é $0{,}45 \cdot 0{,}60 = 0{,}27$, ou seja, 0,27 m².

Considerando as medidas das dimensões do ambiente como indicadas na figura:



A medida de área do ambiente será $(12 \times 18) + (15 \times 9) = 351$, ou seja, 351 m², e a quantidade de peças será $\dfrac{351}{0{,}27} = 1300$.

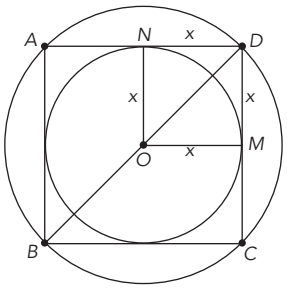
Agora, considerando as medidas das dimensões do ambiente como indicadas na figura:



A medida de área do ambiente será $(9 \times 27) + (15 \times 9) = 378$, ou seja, 378 m², e a quantidade de peças será $\dfrac{378}{0{,}27} = 1400$.

Alternativa **a**.

7.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Sendo x a medida do raio do círculo menor e R a medida do raio do círculo maior, temos que R é a medida da diagonal do quadrado $OMDN$ e, portanto, $R = x\sqrt{2}$.

$S_1 = \pi x^2$ e $S_2 = \pi \left(x\sqrt{2}\right)^2$; logo, $\dfrac{S_2}{S_1} = 2$.

Alternativa **c**.

Unidade 4

Capítulo 9

Atividades

4. 1º modo:

A medida de comprimento da circunferência que contém o arco $\overset{\frown}{AB}$ é $2 \cdot \pi \cdot 8$ cm, ou seja, 16π cm. Como o arco mede 120°, a medida de comprimento é $\dfrac{1}{3} \cdot 16\pi \text{ cm} = \dfrac{16\pi}{3}$ cm $\simeq 16{,}75$ cm.

2º modo:

Como 120° corresponde a $\dfrac{2\pi}{3}$ rad, temos $\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{c}{8} \Rightarrow c = \dfrac{16\pi}{3}$.

Portanto, $c = \dfrac{16\pi}{3}$ cm.

5. Seja u a medida de distância entre duas marcações sucessivas em $\overline{AB}$.

Temos:

Medida de comprimento de $\overset{\frown}{AMB}$: $\dfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 6u = 6\pi u$

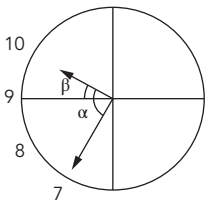
Medida de comprimento de $\overset{\frown}{ADC}$: $\dfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 2u = 2\pi u$

Medida de comprimento de $\overset{\frown}{CEB}$: $\dfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 4u = 4\pi u$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ O percurso $ADCEB$ tem medida de comprimento $2\pi u + 4\pi u = 6\pi u$.

Assim, concluímos que ambos têm a mesma medida de comprimento.

8.



9 h 35 min

Considerando a imagem, temos $\alpha = 60° + \beta$.

Sabemos que o ponteiro das horas percorre 30° em 60 minutos, logo:

$30° \text{ ——— } 60 \text{ min}$

$\beta \text{ ——— } 35 \text{ min} \Rightarrow \beta = \dfrac{35 \cdot 30}{60} = 17{,}5$

$\alpha = 60° + 17° 30' \Rightarrow \alpha = 77° 30'$

12. O ponteiro dos minutos percorre 360° em 60 min; em 20 min descreverá um arco de medida $\frac{360°}{3} = 120°$. É preciso, portanto, determinar a medida de comprimento de um arco de 120° em uma circunferência cujo raio mede 12 cm. Assim, temos:

$2\pi \cdot 12$ cm _____ 360°
c _____ 120° $\Rightarrow c = 8\pi$ cm

Usando a aproximação dada: $c \simeq 8 \cdot 3{,}1416 \Rightarrow c \simeq 25{,}13$.

Portanto, a medida de distância é aproximadamente 25,13 cm.

13. Pelo teorema de Pitágoras, temos: $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$.

Como $AB = BC = x$, temos $2x^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x = 10$.

Portanto, o raio de cada circunferência mede 5 cm.

A medida de comprimento do arco $\overset{\frown}{EH}$ corresponde a $\frac{1}{4}$ da medida de comprimento da circunferência com centro em D. Logo, $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 5$ cm $= \frac{5\pi}{2}$ cm.

Analogamente, os arcos $\overset{\frown}{HG}$, $\overset{\frown}{GF}$ e $\overset{\frown}{FE}$ também têm medida de comprimento $\frac{5\pi}{2}$ cm.

Assim, para calcular a medida de comprimento da linha para bordar, fazemos:

$$\underbrace{10}_{AB} + \underbrace{10}_{BC} + \underbrace{10}_{CD} + \underbrace{5}_{DE} + \underbrace{4 \cdot \frac{5\pi}{2}}_{EHGFE} + \underbrace{5}_{EA} = (40 + 10\pi) \simeq 71{,}416$$

Portanto, a medida de comprimento mínimo de linha a ser utilizada para bordar será igual a aproximadamente 71,5 cm.

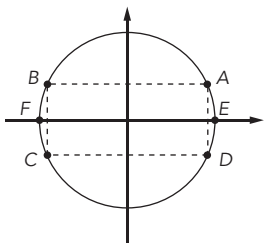
14. De acordo com a imagem:

- O ponto P, correspondente ao arco de medida 45°, então está associado ao número real $\frac{\pi}{4}$.
- O ponto Q, correspondente ao arco de medida 180° + 30°, então está associado ao número real $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.
- O ponto R, correspondente ao arco de medida $180° + 30° + 15° = 180° + 45°$, então está associado ao número real $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

15. De acordo com a imagem:

- O ponto A, correspondente ao arco de medida 0°, então está associado ao número real 0; ou seja, $x = 0$.
- O ponto B, correspondente ao arco de medida 90°, então está associado ao número real $\frac{\pi}{2}$; ou seja, $x = \frac{\pi}{2}$.
- O ponto C, correspondente ao arco de medida 180°, então está associado ao número real π; ou seja, $x = \pi$.
- O ponto D, correspondente ao arco de medida 270°, então está associado ao número real $\frac{3\pi}{2}$; ou seja, $x = \frac{3\pi}{2}$.

17. Sejam E e F, respectivamente, os pontos correspondentes aos números reais 0 e π.

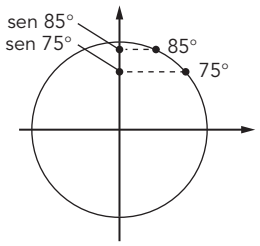


Banco de imagens/Arquivo da editora

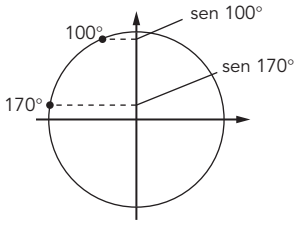
$\text{med}(\overset{\frown}{BF}) = \text{med}(\overset{\frown}{EA}) = \pi - \frac{7\pi}{9} = \frac{2\pi}{9}$

A: $\frac{2\pi}{9}$; C: $\pi + \frac{2\pi}{9} = \frac{11\pi}{9}$; D: $2\pi - \frac{2\pi}{9} = \frac{16\pi}{9}$

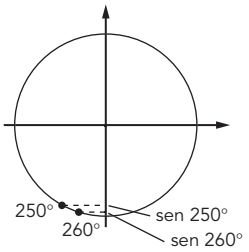
20. **a)** sen 75° < sen 85°



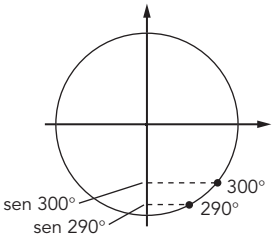
b) sen 100° > sen 170°



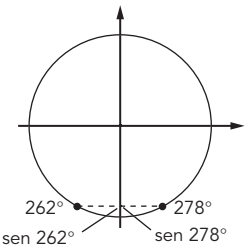
c) sen 260° < sen 250°



d) sen 300° > sen 290°

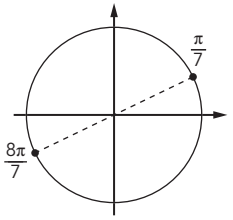


e) sen 278° = sen 262°



22. **a)** $\frac{\pi}{7}$ corresponde a um número real do 1º Q; sen $\frac{\pi}{7} = a > 0$.

b) Note que $\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}$:

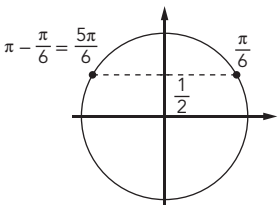


Assim, sen $\frac{8\pi}{7} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{7} = -a$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

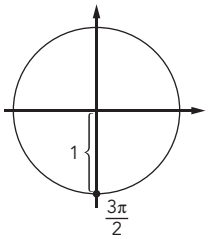
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

23. **a)**



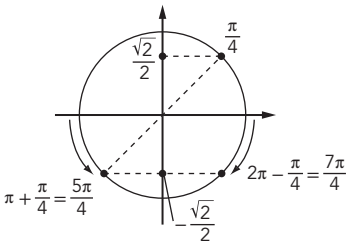
$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

b)



$S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

c)

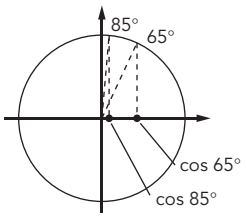


$S = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

d) $4\text{sen}^2 x = 3 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

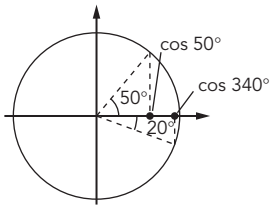
27. **a)**



$\cos 65° > \cos 85°$

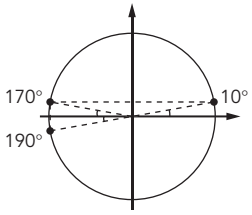
b) $\begin{cases}\cos 89° > 0 \\ \cos 91° < 0\end{cases} \Rightarrow \cos 91° < \cos 89°$

c)



$\cos 50° < \cos 340°$

d)



$\cos 190° = \cos 170°$

28. **a)** $\cos 90° - \cos 30° = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$

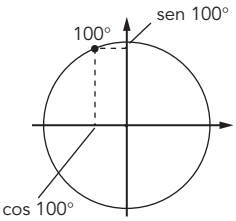
$-\frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{1}{2}$ (F)

b) $\left(\text{sen } \frac{\pi}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ (V)

c)



Note que $\text{sen } 100° > 0$ e $\cos 100° < 0$.

Como $|\text{sen } 100°| > |\cos 100°|$, segue que:
$\text{sen } 100° + \cos 100° > 0$. (F)

d) $\frac{3\pi}{2} (\simeq 4{,}71) < 6 < 2\pi (\simeq 6{,}28)$; assim, o número real 6 pertence ao 4º Q. Logo, $\cos 6 > 0$. (F)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

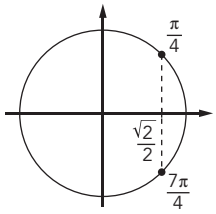
29. $AO = 1$; $OB = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $AB = \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Medida de perímetro: $1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$;

ou seja, $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ u.c.

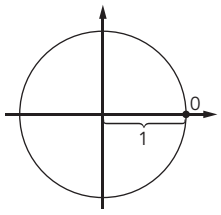
Medida de área: $\frac{OB \cdot AB}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$; ou seja, $\frac{\sqrt{3}}{8}$ u.a.

31. **a)**



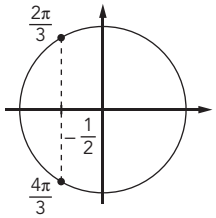
$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

b)



$S = \{0\}$

c)



$S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

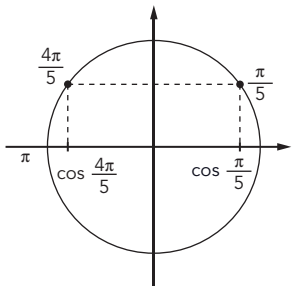
d) $3 \cdot \cos x + 6 = 0 \Rightarrow \cos x = -2$ e, como $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, segue $S = \varnothing$.

e) $\cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

32. $\frac{4\pi}{5}$ radianos são equivalentes a 144°, em que também seria inviável o uso da calculadora de maneira direta.

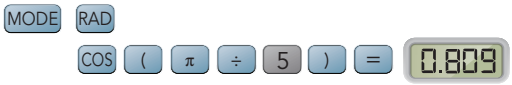
Como $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$, o ponto associado a $\frac{4\pi}{5}$ pertence ao 2º Q.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$

Assim, Juliana deverá obter o valor de $\cos \frac{\pi}{5}$ na calculadora.



Logo, $\cos \frac{4\pi}{5} \simeq -0{,}809$.

34. Pela relação fundamental da Trigonometria:

$\text{sen}^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{4}{5}$.

Como x pertence ao 4º Q, então $\text{sen } x = -\frac{4}{5}$.

35. $\left.\begin{array}{l}\text{sen}^2 \alpha = \frac{1}{9} \\ \cos^2 \alpha = \frac{4}{9}\end{array}\right\} \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \neq 1$

Portanto, não existe.

36. Pela relação fundamental da Trigonometria:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{m}{2}\right)^2 + (m-1)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow m\left(\frac{5m}{4} - 2\right) = 0 \Rightarrow m = 0$ ou $m = \frac{8}{5}$.

38. Como $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 0$, tem-se $\cos^2 x = \text{sen}^2 x$.

No entanto, $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2\text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Para $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tem-se $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. E, para

$\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, tem-se $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

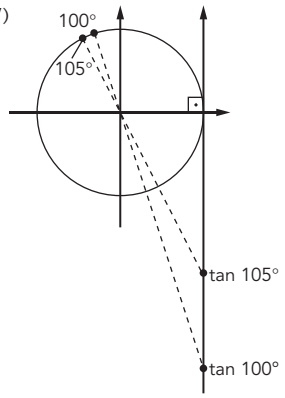
Logo, $x = \frac{\pi}{4}$, ou $x = \frac{3\pi}{4}$, ou $x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$.

Portanto, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

40. $y = \frac{2\text{sen } 30° - 4\cos 30° + \tan 60°}{\cos 120° - \text{sen } 60°} =$

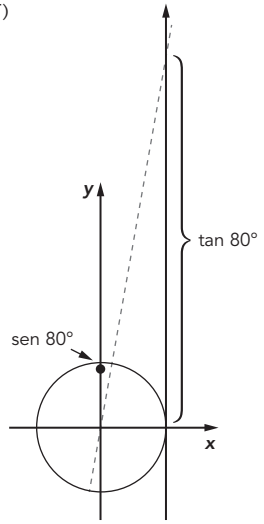
$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}}{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}} = 4 - 2\sqrt{3}$

41. **a)** (V)

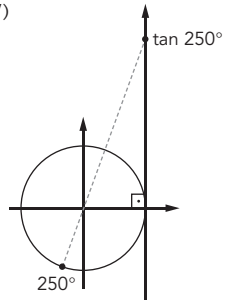


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

b) (F)



c) (V)



d) $\tan 2\pi = 0$ (F)

44. Pela relação fundamental da Trigonometria,

$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$.

Como $\alpha \in$ 4º Q, $\text{sen } \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Logo:

$\tan \alpha = \frac{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = -2\sqrt{6}$

45. Pelo enunciado: $\frac{\text{sen } x}{\cos x} = -4 \Rightarrow \text{sen } x = -4 \cdot \cos x$.

Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 \cdot \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \xrightarrow{x \in 2º\text{ Q}} \cos x = -\frac{\sqrt{17}}{17}$

46. $\frac{\text{sen } 58°}{\cos 58°} \simeq \frac{8}{5} \Rightarrow \text{sen } 58° \simeq \frac{8 \cdot \cos 58°}{5}$

Sabendo que $\text{sen}^2\,58° + \cos^2 58° = 1$, temos:

$\left(\frac{8 \cdot \cos 58°}{5}\right)^2 + \cos^2 58° \simeq 1 \Rightarrow \cos 58° \simeq \frac{5}{\sqrt{89}} = \frac{5\sqrt{89}}{89}$

Daí, $\text{sen}\,58° \simeq \frac{8\sqrt{89}}{89}$.

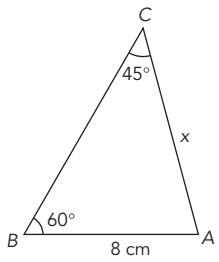
Para calcular tan 302°, fazemos

$\tan(360° - 58°) = -\tan 58° \simeq -\frac{8}{5}$.

Capítulo 10

Atividades

1.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pela lei dos senos, temos:

$\frac{8}{\text{sen}\,45°} = \frac{x}{\text{sen}\,60°} \Rightarrow \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow x = 4\sqrt{6}$

Portanto, $\overline{AC}$ mede $4\sqrt{6}$ cm.

2. Pela lei dos senos, temos: $\frac{10}{\text{sen}\,140°} = \frac{BC}{\text{sen}\,15°}$.

Como $\text{sen}\,140° = \text{sen}\,40° \simeq 0{,}64279$, temos:

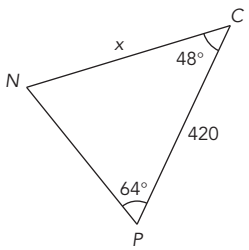
$\frac{10}{0{,}64279} = \frac{BC}{0{,}25882} \Rightarrow BC \simeq 4{,}03$; ou seja, aproximadamente 4,03 cm.

Por outro lado, sabemos que $\text{med}(\hat{C}) = 180° - 140° - 15° = 25°$.

Logo, como $\text{sen}\,25° = 0{,}42262$, temos: $\frac{AB}{\text{sen}\,25°} = \frac{10}{0{,}64279} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{0{,}42262} = \frac{10}{0{,}64279} \Rightarrow AB \simeq 6{,}57$; ou seja, aproximadamente 6,57 cm.

3. Pelo enunciado, temos o seguinte esboço:



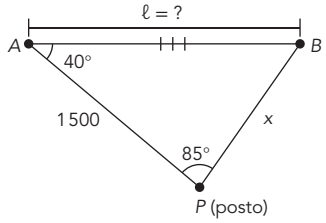
Sabemos que $\text{med}(C\hat{N}P) = 180° - (48° + 64°) = 68°$.

Assim, pela lei dos senos, temos:

$\frac{x}{\text{sen}\,64°} = \frac{420}{\text{sen}\,68°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}89879} = \frac{420}{0{,}92718} \Rightarrow x \simeq 407$

Portanto, aproximadamente 407 m separam a casa da nascente.

5. **a)**



$\text{med}(A\hat{B}P) = 180° - 40° - 85° = 55°$

Pela lei dos senos, temos:

$\frac{1500}{\text{sen}\,55°} = \frac{\ell}{\text{sen}\,85°} \Rightarrow \frac{1500}{0{,}82} = \frac{\ell}{0{,}99} \Rightarrow \ell \simeq 1810{,}97$

Logo, aproximadamente 1811 m.

b) Pela lei dos senos, temos:

$\frac{x}{\text{sen}\,40°} = \frac{1500}{\text{sen}\,55°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}64} = \frac{1500}{0{,}82} \Rightarrow x \simeq 1170{,}73$

Logo, aproximadamente 1171 m.

7. Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

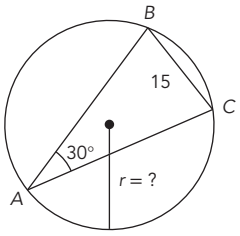
$\text{sen}^2\,\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ (note que $0° < \alpha < 180°$, logo, $\text{sen}\,\alpha > 0$)

Assim, pela lei dos senos, calculamos:

$\frac{4}{\text{sen}\,\beta} = \frac{8}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$

8.

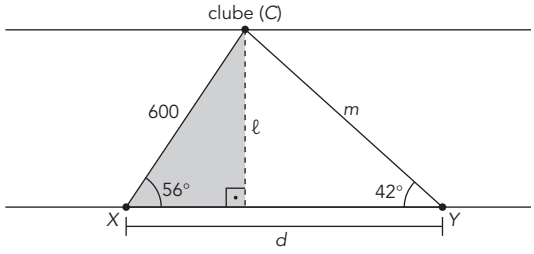


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$\frac{15}{\text{sen}\,30°} = 2r \Rightarrow \frac{15}{\frac{1}{2}} = 2r \Rightarrow r = 15$

Portanto, o comprimento do raio mede 15 cm.

9. **a)**



Pela lei dos senos, temos: $\frac{m}{\text{sen}\,56°} = \frac{600}{\text{sen}\,42°} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{m}{0{,}83} = \frac{600}{0{,}67} \Rightarrow m \simeq 743$.

Portanto, a medida de distância entre a entrada do clube e Y é de aproximadamente 743 m.

b) Sabemos que $\text{med}(X\hat{C}Y) = 180° - (56° + 42°) = 82°$.

Pela lei dos senos, temos $\frac{d}{\text{sen}\,82°} = \frac{600}{\text{sen}\,42°} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d}{0{,}99} = \frac{600}{0{,}67} \Rightarrow d \simeq 887$, ou seja, a medida de distância entre as casas X e Y é de aproximadamente 887 m.

c) Do triângulo retângulo sombreado, temos:

$\text{sen}\,56° = \frac{\ell}{600} \Rightarrow 0{,}83 = \frac{\ell}{600} \Rightarrow \ell = 498$.

Logo, a medida de largura do rio é de 498 m.

10. De acordo com a circunferência trigonométrica, temos:

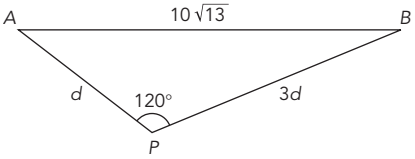
$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pela lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 150° \Rightarrow x = \sqrt{13}$

Logo, $x = \sqrt{13}$ cm.

14.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Pela lei dos cossenos, é possível determinar a medida de distância d.

$(10\sqrt{13})^2 = d^2 + (3d)^2 - 2 \cdot d \cdot 3d \cdot \cos 120° \Rightarrow d = 10$

Dessa maneira, $PB = 30$ km.

Sabendo a medida de distância, é possível calcular a medida de tempo:

1 h _____ 50 km
x _____ 30 km
$\Rightarrow x = \frac{3}{5} \cdot 1\text{ h} = 36$ min

17. De acordo com o enunciado: $AB = R + 0{,}6R = 1{,}6R$.

Pela lei dos cossenos, temos:

$(AB)^2 = (AO)^2 + (BO)^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow (1{,}6R)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \alpha = -0{,}28 = -\frac{7}{25}$

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{24}{25}$ $\left(\text{note que } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$

Por fim, $\tan \alpha = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$.

19.

I. O maior ângulo do triângulo é oposto ao maior lado. Logo, o maior ângulo interno (vamos chamá-lo de α) está oposto ao lado que mede 22 cm.

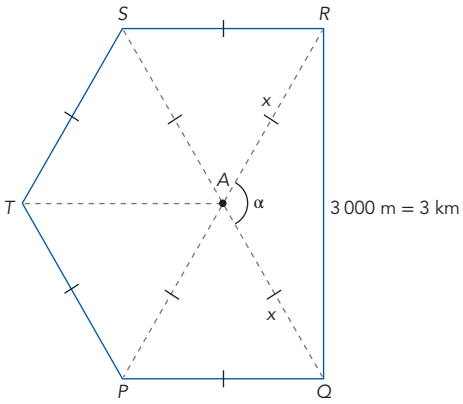
II. Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$22^2 = 18^2 + 12^2 - 2 \cdot 18 \cdot 12 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{27}$

III. Como $\cos \alpha < 0$, concluímos que $90° < \alpha < 180°$.

Logo, como o maior ângulo interno é obtuso, o triângulo é obtusângulo.

20.



Como $AP = AQ = AR = AS = AT = RS = ST = TP = PQ$, os triângulos ARS, AST, ATP e APQ são equiláteros e $\text{med}(\alpha) = 360° - 60° - 60° - 60° - 60° = 120°$.

Pela lei dos cossenos no $\triangle ARQ$, temos:

$3^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 120° \Rightarrow x = \sqrt{3}$

Logo, a medida de distância do ponto A aos vértices será $\sqrt{3}$ km.

21. Pela lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 30° \Rightarrow x = 1$

Sabendo o valor de x, usamos a lei dos senos para obter o valor de y:

$\frac{x}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} y} \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 60°$

Como o ângulo $\hat{C}$ está oposto ao maior dos lados, a medida desse ângulo é maior do que y. Sendo assim, y não pode ser igual a 120°. Logo, $y = 60°$.

$\text{med}(\hat{C}) = 180° - 60° - 30° = 90°$

Logo, o triângulo ABC é retângulo.

22. Sim, é possível.

Primeiro, determinamos y pela lei dos senos:

$\frac{y}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{8}{\operatorname{sen} 120°} \Rightarrow y = \frac{8\sqrt{6}}{3}$; ou seja, $y = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ cm.

Em seguida, usamos a lei dos cossenos, sem "relacionar" o ângulo de medida 15°.

$8^2 = x^2 + \left(\frac{8\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{8\sqrt{6}}{3} \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 + 8\sqrt{6}x - 64 = 0$

A partir dessa equação de 2º grau, obtemos a medida x, em centímetros:

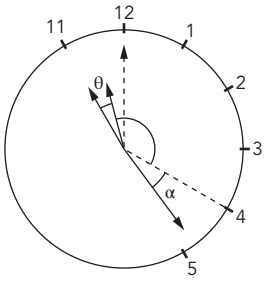
$\Delta = \left(8\sqrt{6}\right)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-64) \Rightarrow \Delta = 1152$

$x = \frac{-8\sqrt{6} \pm 24\sqrt{2}}{6} \Rightarrow x = 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{6}}{3}$

Para fundamentar saberes

1. O atraso após 3 dias corresponde a 36 minutos, pois $(30 \text{ s/h}) \cdot (3 \cdot 24 \text{ h}) = 2160 \text{ s} = 36$ min. Assim, o relógio marcará 11 h 24 min após 3 dias.

Considere a imagem a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

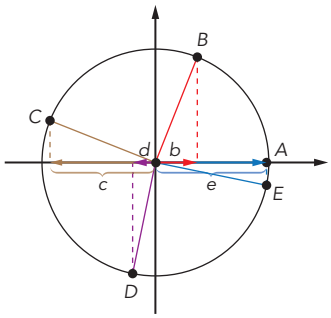
Em 60 minutos, o ponteiro das horas rotaciona 30 graus, então em 24 minutos, o ponteiro das horas rotaciona $\theta = \frac{24 \text{ min} \cdot 30°}{60 \text{ min}} = 12°$. Assim, sabendo que 1 minuto corresponde ao ângulo de 6°, tem-se que $\alpha = 4 \cdot 6° = 24°$.

Por fim, como o ângulo entre as posições 12 e 4 é igual a $4 \cdot 30° = 120°$, segue que a resposta será:

$30° - \theta + 120° + \alpha = 162°$.

Alternativa **b**.

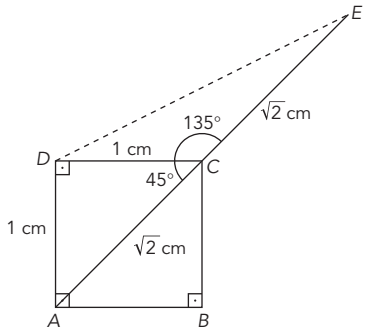
2. Considere a imagem a seguir.



Como no 2º e 3º quadrantes o cosseno é negativo, e no 1º e 2º quadrantes ele é positivo, temos: $c < d < b < e$.

Alternativa **a**.

4.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Medida da diagonal do quadrado: $AC = \ell\sqrt{2} = \sqrt{2}$; ou seja, $\sqrt{2}$ cm.

C é ponto médio de AE, logo, $AC = CE = \sqrt{2}$ cm.

Como a diagonal do quadrado é bissetriz do ângulo reto, determinamos as medidas dos ângulos $A\hat{C}D$ e $D\hat{C}E$.

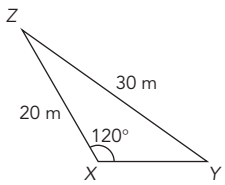
Aplicando a lei dos cossenos no triângulo DCE, temos:

$(DE)^2 = (DC)^2 + (CE)^2 - 2 \cdot DC \cdot CE \cdot \cos 135° \Rightarrow$

$\Rightarrow DE = \sqrt{5}$; ou seja, $DE = \sqrt{5}$ cm.

Alternativa **c**.

5.



$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo XYZ, obtemos:

$(YZ)^2 = (XZ)^2 + (XY)^2 - 2 \cdot XZ \cdot XY \cdot \cos(120°) \Rightarrow$

$\Rightarrow (XY)^2 + 20 \cdot XY - 500 = 0$

Pela equação do 2º grau, temos

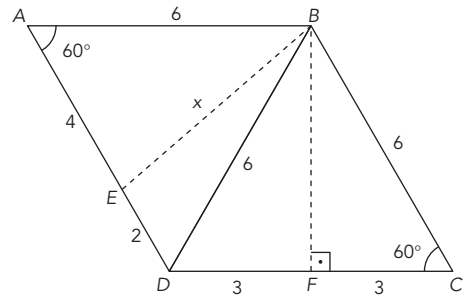
$\Delta = 20^2 - 4(1)(-500) = 2\,400 \Rightarrow$

$\Rightarrow XY = \frac{-20 \pm \sqrt{2\,400}}{2(1)} = \frac{-20 \pm 49}{2}$

Como $XY > 0$, temos $XY \simeq 14{,}5$ m.

Alternativa **b**.

6.



Como o losango tem lados congruentes, podemos dividi-lo em 2 triângulos equiláteros congruentes (note que a diagonal $\overline{BD}$ também é bissetriz dos ângulos internos do losango cujas medidas são 120°). Assim, como BF é a altura do triângulo equilátero, é também uma mediana, portanto, $DF = FC = 3$. Portanto, $AB = DC = BD = BC = AD = 6$ e $AE = AD - ED \Rightarrow$

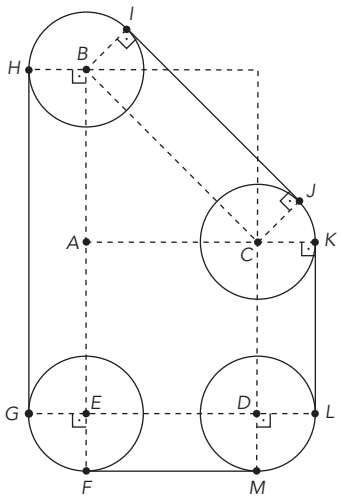
$\Rightarrow AE = 6 - 2 = 4$.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo EAB, obtemos:

$x^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60° \Rightarrow x = \sqrt{28}$

Alternativa **c**.

7. Considere a imagem a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Como BC é a diagonal do quadrado, temos $\text{med}(A\hat{C}B) = 45°$.

Logo, $\text{med}(K\hat{C}J) = 360° - 90° - 90° - 90° - 45° = 45°$ e $\text{med}(H\hat{B}I) = 360° - 90° - 45° - 90° = 135°$.

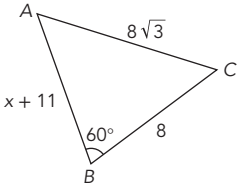
A soma das medidas de comprimento dos menores arcos $\overset{\frown}{FG}$, $\overset{\frown}{HI}$, $\overset{\frown}{JK}$ e $\overset{\frown}{LM}$ corresponde à medida de comprimento de uma circunferência de raio medindo 10 m, já que a soma das medidas desses arcos é 360°. Assim, a soma das medidas de comprimento desses arcos será: $2\pi \cdot 10 = 20\pi$, ou seja, 20π m.

Por outro lado, $GH = 60$ m, $IJ = BC = 30\sqrt{2}$ m (medida da diagonal do quadrado) e $KL = MF = 30$ m.

Logo, a medida de comprimento, em metros, de $FGHIJKLM$ será: $20\pi + 60 + 30\sqrt{2} + 30 + 30 = 20\pi + 30(4 + \sqrt{2})$

Alternativa **b**.

8.



Seja x a medida de comprimento de CD. Como a medida do segmento de reta $\overline{AB}$ supera a de $\overline{CD}$ em 11 cm, no triângulo ABC, temos $AB = x + 11$.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC, obtemos:

$(8\sqrt{3})^2 = (x + 11)^2 + 8^2 - 2 \cdot (x + 11) \cdot 8 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 14x - 95 = 0 \Rightarrow x = 5$ ou $x = -19$ (não convém)

Assim, $AB = 16$.

Logo, a extensão máxima horizontal do braço mecânico, em cm, é igual a $AB + BC + CD = 16 + 8 + 5 = 29$.

Alternativa **e**.

9. **a)** $CD = CA = 6\,384 + 16 = 6\,400$

$6\,400$ km $= 6\,400\,000$ m $= 6{,}4 \cdot 10^6$ m

Medidas dos ângulos:

$\text{med}(A\hat{B}D) = 90° - 30° = 60°$

$\text{med}(C\hat{B}D) = 90° + 30° = 120°$

b) Aplicando a lei dos cossenos no triângulo CBD, obtemos:

$(CD)^2 = (CB)^2 + (BD)^2 - 2 \cdot CB \cdot BD \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow 6\,400^2 = 6\,384^2 + d^2 - 2 \cdot 6\,384 \cdot d \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2 + 6\,384d - 204\,544 = 0$

Unidade 5

Capítulo 11

Atividades

1. **a)** A variável investigada na pesquisa é a intenção de voto para prefeito. Esta variável é classificada como qualitativa. As realizações ou respostas possíveis dessa variável são: votar no candidato **A**, votar no candidato **B**, indeciso, branco ou nulo.

b) O tamanho da população é de 1764835 eleitores registrados. A amostra utilizada na pesquisa consiste em 2650 eleitores entrevistados sobre sua intenção de voto.

c) Tabela de frequência

Intenção de voto	Frequência absoluta
Candidato **A**	1715
Candidato **B**	691
Indeciso	141
Votar em branco/Anular	103
Total	**2650**

Dados elaborados para fins didáticos.

2. Tabela de frequência

Frequência semanal	Frequência absoluta (F_a)	Frequência relativa (F_r)
1	2	$\frac{2}{25} = 0{,}08$ ou 8%
2	6	$\frac{6}{25} = 0{,}24$ ou 24%
3	8	$\frac{8}{25} = 0{,}32$ ou 32%
4	5	$\frac{5}{25} = 0{,}20$ ou 20%
5	3	$\frac{3}{25} = 0{,}12$ ou 12%
6	1	$\frac{1}{25} = 0{,}04$ ou 4%
Total	**25**	$\mathbf{\frac{25}{25} = 1{,}00}$ **ou 100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

3. A amplitude da amostra é: $52 - 18 = 34$, ou seja, 34 anos.

Como devemos ter 5 classes, dividimos a amplitude da amostra por 5, fazendo: $34 : 5 = 6{,}8$, que será arredondado para 7,0. Assim, o primeiro intervalo será: [18, 25[, o segundo: [25, 32[, o terceiro: [32, 39[, o quarto: [39, 46[; e o quinto e último será: [46, 53[. A tabela de frequência será:

Tabela de frequência

Idade	Frequência absoluta (F_a)	Frequência relativa (F_r)
18 ⊢ 25	5	0,20 ou 20%
25 ⊢ 32	8	0,32 ou 32%
32 ⊢ 39	7	0,28 ou 28%
39 ⊢ 46	3	0,12 ou 12%
46 ⊢ 53	2	0,08 ou 8%
Total	**25**	**1,00 ou 100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

6. **a)** Tabela de frequência

Intervalo de notas	Frequência absoluta (F_a)	Frequência relativa (F_r)
1,0 ⊢ 2,5	5	$\frac{5}{30} \simeq 0{,}17$ ou 17%
2,5 ⊢ 4,0	5	$\frac{5}{30} \simeq 0{,}17$ ou 17%
4,0 ⊢ 5,5	8	$\frac{8}{30} \simeq 0{,}27$ ou 27%
5,5 ⊢ 7,0	6	$\frac{6}{30} = 0{,}2$ ou 20%
7,0 ⊢ 8,5	3	$\frac{3}{30} = 0{,}1$ ou 10%
8,5 ⊢ 10,0	3	$\frac{3}{30} = 0{,}1$ ou 10%

Dados elaborados para fins didáticos.

7. $a = 0{,}06 \cdot 400 = 24$ e $b = 0{,}06 = 6\%$

$c = \frac{92}{400} = 0{,}23$ e $d = 0{,}23 = 23\%$

$e = 9\% \cdot 400 = 36$ e $f = 9\% = 0{,}09$

$g = \frac{180}{400} = 0{,}45$ e $h = 0{,}45 = 45\%$

$i = 400 - 24 - 92 - 36 - 180 = 68$

$j = \frac{68}{400} = 0{,}17$ e $k = 0{,}17 = 17\%$

Capítulo 12

Atividades

2. **a)** Tabela de frequência

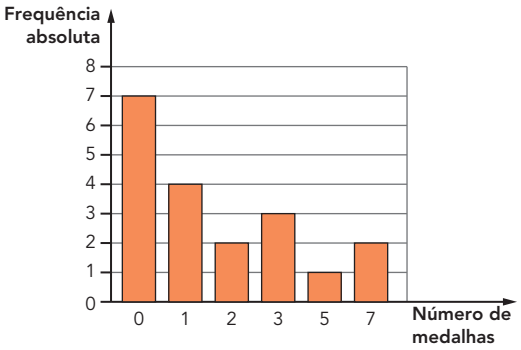
Quantidade de medalhas	Frequência absoluta (F_a)	Frequência relativa (F_r)
0	7	$\frac{7}{20} = 0{,}35$ ou 35%
1	4	$\frac{4}{20} = 0{,}20$ ou 20%
2	2	$\frac{2}{20} = 0{,}10$ ou 10%
3	4	$\frac{4}{20} = 20$ ou 20%
5	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$ ou 5%
7	2	$\frac{2}{20} = 0{,}10$ ou 10%
Total	**20**	**1,00 ou 100%**

Fonte dos dados: COMITÊ OLÍMPICO DO BRASIL. Time Brasil. Disponível em: https://tedit.net/8efisi. Acesso em: 9 ago. 2024.

b)

Banco de imagens/Arquivo da editora

Número de medalhas de ouro conquistadas pelo Brasil nos Jogos Olímpicos por ano de 1948 a 2024



Fonte dos dados: COMITÊ OLÍMPICO DO BRASIL. Time Brasil. Disponível em: https://tedit.net/8efisi. Acesso em: 9 ago. 2024.

3. **a)**

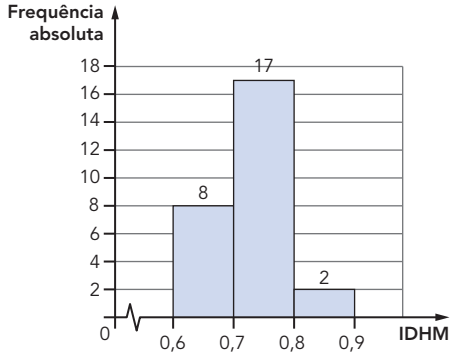
Tabela de frequência

IDHM	Frequência absoluta (F_a)	Frequência relativa (F_r) aproximada
0,6 ⊢ 0,7	8	29,63%
0,7 ⊢ 0,8	17	62,96%
0,8 ⊢ 0,9	2	7,41%
Total	**27**	**1,00 ou 100%**

Fonte dos dados: PNUD. Disponível em: https://tedit.net/g3kg3k. Acesso em: 9 jun. 2024.

Banco de imagens/Arquivo da editora

IDHM, em 2021, de todas as unidades federativas do Brasil



Fonte dos dados: PNUD. Disponível em: https://tedit.net/g3kg3k. Acesso em: 9 jun. 2024.

5. O total de pedidos de isenção é:
176 587 + 535 142 + 291 318 + 60 413 + 62 695 = 1 126 155.

CO: $\frac{62\,695}{1\,126\,155} \simeq 0{,}0557$. Logo, a medida do ângulo central será: 5,57% de 360°, ou seja, 360° · 0,0557 ≃ 20°.

S: $\frac{60\,413}{1\,126\,155} \simeq 0{,}0536$. Logo, a medida do ângulo central será: 5,36% de 360°, ou seja, 360° · 0,0536 ≃ 19,3°.

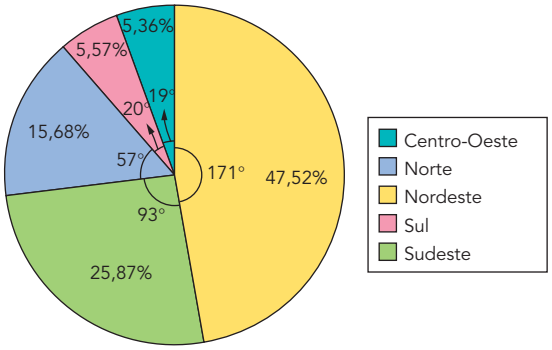
SE: $\frac{291\,318}{1\,126\,155} \simeq 0{,}2587$. Logo, a medida do ângulo central será: 25,87% de 360°, ou seja, 360° · 0,2587 ≃ 93,1°.

NE: $\frac{535\,142}{1\,126\,155} \simeq 0{,}4752$. Logo, a medida do ângulo central será: 47,52% de 360°, ou seja, 360° · 0,4752 ≃ 171,1°.

N: $\frac{176\,587}{1\,126\,155} \simeq 0{,}1568$. Logo, a medida do ângulo central será: 15,68% de 360°, ou seja, 360° · 0,1568 ≃ 56,5°.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Número de egressos no Enem 2023 que solicitaram isenção da taxa de inscrição por região no Brasil



Fonte dos dados: INEP. Sinopses Estatísticas. Enem. Disponível em: https://tedit.net/3n30pg. Acesso em: 6 ago. 2024.

6. **a)** Francês: $\frac{18}{180} = 0{,}1$, ou seja, 10%. Logo, a medida do ângulo central do setor que representa o idioma francês é 0,1 · 360° = 36°.

b) Inglês: $\frac{252°}{360°} = 0{,}7$, ou seja, 70%. Logo, a quantidade de estudantes que escolheram inglês é: 0,7 · 180 = 126.

Espanhol: 180 − 18 − 126 = 36 estudantes. Logo, a medida do ângulo central do setor correspondente é: $\frac{36}{180} \cdot 360° =$ = 0,2 · 360° = 72°.

Para fundamentar saberes

2. Calculando o gasto calórico diário:

Segunda-feira: 1 · 248 + 0,5 · 764 + 2 · 492 = 1 614; Terça-feira: 0,5 · 248 + 1 · 764 + 0,5 · 356 + 1 · 492 = 1 558; Quarta-feira: 1,5 · 764 + 1 · 356 + 0,5 · 492 = 1 748; Quinta-feira: 2 · 764 = 1 528; Sexta-feira: 0,5 · 764 + 2,5 · 492 = 1 612.

Alternativa **c**.

5. Analisando o gráfico, conclui-se que 2 de 10 estudantes da amostra têm massa corporal abaixo da média e altura acima da média. Para encontrar o percentual: $\frac{2}{10} = 0{,}2$, ou seja, 20%.

Alternativa **b**.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

Todos os *sites* foram acessados em 9 de setembro de 2024.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática através dos tempos*: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução de Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

Essa obra apresenta uma visão histórica da Matemática e mostra como a Matemática é uma construção humana e social, possibilitando que professores levem para a sala de aula novas abordagens e perspectivas. A obra também é referência de contextos históricos importantes para o enriquecimento das aulas.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

A autora desse livro é precursora das mentalidades matemáticas, uma abordagem que busca incentivar o potencial dos estudantes mediante metodologias ativas de aprendizagem e criatividade. Essa perspectiva permeia a elaboração dos textos desta coleção, servindo de referencial teórico para a proposta teórico-metodológica.

BORBA, M. de C. *et al*. *Fases das tecnologias digitais em Educação matemática*: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Referência para o uso de tecnologias proposto nesta coleção, essa obra apresenta uma visão sobre a aplicação de tecnologias em Educação matemática, exemplificando questões teóricas e propostas de atividades, bem como dissertando sobre o presente e o futuro da sala de aula de Matemática.

BRACKMANN, C. P. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica. 2017. 226 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://tedit.net/rd6pjs.

Essa tese explora métodos para fomentar o pensamento computacional utilizando atividades práticas e interativas, sem o uso de computadores. Foi consultada como referência na elaboração de estratégias para integrar conceitos de computação e lógica matemática nas atividades desta coleção.

BRASIL. *Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF: Senado Federal, 1996. Disponível em: https://tedit.net/81p5f9.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional é um marco regulatório fundamental que estabelece as diretrizes gerais para a organização e o funcionamento da educação no Brasil. Abrange desde a Educação Infantil até a Educação Superior e define princípios, como a igualdade de condições para o acesso e a permanência na escola, a liberdade de aprender e ensinar, bem como a valorização dos profissionais da educação brasileira.

BRASIL. *Lei n. 13.005, de 25 de junho de 2014*. Aprova o Plano Nacional de Educação – PNE e dá outras providências. Brasília, DF: MEC, 2014.

O Plano Nacional de Educação (PNE), instituído em 2014, define 20 tópicos para garantir o acesso à educação de qualidade no Brasil até 2024, para todos os níveis e modalidades de ensino no país, quando deverão ser determinadas novas metas para o novo ciclo. O documento também foi referência para a elaboração de orientações didáticas desta coleção.

BRASIL. *Lei n. 14.533, de 11 de janeiro de 2023*. Institui a Política Nacional de Educação Digital [...]. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, edição extra, ano CLXI, n. 8-B, p. 1, 11 jan. 2023.

Promulgado em 2023, esse documento apresenta a lei que estabelece a criação da Política Nacional de Educação Digital (Pned). Esse documento foi consultado para guiar a elaboração das orientações e das propostas de atividades que envolvem a educação digital nesta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://tedit.net/q0hay4.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo. Define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceituam o Plano Nacional de Educação (PNE) e as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN). A BNCC também estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo de cada ano da escolaridade básica. Os conteúdos selecionados para esta coleção, bem como as orientações didáticas e a proposta teórico-metodológica, têm como referência esse documento.

BRASIL. Ministério da Educação. *Computação*: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://tedit.net/93oura.

Em 2022, a BNCC foi complementada com diretrizes específicas que incluem o ensino de Computação no currículo escolar brasileiro. O documento, que visa promover o desenvolvimento de habilidades dos estudantes associadas ao pensamento computacional e à cultura digital, foi consultado para a elaboração de conteúdos e atividades desta coleção, bem como para as orientações didáticas deste Manual.

BRASIL. Ministério da Educação. *Projeto de vida*: ser ou existir. Caderno de práticas. Disponível em: https://tedit.net/nhft2i.

Nesse caderno de práticas são apresentadas reflexões sobre o papel da escola no projeto de vida dos estudantes. O material serviu de referência para a elaboração de atividades que envolvem projetos e suas respectivas orientações didáticas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019a. Disponível em: https://tedit.net/3acdu3.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019b. Disponível em: https://tedit.net/3pnyp2.

Esses dois documentos visam esclarecer a inserção dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), trabalhados nesta coleção, nos currículos escolares e nortear as contextualizações dos conteúdos ensinados por meio de temas do interesse dos estudantes e que têm relevância para o desenvolvimento deles como cidadãos.

CARATTI, R. L.; VASCONCELOS, F. H. L. O pensamento computacional na visão dos professores da Educação Básica. *Educação em foco*, Juiz de Fora, n. 28, 2023. Disponível em: https://tedit.net/gianev.

O artigo investiga a percepção dos professores da Educação Básica sobre o pensamento computacional e destaca a importância dele na formação dos jovens para a melhoria na resolução de problemas e no pensamento crítico dos estudantes.

COSTA, A. C. G. da. *Protagonismo juvenil*: adolescência, educação e participação democrática. Salvador: Fundação Odebrecht, 2000.

Nesse livro, o autor aborda a educação considerando o jovem o núcleo do processo educativo. Também apresenta a descrição de projetos desenvolvidos na prática envolvendo experiências de protagonismo juvenil. Essas propostas foram referência na elaboração de algumas seções da coleção e de orientações neste Manual.

COSTA, C. F. da. Ubiratan D'Ambrosio e a decolonialidade na Etnomatemática. *Revista de Educação Matemática*, [*s. l.*], v. 18, Edição Especial, 2021. Disponível em: https://tedit.net/512lsk.

Nesse artigo, as contribuições de Ubiratan D'Ambrosio para a Etnomatemática são exploradas, destacando a importância de uma abordagem decolonial que valorize os saberes matemáticos de diferentes culturas. A perspectiva inclusiva e multicultural para o ensino da Matemática, que reconhece e integra a diversidade cultural dos estudantes, foi referência para a elaboração das atividades que envolvem o tema nesta coleção.

DISTRITO FEDERAL. Secretaria de Estado de Educação. *Convivência escolar e Cultura de Paz*. Brasília, DF, 2020. Disponível em: https://tedit.net/fc8gpy.

Nessa publicação são abordadas estratégias e práticas para promover um ambiente escolar harmonioso e pacífico, enfatizando a importância da convivência respeitosa e da resolução de conflitos. Foi consultada na elaboração desta coleção como fonte de orientações sobre como criar um ambiente de sala de aula que favoreça a aprendizagem colaborativa e o bem-estar dos estudantes.

FAVA, R. *Trabalho, educação e inteligência artificial*. Porto Alegre: Penso, 2018.

O debate apresentado nesse livro sobre o impacto da inteligência artificial no mercado de trabalho e suas implicações para a educação pode ser utilizado como base para a elaboração de estratégias para integração da inteligência artificial à sala de aula visando preparar melhor os estudantes para os desafios do século XXI.

FAZENDA, I. *O que é interdisciplinaridade*. São Paulo: Cortez, 2008.

O livro explora a interdisciplinaridade sob uma análise da história, não apenas como integração de componentes curriculares, mas também sob a perspectiva da busca de novos conhecimentos e do enriquecimento da prática pedagógica, facilitando a construção de conhecimentos mais significativos e contextualizados. As atividades e seções interdisciplinares desta coleção foram propostas tendo esse material como embasamento bibliográfico.

FERNANDES, D. *Avaliar para aprender*: fundamentos, práticas e políticas. São Paulo: Unesp, 2009.

A avaliação educacional é abordada nesse livro como um processo formativo, enfatizando práticas que promovem a aprendizagem contínua dos estudantes. Serviu de referência bibliográfica para as diretrizes e estratégias de avaliações presentes nesta coleção, concebendo a avaliação não apenas como instrumento de medida das competências matemáticas desenvolvidas pelos estudantes, mas também como um instrumento que incentive o desenvolvimento delas.

FREITAS, M. C. de. Educação inclusiva: diferenças entre acesso, acessibilidade e inclusão. *Cadernos de Pesquisa*, n. 53, 2023. Disponível em: https://tedit.net/j976u1.

Esse artigo discute as distinções fundamentais entre proporcionar acesso à educação, garantir a acessibilidade e promover a verdadeira inclusão de todos os estudantes no ambiente escolar. Também foi referência para o desenvolvimento das sugestões de adaptação das atividades desta coleção, para que elas não apenas facilitem o acesso e a acessibilidade, mas também assegurem a inclusão efetiva de estudantes com diferentes necessidades e habilidades.

HOFFMANN, J. *Avaliação*: mito & desafio – uma perspectiva construtivista. Porto Alegre: Mediação, 2003.

O livro explora a avaliação educacional sob a ótica do construtivismo, desmistificando práticas tradicionais e propondo novos métodos que promovem a aprendizagem ativa e reflexiva dos estudantes. Foi referência para as abordagens de avaliação presentes nesta coleção, para que elas também fomentem o desenvolvimento contínuo e a compreensão profunda dos conceitos matemáticos.

KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias*: o novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

O livro examina o impacto das tecnologias digitais na educação e destaca como essas ferramentas transformam a dinâmica do ensino e da aprendizagem. Foi referência na elaboração desta coleção para a integração de tecnologias digitais nas aulas de Matemática, visando enriquecer o processo educativo e engajar os estudantes de modo mais eficaz.

LASCANE, M. M.; HOMSY, N. P. B.; MONTEIRO, A. F. B. S. Construção do raciocínio lógico matemático. *Unisanta Humanitas*, Santos, v. 8, n. 2, p. 117-127, 2020.

Nesse artigo são debatidas estratégias e metodologias para desenvolver o raciocínio lógico-matemático dos estudantes, enfatizando a importância de práticas pedagógicas que promovam o pensamento crítico e a resolução de problemas. Foi utilizado nesta coleção como referência de possibilidades de abordagens práticas para fortalecer as habilidades lógicas e matemáticas dos estudantes de maneira eficaz e contextualizada.

LIRA, B. C. *Práticas pedagógicas para o séc. XXI*: a sociointeração digital e o humanismo ético. Petrópolis, RJ: Vozes, 2016.

O trabalho do autor propõe reflexões importantes sobre diversas áreas da educação. Além de favorecer a formação dos estudantes, o texto aborda a necessidade de melhoria e constante aperfeiçoamento da formação docente, a fim de que professores estejam cada vez mais capacitados para auxiliar os estudantes nesse mundo em constante transformação.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

O livro aborda a avaliação educacional como um processo formativo e transformador. Propõe práticas que visam promover a aprendizagem efetiva dos estudantes, fornecendo fundamentos teóricos e práticos para a implementação de orientações avaliativas nesta coleção que incentivem o desenvolvimento contínuo e integral dos estudantes.

Todos os *sites* foram acessados em 9 de setembro de 2024.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. *História nas aulas de Matemática*: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

Esse livro explora a integração da História da Matemática no ensino e oferece fundamentos teóricos e sugestões práticas para enriquecimento das aulas. Foi utilizado nesta coleção como referência para a elaboração de estratégias para contextualizar historicamente conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais significativo e engajador para os estudantes.

MILANI, D. R. C. *Contemporaneidade e educações*: mídias digitais nas culturas juvenis. 2012. 207 f. Tese (Doutorado em Educação Escolar) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Letras, Araraquara, 2012.

Essa tese investiga o papel das mídias digitais na formação das culturas juvenis contemporâneas e suas implicações para a educação, inspirando a elaboração das estratégias de inserção de mídias digitais propostas nesta coleção. Desse modo, o ensino torna-se mais relevante e conectado com as vivências e os interesses dos estudantes.

MOEHLECKE, S. O Ensino Médio e as novas diretrizes curriculares nacionais: entre recorrências e novas inquietações. *Revista Brasileira de Educação*, v. 17, n. 49, p. 39-58, 2012. Disponível em: https://tedit.net/rm3e4u.

Esse artigo retoma parte do debate envolvendo a criação de um novo modelo de Ensino Médio, servindo para a compreensão do histórico de leis e debates que resultaram no Novo Ensino Médio proposto em 2017 pela Lei n. 13.415/2017.

MORÁN, J. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, C. A. de; MORALES, O. E. T. (org.). *Convergências midiáticas, educação e cidadania*: aproximações jovens. Ponta Grossa: Proex: UEPG, 2015. v. II, p. 15-33. Disponível em: https://tedit.net/gn1b88.

Essa publicação explora diversas metodologias ativas de ensino e destaca como essas abordagens podem transformar a educação ao promover uma aprendizagem engajada e participativa, conforme sugerido nas orientações didáticas desta coleção.

PERRENOUD, P. *Avaliação*: da excelência à regulação das aprendizagens. Porto Alegre: Artmed, 1999.

No capítulo "A avaliação entre duas lógicas" desse livro, o autor debate as diferentes abordagens de avaliação, contrastando a lógica da excelência com a lógica da regulação das aprendizagens. Foi utilizado como referencial teórico para a perspectiva sobre práticas avaliativas desta coleção.

PERRENOUD, P.; THURLER, M. G. *As competências para ensinar no século XXI*: a formação de professores e o desafio da avaliação. 1. ed. São Paulo: Penso, 2002.

Esse livro traz para o leitor os textos nos quais os autores suíços apoiaram suas falas na vinda ao Brasil, em 2001, em conferências que contavam com a participação dos educadores brasileiros Lino de Macedo, Nilson José Machado e Cristina D. Allessandrini. Serviu de referência teórica para a elaboração de diretrizes e estratégias pedagógicas e avaliativas alinhadas às demandas do século XXI.

PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Os métodos criativos de resolução de problemas apresentados nesse livro revelam as 4 etapas básicas de uma resolução e estratégias a serem desenvolvidas que inspiraram o trabalho com resolução e elaboração de problemas nesta coleção.

ROCHA, A. D. G. da; OTA, M. A.; HOFFMANN, G. (org.). *Aprendizagem digital*: curadoria, metodologias e ferramentas para o novo contexto educacional. Porto Alegre: Penso, 2020.

O livro analisa as experiências e os desafios enfrentados por estudantes com deficiência ao longo da jornada educacional, à luz das políticas de inclusão. Foi utilizado como referência para as sugestões de práticas inclusivas que promovam a equidade e a continuidade educacional presentes no material.

SILVA, R. V. Autonomia na BNCC: uma análise sob a perspectiva de Paulo Freire. *Revista Educação Pública*, Rio de Janeiro, v. 22, n. 36, 27 de setembro de 2022. Disponível em: https://tedit.net/bcfior.

Esse artigo examina como o conceito de autonomia é tratado na BNCC utilizando como referência os princípios pedagógicos de Paulo Freire. Também serviu de fundamentação teórica da proposta teórico-metodológica desta coleção, propondo uma análise crítica que ajuda a entender e aplicar os conceitos de autonomia no contexto do ensino de Matemática, alinhados com a BNCC.

VARIZO, Z. C. M.; MAGALHÃES, A. P. de A. S. *Atividades investigativas como uma estratégia de ensino e aprendizagem da matemática*. Curitiba: CRV, 2016.

O livro explora o uso de atividades investigativas como uma metodologia eficaz para o ensino e a aprendizagem da Matemática e oferece estratégias práticas, que podem ser incorporadas no planejamento das aulas. Foi referência de consulta para a elaboração de atividades que promovem o pensamento crítico dos estudantes e a resolução de problemas.

WING, J. *Pensamento computacional*: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://tedit.net/gzsm98.

O pensamento computacional é uma habilidade fundamental para todos, pois envolve, com destaque, a resolução de problemas e a identificação de padrões, processos inerentes à atividade matemática e a situações cotidianas. Na publicação original, traduzida para o português, a autora disserta sobre os estudos relacionados ao pensamento computacional. Essa publicação serviu de referência para a elaboração desta coleção e das orientações didáticas deste Manual.