MODERNA EM AÇÃO

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

VOLUME I

ENSINO MÉDIO
1º ANO

Organizadora:
Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Mara Regina Garcia Gay

Área de conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Componente curricular:
Matemática

MODERNA

MODERNA EM AÇÃO

MATEMÁTICA

VOLUME I

ENSINO MÉDIO – 1º ANO

Área de conhecimento: Matemática e suas Tecnologias
Componente curricular: Matemática

Organizadora: Editora Moderna

Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:

Mara Regina Garcia Gay

Bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Especialista em Educação Matemática: Fundamentos Teóricos e Metodológicos pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Licenciada em Pedagogia pela Universidade Iguaçu (RJ). Professora. Editora.

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição
São Paulo, 2024

MODERNA

Elaboração dos originais:

Mara Regina Garcia Gay
Bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Especialista em Educação Matemática: Fundamentos Teóricos e Metodológicos pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Licenciada em Pedagogia pela Universidade Iguaçu (RJ). Professora. Editora.

Carlos Eduardo Marques
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Mateus Coqueiro Daniel de Souza
Mestre em Ciências no Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Paulo César Rodrigues dos Santos
Bacharel em Sistemas de Informação pela Universidade de São Paulo. Editor.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Selene Coletti
Licenciada em Pedagogia pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras "Prof. José Augusto Vieira" (MG). Professora.

Organização dos objetos digitais: Mara Regina Garcia Gay
Elaboração dos objetos digitais: Mara Regina Garcia Gay, Mateus Coqueiro Daniel de Souza

Edição de texto: Carlos Eduardo Marques, Mateus Coqueiro Daniel de Souza, Paulo César Rodrigues dos Santos
Assistência editorial: Ivan Kuvasney Lima, Cintia Alessandra Valle Burkert Machado
Preparação de texto: Magna Reimberg Teobaldo, Mariane de Mello Genaro Feitosa
Gerência de planejamento editorial e revisão: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de revisão: Elaine C. del Nero, Mônica Rodrigues de Lima
Revisão: Alessandra A. Felix, Ana Cortazzo, Érika Kurihara, Márcia Leme, Nancy H. Dias, Rita de Cássia Sam, Roseli Simões, Sirlene Prignolato, Tatiana Malheiro
Gerência de *design*, produção gráfica e digital: Patricia Costa
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Bruno Tonel, Vinicius Rossignol
Capa: Everson de Paula, Paula Miranda Santos
Foto: Parsadanov/Shutterstock
Ilustrações de vinhetas: Bruno Tonel, Vinicius Rossignol
Coordenação de produção gráfica: Aderson Oliveira
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Marcel Hideki Yonamine, Rafael Migliatti de Oliveira
Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica LTDA
Coordenação de pesquisa iconográfica: Flávia Aline de Morais
Pesquisa iconográfica: Pamela Rosa
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moderna em ação matemática / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Mara Regina Garcia Gay. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2024.

1º ano : ensino médio : volume I
Componente curricular : Matemática.
Área de conhecimento : Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-16-13967-4 (aluno)
ISBN 978-85-16-13968-1 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Gay, Mara Regina Garcia.

24-225537 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Canal de atendimento: 0303 663 3762
www.moderna.com.br
2024
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Esta obra foi criada especialmente para você, estudante, que deseja entender e dominar conceitos matemáticos, envolvidos em diferentes contextos, de forma clara e acessível. Este projeto foi pensado para oferecer uma coleção de Matemática que a relacione com aspectos da realidade social, econômica e cultural do país, priorizando a compreensão, o incentivo à leitura e a atribuição de significado aos temas e conceitos abordados.

Em cada volume, estão presentes avaliações diagnósticas (uma no início e outra no meio do volume) que permitem a você identificar o que já sabe sobre determinados temas. No início de cada capítulo, há uma situação contextualizada, que, por meio de imagens e textos, busca despertar seu interesse para o que será estudado. Em seguida, a teoria é explorada com exemplos, atividades resolvidas e atividades propostas. Ao final de cada capítulo, a seção *Para finalizar* oferece recursos de verificação do aprendizado.

As seções *Trabalho e juventudes*, *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares* complementam e enriquecem a obra.

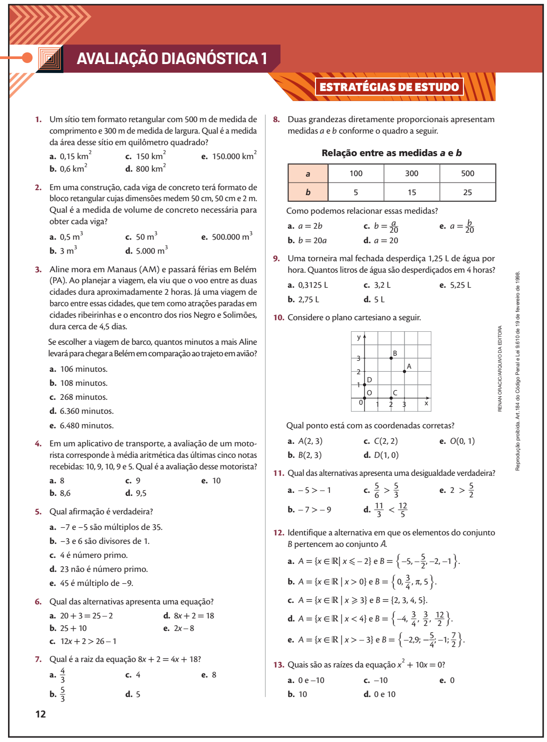
Esperamos que tanto você, estudante, quanto o professor encontrem nesta obra os recursos para o bom desenvolvimento da aprendizagem. Nosso objetivo é tornar o aprendizado de Matemática envolvente e significativo. Que este livro seja uma ferramenta valiosa tanto em sala de aula quanto para o estudo em casa, ajudando a despertar a curiosidade e o interesse pelos conceitos matemáticos e pela presença da ciência Matemática na vida. Desejamos que cada página contribua para o sucesso e o desenvolvimento de todos os envolvidos.

Os editores

ORGANIZAÇÃO DA OBRA

Avaliação diagóstica

Nesta seção, que aparece em dois momentos no volume, você vai verificar seus conhecimentos sobre os conteúdos estudados anteriormente.


AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 1

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

1. Um sítio tem formato retangular com 500 m de medida de comprimento e 300 m de medida de largura. Qual é a medida da área desse sítio em quilômetro quadrado?
a. 0,15 km^2 b. 0,6 km^2 c. 150 km^2 d. 800 km^2 e. 150.000 km^2

2. Em uma construção, cada viga de concreto terá formato de bloco retangular cujas dimensões medem 50 cm, 50 cm e 2 m. Qual é a medida de volume de concreto necessária para obter cada viga?
a. 0,5 m^3 b. 3 m^3 c. 50 m^3 d. 5.000 m^3 e. 500.000 m^3

3. Aline mora em Manaus (AM) e passará férias em Belém (PA). Ao planejar a viagem, ela viu que o voo entre as duas cidades dura aproximadamente 2 horas. Já uma viagem de barco entre essas cidades, que tem como atrações paradas em cidades ribeirinhas e o encontro dos rios Negro e Solimões, dura cerca de 4,5 dias.
Se escolher a viagem de barco, quantos minutos a mais Aline levará para chegar a Belém em comparação ao trajeto em avião?
a. 106 minutos.
b. 108 minutos.
c. 268 minutos.
d. 6.360 minutos.
e. 6.480 minutos.

4. Em um aplicativo de transporte, a avaliação de um motorista corresponde à média aritmética das últimas cinco notas recebidas: 10, 9, 10, 9 e 5. Qual é a avaliação desse motorista?
a. 8 b. 8,6 c. 9 d. 9,5 e. 10

5. Qual afirmação é verdadeira?
a. −7 e −5 são múltiplos de 35.
b. −3 e 6 são divisores de 1.
c. 4 é número primo.
d. 23 não é número primo.
e. 45 é múltiplo de −9.

6. Qual das alternativas apresenta uma equação?
a. $20 + 3 = 25 - 2$ b. $25 + 10$ c. $12x + 2 > 26 - 1$ d. $8x + 2 = 18$ e. $2x - 8$

7. Qual é a raiz da equação $8x + 2 = 4x + 18$?
a. $\frac{4}{3}$ b. $\frac{5}{3}$ c. 4 d. 5 e. 8

8. Duas grandezas diretamente proporcionais apresentam medidas *a* e *b* conforme o quadro a seguir.

Relação entre as medidas *a* e *b*

a	100	300	500
b	5	15	25

Como podemos relacionar essas medidas?
a. $a = 2b$ b. $b = 20a$ c. $b = \frac{a}{20}$ d. $a = 20$ e. $a = \frac{b}{20}$

9. Uma torneira mal fechada desperdiça 1,25 L de água por hora. Quantos litros de água são desperdiçados em 4 horas?
a. 0,3125 L b. 2,75 L c. 3,2 L d. 5 L e. 5,25 L

10. Considere o plano cartesiano a seguir.

Qual ponto está com as coordenadas corretas?
a. $A(2, 3)$ b. $B(2, 3)$ c. $C(2, 2)$ d. $D(1, 0)$ e. $O(0, 1)$

11. Qual das alternativas apresenta uma desigualdade verdadeira?
a. $-5 > -1$ b. $-7 > -9$ c. $\frac{5}{6} > \frac{5}{3}$ d. $\frac{11}{3} < \frac{12}{5}$ e. $2 > \frac{5}{2}$

12. Identifique a alternativa em que os elementos do conjunto *B* pertencem ao conjunto *A*.
a. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2\}$ e $B = \left\{-5, -\frac{5}{2}, -2, -1\right\}$.
b. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ e $B = \left\{0, \frac{3}{4}, \pi, 5\right\}$.
c. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$.
d. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$ e $B = \left\{-4, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{12}{2}\right\}$.
e. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$ e $B = \left\{-2{,}9; -\frac{5}{4}; -1; \frac{7}{2}\right\}$.

13. Quais são as raízes da equação $x^2 + 10x = 0$?
a. 0 e −10 b. 10 c. −10 d. 0 e 10 e. 0

12

Abertura de capítulo

O tema do capítulo é introduzido por meio de uma imagem motivadora e um breve texto.


Capítulo 9

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Loja de artigos de cerâmica feitos por quilombolas do Quilombo dos Potes, em São João da Varjota (PI). Foto de 2022.

O Censo Demográfico de 2022, do IBGE, revelou que havia 1.327.802 pessoas quilombolas no Brasil, o que representava 0,67% da população.

Os quilombolas são moradores de comunidades quilombolas e seus descendentes. Essas comunidades foram formadas por pessoas escravizadas (africanos e indígenas) que resistiram ao regime escravocrata no Brasil. Mesmo após o fim desse regime, as comunidades quilombolas continuaram existindo e surgiram outras, como territórios ocupados por grupos étnicos raciais com presença de ancestralidade negra.

As comunidades quilombolas compartilham os recursos entre seus membros e buscam ser autossuficientes, utilizando recursos locais e desenvolvendo atividades econômicas próprias, como agricultura familiar, artesanato e turismo comunitário.

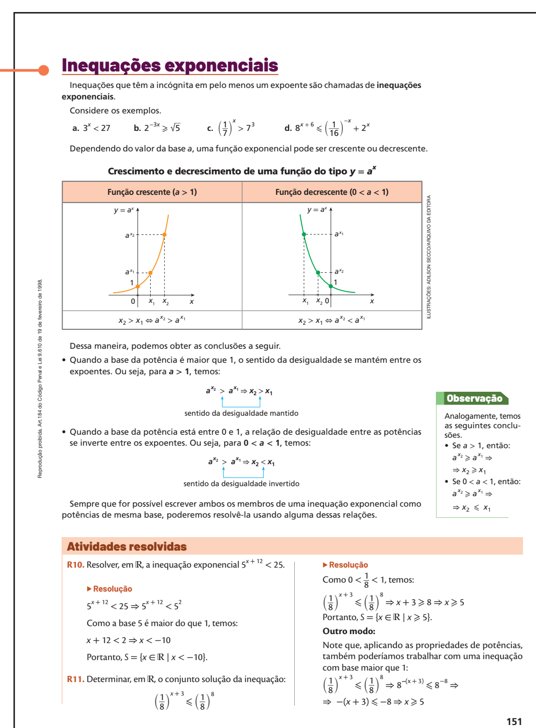
Em 2023, o Grupo A do Programa Nacional de Fortalecimento da Agricultura Familiar (Pronaf) passou a atender pessoas quilombolas, visando ao desenvolvimento da agricultura familiar. Assim, pessoas quilombolas passaram a ter acesso a crédito com uma taxa de juro composto de 0,5% ao ano, com possibilidade de pagamento em até 10 anos.

Você sabe o que é juro composto? Se uma pessoa quilombola obteve um crédito de R$ 5.000,00 para pagar ao final de 2 anos, qual será o valor dessa dívida após esse período?

ODS 1 ODS 2 ODS 8 ODS 10 ODS 11 ODS 12

OBJETO DIGITAL Mapa clicável: Quilombos

197


Inequações exponenciais

Inequações que têm a incógnita em pelo menos um expoente são chamadas de **inequações exponenciais**.

Considere os exemplos.

a. $3^x < 27$ b. $2^{-3x} \geqslant \sqrt{5}$ c. $\left(\frac{1}{7}\right)^x > 7^3$ d. $8^{x+6} \leqslant \left(\frac{1}{16}\right)^{-x} + 2^x$

Dependendo do valor da base *a*, uma função exponencial pode ser crescente ou decrescente.

Crescimento e decrescimento de uma função do tipo $y = a^x$

Função crescente ($a > 1$)	Função decrescente ($0 < a < 1$)
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} < a^{x_1}$

Dessa maneira, podemos obter as conclusões a seguir.

- Quando a base da potência é maior que 1, o sentido da desigualdade se mantém entre os expoentes. Ou seja, para $a > 1$, temos:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow x_2 > x_1$$

sentido da desigualdade mantido

- Quando a base da potência está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre as potências se inverte entre os expoentes. Ou seja, para $0 < a < 1$, temos:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow x_2 < x_1$$

sentido da desigualdade invertido

Sempre que for possível escrever ambos os membros de uma inequação exponencial como potências de mesma base, poderemos resolvê-la usando alguma dessas relações.

Observação
Analogamente, temos as seguintes conclusões.
- Se $a > 1$, então: $a^{x_2} \geqslant a^{x_1} \Rightarrow x_2 \geqslant x_1$
- Se $0 < a < 1$, então: $a^{x_2} \geqslant a^{x_1} \Rightarrow x_2 \leqslant x_1$

Atividades resolvidas

R10. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação exponencial $5^{x+12} < 25$.

Resolução

$5^{x+12} < 25 \Rightarrow 5^{x+12} < 5^2$

Como a base 5 é maior do que 1, temos:

$x + 12 < 2 \Rightarrow x < -10$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -10\}$.

R11. Determinar, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação:

$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8$

Resolução

Como $0 < \frac{1}{8} < 1$, temos:

$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8 \Rightarrow x + 3 \geqslant 8 \Rightarrow x \geqslant 5$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$.

Outro modo:

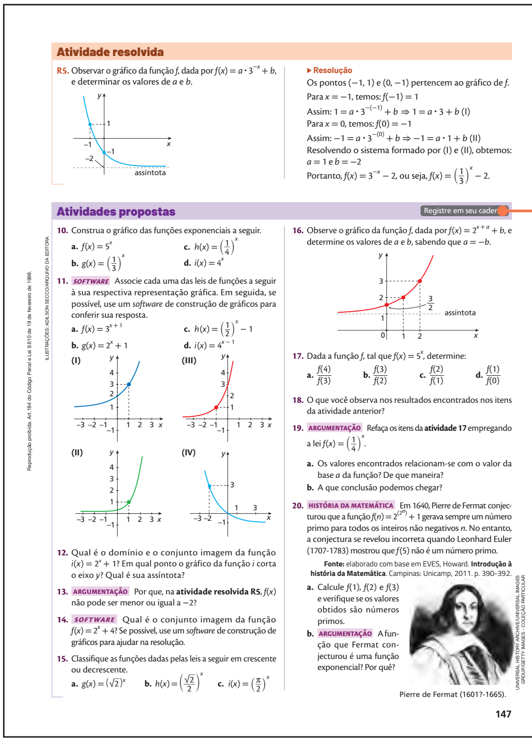
Note que, aplicando as propriedades de potências, também poderíamos trabalhar com uma inequação com base maior que 1:

$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8 \Rightarrow 8^{-(x+3)} \leqslant 8^{-8} \Rightarrow$
$\Rightarrow -(x + 3) \leqslant -8 \Rightarrow x \geqslant 5$

151

Apresentação de conteúdos

Os conteúdos são apresentados com linguagem clara e objetiva, acompanhados de exemplos e atividades resolvidas.



Atividades propostas

São propostas atividades em ordem crescente de dificuldade. Algumas delas recebem *tags* especiais, conforme a legenda a seguir:

EM DUPLA
Você fará a atividade com um colega.

EM GRUPO
Mais de um colega resolverá a atividade com você.

ARGUMENTAÇÃO
Ao resolver a atividade, você desenvolverá sua capacidade de pensar criticamente e articular ideias de maneira clara e convincente.

SOFTWARE
Você terá oportunidade de utilizar determinados *softwares* educativos.

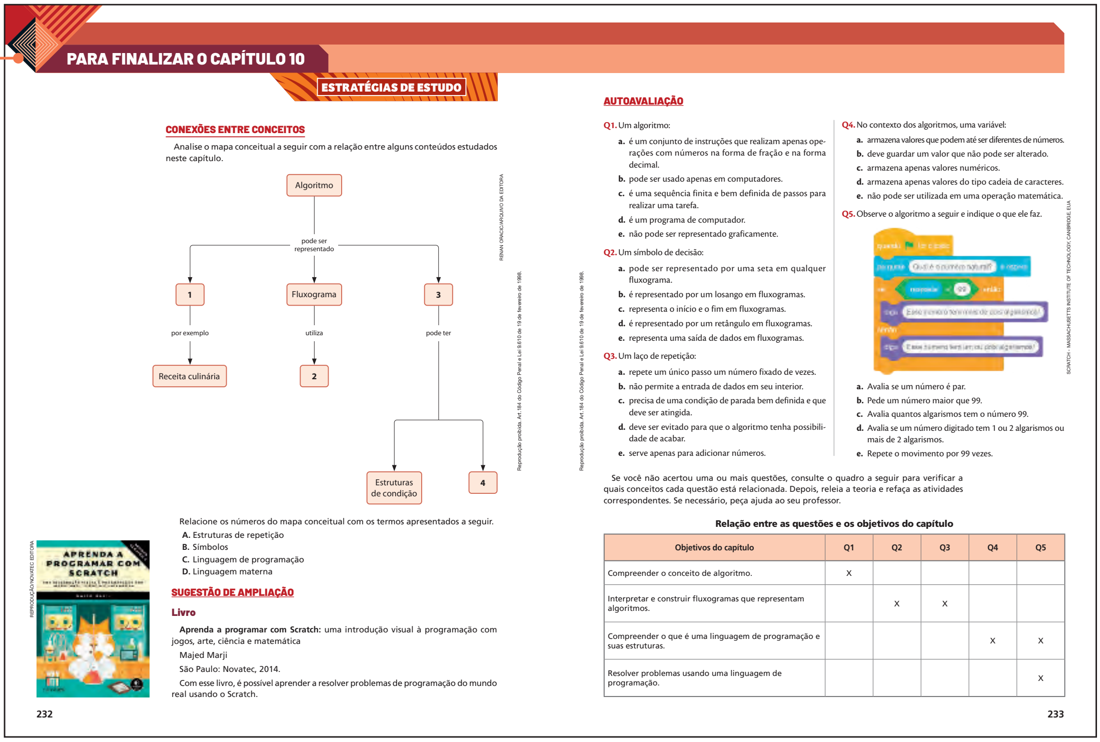
PENSAMENTO COMPUTACIONAL
Você resolverá problemas que envolvem a criação ou a análise de um algoritmo, passo a passo, que leva à solução.

ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS
Você criará questões ou enunciados de problemas.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA
Ao resolver a atividade, você conhecerá fatos históricos ligados à Matemática.

Trabalho e juventudes

Nesta seção, você vai explorar temas como profissões, tributos, igualdade de condições, inclusão, segurança no trabalho, entre outros.


PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 10

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.

Relacione os números do mapa conceitual com os termos apresentados a seguir.

A. Estruturas de repetição
B. Símbolos
C. Linguagem de programação
D. Linguagem materna

SUGESTÃO DE AMPLIAÇÃO

Livro

Aprenda a programar com Scratch: uma introdução visual à programação com jogos, arte, ciência e matemática

Majed Marji

São Paulo: Novatec, 2014.

Com esse livro, é possível aprender a resolver problemas de programação do mundo real usando o Scratch.

232

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Um algoritmo:

a. é um conjunto de instruções que realizam apenas operações com números na forma de fração e na forma decimal.
b. pode ser usado apenas em computadores.
c. é uma sequência finita e bem definida de passos para realizar uma tarefa.
d. é um programa de computador.
e. não pode ser representado graficamente.

Q2. Um símbolo de decisão:

a. pode ser representado por uma seta em qualquer fluxograma.
b. é representado por um losango em fluxogramas.
c. representa o início e o fim em fluxogramas.
d. é representado por um retângulo em fluxogramas.
e. representa uma saída de dados em fluxogramas.

Q3. Um laço de repetição:

a. repete um único passo um número fixado de vezes.
b. não permite a entrada de dados em seu interior.
c. precisa de uma condição de parada bem definida e que deve ser atingida.
d. deve ser evitado para que o algoritmo tenha possibilidade de acabar.
e. serve apenas para adicionar números.

Q4. No contexto dos algoritmos, uma variável:

a. armazena valores que podem até ser diferentes de números.
b. deve guardar um valor que não pode ser alterado.
c. armazena apenas valores numéricos.
d. armazena apenas valores do tipo cadeia de caracteres.
e. não pode ser utilizada em uma operação matemática.

Q5. Observe o algoritmo a seguir e indique o que ele faz.

a. Avalia se um número é par.
b. Pede um número maior que 99.
c. Avalia quantos algarismos tem o número 99.
d. Avalia se um número digitado tem 1 ou 2 algarismos ou mais de 2 algarismos.
e. Repete o movimento por 99 vezes.

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Compreender o conceito de algoritmo.	X				
Interpretar e construir fluxogramas que representam algoritmos.		X	X		
Compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas.				X	X
Resolver problemas usando uma linguagem de programação.					X

233

Para finalizar o capítulo

Esta seção se subdivide nas subseções *Conexões entre conceitos*, *Sugestões de ampliação* e *Autoavaliação*.

- *Conexões entre conceitos*: para você identificar palavras/termos que completam corretamente um mapa conceitual.
- *Sugestões de ampliação*: são indicados recursos complementares, como livros, *sites*, jogos, *softwares* e videoaulas, para enriquecer o que foi estudado.
- *Autoavaliação*: apresenta questões que possibilitarão identificar suas dificuldades e facilidades no estudo.

Educação midiática

Nesta seção, você vai explorar temas importantes para navegar no mundo digital de forma crítica e consciente.


EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

O que há por trás dos dados?

Todos os dias lidamos, por meio de diferentes mídias, com dados estatísticos. Esses dados nos ajudam a compreender variadas situações no dia a dia, a propiciar a realização de previsões confiáveis e a tomar decisões da maneira mais acertada possível, de acordo com objetivos preestabelecidos. No entanto, muitos desses dados escondem informações importantes ou são apresentados de modo a induzir determinada interpretação.

Acompanhe a cena a seguir.

Agora, leia as inferências a seguir a respeito das informações da cena.

Interpretação equivocada da média: a fala da repórter na televisão pode induzir o telespectador a achar que as pessoas que vivem no município têm uma renda próxima de 15 mil reais; no entanto, esse dado pode camuflar a desigualdade social existente no local. É comum, por exemplo, que a maior parte da população de um município tenha renda inferior à média e uma parcela pequena tenha uma renda bem superior.

Informação escondida: a leitura imediata do texto no jornal é positiva. A prefeitura parece fazer seu trabalho. No entanto, a informação de que um terço da população ainda não conta com coleta de lixo ficou escondida na frase, levando o leitor a não prestar tanta atenção a essa informação negativa.

234

Porcentagem × números absolutos: dizer que o número de acidentes de trânsito na região aumentou apenas 0,01% minimiza um problema que pode ser mais sério do que parece. Essa porcentagem pode corresponder a 1.000 acidentes, por exemplo, o que não é um número baixo. Algumas vezes, quando a situação é desfavorável, os dados são apresentados na forma de porcentagem e, quando a situação é favorável, eles são apresentados em números absolutos.

Ao se deparar com dados estatísticos, questione sempre! Procure saber quem publicou, quem fez a pesquisa, como os dados foram coletados, que informações estão faltando e se as informações fazem sentido.

Atividades — Registre em seu caderno

1. EM GRUPO Reúna-se com três colegas, leiam as notícias a seguir e conversem sobre possíveis informações escondidas em cada uma delas.

2. EM GRUPO Leia a propaganda a seguir publicada em uma rede social.

Com os colegas da atividade anterior, responda:

a. Na opinião de vocês, qual foi a estratégia utilizada por essa propaganda para vender máscaras?
b. Com que intenção o dado 100% foi utilizado nessa propaganda?
c. Leiam a informação a seguir.

Usando máscaras você não pega covid-19.

Essa informação é verdadeira ou falsa? Façam a checagem e justifiquem a resposta.

3. EM GRUPO Com os colegas, analisem a propaganda de uma loja de carros em um *outdoor*.

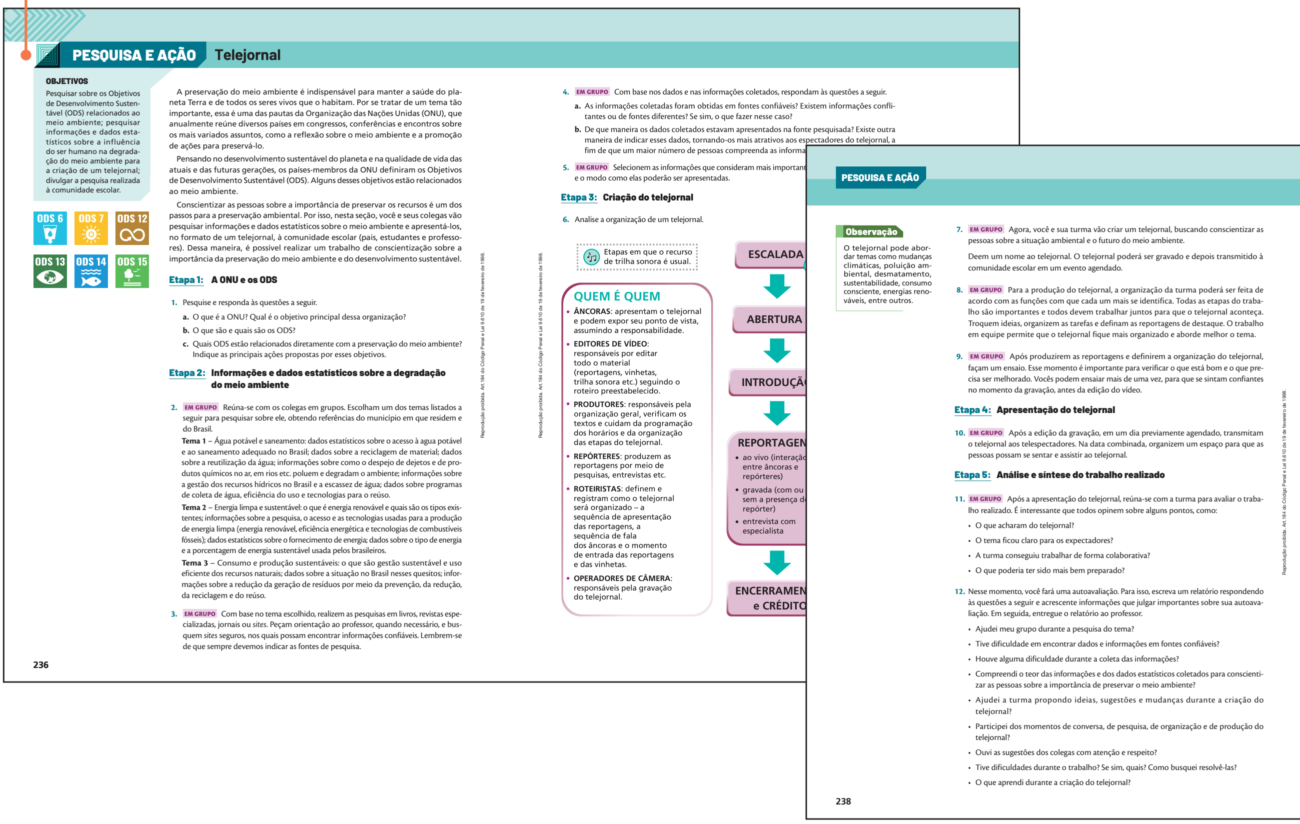
Agora, respondam.

a. É verdade que não há cobrança de juro na venda do carro?
b. Na opinião de vocês, por que a informação sobre a taxa de cadastro no banco está menor que as outras informações na propaganda?
c. Supondo que uma pessoa compre um carro cujo preço à vista seria de R$ 89.900,00. Nas condições da propaganda, qual seria o valor total pago ao final do financiamento, ou seja, após pagar as 48 prestações? Use uma calculadora para resolver.

235

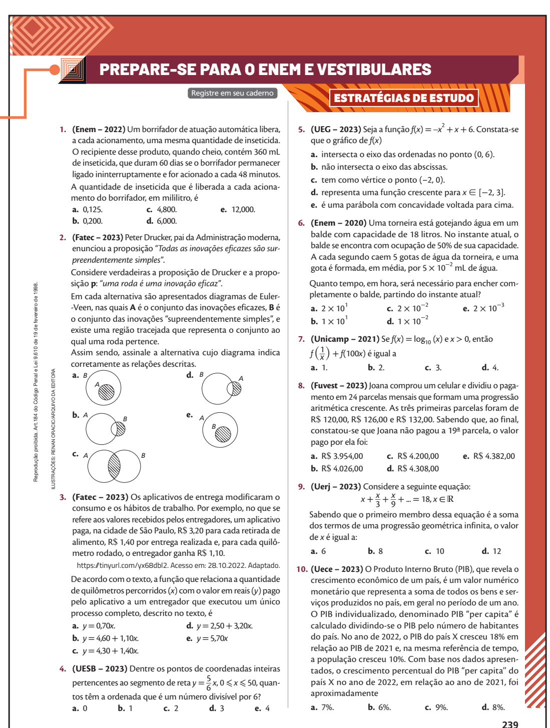
Pesquisa e ação

Nesta seção, você vai se reunir com os colegas para elaborar um projeto e apresentar um produto em diferentes meios, usando linguagens diversas, como vídeos, jornais e outros recursos.



Prepare-se para o Enem e vestibulares

Nesta seção, você resolverá questões que o prepararão para prestar o Enem e vestibulares.



OBJETO DIGITAL **Título do Objeto Digital**

Identifica os Objetos Educacionais Digitais.

OBJETIVOS DE DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Vamos conhecer os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável**?

Em 2015, na sede da Organização das Nações Unidas (ONU), em Nova York, nos Estados Unidos, foi assinada a **Agenda 2030**, que estabeleceu 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) que visam orientar metas globais a serem alcançadas até 2030, com a finalidade de enfrentar os desafios ambientais, políticos e econômicos do presente e assegurar dignidade a todas as pessoas.

Os 193 Estados-membros da ONU, incluindo o Brasil, comprometeram-se a implementar esse plano de ação global em colaboração com governos, empresas, instituições e sociedade civil. O monitoramento e a avaliação dessas ações exigem cooperação e engajamento de todos os setores da sociedade.

ODS 1

ERRADICAÇÃO DA POBREZA

Eliminar a pobreza em todas as formas e em todos os lugares.

ODS 2

FOME ZERO E AGRICULTURA SUSTENTÁVEL

Erradicar a fome, garantir a segurança alimentar, melhorar a nutrição e promover práticas de agricultura sustentável.

ODS 3

SAÚDE E BEM-ESTAR

Assegurar o acesso a serviços de saúde de qualidade e promover o bem-estar para pessoas de todas as idades.

ODS 4

EDUCAÇÃO DE QUALIDADE

Garantir educação inclusiva, de qualidade e equitativa, promovendo oportunidades de aprendizado ao longo da vida para todos.

ODS 5

IGUALDADE DE GÊNERO

Alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas.

ODS 6

ÁGUA POTÁVEL E SANEAMENTO

Assegurar a disponibilidade e a gestão sustentável de água potável e saneamento para todos.

ODS 7

ENERGIA LIMPA E ACESSÍVEL

Garantir o acesso a fontes de energia confiáveis, sustentáveis e modernas para todos.

ODS 8

TRABALHO DECENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO

Fomentar o crescimento econômico inclusivo e sustentável, promovendo emprego pleno, produtivo e digno para todos.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

ODS 9
INDÚSTRIA, INOVAÇÃO E INFRAESTRUTURA

Construir infraestruturas resilientes, promover a industrialização inclusiva e sustentável e incentivar a inovação.

ODS 10
REDUÇÃO DAS DESIGUALDADES

Reduzir as desigualdades no interior dos países e entre países.

ODS 11
CIDADES E COMUNIDADES SUSTENTÁVEIS

Tornar as cidades e comunidades mais inclusivas, seguras, resilientes e sustentáveis.

ODS 12
CONSUMO E PRODUÇÃO RESPONSÁVEIS

Garantir padrões de consumo e de produção sustentáveis.

ODS 13
AÇÃO CONTRA A MUDANÇA GLOBAL DO CLIMA

Adotar medidas urgentes para combater as alterações climáticas e os seus impactos.

ODS 14
VIDA NA ÁGUA

Conservar e usar de forma responsável os oceanos, os mares e os recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável.

ODS 15
VIDA TERRESTRE

Proteger e restaurar ecossistemas terrestres, gerenciar florestas, combater a desertificação, reverter a degradação do solo e preservar a biodiversidade.

ODS 16
PAZ, JUSTIÇA E INSTITUIÇÕES EFICAZES

Fomentar sociedades pacíficas e inclusivas, garantir o acesso à justiça e construir instituições eficazes e responsáveis em todos os níveis.

ODS 17
PARCERIAS E MEIOS DE IMPLEMENTAÇÃO

Reforçar os meios de implementação e revitalizar a parceria global para o desenvolvimento sustentável.

Fonte: ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil**. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 22 set. 2024.

Neste livro, indicaremos os ODS sempre que houver propostas, temas ou conceitos que possam ser conectados a eles.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

SUMÁRIO

SUMÁRIO DOS OBJETOS EDUCACIONAIS DIGITAIS

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 1

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

1. Um sítio tem formato retangular com 500 m de medida de comprimento e 300 m de medida de largura. Qual é a medida da área desse sítio em quilômetro quadrado? 1. Alternativa a.

a. $0{,}15\ km^2$ **b.** $0{,}6\ km^2$ **c.** $150\ km^2$ **d.** $800\ km^2$ **e.** $150.000\ km^2$

2. Em uma construção, cada viga de concreto terá formato de bloco retangular cujas dimensões medem 50 cm, 50 cm e 2 m. Qual é a medida de volume de concreto necessária para obter cada viga? 2. Alternativa a.

a. $0{,}5\ m^3$ **b.** $3\ m^3$ **c.** $50\ m^3$ **d.** $5.000\ m^3$ **e.** $500.000\ m^3$

3. Aline mora em Manaus (AM) e passará férias em Belém (PA). Ao planejar a viagem, ela viu que o voo entre as duas cidades dura aproximadamente 2 horas. Já uma viagem de barco entre essas cidades, que tem como atrações paradas em cidades ribeirinhas e o encontro dos rios Negro e Solimões, dura cerca de 4,5 dias.

Se escolher a viagem de barco, quantos minutos a mais Aline levará para chegar a Belém em comparação ao trajeto em avião? 3. Alternativa d.

a. 106 minutos.
b. 108 minutos.
c. 268 minutos.
d. 6.360 minutos.
e. 6.480 minutos.

4. Alternativa b.
4. Em um aplicativo de transporte, a avaliação de um motorista corresponde à média aritmética das últimas cinco notas recebidas: 10, 9, 10, 9 e 5. Qual é a avaliação desse motorista?

a. 8 **b.** 8,6 **c.** 9 **d.** 9,5 **e.** 10

5. Qual afirmação é verdadeira? 5. Alternativa e.

a. -7 e -5 são múltiplos de 35.
b. -3 e 6 são divisores de 1.
c. 4 é número primo.
d. 23 não é número primo.
e. 45 é múltiplo de -9.

6. Qual das alternativas apresenta uma equação? 6. Alternativa d.

a. $20 + 3 = 25 - 2$
b. $25 + 10$
c. $12x + 2 > 26 - 1$
d. $8x + 2 = 18$
e. $2x - 8$

7. Qual é a raiz da equação $8x + 2 = 4x + 18$? 7. Alternativa c.

a. $\frac{4}{3}$ **b.** $\frac{5}{3}$ **c.** 4 **d.** 5 **e.** 8

8. Duas grandezas diretamente proporcionais apresentam medidas *a* e *b* conforme o quadro a seguir. 8. Alternativa c.

Relação entre as medidas *a* e *b*

a	100	300	500
b	5	15	25

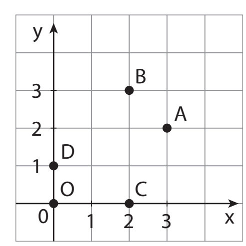
Como podemos relacionar essas medidas?

a. $a = 2b$ **b.** $b = 20a$ **c.** $b = \frac{a}{20}$ **d.** $a = 20$ **e.** $a = \frac{b}{20}$

9. Alternativa d.
9. Uma torneira mal fechada desperdiça 1,25 L de água por hora. Quantos litros de água são desperdiçados em 4 horas?

a. 0,3125 L **b.** 2,75 L **c.** 3,2 L **d.** 5 L **e.** 5,25 L

10. Considere o plano cartesiano a seguir.



10. Alternativa b.
Qual ponto está com as coordenadas corretas?

a. $A(2, 3)$ **b.** $B(2, 3)$ **c.** $C(2, 2)$ **d.** $D(1, 0)$ **e.** $O(0, 1)$

11. Alternativa b.
11. Qual das alternativas apresenta uma desigualdade verdadeira?

a. $-5 > -1$ **b.** $-7 > -9$ **c.** $\frac{5}{6} > \frac{5}{3}$ **d.** $\frac{11}{3} < \frac{12}{5}$ **e.** $2 > \frac{5}{2}$

12. Identifique a alternativa em que os elementos do conjunto *B* pertencem ao conjunto *A*. 12. Alternativa e.

a. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2\}$ e $B = \left\{-5, -\frac{5}{2}, -2, -1\right\}$.
b. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ e $B = \left\{0, \frac{3}{4}, \pi, 5\right\}$.
c. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$.
d. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$ e $B = \left\{-4, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{12}{2}\right\}$.
e. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$ e $B = \left\{-2{,}9; -\frac{5}{4}; -1; \frac{7}{2}\right\}$.

13. Quais são as raízes da equação $x^2 + 10x = 0$? 13. Alternativa a.

a. 0 e -10 **b.** 10 **c.** -10 **d.** 0 e 10 **e.** 0

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Capítulo 1

GRANDEZAS E MEDIDAS

MAYKOVA GALINA/SHUTTERSTOCK

Em 23 de junho de 2019, o Comitê Olímpico Internacional (COI) inaugurou oficialmente sua nova sede, a *Olympic House*, que é uma das construções mais sustentáveis do mundo, em Lausane, Suíça. Foto de 2023.

Segundo estudos da Organização das Nações Unidas (ONU), a população mundial deve chegar a 8,5 bilhões de pessoas em 2030. Mas, ao mesmo tempo que a população cresce, os recursos naturais diminuem, o que aponta para o esgotamento desses recursos a médio prazo. Nesse contexto, ganha destaque e importância ambiental o conceito de sustentabilidade.

Em meados do século passado, preocupações ecológicas, como o melhor aproveitamento da ventilação natural e da luz solar na iluminação de ambientes internos, além do uso de matérias-primas locais, começaram a ser pautadas nos projetos de construções residenciais. Atualmente, acrescentam-se outros elementos, como o uso de energia limpa e renovável (solar ou eólica) e o reúso da água (cisterna).

Para estarem adequadas às necessidades de seus ocupantes com redução de custos e de recursos materiais e com o menor impacto ambiental possível, todas as grandezas envolvidas nesses projetos que visam a construções sustentáveis precisam ser previamente dimensionadas, isto é, precisam ser medidas.

Você sabe o que é grandeza? E medida de uma grandeza? Em que situações do dia a dia você realiza medições? **Questões.** Respostas pessoais.

Grandezas e medidas são os objetos de estudo deste primeiro capítulo.

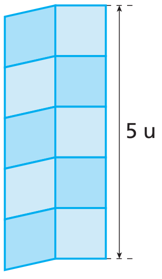
Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre estes e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

Grandeza × medida

Acompanhe a situação a seguir.

Detalhe da imagem com ampliação de 7,3 vezes.

BENTINHO/ARQUIVO DA EDITORA



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

No clube que Felipe frequenta, a piscina tem formato de paralelepípedo reto-retângulo, e suas paredes e o chão são revestidos por peças de cerâmica quadradas de mesmo tamanho. No chão da piscina, Felipe contou 20 peças no lado menor do formato retangular e 30 peças no lado maior, perpendicular ao anterior. Ainda reparou que a piscina tinha 5 dessas peças na altura. Representando por u a medida do comprimento de cada lado das peças de cerâmica, Felipe concluiu que a altura da piscina mede 5 u.

Grandeza e medida são conceitos relacionados, porém distintos. Nessa situação, está presente a **grandeza** comprimento, relacionada à altura da piscina e a cada lado da peça de cerâmica. A medida de comprimento u do lado dessa peça quadrada é uma unidade de medida de comprimento. A **medida** de comprimento 5 u, da altura, é obtida por comparação, pois o lado da peça "cabe" 5 vezes na altura da piscina. Assim, podemos considerar como medida o produto de um número pela unidade de medida correspondente.

Dizemos que:

Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou contado.

Medida de uma grandeza é o resultado da comparação dessa grandeza com outra da mesma natureza tomada como unidade de medida.

2 c. 100 peças, 150 peças, 100 peças, 150 peças, 600 peças; 100 u^2, 150 u^2, 100 u^2, 150 u^2, 600 u^2.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Considerando a situação inicial, da piscina com formato de paralelepípedo reto-retângulo, responda ao que se pede. **1 a.** Perímetro é uma grandeza. **1 b.** Área é uma grandeza.
   - **a.** Sabendo que a medida do perímetro de uma região poligonal, como o chão da piscina que tem formato retangular, é a soma das medidas de comprimento dos seus lados, podemos dizer que perímetro é uma grandeza ou é a medida de uma grandeza?
   - **b.** Cada peça quadrada que reveste a piscina representa uma unidade de medida de área. A medida da área do revestimento da piscina é obtida pela soma das medidas de área de todas as peças quadradas que revestem a piscina. Então, podemos afirmar que a área é uma grandeza ou é a medida de uma grandeza?
   - **c.** Suponha que cubos idênticos, cujas faces correspondem às peças quadradas do revestimento, ocupem toda a piscina. Cada um desses cubos representa uma unidade de medida de volume. A medida do volume da piscina cheia é igual à soma das medidas de volume dos cubos que ocupam toda a piscina. O volume é uma grandeza ou é a medida de uma grandeza? **1 c.** Volume é uma grandeza.
2. Considere ainda a piscina da situação inicial com formato de paralelepípedo reto-retângulo, 5 peças de cerâmica quadradas de altura e, no chão da piscina, 20 peças no lado menor e 30 peças no lado maior. Representando por u a medida do comprimento do lado das peças de cerâmica, responda às questões:
   - **a.** Quais são as medidas de comprimento das laterais internas da piscina? **2 a.** 20 u, 30 u, 20 u, 30 u.
   - **b.** Qual é a medida do perímetro de cada parede e do chão da piscina? **2 b.** 50 u, 70 u, 50 u, 70 u, 100 u.
   - **c.** Quantas peças de cerâmica há em cada parede e no chão da piscina? Qual é a medida da área de cada parede e do chão da piscina?
   - **d.** Quantas peças revestem a piscina? Qual é a medida da área total de revestimento da piscina? **2 d.** 1.100 peças; 1.100 u^2.
   - **e.** A medida do volume de um cubo cujas faces têm medidas iguais às peças de cerâmica é igual a 1 u^3. Quantos desses cubos ocupariam toda a piscina? Qual é a medida do volume da piscina cheia? **2 e.** 3.000 cubos; 3.000 u^3.
3. **ARGUMENTAÇÃO** Considere que você tenha três tábuas de mesma largura com as seguintes medidas de comprimento: 8 m, 5 m e 3 m. Supondo que você não tenha um instrumento de medida, como poderia marcar a metade da tábua de 8 m? Explique sua resposta. **3.** Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor.*

Medindo com instrumentos

A medição de uma grandeza (comprimento, perímetro, área, volume, tempo, massa e temperatura, entre outras) consiste na comparação entre o que se quer medir e uma unidade de medida da mesma grandeza escolhida como padrão.

Para cada grandeza, em geral, são desenvolvidos métodos e instrumentos de medida e definidas as unidades de base. Contudo, é comum incorrer em erro nas medições. Para minimizar esses erros, devemos escolher os instrumentos adequados, aprender a utilizá-los com sua escala de medidas e considerar as margens de precisão de cada um. Considere os exemplos:

Nesta situação, usa-se um paquímetro graduado em décimo de milímetro como o instrumento mais adequado.

ATENÇÃO! AS IMAGENS ESTÃO REPRESENTADAS SEM PROPORÇÃO ENTRE ELAS.

Nesta situação, uma régua graduada em milímetro é o instrumento mais adequado.

Detalhe da imagem com ampliação de 6,5 vezes.

Nesta situação, uma trena graduada em centímetro é o instrumento mais adequado.

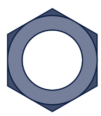
ILUSTRAÇÕES: BENTINHO/ARQUIVO DA EDITORA

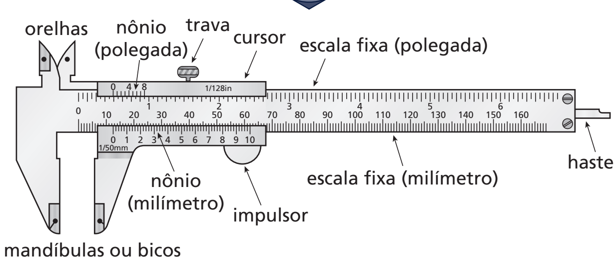
Atividade resolvida

R1. Medir a largura de uma porca sextavada usando um paquímetro.

▸ **Resolução**

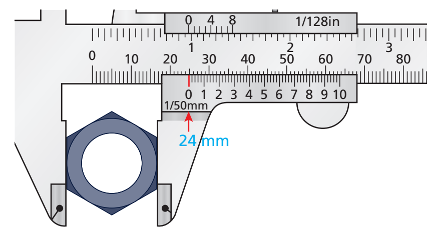
Inicialmente, observamos a porca e os elementos que compõem um paquímetro.



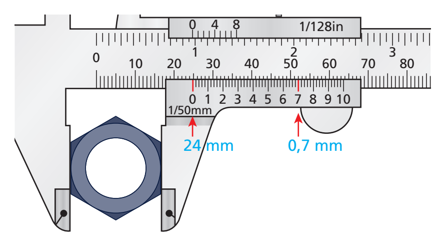


Para medir a porca, realizamos os passos a seguir.

- Movendo o cursor do paquímetro, encaixamos a porca entre as mandíbulas, encostando-as sem apertar.
- Na escala fixa (milímetro), lemos a medida dada pelo tracinho mais próximo e à esquerda do zero do nônio (milímetro). No caso, temos 24 mm, o que indica que a medida está entre 24 mm e 25 mm.



- Observamos qual tracinho do nônio (milímetro) coincide com algum tracinho da escala fixa (milímetro). No caso, isso acontece com o 7 do nônio (milímetro), o que significa que após os 24 mm há mais 0,7 mm a ser considerado.



- Adicionamos 24 mm a 0,7 mm e chegamos à medida da largura da porca: 24,7 mm.

OBJETO DIGITAL
Carrossel de imagens: Instrumentos de medidas
O carrossel de imagens aborda a importância dos instrumentos de medida na quantificação de grandezas físicas com precisão e confiabilidade, apresentando outros instrumentos além daqueles que são explorados no livro do estudante como o contador Geiger, o luxímetro digital, o voltímetro e o afinador eletrônico.

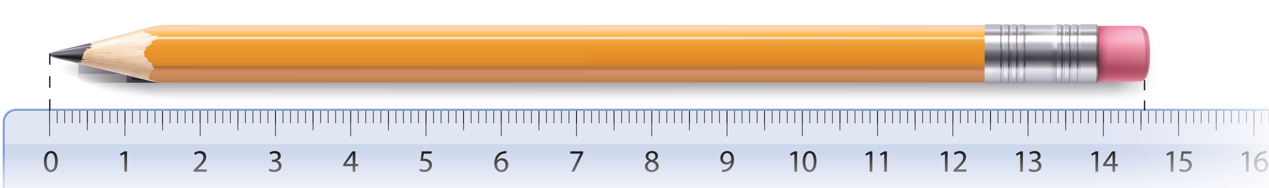
ATENÇÃO! AS IMAGENS ESTÃO REPRESENTADAS SEM PROPORÇÃO ENTRE ELAS.

Algarismos significativos

Em uma medição, devemos observar que a precisão de todo instrumento de medida é limitada e que o operador precisa saber manusear o instrumento adequadamente. Ainda assim, toda medição é acompanhada de erro.

Acompanhe a situação a seguir.

Rodrigo e Luana utilizaram uma mesma régua graduada em milímetros para medir o comprimento de um lápis. Eles observaram que a medida do comprimento do lápis era um pouco maior que 14,5 cm. Rodrigo estimou que essa medida era 14,58 cm e Luana estimou que era 14,56 cm.



Medições feitas por diferentes pessoas podem apresentar variações, ainda que tenham usado o mesmo instrumento de medida. Nessa situação, ao comparar as duas medições, observamos que Rodrigo e Luana obtiveram coincidência em três algarismos: 1, 4 e 5. Porém, houve divergência no último algarismo obtido na medição feita: 8 ou 6.

Nesse caso, os algarismos 1, 4 e 5 são considerados **algarismos corretos** e os algarismos 8 ou 6, por serem uma estimativa para completar a medida, são chamados **algarismos duvidosos**.

Em um resultado de medição, dizemos que os **algarismos significativos** obtidos e utilizados para expressar a medida são os algarismos corretos e o primeiro algarismo duvidoso. Para identificar quantos são os algarismos significativos de uma medida, devemos contá-los a partir do primeiro algarismo diferente de zero da esquerda para a direita.

Considere estes resultados de medições:

a. 165 m^3 → 3 algarismos significativos;

b. 0,086 kg → 2 algarismos significativos;

c. 14,5 m → 3 algarismos significativos;

d. 0,00052 km → 2 algarismos significativos.

Na representação do resultado de uma medição, os zeros à direita da vírgula podem ser empregados para evidenciar os algarismos significativos corretos, atribuindo ao zero, se necessário, o papel da representação do algarismo duvidoso. Por exemplo, na situação de Rodrigo e Luana, se a medida obtida fosse 14,5 cm, não seria possível saber com exatidão se é 14,50 cm ou 14,51 cm; assim, poderíamos representar a medida por 14,50 cm. Dessa maneira, teríamos 4 algarismos significativos: os algarismos corretos 1, 4 e 5, e o algarismo duvidoso 0.

Analise estes resultados de medições:

a. 0,02930 m → 4 algarismos significativos
- algarismo significativo duvidoso
- algarismos significativos corretos

b. 1,251 kg → 4 algarismos significativos
- algarismo significativo duvidoso
- algarismos significativos corretos

4 a. Exemplo de resposta: Fita métrica, milímetro; balança, grama; termômetro, grau Celsius; esfigmomanômetro, milímetro de mercúrio.
4 b. Exemplo de resposta: Trena, milímetro; recipiente graduado, litro ou decímetro cúbico.
4 c. Exemplo de resposta: Calendário, semana; relógio, minuto; cronômetro, segundo.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

4. **EM GRUPO** Pesquisem o nome e a graduação de cada instrumento usado para medir, de maneira apropriada, cada uma das grandezas a seguir. Depois, elaborem um cartaz ilustrado com as informações encontradas.

a. Cintura, massa, temperatura e pressão arterial de uma pessoa.

b. Dimensões lineares e capacidade de uma caixa-d'água.

c. Duração da gestação de um bebê, de um filme e de uma prova de natação em piscina.

5. Indique a quantidade de algarismos significativos nestes resultados de medições:

a. 24 m; **c.** 3,0015 g; **e.** 0,0097 mm;

b. 12,07 cm; **d.** 3.150 kg; **f.** 12.000 km.

5 a. 2 algarismos significativos.
5 b. 4 algarismos significativos.
5 c. 5 algarismos significativos.
5 d. 4 algarismos significativos.
5 e. 2 algarismos significativos.
5 f. 5 algarismos significativos.

Arredondamento

Em que situações do dia a dia você faz arredondamentos? Por quê? Acompanhe a situação a seguir.

As informações apresentadas na tabela a seguir orientam setores governamentais a elaborar os projetos para os anos subsequentes na área da Educação.

ODS 4

Total de matrículas no Ensino Médio (total, integrado e não integrado à educação profissional) no Brasil – 2018 a 2022

Ano	2018	2019	2020	2021	2022
Total de matrículas	7.709.929	7.465.891	7.550.753	7.770.557	7.866.695
Ensino Médio propedêutico	7.125.365	6.842.713	6.862.064	7.043.566	7.071.740
Integrado à educação profissional	584.564	623.178	688.689	726.991	794.955

Fonte: elaborado com base em INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira). **Censo Escolar da Educação Básica 2022: Resumo técnico**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2023.

Para realizar estimativas preliminares, não há necessidade de tamanha precisão. Por exemplo, para se fazer um orçamento de custos, o total de matrículas no Ensino Médio, ou seja, 7.866.695, em 2022, pode ser considerado próximo de 7 milhões e 900 mil, isto é, 7.900.000. Nesse caso, dizemos que fizemos um **arredondamento numérico**.

Arredondar um número significa trocá-lo por outro mais próximo de uma ordem escolhida.

Observação

No caso anterior, a ordem escolhida para o arredondamento do número 7.866.695 para 7.900.000 foi a centena de milhar, pois a parte substituída (866.695 por 900.000) é um número da ordem centena de milhar.

O arredondamento também pode ser necessário por limitação da técnica e do instrumento de medida usado. Por exemplo, as ordens centésimo de milímetro e décimo de milímetro que o paquímetro fornece não são confiáveis, porque, por mais cuidado que se tenha ao efetuar a medição, pode-se incorrer em erro. Isso vale para qualquer instrumento de medida.

Para obter um número próximo de outro por arredondamento para determinada ordem, deve-se observar o primeiro algarismo que está à direita do algarismo da ordem escolhida: se for 0, 1, 2, 3 ou 4, mantém-se a ordem; se for 5, 6, 7, 8 ou 9, adiciona-se 1 ao algarismo da ordem escolhida.

Analise os exemplos a seguir.

a. Na tabela anterior, em 2022, lemos o número 7.071.740 de matrículas no Ensino Médio propedêutico. Arredondando esse número para a centena de milhar, observamos o primeiro algarismo (7) à direita do algarismo da centena de milhar (0). Então, adicionamos 1 a 0 e obtemos o número arredondado: 7.100.000.
Se quisermos arredondar o número 7.071.740 para a unidade de milhão, observamos o primeiro algarismo (0) à direita do algarismo da unidade de milhão (7). Nesse caso, mantemos a ordem, isto é, o algarismo 7, e obtemos o número arredondado: 7.000.000.

unidade de milhão		centena de milhar	dezena de milhar	unidade de milhar		centena	dezena	unidade
7	.	0	7	1	.	7	4	0

b. Ainda na tabela anterior, há um caso que requer mais atenção: arredondar o total de matrículas no Ensino Médio em 2018, 7.709.929, para a unidade de milhar. Observe que, nesse caso, o primeiro algarismo (9) à direita do algarismo da unidade de milhar (9) é maior que 5; logo, adicionamos 1 ao 9 da unidade de milhar, que resulta em 10 unidades de milhar, ou seja, 1 dezena de milhar; assim, temos: 7.710.000.

c. O critério de arredondamento não se restringe aos números naturais. Dado o número racional 106,9838, podemos arredondá-lo para o milésimo, para o centésimo, para o décimo, para a unidade ou para a dezena. Assim, respectivamente, obtemos: 106,984; 106,98; 107,0; 107; 110.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

6. Na tabela "Total de matrículas no Ensino Médio (total, integrado e não integrado à educação profissional) no Brasil – 2018 a 2022", obtenha, por arredondamento, os números aproximados para a centena de milhar do total das matrículas e das matrículas referentes ao ensino integrado à educação profissional. **6.** Total: 7.700.000, 7.500.000, 7.600.000, 7.800.000, 7.900.000; integrado: 600.000, 600.000, 700.000, 700.000, 800.000.

7. Observe a lista de pesquisa de preço, em real, de material escolar que Andréa fez em algumas lojas.

Loja Já	
Caderno	12,10
Lápis de cor	12,10
Estojo	5,77
Caneta	2,90
Cola	3,20
Etiquetas	11,19

Papelaria Esquina	
Caderno	13,40
Lápis de cor	10,85
Estojo	6,30
Caneta	2,90
Cola	2,80
Etiquetas	10,99

Lojinha Escolar	
Caderno	11,89
Lápis de cor	11,70
Estojo	7,19
Caneta	2,99
Cola	2,90
Etiquetas	14,10

NELSON MATSUDA /ARQUIVO DA EDITORA

Empregando o arredondamento, faça um cálculo mental do custo total dos materiais em cada loja e verifique se, com R$ 50,00, Andréa pode fazer a compra de uma unidade de cada item em qualquer uma dessas lojas.

8. EM DUPLA Elabore uma lista com dez números, todos com oito algarismos, sendo pelo menos cinco números racionais não inteiros. Para cada um, defina uma ordem de arredondamento. Troque de lista com um colega, para que cada um resolva a lista do outro. Depois, destroquem e confiram as respostas. **8.** Respostas pessoais.

7. Andréa pode comprar nas duas primeiras lojas (aproximadamente R$ 47,00), mas na última (aproximadamente R$ 51,00), não.

Notação científica

Ainda considerando a tabela "Total de matrículas no Ensino Médio (total, integrado e não integrado à educação profissional) no Brasil – 2018 a 2022", os números que indicam o total, real ou arredondado para a centena de milhar, de matrículas no Ensino Médio no Brasil em 2022 podem ser escritos usando-se potências de dez com expoente inteiro, conforme apresentado a seguir:

- $7.866.695 = 786.669{,}5 \cdot 10^1 = 78.666{,}95 \cdot 10^2 = 7.866{,}695 \cdot 10^3 = 786{,}6695 \cdot 10^4 = 78{,}66695 \cdot 10^5 = 7{,}866695 \cdot 10^6$;
- $7.900.000 = 790.000{,}0 \cdot 10^1 = 79.000{,}00 \cdot 10^2 = 7.900{,}000 \cdot 10^3 = 790{,}0000 \cdot 10^4 = 79{,}00000 \cdot 10^5 = 7{,}900000 \cdot 10^6$.

Nos dois casos, real e arredondado, o último registro apresenta, na parte inteira do primeiro fator, um número maior ou igual a 1 e menor ou igual a 9; e, no segundo fator, uma potência de dez com expoente inteiro. Chamamos essa representação de **notação científica** do número.

Note que $7.866.695 = 7{,}866695 \cdot 10^6$ e $7.900.000 = 7{,}900000 \cdot 10^6 = 7{,}9 \cdot 10^6$. Assim, $7{,}866695 \cdot 10^6$ é a notação científica de 7.866.695, e $7{,}9 \cdot 10^6$ é a notação científica de 7.900.000.

Analise estes exemplos de números escritos em notação científica.

a. 781

Para que se tenha um só algarismo não nulo na parte inteira, multiplicamos por 10^{-2} e, para manter o valor do número dado, multiplicamos também por 10^2, pois:

$$10^{-2} \cdot 10^2 = 1$$

Assim:

$$781 = 781 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 7{,}81 \cdot 10^2$$

b. 3.014,41

$$3.014{,}41 = 3.014{,}41 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 3{,}01441 \cdot 10^3$$

c. 0,000092

$$0{,}000092 = 0{,}000092 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} = 9{,}2 \cdot 10^{-5}$$

A notação científica também pode ser utilizada para identificar e evidenciar os algarismos significativos de uma medida obtida.

Observe estes resultados de medições:

a. $3.125\ \text{m} = 3{,}125 \cdot 10^3\ \text{m} \rightarrow$ 4 algarismos significativos;

b. $10{,}91\ \text{cm} = 1{,}091 \cdot 10\ \text{cm} \rightarrow$ 4 algarismos significativos;

c. $0{,}00078\ \text{g} = 7{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{g} \rightarrow$ 2 algarismos significativos.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

9. EM DUPLA Elabore uma lista com dez números, todos com oito algarismos, sendo pelo menos cinco números racionais não inteiros. Troque sua lista com um colega, para que cada um escreva, em notação científica, os números da lista do outro. Depois, destroquem para conferir as respostas.

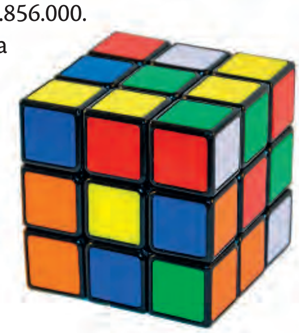
9. Respostas pessoais.

10. Qual é a maneira correta de escrever o número 0,00000092 em notação científica? **10.** Alternativa **b**.

a. $0{,}92 \cdot 10^{-7}$
b. $9{,}2 \cdot 10^{-7}$
c. $92 \cdot 10^{-6}$
d. $9{,}2 \cdot 10^{-8}$
e. $9{,}2 \cdot 10^{-5}$

11. A quantidade de combinações possíveis de um cubo mágico é 43.252.003.274.489.856.000. Arredonde esse número para a centena de quatrilhão e escreva o resultado em notação científica.

11. 43.300.000.000.000.000.000; $4{,}33 \cdot 10^{19}$.



ZORA AVAGYAN/SHUTTERSTOCK

Sistema Internacional de Unidades

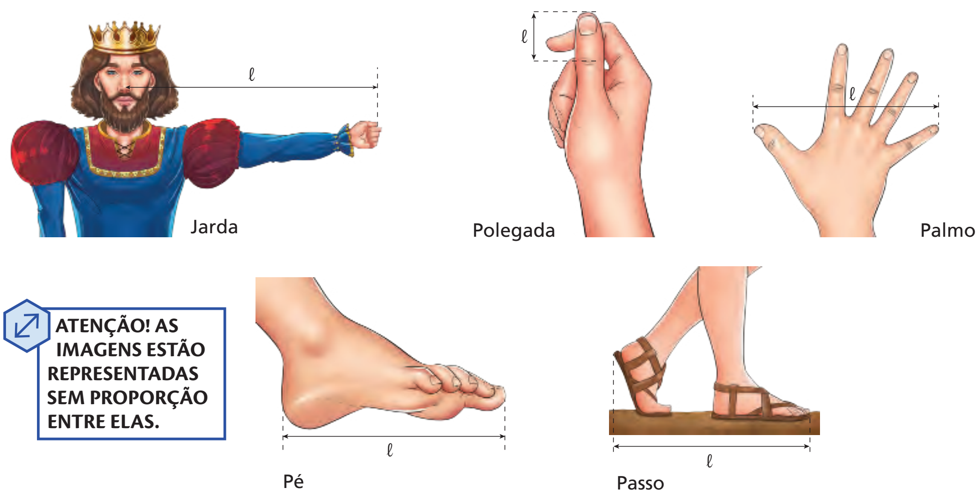
A origem das civilizações confunde-se com a necessidade humana de medir, e a evolução das civilizações caminhou paralelamente com o aperfeiçoamento da Metrologia (ciência da medição, que abrange todas as medições realizadas em um nível conhecido de incerteza, em qualquer domínio da atividade humana).

OBJETO DIGITAL
Podcast: Padronizar é preciso

Antes da existência do Sistema Internacional de Unidades (SI), cada povo tinha um sistema próprio de medidas. Em geral, as unidades tinham o corpo humano (palmo, pé, polegada, jarda, passo etc.) como referência, o que resultava em muitos problemas, principalmente para o comércio, já que essas medidas variavam de uma pessoa para outra.

O *podcast* complementa o tópico Sistema Internacional de Unidades contando como foi o processo de unificação de pesos e medidas na França, em 1790 e, depois, o desenvolvimento do Sistema métrico decimal. Esse OED favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103** e das **competências gerais 1** e **2** da BNCC, ao possibilitar espaço para discussão com os estudantes sobre a necessidade e a importância de padronizar as unidades de medida.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA /ARQUIVO DA EDITORA



O Sistema Métrico Decimal (SMD) surgiu na França, em 1799, e originou o SI, sancionado em 1960 pela Conferência Geral de Pesos e Medidas. De lá para cá, o SI não parou de evoluir, objetivando atender às crescentes exigências, sobretudo decorrentes dos avanços científicos e tecnológicos.

Das discussões até a 26ª Conferência Geral de Pesos e Medidas vingou a proposta de estabelecer relações entre as grandezas de base e constantes físicas fundamentais. O objetivo era tornar válidas, ao longo do tempo, as definições das unidades de base para todas as culturas.

Unidades de base do SI

As **unidades de base** são assim chamadas porque, quando combinadas, originam qualquer outra unidade do SI. No quadro a seguir, constam os nomes e os símbolos das grandezas de base e das unidades de base do SI.

Grandezas de base e unidades de base do SI

Grandeza de base	Símbolo da medida	Unidade de base	Símbolo da unidade
comprimento	l, x, r, entre outros	metro	m
massa	m	quilograma	kg
tempo (duração)	t	segundo	s
corrente elétrica	I, i	ampere	A
temperatura termodinâmica	T	kelvin	K
quantidade de substância	n	mol	mol
intensidade luminosa	I_v	candela	cd

Fonte: elaborado com base em BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES. **SI Brochure: The International System of Units (SI)**. 9. ed. Sèvres: BIPM, 2019. Disponível em: https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure. Acesso em: 25 jul. 2024.

Em 2018, a 26ª Conferência Geral de Pesos e Medidas determinou redefinições das unidades de medida quilograma (massa), ampere (corrente elétrica), kelvin (temperatura termodinâmica) e mol (quantidade de substância). Essas unidades foram redefinidas com base em **constantes da natureza,** que são estáveis e imutáveis (de acordo com as teorias científicas atuais), como a medida da velocidade da luz no vácuo.

Observe como as definições das sete unidades de base se modificaram no decorrer do tempo.

- **Unidade de medida de comprimento – metro (m)**

  1889 – Definição do metro baseada no protótipo internacional de liga metálica de platina-irídio, na medida de temperatura da fusão do gelo.

  1983 – O metro é a medida do comprimento do trajeto da luz percorrido no vácuo durante um intervalo de tempo que mede $\frac{1}{299.792.458}$ de segundo.

- **Unidade de medida de massa – quilograma (kg)**

  1889 – O quilograma é a medida da massa do protótipo internacional de liga metálica de platina-irídio.

  2019 – Redefinida em função da constante de Planck igual a $6{,}62606957 \cdot 10^{-34}$ J · s.

- **Unidade de medida de tempo – segundo (s)**

  Antes de 1960 – O segundo é a medida de tempo de $\frac{1}{86.400}$ do dia solar médio.

  1960 – O segundo é a medida de tempo de $\frac{1}{31.556.925{,}9747}$ do ano tropical de 1900.

  1968 – O segundo é a medida de tempo de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133.

- **Unidade de medida de corrente elétrica – ampere (A)**

  1948 – O ampere é a medida da intensidade de uma corrente elétrica constante que, se mantida em dois condutores paralelos, retilíneos, de comprimento infinito e de seção circular desprezível, situados a 1 metro entre si, no vácuo, produz entre esses condutores uma força igual a $2 \cdot 10^{-7}$ newton por metro.

  2019 – Redefinida como a medida da corrente elétrica correspondente à passagem de $1{,}602176565 \cdot 10^{-19}$ cargas elementares por segundo.

- **Unidade de medida de temperatura termodinâmica – kelvin (K)**

  1889 – Para a definição dos protótipos do metro e do quilograma, foi estabelecido o uso da escala centígrada do termômetro de hidrogênio e a medida de temperatura de fusão do gelo como referência.

  2019 – Redefinida em função da constante de Boltzmann, que relaciona a medida de temperatura à energia molecular, para $1{,}3806488 \cdot 10^{23}$ J · K^{-1}.

- **Unidade de quantidade de substância – mol (mol)**

  1971 – O mol é a quantidade de substância de um sistema que contém tantas entidades elementares quanto os átomos que existem em 12 gramas de carbono-12.

  2019 – Redefinida em função da constante de Avogadro para $6{,}02214129 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

- **Unidade de medida de intensidade luminosa – candela (cd)**

  1979 – A candela é a medida da intensidade luminosa, em uma dada direção, de uma fonte que emite uma radiação monocromática de frequência $540 \cdot 10^{12}$ hertz e que tem uma intensidade radiante nessa direção de $\frac{1}{683}$ watts por esferorradiano.

Fonte: elaborado com base em BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES. **SI Brochure: The International System of Units (SI)**. 9. ed. Sèvres: BIPM, 2019. Disponível em: https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure. Acesso em: 25 jul. 2024.

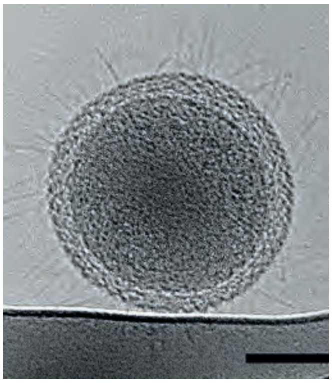
Observação

A medida da massa molar de carbono-12 é exatamente igual a 12 gramas por mol, ou seja, M(C-12) = 12 g/mol.

Prefixos

Para cada grandeza do SI, uma unidade de medida é escolhida para servir de base, mas nem sempre ela é conveniente. Por exemplo, o metro é uma boa unidade para medir o comprimento de uma sala de aula, mas não é para medir a espessura de uma lente de contato ou a distância entre as capitais de dois estados brasileiros.

Observe esta imagem e analise os dados apresentados em sua legenda.


BERKELEY LAB

Estrutura interna de uma bactéria ultrapequena. Esta imagem de tomografia crioeletrônica foi obtida a partir de uma reconstrução 3-D com ampliação de 1.000.000 de vezes. O comprimento do diâmetro dessa bactéria mede aproximadamente 300 nanômetros.

Observação

Os símbolos das unidades de medida são invariáveis, ou seja, não podem ser seguidos por pontos, como os das abreviaturas (exceto no final de uma sentença), nem por *s* para a formação de plural.

Para medidas muito grandes ou muito próximas de zero, como a da bactéria da imagem anterior, aplicamos **prefixos** às unidades de base. Em novembro de 2022, na 27ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, foram definidos quatro novos prefixos para medidas extremamente grandes ou pequenas: ronna, quetta, ronto e quecto. Observe no quadro a seguir.

Prefixos SI

Fator	Nome	Símbolo	Fator	Nome	Símbolo
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	quilo	k	10^{-3}	mili	m
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	µ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y
10^{27}	ronna	R	10^{-27}	ronto	r
10^{30}	quetta	Q	10^{-30}	quecto	q

Fonte: elaborado com base em BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES. **SI Brochure: The International System of Units (SI)**. 9. ed. Sèvres: BIPM, 2019. Disponível em: https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure. Acesso em: 25 jul. 2024.

Considere os exemplos:

a. A distância de Belo Horizonte a Maceió mede 1.443.000 m ou 1.443 km.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL /ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado com base em IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 93.

b. A medida da espessura (comprimento do diâmetro) de fios de cabelo de europeus e seus descendentes varia de 0,000040 m a 0,000100 m ou de 40 µm a 100 µm.

Com o avanço das ciências e da tecnologia, tanto os prefixos que indicam grandes medidas quanto aqueles cujos módulos se aproximam muito do zero passaram a ser usados com mais frequência. Leia o texto a seguir.

SERGEYKLOPOTOV/ISTOCK/GETTY IMAGES

O micrômetro é um instrumento usado para medir dimensões lineares de objetos, como fios de cabelo, com precisão da ordem de 10^{-5} m.

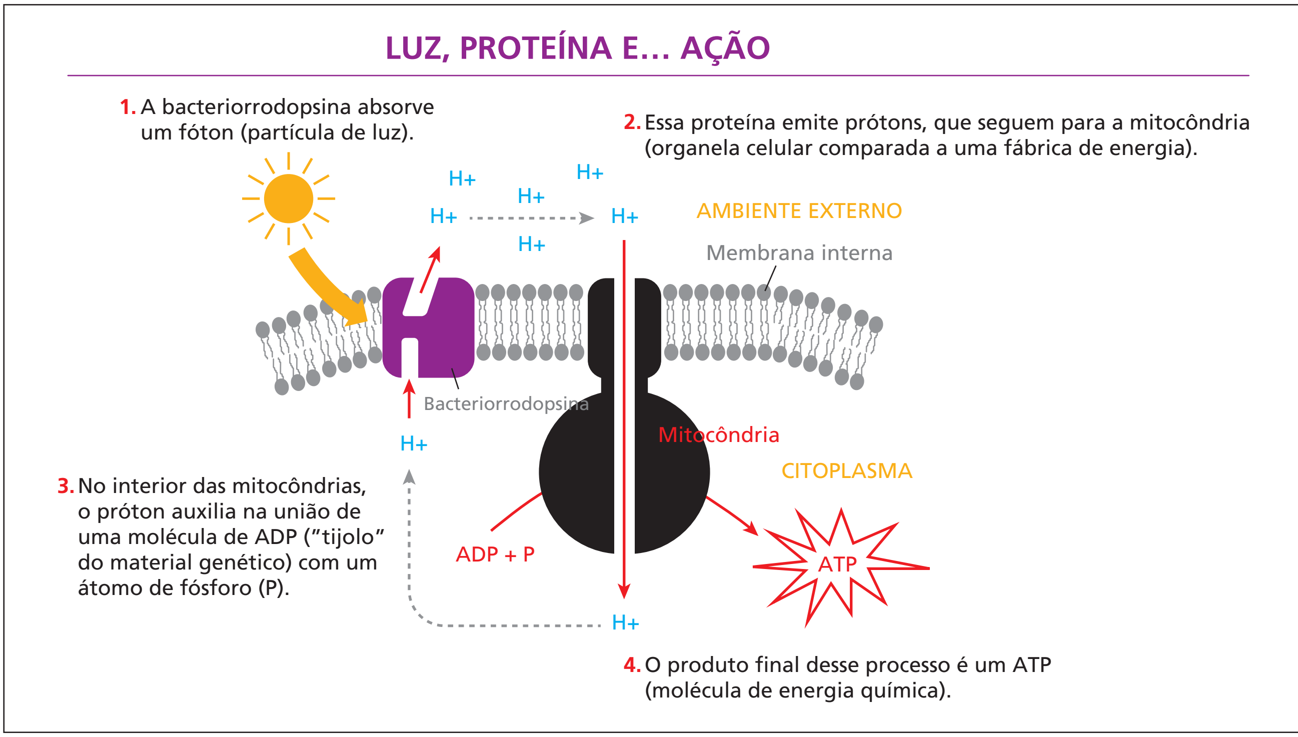
A hiperveloz fotobiologia estrutural

Fotobiologia estrutural é a ciência que estuda mudanças nas estruturas das células por meio da absorção de luz.

[...] na fotobiologia estrutural, há necessidade de registrar movimentos na faixa do picossegundo (trilionésimos de segundo), ou seja, 100 milhões de vezes mais rápidos do que os detectados pela RMN (ressonância magnética nuclear).

Que eventos são esses? E como detectá-los?

Eles ocorrem nos processos de fotossíntese e visão dos animais (inclusive humanos) e se iniciam quando certas proteínas (fotorreceptoras) absorvem um fóton (partícula de luz) e emitem prótons. Isso faz com que essas partículas positivas desencadeiem reações envolvidas nesses processos biológicos, que duram poucos picossegundos. [...]



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Esquema da liberação e da transferência de prótons pela bacteriorrodopsina na fotossíntese em um microrganismo (*H. salinarum*), processo que ocorre em trilionésimos de segundo.

A observação desses processos em escala atômica só foi possível depois da invenção do *laser* de elétrons livres [...]. Com esse equipamento, é possível gerar pulsos na faixa dos femtossegundos – cerca de mil vezes mais rápido que o processo desencadeado pelo próton. [...]

LUZ, proteína e...ação. **Ciência Hoje: Revista de divulgação científica do Instituto Ciência Hoje**, Rio de Janeiro, v. 346, p. 25, ago. 2018.

Essa matéria indica que as reações envolvidas em processos biológicos de fotossíntese e visão dos animais (inclusive humanos) ocorrem em picossegundos: $1 \text{ ps} = 0{,}000000000001 \text{ s} = 10^{-12} \text{ s}$. E o *laser* de elétrons livres gera pulsos na ordem de femtossegundos: $\text{fs} = 0{,}000000000000001 \text{ s} = 10^{-15} \text{ s}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

12. Considerando que o diâmetro de determinada bactéria mede aproximadamente 200.000 nanômetros, expresse essa medida em micrômetro.

12. 200 μm

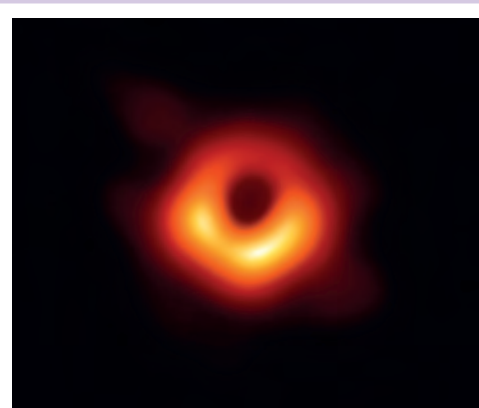
13. O buraco negro apresentado na imagem está a 53,5 milhões de anos-luz do planeta Terra e sua medida de massa é 6,5 bilhões de vezes a medida de massa do Sol.

Fonte: elaborado com base em CAIRES, Luiza. Dia histórico para a ciência: revelada a primeira imagem de buraco negro. **Jornal da USP**, São Paulo, 10 abr. 2019.

13 a. $1{,}3 \cdot 10^{40}$ kg

a. Considerando que a medida aproximada da massa do Sol é aproximadamente $2 \cdot 10^{30}$ kg, qual seria a medida da massa desse buraco negro?

b. Por razões históricas, a unidade de base SI de medida de massa é o quilograma (kg). Porém, os múltiplos e os submúltiplos da unidade de medida de massa são definidos a partir do grama. Qual é a medida da massa do buraco negro na unidade de prefixo *yotta*? **13 b.** $1{,}3 \cdot 10^{19}$ Yg


SUN ZIFA/IMAGINECHINA/AFP

Primeira imagem real de um buraco negro supermassivo. Foto de 2019.

Unidades derivadas do SI

Quando combinamos as unidades de base, obtemos todas as outras unidades do SI, chamadas de **unidades derivadas**. Por exemplo, a medida da velocidade obtida pela relação entre a medida da distância e a medida do tempo é uma grandeza derivada. Considere os exemplos de grandezas derivadas e suas respectivas unidades de medida.

Exemplos de grandezas derivadas e suas respectivas unidades de medida

Grandeza derivada	Símbolo da medida	Unidade derivada	Símbolo da unidade
área	A	metro quadrado	m^2
volume	V	metro cúbico	m^3
velocidade	v	metro por segundo	m/s
aceleração	a	metro por segundo ao quadrado	m/s^2
número de ondas	σ	inverso do metro	m^{-1}
massa específica	ρ	quilograma por metro cúbico	kg/m^3
densidade superficial	ρ_A	quilograma por metro quadrado	kg/m^2
volume específico	v	metro cúbico por quilograma	m^3/kg
densidade de corrente	j	ampere por metro quadrado	A/m^2
campo magnético	H	ampere por metro	A/m
concentração	c	mol por metro cúbico	mol/m^3
concentração de massa	ρ, γ	quilograma por metro cúbico	kg/m^3
luminância	L_v	candela por metro quadrado	cd/m^2
índice de refração	n	adimensional	–
permeabilidade relativa	μ_r	adimensional	–

Fonte: elaborado com base em BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES. **SI Brochure: The International System of Units (SI)**. 9. ed. Sèvres: BIPM, 2019. Disponível em: https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure. Acesso em: 25 jul. 2024.

Analise a seguinte situação.

Em 1999, a bordo de um balão, o suíço Bertrand Piccard e o inglês Brian Jones voaram 19 dias, 21 horas e 47 minutos para dar a volta ao mundo sem escalas. A dupla percorreu 45.755 quilômetros. A seguir, vamos calcular a medida da velocidade média, em metro por segundo, dessa viagem.

A medida da velocidade média v_m é dada pela razão entre a medida da distância percorrida d e a medida do tempo gasto t para percorrê-la.

$d = 45.755 \text{ km} = 45.755.000 \text{ m}$

$t = (19 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)\text{s} + (21 \cdot 60 \cdot 60)\text{s} + (47 \cdot 60)\text{s} = 1.720.020 \text{ s}$

$$v_m = \frac{d}{t} = \frac{45.755.000 \text{ m}}{1.720.020 \text{ s}} \simeq 26{,}6 \text{ m/s}$$

Portanto, Piccard e Jones viajaram a uma velocidade média de medida aproximadamente igual a 26,6 m/s.

Observação

O símbolo $\simeq$ é usado para indicar uma aproximação.
$v_m \simeq 26{,}6$ m/s significa que a "medida da velocidade média é aproximadamente igual a vinte e seis vírgula seis metros por segundo".

Atividades propostas

Registre em seu caderno

14. ARGUMENTAÇÃO Imagine que, em uma mão, você tenha 1 kg de algodão e, na outra, 1 kg de chumbo. O que "pesa" mais: o algodão ou o chumbo? **14 b.** Chumbo tem maior medida de massa específica, 11,3 g/cm³; o "peso" é o mesmo em ambas as mãos.

NELSON MATSUDA / ARQUIVO DA EDITORA

a. Se lhe fosse pedido para responder a essa pergunta rapidamente, qual seria sua resposta? **14 a.** Resposta pessoal.

b. Sabendo que a medida de massa específica é a razão entre a medida de massa, em grama, e a medida do volume correspondente, em centímetro cúbico, pesquise qual matéria têm maior medida de massa específica: algodão ou chumbo. Depois, responda novamente à questão inicial desta atividade.

15. Um bloco de granito está apoiado sobre uma superfície plana e horizontal, sem se mover. Esse bloco tem formato de paralelepípedo com medida de altura de 16 cm, medida de largura de 25 cm e medida de comprimento de 75 cm. Sabendo que a medida da massa específica do granito é $2{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3, calcule a medida da massa *m* desse bloco. **15.** 75 kg

16. Analise o resultado da prova de 1.500 m livre masculino no Campeonato Mundial de Atletismo de 2022.

> Realizando a prova em 3 minutos e 29 segundos, o corredor britânico Jake Wightman foi o vencedor dos 1.500 m livre, tornando-se campeão mundial pela primeira vez, na competição que ocorreu em Oregon, nos EUA.

Fonte: elaborado com base em WORLD Athletics Championships, Oregon 2022. **World Athletics**. Disponível em: https://worldathletics.org/competition/calendar-results/results/7137279?eventId=10229502. Acesso em: 25 jul. 2024.. Acesso em: 25 jul. 2024.

Calcule, em metro por segundo e em quilômetro por hora, a medida da velocidade média do vencedor dessa prova. **16.** Aproximadamente 7,2 m/s e 25,92 km/h.

17. ARGUMENTAÇÃO Com uma barra de alumínio, um serralheiro faz o contorno retangular de uma grade. Nos cálculos, despreze a medida da largura da barra de alumínio.

a. Qual é a maior medida de área de grade que ele consegue construir com uma barra cujo comprimento mede 6 m? Quais são as medidas de comprimento dos lados desse retângulo?

b. Se ele tiver uma barra com o dobro da medida de comprimento da barra do item **a**, a maior medida de área de grade que ele conseguirá fazer será também o dobro da medida de área anterior?

c. Se ele tiver uma barra com o triplo da medida de comprimento da barra do item **a**, a maior medida de área de grade que ele conseguirá fazer será também o triplo da medida de área anterior?

18. EM DUPLA ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS Elabore um problema envolvendo uma grandeza derivada e sua unidade de medida. Podem ser utilizadas grandezas como velocidade ou massa específica. Depois, peça a um colega que resolva a sua atividade e você deve resolver a dele. **18.** Resposta pessoal.

Além das unidades do SI

17 a. 2,25 m^2; as medidas de comprimento dos lados são iguais a 1,5 m.

17 b. Não, será 4 vezes maior que a medida de área anterior.

17 c. Não, será 9 vezes maior que a medida de área anterior.

ODS 4

Os esforços precursores da Metrologia nasceram da necessidade histórica de viabilizar a expansão comercial. Em tempos mais atuais, a necessidade de compartilhar os avanços da tecnologia e das ciências também constitui um fator fundamental para a busca do estabelecimento de uma linguagem universal. Por isso e por sua simplicidade, o uso do SI é recomendado em todos os campos da ciência e da tecnologia.

No entanto, embora a necessidade histórica tenha impulsionado as mudanças para padronização e consequente intercâmbio de ideias e projetos, existem unidades de medida que fazem parte da preservação da cultura dos povos. Assim, atualmente, ainda permanece o emprego de unidades de medida específicas fora do SI, como as unidades de medida de tempo minuto, hora e dia, porque elas estão na raiz de nossa cultura. Em trabalhos científicos, ao fazer uso dessas unidades, é importante mostrar a relação delas com as unidades do SI.

Unidades fora do SI

No quadro a seguir, são apresentadas algumas unidades de medida fora do SI, largamente em uso nos dias de hoje.

Algumas unidades fora do SI

Grandeza	Unidade	Símbolo	Relação com o SI
tempo	minuto	min	1 min = 60 s
tempo	hora	h	1 h = 3.600 s
tempo	dia	d	1 d = 86.400 s
volume	litro	L ou ℓ	1 L = 1 dm^3
massa	tonelada	t	1 t = 1.000 kg
energia	elétronvolt	eV	1 eV $\simeq 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J

continua

continuação

Algumas unidades fora do SI

Grandeza	Unidade	Símbolo	Relação com o SI
pressão	bar	bar	10 bar = 100 kPa
pressão	milímetro de mercúrio	mmHg	1 mm de Hg ≃ 133,322 Pa
comprimento	angstrom	Å	1 Å = 10^{-10} m
comprimento	milha náutica	M	1 M = 1.852 m
força	dina	dyn	1 dyn = 10^{-5} N

Fonte: elaborado com base em BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES. **SI Brochure: The International System of Units (SI)**. 9. ed. Sèvres: BIPM, 2019. Disponível em: https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure. Acesso em: 25 jul. 2024.

Atividade resolvida

R2. Retomando o feito de Piccard e Jones, que viajaram a uma medida de velocidade média de 26,6 m/s, calcular essa medida de velocidade em quilômetro por hora.

▶ **Resolução**

Já tínhamos calculado essa medida de velocidade usando a unidade de medida metro por segundo, derivada do SI. Para ter a medida em quilômetro por hora, basta fazermos a conversão de unidades.

$$v_m \simeq 26{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 26{,}6 \cdot \frac{\frac{1}{1.000}\,\text{km}}{\frac{1}{3.600}\,\text{h}} = 26{,}6 \cdot \frac{3.600}{1.000}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 26{,}6 \cdot 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 95{,}76\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

A medida da velocidade média do balão de Piccard e Jones foi aproximadamente 95,76 km/h.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

19 a. Sim, pois 1 m/s = 3,6 km/h.
19 b. Sim, o fator de conversão é o inverso de 3,6, ou seja, basta dividir a medida de velocidade em km/h por 3,6 para obter a respectiva medida de velocidade em m/s.

19. ARGUMENTAÇÃO Na resolução da **atividade resolvida R2**, para fazer a conversão de m/s para km/h, a medida de velocidade 26,6 m/s foi multiplicada por 3,6.

a. Isso vale para converter qualquer outra medida de velocidade em m/s para km/h? Explique.

b. Para converter uma medida de velocidade em km/h para m/s, há algum fator de conversão? Se sim, qual?

20. A relação entre as unidades de medida de temperatura termodinâmica Kelvin (T_K) e grau Celsius (T_C) é linear e dada pela equação $T_K = T_C + 273{,}15$. Assim, o zero Kelvin (zero absoluto), medida da temperatura em que a energia cinética da matéria é igual a zero, corresponde a −273,15 °C, pois, se $T_K = 0$, então $0 = T_C + 273{,}15$ nos leva a $T_C = -273{,}15$. Lembrando que o ponto de fusão da água ocorre quando $T_C = 0$ e que o ponto de ebulição da água ocorre quando $T_C = 100$, responda às questões.

a. Qual é a medida da temperatura, em Kelvin, do ponto de fusão da água? 20 a. 273,15 K

b. Qual é a medida da temperatura, em Kelvin, do ponto de ebulição da água? 20 b. 373,15 K

Unidades da informática

Você já deve ter ouvido falar em *bytes* e *megabytes* quando precisa verificar a capacidade de armazenamento de dados do celular ou enviar um arquivo por *e-mail*. Mas sabe o que realmente essas palavras representam?

O *byte* é a menor unidade de medida de armazenamento de dados, constituída por 8 *bits*. Essa unidade se relaciona ao sistema binário (base 2), pois cada *bit* pode valer apenas dois símbolos, 0 ou 1 (no computador, correspondem, respectivamente, a "circuito aberto" e a "circuito fechado"), e cada conjunto de 8 *bits* corresponde a um caractere (letra, algarismo ou qualquer outro sinal gráfico). Assim, podemos dizer que a medida de armazenamento de cada caractere é 1 *byte*.

A informática tem suas próprias unidades e "empresta" do SI a nomenclatura dos prefixos:

- *byte* (B) é a menor unidade de medida de armazenamento de dados;
- *kilobyte* (kB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *bytes*, ou seja, 1 kB = 2^{10} B;
- *megabyte* (MB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *kilobytes*, ou seja, 1 MB = 2^{10} kB = 2^{20} B;
- *gigabyte* (GB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *megabytes*, ou seja, 1 GB = 2^{10} MB = 2^{30} B;
- *terabyte* (TB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *gigabytes*, ou seja, 1 TB = 2^{10} GB = 2^{40} B;
- *petabyte* (PB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *terabytes*, ou seja, 1 PB = 2^{10} TB = 2^{50} B;
- *exabyte* (EB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *petabytes*, ou seja, 1 EB = 2^{10} PB = 2^{60} B;
- *zettabyte* (ZB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *exabytes*, ou seja, 1 ZB = 2^{10} EB = 2^{70} B;
- *yottabyte* (YB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *zettabytes*, ou seja, 1 YB = 2^{10} ZB = 2^{80} B.

Agora, vamos comparar os **fatores de conversão** dos prefixos no SI e na informática.

No SI, os fatores de conversão que definem os prefixos são potências de 10:

- 10 para os três primeiros múltiplos e 10^{-1} para os três primeiros submúltiplos, como nos exemplos a seguir.
  a. Para transformar 19 m em dam, fazemos $19\text{ m} = 19 \cdot 10^{-1}\text{ dam} = 1{,}9\text{ dam}$.
  b. Para transformar 19 cm em mm, fazemos $19\text{ cm} = 19 \cdot 10^{1}\text{ mm} = 190\text{ mm}$.
- 10^3 (1.000) ou 10^{-3} (0,001) para os demais prefixos, como nos exemplos a seguir.
  a. Para transformar 7.804 m em Tm (terâmetro), fazemos:
  $7.804\text{ m} = 7.804 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}\text{ Tm} = 7{,}804 \cdot 10^{-9}\text{ Tm}$
  b. Para transformar 0,026 m em nm (nanômetro), fazemos:
  $0{,}026\text{ m} = 0{,}026 \cdot 10^{3} \cdot 10^{3} \cdot 10^{3}\text{ nm} = 0{,}026 \cdot 10^{9}\text{ nm} = 2{,}6 \cdot 10^{7}\text{ nm}$

Na informática, os fatores de conversão que definem os prefixos são potências de 2:

- 2^{10} (1.024) para transformar uma unidade para a unidade imediatamente inferior;
- 2^{-10} (1.024^{-1}) para transformar uma unidade para a unidade imediatamente superior.

Observe que $10^3 \simeq 2^{10}$, pois $10^3 = 1.000$ e $2^{10} = 1.024 \simeq 1.000$.

Por estarem mais acostumadas a trabalhar e a fazer estimativas com potências de 10, na prática, é comum as pessoas arredondarem 1.024 para 1.000 e considerarem que 1 GB = 1.000 MB. Esse procedimento nos leva a cometer um erro de 2,4%, pois $\frac{1.024 - 1.000}{1.000} = 0{,}024 = 2{,}4\%$.

Observação

Atenção!
É importante ressaltar que arredondamentos acumulados geram grandes erros.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

21. Qual é a medida de armazenamento de dados, em *byte*, de um *notebook* com um disco rígido de 2 *terabytes*?

21. Alternativa **b**.

ALEXANDRA ROTANOVA/SHUTTERSTOCK

a. 2^{40} *bytes*
b. 2^{41} *bytes*
c. 2^{42} *bytes*
d. 2^{80} *bytes*
e. 2^{2} *bytes*

22. Quantos arquivos de 8 MB cabem em um serviço gratuito de transmissão de dados com capacidade de 10 GB? Quantos arquivos podem ser transmitidos por minuto?

22. 1.280 arquivos; não é possível responder à questão por falta de dados.

23. **ARGUMENTAÇÃO** Ao usar fator de conversão 10^3 em vez de 2^{10} nas unidades de informática, cometemos um erro de 2,4%. Ao converter 1 *yottabyte* em *byte*, usando o fator de conversão 10^3 em vez de 2^{10}, o erro percentual permanece em 2,4%? Explique.

23. Não, o erro aumenta para cerca de 21%.

Chef de cozinha

OBJETO DIGITAL
Vídeo: Sabores da caatinga

O vídeo complementa o texto da seção *Trabalho e juventudes* apresentando como algumas plantas alimentícias não convencionais (PANCs) podem ser utilizadas na culinária. A utilização dessas plantas visa aproveitar ao máximo o que a natureza tem a oferecer enriquecendo a alimentação da população.

FG TRADE/E+/GETTY IMAGES

Chef de cozinha em São Paulo (SP). Foto de 2023.

Chef de cozinha, ou simplesmente *chef*, é um termo proveniente da língua francesa – *chef de cuisine* – e designa o especialista na arte e nas técnicas culinárias, responsável por planejar e administrar uma cozinha profissional, desde a elaboração do cardápio até a criação e a execução dos pratos.

No dia a dia, essa função exige certa versatilidade: supervisiona toda a equipe que trabalha na cozinha, organiza a ordem dos pedidos, verifica a disponibilidade e a qualidade dos ingredientes, gerencia estoques de produtos, realiza pedidos a fornecedores, garante o cumprimento das normas de segurança e higiene do local e certifica-se de que os pratos estejam de acordo com suas instruções.

Trata-se de uma profissão em constante crescimento, pois um fluxo intenso de pessoas busca diariamente restaurantes, bares e lanchonetes para provar diversos alimentos. Além disso, o mercado de trabalho para *chefs* tem se tornado mais abrangente, com muitos desses profissionais atuando tanto em cozinhas especializadas como em ***food trucks***, feiras, cantinas de escolas, restaurantes de hotéis, indústria alimentícia etc.

Para se tornar *chef* de cozinha, é desejável que o profissional tenha curso técnico ou superior (graduação em Gastronomia) na área. Nos cursos, os estudantes aprendem as bases das cozinhas brasileira e internacional, da confeitaria, da panificação e das sobremesas. Também são abordados assuntos relacionados a **microbiologia**, **bioquímica** e **segurança alimentar**, entre outros.

Food trucks: *trailers*, furgões ou caminhões adaptados para comercializar diferentes tipos de comida de forma itinerante.

Microbiologia: área da Biologia que estuda os micro-organismos.

Bioquímica: área da Biologia que estuda os processos químicos que ocorrem nos seres vivos.

Segurança alimentar: direito de todos ao acesso regular e permanente a alimentos básicos de qualidade.

2. Exemplo de resposta: Desenvolvimento de cardápios saudáveis, prestação de consultoria de alimentos para empresas, ministrar aulas ou fazer pesquisas nas áreas de gastronomia e nutrição, entre outras.

Atividades

Registre em seu caderno

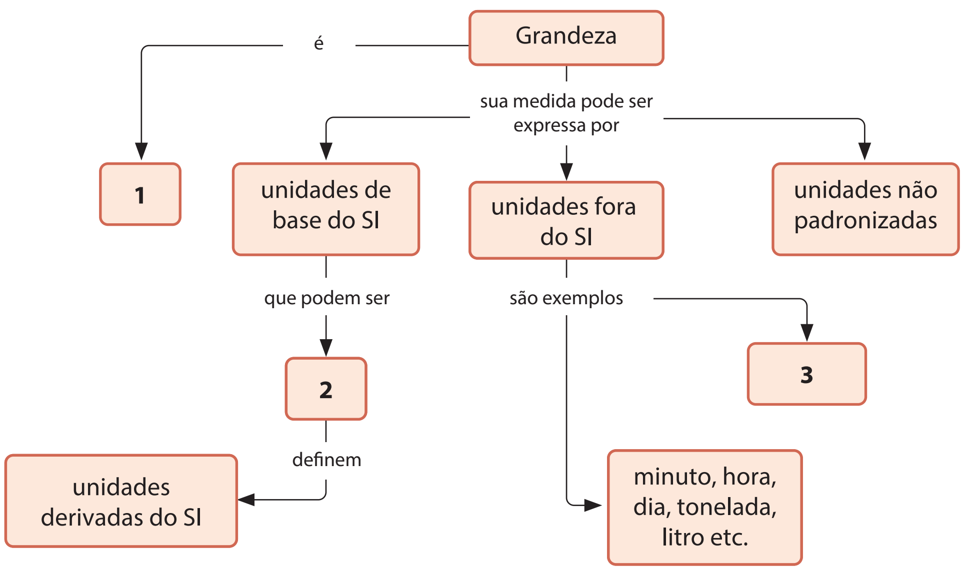
1. Em sua opinião, quais são os pontos positivos e negativos de atuar como *chef* de cozinha? **1.** Resposta pessoal.
2. Pesquise outras opções de área de atuação de um *chef* de cozinha. Depois, compartilhe o resultado da pesquisa com a turma.
3. Cite alguns exemplos de situações em que um *chef* de cozinha lida com grandezas.
4. Que instrumentos de medida um *chef* de cozinha pode utilizar em seu dia a dia? **4.** Exemplo de resposta: Balança, cronômetro, termômetro, copo medidor etc.
5. Imagine que você tenha os recursos necessários para abrir um *food truck*. Onde ficaria localizado? Qual seria o perfil de seus clientes? Que tipo de produto você comercializaria? Como lucraria? Justifique suas respostas e compartilhe-as com os colegas. **5.** Respostas pessoais.

3. Exemplo de resposta: Medir a **massa** de ingredientes, medir o **tempo** de cozimento dos alimentos ou do preparo de um prato, ajustar a medida da **temperatura** em que algo deve assar no forno ou ser conservado na geladeira, separar a medida de **volume** de um líquido para uma receita etc.

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

Conexões entre conceitos. A – 3; B – 2; C – 1

A. unidades da informática

B. metro, quilograma, segundo, ampere, kelvin, mol e candela

C. tudo aquilo que pode ser medido

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

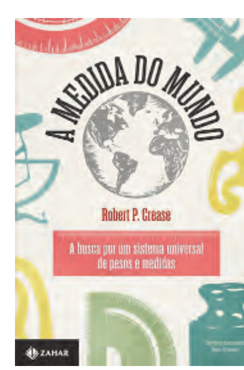
Livro

A medida do mundo: a busca por um sistema universal de pesos e medidas

Robert P. Crease

Rio de Janeiro: Zahar, 2010.

O livro conta a história dos sistemas de medidas e aparelhos de medição até chegar ao SI adotado hoje pela maioria dos países do mundo.



REPRODUÇÃO/EDITORA ZAHAR

Software

CmapTools

Luciana e Sá Alves e Gelson Rocha

Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Metrologia e Sociedade Brasileira de Física, 2019.

O CmapTools é um programa gratuito exclusivo para construção de mapas conceituais. Além de outras funcionalidades, a ferramenta permite a edição colaborativa e o compartilhamento de mapas conceituais entre diferentes usuários.

Disponível em: https://cmap.ihmc.us/cmaptools/. Acesso em: 9 set. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Uma cisterna de 240 L já está com 104 L. Para enchê-la, é necessário usar um balde de 8 L por pelo menos: **Q1.** Alternativa **c.**

a. 30 vezes. **b.** 13 vezes. **c.** 17 vezes. **d.** 43 vezes.

Q2. Na questão anterior, podemos considerar grandeza e unidade de medida, nessa ordem: **Q2.** Alternativa **b.**

a. litro e volume. **b.** volume e balde. **c.** cisterna e balde. **d.** litro e balde.

Q3. Márcia usou uma régua graduada em milímetros para medir o comprimento de uma caneta e registrou uma medida de 15,47 cm. Qual é o algarismo significativo duvidoso dessa medida? **Q3.** Alternativa **d.**

a. 1 **b.** 5 **c.** 4 **d.** 7

Q4. O assistente de uma veterinária mediu e anotou, em quilograma, as medidas de massa de quatro gatos: 3,149; 3,061; 3,950; 3,892. Para preencher a ficha de cada gato, ele arredondou essas medidas para o décimo de quilograma, registrando, respectivamente, os valores: **Q4.** Alternativa **a.**

a. 3,1; 3,1; 4,0; 3,9.
b. 3,1; 3,6; 4,0; 3,9.
c. 3,1; 3,0; 3,9; 3,8.
d. 3,1; 3,2; 4,0; 3,9.

Q5. A distância entre um planeta e suas estrelas é medida em Unidade Astronômica (UA), que equivale a 149.597.870,700 km. A distância de Júpiter ao Sol mede 1,5 UA, ou seja, aproximadamente: **Q5.** Alternativa **a.**

a. $2{,}25 \cdot 10^{11}$ m.
b. $2{,}25 \cdot 10^{11}$ km.
c. $2{,}25 \cdot 10^{8}$ m.
d. $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

Q6. O período orbital da Lua dura 27,32 dias. Esse período corresponde a: **Q6.** Alternativa **d.**

a. 27 d 32 h.
b. 27 d 3 h 2 min.
c. 7 h 40 min 48 s.
d. 27 d 7 h 40 min 48 s.

Q7. Ana quer fazer *backup* dos arquivos de seu computador, que já ocupam 2 TB. Usando *pen drives* de 64 GB, ela vai precisar, no mínimo, de: **Q7.** Alternativa **d.**

a. 64 *pen drives*.
b. 2^{10} *pen drives*.
c. 16 *pen drives*.
d. 2^{5} *pen drives*.

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7
Compreender e distinguir os conceitos de grandeza e medida.	X	X					
Reconhecer algarismos significativos em um resultado de medição.			X				
Aplicar notação científica e arredondamento em medidas.				X	X		
Reconhecer, relacionar e aplicar grandezas, unidades e prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI) e fora dele.						X	
Empregar corretamente unidades da informática.							X

Capítulo 2
CONJUNTOS


DAVE EINSEL/GETTY IMAGES

Australopithecus


KATJA LENZ/PICTURE ALLIANCE/GETTY IMAGES

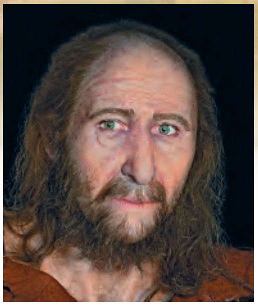
Homo habilis


P.PLAILLY/E.DAYNES/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Homo erectus


STEFAN ZIESE/AKG-IMAGES/ALBUM/FOTOARENA

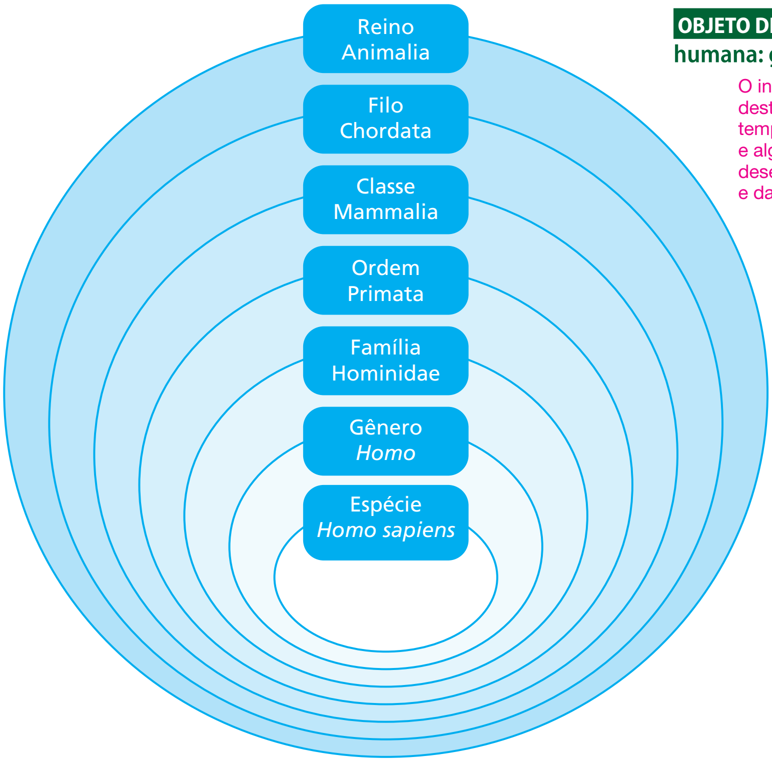
Homo neanderthalensis


S.PLAILLY/E.DAYNES/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Homo sapiens

Reconstruções artísticas das principais espécies de hominínios com base nas características morfológicas dos esqueletos encontrados.

A taxonomia é a ciência que lida com a classificação e a descrição dos organismos vivos, animais e vegetais, organizando-os em grupos, ou seja, em conjuntos. Todos os seres vivos que habitam a Terra podem ser identificados e classificados com base nas diferentes características que partilham entre si. O diagrama a seguir mostra a classificação taxonômica do ser humano.



NELSON MATSUDA /ARQUIVO DA EDITORA

OBJETO DIGITAL **Infográfico clicável: Evolução humana: gêneros *Australopithecus* e *Homo***

O infográfico clicável complementa a abertura deste capítulo apresentando, em uma linha do tempo, cinco espécies da linhagem humana e algumas características contribuindo com o desenvolvimento das **competências gerais 1** e **2** e da **competência específica 1** da BNCC.

Observação

Na taxonomia, uma espécie é formada por um conjunto de indivíduos morfologicamente semelhantes e que conseguem se reproduzir entre si, gerando uma prole fértil.

Você e cada um de seus colegas pertencem ao "conjunto" *Homo sapiens*. Um cão ou um gato não pertencem a esse conjunto.

Conjuntos

Noções básicas

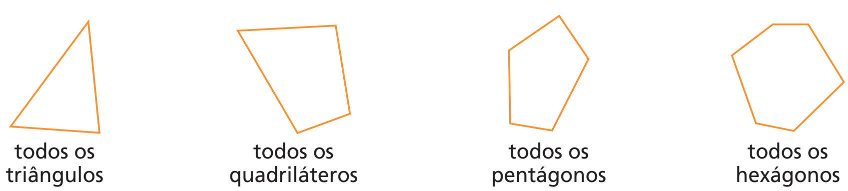
No diagrama com a classificação taxonômica do ser humano, observamos diversos conjuntos: o conjunto de todos os seres humanos (Espécie *Homo sapiens*), que também pertencem ao conjunto Gênero *Homo*, ao conjunto Família Hominidae, ao conjunto Ordem Primata, ao conjunto Classe Mammalia, ao conjunto Filo Chordata e, ainda, ao conjunto Reino Animalia.

Assim como nessa situação, em muitas outras recorremos à noção de conjunto como ideia de agrupamento ou coleção.

Na Matemática, para formar diferentes conjuntos, podemos usar determinadas características, como as dos números ou das figuras geométricas.

Observe os exemplos a seguir.

a. Conjunto dos números naturais pares: 0, 2, 4, 6, 8, ...
b. Conjunto dos divisores naturais de 6: 1, 2, 3 e 6.
c. Conjunto de todos os polígonos com menos de sete lados:



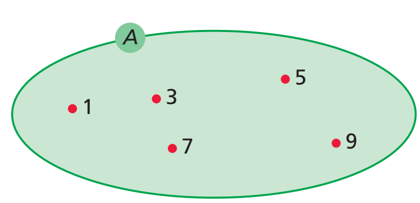
Observação

O uso de reticências (...) indica que o conjunto é composto de infinitos elementos.
Assim, podemos classificar o conjunto dos números naturais pares como um **conjunto infinito**.

Representação de um conjunto

Há mais de uma maneira de representar um conjunto. Como exemplo, vamos representar de diferentes maneiras o conjunto *A*, formado pelos números 1, 3, 5, 7 e 9. Chamamos esses números de **elementos** do conjunto *A*.

- Enumerando os elementos (a ordem dos elementos é qualquer), podemos ter:
  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ou $A = \{5, 1, 9, 3, 7\}$ etc.
- Considerando uma propriedade característica dos elementos:
  $A = \{x \mid x$ é um número natural ímpar menor que $10\}$
  (Lemos: "o conjunto *A* dos elementos *x* tal que *x* é um número natural ímpar menor que dez".)
- Representando com uma figura (diagrama de Venn):



Independentemente da representação, com relação aos elementos do conjunto *A* podemos dizer que:
- 1 **pertence** a *A*, indicado por: $1 \in A$;
- 2 **não pertence** a *A*, indicado por: $2 \notin A$.

Atividade resolvida

R1. Escrever uma propriedade que defina cada conjunto.

a. $L = \{A, R\}$ **b.** $M = \{0, 10, 20, 30, 40, ...\}$

▸ **Resolução**

a. Exemplo de resposta: *L*: letras da palavra ARARA.
b. Exemplo de resposta: *M*: *x* tal que *x* é um número natural múltiplo de 10.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

2 a. Exemplo de resposta: D: x tal que x é um número natural múltiplo de 12 e menor que 40.
2 b. Exemplo de resposta: E: fases da Lua.
2 c. Exemplo de resposta: F: x tal que x é um número ímpar maior que 3 e menor que 21.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Liste os elementos dos conjuntos expressos pelas propriedades a seguir. **1 a.** $A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$
   a. A: conjunto dos divisores inteiros de 8. **1 b.** $B = \{A, E, I, O\}$
   b. B: conjunto das vogais da palavra PARALELEPÍPEDO.
   c. C: conjunto dos lados do triângulo ABC. **1 c.** $C = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$
2. Escreva uma propriedade que defina cada conjunto a seguir.
   a. $D = \{0, 12, 24, 36\}$
   b. $E = \{$nova, crescente, cheia, minguante$\}$
   c. $F = \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
3. Considere os conjuntos:
   A: conjunto dos números ímpares;
   B: conjunto dos números primos;
   C: conjunto dos números naturais múltiplos de 3.
   Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.
   a. $0 \in A$ **3 a.** Falsa.
   b. $0 \notin B$ **3 b.** Verdadeira.
   c. $1 \notin B$ **3 c.** Verdadeira.
   d. $1 \in C$ **3 d.** Falsa.
   e. $3 \in A$ **3 e.** Verdadeira.
   f. $3 \in C$ **3 f.** Verdadeira.
4. Considere os conjuntos da atividade anterior para responder às questões. Em caso de resposta negativa, cite um contraexemplo.
   a. Se um elemento pertence a A, então ele também pertence a C? **4 a.** Não. Há números ímpares que não são múltiplos de 3: por exemplo, 5.
   b. Se um elemento pertence a A, então ele também pertence a B? **4 b.** Não. Há números ímpares que não são primos: por exemplo, 49.
   c. Se um elemento pertence a B, então ele também pertence a A? **4 c.** Não. Há um número primo que é par: o número 2.

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos, A e B, são **iguais** ($A = B$) quando têm os mesmos elementos.

Analise o exemplo a seguir.

$A = \{x \mid x$ é um número natural menor que $5\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ são iguais, pois têm os mesmos elementos.

Se um conjunto A tiver ao menos um elemento que não pertença a um conjunto B (ou vice-versa), dizemos que esses conjuntos são **diferentes** ($A \neq B$).

Observação

Como os conjuntos podem ser representados por uma propriedade ou pela enumeração de seus elementos, a verificação de que dois conjuntos dados têm os mesmos elementos pode não ser evidente.

Conjuntos vazio, unitário e universo

Conjunto vazio é o conjunto que não tem elementos, indicado por: $\varnothing$ ou $\{\ \}$.

Considere o exemplo a seguir.

$B = \{x \mid x$ é um número primo par maior que $5\}$

Então, $B = \varnothing$ ou $B = \{\ \}$.

Conjunto unitário é o conjunto que tem apenas um elemento.

Analise o exemplo a seguir.

$C = \{x \mid x$ é um número natural primo par$\}$

Logo, $C = \{2\}$.

Como C tem apenas um elemento, C é um conjunto unitário.

Conjunto universo é o conjunto de todos os elementos considerados em determinada situação.

Analise o exemplo a seguir.

Se vamos estudar a faixa salarial de uma empresa A, o conjunto universo U é o conjunto dos valores de todos os salários dessa empresa.

$U = \{$valores de todos os salários da empresa A$\}$

Atividade resolvida

R2. Considerando o conjunto universo U, resolver a equação $x + 3 = 0$.
a. U é o conjunto dos números naturais.
b. U é o conjunto dos números inteiros.

▶ Resolução

a. Considerando o conjunto dos números naturais o conjunto universo, a equação não tem solução, ou seja, $S = \varnothing$.

b. Considerando o conjunto dos números inteiros o conjunto universo, a equação tem solução -3, ou seja, $S = \{-3\}$.

6 b. $Y = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

5. Sejam os conjuntos:

$A = \{x \mid x$ é um número natural não nulo e $x \leqslant 1\}$;

$B = \{x \mid x$ é um número natural ímpar e $-1 < x < 1\}$;

$C = \{x \mid x$ é um número natural e $x^2 = 1\}$.

Quais são os conjuntos iguais? **5.** *A* e *C*.

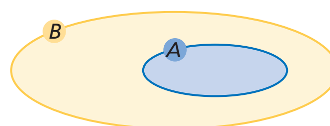
6. Enumere os elementos dos conjuntos:

a. $X = \{x \in U \mid -10 < x < 10\}$, sendo U o conjunto dos números naturais; **6 a.** $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b. $Y = \{y \in U \mid -10 < y < 10\}$, sendo U o conjunto dos números inteiros.

Subconjuntos de um conjunto

Dizemos que o conjunto *A* é **subconjunto** do conjunto *B* quando todos os elementos de *A* pertencem a *B*.



Os conjuntos *A* e *B* ilustram essa propriedade.

Considerando que *U* é o conjunto dos números naturais, temos:

$A = \{x \in U \mid x$ é um número múltiplo de 4$\}$

$B = \{x \in U \mid x$ é um número múltiplo de 2$\}$

Para indicar a relação entre os conjuntos *A* e *B*, usamos a notação $A \subset B$ (lemos: "*A* é **subconjunto** de *B*" ou "*A* **está contido** em *B*").

Também podemos dizer que *B* **contém** *A*. Nesse caso, a notação é $B \supset A$.

Consideraremos verdadeiras, sem demonstrar, as afirmações a seguir.

- O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
- Todo conjunto está contido nele mesmo.
- Dados dois conjuntos quaisquer, *X* e *Y*, se $X \subset Y$ e $Y \subset X$, então $X = Y$.
- Dados três conjuntos quaisquer, *R*, *S* e *T*, se $R \subset S$ e $S \subset T$, então $R \subset T$.

Observação

Se um conjunto *F* não for subconjunto de *G*, dizemos que *F* **não está contido** em *G*, indicado por: $F \not\subset G$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade resolvida

R3. Considerar os conjuntos *U*: conjunto dos números naturais, $A = \{x \in U \mid x$ é um número múltiplo de 2$\}$ e $B = \{x \in U \mid x$ é um número múltiplo de 10$\}$.

a. Há múltiplos de 2 que também são múltiplos de 10?

b. Há múltiplo de 10 que não é múltiplo de 2?

c. Construir um diagrama que ilustre a relação entre os conjuntos *A* e *B*.

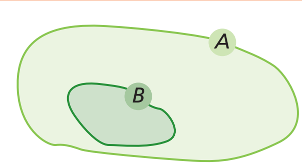
d. Todos os múltiplos de 2 também são múltiplos de 10?

Resolução

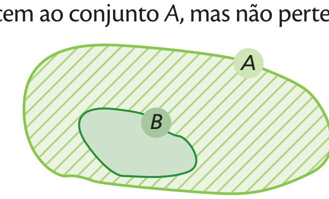
a. Sim, há múltiplos de 2 que também são múltiplos de 10. Por exemplo: 10, 20 e 30.

b. Não, pois todo múltiplo de 10 é um número par; logo, é múltiplo de 2 também, ou seja, $B \subset A$.

c.



d. Nem todo múltiplo de 2 é múltiplo de 10. Há múltiplos de 2, como o 6, que não são múltiplos de 10.
No diagrama a seguir, os múltiplos de 2 que não são múltiplos de 10 estão localizados na região hachurada, pois pertencem ao conjunto *A*, mas não pertencem ao *B*.



10. Exemplos de resposta: $A \supset B$; $A \supset C$; $A \supset D$; $B \supset C$; $D \subset B$; $D \subset C$; $B \not\subset C$; $C \not\subset D$.

11. O = {João, Rui} ou O = {João, Rui, Jonas} ou O = {João, Rui, Carlos} ou O = {João, Rui, Carlos, Jonas}.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

7. Considere os conjuntos $C = \{1\}$, $D = \{1, 2, 3\}$, $E = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$ e F: conjunto dos números naturais primos. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

- **a.** $C \supset D$ **7 a.** Falsa.
- **b.** $C \subset E$ **7 b.** Verdadeira.
- **c.** $D \subset F$ **7 c.** Falsa.
- **d.** $D \not\subset E$ **7 d.** Verdadeira.
- **e.** $F \supset E$ **7 e.** Falsa.
- **f.** $\varnothing \subset C$ **7 f.** Verdadeira.
- **g.** $E = F$ **7 g.** Falsa.
- **h.** $C \not\subset F$ **7 h.** Verdadeira.
- **i.** $E \supset C$ **7 i.** Verdadeira.

8. Dados os conjuntos $A = \{2, 3, 9\}$, $B = \{1, 3, 8, 4\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, determine os conjuntos que satisfazem cada condição dada.

- **a.** J: conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. **8 a.** {2, 9}
- **b.** K: conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também a C. **8 b.** {3, 9}
- **c.** L: conjunto formado pelos elementos que pertencem a B e não pertencem a C. **8 c.** {8, 4}
- **d.** M: conjunto formado pelos elementos que pertencem a C e não pertencem a B. **8 d.** {5, 7, 9}

9. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b\}$, determine todas as possibilidades de um conjunto M, sabendo que $M \subset A$ e $M \supset B$. **9.** $M = \{b\}$ ou $M = \{a, b\}$ ou $M = \{b, c\}$ ou $M = \{a, b, c\}$.

10. Considere os conjuntos:

$A = \{x \mid x$ é um número natural$\}$;

$B = \{x \mid x$ é um número natural múltiplo de 5$\}$;

$C = \{x \mid x$ é um número natural múltiplo de 10$\}$;

$D = \{x \mid x$ é um número natural múltiplo de 20$\}$.

Escreva relações entre dois dos conjuntos A, B, C e D usando os símbolos $\supset$, $\subset$ e $\not\subset$.

11. Em um escritório, trabalham cinco pessoas: Jonas, Carlos, João, Rui e Ana.

Considere os conjuntos:

O: pessoas do escritório que usam óculos;

A: pessoas do escritório que usam aparelho nos dentes;

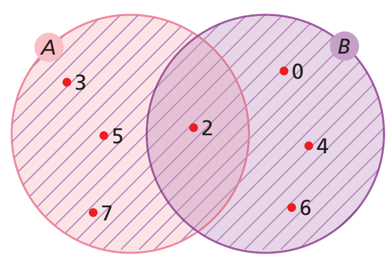
H: pessoas do escritório do sexo masculino.

Sabendo que $A \subset O$, que $O \subset H$ e que João e Rui usam aparelho nos dentes, descubra quem usa óculos. (*Dica*: Há mais de uma resposta possível.)

Operações com conjuntos

A **união** de dois conjuntos A e B, que indicamos por $A \cup B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

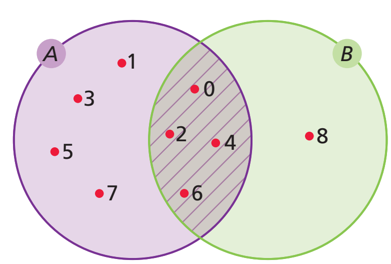
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



As regiões hachuradas representam $A \cup B$.

A **intersecção** de dois conjuntos A e B, que indicamos por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

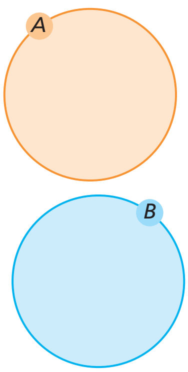
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



A região hachurada representa $A \cap B$.

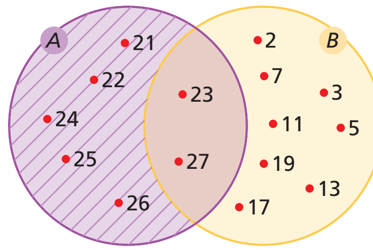
Observação

- Na união de conjuntos matemáticos, o conectivo **ou** significa que o elemento pertence a pelo menos um dos conjuntos envolvidos, podendo também pertencer a ambos.
- Quando $A \cap B = \varnothing$, como na representação, dizemos que A e B são **conjuntos disjuntos**.



A **diferença** de dois conjuntos A e B, que indicamos por $A - B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



A região hachurada representa $A - B$.

Em problemas que envolvem a noção de conjunto, em especial aqueles que se referem a pesquisas, geralmente o interesse não é saber que elementos pertencem a qual conjunto, mas estabelecer o número de elementos de cada conjunto.

Vamos analisar o que ocorre com o número de elementos de um conjunto resultante de algumas operações.

Nos exemplos a seguir, vamos considerar as seguintes representações:

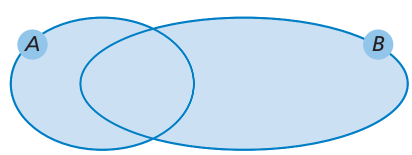
- A e B são dois conjuntos finitos quaisquer;
- n(A) é o número de elementos do conjunto A;
- n(B) é o número de elementos do conjunto B.

Agora, acompanhe os exemplos.

O número de elementos de A união B é:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

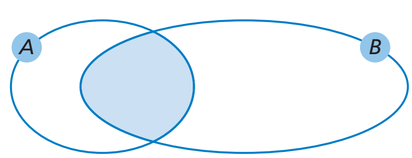
$A \cup B$



O número de elementos de A intersecção B é:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

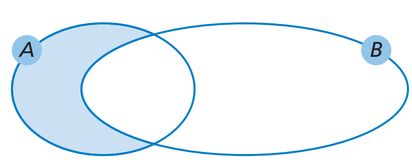
$A \cap B$



O número de elementos de A menos B é:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$A - B$



Atividade resolvida

R4. Em uma escola técnica de Agronomia, para aumentar a produtividade e a produção, os estudantes pesquisaram como alguns fatores de um ambiente interno influenciavam as plantas. Eles submeteram alguns espécimes aos seguintes fatores: cor da sala (C), medida da altura da planta em relação ao solo (A) e ventilação do ambiente (V). Depois do experimento, tabularam o número de plantas que tiveram alteração em relação à planta-controle. Os resultados estão apresentados a seguir.

EVRIM ERTIK/ISTOCK/GETTY IMAGES

A planta-controle é aquela que, exposta a uma condição controlada, serve de parâmetro de crescimento e de outras transformações para as demais plantas de um experimento.

Resultado da influência de fatores do ambiente interno nas plantas

Fator(es)	Número de plantas
C	11
A	8
V	12
C e A	5
A e V	5
V e C	4
C, A e V	3

Fonte: elaborado para fins didáticos.

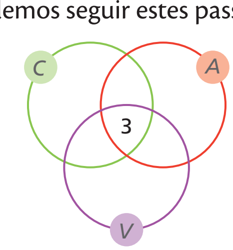
Calcular o número de plantas que apresentaram alteração em relação à planta-controle.

▸ **Resolução**

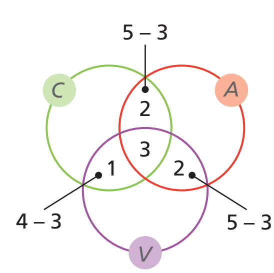
Uma das formas práticas de resolver problemas como esse é a representação dos conjuntos por meio de diagrama.

Para calcular o número de elementos de cada conjunto, podemos seguir estes passos.

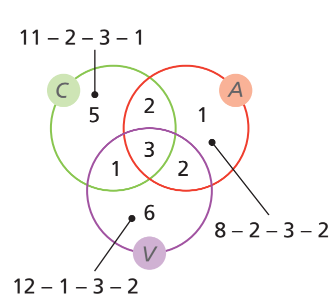
1º. Indicar o número de plantas afetadas pelos três fatores (cor da sala, medida da altura da planta em relação ao solo e ventilação do ambiente) na região do diagrama que representa a intersecção dos três conjuntos.



2º. Completar as regiões que representam a intersecção de apenas dois conjuntos.



3º. Completar as regiões que representam apenas um dos conjuntos.



Com base nesses dados, o número de plantas do experimento foi:

$$5 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 6 = 20$$

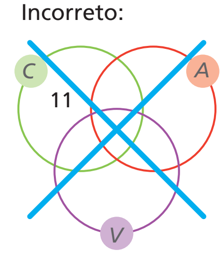
Portanto, o experimento foi realizado com 20 plantas.

ODS 2

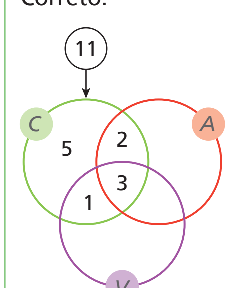
Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

Observação

Não confunda!
Dizer que 11 plantas apresentaram alterações quando submetidas ao fator cor da sala não significa que elas não sofreram influência de outros fatores.
Incorreto:



Correto:

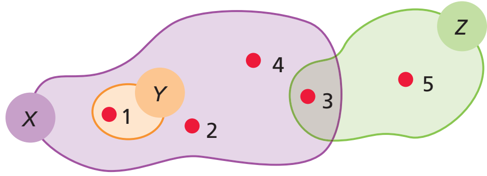


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades propostas

Registre em seu caderno

12. Considere os conjuntos X, Y e Z.



Determine:

a. $X \cup Y$; **12 a.** {1, 2, 3, 4}

b. $Y \cup Z$; **12 b.** {1, 3, 5}

c. $Z \cup X$; **12 c.** {1, 2, 3, 4, 5}

d. $X \cup Y \cup Z$. **12 d.** {1, 2, 3, 4, 5}

13. Segundo estimativas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2021 a população brasileira que morava na área urbana era de 181.319.993 habitantes e, na área rural, 31.997.646 habitantes.

Considerando U o conjunto formado por pessoas que moravam na área urbana e R o conjunto formado por pessoas que moravam na área rural, determine quantos elementos tem o conjunto $P = U \cup R$. **13.** 213.317.639 elementos.

14. Considere os conjuntos:

$P = \{x \mid x \text{ é um peixe}\}$;

$B = \{x \mid x \text{ é um peixe-boi}\}$;

$M = \{x \mid x \text{ é um mamífero}\}$.

Determine:

a. $B \cap M$; **14 a.** B

b. $P \cap B$; **14 b.** $\varnothing$

c. $P \cap M$; **14 c.** $\varnothing$

d. $(P \cup B) \cap M$. **14 d.** B

15. Considere os conjuntos:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$;

$Y = \{n \mid n \text{ é um natural primo menor que } 6\}$;

$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Determine:

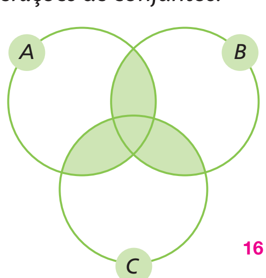
a. $X - Z$; **15 a.** $\varnothing$

b. $Y - X$; **15 b.** {5}

c. $Z - X$. **15 c.** {5, 6, 7, 8, 9}

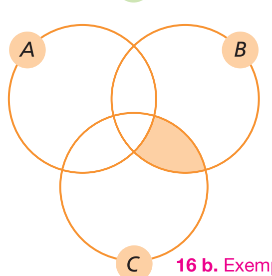
16. Descreva a parte pintada em cada diagrama por meio de operações de conjuntos.

a.



16 a. Exemplo de resposta: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b.



16 b. Exemplos de resposta: $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(B \cap C) - A$

17. Um hospital está avaliando os resultados de um tratamento com 50 voluntários, dos quais: 12 sentiram dor de cabeça, 8 sentiram náusea e 4 sentiram dor de cabeça e náusea. Quantos voluntários sentiram dor de cabeça e não sentiram náusea? E quantos não sentiram dor de cabeça nem náusea?

17. 8 voluntários; 34 voluntários.

18. Em uma pesquisa sobre uma marca de margarina, 110 entrevistados acharam que ela não era cremosa e 65 acharam que era muito salgada. Sabendo que foram entrevistadas 150 pessoas e que nenhuma delas achou simultaneamente a margarina cremosa e não muito salgada, calcule o número de pessoas que acharam a margarina não cremosa e muito salgada.

18. 25 pessoas.

19. De três filmes que lançou, uma distribuidora pesquisou quais estavam agradando mais ao público. Sabe-se que 32% do público gostou do filme X; 29%, do filme Y; 30%, do filme Z; 17%, dos filmes X e Y; 13%, dos filmes Y e Z; 12%, dos filmes X e Z; 5%, dos três filmes.

a. Que porcentagem do público não gostou de nenhum dos três filmes? **19 a.** 46%

b. Escolha dois desses filmes para manter em cartaz por mais tempo e justifique sua escolha.

19 b. Os filmes X e Z, porque $n(X \cup Z) > n(Y \cup Z) > n(X \cup Y)$.

20. Uma indústria lançou um novo modelo de carro que não teve a repercussão esperada. Os técnicos identificaram três possíveis problemas: *design* pouco inovador (D), acabamento pouco luxuoso (A) e preço mais elevado em relação aos modelos similares do mercado (P). Feita uma pesquisa, obtiveram os dados apresentados a seguir.

Resultado da pesquisa com os possíveis problemas do novo modelo de carro

Problema(s)	Número de votos
D	34
A	66
P	63
D e A	17
D e P	22
A e P	50
D, A e P	10
Não encontraram problemas	16

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Analisando o resultado, os técnicos concluíram que:

I. mais da metade dos pesquisados achou o preço elevado;

II. como a quantidade de pessoas que não apontaram problemas é maior que a daquelas que apontaram os três problemas, a maioria das pessoas entrevistadas gostou do modelo;

III. para aumentar as vendas desse modelo, é melhor criar vantagens na forma de pagamento.

Analise as conclusões e verifique quais estão de acordo com os dados apresentados.

20. A conclusão **I** está de acordo com os dados apresentados.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO /ARQUIVO DA EDITORA

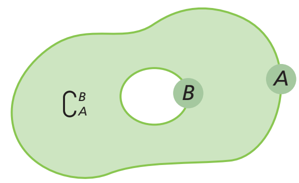
Complementar de um conjunto

Considere os conjuntos $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ e $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$.

Chamamos de complementar do conjunto P em relação a N (observe que $P \subset N$) o conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$, formado pelos elementos que pertencem a N e não pertencem a P. Indicamos esse conjunto por: $\complement_N^P$

O **complementar** de um conjunto B em relação a um conjunto A, com $B \subset A$, é definido por:

$$\complement_A^B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Ou seja: $\complement_A^B = A - B$

Observação

O complementar de um conjunto A em relação ao conjunto universo U também pode ser expresso pela notação: A^C ou $\overline{A}$.

Atividade resolvida

R5. Dados os conjuntos $U = \{V, I, A, G, E, M\}$, $A^C = \{V, I, A\}$ e $B^C = \{E, M\}$, determinar:

a. A; **b.** B.

▶ Resolução

a. Como $A^C = \{V, I, A\}$, os elementos de U que não pertencem a A^C pertencem ao conjunto A.
Portanto, $A = \{G, E, M\}$.

b. Como $B^C = \{E, M\}$, os elementos de U que não pertencem a B^C pertencem ao conjunto B.
Portanto, $B = \{V, I, A, G\}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

21. Dados o conjunto universo $U = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e os conjuntos $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{4, 6, 8\}$ e $C = \{4\}$, determine:

a. A^C; **b.** B^C; **c.** C^C; **d.** $\complement_B^C$.

22. Dado um conjunto universo U, considere um subconjunto qualquer C. Qual é o complementar do complementar desse conjunto C? **22.** O próprio conjunto C.

21 a. $\{6, 8, 10\}$ **21 b.** $\{0, 2, 10\}$ **21 c.** $\{0, 2, 6, 8, 10\}$ **21 d.** $\{6, 8\}$

23. Determine o número de elementos dos conjuntos a seguir.

a. $n(A \cup B)$, sabendo que $n(A) = 10$, $n(B) = 5$ e $n(A \cap B) = 0$. **23 a.** 15

b. $n(A \cup B)$, sabendo que $n(A) = 15$, $n(B) = 15$ e $n(A \cap B) = 3$. **23 b.** 27

c. $n(A - B)$, sabendo que $n(A) = 0$. **23 c.** 0

d. $n(A - B)$, sabendo que $n\left(A \cap \complement_A^B\right) = 5$. **23 d.** 5

Conjuntos numéricos

Conjuntos dos números naturais e dos números inteiros

A origem dos números naturais está associada à necessidade de contagem. Hoje, no entanto, além do emprego na contagem, usamos os números naturais para compor códigos (como os de telefone), para indicar ordem (1º, 2º, 3º, ...), entre outras aplicações.

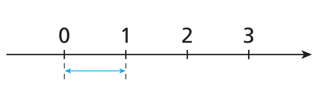
O **conjunto dos números naturais** tem infinitos elementos e é indicado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Observação

Para representar o subconjunto dos números naturais sem o zero, utilizamos a notação: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$
Em geral, o asterisco junto ao símbolo significa que o elemento zero foi retirado desse conjunto.

Para representar os números naturais em uma **reta numérica**, primeiro marcamos um ponto e associamos a ele o número zero. Escolhemos uma medida unitária e marcamos, a partir do ponto associado ao zero, à sua direita, pontos distantes uma, duas, três unidades, e assim sucessivamente:



Todo número natural pode ser associado a um ponto da reta.

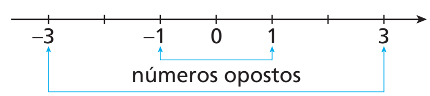
No conjunto dos números naturais, são definidas duas operações, a adição e a multiplicação, para as quais verificamos que quaisquer dois números naturais adicionados ou multiplicados resultam em um número natural. Mas, se efetuarmos a subtração de dois números naturais, nem sempre o resultado será um número natural. Se subtrairmos, por exemplo, 78 de 73, o resultado será -5, e -5 não pertence ao conjunto dos números naturais.

Acrescentando os números negativos $-1, -2, -3, -4, ...$ aos naturais, formamos o **conjunto dos números inteiros**, que é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Em $\mathbb{Z}$, além da adição e da multiplicação, podemos operar livremente a subtração.

Os números inteiros podem ser representados em uma reta numérica conforme mostrado a seguir.



O conjunto dos números naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Observação

Confira a seguir outros subconjuntos de $\mathbb{Z}$ que têm notação especial.

- Conjunto dos números inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$
- Conjunto dos números inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- Conjunto dos números inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

24. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a. $-2 \in \mathbb{N}$ **c.** $100 \in \mathbb{Z}$ **e.** $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$

b. $0 \in \mathbb{N}$ **d.** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}^*$ **f.** $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+ = \varnothing$

25. **ARGUMENTAÇÃO** Se $\frac{1}{1} = 1, \frac{4}{2} = 2, \frac{9}{3} = 3, ...,$ podemos afirmar que a divisão é uma operação que está definida no conjunto dos números inteiros? Justifique sua resposta.

25. Exemplo de resposta: Não, pois o resultado de 3 dividido por 2, por exemplo, não está definido no conjunto dos números inteiros.

24 a. Falsa.
24 b. Verdadeira.
24 c. Verdadeira.
24 d. Falsa.
24 e. Verdadeira.
24 f. Falsa.

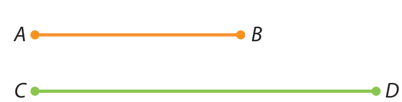
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Conjunto dos números racionais

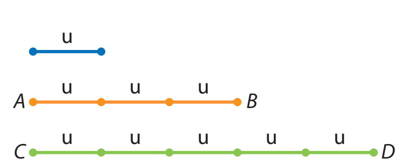
Os números racionais surgiram da necessidade de realizar e expressar medições.

Ao realizar uma medição de comprimento, massa, temperatura, área ou de qualquer outra grandeza, estamos comparando o que queremos medir com uma unidade de medida da mesma grandeza escolhida como padrão.

Para medir o comprimento de um segmento, é necessário comparar seu comprimento com o comprimento de outro segmento, tomado como unidade de medida. Assim, para medir o comprimento de $\overline{CD}$ representado a seguir, tomando o comprimento de $\overline{AB}$ como unidade de medida, devemos verificar quantas vezes $\overline{AB}$ "cabe" em $\overline{CD}$.



Note que, nesse caso, a comparação não pode ser feita por meio de um número inteiro. No entanto, como mostra a representação a seguir, podemos tomar uma unidade de medida de comprimento u, de maneira que essa unidade "caiba" um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e em $\overline{CD}$:



$AB = 3$ u e $CD = 5$ u

Observação

Quando existe uma unidade de medida de comprimento que "cabe" um número inteiro de vezes em dois segmentos, dizemos que esses segmentos são **comensuráveis**.

Agora, comparando as medidas de comprimento de $\overline{CD}$ e de $\overline{AB}$, podemos escrever:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{5\,u}{3\,u}$$

$$CD = \frac{5}{3}AB$$

Portanto, considerando AB como unidade de medida de comprimento, CD mede $\frac{5}{3}$. Para expressar medidas como essa, utilizamos os números racionais.

O **conjunto dos números racionais** é formado por todos os números que podem ser escritos na forma da razão $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, e indicamos por:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Considere alguns exemplos de números racionais a seguir.

a. $\frac{8}{25}$

b. $-2 = -\frac{2}{1}$

c. $0{,}25 = \frac{1}{4}$

d. $0 = \frac{0}{10}$

O conjunto dos números inteiros é um subconjunto de $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Como o conjunto dos números naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, então $\mathbb{N}$ também é subconjunto de $\mathbb{Q}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

Observação

Observe a seguir outros subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que têm notação especial.

- Conjunto dos números racionais não nulos: $\mathbb{Q}^*$
- Conjunto dos números racionais não negativos: $\mathbb{Q}_+$
- Conjunto dos números racionais não positivos: $\mathbb{Q}_-$

Atividade resolvida

R6. Considerando que, no conjunto dos números inteiros, para a adição e a multiplicação, a propriedade do fechamento é válida, isto é, a soma $(a + b)$ e o produto $(a \cdot b)$ de dois números inteiros, a e b, são também números inteiros, demonstrar as afirmações a seguir.

a. A soma de dois números racionais é um número racional.

b. O produto de dois números racionais é um número racional.

▶ **Resolução**

Vamos considerar os números racionais $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, $c \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z}^*$.

a. A soma de x e y é dada por:

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Temos $(a \cdot d) \in \mathbb{Z}$, $(b \cdot c) \in \mathbb{Z}$, $(a \cdot d + b \cdot c) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot d) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo.

Portanto, a soma de dois números racionais é um número racional.

Assim, podemos dizer que, no conjunto dos números racionais, para a adição, a propriedade do fechamento é válida.

b. O produto de x e y é dado por:

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Temos $(a \cdot c) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot d) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo.

Portanto, o produto de dois números racionais é um número racional.

Assim, podemos dizer que, no conjunto dos números racionais, para a multiplicação, a propriedade do fechamento é válida.

Representação decimal e representação fracionária de números racionais

Para representar um número racional $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, na forma decimal, dividimos a por b. O resultado dessa divisão será sempre um número com representação decimal finita (podendo ser inteiro) ou uma dízima periódica.

Observação

Dízima periódica é todo número decimal que só pode ser representado com um número infinito de casas decimais e em que, a partir de determinada casa decimal, há apenas a repetição de um mesmo algarismo ou de uma mesma sequência finita de algarismos.
Na dízima periódica, o algarismo ou a sequência de algarismos que se repete é chamado de **período**.

Observe estes números racionais na forma de fração e analise a representação decimal de cada um.

a. $\frac{2}{50} = 0{,}04$ (número com representação decimal finita);

b. $\frac{0}{1.000} = 0$ (número com representação decimal finita);

c. $\frac{24}{4} = 6$ (número com representação decimal finita);

d. $\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$ (dízima periódica de período 3);

e. $\frac{311}{396} = 0{,}7853535353\ldots$ (dízima periódica de período 53).

Todo número racional $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, pode ser representado por um número com representação decimal finita ou por uma dízima periódica. Reciprocamente, todo número com representação decimal finita ou representado por uma dízima periódica é racional, ou seja, pode ser representado por meio de uma fração $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Acompanhe como determinar a representação fracionária dos números racionais apresentados a seguir na forma decimal.

a. $70 = \frac{70}{1}$

b. $0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

c. $-0{,}0125 = -\frac{125}{10.000} = -\frac{1}{80}$

Observação

A fração que gera uma dízima periódica é denominada **fração geratriz**.

d. Para obter a fração geratriz da dízima periódica 0,6666..., realizamos os passos a seguir.

1º. Escrevemos a equação: $x = 0{,}666\ldots$ (I)

2º. Multiplicamos por 10 ambos os membros da equação (I): $10x = 6{,}666\ldots$ (II)

3º. Da equação (II), subtraímos membro a membro a equação (I):

$$\begin{cases} 10x = 6{,}666\ldots \text{ (II)} \\ x = 0{,}666\ldots \text{ (I)} \end{cases}$$
$$9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Portanto, $0{,}666\ldots = \frac{2}{3}$.

e. Para obter a fração geratriz da dízima periódica 1,04545, realizamos os passos a seguir.

1º. Escrevemos a equação: $x = 1{,}04545\ldots$ (I)

2º. Multiplicamos por 10 ambos os membros da equação (I): $10x = 10{,}4545\ldots$ (II)

3º. Multiplicamos por 1.000 ambos os membros da equação (I): $1.000x = 1.045{,}4545\ldots$ (III)

4º. Da equação (III), subtraímos membro a membro a equação (II):

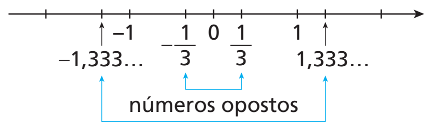
$$\begin{cases} 1.000x = 1.045{,}45\ldots \text{ (III)} \\ 10x = 10{,}45\ldots \text{ (II)} \end{cases}$$
$$990x = 1.035 \Rightarrow x = \frac{1.035}{990} = \frac{23}{22}$$

Portanto, $1{,}04545\ldots = \frac{23}{22}$.

Representação dos números racionais na reta

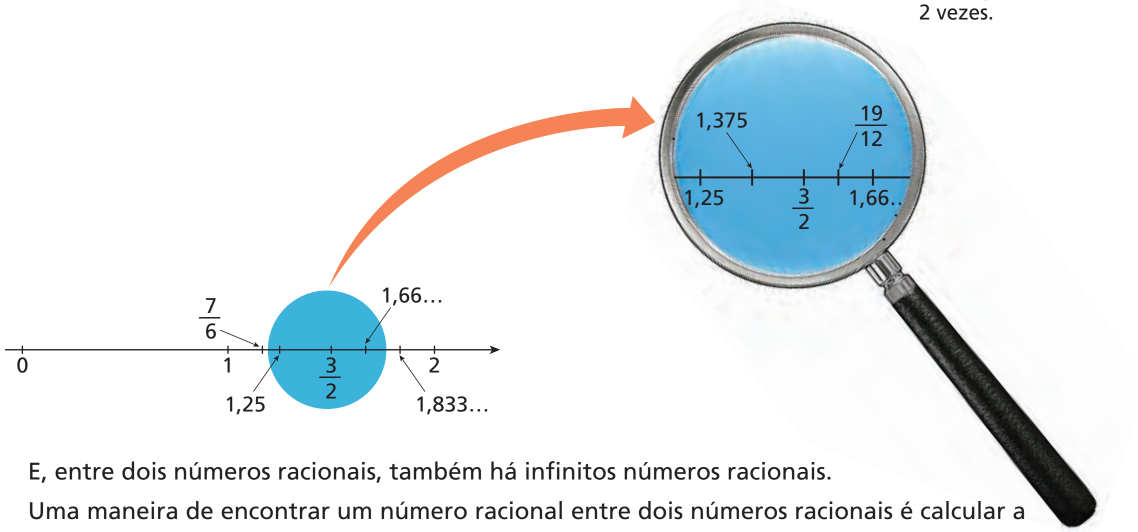
Todos os números racionais podem ser representados em uma reta numérica.

Analise alguns números racionais indicados na reta a seguir.



Entre dois números inteiros, há infinitos números racionais.

Detalhe da imagem com ampliação de 2 vezes.



E, entre dois números racionais, também há infinitos números racionais.

Uma maneira de encontrar um número racional entre dois números racionais é calcular a média aritmética entre eles.

Observação

A média aritmética entre n números (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) é calculada por:

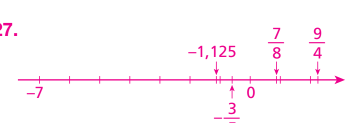
$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Acompanhe o exemplo a seguir.

Dados os números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, a média aritmética entre eles é um número racional:

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{6}}{2} = \frac{5}{12}$$

27.



ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

Na reta numérica, $\frac{5}{12}$ situa-se entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

26. Identifique o conjunto numérico mais adequado para representar cada situação a seguir.

- **a.** O número de uma casa. **26 a.** $\mathbb{N}$
- **b.** A medida da temperatura de uma substância. **26 b.** $\mathbb{Q}$
- **c.** O número que representa os andares de um prédio. **26 c.** $\mathbb{Z}$
- **d.** A medida da altura de uma pessoa, em metro. **26 d.** $\mathbb{Q}$

27. Represente os números racionais $\frac{7}{8}$; $\frac{9}{4}$; $-\frac{3}{5}$; -7; $-1{,}125$ em uma reta numérica.

28. Determine a fração geratriz dos números racionais a seguir.

- **a.** $-10{,}111...$ e $-10{,}010101...$
- **b.** $1{,}333...$ e $1{,}5333...$

28 a. $-\frac{91}{9}$; $-\frac{991}{99}$ **28 b.** $\frac{4}{3}$; $\frac{23}{15}$

29. **EM DUPLA** **ARGUMENTAÇÃO** Converse com um colega e demonstrem que: **29.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

- **a.** a diferença entre dois números racionais é um número racional;
- **b.** o quociente entre dois números racionais não nulos é um número racional.

30. **EM DUPLA** **ARGUMENTAÇÃO** Reúna-se com um colega, explorem as conclusões da **atividade resolvida R6** e demonstrem que a média aritmética de dois números racionais quaisquer é sempre um número racional.

30. Resposta no *Suplemento para o professor*.

Conjunto dos números irracionais

Por muito tempo, acreditou-se que os números racionais eram suficientes para expressar a medida de comprimento de qualquer segmento. Entretanto, os pitagóricos descobriram que as medidas de comprimento da diagonal e do lado de um quadrado não podem ser representadas, simultaneamente, por um número racional, isto é, se uma dessas medidas for um número racional, a outra não será um número racional.

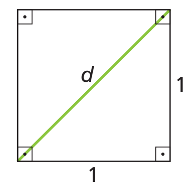
Consideremos um quadrado de lado unitário.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$d^2 = 1^2 + 1^2$

$d^2 = 2$

$d = \sqrt{2}$, pois $d > 0$



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Note que $\sqrt{2} = 1{,}4142135623...$ é um número cuja representação decimal tem infinitas casas não periódicas depois da vírgula. Jamais encontraremos uma unidade de medida de comprimento que "caiba" um número inteiro de vezes em 1 (medida do comprimento do lado do quadrado) e em $\sqrt{2}$ (medida do comprimento da diagonal do quadrado), independentemente de quão pequena seja a medida.

Observação

Quando não existe uma unidade de medida de comprimento que "cabe" um número inteiro de vezes em dois segmentos, dizemos que esses segmentos são **incomensuráveis**.

Logo, a diagonal e o lado de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

Portanto, $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ não é um número racional.

Assim, surgiu a necessidade de considerar um novo conjunto de números, o conjunto dos números irracionais.

O **conjunto dos números irracionais** é formado por todos os números que **não** podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Dessa forma, os números irracionais são aqueles cuja representação decimal é infinita e não periódica.

Além de $\sqrt{2}$, há infinitos números irracionais. Analise alguns exemplos a seguir.

a. 0,6060060006000060000006..., em que a quantidade de zeros que sucede imediatamente cada dígito 6 aumenta indefinidamente.

b. A raiz quadrada de um número natural que não é quadrado perfeito:

$$\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{27}$$

c. A raiz cúbica de um número natural que não é cubo perfeito:

$$\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{11},\ \sqrt[3]{82}$$

d. O resultado de algumas operações entre números racionais e irracionais:

$$-\sqrt{3},\ 10\sqrt[3]{5},\ \frac{\sqrt{2}}{7},\ \frac{9}{\sqrt[4]{11}},\ 2 + \sqrt[5]{4}$$

e. O número π (lemos: "pi"), que expressa a razão constante entre a medida do comprimento de uma circunferência ($2\pi r$) e a medida de comprimento de seu diâmetro ($2r$).

$\pi = 3{,}1415926535...$ é um número que tem infinitas casas decimais não periódicas.

Observações

- Teorema: proposição que, para ser admitida ou se tornar evidente, necessita de demonstração.
- Hipótese: proposição que se admite como princípio do qual se pode deduzir um conjunto dado de proposições (tese de um teorema).
- Tese: proposição assumida que fundamenta uma demonstração, uma argumentação ou um processo discursivo.

Atividade resolvida

R7. Demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

▸ **Resolução**

Vamos aplicar a **demonstração por absurdo**, um procedimento indireto que consiste em utilizar manipulações lógicas para chegar a uma contradição. Dadas as afirmações A e B, para provar que $A \Rightarrow B$ (lemos: "A implica B"), começamos por supor A verdadeira e B falsa (B falsa é chamada de **hipótese de raciocínio por absurdo**). A suposição de que B é falsa é apenas temporária, até que seja obtida uma contradição para concluir que B é verdadeira.

Nesse caso, fazemos a afirmação escrita na forma de implicação: Se $x = \sqrt{2}$, então x é irracional (a afirmação A é "$x = \sqrt{2}$" e a afirmação B é "x é irracional"). Para a demonstração por absurdo, vamos supor que a afirmação "x é irracional" seja falsa, isto é, que x é racional. Com base nisso, chegamos a uma contradição.

Assim, para a suposição de que x é racional, devem existir p e q, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, tal que:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ (I)}$$

Para simplificar, podemos supor que p e q sejam primos entre si (p e q não têm divisores comuns diferentes de 1), de modo que a fração $\frac{p}{q}$ seja irredutível.

Elevando ao quadrado os dois membros da equação (I) e lembrando que todo múltiplo de 2 é um número par, temos:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \text{ (II)}$$

Note que p^2 é par; logo, p é par, ou seja, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2n$.

$$p = 2n \Rightarrow p^2 = (2n)^2 \Rightarrow p^2 = 4n^2 \xRightarrow{\text{(II)}} 2q^2 = 4n^2 \Rightarrow q^2 = 2n^2$$

Note que q^2 é par; logo, q é par.

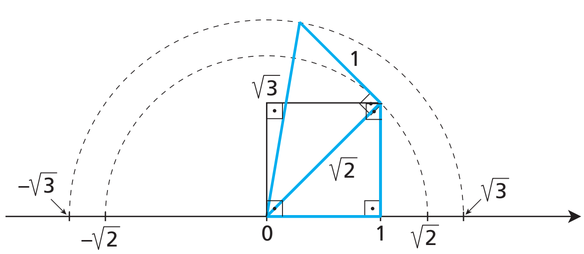
Contudo, as conclusões "p é par" e "q é par" contradizem a hipótese de que $\frac{p}{q}$ seja uma fração irredutível, ou seja, chegamos a um absurdo. Portanto, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como uma razão de números inteiros; logo, não é um número racional.

Observações

- Quando a veracidade de uma afirmação p conduz à conclusão necessária da veracidade de outra afirmação q, temos uma **implicação lógica**. Denotamos essa relação por:
  $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ (lemos: "p implica q")
  Assim, por exemplo:
  p: todo número natural que termina em 0 é múltiplo de 10
  implica
  q: 2.070 é múltiplo de 10
- Quando $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, temos uma equivalência que representamos por:
  $\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$ (lemos: "p equivale a q")

Representação dos números irracionais na reta

Acompanhe, a seguir, um procedimento geométrico que permite representar alguns números irracionais em uma reta numérica.



Representando um quadrado com medida de comprimento de lado 1, obtemos $\sqrt{2}$ como medida de comprimento da diagonal. Com a ponta seca do compasso na origem da reta numérica e a abertura com a medida do comprimento dessa diagonal, projetamos na reta os números irracionais $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

Considerando a diagonal do quadrado, feito anteriormente, e construindo um triângulo retângulo com medidas de comprimento dos catetos 1 e $\sqrt{2}$, obtemos $\sqrt{3}$ como medida de comprimento da hipotenusa. Com a ponta-seca do compasso na origem da reta numérica e a abertura com a medida do comprimento dessa hipotenusa, projetamos na reta os números irracionais $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$.

Conjunto dos números reais

A reunião do conjunto dos números racionais com o dos números irracionais resulta no **conjunto dos números reais**, representado por $\mathbb{R}$.

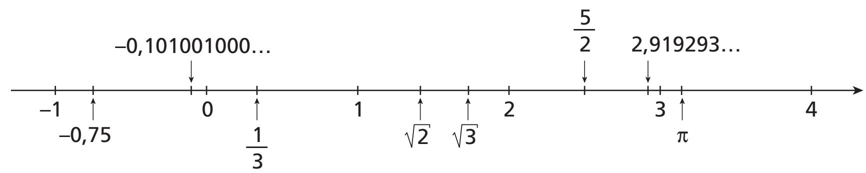
Se marcarmos em uma reta numérica todos os números racionais e todos os números irracionais, preencheremos totalmente a reta, que pode ser chamada de **reta real**.

Observações

Observe a seguir outros subconjuntos de $\mathbb{R}$ que têm notação especial.

- Conjunto dos números reais não nulos: $\mathbb{R}^*$
- Conjunto dos números reais não negativos: $\mathbb{R}_+$
- Conjunto dos números reais não positivos: $\mathbb{R}_-$

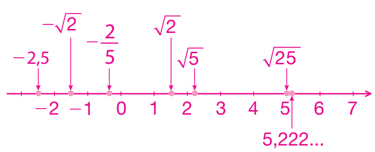
Observe alguns números reais representados na reta a seguir.



Relação de inclusão dos conjuntos numéricos

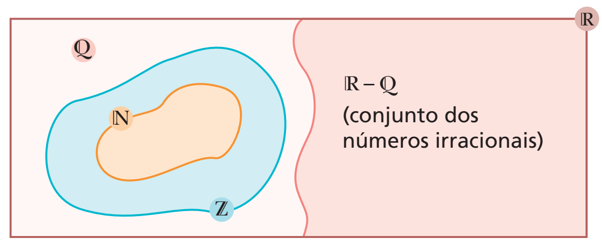
Os conjuntos numéricos estudados até aqui podem ser representados em um diagrama. Observe.

33.



ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

Escrevendo os números em ordem crescente, temos:
$-2{,}5$; $-\sqrt{2}$; $-\frac{2}{5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{25}$; 5,222...



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

O conjunto dos números racionais é um subconjunto de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Como o conjunto dos números naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$, então: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

31. ARGUMENTAÇÃO Responda às questões e justifique suas respostas.

a. O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional?

b. A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional?

32. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a. Um número irracional não é um número racional.

b. A soma de um número irracional com um número racional é um número irracional.

c. O produto de um número irracional por um número racional (diferente de zero) é um número racional.

d. O produto de dois números reais é um número real.

e. O produto de dois números racionais é um número racional.

f. Uma dízima periódica é um número irracional.

33. Represente os números a seguir em uma reta numérica e, depois, escreva-os em ordem crescente.

$\sqrt{5}$; $-\frac{2}{5}$; $\sqrt{25}$; 5,222...; $-2{,}5$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$

34. Utilizando a reta numérica da atividade anterior, considere apenas o conjunto dos números maiores que $-\sqrt{2}$ e menores que $\sqrt{2}$ e responda.

a. Quantos números naturais existem? **34 a.** Dois.

b. Quantos números inteiros existem? **34 b.** Três.

c. Quantos números racionais existem? **34 c.** Infinitos.

d. Quantos números reais existem? **34 d.** Infinitos.

35. Use os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$ para tornar as sentenças a seguir verdadeiras.

a. -13 ▨ $\mathbb{N}$ **35 a.** $\notin$

b. 0 ▨ $\mathbb{Z}^*$ **35 b.** $\notin$

c. $-2{,}25$ ▨ $\mathbb{Q}_+$ **35 c.** $\notin$

d. $\frac{6}{16}$ ▨ $\mathbb{Q}$ **35 d.** $\in$

e. $\mathbb{N}^*$ ▨ $\mathbb{R}^*$ **35 e.** $\subset$

f. $\mathbb{Z}_-$ ▨ $\mathbb{R}_-$ **35 f.** $\subset$

g. $\mathbb{R}_+$ ▨ $\mathbb{R}$ **35 g.** $\subset$

h. $\mathbb{R}^*$ ▨ $\mathbb{R}_+$ **35 h.** $\not\subset$

i. $\mathbb{Q}_+$ ▨ $\mathbb{R}_-$ **35 i.** $\not\subset$

36. Classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa.

36 a. Verdadeira.

a. $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \varnothing$

b. $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}_+^*$

36 b. Falsa.

c. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ **36 c.** Falsa.

d. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}^*$ **36 d.** Falsa.

31 a. Não, por exemplo:
$(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 1$ e $1 \in \mathbb{Q}$.

31 b. Não, por exemplo:
$\left(\frac{1}{2} + \pi\right) + (1 - \pi) = \frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$.

32 a. Verdadeira.
32 b. Verdadeira.
32 c. Falsa.
32 d. Verdadeira.
32 e. Verdadeira.
32 f. Falsa.

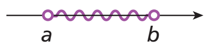
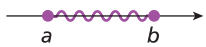
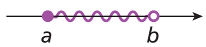
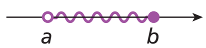
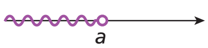
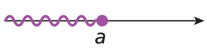
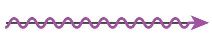
Intervalos

Representação de subconjuntos por intervalos

Podemos representar certos subconjuntos de $\mathbb{R}$ pela notação de intervalos.

Sendo a e b números reais tais que $a < b$, analise algumas representações, geométricas e algébricas, de intervalos numéricos envolvendo a e b.

Representações, geométricas e algébricas, de intervalos numéricos envolvendo *a* e *b*

Representação geométrica	Representação algébrica	Descrição
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou $]a, b[$	Intervalo aberto
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ ou $[a, b]$	Intervalo fechado
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ ou $[a, b[$	Intervalo fechado à esquerda
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ ou $]a, b]$	Intervalo fechado à direita
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ou $]a, +\infty[$	Semirreta aberta de origem *a*
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$ ou $[a, +\infty[$	Semirreta de origem *a*
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ ou $]-\infty, a[$	Semirreta aberta de origem *a*
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$ ou $]-\infty, a]$	Semirreta de origem *a*
	$\mathbb{R}$ ou $]-\infty, +\infty[$	Reta real

Observações

- O símbolo ∞ representa infinito.
- O intervalo em que aparece $+\infty$ é aberto à direita.
- O intervalo em que aparece $-\infty$ é aberto à esquerda.

Na representação geométrica:

a. ○ (bolinha vazia) indica que aquele extremo não pertence ao intervalo;

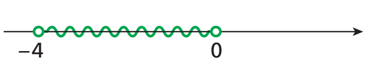
b. • (bolinha cheia) indica que aquele extremo pertence ao intervalo.

Na representação algébrica:

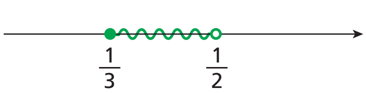
- **]*a*, *b*[** indica que os extremos *a* e *b* não pertencem ao intervalo;
- **[*a*, *b*]** indica que os extremos *a* e *b* pertencem ao intervalo;
- **[*a*, *b*[** indica que o extremo *a* pertence ao intervalo, mas o extremo *b* não pertence;
- **]*a*, *b*]** indica que o extremo *a* não pertence ao intervalo, mas o extremo *b* pertence.

Observe os exemplos de intervalos apresentados algébrica e geometricamente a seguir.

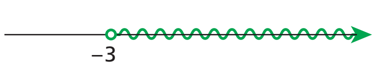
a. O intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 0\}$ ou $]-4, 0[$ representado na reta real:



b. O intervalo $\left\{y \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leqslant y < \frac{1}{2}\right\}$ ou $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$ representado na reta real:



c. O intervalo $\{z \in \mathbb{R} \mid z > -3\}$ ou $]-3, +\infty[$ representado na reta real:

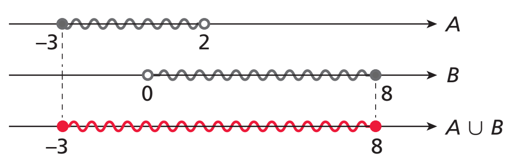


Operações com intervalos

Observe agora como proceder nas operações (união, intersecção e diferença) com intervalos numéricos utilizando o recurso da representação geométrica.

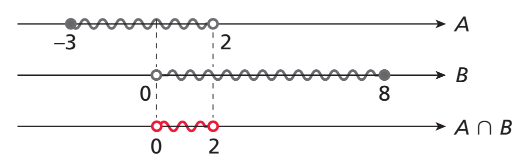
Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 8\}$, para efetuar as operações, representamos cada conjunto em retas reais paralelas.

$A \cup B$



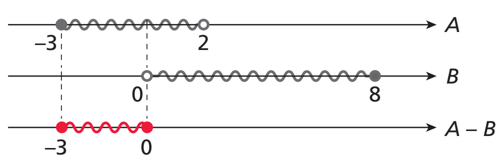
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 8\}$ ou $[-3, 8]$

$A \cap B$



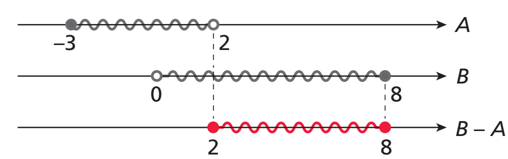
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$ ou $]0, 2[$

$A - B$



$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 0\}$ ou $[-3, 0]$

$B - A$

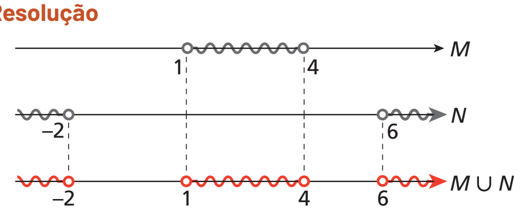


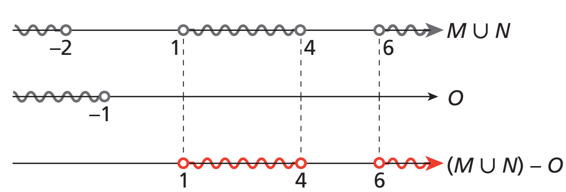
$B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 8\}$ ou $[2, 8]$

Atividade resolvida

R8. Dados os conjuntos $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 6\}$ e $O = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$, determinar $(M \cup N) - O$.

▶ **Resolução**





Portanto:

$(M \cup N) - O = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4 \text{ ou } x > 6\}$ ou $]1, 4[\cup]6, +\infty[$

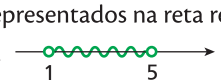
38 b. $A \cup B = [-1, +\infty[$
$A \cap B =]1, 6[$
$A - B = [-1, 1]$
$B - A = [6, +\infty[$

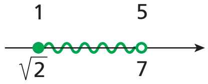
38 c. $A \cup B = [-3, 1] \cup [2, 5[$
$A \cap B = \varnothing$
$A - B = A$
$B - A = B$

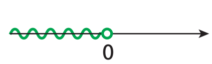
Atividades propostas

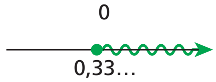
Registre em seu caderno

37. Use a notação de conjuntos para escrever os intervalos representados na reta real.

a. 

b. 

c. 

d. 

38. Determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ e $B - A$, dados:

a. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 7\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 5\}$;

b. $A = [-1, 6[$ e $B =]1, +\infty[$;

c. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$ e $B = [2, 5[$.

39. Sabendo que o comprimento do raio de uma circunferência mede r, a medida do comprimento dessa circunferência é $2\pi r$ e a medida da área do círculo determinado por essa circunferência é πr^2, determine a qual dos intervalos a seguir pertencem, simultaneamente, os números que representam a medida do comprimento da circunferência cujo comprimento do raio mede 0,5 e a medida da área do círculo determinado por essa circunferência.

39. Alternativa **d.**

a. $]0, 1[$

b. $\left[1, \dfrac{32}{10}\right]$

c. $\left]\dfrac{99}{100}, 3\right[$

d. $]-1, 4]$

40. Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$, qual conjunto representa $(A \cap B) - C$?

a. $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$

b. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 1\}$

c. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 4\}$

d. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

e. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

40. Alternativa **c.**

37 a. $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ ou $]1, 5[$

37 b. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leqslant x < 7\}$ ou $[\sqrt{2}, 7[$

37 c. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ou $]-\infty, 0[$

37 d. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0{,}33...\}$ ou $[0{,}33...; +\infty[$

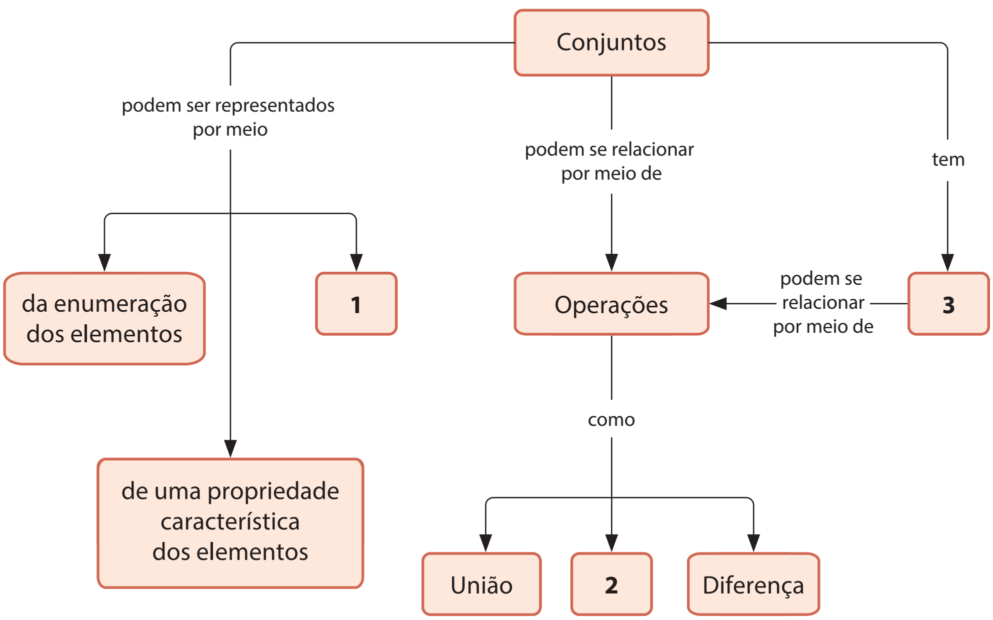
38 a. $A \cup B = A$
$A \cap B = B$
$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 5 \leqslant x < 7\}$
$B - A = \varnothing$

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 2

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir, que apresenta a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Conexões entre conceitos. Exemplo de resposta: A - 2; B - 3; C - 1.

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Intersecção **B.** Subconjunto **C.** do diagrama de Venn

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro

O último teorema de Fermat

Simon Singh

Rio de Janeiro: BestBolso, 2014.

REPRODUÇÃO/EDITORA BESTBOLSO

Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês amador, tinha o hábito de fazer anotações nos livros que lia. Uma das anotações foi a seguinte: "Eu descobri uma demonstração maravilhosa, mas a margem deste papel é muito estreita para contê-la". Assim nascia o problema que iria confundir e frustrar os matemáticos mais brilhantes do mundo por mais de 350 anos: a busca da demonstração de que não existe solução, em números inteiros, para $x^n + y^n = z^n$, para n maior que 2. Ao narrar a dificuldade de chegar a uma solução, a obra relata a vida e a contribuição dos envolvidos nessa história.

Site

Sala de estudo: Diagrama de Venn

O *site* do Clube de Matemática da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep) traz uma sala de estudo para apresentar e utilizar os diagramas de Venn na visualização e na compreensão das propriedades de conjuntos, além de propor e apresentar soluções de alguns problemas de raciocínio lógico utilizando esse recurso de representação gráfica.

Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudo-diagrama-de-venn/. Acesso em: 9 set. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Entre as situações-problema descritas a seguir, qual **não** é resolvida com conceitos referentes a conjuntos?

a. Segundo uma pesquisa, 10 pessoas preferiram o produto A, 15 pessoas preferiram o produto B e 25 pessoas preferiram o produto C. Quantas pessoas participaram da pesquisa?

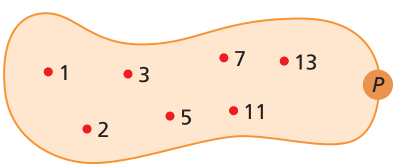
b. Que números inteiros são múltiplos de 25 e também de 27?

c. Qual é a medida de perímetro de um quadrado cujo comprimento do lado mede 2 cm?

d. Que polígono pode ser classificado como losango e também como retângulo? **Q1.** Alternativa **c.**

Q2. Qual representação corresponde ao conjunto dos números primos naturais? **Q2.** Alternativa **c.**

a.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

b. 1, 2, 3, 5, 7, 11 etc.

c. $\{x \mid x$ é um número natural que tem exatamente dois divisores distintos$\}$

d. $\{x \mid x$ é um número natural cujo algarismo da unidade é 1, 3, 5, 7 ou 9$\}$

Para responder às questões de **3** a **6**, considere os conjuntos $U = \mathbb{N}$, $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

Q3. $A \cup B$ é igual a: **Q3.** Alternativa **d.**

a. $\varnothing$

b. $\{0\}$

c. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

d. U

Q4. $A - B$ é igual a: **Q4.** Alternativa **b.**

a. $\varnothing$

b. $\{0, 2, 4, 6, ...\}$

c. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

d. U

Q5. $A \cap B$ é igual a: **Q5.** Alternativa **a.**

a. $\varnothing$ **b.** $\{0\}$ **c.** $\mathbb{N}^*$ **d.** U

Q6. A^C é igual a: **Q6.** Alternativa **c.**

a. $\varnothing$ **b.** A **c.** B **d.** U

Q7. Uma empresa pesquisou o gênero de filmes preferido de uma família e chegou ao seguinte resultado: 3 pessoas gostam de comédia, 3 gostam de drama, 3 gostam de policial, 2 gostam de comédia e drama, 2 gostam de comédia e policial, 2 gostam de drama e policial e 1 pessoa gosta dos três gêneros. Sabendo que todos os membros da família gostam de pelo menos um desses três gêneros, quantos membros tem essa família? **Q7.** Alternativa **a.**

a. 4 **b.** 7 **c.** 9 **d.** 10

Q8. Para a relação ♣ ⊂ ♦ ⊂ ♥ ⊂ ♠ ser verdadeira, os símbolos podem ser substituídos, respectivamente, pelos conjuntos numéricos: **Q8.** Alternativa **b.**

a. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}^*, \mathbb{Q}$

b. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

c. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$

d. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$

Q9. Dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, que intervalos representam $A \cup B$ e $A \cap B$? **Q9.** Alternativa **b.**

a. $A \cup B = [-1, +\infty[$ e $A \cap B =]0, +\infty[$

b. $A \cup B =]-1, +\infty[$ e $A \cap B = [0, 1[$

c. $A \cup B = [1, +\infty[$ e $A \cap B =]-\infty, 0[$

d. $A \cup B = [-1, +1]$ e $A \cap B = \varnothing$

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9
Perceber situações nas quais se aplica a noção de conjunto.	X						X		
Descrever conjuntos.		X							
Efetuar operações com conjuntos.			X	X	X	X	X		
Resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos.							X		
Identificar os conjuntos numéricos.								X	
Representar e operar com intervalos reais.									X

Capítulo 3

Funções

EQROY/ALAMY/FOTOARENA

Sede da Organização da Aviação Civil Internacional (Oaci) na cidade de Montreal, que fica localizada na província de Quebec, Canadá. Foto de 2022.

Conceito de função

A Organização da Aviação Civil Internacional (Oaci) é a agência das Nações Unidas responsável pelas regras e pelo desenvolvimento da Aviação Civil no mundo. A padronização das unidades de medida, essencial para a segurança dos voos, é uma das muitas determinações dos regulamentos de tráfego aéreo. A unidade estabelecida internacionalmente para a medida de altitude na aviação, por exemplo, é o **pé**. Um pé equivale a uma altitude de medida 30,48 centímetros ou 0,3048 metro. Analise o quadro a seguir.

Relação entre a quantidade de pés e a medida da altitude em metro

Quantidade de pés	Medida da altitude em metro
1	$1 \cdot 0{,}3048 = 0{,}3048$
2	$2 \cdot 0{,}3048 = 0{,}6096$
3	$3 \cdot 0{,}3048 = 0{,}9144$
n	$n \cdot 0{,}3048$

OBJETO DIGITAL
Carrossel de imagens: Funções
Este carrossel de imagens apresenta aos estudantes diferentes situações nas quais a ideia de função está presente. As imagens retratam casos em que duas ou mais variáveis estão envolvidas e como podem estar relacionadas entre si.

Considere um avião a uma altitude de medida 33.000 pés. Qual é a medida de sua altitude em metro?

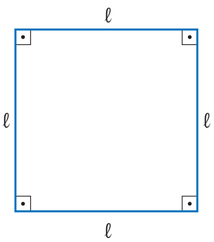
Nesse caso, podemos dizer que a medida da altitude em metro é **função** da quantidade de pés, ou seja, cada número que define a quantidade de pés corresponde a um único número que define a medida da altitude em metro.

Assim, para saber a medida da altitude do avião em metro, usamos a generalização observada no quadro e fazemos:

$$33.000 \cdot 0{,}3048 = 10.058{,}4$$

Portanto, o avião está a 10.058,4 metros de altitude.

Na Geometria, também podemos relacionar medidas de grandezas diferentes: por exemplo, a medida do comprimento do lado de um quadrado à medida de seu perímetro (p).



Relação entre a medida do comprimento do lado de um quadrado e a medida de seu perímetro *(p)*

Medida do comprimento do lado (cm)	1	$\sqrt{2}$	8	10,2	18,8	39	ℓ
Medida do perímetro (cm)	4	$4\sqrt{2}$	32	40,8	75,2	156	4ℓ

Assim, se ℓ for a medida do comprimento do lado do quadrado, a medida do perímetro será igual a 4ℓ. Essa relação pode ser representada pela seguinte sentença: $p = 4\ell$. Dizemos que p é **função** de ℓ, pois p e ℓ são duas **variáveis** que se relacionam e, para cada valor determinado para ℓ, existe um único p correspondente.

Dadas duas variáveis, x e y, se a cada valor atribuído a x se associa um único y, dizemos que y é **função** de x.

Definição de função

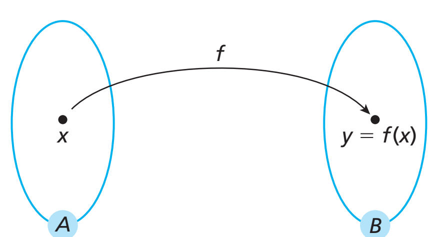
A seguir, vamos estudar a definição matemática de função e aprender a identificar diagramas que representam uma função.

Considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que f é uma **função** de A em B se, e somente se, para cada elemento x de A existe, em correspondência, um único elemento y de B.

Indicamos essa função assim: $f: A \rightarrow B$ (lemos: "função f de A em B").

É importante observar que:

- Quando f é uma função de A em B, podemos também dizer que f **leva** A para B ou que f é uma **aplicação** de A em B ou, ainda, que f é uma **transformação** de A em B.
- Para indicar o valor que a função f assume para x, escrevemos $f(x)$ (lemos: "f de x").
- Dada uma função f de A em B, é comum usar a letra x para designar um elemento genérico de A e a letra y para designar o valor correspondente a $f(x)$. Dizemos, então, que x é a **variável independente** e que y é a **variável dependente**.



A função f transforma $x \in A$ em $y \in B$.

- As funções podem ser definidas por uma **lei matemática**. Por exemplo, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x$. Por essa lei, entendemos que um número real x é transformado, pela função f, no triplo de x.

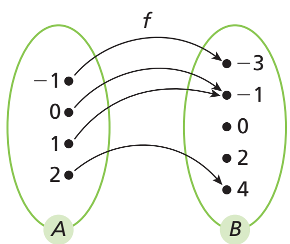
Observação

Embora seja frequente o uso da letra f para representar uma função e das letras x e y, respectivamente, para as variáveis independente e dependente, podemos usar outras letras.

Considere os exemplos.

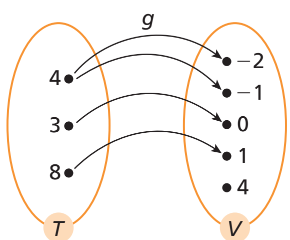
Vamos verificar se os diagramas a seguir representam funções.

a.



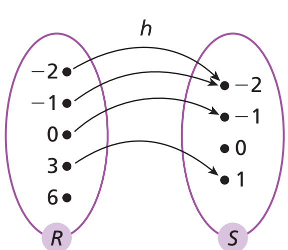
Como cada elemento de *A* está associado a um único elemento de *B*, então *f* é função de *A* em *B*.

b.



Como o elemento 4 pertencente a *T* está associado a mais de um elemento de *V* (aos elementos −2 e −1), concluímos que *g* não é função de *T* em *V*.

c.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Como o elemento 6, pertencente a *R*, não está associado a nenhum elemento de *S*, concluímos que *h* não é função de *R* em *S*.

Atividades resolvidas

R1. Em uma pista circular de testes, um automóvel desloca-se com medida de velocidade constante. Com o auxílio de um cronômetro, marcaram-se diferentes intervalos de tempo e, para cada intervalo, verificou-se a medida da distância percorrida. As medidas obtidas – do tempo (em hora) e da distância percorrida (em quilômetro) – foram registradas no quadro a seguir.

Relação entre a medida do tempo e a medida da distância percorrida por um automóvel

Medida do tempo (h)	Medida da distância (km)
0,2	10
0,4	20
0,8	40
1,6	80
2	100
x	50*x*

WAVEBREAKMEDIA/SHUTTERSTOCK

a. Calcular a medida da distância percorrida pelo automóvel quando a medida do tempo é igual a 2,8 horas.

b. Calcular a medida do tempo gasto pelo automóvel para percorrer uma distância que mede 330 km.

c. Considerando os valores registrados no quadro, é possível concluir que a medida da distância percorrida por esse automóvel é diretamente proporcional à medida do tempo gasto para percorrê-la?

▶ **Resolução**

a. Assumindo que a medida da distância percorrida varia em função da medida do tempo e considerando os dados do quadro, percebemos que, para determinar a medida da distância y (variável dependente) em função de certa medida de tempo x (variável independente), devemos multiplicar por 50 o número real positivo que representa x. Temos, então, a seguinte lei: $y = 50x$ ou $f(x) = 50x$

Queremos calcular $f(x)$ para $x = 2{,}8$, o que indicamos por $f(2{,}8)$.

Substituindo o valor de x na lei da função, obtemos:

$$f(2{,}8) = 50 \cdot 2{,}8 \Rightarrow f(2{,}8) = 140$$

Portanto, em 2,8 horas, o automóvel percorreu 140 quilômetros.

b. Agora, queremos calcular x para $f(x) = 330$.

Substituindo o valor de $f(x)$ na lei da função, obtemos:

$$330 = 50x \Rightarrow x = \frac{330}{50} \Rightarrow x = 6{,}6$$

Logo, para percorrer 330 quilômetros, o automóvel gastou 6,6 horas ou 6 horas e 36 minutos.

c. Comparando a variação das medidas de tempo e de distância, percebemos que, quando a medida do tempo duplica, a medida da distância também duplica; quando a medida do tempo quadruplica, ocorre o mesmo com a medida da distância; quando a medida do tempo quintuplica, a medida da distância também é multiplicada por cinco, e assim por diante. Isso mostra que a razão entre a medida da distância e a do tempo é constante; portanto, essas grandezas são diretamente proporcionais.

R2. Em certa cidade, a tarifa de táxi é calculada da seguinte forma: R$ 6,00 a bandeirada mais R$ 3,20 por quilômetro rodado, como mostra o quadro a seguir.

Observação

Consideramos que o taxímetro muda a cada quilômetro completo. Portanto, y varia "aos saltos": R$ 6,00 antes de completar o 1º quilômetro; R$ 9,20 antes de completar o 2º quilômetro; R$ 12,40 antes do 3º, e assim por diante. Dessa maneira, quando x percorre cada intervalo real $[n, n + 1[$, em que n é um número natural, o valor de y é constante e "salta" para R$ 3,20 a mais quando $x = n + 1$.

Cálculos da tarifa de táxi conforme a medida da distância, em quilômetro, a ser percorrida

Medida da distância x, em quilômetro, a ser percorrida	Valor a ser pago (R$)
$0 \leqslant x < 1$	$6{,}00 + 3{,}20 \cdot 0 = 6{,}00$
$1 \leqslant x < 2$	$6{,}00 + 3{,}20 \cdot 1 = 9{,}20$
$2 \leqslant x < 3$	$6{,}00 + 3{,}20 \cdot 2 = 12{,}40$
$3 \leqslant x < 4$	$6{,}00 + 3{,}20 \cdot 3 = 15{,}60$
$n \leqslant x < n + 1$	$6{,}00 + 3{,}20 \cdot n = y$

Sendo $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:

a. Pode-se estabelecer uma função entre o valor a ser pago e a medida da distância, em quilômetro, a ser percorrida? Em caso afirmativo, indique quais seriam as variáveis (dependente e independente) dessa função.

b. Calcule a tarifa de táxi para uma viagem de 6,5 km.

c. Rita gastou R$ 54,00 em uma viagem de táxi nessa cidade. Calcule o número inteiro de quilômetros dessa viagem.

▶ **Resolução**

a. Sim, pode-se estabelecer uma função: a cada número real positivo que representa o total de quilômetros de uma viagem (variável independente, a qual chamaremos de x) associa-se um único valor de tarifa (variável dependente, a qual chamaremos de y).

b. Como 6,5 está entre 6 e 7, para calcular a tarifa quando $x = 6{,}5$, devemos substituir n por 6 em $y = 6{,}00 + 3{,}20n$:

$y = 6{,}00 + 3{,}20 \cdot 6 \Rightarrow y = 25{,}20$

Portanto, a tarifa é R$ 25,20.

c. Agora, queremos calcular n, com $n \in \mathbb{N}$, para $y = 54{,}00$.

Substituindo o valor de y em $y = 6{,}00 + 3{,}20n$, obtemos:

$$54{,}00 = 6{,}00 + 3{,}20 \cdot n \Rightarrow n = \frac{54{,}00 - 6{,}00}{3{,}20} \Rightarrow n = 15$$

Logo, Rita fez uma viagem de 15 quilômetros.

3 a. É função, pois cada elemento de *A* tem um único correspondente em *B*.
3 b. Não é função, pois existe um elemento em *A* (o elemento 3) que tem dois correspondentes em *B*.
3 c. Não é função, pois existe um elemento em *A* (o elemento 5) que não tem correspondente em *B*.
3 d. É função, pois cada elemento de *A* tem um único correspondente em *B*.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Para calcular quanto seus usuários devem pagar pelo consumo de água, uma companhia de saneamento básico considera o número inteiro de metros cúbicos de água consumidos e aplica as regras indicadas no quadro a seguir:

Relação entre o consumo de água e o valor a ser pago correspondente a seu uso

Faixa de consumo (m^3)	Valor (R$)
Até 10	15,10 (valor fixo)
De 11 a 20	Acrescentar 2,35 por m^3
De 21 a 50	Acrescentar 5,50 por m^3
Acima de 50	Acrescentar 6,10 por m^3

Para cobrar também as despesas referentes ao esgoto, o preço total da conta é o dobro do valor referente ao consumo de água.

Por exemplo, o cálculo da medida do consumo de 22 m^3 é feito da seguinte maneira:

$$22\ m^3 = \underbrace{10\ m^3}_{\substack{\text{faixa de} \\ \text{até } 10\ m^3}} + \underbrace{10\ m^3}_{\substack{\text{faixa de} \\ 11\ m^3 \text{ a } 20\ m^3}} + \underbrace{2\ m^3}_{\substack{\text{faixa de} \\ 21\ m^3 \text{ a } 50\ m^3}}$$

Então, o valor a ser pago é dado por:

$$2 \cdot (\underbrace{\text{R\$ } 15{,}10}_{\substack{\text{faixa de} \\ \text{até } 10\ m^3}} + 10 \cdot \underbrace{\text{R\$ } 2{,}35}_{\substack{\text{faixa de} \\ 11\ m^3 \text{ a } 20\ m^3}} + 2 \cdot \underbrace{\text{R\$ } 5{,}50}_{\substack{\text{faixa de} \\ 21\ m^3 \text{ a } 50\ m^3}}) = \text{R\$ } 99{,}20$$

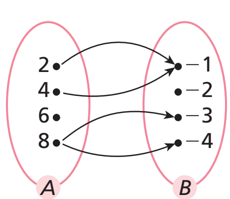
Considerando essas informações, responda às questões.

a. Quem consome 9 m^3 de água em um mês paga sua conta mais do que quem consome 7 m^3 mensalmente? **1 a.** Não.

b. Qual é o valor da conta para um consumo mensal de 19 m^3? E de 27 m^3? **1 b.** R$ 72,50; R$ 154,20.

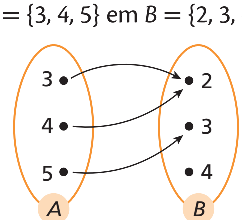
c. No mês em que houve um vazamento de água na casa de Flávia, ela recebeu uma conta de R$ 748,80. Qual foi o consumo de água na casa dela nesse período? **1 c.** 78 m^3

2. ARGUMENTAÇÃO Por que o diagrama a seguir não representa uma função de *A* em *B*? Justifique sua resposta.

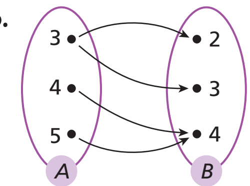


3. Verifique quais dos diagramas representam função de $A = \{3, 4, 5\}$ em $B = \{2, 3, 4\}$. Justifique suas respostas.

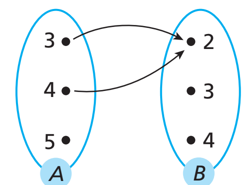
a.



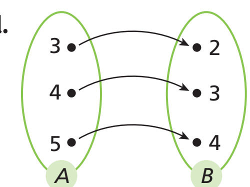
b.



c.



d.



2. O diagrama não representa uma função de *A* em *B* porque nem todo elemento de *A* tem um correspondente em *B*. Além disso, existe um elemento de *A* com mais de um correspondente em *B*.

4 a. Resposta no *Suplemento para o professor*.
4 b. Não, pois existe um elemento em *A* (o elemento 4) que não tem correspondente em *B*.

5. $f(8{,}1) = 6 + 3{,}20 \cdot 8 = 31{,}60$
$f(8{,}9) = 6 + 3{,}20 \cdot 8 = 31{,}60$
Logo, as viagens têm tarifas iguais, pois $f(8{,}1) = f(8{,}9)$.
Os estudantes podem observar que a função possui valores constantes no intervalo $[n, n + 1[$.

4. Considere $A = \{-5, -3, -1, 1, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 9, 25, 36, 81\}$ e a lei $y = x^2$ que associa *x* de *A* com *y* de *B*.

a. Represente essa situação por meio de um diagrama.

b. Esse diagrama representa uma função? Justifique.

5. ARGUMENTAÇÃO Qual das viagens de táxi, na cidade referida na **atividade resolvida R2**, tem tarifa maior: uma viagem de 8,1 quilômetros ou uma de 8,9 quilômetros? Justifique sua resposta.

6. Um fabricante de parafusos verificou que o preço de custo *p* (em real) de cada parafuso dependia da medida *x* (em milímetro) do diâmetro da base de cada um e podia ser calculado pela lei matemática $p(x) = 0{,}01x + 0{,}06$.


WI6995/SHUTTERSTOCK

a. Qual é a variável independente nessa situação? E a dependente? **6 a.** Medida do diâmetro da base; preço de custo.

b. Qual é o preço de custo de 1 parafuso com base medindo 3 milímetros de diâmetro? **6 b.** R$ 0,09

c. Quantos milímetros tem a medida do diâmetro da base de um parafuso cujo preço de custo é R$ 0,11? **6 c.** 5 mm

d. Qual é o custo de 500 parafusos com base medindo 3 milímetros de diâmetro? **6 d.** R$ 45,00

e. O fabricante vendeu 100 parafusos com base medindo 4 milímetros de diâmetro por R$ 20,00. Em relação ao preço de custo, qual foi o percentual de lucro nessa venda? **6 e.** 100%

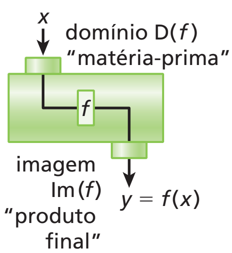
f. De acordo com a lei matemática determinada, quantos parafusos, com base medindo 3 mm de diâmetro, foram vendidos no ano de 2023?

6 f. Não há dados suficientes para que seja dada uma resposta a este item.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

A máquina ilustrada a seguir representa a ideia de função. Ela tem uma entrada para a matéria-prima (conjunto domínio) e uma saída para o produto final (conjunto imagem).

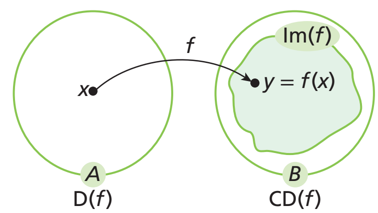


Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Dada uma função $f: A \to B$, temos:

- o conjunto A é chamado de **domínio** da função f, que indicamos por D ou D(f) (lemos: "domínio de f"), e o conjunto B é chamado de **contradomínio** da função f, que indicamos por CD ou CD(f) (lemos: "contradomínio de f");
- para cada $x \in D(f)$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de **imagem** de x pela função f. O conjunto formado por todas as imagens de x é chamado de **conjunto imagem** da função, que indicamos por Im ou Im(f) (lemos: "conjunto imagem de f").

Para definir uma função f, é preciso conhecer o domínio D(f), o contradomínio CD(f) e a maneira como cada x do domínio se corresponde com um único $y = f(x)$ do contradomínio. Cada função é dada por uma lei.



Domínio de uma função

Quando o domínio e o contradomínio de uma função não são explícitos, admitimos que o contradomínio é o conjunto dos números reais e que o domínio é também o conjunto dos números reais, excluídos os valores de x para os quais não vale a lei que associa x a y. Funções cujo domínio está contido nos números reais e cujo contradomínio é o dos números reais são chamadas de **funções reais de variável real**.

Acompanhe os exemplos.

a. Se a lei de uma função g é $g(x) = \frac{1}{x}$, e o domínio e o contradomínio não foram explicitados, subentende-se que $CD(g) = \mathbb{R}$ e que $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, já que, para $x = 0$, $g(x)$ seria uma fração com denominador nulo, o que não faz sentido.

b. Na função f dada por $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$, temos $CD(f) = \mathbb{R}$ e $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1 \text{ e } x \neq 2\}$, pois, se $x < -1$, $\sqrt{x+1}$ não é um número real e se $x = 2$, o denominador da fração é nulo, o que não faz sentido.

Zero de uma função

Todo número real x que pertence ao domínio da função f e valida a equação $f(x) = 0$ é denominado **zero da função f**.

Observação

Uma função pode ter um ou mais zeros ou nenhum zero.

Considere os exemplos.

a. O zero da função f, tal que $f(x) = 2x - 4$, é 2, pois: $f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 4 - 4 = 0$

b. A função m, dada por $m(x) = \frac{1}{x}$, não tem zero, pois não há valor de x que anule $m(x)$.

c. O zero da função g, tal que $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+5}}$, é 0, pois: $g(0) = \frac{0}{\sqrt{0+5}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$

Atividades resolvidas

R3. Determinar o conjunto imagem de $f: D(f) \to \mathbb{R}$ sabendo que $f(x) = 2x$ e considerando:

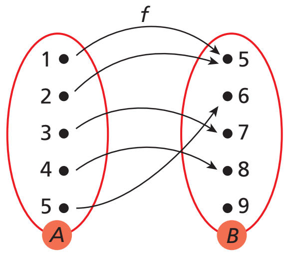
a. $D(f) = \{-2, 0, 7\}$ **b.** $D(f) = \mathbb{N}$

▶ **Resolução**

a. Como $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$, $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$ e $f(7) = 2 \cdot 7 = 14$, $Im(f) = \{-4, 0, 14\}$.

b. Como $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$, $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$, $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$, e assim sucessivamente, temos que $Im(f)$ é o conjunto dos números naturais pares.

R4. Considerar a função f dada pelo diagrama a seguir, em que $x \in A$ e $y \in B$.



Obter:

a. D(f);
b. CD(f);
c. Im(f);
d. o zero da função f;
e. y, quando $x = 2$;
f. $f(x)$, quando $x = 3$;
g. x, quando $y = 8$;
h. x, quando $f(x) = 5$.

▶ **Resolução**

a. $D(f) = A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b. $CD(f) = B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
c. $Im(f) = \{5, 6, 7, 8\}$
d. A função f não tem zero.
e. $x = 2 \Rightarrow y = 5$
f. $x = 3 \Rightarrow f(x) = 7$
g. $y = 8 \Rightarrow x = 4$
h. $f(x) = 5 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$

R5. Determinar os zeros das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

a. $g(x) = x + 9$
b. $h(x) = x^2 - 1$

▶ **Resolução**

a. Devemos determinar os valores de x para os quais $g(x) = 0$.
$g(x) = 0 \Rightarrow x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

b. Devemos determinar os valores de x para os quais $h(x) = 0$.
$h(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

R6. Dada a função $v(x) = x^2 - x$, determinar $v(5) + v\left(\frac{1}{2}\right)$.

▶ **Resolução**

$v(5) = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$

$v\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$

$v(5) + v\left(\frac{1}{2}\right) = 20 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{80}{4} - \frac{1}{4} = \frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$

8 a. $D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{6, 7, 8, 9\}$.
8 b. Não existe x tal que $f(x) = 4$.
8 c. $f(5) = 6$

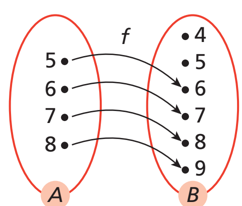
Atividades propostas

7. Não, pois em uma função podem existir elementos de B sem correspondentes em A.

Registre em seu caderno

7. **ARGUMENTAÇÃO** Para toda função f: $A \to B$, tem-se $Im(f) = B$? Justifique sua resposta.

8. Analise o diagrama e obtenha o que se pede.



a. O domínio, o contradomínio e a imagem da função representada.
b. O valor de x para $f(x) = 4$.
c. O valor de $f(x)$ para $x = 5$.

9. Determine os zeros das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

a. $f(x) = 2x - 5$ **9 a.** $\frac{5}{2}$
b. $g(x) = \frac{2x}{3}$ **9 b.** 0
c. $h(x) = x^2 - 16$ **9 c.** 4 e -4
d. $j(x) = \frac{7}{x}$ **9 d.** Não tem zero.

14 a. $D(f) = \mathbb{R}$
14 b. $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$
14 c. $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 8\}$
14 d. $D(j) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1 \text{ e } x \neq 3\}$

10. Responda às questões:

a. Para qual valor de x se tem $2^x = 4$? **10 a.** 2
b. Para qual valor de x se tem $4^x - 2 = 0$? **10 b.** $\frac{1}{2}$
c. Quais são os zeros da função $f(x) = (2^x - 4) \cdot (4^x - 2)$? **10 c.** 2 e $\frac{1}{2}$

11. Expresse a medida da área s de um retângulo cuja medida do comprimento é o dobro da medida da largura ℓ. Escreva o domínio e o conjunto imagem da função definida por essa lei.
11. $s(\ell) = 2\ell^2$; $D(s) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(s) = \mathbb{R}_+^*$.

12. Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 4x + 1$. Determine:

a. $f(4)$ **12 a.** 17
b. $f(-2)$ **12 b.** -7
c. $f(-1) + f(0) - f(11)$ **12 c.** -47
d. $2f(3) - f(-3)$ **12 d.** 37

13. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA** No decorrer da História da Matemática, estudiosos tentaram, sem sucesso, encontrar uma função que para todo inteiro positivo n fornecesse sempre números primos (números que têm como divisores somente o 1 e ele mesmo). Durante as tentativas, uma das funções encontradas foi $f(n) = n^2 - n + 41$.

Fonte: elaborado com base em EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. p. 623.

a. Calcule $f(1), f(2), f(5), f(10), f(11)$ e $f(41)$.
b. Por que a função $f(n) = n^2 - n + 41$ não atende ao que os estudiosos buscavam no decorrer da História da Matemática? **13 b.** Exemplo de resposta: porque, para $n = 41$, a função não gera um número primo.

14. Obtenha o domínio de cada função.

a. $f(x) = 9x + 3$
b. $g(x) = \frac{x^3 + 8x}{x + 3}$
c. $i(x) = \sqrt{x - 8}$
d. $j(x) = \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 3}$

15. Escreva o conjunto imagem de cada função.

a. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, sendo $D(f) = \{1, 4, 9, 16, 25\}$.
b. $w(x) = \frac{1}{x - 1}$, sendo $D(w) = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$.

16. Determine, se existirem, os zeros reais das funções.

a. $h(x) = 4 - x$ **16 a.** 4
b. $s(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ **16 b.** 1
c. $m(x) = x^2 + 1$ **16 c.** Não há zero real.
d. $p(x) = \frac{1}{x + 1}$ **16 d.** Não há zero real.

17. Que valores do domínio da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x - 6$, têm imagem igual a -6? **17.** 0 ou 2.

18. Sabe-se que f é uma função definida por $f(x) = ax - 4$, com a real e $f(3) = 11$. Calcule $f(-5)$. **18.** -29

19. Considere a função g, definida por $g(x) = ax + b$, com a, $b \in \mathbb{R}$, $g(2) = 8$ e $g(-2) = -4$. Determine:

a. a e b; **19 a.** $a = 3$; $b = 2$.
b. o zero da função. **19 b.** $-\frac{2}{3}$

13 a. $f(1) = 41$, $f(2) = 43$, $f(5) = 61$, $f(10) = 131$, $f(11) = 151$ e $f(41) = 41^2 = 1.681$.

15 a. $Im(f) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$

15 b. $Im(w) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Gráfico de uma função

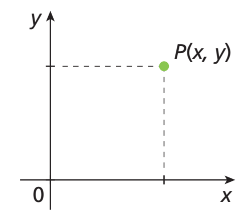
Para construir o gráfico de uma função *f*, utilizamos a representação de par ordenado de números reais (*a*, *b*) em um plano cartesiano. Vamos recordar alguns conceitos relacionados ao plano cartesiano.

20. $A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(-6, 0)$; $D(-1, -3)$; $E(2, -1)$; $F(-5, 3)$; $G(0, 2)$; $H(0, -2)$; $I(4, 0)$.

22. Sim, porque o ponto $R(1, -2)$ tem abscissa 1, ordenada -2 e está localizado no 4º quadrante; o ponto $S(-2, 1)$ tem abscissa -2, ordenada 1 e está localizado no 2º quadrante.

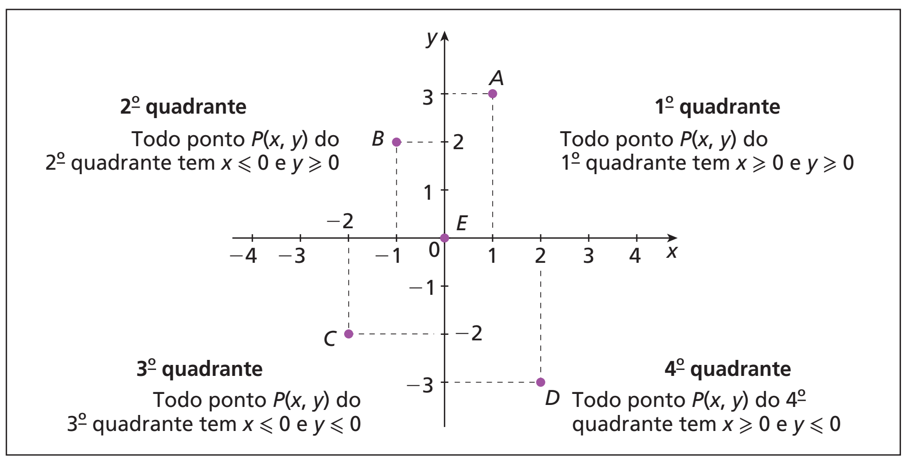
Plano cartesiano

Plano cartesiano é o plano determinado pelo sistema de eixos ortogonais *x* (**eixo das abscissas**) e *y* (**eixo das ordenadas**), que o dividem em quatro regiões chamadas de **quadrantes**.



Um ponto *P*, representado no plano cartesiano, tem uma referência horizontal (*x*) e uma referência vertical (*y*), que correspondem às projeções ortogonais de *P* em cada eixo e que, juntas, definem o **par ordenado** (*x*, *y*). Dizemos que *x* e *y* são **coordenadas** do ponto $P(x, y)$.

Considere o plano cartesiano a seguir.



Nele, observamos que:

- O ponto $E(0, 0)$ é a origem do plano cartesiano.
- $A(1, 3)$ tem abscissa 1, ordenada 3 e está no 1º quadrante;
- $B(-1, 2)$ tem abscissa -1, ordenada 2 e está no 2º quadrante;
- $C(-2, -2)$ tem abscissa -2, ordenada -2 e está no 3º quadrante;
- $D(2, -3)$ tem abscissa 2, ordenada -3 e está no 4º quadrante;

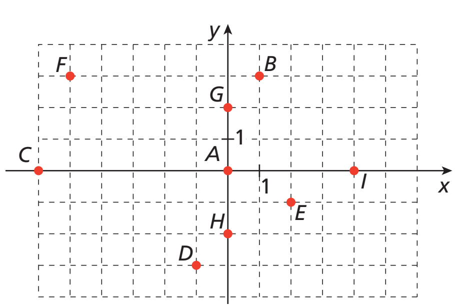
Note que:

- cada par ordenado corresponde a um único ponto no plano cartesiano;
- cada ponto do plano cartesiano corresponde a um único par ordenado;

Atividades propostas

Registre em seu caderno

20. Indique as coordenadas dos pontos que estão representados no plano cartesiano a seguir.



21. Construa um plano cartesiano em uma folha quadriculada e marque os pontos indicados: $E(-1, 2)$; $F(-2, 1)$; $G(-2, 3)$; $H(-3, 0)$; $I(-3, 4)$; $J(-4, 1)$; $K(-4, 3)$; $L(-5, 2)$.

21. Resposta no *Suplemento para o professor*.

22. ARGUMENTAÇÃO O ponto $R(1, -2)$ tem localização diferente do ponto $S(-2, 1)$? Por quê?

23. O ponto $(3, 5y + 10)$ pertence ao eixo das abscissas. Determine *y*. **23.** -2

24. O ponto $(2x, y + 3)$ está no 2º quadrante. Indique os valores que *x* e *y* podem assumir. **24.** $x \leqslant 0$ e $y \geqslant -3$.

Construção do gráfico de uma função

Ao construir o gráfico de uma função, usamos o sistema de coordenadas cartesianas. O gráfico da função fica determinado por todos os pontos do plano cartesiano representados pelos pares ordenados (x, $f(x)$) que tenham x pertencente ao domínio de f.

Como exemplo, vamos construir o gráfico da função f: $A \rightarrow B$, dada pela lei $f(x) = 2x - 3$, em três situações.

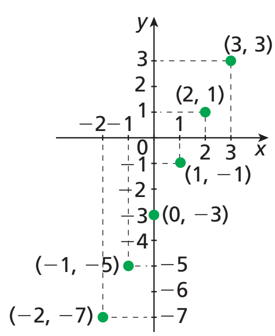
1ª situação: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-11, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 7, 9, 11\}$

Para determinar os pontos (x, y) do gráfico, calculamos $y = f(x)$ para cada x do domínio A, substituindo o valor de x na lei da função. Observe no quadro a seguir.

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $f(x) = 2x - 3$

x	$y = f(x) = 2x - 3$	(x, y)
-2	$y = f(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$	$(-2, -7)$
-1	$y = f(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$	$(-1, -5)$
0	$y = f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$y = f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$	$(1, -1)$
2	$y = f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$	$(2, 1)$
3	$y = f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$	$(3, 3)$

Em seguida, marcamos os pontos no plano cartesiano.



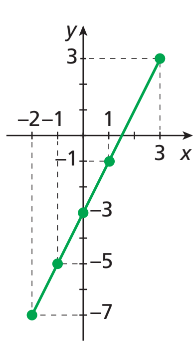
Nesta situação, os **pontos** assinalados constituem o gráfico da função f.

Observação

Note que o gráfico da 1ª situação é formado por apenas 6 pontos do plano cartesiano.

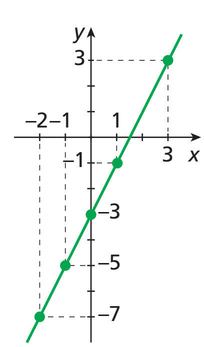
2ª situação: $A = [-2, 3]$ e $B = \mathbb{R}$

Para determinar os pontos (x, y) do gráfico da função f, podemos usar os valores dados a x na 1ª situação e assim obter os mesmos valores de y. Além desses pontos, atribuindo a x outros valores do conjunto $[-2, 3]$, podemos obter qualquer dos infinitos outros pontos do **segmento** que é o gráfico da função f.



3ª situação: $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$

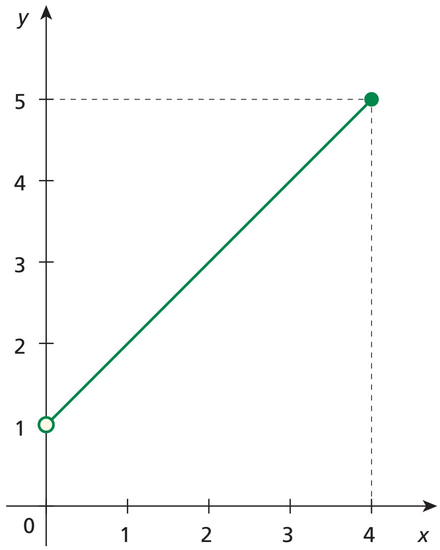
Nesse caso, assim como na 2ª situação, repetimos os valores dados a x na 1ª situação e assim obtemos os pontos (x, y). Além desses pontos, atribuindo a x outros valores de $\mathbb{R}$, podemos obter qualquer dos infinitos outros pontos da **reta** que é o gráfico da função f descrita nessa situação.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade resolvida

R7. O gráfico a seguir representa a função f, dada por $f(x) = x + 1$, com $0 < x \leqslant 4$. Determinar o domínio e a imagem de f.



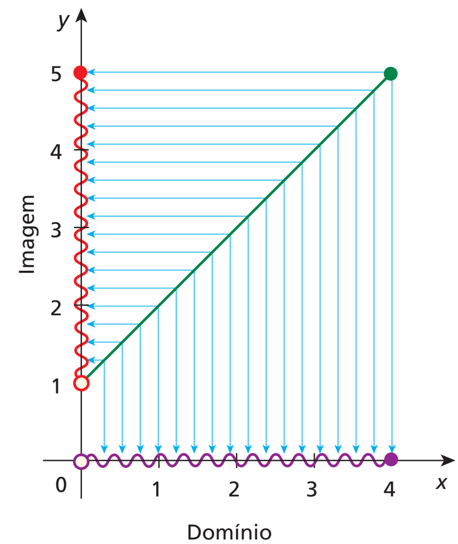
Observações

Note que:
- sendo $0 < x$, o ponto de abscissa zero não pertence ao gráfico (ponto "vazio");
- sendo $x \leqslant 4$, o ponto de abscissa 4 pertence ao gráfico (ponto "cheio").

▶ **Resolução**

O domínio de f é o conjunto dos números reais x que são abscissas dos pontos do gráfico da função, e o conjunto imagem de f é o conjunto dos números $f(x)$ para os quais $x \in D(f)$.

No plano cartesiano, obtemos D(f) e Im(f) por meio das projeções ortogonais do gráfico de f sobre os eixos x e y, respectivamente.

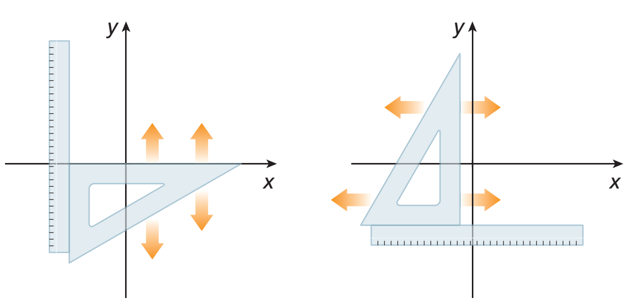


O domínio de f é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 4\}$, e o conjunto imagem de f é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y \leqslant 5\}$.

Atividade proposta

Registre em seu caderno

25. EM DUPLA Nesta atividade, que deve ser realizada com um colega, não faça nenhum traçado: apenas posicione um esquadro em um dos eixos do gráfico, localizado no final da atividade, e deslize-o ao lado de uma régua fixada, conforme as ilustrações a seguir.



25 a. Exemplo de resposta: $f(3) = 1$; $f(-2) = -1$; $f(4) = 3$ e $f(2) = 5$.

Considere o gráfico apresentado no final da atividade, que representa uma função de A em B, sendo $A = [-2, 4]$ e $B = \mathbb{R}$, para resolver as questões.

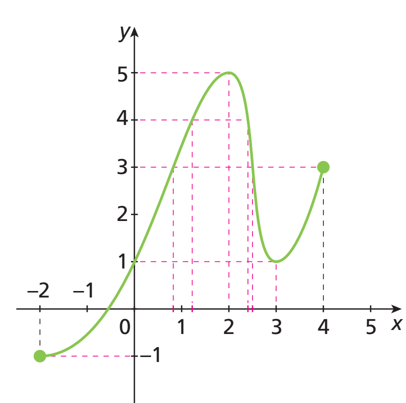
a. Estime os valores de $f(3)$, $f(-2)$, $f(4)$ e $f(2)$;

b. Estime os valores de x tal que $f(x) = 1$, $f(x) = 0$, $f(x) = 3$ e $f(x) = 4$;

c. Estime Im(f). **25 c.** Exemplo de resposta: $Im(f) = [-1, 5]$.

d. Imagine todas as retas perpendiculares ao eixo y. Dê o número de pontos em que o gráfico de f fica interceptado por uma reta desse grupo e que passa pelo ponto:
25 d. nenhum; 3; 2; 1.
- (0, 6)
- (0, 2)
- (0, 4)
- (0, 0)

e. Imagine todas as retas perpendiculares ao eixo x e que passem por pontos de abscissas pertencentes ao domínio A. Alguma dessas retas intercepta o gráfico de f em mais de um ponto? Alguma não intercepta o gráfico de f? **25 e.** Não; não.



25 b. Exemplo de resposta: para $f(x) = 1$, temos $x = 0$ e $x = 3$; para $f(x) = 0$, temos $x = -0{,}5$; para $f(x) = 3$, temos $x = 0{,}9$, $x = 2{,}5$ e $x = 4$; para $f(x) = 4$, temos $x = 1{,}3$ e $x = 2{,}4$.

Reconhecimento dos gráficos de uma função

Ao observar um gráfico, é possível verificar se a curva descrita corresponde ou não a uma função. Para isso, é necessário recordar que um gráfico corresponde a uma função se, para cada elemento do domínio (valores do eixo x), há uma única imagem correspondente no contradomínio (valores do eixo y).

Observação

Quando o gráfico de uma função real for uma linha sem pontos destacados (ponto "cheio" ou ponto "vazio") em alguma de suas extremidades, considerar que essa linha continua indefinidamente. Presumir que a parte visível do gráfico pode indicar ou induzir como o gráfico continua, salvo observação contrária.

Analise os exemplos.

Considerando $D = \mathbb{R}$ e $CD = \mathbb{R}$, vejamos quais dos gráficos abaixo representam uma função.

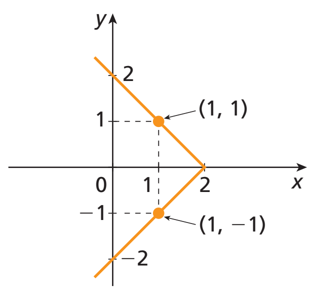


Gráfico 1. Existem elementos do domínio (no eixo x) que têm mais de um correspondente no contradomínio (no eixo y).

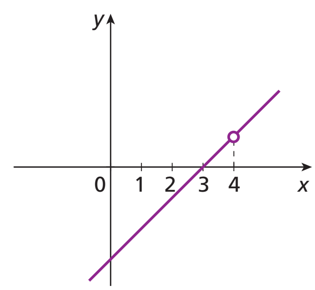


Gráfico 2. Há um elemento do domínio ($x = 4$) que não tem correspondente no contradomínio (no eixo y).

Observação

Para o gráfico 2 representar uma função, poderíamos fazer uma restrição ao domínio da função para $x \neq 4$. Ou seja, para $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$, o gráfico 2 representa uma função.

Os gráficos 1 e 2 **não representam** uma função.

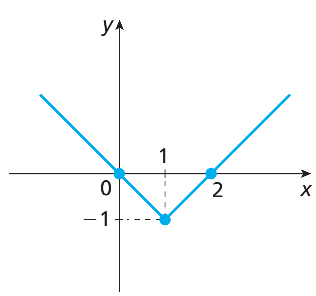


Gráfico 3. Cada elemento do domínio (no eixo x) tem uma única imagem correspondente no contradomínio (no eixo y).

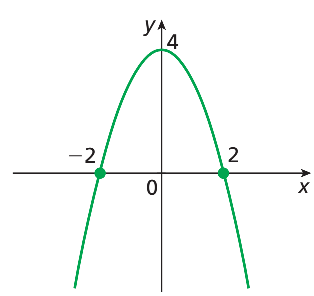


Gráfico 4. Cada elemento do domínio (no eixo x) tem uma única imagem correspondente no contradomínio (no eixo y).

Os gráficos 3 e 4 **representam** uma função.

A representação gráfica de uma função pode facilitar a determinação de seu conjunto imagem e de seus zeros, isto é, das abscissas dos pontos $(x, 0)$ em que o gráfico intercepta o eixo x. Por exemplo:

- no gráfico 3, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$; os zeros da função são 0 e 2;
- no gráfico 4, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$; os zeros da função são -2 e 2.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

29 a. $y = 5{,}82x$

Atividades propostas

26. Respostas no *Suplemento para o professor*.

Registre em seu caderno

26. Construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico de cada função a seguir.

a. $f: A \rightarrow B$, em que $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dada por $f(x) = x^2$.

b. $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x - 1$.

c. $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $k(x) = 7$.

27. Faça o que se pede em cada item.

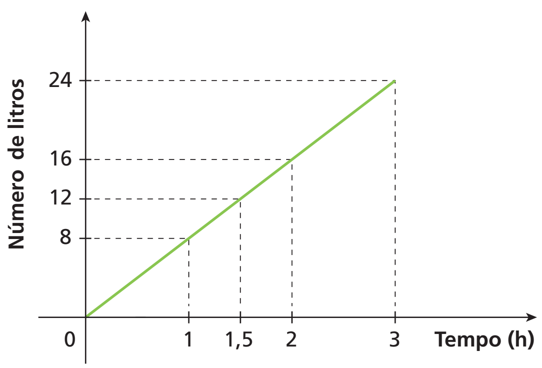
27 b. 2

a. Verifique se o ponto representado pelo par ordenado $(8, -1)$ pertence ao gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x - 9$. Justifique. 27 a. Não, pois $f(8) = 31 \neq -1$.

b. Determine o valor de a para que o ponto $(-2, 1)$ pertença ao gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + 5$.

c. O domínio de uma função f é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$. O ponto representado pelo par ordenado $(3, -1)$ pode pertencer ao gráfico de f? 27 c. Não, pois $3 \notin D(f)$.

28. Uma máquina produz, por hora, 8 litros de certa substância. O gráfico a seguir apresenta o número de litros que essa máquina produz, em função do tempo, em regime ininterrupto de 3 horas.



a. Quais são as variáveis envolvidas nessa situação?

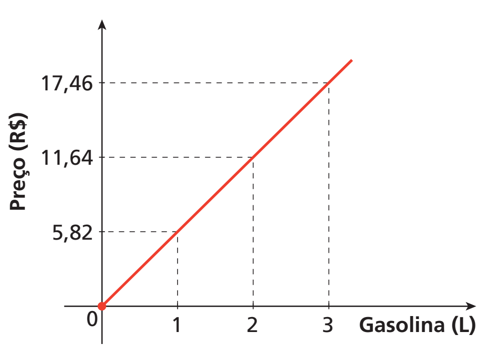
b. Qual lei relaciona essas variáveis?

c. Qual é o significado do par ordenado (1,5; 12)?

d. Quantos litros da substância a máquina produziria em 6 horas em regime ininterrupto? E em 10 horas?

e. Quantas horas são necessárias para a máquina produzir 4 litros da substância?

29. Em um posto, o litro da gasolina comum custa R\$ 5,82. Observe o gráfico a seguir e responda às perguntas.



a. Qual lei relaciona o preço (y) com o litro da gasolina (x)?

b. Quanto custa 1,5 litro de gasolina? 29 b. R\$ 8,73

c. Pagando um total de R\$ 17,46, quantos litros de gasolina comprará um consumidor? E se pagar R\$ 58,20?

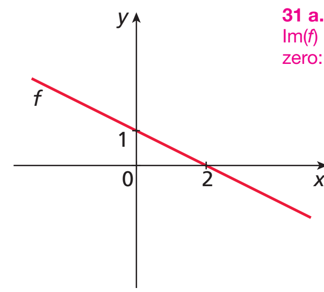
d. Quantos litros de gasolina, no máximo, poderão ser comprados com R\$ 291,00? 29 d. 50 L 29 c. 3 L; 10 L.

30. Considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - 2$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -x + 2$. 30. Respostas no *Suplemento para o professor*.

Construa, em uma folha de papel quadriculado, os gráficos de f e de g, tendo como um dos pontos o de abscissa igual ao zero da função. Em seguida, para cada função, determine os valores de x para os quais y é positivo.

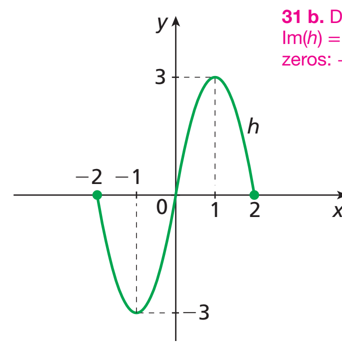
31. Determine o domínio, o conjunto imagem e os zeros das funções correspondentes a cada gráfico.

a.



31 a. $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}$
zero: 2

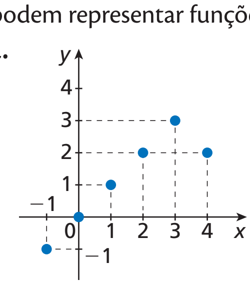
b.



31 b. $D(h) = [-2, 2]$
$Im(h) = [-3, 3]$
zeros: -2, 0 e 2.

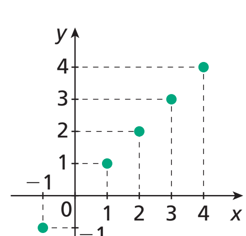
32. Dados $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \mathbb{R}$, verifique se os gráficos podem representar funções de A em B.

a.



32 a. Sim.

b.



32 b. Não.

28 a. Variável independente: tempo; variável dependente: número de litros.
28 b. $y = 8x$, em que y é o número de litros e x é o tempo em hora.
28 c. Em 1 hora e meia, a máquina produz 12 litros.
28 d. 48 litros; 80 litros
28 e. 0,5 hora

Análise de gráficos de funções

Intervalos de crescimento e de decrescimento

O gráfico a seguir mostra a variação anual do número de professores nas escolas do Brasil, comparando as etapas de ensino, no período de 2018 a 2022.

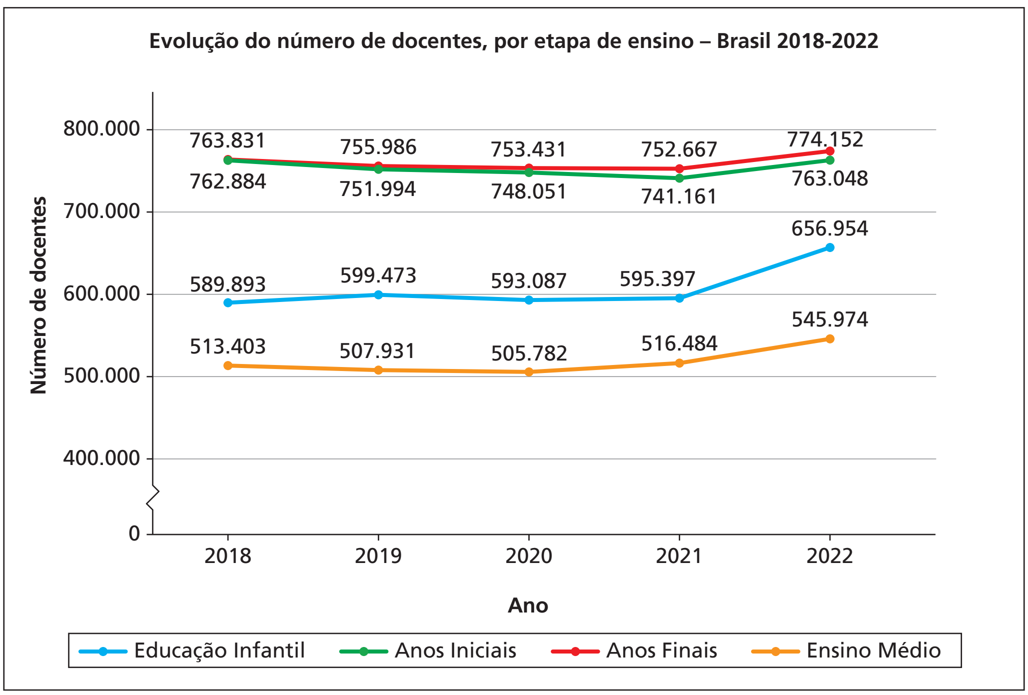
Nele, notamos que a variação anual do número de professores no período indicado se assemelha muito nos Anos Iniciais e nos Anos Finais.

O Ensino Médio apresenta dois momentos de decrescimento do número de professores, de 2018 a 2019 e de 2019 a 2020.

Os Anos Iniciais e os Anos finais apresentaram descrescimento por um período maior: de 2018 a 2021, mas é no Ensino Médio que encontramos o menor número de docentes do período, em especial no ano de 2020.

ODS 8

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.



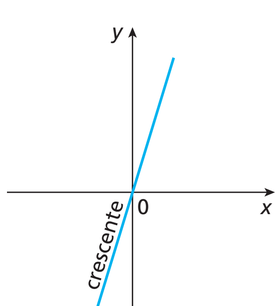
Fonte: elaborado com base em INEP. **Censo escolar da educação básica 2022**: resumo técnico. Brasília, DF: Inep, 2022. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas_e_indicadores/resumo_tecnico_censo_escolar_2022.pdf. Acesso em: 5 set. 2024.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim como verificamos a variação do número de docentes nas escolas do Brasil por meio desse gráfico, podemos verificar o comportamento das variáveis de uma função qualquer mediante a análise da representação gráfica da função, ou seja, analisar o **crescimento** ou o **decrescimento** da função para os valores do domínio.

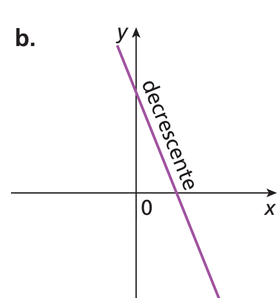
As funções representadas pelos gráficos a seguir têm domínio e contradomínio reais (são funções reais).

a.



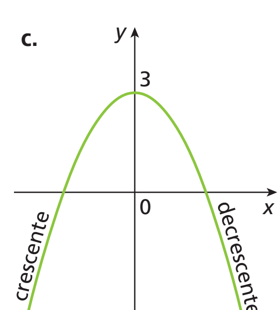
Essa reta representa uma **função crescente**: quanto maior o valor de x, maior o valor de y.

b.



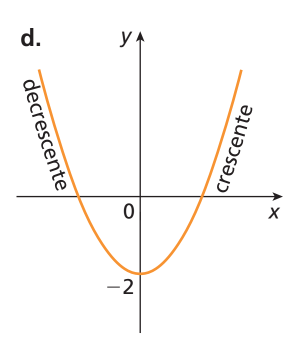
Essa reta representa uma **função decrescente**: quanto maior o valor de x, menor o valor de y.

c.



Nesse caso, a função é **crescente** para $x \leqslant 0$ e **decrescente** para $x \geqslant 0$.

d.



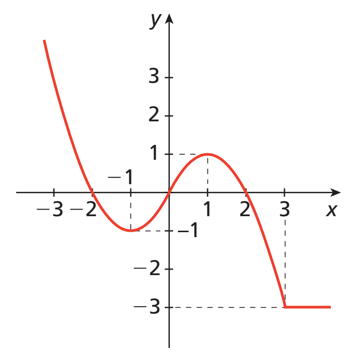
Nesse caso, a função é **decrescente** para $x \leqslant 0$ e **crescente** para $x \geqslant 0$.

Podemos concluir que:

- uma função f é **crescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$;
- uma função f é **decrescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

Atividade resolvida

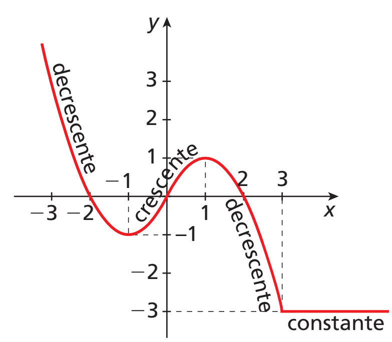
R8. Indicar o(s) intervalo(s) do domínio no(s) qual(is) a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, representada no gráfico, é crescente, decrescente e constante (ou seja, não é crescente nem decrescente).



▶ Resolução

A função é:

- decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, 3]$, pois, nesses intervalos, quanto maior o valor de x (domínio), menor o valor de y (imagem);
- crescente em $[-1, 1]$, pois, nesse intervalo, quanto maior o valor de x, maior o valor de y;
- constante em $[3, +\infty[$, pois, nesse intervalo, o valor de y não varia.



Valor máximo e valor mínimo de uma função

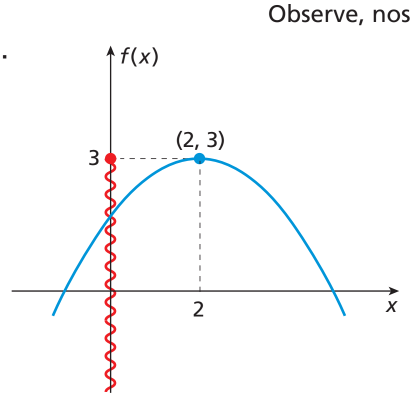
Algumas funções f têm $y_m \in \text{Im}(f)$ tal que não existe $y \in \text{Im}(f)$ maior que y_m. Dizemos, então, que y_m é o **valor máximo** da função.

Da mesma forma, se não existe y menor que y_m, ambos pertencentes ao conjunto imagem da função f, então y_m é o **valor mínimo** da função.

Analise os exemplos.

Observe, nos gráficos das funções a seguir, o conjunto imagem.

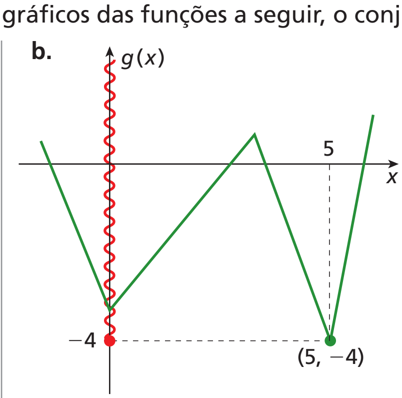
a.



- $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 3\}$;
- f tem um máximo em (2, 3).

Logo, $y_m = 3$ é o valor máximo de f.

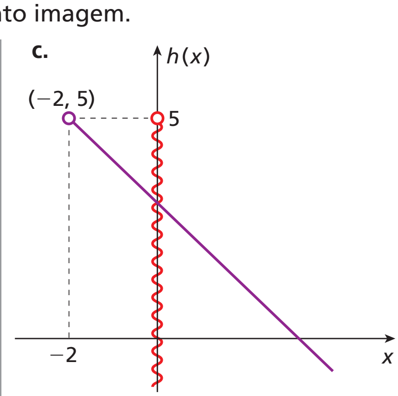
b.



- $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$;
- g tem um mínimo em (5, −4).

Logo, $y_m = -4$ é o valor mínimo de g.

c.



- $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 5\}$;
- h não tem valor máximo nem valor mínimo.

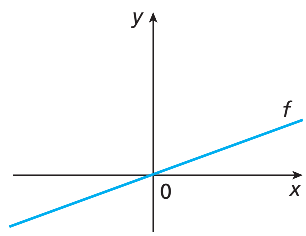
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

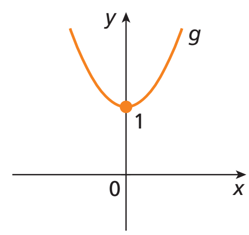
33 a. *f* é crescente para $x \in \mathbb{R}$; *g* é crescente para $x \in [0, +\infty[$ e decrescente para $x \in]-\infty, 0]$; *h* é crescente para $x \in]-\infty, -1]$ e para $x \in [1, +\infty[$ e decrescente para $x \in [-1, 1]$.
33 b. Só *g* tem um valor mínimo, e esse valor é $y = 1$.

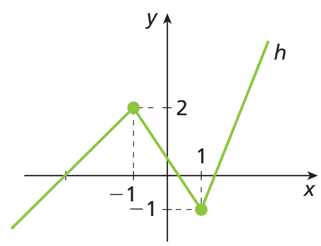
Atividades propostas

Registre em seu caderno

33. Observe os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e, em seguida, faça o que se pede.







a. Identifique os intervalos de crescimento e os intervalos de decrescimento de cada função.

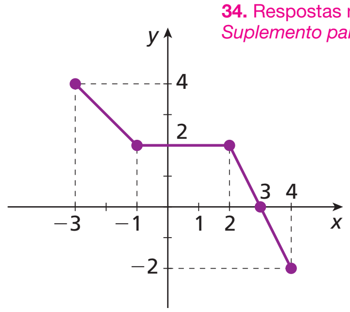
b. As funções apresentam um valor máximo ou um valor mínimo? Em caso afirmativo, que valores são esses?

34. Construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico das funções *g* e *h*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e verifique se são crescentes ou decrescentes em todo o domínio.

a. $g(x) = x + 5$ **b.** $h(x) = -2x + 1$

35. Observe o gráfico da função *f* a seguir e, depois, responda às questões.

34. Respostas no *Suplemento para o professor*.



a. Qual é a imagem de 2 pela função *f*? 35 a. 2

b. Para que valor de *x* a imagem é −2? 35 b. 4

c. No intervalo [−1, 2], a função assume valores positivos ou negativos?

d. No intervalo [−1, 2], a função é crescente? 35 d. Não.

e. Qual é o domínio dessa função? 35 e. D(*f*) = [−3, 4]

f. Qual é o conjunto imagem dessa função?

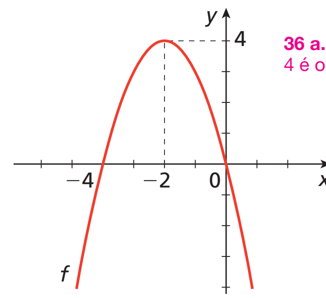
g. Qual é o valor máximo dessa função? 35 g. 4

h. Qual é o valor mínimo dessa função? 35 h. −2

35 c. Nesse intervalo, a função assume valores positivos. 35 f. Im(*f*) = [−2, 4]

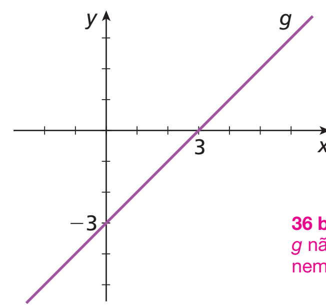
36. Determine o conjunto imagem e o valor máximo ou valor mínimo das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ representadas pelos gráficos a seguir.

a.



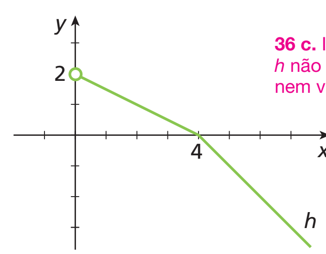
36 a. Im(*f*) = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$; 4 é o valor máximo de *f*.

b.



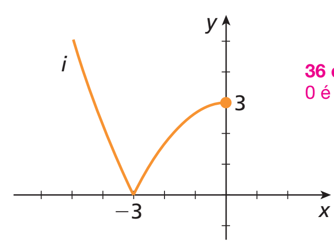
36 b. Im(*g*) = $\mathbb{R}$; *g* não tem valor máximo nem valor mínimo.

c.



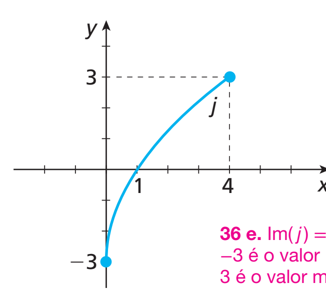
36 c. Im(*h*) = $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$; *h* não tem valor máximo nem valor mínimo.

d.



36 d. Im(*i*) = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$; 0 é o valor mínimo de *i*.

e.



36 e. Im(*j*) = $\{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$; −3 é o valor mínimo de *j*; 3 é o valor máximo de *j*.

37. Construa o gráfico de uma função que tenha valor mínimo −2. 37. Resposta no *Suplemento para o professor*.

38. Construa o gráfico de uma função cujo conjunto imagem seja $\left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < y < 2\right\}$.

38. Resposta no *Suplemento para o professor*.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Estudo do sinal de uma função

Observação

Para estudar o sinal de uma função, verificamos os elementos do seu domínio para os quais a imagem pela função é um valor positivo, um valor negativo ou um valor nulo.

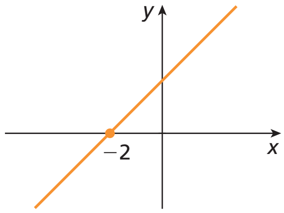
O estudo do sinal de uma função pode ser feito por meio de sua representação gráfica.

No gráfico de uma função, todos os pontos acima do eixo x têm ordenada positiva ($y > 0$), e todos os pontos abaixo do eixo x têm ordenada negativa ($y < 0$). Nos pontos em que o gráfico intercepta o eixo x, a ordenada é nula ($y = 0$). Portanto, se, em determinado intervalo do domínio de uma função, os pontos do gráfico estiverem:

- acima do eixo x, dizemos que a função é **positiva** nesse intervalo;
- abaixo do eixo x, dizemos que a função é **negativa** nesse intervalo.

Acompanhe o exemplo.

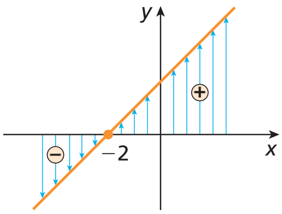
Vamos estudar o sinal da função f cujo gráfico está representado a seguir.



Note que os pontos de abscissa maior que −2 têm ordenada positiva, os pontos de abscissa menor que −2 têm ordenada negativa e o ponto de abscissa −2 tem ordenada zero.

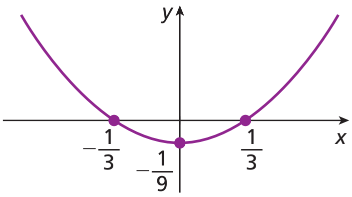
Assim:

- f é positiva para $x > -2$;
- f é negativa para $x < -2$;
- f é nula para $x = -2$.



Atividades resolvidas

R9. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está representada no gráfico abaixo.



a. Em que intervalos do domínio a função f é positiva?

b. Em que intervalos do domínio a função f é negativa?

c. Para que valores de x a função f é nula?

d. Qual é o valor mínimo de f?

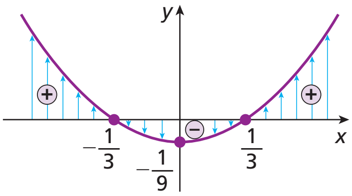
▸ Resolução

a. A função f é positiva nos intervalos $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$ e $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

b. A função f é negativa no intervalo $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

c. A função f é nula em $x = \frac{1}{3}$ e em $x = -\frac{1}{3}$.

d. O valor mínimo de f é $-\frac{1}{9}$.



R10. Estudar o sinal das funções:

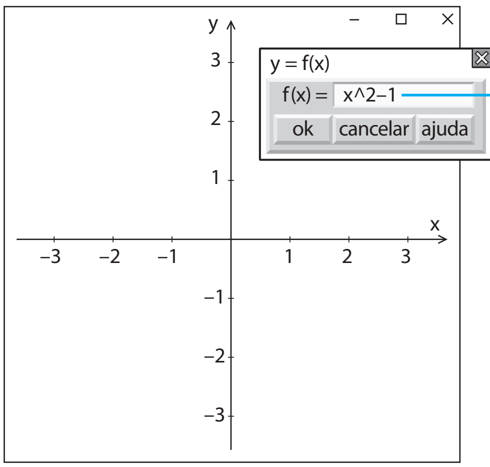
a. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 1$

b. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2^x - 1$

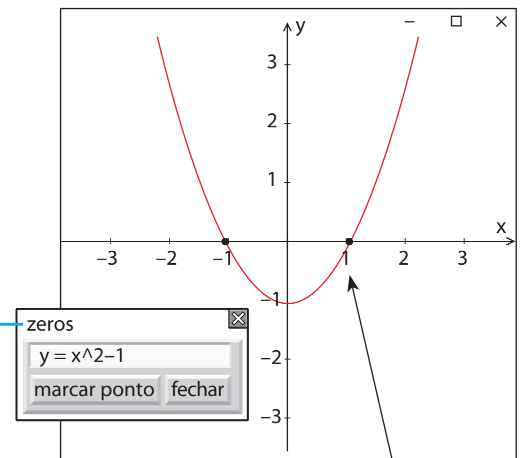
▶ Resolução

Podemos estudar o sinal de uma função a partir de seu gráfico. Vamos construir os gráficos das funções f e g utilizando um *software* de construção de gráficos.

Começaremos pela função dada pela lei $f(x) = x^2 - 1$.

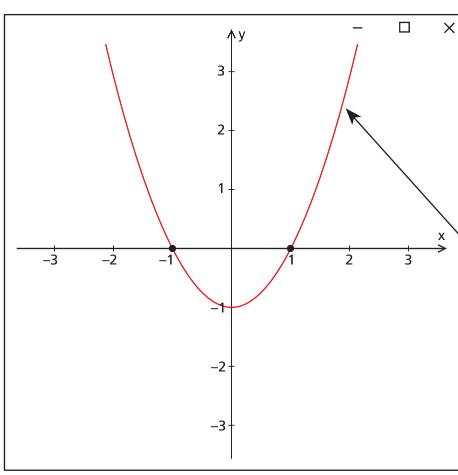


Campo para digitar a lei da função do gráfico a ser construído. Há diferentes maneiras de escrever $x^2 - 1$, por exemplo: x^2–1 ou x*x–1



Selecionando a ferramenta raízes, marcamos os pontos cujas abscissas são os zeros da função.

Construído o gráfico da função f, encontramos as raízes da função. A função é nula para $x = -1$ e para $x = 1$.

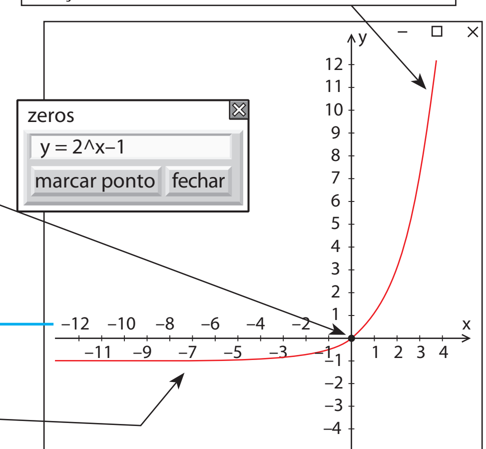


Então, podemos observar que:

- a função f é positiva nos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$;
- a função f é negativa no intervalo $]-1, 1[$.

Agora, vamos construir o gráfico e estudar o sinal da função dada por $g(x) = 2^x - 1$.

Construímos o gráfico da função g. A função é crescente em todo o seu domínio.



Encontramos a raiz da função g. A função é nula para $x = 0$.

Muitas vezes precisamos mudar a escala usada nos eixos ordenados para conseguir observar melhor o gráfico construído.

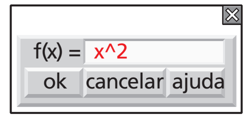
Então, podemos afirmar que:

- a função g é positiva no intervalo $]0, +\infty[$;
- a função g é negativa no intervalo $]-\infty, 0[$.

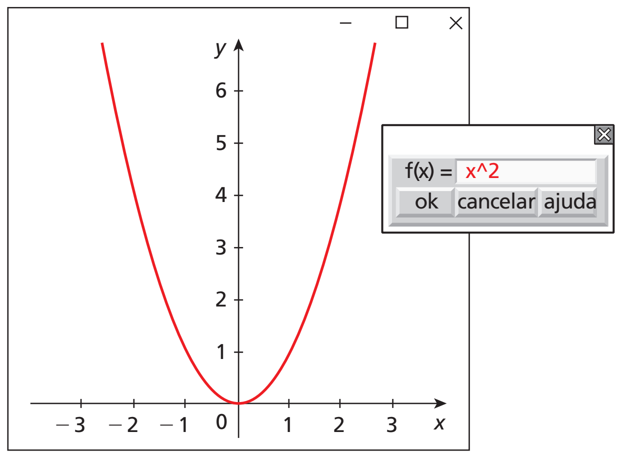
Translação do gráfico de uma função

Vamos utilizar um *software* de construção de gráficos para construir o gráfico das funções f e g de leis x^2 e $x^2 + 2$, respectivamente.

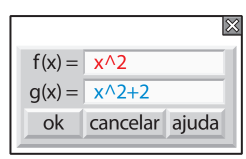
Primeiro, inserimos a lei da função f.



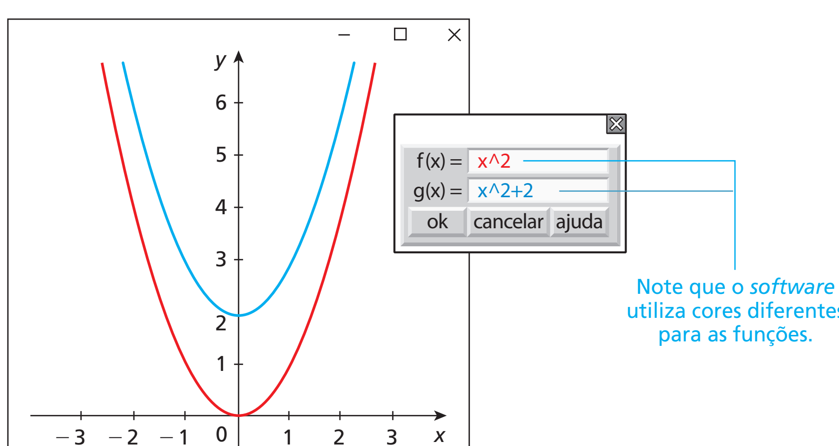
Obtemos o gráfico de f.



No mesmo plano do gráfico da função f, vamos construir o gráfico de g. Assim, digitamos: "x^2 + 2" no campo destinado à expressão de g.



Ao clicar em "ok", obtemos o gráfico de g.



Podemos observar que o gráfico de g é uma translação do gráfico de f em duas unidades para cima, na direção vertical.

Observação

Em muitos *softwares*, há algumas maneiras diferentes para escrever as expressões matemáticas, por exemplo:

- sen $x \rightarrow$ sinx
- $\frac{x^3 + 3}{x} \rightarrow (x$^3+3)/$x$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

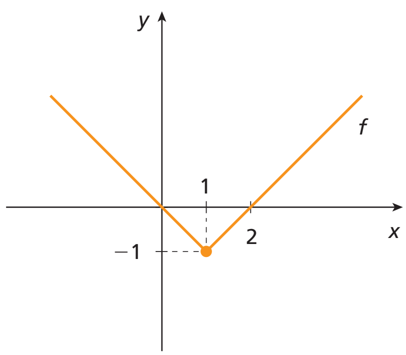
Atividades propostas

40 b. Falsa, pois no intervalo [0, 1] a função é decrescente.
40 c. Falsa, pois no intervalo [0, 2] a função é negativa ou nula.

Registre em seu caderno

39. *SOFTWARE* Use um *software* de construção de gráficos para construir, em um mesmo plano cartesiano, gráficos da função $y = x^2 + a$. Em outro plano, construa gráficos da função $y = (x + a)^2$. Varie os valores de a. Use valores positivos, negativos e nulo. Depois de verificar os gráficos construídos, escreva um texto concluindo o que foi observado na atividade. **39.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

40. O gráfico a seguir representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa e justifique as falsas.



a. $f(0) = 0$ **40 a.** Verdadeira.

b. A função é crescente no intervalo $[0, +\infty[$.

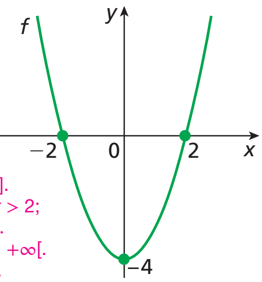
c. A função é positiva em todo o domínio.

d. O valor mínimo da função é -1. **40 d.** Verdadeira.

e. $\text{Im}(f) = [-1, +\infty[$ **40 e.** Verdadeira.

41. Observe o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

41 a. −2 e 2.
41 b. Crescente: $[0, +\infty[$; decrescente: $]-\infty, 0]$.
41 c. Positiva: $x < -2$ ou $x > 2$; negativa: $-2 < x < 2$.
41 d. $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = [-4, +\infty[$.
41 e. −4; imagem de zero.



a. Quais são os zeros da função?

b. Em qual intervalo do domínio a função é crescente? E decrescente?

c. Para que valores de x a função é positiva? E negativa?

d. Qual é o domínio da função? E o conjunto imagem?

e. Qual é o menor valor que essa função pode assumir? Esse valor é imagem de qual valor do domínio?

42. *SOFTWARE* Quais itens apresentam uma função positiva em todo o seu domínio? Justifique sua resposta. Se achar conveniente, use um *software* para construção de gráficos. **42.** Itens **a** e **d**, pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$.

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 3$

c. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$

d. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2^x$

e. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$

Função polinomial

Função polinomial na variável real x é toda função definida por
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (com $n \in \mathbb{N}$), para todo $x \in \mathbb{R}$.

Na função polinomial:

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são números reais chamados de **coeficientes** da função;
- n é o grau do polinômio que expressa a função (com $a_n \neq 0$);
- o grau da função é determinado pelo grau do polinômio, e o grau do polinômio de uma só variável é dado pelo maior expoente da variável.

Observação

A função dada por $g(x) = x^{-1} + 2$, por exemplo, não é polinomial.
Observe que o expoente de x, nesse caso, não é um número natural.

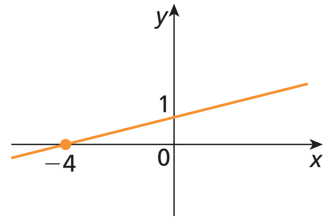
Acompanhe o exemplo.

A função dada por $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 7x + \frac{2}{3}$, expressa por um polinômio de grau 3, é uma função polinomial de 3º grau. Os coeficientes dessa função são $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_2 = -3$, $a_1 = -7$ e $a_0 = \frac{2}{3}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Verifique outros exemplos de funções polinomiais acompanhadas de sua representação gráfica.

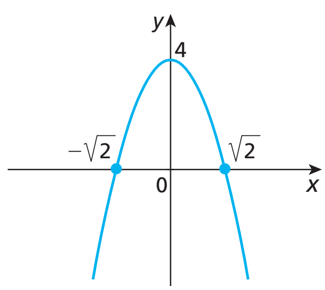
a. $f(x) = \frac{x}{4} + 1$



f é uma função polinomial de 1º grau com coeficientes $a_1 = \frac{1}{4}$ e $a_0 = 1$; $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$; zero da função f: -4

Essa função é crescente para todo o domínio.

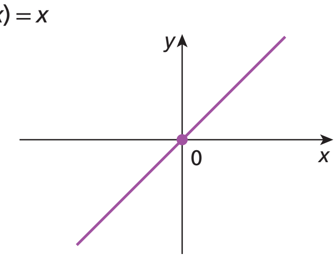
b. $g(x) = -2x^2 + 4$



g é uma função polinomial de 2º grau com coeficientes $a_2 = -2$, $a_1 = 0$ e $a_0 = 4$; $D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) =]-\infty, 4]$; zeros da função g: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

O valor máximo dessa função é 4, que é a ordenada do ponto (0, 4), também conhecido como **ponto de máximo**.

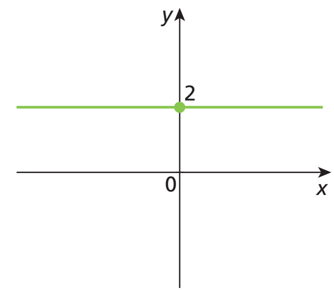
c. $h(x) = x$



h é uma função polinomial de 1º grau com coeficientes $a_1 = 1$ e $a_0 = 0$; $D(h) = \mathbb{R}$; $Im(h) = \mathbb{R}$; zero da função h: 0

Qualquer x do domínio tem imagem y igual a x. Por isso, essa função é chamada de **função identidade**. Note que o gráfico da função identidade contém a bissetriz dos quadrantes ímpares.

d. $i(x) = 2$



i é uma função polinomial de grau zero com coeficiente $a_0 = 2$; $D(i) = \mathbb{R}$; $Im(i) = \{2\}$

Qualquer x do domínio tem imagem 2. Por isso, essa função é chamada de **função constante**. Note que o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Funções definidas por mais de uma sentença

Algumas funções são definidas por mais de uma sentença.

Analise a situação a seguir.

Cobrado pelo governo brasileiro sobre os ganhos dos contribuintes de acordo com seus rendimentos, o Imposto de Renda de Pessoa Física (IRPF) é um tributo destinado a custear a manutenção dos serviços públicos municipais, estaduais e federais.

Ele é calculado com base no salário bruto do trabalhador após o desconto do Instituto Nacional do Seguro Social (INSS) e outras deduções permitidas. Trabalhadores que recebem até determinado valor são isentos da cobrança do tributo, e o valor do imposto aumenta conforme a capacidade de contribuição. O valor é pago à Receita Federal, que é o órgão responsável por administrar a cobrança dos tributos federais e atuar no combate à sonegação e a outros crimes.

O imposto em 2023 foi calculado por meio de alíquotas progressivas. As alíquotas e os valores estão estabelecidos na tabela a seguir.

Incidência mensal de Imposto de Renda de Pessoa Física (2023)

Base de cálculo (em reais)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir do imposto (em reais)
Até 2.112,00	—	—
De 2.112,01 até 2.826,65	7,5	158,40
De 2.826,66 até 3.751,05	15,0	370,40
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	651,73
Acima de 4.664,68	27,5	884,96

Fonte: Elaborado com base em BRASIL. Receita Federal. Tributação de 2023. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/2023. Acesso em: 29 jul. 2024.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual a R\$ 1.500,00, o contribuinte está isento, isto é, o imposto é zero real.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual, por exemplo, a R\$ 3.000,00, o imposto y a pagar é:

$y = 3.000,00 \cdot 0,15 - 370,40 = 450,00 - 370,40 = 79,60$

Logo, o imposto mensal a pagar é R\$ 79,60.

Podemos escrever matematicamente essa situação por uma função, com domínio em um subconjunto dos números reais não negativos, dada por mais de uma sentença. Observe.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2.112,00 \\ 0,075 \cdot x - 158,40, \text{ se } 2.112,00 < x \leqslant 2.826,65 \\ 0,15 \cdot x - 370,40, \text{ se } 2.826,65 < x \leqslant 3.751,05 \\ 0,225 \cdot x - 651,73, \text{ se } 3.751,05 < x \leqslant 4.664,68 \\ 0,275 \cdot x - 884,96, \text{ se } x > 4.664,68 \end{cases}$$

Em uma aplicação como essa, espera-se que não haja salto no valor do imposto quando se passa de uma faixa para outra ou que, na prática, se houver diferença, ela não seja significativa.

Observação

Repare que, ao arredondarmos os valores 192,2575 e 192,25625 para os centavos, temos o mesmo valor em reais.

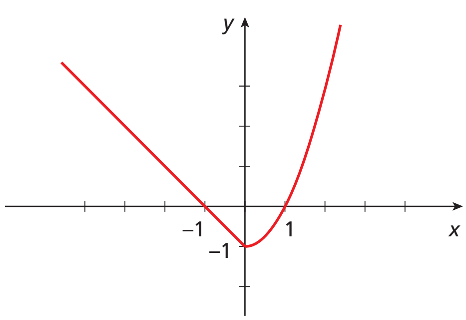
Podemos constatar que, por exemplo, para uma base de cálculo igual a R\$ 3.751,05, que é o limite superior de uma das faixas, obtemos uma diferença muito pequena entre o imposto a pagar com o cálculo em que se usa a expressão da própria faixa do domínio, $0,15 \cdot x - 370,40$, e o cálculo em que se usa a da faixa seguinte, $0,225 \cdot x - 651,73$:

- $f(x) = 0,15 \cdot x - 370,40$
  $f(3.751,05) = 0,15 \cdot 3.751,05 - 370,40 = 192,2575$
- $f(x) = 0,225 \cdot x - 651,73$
  $f(3.751,05) = 0,225 \cdot 3.751,05 - 651,73 = 192,25625$

Considere outro exemplo de função definida por mais de uma sentença.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, \text{ se } x \leqslant 0 \\ x^2 - 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$$



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que:

- o domínio é $D(f) = \mathbb{R}$;
- a imagem é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$;
- f é decrescente em $]-\infty, 0]$;
- f é crescente em $[0, +\infty[$;
- f é positiva em $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$;
- f é negativa em $]-1, 1[$;
- os zeros de f são -1 e 1.

Note que o comportamento do gráfico varia conforme o intervalo do domínio.

Atividade resolvida

R11. Considerando a função g tal que $g(x) = \begin{cases} x + 4, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 3x^2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$, calcular:

a. $g(1)$

b. $g(3)$

▶ **Resolução**

a. Para $x = 1$, usamos a primeira sentença.
Assim: $g(1) = 1 + 4 = 5$

b. Para $x = 3$, usamos a segunda sentença.
Assim: $g(3) = 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27$

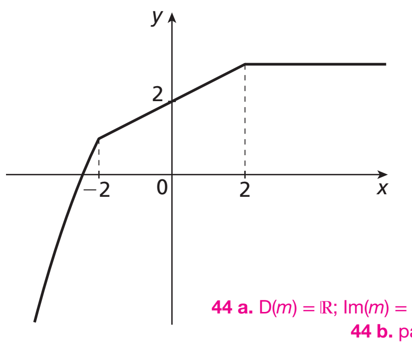
Atividades propostas

Registre em seu caderno

43. Escreva a lei da função cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(0, -5)$. **43.** $f(x) = -5$ ou $y = -5$.

44. Observe a lei e o gráfico da função m de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

$$m(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + 3, \text{ se } x \leqslant -2 \\ \dfrac{x}{2} + 2, \text{ se } -2 < x \leqslant 2 \\ 3, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$



44 a. $D(m) = \mathbb{R}$; $Im(m) =]-\infty, 3]$.
44 b. para $x > 2$

Agora, responda às questões.

a. Qual é o domínio e o conjunto imagem de $m(x)$?

b. Em que intervalo do domínio a função é constante?

c. Quantos zeros tem essa função? Justifique sua resposta.

d. Em que intervalo do domínio a função é positiva? E negativa?

45. Para incentivar seus vendedores, o departamento de vendas de uma fábrica de bicicletas elaborou a seguinte regra: se a venda semanal for de uma quantidade x, menor que 30 unidades, a comissão y que o vendedor receberá será de 3% do valor total v, em reais, das vendas; se a venda for de 30 a 100 unidades, a comissão passa para 5% de v; se a quantidade for superior a 100 unidades, a comissão passa para 8% de v. Cada bicicleta é vendida por R\$ 350,00.

a. Escreva a lei de uma função que represente a relação entre o número de bicicletas vendidas e a comissão do vendedor.

45 b. R\$ 1.400,00; R\$ 2.828,00.

b. Quanto um vendedor receberá de comissão se vender 80 bicicletas em uma semana? E se vender 101?

46. A função a seguir é definida por duas sentenças. Calcule o valor de $p(x)$ em cada caso.

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, \text{ se } x \leqslant -4 \\ -\dfrac{2}{7}x + \dfrac{20}{7}, \text{ se } -4 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

a. $x = -6$ **46 a.** 9

b. $x = \dfrac{1}{2}$ **46 b.** $\dfrac{19}{7}$

c. $x = 3{,}78$

d. $x = -4$ **46 d.** 4

e. $x = 3$ **46 e.** 2

f. $x = 0$ **46 f.** $\dfrac{20}{7}$

46 c. Não é possível calcular o valor de $p(x)$ para esse item porque a função não está definida para valores maiores que 3.

44 c. Apenas um zero, porque o gráfico intercepta o eixo x uma só vez.

44 d. Positiva em $]-\sqrt{6}, +\infty[$; negativa em $]-\infty, -\sqrt{6}[$.

45 a. $f(x) = \begin{cases} 10{,}5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leqslant x < 30. \\ 17{,}5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leqslant x \leqslant 100. \\ 28x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100. \end{cases}$

Função inversa

Agora, acompanhe alguns conceitos que serão necessários para o entendimento do conceito de função inversa.

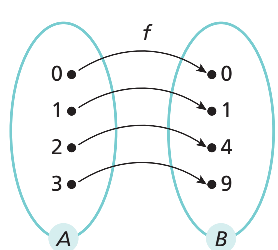
Função sobrejetora

Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetora** quando, para qualquer $y \in B$, sempre temos $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, quando $Im(f) = B$.

Para saber se uma função é sobrejetora, é preciso verificar se o conjunto imagem é igual ao contradomínio.

Considere os exemplos.

a. O diagrama seguinte representa a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x^2$.
Observe que todo elemento de B tem um correspondente em A, ou seja, o conjunto imagem da função é igual a seu contradomínio.
Então, a função $f: A \to B$ é sobrejetora.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

b. A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2^x$ é sobrejetora?

Para qualquer número real x, temos que 2^x é um número real estritamente positivo diferente de zero. Portanto, em $\mathbb{R}$, que é o contradomínio dessa função, existem números que não têm correspondente algum do domínio, ou seja, o conjunto imagem da função não coincide com seu contradomínio.

Logo, a função g não é sobrejetora.

Função injetora

Uma função $f: A \to B$ é **injetora** se, para quaisquer x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observação

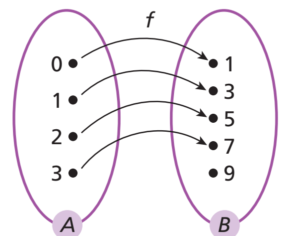
Em uma função f de A em B, a condição de função injetora, para quaisquer x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$, equivale à condição para quaisquer x_1 e x_2 de A, se $f(x_1) = f(x_2)$, então, $x_1 = x_2$.

Acompanhe o exemplo.

O diagrama representa a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = 2x + 1$.

Observe que quaisquer dois elementos de A têm como imagem elementos distintos de B.

Portanto, a função $f: A \to B$ é injetora.



Função bijetora

Uma função $f: A \to B$ é **bijetora** se for sobrejetora e injetora.

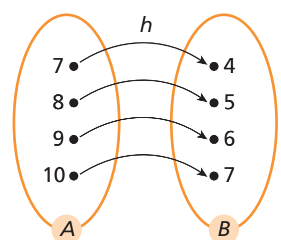
Acompanhe o exemplo.

O diagrama representa a função $h: A \to B$, definida por $h(x) = x - 3$.

Observe que o contradomínio é igual ao conjunto imagem (é sobrejetora) e que quaisquer dois elementos de A têm como imagem elementos distintos de B (é injetora).

Portanto, a função h é bijetora.

Mesmo se admitíssemos $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = x - 3$, ainda assim h seria bijetora.



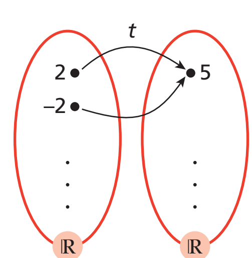
Atividade resolvida

R12. Mostrar que a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $t(x) = x^2 + 1$, não é bijetora.

▶ Resolução

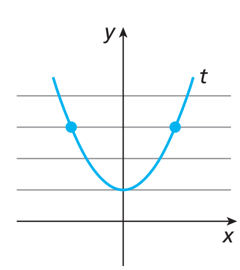
Para mostrar que a função não é bijetora, precisamos mostrar que ela não é injetora (basta encontrar no domínio dois elementos com a mesma imagem) ou que ela não é sobrejetora (basta encontrar no contradomínio um elemento que não seja imagem de algum elemento do domínio). Substituindo x por 2 e por -2, por exemplo, temos:

- $t(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
- $t(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$



Como, no domínio, há dois elementos distintos com a mesma imagem, concluímos que a função t não é injetora e, portanto, não é bijetora.

Podemos, com base no gráfico da função t, traçar retas paralelas ao eixo x e verificar que existe pelo menos uma que intercepta o gráfico em mais de um ponto, concluindo, de outro modo, que a função t não é injetora.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Definição de função inversa

Acompanhe a situação a seguir.

Para facilitar o trabalho, uma vendedora de camisetas fez um quadro relacionando o número de camisetas e o preço.

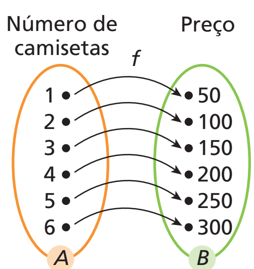

QUEENMOONLITE STUDIO/SHUTTERSTOCK

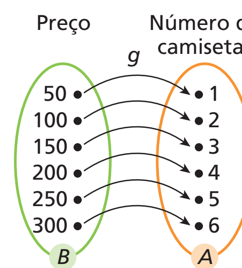
Relação entre o número de camisetas e o preço

Número de camisetas	1	2	3	4	5	6
Preço (R$)	50,00	100,00	150,00	200,00	250,00	300,00

Com esses valores e considerando $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{50{,}00; 100{,}00; 150{,}00; 200{,}00; 250{,}00; 300{,}00\}$, podemos pensar em duas funções.

Diagramas das funções *f* e *g*

<table>
<tr><th>$f: A \rightarrow B$</th><th>$g: B \rightarrow A$</th></tr>
<tr><td>Função que associa o número de camisetas ao preço.


$D(f) = A$
$Im(f) = B$</td><td>Função que associa o preço ao número de camisetas.


$D(g) = B$
$Im(g) = A$</td></tr>
</table>

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que f e g são funções bijetoras e $D(f) = Im(g)$ e $D(g) = Im(f)$. Nesse caso, dizemos que uma função é a **inversa** da outra. Costuma-se indicar a inversa de uma função f por f^{-1}.

Dada uma função bijetora $f: A \rightarrow B$, chamamos de **função inversa** de f a função $f^{-1}: B \rightarrow A$ tal que, para todo $x \in A$ e $y \in B$, com $y = f(x)$, temos $f^{-1}(y) = x$.

Nem todas as funções admitem inversa; somente as que são bijetoras.

Se conhecermos a lei que define uma função bijetora $f: A \rightarrow B$, podemos obter a lei que define sua inversa, $f^{-1}: B \rightarrow A$.

Vamos retomar a situação anterior, em que tínhamos a função $f: A \rightarrow B$, definida por $f(x) = 50x$.

Partindo da lei que define f, encontramos a lei que define f^{-1}:

1º. Lembrando que $f(x)$ é a imagem de x através da função f e que y também representa essa imagem, escrevemos a lei que define f, substituindo $f(x)$ por y.

Na situação estudada, em que $f(x) = 50x$, escrevemos $y = 50x$.

2º. Invertemos as variáveis na lei que define f, ou seja, trocamos x por y e y por x.

No nosso exemplo, como $y = 50x$, teremos $x = 50y$.

3º. Agora, expressando y em função de x, obtemos $f^{-1}(x)$: $x = 50y \Rightarrow y = \frac{x}{50}$

Portanto: $f^{-1}(x) = \frac{x}{50}$

Observe alguns valores atribuídos às funções f e f^{-1}, bem como a correspondência entre eles.

Valores numéricos das funções *f* e f^{-1} para *x* igual a 1, 2, 3 e 4

$f(x) = 50x$	$f(1) = 50$	$f(2) = 100$	$f(3) = 150$	$f(4) = 200$
$f^{-1}(x) = \frac{x}{50}$	$f^{-1}(50) = 1$	$f^{-1}(100) = 2$	$f^{-1}(150) = 3$	$f^{-1}(200) = 4$

Atividade resolvida

R13. Considerar a função f de domínio real dada pela lei $f(x) = x^3$.

a. Qual é a lei da função inversa de f?

b. Sem construir os gráficos, determinar os pontos de intersecção dos gráficos de f e f^{-1}.

▶ **Resolução**

a. Partindo da lei que define f, temos:

- $f(x) = x^3$ é o mesmo que $y = x^3$.
- Trocando x por y e y por x, obtemos: $x = y^3$
- Expressando y em função de x, obtemos:
- $x = y^3 \Rightarrow y^3 = x \Rightarrow \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$

Portanto: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

b. Para todo x real, os pontos P do gráfico de f têm coordenadas (x, x^3), e os pontos Q do gráfico de f^{-1} têm coordenadas (x^3, x).

Os pontos de intersecção dos gráficos de f e f^{-1} são tais que $x_P = x_Q$ e $y_P = y_Q$, ou seja:

$x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0$

- Fatorando $x^3 - x$ e observando que x é fator comum:

  $x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1)$
- Aplicando a identidade $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ em $x^2 - 1$, temos:

  $x^3 - x = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

Então:

$x^3 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

Portanto, os gráficos de f e f^{-1} interceptam-se nos pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

49 a. $f^{-1}(x) = \frac{9x - 1}{2 - x}$
49 b. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$
49 c. $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
49 d. $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$
49 e. $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$

50 a. $f^{-1}(x) = \frac{x - 9}{4}$

50 b. $g^{-1}(x) = \frac{3 - x}{2}$

50 c. $h^{-1}(x) = \frac{-2x - 1}{14}$

50 d. $m^{-1}(x) = 3x - 5$

50 e. $n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

50 f. A função p não é bijetora. Assim, não admite inversa.

Observação

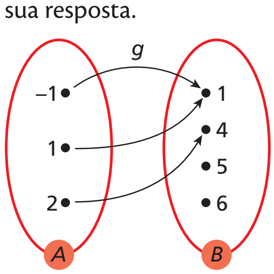
De maneira informal, podemos pensar que o inverso de elevar um número ao cubo é extrair a raiz cúbica desse número.

47. Não é sobrejetora, porque $CD(g) \neq Im(g)$. Não é injetora, porque dois elementos de A têm a mesma imagem: $g(-1) = g(1) = 1$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

47. ARGUMENTAÇÃO A função $g: A \rightarrow B$ é sobrejetora? E injetora? Justifique sua resposta.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

48. ARGUMENTAÇÃO Em uma função bijetora $f: A \rightarrow B$, a cada elemento de A corresponde um só elemento de B e vice-versa? Por quê? **48.** Sim, pois uma função bijetora é sobrejetora e injetora.

49. Considerando que a função f definida por $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 9}$ admita inversa e tenha o maior domínio possível, determine:

a. $f^{-1}(x)$
b. $D(f)$
c. $D(f^{-1})$
d. $Im(f)$
e. $Im(f^{-1})$

50. Determine a lei que define a função inversa de cada função.

a. $f(x) = 4x + 9$
b. $g(x) = -2x + 3$
c. $h(x) = -7x - \frac{1}{2}$
d. $m(x) = \frac{x + 5}{3}$
e. $n(x) = x^3 + 1$
f. $p(x) = x^2 + 1$

51. Considere as funções da **atividade 50**.

a. Todas as funções admitem função inversa?

b. Determine as leis que definem as funções inversas das funções obtidas, por exemplo, $[f^{-1}]^{-1}(x)$. Comparem-nas com as leis dadas.

c. EM DUPLA Converse com um colega e escrevam o que se pode concluir sobre a inversa da função inversa de uma função bijetora dada.

52. Considere as funções reais dadas pelas leis:

- $f(x) = x$
- $h(x) = x - 1$
- $g(x) = x + 3$
- $i(x) = x - 3$

51 a. O item **f** não admite função inversa, pois a função p não é bijetora.
51 b. Com exceção do item **f**, que não tem inversa, as leis obtidas devem ser iguais às dadas.
51 c. A inversa da função inversa de uma função bijetora é a própria função.

52. Respostas no *Suplemento para o professor*.

53. Sim, pois essa função é injetora e sobrejetora, ou seja, bijetora.

a. No mesmo plano cartesiano, construa o gráfico de cada função dada e de sua respectiva função inversa.

b. **EM DUPLA** Converse com um colega e escrevam o que se pode concluir sobre os gráficos de cada uma dessas funções e o de sua inversa em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

53. **ARGUMENTAÇÃO** A função de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$ admite inversa? Justifique sua resposta.

54. **EM DUPLA** **ARGUMENTAÇÃO** Deem um exemplo de função que não admite função inversa. Apresentem essa função e expliquem à outra dupla por que a função escolhida não admite inversa.

54. Resposta possível: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, pois f não é bijetora.

55. Considere as funções reais dadas pelas leis:

55. Respostas no *Suplemento para o professor*.

- $f(x) = x$
- $h(x) = 3x$
- $g(x) = 2x$
- $i(x) = 4x$

a. No mesmo plano cartesiano, construa o gráfico de cada função dada e de sua respectiva função inversa.

b. **EM DUPLA** Converse com um colega e escrevam o que se pode concluir sobre os gráficos de cada uma dessas funções e o de sua inversa em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

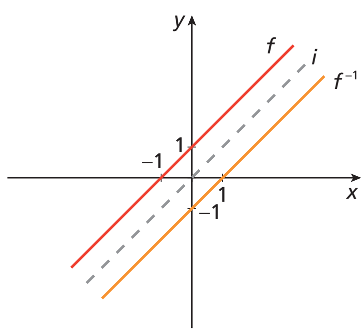
Gráfico da função inversa

Os gráficos de uma função e de sua inversa são simétricos em relação ao gráfico da função identidade i, definida por $i(x) = x$, que é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Analise os exemplos.

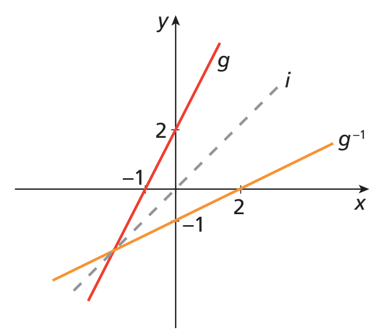
a. $f(x) = x + 1$

$f^{-1}(x) = x - 1$



b. $g(x) = 2x + 2$

$g^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 1$



Atividades propostas

Registre em seu caderno

56. **ARGUMENTAÇÃO** Se o par ordenado (a, b) pertence ao gráfico de uma função bijetora f, o par ordenado (b, a) pertence ao gráfico de sua inversa, f^{-1}? Justifique sua resposta.

56. Desde que exista f^{-1}, sim, pela própria definição de função inversa.

57. Escreva a lei da função inversa de cada função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = -x + 3$ 57 a. $f^{-1}(x) = -x + 3$

b. $g(x) = 2x$ 57 b. $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

c. $h(x) = \frac{x}{3} - 2$ 57 c. $h^{-1}(x) = 3x + 6$

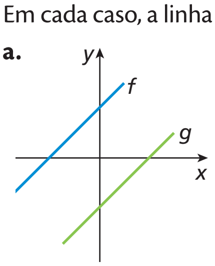
d. $k(x) = 2x + 1$ 57 d. $k^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

58. ***SOFTWARE*** Se possível, utilize um *software* de construção de gráficos para construir os gráficos de cada função e da respectiva inversa da atividade anterior. Depois represente, em cada um, o gráfico da função identidade. O que você observa?

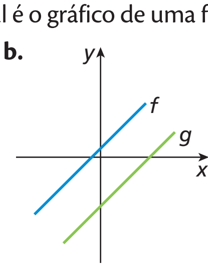
58. Respostas no *Suplemento para o professor*.

59. Em cada caso, a linha azul é o gráfico de uma função f, e a linha verde é o gráfico de uma função g.

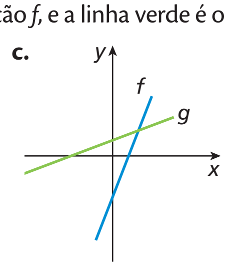
a.



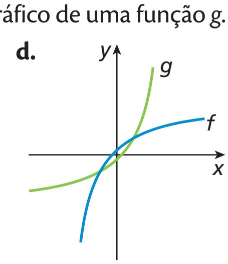
b.



c.



d.



Em quais itens a função f é a inversa da função g? Justifique sua resposta.

59. Em **a**, **c** e **d**, pois, em cada um desses casos, os gráficos de f e de g são simétricos em relação ao gráfico da função identidade.

TRABALHO E JUVENTUDES

Como calcular a contribuição previdenciária?

RAFASTOCKBR/SHUTTERSTOCK

Agência do Instituto Nacional do Seguro Social (INSS) em Brasília (DF). Foto de 2021.

Todo trabalhador tem definido em seu contrato de trabalho e na Carteira de Trabalho e Previdência Social o valor do salário bruto. No entanto, a remuneração paga ou creditada ao empregado costuma ser diferente desse valor em razão dos descontos e dos acréscimos discriminados no **holerite**. Ao salário bruto podem ser acrescidos, por exemplo, valores referentes a horas extras, gratificações e benefícios. Já os descontos podem vir dos **tributos**, das faltas não justificadas e dos valores pagos de plano de saúde.

Um desses descontos corresponde à contribuição previdenciária para o Instituto Nacional do Seguro Social (INSS). Essa contribuição é um seguro social público que oferece, entre outros benefícios, proteção contra riscos econômicos, como perda de renda devido a desemprego, ou por motivo de incapacidade temporária ou permanente em consequência de doença, acidente, maternidade, idade avançada, morte ou reclusão. Ela é calculada diretamente com base no salário bruto do trabalhador.

Assim, quanto maior o salário, maior a porcentagem da contribuição, até certo limite chamado teto. O valor é pago ao INSS, que é o órgão responsável pelas aposentadorias e pelos demais benefícios. Estes, por sua vez, são pagos de maneira proporcional aos valores que o trabalhador contribuiu, e os requisitos para recebê-los são definidos por lei.

A contribuição ao INSS é feita por meio de **alíquotas** progressivas. Em maio de 2023, as alíquotas eram as especificadas no quadro:

Alíquotas da contribuição previdenciária para funcionários do setor privado – maio de 2023

Salário de contribuição	Alíquota progressiva para fins de recolhimento ao INSS
Até R$ 1.320,00	7,5%
De R$ 1.320,01 a R$ 2.571,29	9%
De R$ 2.571,30 a R$ 3.856,94	12%
De R$ 3.856,95 a R$ 7.507,49	14%

Fonte: BRASIL. Instituto Nacional do Seguro Social (INSS). **Tabela de contribuição mensal.** Disponível em: https://www.gov.br/inss/pt-br/direitos-e-deveres/inscricao-e-contribuicao/tabela-de-contribuicao-mensal . Acesso em: 8 nov. 2023.

O valor da alíquota varia conforme o salário bruto, que é dividido em intervalos chamados de faixas do salário. Sobre cada faixa, são aplicadas alíquotas diferentes, que aumentam quanto maior for a faixa.

Indicando por x o valor do salário bruto em reais, podemos determinar a contribuição previdenciária, descontada no holerite, por meio da função f, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}075 \cdot x, \text{ se } 0 < x \leqslant 1.320 \\ 99 + 0{,}09 \cdot (x - 1.320), \text{ se } 1.320 < x \leqslant 2.571{,}29 \\ 211{,}62 + 0{,}12 \cdot (x - 2.571{,}29), \text{ se } 2.571{,}29 < x \leqslant 3.856{,}94 \\ 365{,}90 + 0{,}14 \cdot (x - 3.856{,}94), \text{ se } 3.856{,}94 < x \leqslant 7.507{,}49 \\ 876{,}97, \text{ se } x > 7.507{,}49 \end{cases}$$

Holerite: também chamado de contracheque ou folha de pagamento, é o documento que comprova a remuneração recebida pelo trabalhador.

Tributos: cobranças obrigatórias previstas em lei para a manutenção e o desenvolvimento do Estado.

Alíquotas: percentual utilizado para calcular o valor de determinado tributo.

Atividades

1. Calcule o desconto referente à contribuição previdenciária de um trabalhador que, em maio de 2023, recebia salário bruto no valor de R$ 5.600,00. **1.** Aproximadamente R$ 609,93.

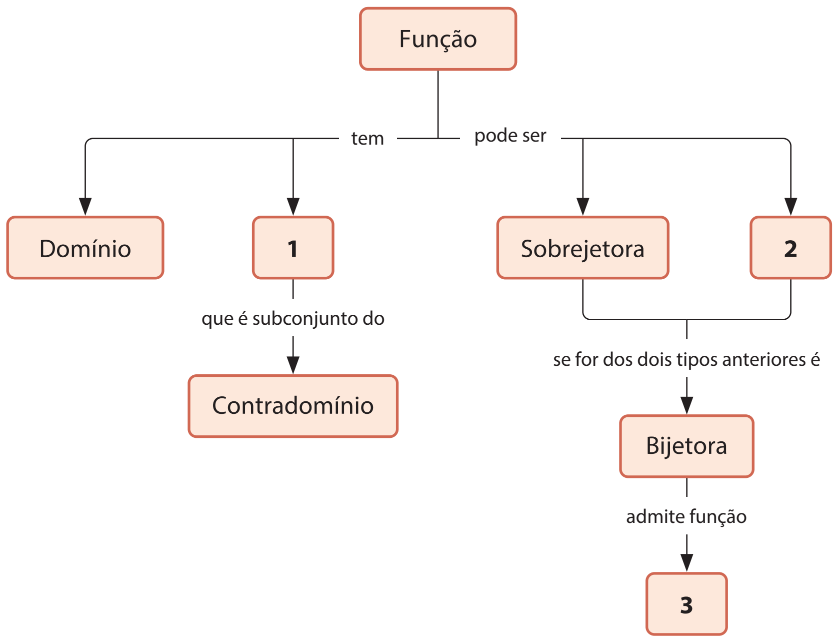
2. Qual é o domínio e o conjunto imagem da função f? **2.** $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y \leqslant 876{,}97\}$

Registre em seu caderno

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Inversa **B.** Imagem **C.** Injetora

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Conexões entre conceitos: A – 3; B – 1; C – 2.

Livro

REPRODUÇÃO/EDITORA ZAHAR

O caderno secreto de Descartes

Amir D. Aczel

Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

O plano cartesiano é também conhecido por sistema de coordenadas cartesianas. O termo cartesiano vem do nome do idealizador desse sistema de localização de pontos no plano, o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), considerado por muitos o pai da Filosofia moderna. Com um misto de biografia e aventura investigativa, o autor retrata a infância e a formação de Descartes e os encontros com filósofos e matemáticos que influenciaram seu pensamento. Além disso, apresenta controvérsias religiosas e políticas da época, escritos não publicados do filósofo e as circunstâncias suspeitas de sua morte.

Site

Desmos

Desmos é uma calculadora gráfica que pode ser usada *on-line* e que permite aos usuários traçar, de forma simples e intuitiva, gráficos de diferentes tipos de função.

Disponível em: https://www.desmos.com/calculator. Acesso em: 29 jul. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Uma empresa de tratamento de água e esgoto de certa cidade calcula o custo residencial mensal de seus serviços da seguinte forma:

Cálculo do valor a ser pago correspondente ao consumo de água

Medida do consumo c de água (m^3)	Valor V (R$)
$0\ m^3 < c \leqslant 10\ m^3$	$V = 10$
$10\ m^3 < c \leqslant 20\ m^3$	$V = 10 + (c - 10) \cdot 1{,}20 = V_1$
$20\ m^3 < c \leqslant 30\ m^3$	$V = V_1 + (c - 20) \cdot 1{,}50 = V_2$
$30\ m^3 < c$	$V = V_2 + (c - 30) \cdot 2{,}00$

O valor total da conta é igual ao dobro do valor calculado para a medida da água consumida.

A medida do consumo de água na casa de Caio, nos três últimos meses, foi igual a 9 m³, 18 m³ e 36 m³. Então, Caio pagou pelo valor total da conta em real, respectivamente:

Q1. Alternativa **a.**

a. 20,00; 39,20; 98,00
b. 10,00; 19,60; 49,00
c. 20,00; 40,00; 80,00
d. 18,00; 37,20; 96,00

Q2. Na função $f: A \rightarrow B$, definida por $y = f(x)$, $D(f)$ é ____, $CD(f)$ é ____ e as ____ dos pontos do plano determinados pelos pares ordenados (x, y), que obedecem à lei $y = f(x)$, formam o conjunto ____ de f. **Q2.** Alternativa **b.**

a. A; B; abscissas; imagem
b. A; B; coordenadas; imagem
c. B; A; imagens; vazio
d. B; A; ordens; real

Q3. Se o gráfico de uma função intercepta o eixo x no ponto $(a, 0)$, a abscissa a desse ponto é o ____ da função. **Q3.** Alternativa **c.**

a. valor
b. cruzamento
c. zero
d. meio

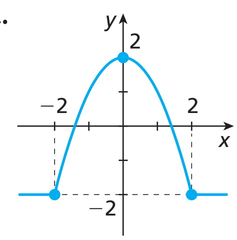
Q4. Para construir o gráfico de uma função f, devemos representar no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) que tenham $x \in D(f)$ e tais que x é, normalmente, a referência e $y = f(x)$ é a referência ____ . **Q4.** Alternativa **b.**

a. vertical; horizontal
b. horizontal; vertical
c. positiva; negativa
d. par; ímpar

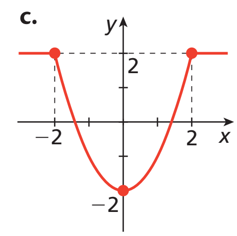
Q5. O gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por **Q5.** Alternativa **d.**

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x < -2 \\ x^2 - 2, \text{ se } -2 \leqslant x < 2 \\ -2, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases} \text{ é:}$$

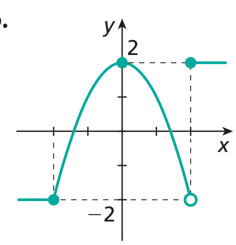
a.



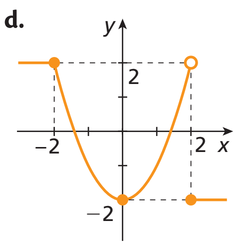
c.



b.



d.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Q6. Alternativa **c.**

Q6. Se, em um intervalo I do domínio, uma função f passa de crescente a decrescente em (x_0, y_0), dizemos que, em I:

a. x_0 é raiz de f.
b. x_0 é valor máximo.
c. y_0 é valor máximo.
d. y_0 é valor mínimo.

Q7. Somente as funções ____ admitem inversa. **Q7.** Alternativa **c.**

a. injetoras
b. sobrejetoras
c. bijetoras
d. positivas

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7
Identificar uma função.	X	X			X		
Analisar e construir o gráfico de uma função.			X	X	X	X	
Resolver situações-problema que envolvam funções.	X						
Obter a função inversa de funções dadas.							X

Capítulo 4

Função afim

Uma mulher usando máscara protetora é examinada por um profissional de saúde com um termômetro infravermelho em Mumbai, na Índia, em fevereiro de 2020.

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 3

OBJETO DIGITAL
Infográfico clicável: Cinco pontos sobre uma pandemia

Este infográfico clicável aborda como a Organização Mundial da Saúde (OMS), junto dos governos, implementam ações necessárias para conter o avanço do surto de uma doença organizando políticas de segurança sanitária a fim de enfrentar a crise com mais eficiência. Esse OED promove o desenvolvimento da **competência específica 2** e dialoga com o **TCT Saúde**.

Função afim

A pandemia causada pelo coronavírus no início do ano de 2020 mudou hábitos de locomoção e consumo. Visando à diminuição de contágio, a Organização Mundial de Saúde (OMS) recomendou que as pessoas permanecessem em casa. Com o tráfego de pessoas reduzido, locais como lojas, escritórios e restaurantes fecharam as suas portas.

Protocolos como higienização das mãos e a aferição da temperatura corporal passaram a ser seguidos no acesso aos estabelecimentos que permaneceram abertos por serem considerados essenciais, como supermercados e alguns locais de trabalho.

Observe a fotografia da aferição da medida da temperatura de uma mulher na Índia. O aparelho de infravermelho está indicando 96,2 °F. Essa unidade de medida de temperatura, Fahrenheit, é adotada em alguns países. No Brasil, a temperatura é medida em grau Celsius. Para converter uma medida de temperatura em grau Fahrenheit para grau Celsius, podemos usar a seguinte função:

$$f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$$

sendo $f(x)$ a medida em grau Celsius e x a medida em grau Fahrenheit.

Essa sentença é um exemplo de **lei de formação** de uma função afim.

A seguir, vamos definir função de modo geral e, logo depois, definir a função afim.

Considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que f é uma **função** de A em B se, e somente se, para cada elemento x de A existe, em correspondência, um único elemento y de B. Indicamos essa função assim: $f: A \to B$ (lemos: "função f de A em B").

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função afim** quando existem números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Os números reais a e b são os **coeficientes** da função afim. Considere os exemplos.

a. g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -\frac{1}{2}x + 5$, em que $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 5$.

b. h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = -7x$, em que $a = -7$ e $b = 0$.

c. n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $n(x) = -5$, em que $a = 0$ e $b = -5$.

Função polinomial

Função polinomial na variável real x é toda função definida por

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ (com $n \in \mathbb{N}$), para todo $x \in \mathbb{R}$.

Na função polinomial:

- $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ são números reais chamados de **coeficientes** da função;
- n é o **grau do polinômio** que expressa a função (com $a_n \neq 0$);
- o grau da função é determinado pelo grau do polinômio, e o grau do polinômio de uma só variável é dado pelo maior expoente da variável.

Observação

Dada uma função f de A em B, é comum usar a letra x para designar um elemento genérico de A e a letra y para designar o valor correspondente $f(x)$. Dizemos que x é a **variável independente** e que y é a **variável dependente**.

Casos particulares de função afim

A função afim pode ser constante, se $a = 0$, ou polinomial do 1º grau, se $a \neq 0$.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função constante** quando existe um número real b tal que $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Considere os exemplos.

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -13$

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{7}$

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função polinomial do 1º grau** quando existem números reais a e b, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Acompanhe os exemplos.

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -11x + \sqrt{2}$

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5}x$

Uma função polinomial do 1º grau que tem o coeficiente $b = 0$ recebe o nome de **função linear**. Por exemplo, $f(x) = 3x$ e $g(x) = -6x$.

A função polinomial do 1º grau $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ é chamada de **função identidade**. Nesse caso, temos $a = 1$ e $b = 0$.

A função a seguir, utilizada para converter uma medida de temperatura em grau Fahrenheit para grau Celsius, é um exemplo de função afim:

$$f(x) = \frac{5}{9} \cdot x - \frac{160}{9}$$

sendo $f(x)$ a medida em grau Celsius e x a medida em grau Fahrenheit.

Atividade resolvida

R1. Dada a função afim g tal que $g(x) = \frac{1}{3}x - 1$, calcular:

a. $g\left(\frac{1}{2}\right)$

b. x, para $g(x) = 4$

▸ Resolução

a. $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{6} - \frac{6}{6} = -\frac{5}{6}$

b. $\frac{1}{3}x - 1 = 4 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 5 \Rightarrow x = 15$

6 c. $f(x) = \begin{cases} 34{,}50, \text{ se } 0 < x \leqslant 100 \\ 34{,}50 + 0{,}08(x - 100), \text{ se } x > 100 \end{cases}$

8. Respostas no *Suplemento para o professor*.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Das funções a seguir, identifique quais são leis de funções afins. Nesses casos, determine o valor dos coeficientes *a* e *b*.

a. $g(x) = 2x + 4$ **1 a.** $a = 2$ e $b = 4$

b. $i(x) = 2 + x^2$ **1 b.** Não é função afim.

c. $f(x) = -\sqrt{3}$ **1 c.** $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$

d. $k(x) = -13x$ **1 d.** $a = -13$ e $b = 0$

2. Considerando a função *f*, dada por $f(x) = -3x + 1$, calcule:

a. $f(-2)$ **2 a.** 7

b. *x*, para $f(x) = 0$ **2 b.** $\frac{1}{3}$

c. $f(\sqrt{2})$ **2 c.** $-3\sqrt{2} + 1$

d. *x*, para $f(x) = 19$ **2 d.** -6

3. Considere a função $f(x) = -3x + 1$ da atividade anterior e responda:

a. Para quais valores de *x* temos $f(x)$ maior que zero? E menor que zero?

b. Você conhece alguma forma de representar essa função de maneira que possa estudá-la melhor?

3. Respostas no *Suplemento para o professor*.

4. Determine o valor de *a* para que se tenha $f(3) = 8$ na função dada por $f(x) = ax + \frac{1}{2}$. **4.** $\frac{5}{2}$

**5. ** $p = \pm\sqrt{2}$; $q = 3$

5. Determine os valores de *p* e *q* para que a função *j*, dada por $j(x) = (p^2 - 1)x + (2q - 6)$, seja uma função identidade.

6. Em certo município, a assinatura de uma linha telefônica custava R$ 34,50 e dava direito à utilização de 100 minutos mensais. Caso o consumidor excedesse os 100 minutos, ele pagaria R$ 0,08 por minuto excedente.

a. Quanto o consumidor pagaria por sua conta se utilizasse 82 minutos em um mês? E se utilizasse 300 minutos?

b. Um consumidor pagou R$ 52,90 por sua conta telefônica. Quantos minutos esse consumidor usou?

c. Escreva a lei de formação da função que representa essa situação.

d. Se, em um estabelecimento desse município havia três linhas telefônicas, qual era o valor mínimo gasto com telefone em um mês? **6 d.** R$ 103,50

7. Dada a função *f*, com $f(x) = 3x - 1$, determine:

a. $f(1) - f(0)$ **7 a.** 3

b. $f(2) - f(1)$ **7 b.** 3

c. $f(3) - f(2)$ **7 c.** 3

d. $f(4) - f(3)$ **7 d.** 3

6 a. R$ 34,50; R$ 50,50
6 b. 330 minutos

8. Com base na atividade anterior, faça o que se pede.

a. Observando os itens, identifique a variação que ocorre no valor de $f(x)$ quando é acrescentada uma unidade ao valor de *x*.

b. Sem fazer contas, determine o valor de $f(28) - f(27)$.

c. Refaça os itens da atividade anterior para $g(x) = -3x - 1$.

d. Os valores encontrados relacionam-se com o valor do coeficiente de *x* na lei da função? De que forma?

e. Que conclusão podemos estabelecer?

9. O quadro a seguir apresenta alguns valores reais de *x* e os respectivos valores de $f(x)$ e $g(x)$ das funções afins *f* e *g*.

9 b. Resposta no *Suplemento para o professor*.

Alguns valores das funções *f* e *g*

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	1	3	5	7
$g(x)$	4	3	2	1	0

9 c. Resposta no *Suplemento para o professor*.

a. Considerando os valores apresentados no quadro, determine a lei de formação da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. **9 a.** $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 2$

b. Em um plano cartesiano, faça a representação gráfica dos pontos dados no quadro relativos à função *f*. Em seguida, elabore uma hipótese sobre como deve ser o gráfico de *f*. Depois, trace uma linha que passe pelos pontos obtidos e contemple sua hipótese.

c. Em outro plano cartesiano, faça o que se pede no item **b** para os dados relativos à função *g*.

d. Considerando os gráficos construídos nos itens **b** e **c**, que figura geométrica se espera que seja empregada para representar graficamente uma função afim?

9 d. uma reta

10. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Sabe-se que uma escala de temperatura muito utilizada por cientistas é a Kelvin. A expressão que nos fornece a conversão da escala Kelvin para a escala Celsius é $T_C = T_K - 273$, em que T_C é a medida da temperatura em Celsius e T_K a medida da temperatura em Kelvin. Escreva um passo a passo de como se faz a conversão da escala Kelvin para a Celsius.

10.
Passo 1. Seja T_K uma medida de temperatura qualquer, em Kelvin.
Passo 2. Seja T_C a medida de temperatura em grau Celsius. Faça $T_C = T_K - 273$.
Passo 3. T_C é a medida de temperatura convertida, em grau Celsius. Encerra-se o algoritmo.

Gráfico da função afim

Taxa de variação

Dada uma função, podemos estudar seu comportamento analisando a relação entre a variação das imagens (Δy) e a variação dos respectivos elementos do domínio que as determinam (Δx), ou seja, podemos verificar como varia $f(x)$ atribuindo diferentes valores para *x*.

Como exemplo, vamos analisar o comportamento da função afim dada por $f(x) = -3x + 1$.

Primeiro, escolhemos dois elementos do domínio e calculamos as respectivas imagens:

- Para $x_1 = 0$, temos $f(x_1) = y_1 = 1$.
- Para $x_2 = 1$, temos $f(x_2) = y_2 = -2$.

Em seguida, comparamos a variação entre as imagens obtidas com a variação dos respectivos elementos do domínio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 1}{1 - 0} = -3$$

Assim, o número -3 é a **taxa de variação** da função f no intervalo $[0, 1]$.

Agora, vamos calcular a taxa de variação dessa função em outro intervalo.

- Para $x_3 = -4$, temos $f(x_3) = y_3 = 13$.
- Para $x_4 = -2$, temos $f(x_4) = y_4 = 7$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{7 - 13}{-2 - (-4)} = \frac{-6}{2} = -3$$

Percebemos que o número -3 é, novamente, a taxa de variação da função f no intervalo $[-4, -2]$.

Vamos calcular a taxa de variação em mais um intervalo.

- Para $x_5 = -7$, temos $f(x_5) = y_5 = 22$.
- Para $x_6 = \frac{1}{2}$, temos $f(x_6) = y_6 = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_6 - y_5}{x_6 - x_5} = \frac{-\frac{1}{2} - 22}{\frac{1}{2} - (-7)} = \frac{\frac{-45}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{-45}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{15} = -3$$

O número -3 é a taxa de variação da função f no intervalo $\left[-7, \frac{1}{2}\right]$.

Observe que a taxa de variação da função f encontrada nos intervalos $\left[-7, \frac{1}{2}\right]$ e $[-4, -2]$ é a mesma encontrada no intervalo $[0, 1]$.

Sabemos que uma função afim é definida por $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais.

Para $x = x_1$, temos $f(x_1) = y_1 = ax_1 + b$.

Para $x = x_2$, temos $f(x_2) = y_2 = ax_2 + b$.

Para $x_1 \neq x_2$, temos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Note que a taxa de variação de uma função afim não depende do intervalo escolhido; ela sempre vale a.

A **taxa de variação de uma função afim** f, dada por $f(x) = ax + b$, é constante para qualquer intervalo do domínio e, numericamente, é igual ao coeficiente a.

O fato de a taxa de variação de uma função afim ser constante significa que para acréscimos iguais na variável x correspondem acréscimos iguais na variável $f(x)$.

Atividade resolvida

R2. Verificar que a taxa de variação da função afim dada por $f(x) = -3x + 1$ é igual ao coeficiente de x, ou seja, -3.

▶ Resolução

Consideremos x e $x + h$ (com $h \in \mathbb{R}^*$) dois elementos do domínio.

- $f(x) = -3x + 1$
- $f(x + h) = -3(x + h) + 1 = -3x - 3h + 1$

Assim: $\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{-3x - 3h + 1 - (-3x + 1)}{h} =$

$= \frac{-3x - 3h + 1 + 3x - 1}{h} = \frac{-3h}{h} = -3$

Portanto, a taxa de variação da função de lei $f(x) = -3x + 1$ é -3.

Observe novamente que a taxa de variação encontrada (-3) é igual ao coeficiente a da função.

Quando o valor de x aumenta 1 unidade, o valor de $f(x)$ decresce 3 unidades; quando o valor de x aumenta 2 unidades, o valor de $f(x)$ decresce 6 unidades; e assim por diante. Observe o quadro a seguir.

$f(x) = -3x + 1$

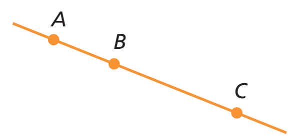
x	$f(x)$
-2	7
-1	4
0	1
1	-2
2	-5

+1 −3 +2 −6

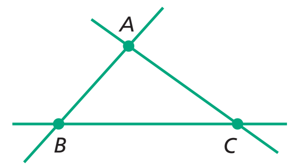
Desigualdade triangular

Dados três pontos distintos, eles podem estar alinhados ou não: no primeiro caso, eles pertencem à mesma reta; no segundo, são vértices de um triângulo.

- Três pontos distintos alinhados:



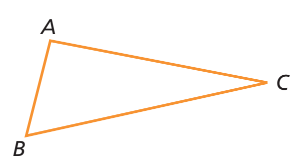
- Três pontos distintos não alinhados:



Note que, em ambos os casos, é possível identificar três segmentos de reta: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

Em um triângulo, a medida do comprimento de um dos lados é menor que a soma das medidas de comprimento dos outros dois. Acompanhe a seguir.

No triângulo ABC, temos:

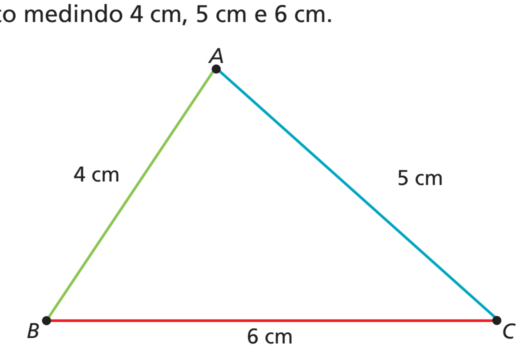


- $AB < AC + BC$
- $BC < AB + AC$
- $AC < AB + BC$

Desse modo, podemos considerar que dados três pontos, A, B e C, se as desigualdades entre as medidas de comprimento dos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, apresentadas anteriormente, forem verificadas, então os três pontos são vértices de um triângulo e, portanto, não estão alinhados.

Acompanhe os exemplos.

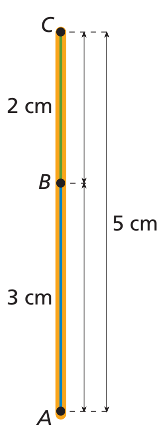
a. Os pontos A, B e C não estão alinhados e são vértices de um triângulo que tem lados com comprimento medindo 4 cm, 5 cm e 6 cm.



Analisando as medidas de comprimento dos lados, percebemos que:

- 4 cm < 5 cm + 6 cm
- 6 cm < 5 cm + 4 cm
- 5 cm < 4 cm + 6 cm

b. Os pontos A, B e C estão alinhados e são extremidades de segmentos de reta, cujos comprimentos medem 2 cm, 3 cm e 5 cm.



Analisando as medidas de comprimento desses segmentos de reta, percebemos que:

- 3 cm < 2 cm + 5 cm
- 2 cm < 3 cm + 5 cm
- 5 cm = 3 cm + 2 cm

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Gráfico de uma função afim

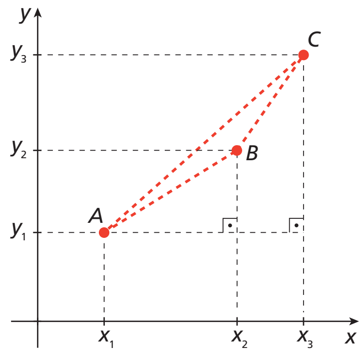
O gráfico de uma função afim é uma reta não perpendicular ao eixo x.

Demonstração

Seja a função afim dada por $f(x) = ax + b$.

Para provar que o gráfico dessa função é uma reta, devemos mostrar que três pontos distintos quaisquer do gráfico dessa função, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, pertencem a uma mesma reta.

Vamos supor $x_1 < x_2 < x_3$.



Para provar que os pontos A, B e C pertencem a uma mesma reta, como vimos no exemplo **b** anterior, devemos demonstrar que AC é igual a $AB + BC$.

Como o ponto A pertence ao gráfico de f, temos: $y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$

Para o ponto B, temos: $y_2 = f(x_2) = ax_2 + b$

O ponto C também pertence ao gráfico de f; então: $y_3 = f(x_3) = ax_3 + b$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + [ax_3 + b - (ax_1 + b)]^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (ax_3 + b - ax_1 - b)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (ax_3 - ax_1)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + [a(x_3 - x_1)]^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2(1 + a^2)$

$\sqrt{(AC)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2(1 + a^2)}$

Como $AC > 0$ e $x_3 - x_1 > 0$:

$AC = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

Analogamente, aplicamos o teorema de Pitágoras para obter AB e BC:

$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow AB = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

$(BC)^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_2)^2 \Rightarrow BC = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$

Assim:

$AB + BC = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$

$AB + BC = [(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)]\sqrt{1 + a^2}$

$AB + BC = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

$AB + BC = AC$

Como $AB + BC = AC$, então A, B e C estão em uma mesma reta.

Portanto, o gráfico de uma função afim é uma reta.

Observação

Na função afim dada por $f(x) = ax + b$, o coeficiente a é chamado de **coeficiente angular** ou taxa de variação, e o termo constante b é chamado de **coeficiente linear** da reta que representa o gráfico da função f.

Construção do gráfico da função afim

Como o gráfico de uma função afim é sempre uma reta, precisamos conhecer apenas dois pontos para construir seu gráfico.

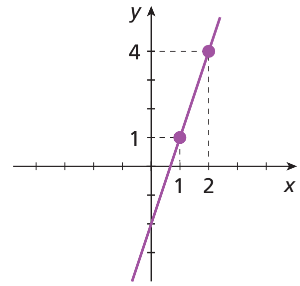
O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta oblíqua aos eixos x e y.

Acompanhe os exemplos.

a. $f(x) = 3x - 2$

$f(x) = 3x - 2$

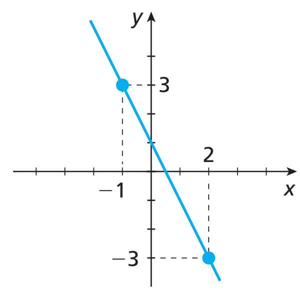
x	$f(x)$
1	1
2	4



b. $g(x) = -2x + 1$

$g(x) = -2x + 1$

x	$g(x)$
–1	3
2	–3



Observação

Note que podemos obter facilmente dois pontos para traçar o gráfico de uma função afim escolhendo os pontos que interceptam os eixos. Na função $g(x) = -2x + 1$, para $x = 0$, temos $g(x) = 1$ e para $g(x) = 0$, temos: $-2x + 1 = 0 \Rightarrow \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

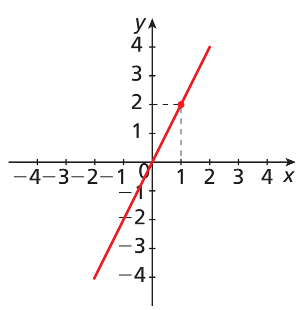
O gráfico de uma função linear é sempre uma reta que passa pelo ponto (0, 0), ou seja, pela origem do plano cartesiano.

Considere os exemplos.

a. $f(x) = 2x$

$f(x) = 2x$

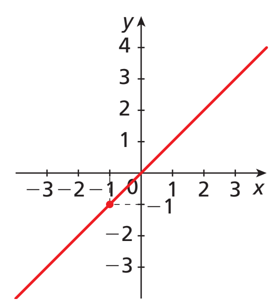
x	$f(x)$
0	0
1	2



b. $g(x) = x$

$g(x) = x$

x	$f(x)$
0	0
–1	–1



Quando a função linear é crescente, os valores da variável y são diretamente proporcionais aos valores da variável x. Neste caso, a razão entre y e o seu correspondente x é igual a uma constante k, com x e y não nulos.

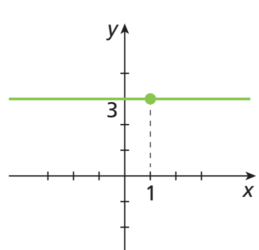
O gráfico de uma função constante sempre será uma reta paralela ao eixo x ou coincidente com o eixo x.

Analise os exemplos.

a. $f(x) = 3$

$f(x) = 3$

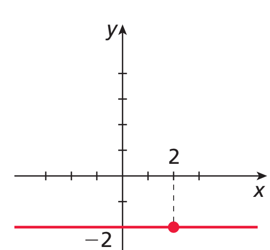
x	$f(x)$
1	3



b. $g(x) = -2$

$g(x) = -2$

x	$g(x)$
2	–2



O gráfico da função constante $f(x) = 0$ coincide com o eixo x.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Coeficiente linear

Para determinar o ponto em que o gráfico de uma função afim de lei $f(x) = ax + b$ intercepta o eixo y, fazemos $x = 0$:

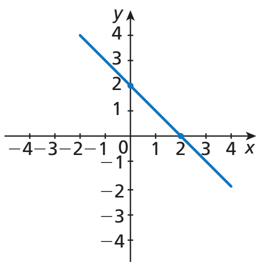
$$f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b$$

Ou seja, para $x = 0$, $y = b$. Assim, o ponto $(0, b)$ é o de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas.

Analise os exemplos.

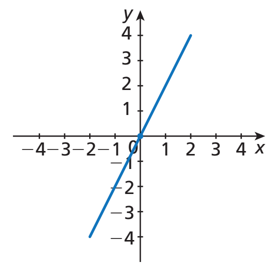
a. $f(x) = -x + 2$

Como o coeficiente linear é 2, a intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas é o ponto (0, 2).



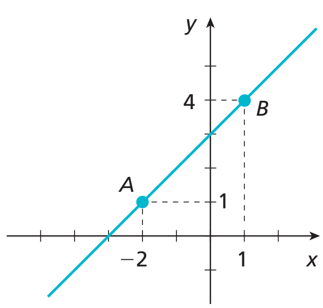
b. $g(x) = 2x$

Como o coeficiente linear é 0, a intersecção do gráfico de g com o eixo das ordenadas é o ponto (0, 0).



Atividades resolvidas

R3. Determinar a lei da função representada pelo gráfico a seguir.



▶ **Resolução**

Vamos considerar $y = ax + b$ como a lei da função.

Como a reta passa pelo ponto (0, 3), $b = 3$.

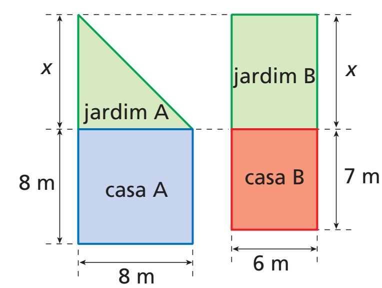
Observamos as coordenadas de dois pontos do gráfico, nesse caso, A e B.

Como $A(-2, 1)$ e $B(1, 4)$, podemos determinar a taxa de variação da função considerando o intervalo $[-2, 1]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} = \frac{(4 - 1)}{(1 - (-2))} = \frac{3}{3} = 1. \text{ Assim, } a = 1.$$

Portanto, a lei da função é $f(x) = x + 3$.

R4. Um arquiteto pretende construir duas casas com jardim, uma ao lado da outra. Ao esboçar a planta com as duas casas, ele teve dúvida quanto à medida do comprimento de um dos lados de cada jardim, pois precisa construir as casas de modo que a medida da área ocupada pela casa B e pelo jardim B seja maior que a medida da área ocupada pela casa A e pelo jardim A.



Nessas condições, quais são os valores possíveis para x?

▶ **Resolução**

Vamos determinar as leis das funções que representam a medida da área que cada casa e seu jardim ocupam em função da medida x.

Medida da área ocupada pela casa A e pelo jardim A:

$$A_1 = 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot x = 64 + 4x$$

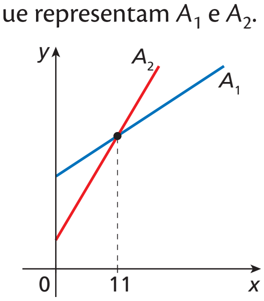
Medida da área ocupada pela casa B e pelo jardim B:

$$A_2 = 6 \cdot 7 + 6 \cdot x = 42 + 6x$$

Portanto, $A_1 = 4x + 64$ e $A_2 = 6x + 42$.

Para $A_1 = A_2$, temos $x = 11$, que é a abscissa do ponto de intersecção dos gráficos que representam A_1 e A_2.

Esboçando os gráficos, percebemos que A_2 é maior que A_1 quando $x > 11$, pois nesse intervalo o gráfico de A_2 está acima do gráfico de A_1.



Portanto, x tem de ser maior que 11 m.

11 a. Zero da função f: $\frac{2}{3}$; zero da função g: $\frac{1}{2}$.

11 b. Espera-se que os estudantes percebam que a função constante $f(x) = b$, com $b \neq 0$, não tem zeros, e que os zeros da função constante $f(x) = 0$ são todos os números reais.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

11. Os valores de x do domínio de f para os quais $f(x) = 0$ são chamados de zeros da função. Com base nisso, responda:

a. Quais são os zeros da função $f(x) = 3x - 2$? E da função afim $g(x) = -2x + 1$?

b. Quais são os zeros da função constante $f(x) = b$, com $b \neq 0$? E da função constante $f(x) = 0$?

12. Construa o gráfico de cada uma das funções polinomiais do 1º grau. **12.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. $f(x) = 2x + 3$

b. $g(x) = -4x + \frac{1}{2}$

c. $h(x) = -x + 2$

d. $i(x) = -4 + \frac{6}{3}x$

13. Respostas no *Suplemento para o professor*.

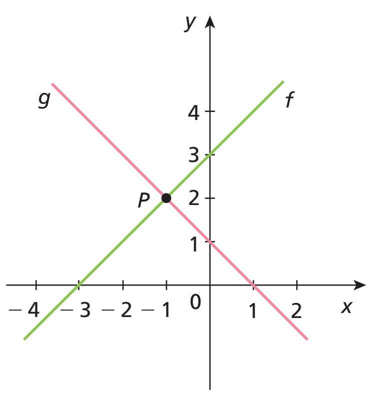
13. Com base na atividade anterior, responda:

a. O que os gráficos das funções f e i têm em comum?

b. E os gráficos das funções g e h?

c. Determine o ponto de intersecção entre os gráficos das funções f e i.

14. Analise os gráficos das funções f e g.



a. Qual é a lei da função f? E da função g? **14 a.** $f(x) = x + 3$; $g(x) = -x + 1$.

b. Qual é o ponto de intersecção dos gráficos de f e g?

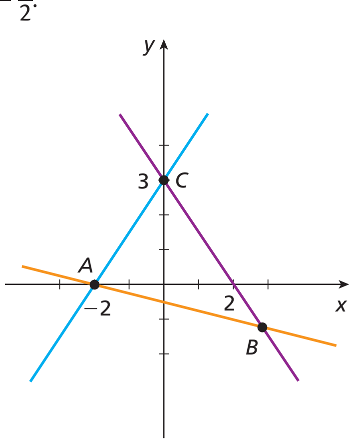
14 b. P(−1, 2)

15. Analise os gráficos e determine os pontos A, B e C, sabendo que a reta que passa pelos pontos A e B é gráfico da função $y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2}$.

15. $A(-2, 0)$

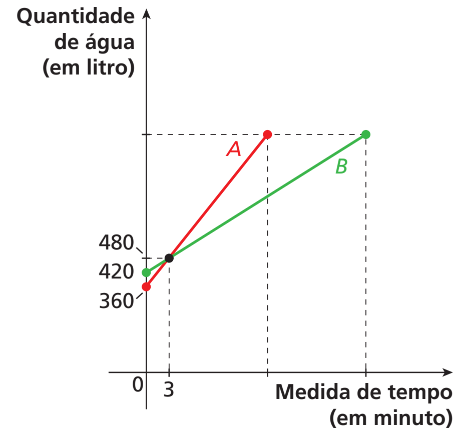
$B\left(\frac{14}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

$C(0, 3)$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

16. Analise os gráficos a seguir que representam o enchimento de duas caixas-d'água, A e B de 1.000 litros cada uma, sendo que cada caixa tem uma torneira para enchê-la. Depois, responda às questões.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

a. As duas torneiras têm a mesma vazão? Se não, qual delas tem a maior vazão? **16 a.** Não; a torneira A tem a maior vazão.

b. Qual é a taxa de variação de cada função representada? **16 b.** A: 40 e B: 20.

c. Qual é o coeficiente linear de cada função representada? **16 c.** A: 360 e B: 420.

d. O que significam os valores encontrados no item **c**?

e. Qual é a lei de formação de cada função?

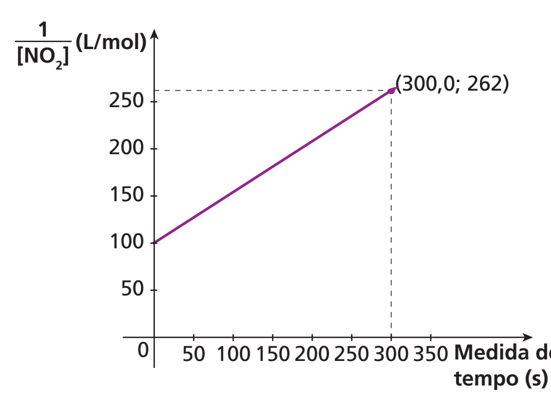
f. Qual é a medida de tempo para o enchimento de cada caixa-d'água? **16 f.** A: 16 minutos; B: 29 minutos.

g. Qual é o domínio de cada função representada?

h. Qual é a imagem de cada função representada?

17. O gráfico a seguir foi obtido com os dados da decomposição na fase gasosa de dióxido de nitrogênio a 300 °C, conforme a reação: **17 c.** $\frac{1}{[NO_2]} = 100 \Rightarrow [NO_2] = \frac{1}{100} \therefore [NO_2] = 0{,}01$ mol/L

$$NO_2\,(g) \rightarrow NO(g) + \frac{1}{2}O_2\,(g)$$



Responda às questões: **17 b.** Significa a constante de velocidade com que o NO_2 se decompõe.

a. Determine a taxa de variação da função que representa a reação. **17 a.** $\frac{27}{50} = 0{,}54$

b. O que significa essa taxa de variação?

c. Qual é a concentração inicial de NO_2?

d. Determine a lei da função representada pelo gráfico.

17 d. $y = 0{,}54x + 100$, com $0 \leqslant x \leqslant 300$

16 d. As quantidades de litros que há em cada caixa antes da abertura das torneiras.

16 e. Sendo A a função da caixa A e B a função da caixa B, temos: $A(x) = 360 + 40x$ e $B(x) = 420 + 20x$

16 g. $D(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 16\}$ $D(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 29\}$

16 h. $Im(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid 360 \leqslant y \leqslant 1.000\}$ $Im(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid 420 \leqslant y \leqslant 1.000\}$

Função linear e proporcionalidade

A Estação Espacial Internacional orbita a Terra a uma medida de velocidade igual a 7,66 quilômetros por segundo. Verifique a seguir a medida da distância *s* (em quilômetro) percorrida pela Estação em função da medida do tempo *t* (em segundo), durante 5 segundos.

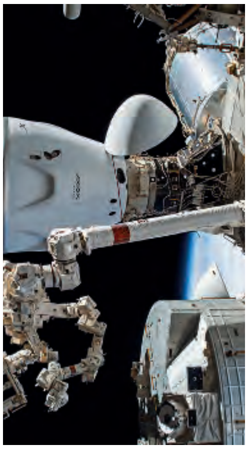


Imagem do ônibus espacial Endeavour ancorado na Estação Espacial Internacional, em abril de 2022.

Medida da distância percorrida conforme a medida do tempo

t (em segundo)	1	2	3	4	5
s (em km)	7,66	15,32	22,98	30,64	38,30

ODS 9

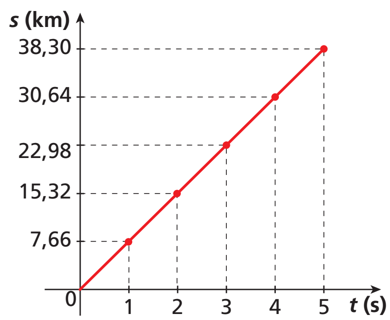
Note que: $\frac{s}{t} = \frac{7,66}{1} = \frac{15,32}{2} = \frac{22,98}{3} = \frac{30,64}{4} = \frac{38,30}{5} = k$

Assim, $\frac{s}{t} = k \Rightarrow s = k \cdot t$. Como $k = 7,66$, podemos expressar o quanto a Estação Espacial percorre em determinado tempo por meio da função linear: $s(t) = 7,66t$, sendo $s(t)$ em quilômetro e t em segundo.

Note que k é a medida da velocidade (razão entre a medida da distância e a medida do tempo) dada em quilômetro por segundo.

Dizemos que os valores de *s* são **diretamente proporcionais** aos respectivos valores de *t* porque, se a medida do tempo dobra, a medida da distância também dobra; se a medida do tempo triplica, a medida da distância também triplica, e assim por diante.

Analise o gráfico dessa função linear.



Observação

Consideramos para o gráfico anterior não apenas os pontos cujas coordenadas são os valores do quadro, mas uma semirreta com extremidade na origem do plano cartesiano, pois o domínio da função para o nosso exemplo é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 5\}$.

Se $y = f(x)$, dizemos que y é diretamente proporcional a x quando as seguintes condições forem satisfeitas:

1ª. y é uma função crescente de x;

2ª. se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y também fica **multiplicado** por n. Ou seja:

$f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo valor de x e todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação

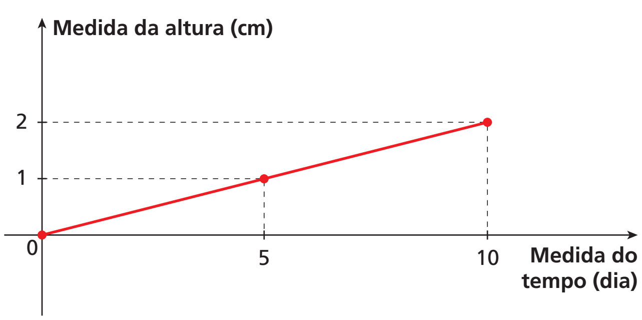
Se $y = f(x)$ for inversamente proporcional a x, vale a seguinte expressão:

$y \cdot x = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}$, sendo k a constante de proporcionalidade inversa.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

18. Considere o gráfico que representa o crescimento de uma planta, em centímetro, ao longo do tempo.



Se mantida sempre essa relação entre as medidas de tempo e a medida da altura, a planta terá no trigésimo dia uma altura que mede:

18. Alternativa **e**.

a. 5 cm **b.** 150 cm **c.** 15 cm **d.** 30 cm **e.** 6 cm

19. Dado um quadrado de lado de medida de comprimento ℓ, explique se a medida da área A do quadrado é diretamente proporcional à medida do comprimento do seu lado ℓ.

19. Resposta no *Suplemento para o professor*.

20. **ARGUMENTAÇÃO** A função que relaciona medidas de grandezas inversamente proporcionais é uma função linear? Justifique sua resposta.

20. Não. Na função que relaciona as grandezas inversamente proporcionais, a variável independente encontra-se no denominador de uma fração, diferentemente de uma função linear que é do tipo $f(x) = ax$.

Análise do gráfico da função polinomial do 1º grau

Crescimento e decrescimento de uma função

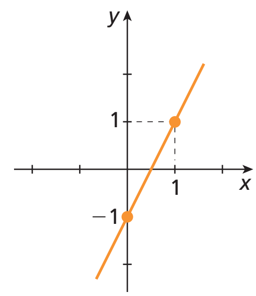
Uma função polinomial do 1º grau, de lei $f(x) = ax + b$, pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor do coeficiente a da função.

Acompanhe os exemplos.

a. $f(x) = 2x - 1$

$f(x) = 2x - 1$

x	$f(x)$
−2	−5
−1	−3
0	−1
1	1
2	3

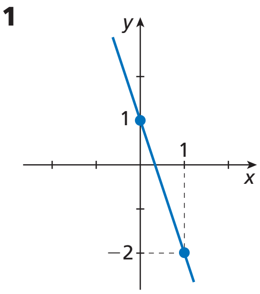


Quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de $f(x)$ também aumentam. Portanto, a função f é **crescente**. Note que, na lei $y = 2x - 1$, temos $a = 2$ $(a > 0)$.

b. $g(x) = -3x + 1$

$g(x) = -3x + 1$

x	$g(x)$
−2	7
−1	4
0	1
1	−2
2	−5



Quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de $g(x)$ diminuem. Portanto, a função g é **decrescente**. Note que, na lei $y = -3x + 1$, temos $a = -3$ $(a < 0)$.

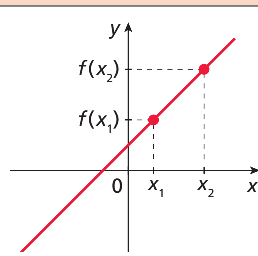
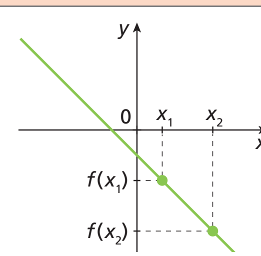
Observação

Para uma função polinomial do 1º grau crescente, como a função f, a taxa de variação é positiva. No caso de uma função polinomial do 1º grau decrescente, como a função g, a taxa de variação é negativa.

De modo geral, temos:

- uma função polinomial do 1º grau $y = ax + b$ é **crescente** quando o coeficiente a é maior que zero $(a > 0)$;
- uma função polinomial do 1º grau $y = ax + b$ é **decrescente** quando o coeficiente a é menor que zero $(a < 0)$.

Função crescente e função decrescente

Função crescente $(a > 0)$	Função decrescente $(a < 0)$
	
$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 > ax_1 \Rightarrow ax_2 + b > ax_1 + b$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$	$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 < ax_1 \Rightarrow ax_2 + b < ax_1 + b$, ou seja, $f(x_2) < f(x_1)$

Acompanhe os exemplos.

a. $f(x) = -\sqrt{2}\,x + 3$ é uma função decrescente, pois $-\sqrt{2} < 0$, ou seja, $a < 0$.

b. $g(x) = 0{,}5x - 2$ é uma função crescente, pois $0{,}5 > 0$, ou seja, $a > 0$.

Quando $a = 0$ em $f(x) = ax + b$, a função é **constante**, pois, aumentando o valor de x, o valor de $f(x)$ não se altera. Por exemplo, $h(x) = 3$ é uma função constante, pois $a = 0$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade resolvida

R5. Dada a função afim de lei $f(x) = (-3 + m)x + 7$, discutir para que valores de m a função é crescente, decrescente ou constante.

▶ **Resolução**

Observe que o coeficiente de x nessa função é $(-3 + m)$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{A função é crescente se: } -3 + m > 0 \Rightarrow m > 3 \\ \text{A função é decrescente se: } -3 + m < 0 \Rightarrow m < 3\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Nesses casos, temos} \\ \text{uma função polinomial} \\ \text{do 1º grau.}\end{array}$$

$$\text{A função é constante se: } -3 + m = 0 \Rightarrow m = 3\left\}\begin{array}{l}\text{Nesse caso, temos} \\ \text{uma função afim} \\ \text{constante.}\end{array}\right.$$

Zero da função polinomial do 1º grau

Os **zeros** de uma função f são os números reais x para os quais $f(x) = 0$. Assim, o **zero da função polinomial do 1º grau** dada por $f(x) = ax + b$ é a raiz da equação do 1º grau $ax + b = 0$.

Para calcular o zero da função, devemos fazer:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

No gráfico, o zero de uma função polinomial do 1º grau é a abscissa do ponto em que a reta intercepta o eixo x.

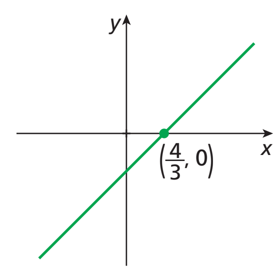
Analise o exemplo.

Vamos obter o zero da função f, dada por $f(x) = x - \frac{4}{3}$, e o ponto no qual a reta, que é seu gráfico, intercepta o eixo x.

Para isso, devemos resolver a seguinte equação:

$$x - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \text{ (zero da função)}$$

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$. Como $a = 1$, f é uma função crescente.



Atividade resolvida

R6. Determinar o valor de m para que o gráfico da função j, com $j(x) = (-3 + 6m)x + 5$, intercepte o eixo x no ponto $(1, 0)$.

▶ **Resolução**

Para $x = 1$, temos $j(x) = 0$.

Assim: $0 = (-3 + 6m) \cdot 1 + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6m = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$

Logo, para $m = -\frac{1}{3}$, o gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $(1, 0)$.

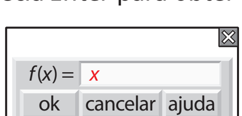
Intersecção da reta que é gráfico da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$

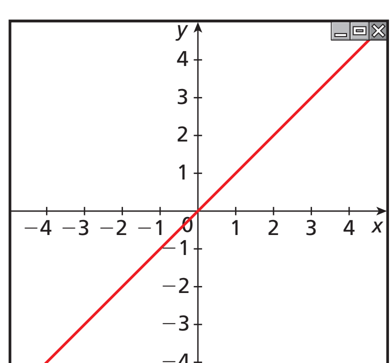
- com o eixo y: ponto $(0, b)$
- com o eixo x: ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

Translação do gráfico de uma função afim

Vamos utilizar um *software* de construção de gráficos para construir o gráfico das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x + 1$, respectivamente.

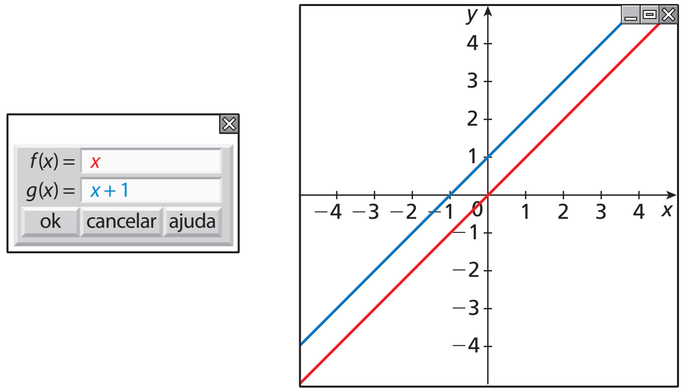
Primeiro, digitamos "$f(x) = x$" no campo *Entrada*. Depois, clicamos na tecla *Enter* para obter o gráfico de f.





ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

No mesmo plano do gráfico da função f, vamos construir o gráfico de g. Assim, digitamos: "$g(x) = x + 1$" no campo *Entrada*. Depois, clicamos na tecla *Enter* para obter o gráfico de g.



Podemos observar que o gráfico de g é uma translação paralela do gráfico de f em uma unidade para cima, na direção vertical ou em uma unidade para a esquerda, na direção horizontal.

Estudo do sinal da função pelo gráfico

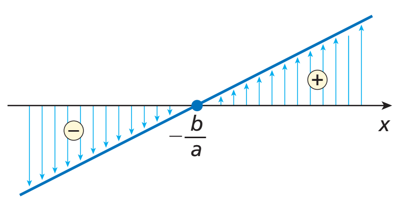
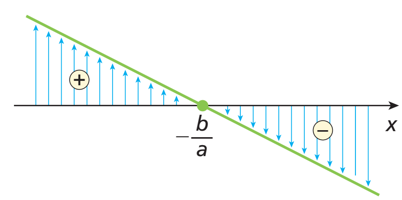
Estudar o sinal da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$ significa verificar para quais valores de x a função é positiva, nula ou negativa.

Podemos fazer esse estudo esboçando o gráfico da função. Para isso, analisamos se a função é crescente ou decrescente.

Observação

Estudar o sinal de uma função pelo gráfico significa determinar os valores de x para os quais seu gráfico está acima do eixo x, intercepta-o ou está abaixo dele.

Estudo do sinal de função crescente e de função decrescente

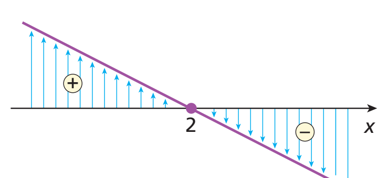
Função crescente ($a > 0$)	Função decrescente ($a < 0$)
	
$f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x > -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x < -\frac{b}{a}$	$f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x < -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x > -\frac{b}{a}$

Analise o exemplo.

Vamos estudar o sinal da função polinomial do 1º grau f dada por $f(x) = -3x + 6$.

A função é decrescente, pois $a = -3$ $(-3 < 0)$.

O zero da função é 2, pois: $-3x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$



Analisando o esboço do gráfico, verificamos que: $f(x) = 0$ para $x = 2$; $f(x) > 0$ para $x < 2$ e $f(x) < 0$ para $x > 2$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

24. A função é crescente para $m > \frac{1}{2}$ e decrescente para $m < \frac{1}{2}$.

21 a. decrescente
21 b. crescente
21 c. crescente
21 d. decrescente

Atividades propostas

Registre em seu caderno

21. Classifique cada função polinomial do 1º grau a seguir como crescente ou decrescente.

a. $f(x) = -5x + 2$

b. $h(x) = -3 + \frac{x}{2}$

c. $g(x) = x - \frac{3}{4}$

d. $f(x) = 1 - 2x$

22. Responda.

a. Qual é o zero da função identidade? **22 a.** $x = 0$

b. Em que ponto o gráfico da função identidade intercepta os eixos x e y? **22 b.** (0, 0); (0, 0).

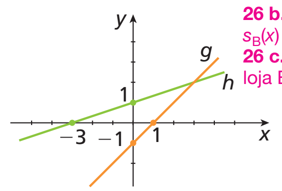
23. Estude o sinal das funções polinomiais do 1º grau dadas por:

a. $f(x) = 3x + \frac{3}{4}$

b. $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

24. Dada a função de lei $f(x) = \left(m - \frac{1}{2}\right)x + 7$, discuta para que valores de m a função é crescente e para que valores de m ela é decrescente.

25. Observe o gráfico das funções afins g e h.



26 b. $s_A(x) = 2.000 + 0,02x$
$s_B(x) = 0,15x$
26 c. loja A: R$ 50.000,00; loja B: R$ 20.000,00

a. Calcule o coeficiente angular das retas que são os gráficos de g e h. **25 a.** g: 1; h: $\frac{1}{3}$.

b. Determine o coeficiente linear de cada uma das retas representadas no gráfico. **25 b.** g: −1; h: 1.

c. Determine o ponto de intersecção das retas. **25 c.** (3, 2)

d. Para quais valores de x tem-se $h(x)$ menor que $g(x)$? **25 d.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

26. Na época do Natal, a loja A oferece aos funcionários temporários, que trabalham 6 horas por dia, um salário fixo de R$ 2.000,00 mais uma comissão de 2% (em real) sobre o total vendido; já a loja B não oferece salário fixo para o mesmo tipo de funcionário, mas paga 15% (em real) de comissão sobre o total vendido.

a. Para um total de vendas de R$ 13.000,00, qual é o salário recebido na loja A? E na loja B? **26 a.** R$ 2.260,00; R$ 1.950,00

b. Indique por x o valor total das vendas e escreva a lei das funções correspondentes ao salário recebido em cada uma das lojas pelo total de vendas.

c. Qual deve ser o total de vendas para que um funcionário da loja A receba R$ 3.000,00 de salário? E da loja B?

d. A partir de que valor de vendas é mais vantajoso trabalhar na loja B? **26 d.** A partir de valores acima de R$ 15.384,62.

27. ***SOFTWARE*** **ARGUMENTAÇÃO** Utilize um *software* de construção de gráficos que seu professor indicar, para construir, em um mesmo plano cartesiano, gráficos da função $y = ax + b$. Primeiro, estude os casos em que $b = 0$ (função linear) e a é um número real não nulo. Não deixe de utilizar valores negativos e positivos para a. Em outro plano, construa gráficos da função $y = ax + b$, com b diferente de 0. Mantenha o coeficiente a e faça variações com o coeficiente b. Depois de verificar as construções feitas, escreva um texto concluindo o que foi observado com a atividade.

23 a. $f(x) = 0$ para $x = -\frac{1}{4}$;
$f(x) > 0$ para $x > -\frac{1}{4}$;
$f(x) < 0$ para $x < -\frac{1}{4}$.

23 b. $g(x) = 0$ para $x = 2$; $g(x) > 0$ para $x < 2$; $g(x) < 0$ para $x > 2$.

27. Espera-se que o estudante perceba que a variação do parâmetro a em $y = ax + b$ modifica a inclinação da reta. Mantendo o coeficiente a e variando o coeficiente b, a reta é transladada paralelamente à reta original.

Resolução de situações-problema pelo gráfico da função

Em muitas situações-problema, usamos o gráfico de funções cujas leis são do tipo $y = ax + b$, com domínio restrito, ou seja, subconjuntos de $\mathbb{R}$ (distintos de $\mathbb{R}$). Vamos analisar algumas dessas situações por meio de exemplos.

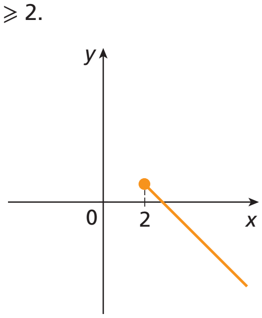
a. Vamos escrever o domínio e o conjunto imagem da função:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, \text{ se } x \geqslant 2 \\ x + 1, \text{ se } x < 2 \end{cases}$$

Para isso, vamos construir o gráfico de f por partes.

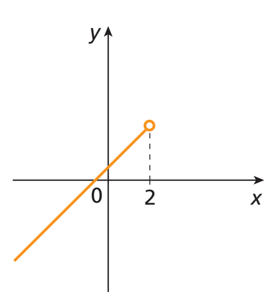
Construção do gráfico da função *f*

Primeiro, construímos o gráfico de f para $x \geqslant 2$.



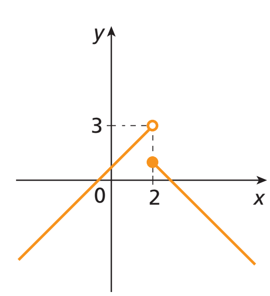
Para $x \geqslant 2$, o gráfico da função f segue a lei $y = 3 - x$.

Em seguida, construímos o gráfico de f para $x < 2$.



Para $x < 2$, o gráfico da função f segue a lei $y = x + 1$.

Finalmente, construímos o gráfico de f.



Para $x \geqslant 2$, o gráfico de f está contido na reta $y = 3 - x$; para $x < 2$, na reta $y = x + 1$.

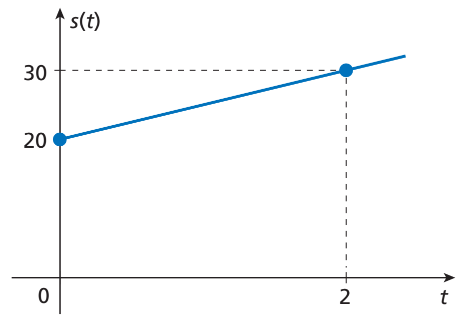
Observando o gráfico, temos $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 3\}$.

Observação

O ponto (2, 1) pertence à parte do gráfico correspondente à função $y = 3 - x$ (indicamos com a "bolinha fechada"). O ponto (2, 3) não pertence à parte que corresponde à função $y = x + 1$ (indicamos com a "bolinha aberta"). Ao reunir as duas partes do gráfico, verificamos que 2 pertence ao domínio da função f.

b. O movimento uniforme caracteriza-se pela velocidade de medida constante e diferente de zero. Por esse motivo, a medida da distância percorrida em intervalos de tempos iguais é sempre a mesma. Assim, a função horária desse movimento é dada pela lei $s(t) = s_0 + v \cdot t$, em que $s(t)$ é a posição (em metro) no instante t (em segundo); s_0 é o espaço inicial quando $t = 0$; e v é medida da velocidade constante (em metro por segundo).

Vamos resolver algumas questões por meio da análise do gráfico.



a. Qual é a função horária do movimento correspondente ao gráfico?

Analisando o gráfico, percebemos que $s_0 = 20$ m; assim, $s(t) = 20 + vt$.

Como $s(2) = 30$, temos: $20 + 2v = 30 \Rightarrow v = 5$

Assim, a função horária do movimento é: $s(t) = 20 + 5t$

b. Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função?

Analisando o gráfico, temos $D(s) = \mathbb{R}_+$ e $Im(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geqslant 20\}$.

c. Qual será a posição após 10 segundos?

Para $t = 10$, temos: $s(10) = 20 + 5 \cdot 10 \Rightarrow s(10) = 70$

Portanto, após 10 segundos estará na posição 70 metros.

d. Após quanto tempo estará na posição 120 metros?

Para $s(t) = 120$, temos: $20 + 5t = 120 \Rightarrow t = 20$

Logo, após 20 segundos estará na posição 120 metros.

Observação

Para construir o gráfico anterior, adotamos escalas diferentes para os eixos vertical e horizontal, o que não invalida os dados usados para efetuar os cálculos necessários.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

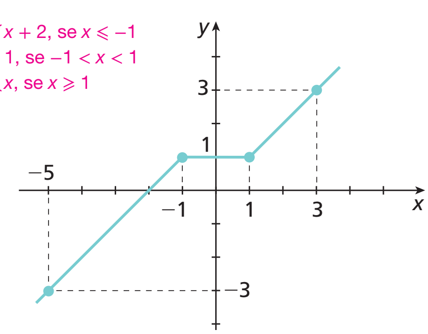
28. Construa o gráfico da função a seguir e, depois, identifique o conjunto imagem.

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geqslant 1 \\ x, \text{ se } -1 \leqslant x < 1 \\ 1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$$

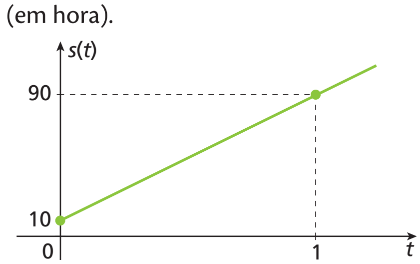
28. Resposta no *Suplemento para o professor*. $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1$ ou $y = 2\}$

29. Observe o gráfico e determine a lei da função correspondente.

29. $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leqslant -1 \\ 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$



30. Considere o gráfico a seguir, que representa a posição (em quilômetro) de um automóvel em função da medida do tempo (em hora).



a. Qual é a medida da velocidade do automóvel? **30 a.** 80 km/h

b. Qual é a função horária do movimento correspondente ao gráfico? **30 b.** $s(t) = 10 + 80t$

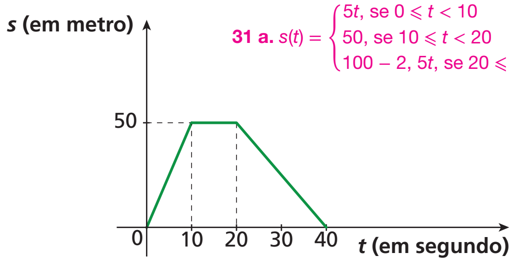
c. Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função?

d. Qual será a posição do carro após 4 horas?

e. Após quanto tempo o carro estará na posição 250 quilômetros? **30 e.** 3 horas

30 c. $D(s) = \mathbb{R}_+$ e $Im(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geqslant 10\}$ **30 d.** 330 quilômetros

31. Observe o gráfico que representa o movimento de um corpo que se desloca numa trajetória retilínea em função da medida do tempo. Depois, responda às questões.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

31 a. $s(t) = \begin{cases} 5t, \text{ se } 0 \leqslant t < 10 \\ 50, \text{ se } 10 \leqslant t < 20 \\ 100 - 2{,}5t, \text{ se } 20 \leqslant t \leqslant 40 \end{cases}$

a. Determine a lei da função (espaço × tempo) representada pelo gráfico.

b. Em que posição estará o corpo em 5 segundos? E em 35 segundos? **31 b.** 25 m; 12,5 m.

c. O que significa a taxa de variação no intervalo de:
- 0 a 10 segundos?
- 10 a 20 segundos?
- 20 a 40 segundos?

d. Faça um quadro com segundos inteiros de 1 a 10 e as suas respectivas posições. Feito isso, explique se nesse intervalo os valores de uma variável são diretamente proporcionais aos valores da outra variável.

31 d. Resposta no *Suplemento para o professor*.

31 c.
- Uma medida de velocidade constante de 5 m/s.
- Nesse intervalo a taxa de variação é zero, o que significa que o corpo permanece em repouso.
- A taxa de variação é negativa, −2,5. Nesse caso, significa que o movimento é retrógrado, isto é, o corpo está se deslocando no sentido contrário ao da trajetória.

Inequações do 1º grau

Toda inequação que pode ser reduzida a uma desigualdade em que o primeiro membro é um polinômio do tipo $ax + b$ (com $a \neq 0$) e o segundo membro é zero é chamada de **inequação do 1º grau** na incógnita x.

Considere os exemplos.

a. $4x - 3 \geqslant 0$

b. $8x > 0$

c. $-\sqrt{7}x + 1 \leqslant 0$

d. $-5x - 0{,}2 < 0$

A seguir, vamos usar os princípios de equivalência das desigualdades para resolver inequações.

Princípio aditivo de equivalência das desigualdades

Ao adicionar aos dois membros de uma desigualdade um mesmo número, obtemos outra desigualdade equivalente de mesmo sentido.

Analise o exemplo.

$$-4 > -7 \Rightarrow -4 + 12 > -7 + 12 \Rightarrow 8 > 5$$

sentido da desigualdade mantido

Princípio multiplicativo de equivalência das desigualdades

Ao multiplicar os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número **positivo**, obtemos outra desigualdade equivalente de mesmo sentido.

Analise o exemplo.

$$21 > 15 \Rightarrow 21 \cdot \frac{1}{3} > 15 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow 7 > 5$$

sentido da desigualdade mantido

Ao multiplicar os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número **negativo**, obtemos outra desigualdade equivalente de sentido invertido.

Acompanhe os exemplos.

a. $14 > 1 \Rightarrow 14 \cdot (-3) < 1 \cdot (-3) \Rightarrow -42 < -3$

sentido da desigualdade invertido

b. $-32 < 64 \Rightarrow -32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) > 64 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 16 > -32$

sentido da desigualdade invertido

Atividades resolvidas

R7. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $3(x+2) \leqslant 2(2x+4)$.

▶ Resolução

$3(x+2) \leqslant 2(2x+4)$

$\left.\begin{array}{l} 3x+6 \leqslant 4x+8 \\ 3x-4x \leqslant 8-6 \end{array}\right\}$ Aplicamos o princípio aditivo de equivalência das desigualdades.

$\left.\begin{array}{l} -x \leqslant 2 \\ x \geqslant -2 \end{array}\right\}$ Aplicamos o princípio multiplicativo de equivalência das desigualdades.

Logo, o conjunto solução da inequação é
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$.

R8. Determinar o conjunto solução da inequação
$\dfrac{x+4}{3} - \dfrac{3x+2}{4} \geqslant 0$, considerando $U = \mathbb{R}$.

▶ Resolução

$\dfrac{x+4}{3} - \dfrac{3x+2}{4} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{4(x+4)-3(3x+2)}{12} \geqslant \dfrac{0}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x + 16 - 9x - 6 \geqslant 0 \Rightarrow -5x + 10 \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5x \geqslant -10 \Rightarrow x \leqslant 2$

Assim, o conjunto solução da inequação é
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades propostas

Registre em seu caderno

32. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

a. $3x - 12 \leqslant 0$ **32 a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

b. $5(-x+1) + 2(3x-4) > -1$ **32 b.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c. $\dfrac{-x+3}{2} < \dfrac{2x+5}{3}$ **32 c.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{1}{7}\right\}$

33. ***SOFTWARE*** Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das funções f e g dadas por $f(x) = -x + 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$, utilizando um *software* de construção de gráficos que seu professor indicar.

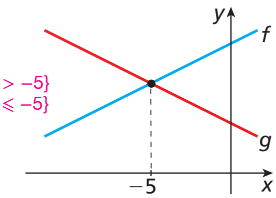
a. Analise os intervalos do domínio em que $f(x) < g(x)$.

b. Monte a inequação, resolva-a e compare a solução com sua análise dos gráficos. O que você conclui?

33. Respostas no *Suplemento para o professor*.

34. Os gráficos de duas funções, f e g, estão representados no plano cartesiano a seguir.

34 a. $x = -5$
34 b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$
34 c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$



Analisando o gráfico, resolva as questões a seguir.

a. Para qual valor de x tem-se $f(x) = g(x)$?

b. Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$?

c. Determine o conjunto solução da inequação $g(x) \geqslant f(x)$.

Inequação-produto e inequação-quociente

Acompanhe o estudo de inequações-produto e inequações-quociente que envolvem funções afins.

Sendo f e g funções na variável real x, chamamos de **inequação-produto** as sentenças expressas por: $f(x) \cdot g(x) > 0$, $f(x) \cdot g(x) < 0$, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ e $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$

Considere os exemplos.

a. $\left(\dfrac{1}{3} - 4x\right) \cdot (x-1) > 0$

b. $(0{,}45x - 7) \cdot (8 - 2x) < 0$

c. $(89x + 1) \cdot \left(x + \dfrac{3}{5}\right) \geqslant 0$

d. $(3x+4) \cdot \left(x - \sqrt{11}\right) \cdot (5 - 2x) \leqslant 0$

Observação

O primeiro membro da inequação pode ser formado pelo produto de mais de duas funções.

Sendo f e g funções na variável real x, com $g(x) \neq 0$, chamamos de **inequação-quociente** as sentenças expressas por:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} < 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \text{ e } \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$$

Considere os exemplos.

a. $\dfrac{x+7}{x} > 0$ **b.** $\dfrac{\sqrt{3}\,x}{x-13} < 0$ **c.** $\dfrac{0{,}32x-2}{x+9} \geqslant 0$ **d.** $\dfrac{x}{23-x} \leqslant 0$

Atividades resolvidas

R9. Determinar o conjunto solução da inequação $x^2 - 1 \geqslant 0$, considerando $U = \mathbb{R}$.

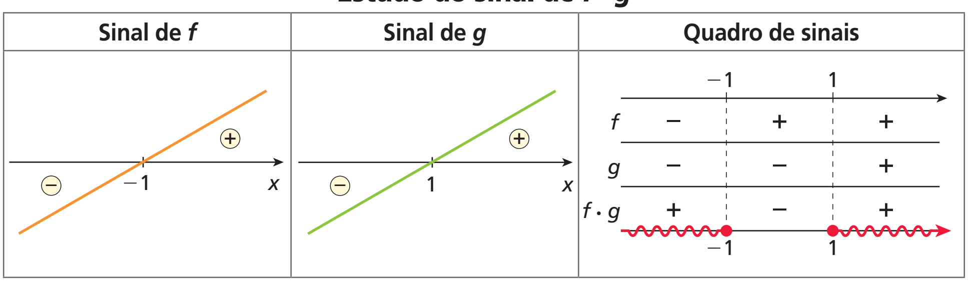
▶ **Resolução**

Podemos fatorar a expressão $x^2 - 1$. Observe: $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$

Assim, escrevemos essa inequação como a inequação-produto $(x + 1) \cdot (x - 1) \geqslant 0$.

Seja $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$. Para que o produto $f(x) \cdot g(x)$ seja positivo ou nulo, devemos ter $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ ou, então, $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) \leqslant 0$.

Estudo do sinal de $f \cdot g$



Os valores de x que tornam o produto $(x + 1) \cdot (x - 1)$ maior ou igual a zero podem ser indicados pelo intervalo: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Logo, o conjunto solução da inequação $x^2 - 1 \geqslant 0$ é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$.

R10. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{2-5x}{x+1} \leqslant -1$.

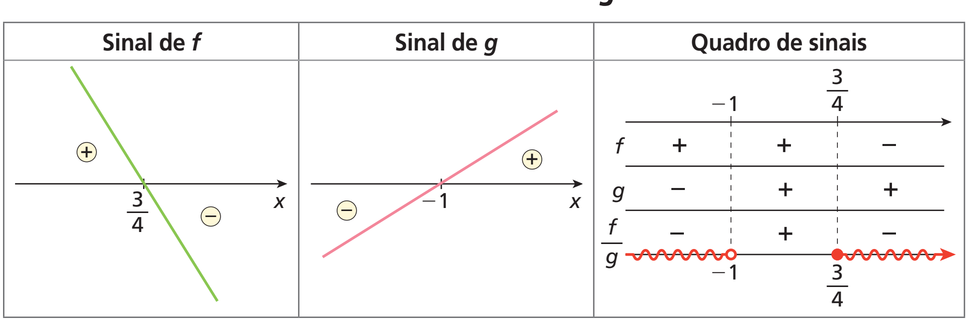
▶ **Resolução**

Essa inequação tem o segundo membro diferente de zero. Então, aplicamos o princípio aditivo de equivalência das desigualdades:

$$\frac{2-5x}{x+1} \leqslant -1 \Rightarrow \frac{2-5x}{x+1} + 1 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{-4x+3}{x+1} \leqslant 0$$

Seja $f(x) = -4x + 3$ e $g(x) = x + 1$. Para que o quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ seja negativo ou nulo, devemos ter $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) < 0$ ou, então, $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) > 0$.

Estudo do sinal de $\dfrac{f}{g}$



Observe que -1 não é solução da inequação, pois $g(x) \neq 0$.

Ou seja: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Os valores de x que tornam o quociente $\dfrac{-4x+3}{x+1}$ menor ou igual a zero podem ser indicados pelo intervalo: $]-\infty, -1[\cup \left[\dfrac{3}{4}, +\infty\right[$

Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geqslant \dfrac{3}{4}\right\}$.

Observação

Preste atenção para não cometer o erro de estudar os sinais das funções $y = 2 - 5x$ e $y = x + 1$. O quadro de sinais só pode ser usado quando a inequação-quociente tem o segundo membro igual a zero.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

38 d. Resposta possível: $\frac{x+1}{-3x-1} \leqslant 0$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

35. Resolva, em $\mathbb{R}$, cada inequação-produto e cada inequação-quociente. 35 a. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{6}\right\}$

a. $(x+2)\cdot\left(-\frac{1}{2}+3x\right) > 0$

b. $\frac{x+7}{2-x} < 0$

c. $\frac{-1}{x+2} + \frac{2x}{x+2} \geqslant -2$

35 c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geqslant -\frac{3}{4}\right\}$

35 b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 2\}$

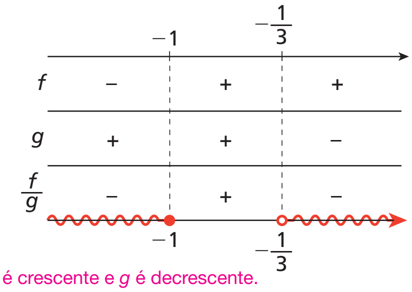
36. Quantos números inteiros e estritamente positivos satisfazem a inequação $\frac{10}{x-20} \leqslant \frac{10}{12-x}$? 36. Alternativa **b**.

a. 16
b. 15
c. 14
d. 13
e. −13

37. Considerando $f(x) = -x + 2$ e $g(x) = x + 1$, a soma dos valores inteiros de x tais que $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ é: 37. Alternativa **e**.

a. −2
b. −3
c. 0
d. 3
e. 2

38. Sabendo que f e g são funções afins, analise este quadro de sinais, usado para resolver uma inequação.



38 b. f é crescente e g é decrescente.

a. Qual é o zero da função f? E da função g? 38 a. -1; $-\frac{1}{3}$.

b. As funções f e g são crescentes ou decrescentes?

c. De acordo com esse quadro de sinais, qual é a solução da inequação? 38 c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$

d. EM GRUPO ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS Escreva uma inequação cuja solução seja a resposta apresentada no quadro de sinais. Apresente para os colegas a inequação que você encontrou e analise as inequações encontradas por eles. Há somente uma opção de resposta?

Inequações simultâneas

Inequações simultâneas são inequações apresentadas por duas desigualdades ou por meio de um sistema de inequações.

Analise os exemplos.

a. $\frac{1}{2} \leqslant 7x - 2 < 3x + \sqrt{5}$

b. $\begin{cases} 6x + (8+x) > 9x - 0{,}3 \\ \sqrt{2}\,x - x \leqslant x + \frac{7}{5} \end{cases}$

Para resolver inequações desse tipo, devemos determinar a solução de cada inequação e fazer a intersecção das soluções.

Atividades resolvidas

R11. Resolver, em $\mathbb{R}$, o sistema de inequações: $\begin{cases} x - (3+2x) < 4 \\ 7x - x^2 \geqslant -x(x-4) - 9 \end{cases}$

▶ **Resolução**

Inicialmente, devemos resolver cada uma das inequações do sistema.

(I) $x - (3+2x) < 4 \Rightarrow x - 3 - 2x < 4 \Rightarrow -x < 7 \Rightarrow x > -7$

Portanto, $S_{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -7\}$.

(II) $7x - x^2 \geqslant -x(x-4) - 9$

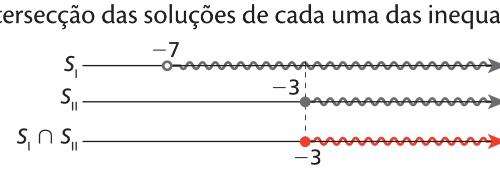
$7x - x^2 \geqslant -x^2 + 4x - 9$

$3x \geqslant -9$

$x \geqslant -3$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$.

Agora, faremos a intersecção das soluções de cada uma das inequações.



Logo, o conjunto solução do sistema é

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$.

R12. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $3 \leqslant 2x - 2 < x + 5$.

▶ Resolução

Inicialmente, devemos determinar a solução das inequações:

$3 \leqslant 2x - 2$ (I) e $2x - 2 < x + 5$ (II)

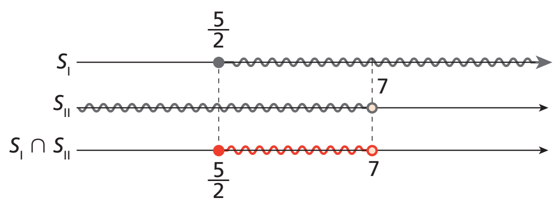
(I) $3 \leqslant 2x - 2 \Rightarrow 3 + 2 \leqslant 2x \Rightarrow 5 \leqslant 2x \Rightarrow x \geqslant \frac{5}{2}$

Portanto, $S_I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{5}{2}\right\}$.

(II) $2x - 2 < x + 5 \Rightarrow 2x - x < 5 + 2 \Rightarrow x < 7$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$.

Agora, precisamos fazer a intersecção das soluções de cada uma das inequações.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, o conjunto solução da inequação é

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} \leqslant x < 7\right\}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

39. Determine o conjunto solução das inequações considerando $U = \mathbb{R}$.

a. $5 \leqslant 3x - 4 < x + 2$ **39 a.** $S = \varnothing$

b. $\frac{3x}{5} \leqslant \frac{5x + 2}{4} \leqslant \frac{-x + 1}{2}$ **39 b.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{10}{13} \leqslant x \leqslant 0\right\}$

c. $\begin{cases} x + 3 \geqslant 0 \\ 4x - 7 \leqslant x - 4 \end{cases}$ **39 c.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$

d. $\begin{cases} 5x - 2 > 4 - x \\ 2(7 - x) \leqslant 5(2x + 4) \\ 2 - 3(4 + 2x) < 6 + 2(1 - 2x) \end{cases}$ **39 d.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

40. Uma empresa de planos de saúde está lançando duas novas modalidades de planos:

- Plano Azul: valor fixo anual de R\$ 140,00 mais R\$ 50,00 por consulta realizada no decorrer do ano. O usuário terá direito a até 20 consultas anuais.
- Plano Laranja: valor fixo anual de R\$ 220,00 mais R\$ 40,00 por consulta realizada no decorrer do ano. O usuário terá direito a até 60 consultas anuais.

a. Escreva uma lei matemática que represente o valor total pago por uma pessoa que usa o Plano Azul em função do número de consultas realizadas nesse período.

b. Refaça o item anterior considerando uma pessoa que utiliza o Plano Laranja. **40 b.** $220 + 40x$, em que $x \leqslant 60$.

c. Calcule a quantidade de consultas que devem ser realizadas no decorrer de um ano para que o valor total pago seja o mesmo para ambos os planos. **40 c.** 8 consultas

d. Considerando que o número anual de consultas efetuadas por uma pessoa possa ser expresso pela inequação $8 < x < 18$, em que x é o número de consultas, identifique qual dos planos é mais vantajoso para essa pessoa. **40 d.** Plano Laranja

e. Se o número x de consultas realizadas por uma pessoa em um ano pode ser representado pela inequação $4 < x < 7$, verifique qual dos planos é mais vantajoso nesse caso. **40 e.** Plano Azul

40 a. $140 + 50x$, em que $x \leqslant 20$.

41. Um agricultor tem um terreno e duas opções: plantar soja, ou plantar feijão. O gasto com a plantação de soja será R\$ 10.000,00, e o preço de venda de cada quilograma, R\$ 2,00. Já o gasto com a plantação de feijão será R\$ 12.000,00, e o preço de venda de cada quilograma, R\$ 3,00.

a. Que lei de formação dá o valor $V_s(x)$ obtido na produção de soja em função do número x de quilogramas vendidos e do gasto com a plantação?

b. Que lei de formação dá o valor $V_f(x)$ obtido na produção de feijão em função do número x de quilogramas vendidos e do gasto com a plantação?

c. Para quantos quilogramas teremos $V_s(x) = V_f(x)$? **41 c.** 2.000 quilogramas

d. Resolva, em $\mathbb{R}$, o sistema:

$\begin{cases} V_s(x) > V_f(x) \\ V_s(x) < V_f(x) \end{cases}$ **41 d.** $S = \varnothing$

41 a. $V_s(x) = 2x - 10.000$
41 b. $V_f(x) = 3x - 12.000$

e. Se o agricultor pretende produzir 10.000 quilogramas, em qual das duas culturas (soja ou feijão) ele terá mais lucro? **41 e.** cultura de feijão

f. Que quantidade mínima, em quilograma, esse agricultor precisa produzir para que seja mais vantajoso plantar feijão? **41 f.** 2.001 quilogramas

Identificação do domínio de uma função

Algumas funções reais não têm como domínio o conjunto $\mathbb{R}$. Pela natureza de suas leis, apresentam restrição de valores, tendo como domínio um subconjunto de $\mathbb{R}$ (distinto de $\mathbb{R}$).

Para identificar o domínio de algumas dessas funções, podemos aplicar o estudo das inequações.

Atividades resolvidas

R13. Identificar o domínio da função dada por $y = \dfrac{1}{x+1}$.

▶ **Resolução**

Como o denominador de uma fração não pode ser nulo, devemos ter:

$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$.

R14. Determinar o domínio da função h dada por $h(x) = \sqrt{\dfrac{2x-2}{x-7}}$.

▶ **Resolução**

Como o denominador de expressões fracionárias não pode ser nulo e o radicando não pode ser negativo, devemos ter:

$$\frac{\overbrace{2x-2}^{f(x)}}{\underbrace{x-7}_{g(x)}} \geqslant 0 \text{ e } x - 7 \neq 0$$

Inicialmente, vamos resolver a inequação-quociente.

Para $f(x) = 0$, temos:

$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

Como a função f é crescente, concluímos que $f(x) > 0$ para $x > 1$ e $f(x) < 0$ para $x < 1$.

Para $g(x) = 0$, temos:

$x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

Como a função g é crescente, concluímos que $g(x) > 0$ para $x > 7$ e $g(x) < 0$ para $x < 7$.

	$x<1$	$1<x<7$	$x>7$
f	−	+	+
g	−	−	+
$\frac{f}{g}$	+	−	+

Para obter o domínio da função h, temos de excluir o valor de x que anula o denominador, ou seja, excluímos o número 7.

Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x > 7\}$.

42. Espera-se que os estudantes percebam que $x - 7$ tem de ser diferente de zero, mas que $2x - 2$ pode ser zero.
Dessa maneira, $\frac{2x-2}{x-7}$ pode ser zero. Então, devemos considerar $\frac{2x-2}{x-7} \geqslant 0$ e $x - 7 \neq 0$.

Observação

Caso o índice da raiz seja ímpar, não há restrições quanto ao sinal do radicando. Por exemplo, o domínio da função f dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

42. ARGUMENTAÇÃO Por que, na **atividade resolvida R14,** não é possível dizer que o domínio pode ser obtido diretamente pela resolução da inequação $\dfrac{2x-2}{x-7} > 0$? Justifique sua resposta.

43. Determine o domínio das funções dadas pelas leis a seguir.

a. $j(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5}$ **43 a.** $D(j) = \mathbb{R}$

b. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

c. $h(x) = \dfrac{-2x+3}{\sqrt{1-x}}$

43 c. $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

d. $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

43 d. $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$

e. $i(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$

43 e. $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

43 b. $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{2}\right\}$

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 4

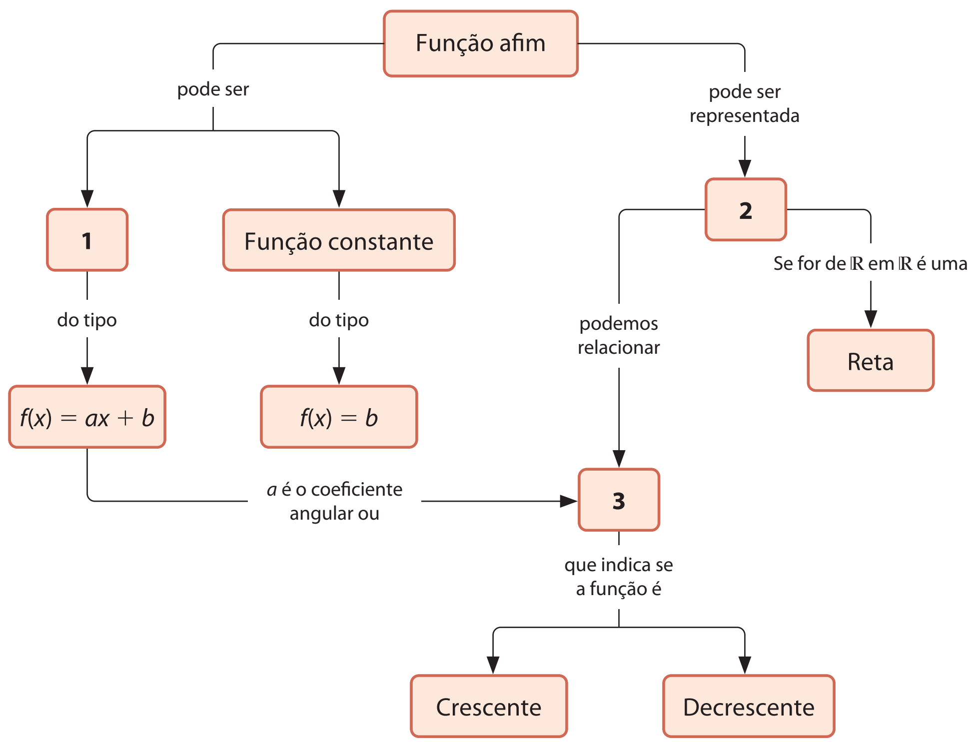
ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

Registre em seu caderno

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Taxa de variação **B.** Polinomial do 1º grau **C.** Gráfico

Conexões entre conceitos. A – 3; B – 1; C – 2.

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

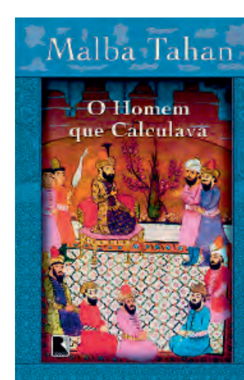
Livro

O homem que calculava

Malba Tahan

Rio de Janeiro: Record, 2001.

Nesse livro, Malba Tahan, pseudônimo do professor de Matemática brasileiro Júlio César de Mello e Souza, narra de forma envolvente e lúdica a história do calculista Beremiz Samir, o homem que calculava. Beremiz maneja os números com a facilidade de um ilusionista, e problemas aparentemente insolúveis demonstram uma transparente simplicidade quando expostos a ele, encantando reis, poetas, xeques e sábios.



REPRODUÇÃO/EDITORA RECORD

Vídeo

Direitos do consumidor

Por meio de uma história fictícia, esse vídeo, da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), mostra como aplicar o conceito de função afim na resolução de um problema simples.

Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1086. Acesso em: 12 set. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

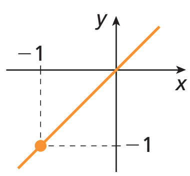
Q1. A sentença ______ é a lei de uma função afim. **Q1.** Alternativa **b.**

a. $f(x) = 1 - x^2$
b. $f(x) = -5 + x$
c. $f(x) = \sqrt{x} + 3$
d. $f(x) = x^3$

Q2. O valor a ser pago por uma mercadoria de valor m, após um desconto de 15%, pode ser dado por: **Q2.** Alternativa **b.**

a. $f(m) = m - 0{,}15$
b. $f(m) = 0{,}85m$
c. $f(m) = -0{,}15m$
d. $f(m) = 1{,}15m$

Q3. O gráfico a seguir não representa uma: **Q3.** Alternativa **a.**



a. função constante.
b. função identidade.
c. função polinomial de 1º grau.
d. função linear.

Q4. Considere as funções afins $f(x) = x - 1$ e $g(x) = -1$. As retas correspondentes a essas funções: **Q4.** Alternativa **c.**

a. são paralelas.
b. passam pela origem.
c. são concorrentes.
d. são paralelas ao eixo x.

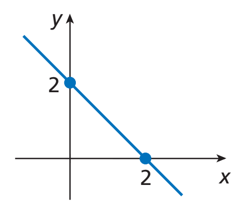
Q5. A transportadora Vaptvupt cobra R$ 10,00 mais R$ 1,00 por quilômetro rodado para fazer uma entrega. Já a transportadora Ligeirinho cobra R$ 0,75 por quilômetro rodado e uma taxa fixa de R$ 15,00. Se x é o número de quilômetros rodados, então podemos dizer que a Vaptvupt cobra menos que a Ligeirinho no intervalo: **Q5.** Alternativa **d.**

a. $15 \leqslant x$
b. $x \leqslant 15$
c. $x > 20$
d. $x < 20$

Q6. O zero da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$ e as coordenadas do ponto em que o gráfico da função intercepta o eixo y são, respectivamente: **Q6.** Alternativa **a.**

a. $-\frac{b}{a}$ e $(0, b)$
b. b e $(a, 0)$
c. $-\frac{b}{a}$ e $(a, 0)$
d. a e $(0, b)$

Q7. Os valores de x para os quais a função afim, representada pelo gráfico a seguir, é positiva são: **Q7.** Alternativa **b.**



a. $x > 2$
b. $x < 2$
c. $x > -2$
d. $x < -2$

Q8. A solução da inequação $\frac{x-1}{x+2} \leqslant 2$ é: **Q8.** Alternativa **c.**

a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$
b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5 \text{ ou } x > -2\}$
d. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5 \text{ ou } x \neq -2\}$

Q9. $S = \varnothing$ é solução da inequação: **Q9.** Alternativa **d.**

a. $(x + 1) \cdot (x - 1) > 0$
b. $\frac{(x + 1)}{(x - 1)} < 0$
c. $x + 2 > x + 1 > x$
d. $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

Q10. O domínio da função f, dada por $f(x) = \frac{1}{x+2}$, é ______, e da função g, de lei $g(x) = \sqrt{x - 3}$, é ______. **Q10.** Alternativa **a.**

a. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$; $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$
b. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$; $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$
c. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$; $D(g) = \varnothing$
d. $D(f) = \varnothing$; $D(g) = \{3\}$

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Identificar uma função afim.	X	X	X							
Resolver situações-problema que envolvam funções afins.		X			X					
Analisar o gráfico de uma função afim.			X	X		X	X			
Resolver inequações que envolvam funções afins.					X			X	X	X

Capítulo 5

FUNÇÃO QUADRÁTICA

Função quadrática

O voleibol, esporte olímpico presente em todos os continentes, foi criado por William George Morgan em 1895 e chegou ao Brasil cerca de 20 anos depois, tendo sido jogado pela 1ª vez em Pernambuco (1915) ou em São Paulo (1916).

O Brasil tem, no feminino e no masculino, um histórico de vitórias significativas no cenário internacional.

Credita-se ao jogador Bernard Rajzman da seleção brasileira, nos anos 1980, a criação do saque "Jornada nas Estrelas" – alusão à série de televisão *Star Trek* –, que consistia em sacar a bola para o alto, com a parte externa da mão, elevando a bola a mais de 25 metros.

Após a carreira de glória na quadra, Bernard continuou a participar do esporte ocupando cargos públicos e tornou-se também membro efetivo do Comitê Olímpico Brasileiro (COB) e do Comitê Olímpico Internacional (COI) desde 2013. Em 2005, foi o primeiro brasileiro indicado para integrar o *Hall* da Fama do vôlei mundial nos Estados Unidos. Hoje, idoso e valorizado, tem o respeito e o reconhecimento internacional.

ODS 3

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

HIPÓLITO PEREIRA/AGÊNCIA O GLOBO

Na final contra a União Soviética (1982), Bernard fez oito pontos com o saque Jornada nas Estrelas. Rio de Janeiro (RJ).

A trajetória parabólica da bola pode ser analisada como a composição de dois movimentos: um vertical e outro horizontal. Considerando apenas a componente vertical do movimento descendente da bola em queda livre, a medida da distância S percorrida, em metro, depois de um intervalo de tempo t (medido em segundo a partir do zero no início da descida), pode ser modelada pela função $S(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

A constante g corresponde à aceleração da gravidade, que, nas proximidades da superfície da Terra, mede aproximadamente 9,8 m/s^2. Assim, $S(t) = 4{,}9t^2$.

Essa sentença é um exemplo de lei de formação de uma função quadrática.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau** quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação

Em uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, os números reais a, b e c são os **coeficientes** da função quadrática.

Analise os exemplos de função quadrática.

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = 2x^2 + 3x - 15$, em que $a = 2$, $b = 3$ e $c = -15$.

b. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de lei $g(x) = -\frac{x^2}{4} + 5$, em que $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$ e $c = 5$.

c. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $h(x) = -x + \sqrt{2}\,x^2$, em que $a = \sqrt{2}$, $b = -1$ e $c = 0$.

d. $i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de lei $i(x) = -\frac{3}{2}x^2$, em que $a = -\frac{3}{2}$, $b = 0$ e $c = 0$.

Observe que as funções dadas pelas leis a seguir não são quadráticas, pois nenhuma dessas funções pode ser expressa por um polinômio do 2º grau.

a. $f(x) = 10x$

b. $h(x) = \sqrt{x}$

c. $g(x) = \frac{1}{x^2}$

d. $i(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$

Há várias situações para as quais é possível criar um modelo matemático, e muitas delas podem ser representadas por funções quadráticas.

No saque Jornada nas Estrelas, por exemplo, qual seria a medida, em metro, do comprimento da distância vertical percorrida pela bola, na descida em queda livre, se a medida de tempo fosse igual a 1 s? E se a medida de tempo fosse igual a 2 s?

Considere a função $S(t) = 4{,}9t^2$.

- Para $t = 1$, temos: $S(1) = 4{,}9 \cdot 1^2 = 4{,}9$

  Após 1 s de queda livre, a bola estaria a 4,9 m abaixo do ponto mais alto de sua trajetória.

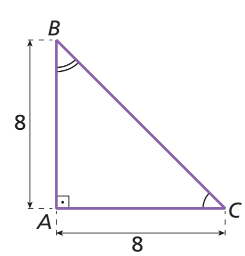
- Para $t = 2$, temos: $S(2) = 4{,}9 \cdot 2^2 = 19{,}6$

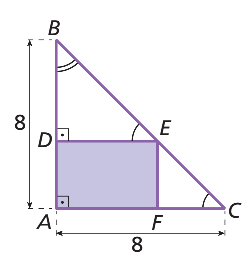
  Após 2 s de queda livre, a bola estaria a 19,6 m abaixo do ponto mais alto de sua trajetória.

Então, para a medida de tempo de queda livre de 2 s, a bola estaria mais próxima do chão da quadra se comparada à medida de distância com o tempo de 1 s e, portanto, mais próxima de marcar um ponto no voleibol.

Agora, observe uma situação de Geometria.

Um triângulo retângulo isósceles ABC tem catetos que medem 8 unidades de comprimento. Escolhe-se um ponto E qualquer sobre o segmento $\overline{BC}$ e constrói-se um retângulo $ADEF$, como mostram as figuras a seguir.

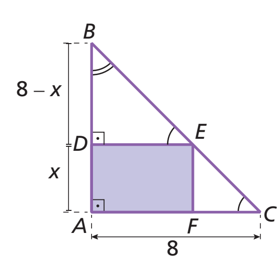




É possível posicionar o ponto E em $\overline{BC}$ para que a área do retângulo $ADEF$ meça 16 unidades de área (u.a.)?

Uma das formas de resolver esse problema é descrever a situação algebricamente. Vamos expressar a medida da área do retângulo $ADEF$ em função das medidas de comprimento de seus lados.

Considerando x a medida de comprimento do segmento $\overline{AD}$, o segmento $\overline{DB}$ mede $8 - x$.



Os triângulos DBE e ABC são semelhantes, pois têm os ângulos correspondentes congruentes. Dessa forma, temos dois triângulos retângulos isósceles e, portanto, o comprimento do segmento $\overline{DE}$ também mede $8 - x$.

Assim, a medida da área A do retângulo $ADEF$ em função de x pode ser expressa por:

$$A(x) = x \cdot (8 - x) = 8x - x^2$$

Para verificar se o retângulo $ADEF$ pode ter área medindo 16 u.a., basta substituir $A(x)$ por 16 na lei e determinar o valor de x correspondente.

$16 = 8x - x^2 \Rightarrow -x^2 + 8x - 16 = 0$

A situação está, agora, representada por uma equação e podemos resolvê-la por meio da fatoração do trinômio quadrado perfeito do 1º termo.

$-x^2 + 8x - 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 4)^2 = 0 \Rightarrow (x - 4) \cdot (x - 4) = 0$

Então:

$(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 4$

Assim, concluímos que o ponto E deve ser posicionado em $\overline{BC}$ a 4 unidades de $\overline{AB}$ e a 4 unidades de $\overline{AC}$, obtendo um retângulo $ADEF$ com medida de área igual a 16 u.a.

Vale lembrar que nem sempre é fácil resolver uma equação por meio da fatoração; então, outra maneira de resolver a equação é utilizando a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, também conhecida popularmente como fórmula de Bhaskara, que é um modo eficiente para resolver qualquer equação do 2º grau.

Para deduzir essa fórmula, considere a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, de coeficientes reais a, b e c, sendo $a \neq 0$.

1º. Inicialmente, adicionamos $-c$ a ambos os membros da equação:

$$ax^2 + bx + c - c = 0 - c$$

$$ax^2 + bx = -c$$

2º. Multiplicamos os dois membros por $4a$:

$$(ax^2 + bx) \cdot 4a = -c \cdot 4a$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

3º. Adicionamos b^2 a ambos os membros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

4º. A seguir, fatoramos o primeiro membro da equação:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

5º. Então, chegamos à conclusão de que:

$2ax + b = +\sqrt{b^2 - 4ac}$

ou

$2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

6º. Isolando x na equação anterior, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada **discriminante** da equação e é representada pela letra grega Δ (delta).

Assim, obtemos a seguinte fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac$$

Quanto às raízes, temos:

- Se $\Delta > 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ terá duas raízes reais e distintas: $x_1 \neq x_2$.
- Se $\Delta = 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ terá duas raízes reais e iguais: $x_1 = x_2$.
- Se $\Delta < 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não terá raiz real.

Observações

- A forma fatorada de $a^2 + 2ab + b^2$ é $(a + b)^2$.
- A forma fatorada de $a^2 - 2ab + b^2$ é $(a - b)^2$.

OBJETO DIGITAL Vídeo: Equações do 2º grau

O vídeo tem por objetivo retomar com os estudantes a resolução de equações do 2º grau, necessária para resolução de atividades e de situações-problemas que envolvem o conteúdo desenvolvido neste capítulo.

Considere os exemplos.

a. $2x^2 - 11x + 5 = 0$

$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 81$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{11+9}{4} = \dfrac{20}{4} = 5 \\ x_2 = \dfrac{11-9}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

A equação apresenta duas raízes reais e distintas.

b. $x^2 - 20x + 100 = 0$

$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100 = 0$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \quad x_1 = x_2 = \frac{20}{2} = 10$$

A equação apresenta duas raízes reais e iguais.

c. $2x^2 + 4x + 4 = 0$

$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -16$

A equação não apresenta raízes reais.

Atividades resolvidas

R1. Dada a função quadrática de lei $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + x^2$, calcular:

a. $g\left(\frac{3}{4}\right)$

b. x, para $g(x) = \frac{1}{2}$

▶ **Resolução**

a. $g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = \frac{21}{16}$

b. $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + x^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{3} + x^2 = 0$

$x\left(\frac{1}{3} + x\right) = 0$

$x = 0$ ou $\frac{1}{3} + x = 0$

$x = 0$ ou $x = -\frac{1}{3}$

R2. Seja f uma função quadrática em que $f(0) = 2$, $f(2) = 12$ e $f(-1) = 6$. Determinar a lei de formação dessa função.

▶ **Resolução**

Sabe-se que a lei de uma função quadrática é $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Dessa forma:

- Se $f(0) = 2$, temos:

$2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 2 \qquad \text{(I)}$

- Se $f(2) = 12$, temos:

$12 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 12 \qquad \text{(II)}$

- Se $f(-1) = 6$, temos:

$6 = a(-1)^2 + b(-1) + c \Rightarrow a - b + c = 6 \qquad \text{(III)}$

Assim, obtemos um sistema de três equações com três incógnitas:

$$\begin{cases} c = 2 & \text{(I)} \\ 4a + 2b + c = 12 & \text{(II)} \\ a - b + c = 6 & \text{(III)} \end{cases}$$

Pela equação (I), temos $c = 2$.

Para determinar os valores de a e b, basta resolver o sistema formado pelas equações (II) e (III), substituindo c por 2:

$$\begin{cases} 4a + 2b + 2 = 12 \\ a - b + 2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema pelo método da adição:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

Multiplicamos ambos os membros por 2.

$$\begin{cases} 4a + \cancel{2b} = 10 \\ 2a - \cancel{2b} = 8 \end{cases}$$

$6a + 0 = 18 \Rightarrow a = 3$

Substituindo a por 3 em $a - b = 4$, obtemos:

$3 - b = 4 \Rightarrow -b = 4 - 3 \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1$

Para escrever a lei de formação da função quadrática, substituímos os valores encontrados ($a = 3$, $b = -1$ e $c = 2$) na lei $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Assim, a lei de formação dessa função é $f(x) = 3x^2 - x + 2$.

Observação

O sistema de equações $\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases}$ poderia ser resolvido também pelo método da substituição.

R3. Para quais valores reais de p a função dada por $f(x) = [(p - 3)(p + 5)]x^2 - 4x + 8$ é quadrática?

▸ Resolução

Para que a função seja quadrática, de acordo com a definição, é necessário que o coeficiente do termo x^2 seja não nulo.

Dessa forma, é preciso que $(p - 3)(p + 5) \neq 0$.

Observe que $(p - 3)(p + 5)$ será diferente de zero quando ocorrerem simultaneamente as seguintes condições:

- $p - 3 \neq 0 \Rightarrow p \neq 3$
- $p + 5 \neq 0 \Rightarrow p \neq -5$

Assim, a função dada por $f(x) = [(p - 3)(p + 5)] \cdot x^2 - 4x + 8$ é quadrática para $p \neq 3$ e $p \neq -5$, com $p \in \mathbb{R}$.

7. Espera-se que os estudantes percebam que, se o coeficiente do termo x^2 for igual a zero, ou seja, se $f(x) = 0x^2 + bx + c$, então f será uma função afim, cuja lei pode ser representada por $f(x) = bx + c$.

8 b. A lei da função quadrática ficaria a mesma: $f(x) = 3x^2 - x + 2$, pois $f(1) = 4$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Das leis de funções em $\mathbb{R}$ a seguir, identifique quais são leis de funções quadráticas e escreva o valor dos coeficientes a, b e c.

a. $g(x) = x^2 - x$ **1 a.** $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$

b. $h(x) = x^2 + \sqrt{7}$ **1 b.** $a = 1$, $b = 0$ e $c = \sqrt{7}$

c. $i(x) = \sqrt[3]{x} + 2$ **1 c.** Não é lei de uma função quadrática.

d. $m(x) = (x - 20)^3$ **1 d.** Não é lei de uma função quadrática.

2. Dada a função f, tal que $f(x) = -x^2 + 5x + 6$, calcule, quando possível:

a. $f(-1)$ **2 a.** 0

b. $f(\sqrt{2})$ **2 b.** $4 + 5\sqrt{2}$

c. $f\left(-\frac{4}{5}\right)$ **2 c.** $\frac{34}{25}$

d. x, para $f(x) = 0$ **2 d.** $x = -1$ ou $x = 6$

e. x, para $f(x) = \frac{49}{4}$ **2 e.** $\frac{5}{2}$

f. x, para $f(x) = 20$ **2 f.** Não existe x real que satisfaça $f(x) = 20$.

3 a. Resposta no *Suplemento para o professor*.

3. Com base na atividade anterior, responda às questões.

a. Analisando esses valores, é possível determinar em quais intervalos a função é crescente ou decrescente?

b. Em sua opinião, haveria uma forma de representar essa função que facilitasse sua análise? **3 b.** Resposta pessoal.

4. Sabendo que f é uma função quadrática tal que $f(0) = -4$, $f(3) = 8$ e $f(-2) = 4$, calcule o valor de $f(-3)$. **4.** $\frac{64}{5}$

5. Resolva a equação $x^2 - 8x + 16 = 0$ usando a fórmula resolutiva. **5.** $x = 4$

6. $m = 0$

6. Se a equação $x^2 - 2x + (m + 1) = 0$ apresenta duas raízes reais iguais, qual é o valor de m?

7. Por que na definição de função quadrática o coeficiente do termo x^2 tem de ser diferente de zero?

8. ARGUMENTAÇÃO EM DUPLA Converse com um colega sobre as suposições a seguir, justificando suas respostas.

O que aconteceria se, na **atividade resolvida R2** da página anterior:

a. faltasse uma das informações $f(0) = 2$, $f(2) = 12$ e $f(-1) = 6$?

b. houvesse mais a informação: $f(1) = 4$?

c. houvesse mais a informação: $f(1) = 5$?

9. Que valores reais de p tornam as funções f e g quadráticas?

a. $f(x) = (2p - 3)x^2 + 7xp + 2$ **9 a.** $p \neq \frac{3}{2}$

b. $g(x) = [(3p + 5)(p + 7)]x^2 + 3x + 11$ **9 b.** $p \neq -\frac{5}{3}$ e $p \neq -7$

10. Um grupo de estudo formou uma lista de discussão pela internet. O combinado foi que, depois de cada aula, os integrantes trocariam *e-mails* com as conclusões individuais sobre a aula e os mandariam para todos os integrantes da lista. **10 c.** Sendo n o número de pessoas, o número de *e-mails* é $n(n - 1)$.

Todos cumpriram o combinado.

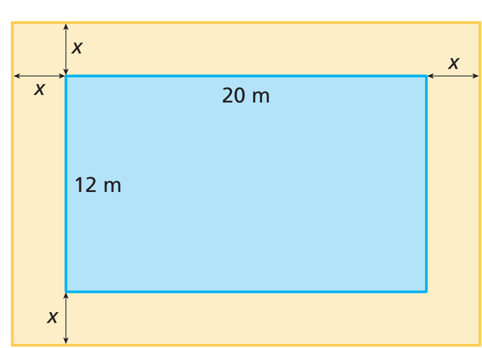
a. Se o grupo fosse formado por 2 pessoas, quantos *e-mails* seriam enviados após uma aula? E se o grupo fosse formado por 3 pessoas, quantos *e-mails* seriam enviados? E se fossem 4 pessoas? E se fossem 10? **10 a.** 2; 6; 12; 90

b. Construa um quadro com os resultados obtidos no item **a** e mostre como você calculou o número de *e-mails* para cada número de pessoas.

c. Encontre a expressão que determina o número de *e-mails* em função do número de pessoas do grupo.

d. Calcule o número de integrantes do grupo sabendo que foram enviados 132 *e-mails* após uma aula. **10 d.** 12 integrantes

11. Uma piscina retangular foi planejada conforme a figura a seguir. **10 b.** Resposta no *Suplemento para o professor*.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A medida da área A do piso em volta dessa piscina depende da medida x escolhida. Faça o que se pede.

a. Qual é a lei de formação da função que expressa a medida da área desse piso em função de x? **11 a.** $A(x) = 4x^2 + 64x$

b. Calcule a medida da área A, em metro quadrado, para x igual a 3 m. **11 b.** 228 m^2

8 a. A lei da função quadrática ficaria indeterminada, pois teríamos um sistema, em qualquer das três situações, de três incógnitas e apenas duas equações.

8 c. Não existiria a função, pois para $x = 1$ haveria mais de uma imagem.

Carrossel de imagens: Parábola em diferentes lugares

O carrossel de imagens apresenta aos estudantes como o formato parabólico é utilizado em diversos objetos que precisam concentrar ou refletir a energia de maneira eficiente devido às suas propriedades, ampliando o conteúdo desenvolvido no livro do estudante.

Gráfico da função quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada **parábola**.

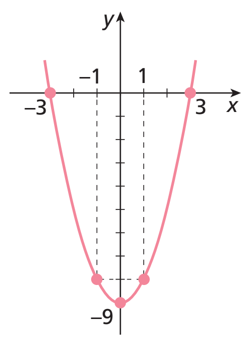
Quando representam uma função quadrática, as parábolas podem ter a abertura (**concavidade**) voltada para cima ou para baixo.

Analise os exemplos.

a. $f(x) = x^2 - 9$ $(a > 0)$

$f(x) = x^2 - 9$

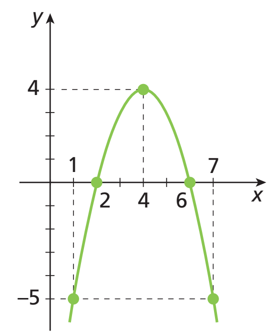
x	$y = f(x)$
−3	0
−1	−8
0	−9
1	−8
3	0



b. $g(x) = -x^2 + 8x - 12$ $(a < 0)$

$g(x) = -x^2 + 8x - 12$

x	$y = g(x)$
1	−5
2	0
4	4
6	0
7	−5



Na prática, observamos o sinal do coeficiente a da função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ para determinar o sentido da concavidade da parábola. Assim:

- Se $a > 0$, como no exemplo **a**, a parábola tem a concavidade voltada para **cima**.
- Se $a < 0$, como no exemplo **b**, a parábola tem a concavidade voltada para **baixo**.

Observação

Mais adiante, estudaremos cada um desses elementos, pois, com base neles, é possível construir o esboço do gráfico e analisar a função quadrática.

Elementos da parábola

Em situações práticas, é útil identificar os seguintes elementos de uma parábola:

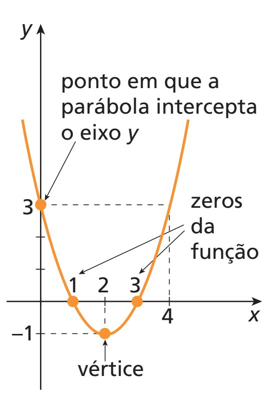
- o ponto em que ela intercepta o eixo y;
- os zeros da função que ela representa;
- o vértice.

Observe os exemplos.

a. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$f(x) = x^2 - 4x + 3$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	0	−1	0	3

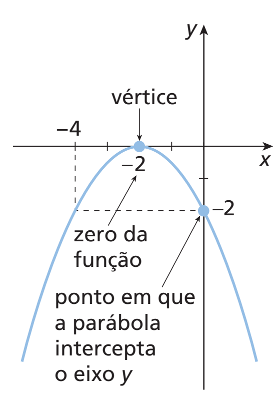


- (0, 3) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.
- 1 e 3 são os zeros da função.
- O ponto (2, −1) é o vértice.

b. $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$

$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$

x	0	−2	−4
$h(x)$	−2	0	−2

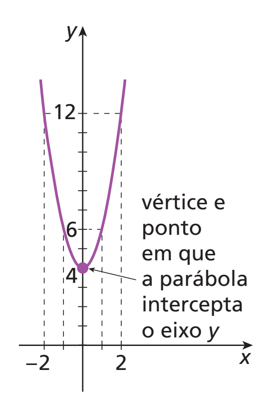


- (0, −2) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.
- −2 é o zero da função.
- O ponto (−2, 0) é o vértice.

c. $j(x) = 2x^2 + 4$

$j(x) = 2x^2 + 4$

x	0	1	−1	2	−2
$j(x)$	4	6	6	12	12



- (0, 4) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.
- Não há zeros da função.
- O ponto (0, 4) é o vértice.

Atividade resolvida

R4. Seja f a função quadrática definida por $f(x) = (m - 3)x^2 + 2x - m$.

a. Analisar, em função de m, a concavidade da parábola que representa f.

b. Verificar se existe algum valor de m que faça o gráfico da função passar pelo ponto $(0, -3)$.

▸ Resolução

a. A concavidade da parábola depende do sinal do coeficiente a da função.

- Para a parábola ter a concavidade voltada para cima, o coeficiente de x^2 deve ser positivo: $m - 3 > 0 \Rightarrow m > 3$
- Para a parábola ter a concavidade voltada para baixo, o coeficiente de x^2 deve ser negativo: $m - 3 < 0 \Rightarrow m < 3$

b. Substituindo as coordenadas do ponto $(0, -3)$ na lei da função f dada, temos:

$-3 = (m - 3) \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - m \Rightarrow m = 3$

Mas, se $m = 3$, a função f não é quadrática, pois o coeficiente de x^2 seria zero: $m - 3 = 3 - 3 = 0$

Portanto, não existe valor real para m tal que o gráfico da função f passe pelo ponto $(0, -3)$.

12. Respostas no *Suplemento para o professor*.

14 b. • se $k < -1$ ou $k > 5$, a concavidade é voltada para cima;
• se $-1 < k < 5$, a concavidade é voltada para baixo.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

12. Atribua valores para x e calcule a imagem correspondente. Em seguida, construa a parábola de cada função.

a. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b. $g(x) = -x^2 + 6x - 5$

c. $h(x) = x^2 + 4x + 4$

d. $i(x) = -x^2 + 4x - 4$

e. $j(x) = x^2 + 2x + 2$

f. $k(x) = -x^2 - 2x - 2$

Agora, verifique em cada parábola se a concavidade está voltada para cima ou para baixo e determine o número de zeros de cada função.

13. Analise a concavidade de cada parábola, conhecendo algumas características da função.

a. Os zeros da função são -20 e -10, e o vértice da parábola é $(-15, -10)$. **13 a.** Concavidade voltada para cima.

b. A função não tem zeros reais, e a intersecção do gráfico com o eixo y ocorre em $(0, -4)$. **13 b.** Concavidade voltada para baixo.

14. Analise, em função de k, a concavidade das parábolas que representam as funções quadráticas cujas leis são dadas por:

a. $f(x) = kx^2 - 2x + 10$

b. $f(x) = \left(\dfrac{k-5}{k+1}\right)x^2 - 20$

14 a. • se $k > 0$, a concavidade é voltada para cima;
• se $k < 0$, a concavidade é voltada para baixo.

15. Considere uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e alguns valores assumidos por essa função, expressos no quadro a seguir.

Alguns valores da função *g*

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$g(x)$	−16	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9	−16

a. Analise cada valor de x e o valor correspondente de $g(x)$. Você percebe alguma relação entre esses valores? Você saberia expressar essa relação por meio de uma lei?

b. SOFTWARE Utilizando um *software* de construção de gráficos que seu professor indicar, represente cada par do quadro por um ponto no plano cartesiano. Como esses pontos se dispõem em relação ao eixo das ordenadas? Você percebe algum padrão na disposição desses pontos? **15 b.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

15 a. Respostas pessoais.
15 c. Espera-se que os estudantes percebam que sim. O vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para baixo.

c. ARGUMENTAÇÃO Você acredita que existe uma parábola que passa por esses pontos? Em caso afirmativo, qual seria o vértice e como seria a concavidade dessa parábola? Justifique suas respostas.

d. Considerando os valores do quadro, a função g poderia ser do 2º grau expressa por uma lei do tipo $g(x) = ax^2$. Encontre a lei da função g nesse caso. **15 d.** $g(x) = -x^2$

e. SOFTWARE No *software* de construção de gráficos, no mesmo plano cartesiano que você representou os pontos do item **b**, trace agora o gráfico da função g cuja lei você determinou no item **d**. Comprove se o gráfico passa pelos pontos, ou seja, se a lei determinada realmente pode ser a lei da função g, cujos valores estão expressos no quadro. **15 e.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

16. Resolva novamente os itens da **atividade 15** considerando cada um dos quadros a seguir.

I. Alguns valores da função *g*

x	$g(x)$
−3	18
$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$
−2	8
−1	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	2
2	8
$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$
3	18

II. Alguns valores da função *g*

x	$g(x)$
−4	8
−3	$\frac{9}{2}$
−2	2
−1	$\frac{1}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	2
3	8
3	$\frac{9}{2}$
4	8

16. Respostas no *Suplemento para o professor*.

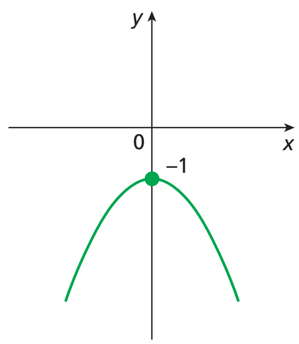
Ponto em que a parábola intercepta o eixo *y*

Como vimos, o ponto em que a parábola intercepta o eixo *y* é um dos elementos importantes para seu estudo.

Considere a função quadrática cuja lei é $f(x) = ax^2 + bx + c$. As coordenadas do ponto em que a parábola correspondente intercepta o eixo *y* são $(0, c)$.

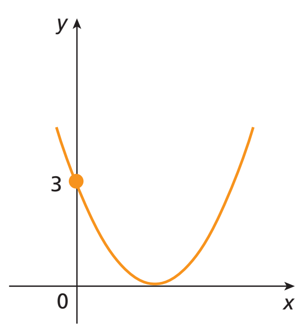
Considere os exemplos.

a. $f(x) = -x^2 - 1$



- A parábola intercepta o eixo *y* no ponto $(0, -1)$.
- A ordenada -1 desse ponto é o coeficiente *c* da função *f*.

b. $g(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$



- A parábola intercepta o eixo *y* no ponto $(0, 3)$.
- A ordenada 3 desse ponto é o coeficiente *c* da função *g*.

Zeros da função

Os zeros da função também são valores importantes para a análise da parábola.

Os zeros de uma função *f* são os números reais *x* para os quais $f(x) = 0$, ou seja, os zeros da função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as raízes reais da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Para determinar essas raízes, podemos utilizar a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

No gráfico, os zeros de uma função quadrática são as abscissas dos pontos em que a parábola intercepta o eixo *x*.

Analise os exemplos.

a. Vamos verificar se a função *f*, dada pela lei $f(x) = x^2 - 4x + 3$, tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo *x*.

Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

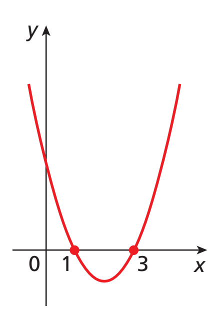
$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1$

Determinamos que os zeros da função são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo *x* em dois pontos: $(1, 0)$ e $(3, 0)$.



Observação

A parábola pode interceptar o eixo *x* em:
- dois pontos (se $\Delta > 0$);
- um único ponto (se $\Delta = 0$);
- nenhum ponto (se $\Delta < 0$).

b. Vamos verificar se a função f, cuja lei é $f(x) = x^2 - 4x + 4$, tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo x.

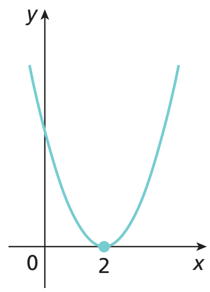
Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

$x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{4 \pm 0}{2} = 2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$ (zero real duplo da função)

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo x em um único ponto: (2, 0).



Observação

Quando a parábola intercepta o eixo x em um único ponto, dizemos que ela **tangencia** o eixo x.

c. Vamos verificar se a função f, com $f(x) = -x^2 + 4x - 5$, tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo x.

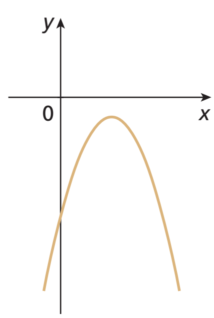
Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

$-x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16 - 20 = -4$

Como $\Delta < 0$, a equação $-x^2 + 4x - 5 = 0$ não tem raízes reais; portanto, a função f não tem zeros reais.

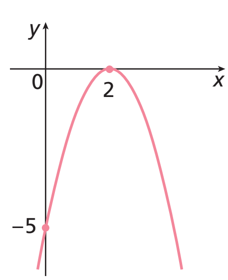
Logo, o gráfico da função não intercepta o eixo x.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades resolvidas

R5. Determinar a lei da função quadrática correspondente ao gráfico a seguir.



▶ Resolução

Observe que a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, -5)$. Então, a lei da função quadrática associada a ela é do tipo $f(x) = ax^2 + bx - 5$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Note também que a parábola intercepta o eixo x em um único ponto, de coordenadas (2, 0). Isso significa que 2 é o zero real duplo da função.

Substituindo as coordenadas do ponto (2, 0) na lei da função, obtemos uma equação:

$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 5$

$0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 5 \Rightarrow 4a + 2b - 5 = 0 \quad \text{(I)}$

Como a parábola intercepta o eixo x em apenas um ponto, temos $\Delta = 0$. Assim:

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot (-5) = 0$

$b^2 = -20a \Rightarrow a = -\dfrac{b^2}{20} \quad \text{(II)}$

Substituindo a equação (II) na equação (I), temos:

$4 \cdot \left(-\dfrac{b^2}{20}\right) + 2b - 5 = 0 \Rightarrow -\dfrac{b^2}{5} + 2b - 5 = 0$

Resolvendo essa equação:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right) \cdot (-5) = 0$

$b = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right)} = 5$

Pela equação (II), temos: $a = -\dfrac{5^2}{20} = -\dfrac{25}{20} = -\dfrac{5}{4}$

Portanto, a lei da função é $f(x) = -\dfrac{5}{4}x^2 + 5x - 5$.

R6. Considerando a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 - 6x - k$, determinar para quais valores reais de k a função f:

a. tem dois zeros reais distintos.

b. tem um zero real duplo.

c. não tem zeros reais.

▶ Resolução

Vamos calcular o discriminante da equação $2x^2 - 6x - k = 0$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) = 36 + 8k$

a. Para que a função f tenha dois zeros reais distintos, o discriminante deve ser positivo ($\Delta > 0$).

Logo: $36 + 8k > 0 \Rightarrow k > -\dfrac{9}{2}$

b. Para que a função f tenha um zero real duplo, o discriminante deve ser nulo ($\Delta = 0$).

Logo: $36 + 8k = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{9}{2}$

c. Para que a função f não tenha zeros reais, o discriminante deve ser negativo ($\Delta < 0$).

Logo: $36 + 8k < 0 \Rightarrow k < -\dfrac{9}{2}$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

17. Determine o ponto em que o gráfico de cada função intercepta o eixo y.

a. $f(x) = -2x^2 + x - 1$ **17 a.** (0, –1)

b. $f(x) = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}$ **17 b.** $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$

c. $f(x) = x^2 + x$ **17 c.** (0, 0)

18. ARGUMENTAÇÃO Com base na atividade anterior, responda: conhecer esse ponto facilita a construção do gráfico? Por quê? **18.** Respostas pessoais.

19. Obtenha, quando existir, os zeros reais das funções dadas por:

a. $g(x) = x^2 + 3x + 2$ **19 a.** –2 e –1

b. $g(x) = 2x^2 + x + 1$ **19 b.** Não existem zeros reais.

c. $g(x) = -9x^2 + 6x - 1$ **19 c.** $\dfrac{1}{3}$

20. ARGUMENTAÇÃO Com base na atividade anterior, responda: conhecer os zeros da função facilita a construção do gráfico? Por quê? **20.** Respostas pessoais.

21. Calcule os valores reais de k para que as funções quadráticas não tenham zeros reais. **21 a.** $k > \dfrac{1}{100}$ **21 b.** $k > \dfrac{25}{8}$

a. $h(x) = kx^2 - x + 25$

b. $h(x) = 2x^2 - 5x + k$

22. ARGUMENTAÇÃO Existe alguma função quadrática cujo gráfico não intercepte o eixo y? Explique sua resposta.

23. Dada a função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + 3$, encontre os valores de a e b para cada caso.

a. 1 e 3 são os zeros da função. **23 a.** $a = 1$ e $b = -4$

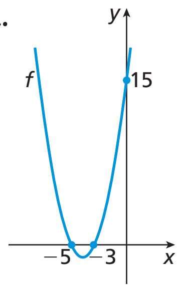
b. –1 e –3 são os zeros da função. **23 b.** $a = 1$ e $b = 4$

22. Não. Como o domínio de uma função quadrática é $\mathbb{R}$, o gráfico correspondente a essa função sempre intercepta o eixo y, pois o elemento 0 (abscissa do ponto em que o gráfico intercepta o eixo y) pertence a $\mathbb{R}$.

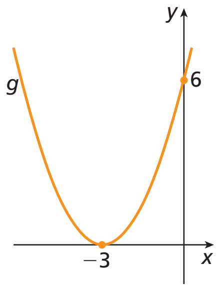
24 a. $f(x) = x^2 + 8x + 15$ 24 b. $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 6$

24. Escreva a lei da função quadrática relativa a cada gráfico.

a.



b.



25. A parábola determinada pela função quadrática de lei $f(x) = 2x^2 - cx + (c - 2)$, com $c \in \mathbb{R}$, tangencia o eixo das abscissas. Calcule $f(f(2))$. 25. 2

26. $m = 3$; $(\sqrt{6}, 0)$ e $(-\sqrt{6}, 0)$

26. Determine os valores de m real sabendo que o gráfico da função quadrática de lei $f(x) = -mx^2 + 2m^2$ tem concavidade voltada para baixo e que o ponto de intersecção desse gráfico com o eixo y é $(0, 18)$.

Em seguida, determine os pontos em que o gráfico da função encontrada intercepta o eixo x.

27. Por que é correto o procedimento de identificar o coeficiente c de uma função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$ como a ordenada do ponto de intersecção do gráfico com o eixo y?

Liste os motivos que, em sua opinião, explicam esse procedimento. 27. Resposta no *Suplemento para o professor*.

Feito isso, siga os passos:

I. Desenhe no plano cartesiano uma parábola qualquer que represente uma função quadrática.

II. Na parábola desenhada, identifique o valor de x do ponto em que ela intercepta o eixo y. 27 II. $x = 0$

III. Substitua na lei da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ o valor de x que você encontrou no passo anterior e determine sua imagem. 27 III. $f(0) = c$

28. Respostas pessoais.

28. **ARGUMENTAÇÃO** Com base na atividade anterior, compare os passos descritos com os motivos que você listou. Há semelhanças? Se sim, quais?

29. Conhecendo alguns dados de uma parábola, você saberia dizer, sem desenhar o gráfico, para quais valores reais de x tem-se $f(x)$ positivo?

a. A função f não tem zeros reais. 29 a. Para qualquer valor real de x.
A parábola intercepta o eixo y: $(0, 5)$

b. Zero real duplo da função f: -5 29 b. Não há valor real de x.
Concavidade da parábola: voltada para baixo.

c. Zeros da função f: -3 e 3 29 c. $-3 < x < 3$
A parábola intercepta o eixo y: $(0, 3)$

d. Pontos em que a parábola intercepta o eixo x: $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$ 29 d. $-2 < x < -1$
A parábola intercepta o eixo y: $(0, -2)$

e. Lei da função: $f(x) = x^2 - 6x + 13$
29 e. Para qualquer valor real de x.

Estudo do sinal da função por meio de seus zeros

Conhecendo os zeros de uma função quadrática f, ou sabendo da sua inexistência, e o esboço do gráfico da função, é possível estudar o sinal dessa função, ou seja, determinar para quais valores de x a função é positiva, negativa ou nula.

O sinal da função f depende do modo como a parábola intercepta o eixo x. Dessa forma, podemos agrupar as parábolas em três casos:

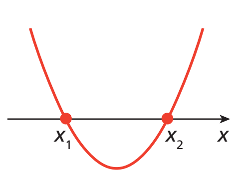
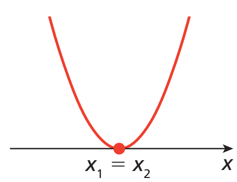
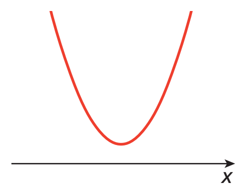
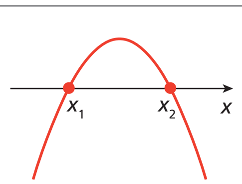
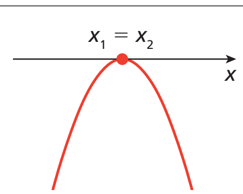
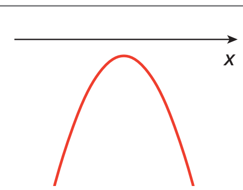
1º caso: quando a parábola intercepta o eixo x em dois pontos;

2º caso: quando a parábola intercepta o eixo x em um único ponto;

3º caso: quando a parábola não intercepta o eixo x.

Organizando esses casos em um quadro, temos:

Diferentes posições de uma parábola em relação ao eixo x

	1º caso ($\Delta > 0$)	2º caso ($\Delta = 0$)	3º caso ($\Delta < 0$)
$a > 0$			
$a < 0$			

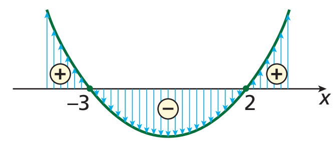
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, analise os exemplos.

a. Vamos estudar o sinal da função quadrática f, com $f(x) = x^2 + x - 6$. Para isso, inicialmente determinamos os zeros de f:

$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 2$

Em seguida, fazemos um esboço do gráfico da função. Como o coeficiente de x^2 é positivo, a concavidade da parábola está voltada para cima.



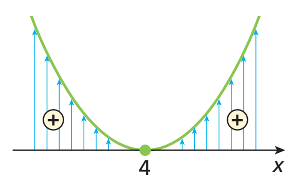
Agora, observando o esboço, determinamos para quais valores de x as imagens são positivas, negativas ou nulas.

Concluímos que: $\begin{cases} f(x) > 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 2 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 2 \\ f(x) < 0 \text{ para } -3 < x < 2 \end{cases}$

b. Vamos estudar o sinal da função i dada por $i(x) = x^2 - 8x + 16$.

A função i tem zero real duplo, pois $\Delta = 0$: $x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$

Como o coeficiente de x^2 é positivo, obtemos o esboço do gráfico a seguir.



Portanto: $\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } x \neq 4 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = 4 \end{cases}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades resolvidas

R7. Considere a função g, dada por $g(x) = 2x^2 + 3x + 4$. Determinar, quando existirem, os valores de x cujas imagens pela função g são negativas.

▶ **Resolução**

Inicialmente, vamos fazer o estudo do sinal da função g. Para isso, devemos encontrar seus zeros.

$2x^2 + 3x + 4 = 0$

$\Delta = (3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 \Rightarrow \Delta = -23$

Como $\Delta < 0$, a equação $2x^2 + 3x + 4 = 0$ não tem raízes reais. Portanto, a função g não tem zeros reais.

Considerando que o coeficiente de x^2 é positivo e que a função não tem nenhum zero real, obtemos o esboço do gráfico, representado a seguir.

Analisando esse esboço, verificamos que para qualquer valor de x a função g é positiva.

Portanto, não existe valor real de x em que a função g seja negativa.

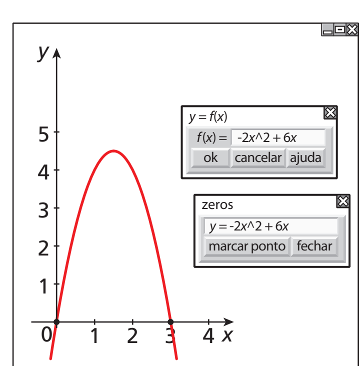
R8. Usando um *software* de construção de gráficos, estudar o sinal da função f dada por $f(x) = -2x^2 + 6x$.

▶ **Resolução**

Vamos construir o gráfico da função utilizando um *software* de construção de gráficos e determinar seus zeros.

Observação

Em alguns *softwares* há variações para escrever as expressões matemáticas. Para escrever $-2x^2 + 6x$, por exemplo, podemos digitar: $-2x$^2+6x ou $-2x$*x+6x



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

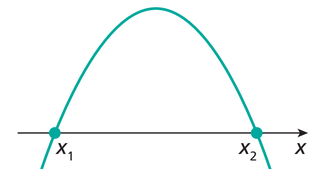
Observando o gráfico construído, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ para } 0 < x < 3 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = 0 \text{ ou } x = 3 \\ f(x) < 0 \text{ para } x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

R9. Considerando a função h, definida por $h(x) = -x^2 + 5x - p - 3$, verificar para quais valores de p a função h apresentará valores positivos.

▸ Resolução

Como o coeficiente de x^2 é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Então, para que a função h tenha valores positivos, a parábola que representa graficamente a função deve cruzar o eixo x conforme indicado no esboço a seguir.



Nesse caso, precisamos impor a condição $\Delta > 0$. Assim:

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-p - 3)$

$\Delta = 25 - 4p - 12$

$\Delta = -4p + 13$

Como $\Delta > 0$, temos: $-4p + 13 > 0 \Rightarrow p < \frac{13}{4}$

Assim, a função h terá valores positivos quando $p < \frac{13}{4}$.

33. Respostas no *Suplemento para o professor*.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

30. Estude o sinal das funções quadráticas dadas pelas leis a seguir. **30 a.** $g(x) > 0$ para qualquer valor de x real

a. $g(x) = 2x^2 + 3x + 7$

b. $h(x) = -x^2 + 2x - 1$

c. $i(x) = -x^2 + 9$

SOFTWARE Se quiser, como auxílio, use um *software* de construção de gráficos.

31. Determine para que valores reais de x cada uma das seguintes funções é positiva.

a. $f(x) = -x^2 + 2x$ **31 a.** $0 < x < 2$

b. $g(x) = x^2 - 2x + 1$ **31 b.** $x \neq 1$

32. Observe o estudo do sinal das funções quadráticas f e g e faça um esboço do seu gráfico. **32.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. Estudo do sinal de f:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ para } -2 < x < 1 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = -2 \text{ ou } x = 1 \\ f(x) < 0 \text{ para } x < -2 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

b. Estudo do sinal de g:

$$\begin{cases} g(x) > 0 \text{ para } x \neq -2 \\ g(x) = 0 \text{ para } x = -2 \end{cases}$$

33. Considere uma função do tipo $j(x) = ax^2 + c$, em que a e c são números reais e $a \neq 0$.

a. Atribuindo valores reais (positivos e negativos) para a e c, escreva pelo menos oito leis de formação diferentes para funções do mesmo tipo da função j.

b. ***SOFTWARE*** Com um *software* de construção de gráficos, faça o gráfico associado a cada uma das leis elaboradas no item anterior.

c. Comparando cada uma das leis com seu gráfico, verifique como deve ser o sinal de a e de c para que uma função do tipo da função j tenha dois zeros reais.

d. Verifique como deve ser o sinal de a e de c para que funções desse tipo não tenham zeros reais.

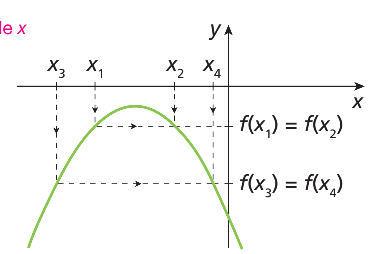
e. **EM DUPLA** Compare as respostas dos itens anteriores com as de um colega. Em seguida, elaborem uma estratégia para realizar o estudo do sinal de uma função do tipo $j(x) = ax^2 + c$, com $a \neq 0$, sem fazer o esboço do gráfico.

Vértice do gráfico da função quadrática

Ao construir gráficos de funções quadráticas, você notou que, com exceção da ordenada y_V do vértice, cada imagem está associada a dois valores de x?

30 b. $\begin{cases} h(x) > 0 \text{ para nenhum valor de } x \\ h(x) = 0 \text{ para } x = 1 \\ h(x) < 0 \text{ para } x \neq 1 \end{cases}$

30 c. $\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } -3 < x < 3 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 3 \\ i(x) < 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

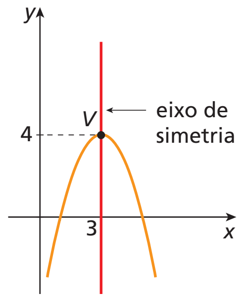


Na parábola, dois pontos de ordenadas iguais estão à mesma distância da reta perpendicular ao eixo x que passa pelo vértice $V(x_V, y_V)$ dessa parábola. Essa reta é chamada de **eixo de simetria** e seus pontos são tais que $x = x_V$ qualquer que seja o valor de y.

Assim, quaisquer dois valores de x equidistantes de x_V têm a mesma imagem.

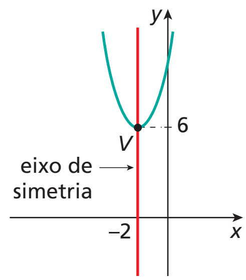
Analise os exemplos.

a. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



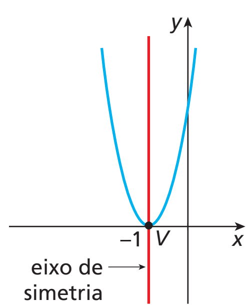
Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = 3$.

b. $g(x) = x^2 + 4x + 10$



Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = -2$.

c. $h(x) = 3x^2 + 6x + 3$



Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = -1$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

As coordenadas do vértice de uma parábola, gráfico da função quadrática cuja lei é $f(x) = ax^2 + bx + c$, são dadas por $x_V = \dfrac{-b}{2a}$ e $y_V = \dfrac{-\Delta}{4a}$.

Demonstração

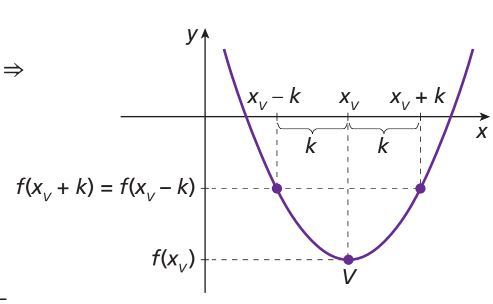
Dado o gráfico da função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, considere (x_V, y_V) o vértice da parábola.

Como $x_V + k$ e $x_V - k$, com $k \neq 0$, são equidistantes de x_V, temos: $f(x_V + k) = f(x_V - k)$

$a(x_V + k)^2 + b(x_V + k) + c = a(x_V - k)^2 + b(x_V - k) + c \Rightarrow$

$\Rightarrow a\left(x_V^2 + 2x_Vk + k^2\right) + bx_V + bk + c = a\left(x_V^2 - 2x_Vk + k^2\right) + bx_V - bk + c \Rightarrow$

$\Rightarrow 2ax_Vk + bk = -2ax_Vk - bk \Rightarrow 4ax_Vk = -2bk \Rightarrow x_V = -\dfrac{b}{2a}$



Sabemos, ainda, que $y_V = f(x_V)$. Assim:

$y_V = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow y_V = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c \Rightarrow$

$\Rightarrow y_V = \dfrac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Portanto, as coordenadas do vértice de uma parábola são:

$x_V = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Atividades resolvidas

R10. Calcular as coordenadas do vértice da parábola correspondente a $g(x) = -x^2 - 5x - 7$.

▶ **Resolução**

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) = 25 - 28 = -3$

Aplicando as fórmulas do vértice, temos:

- $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-5)}{2 \cdot (-1)} = -\dfrac{5}{2}$

- $y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-(-3)}{4 \cdot (-1)} = \dfrac{3}{4}$

Portanto, as coordenadas do vértice dessa parábola são $\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{3}{4}\right)$.

Observação

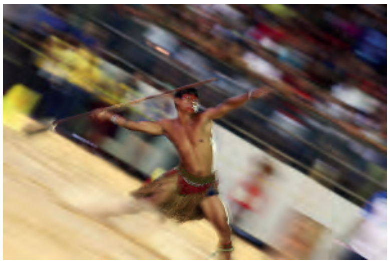
Conhecendo x_V, também podemos calcular y_V substituindo o valor de x_V na lei da função.

$y_v = g(x_v) = g\left(-\dfrac{5}{2}\right) =$

$= -\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\dfrac{5}{2}\right) - 7 = -\dfrac{3}{4}$

Então, $y_V = -\dfrac{3}{4}$.

R11. Uma das provas dos I Jogos Mundiais dos Povos Indígenas de 2015, em Palmas (TO), foi o arremesso de lança. A contagem de pontos e a classificação são feitas de acordo com as distâncias alcançadas pelos atletas. O objetivo é a distância e não o alvo; portanto, a técnica corporal é essencial para que o atleta consiga impulso. O vencedor da prova foi Itaguari Pataxó, que alcançou a marca 44,40 m. As trajetórias das lanças arremessadas são arcos de parábolas. Supondo que o trecho de parábola descrita pela lança de Itaguari, representada em um plano cartesiano, passe pelo ponto (0, 1) e tenha por vértice o ponto (22, 5), determinar a lei de formação da função quadrática cujo gráfico passe por esses pontos.



EDUARDO KNAPP/FOLHAPRESS

Itaguari Pataxó, vencedor da prova de arremesso de lança dos I Jogos Mundiais dos Povos Indígenas de 2015, em Palmas (TO).

Observação

A lei de uma função quadrática pode ser dada por $y = ax^2 + bx + c$. Essa sentença é chamada de **equação da parábola** correspondente.

▶ **Resolução**

Para determinar a lei $y = f(x)$ de uma função quadrática, é preciso encontrar os coeficientes a, b e c da função, com $a \neq 0$, de modo que $y = ax^2 + bx + c$.

Como (0, 1) é ponto da parábola, temos:

$1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 1$

Como o vértice da parábola é (22, 5) e $c = 1$, temos:

$x_v = 22 \Rightarrow \dfrac{-b}{2a} = 22 \Rightarrow b = -44a \qquad \text{(I)}$

$y_v = 5 \Rightarrow \dfrac{-\Delta}{4a} = 5 \Rightarrow \dfrac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow -b^2 + 4a \cdot 1 = 20a \Rightarrow b^2 + 16a = 0 \qquad \text{(II)}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$(-44a)^2 + 16a = 0 \Rightarrow 1.936a^2 + 16a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16a(121a + 1) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $121a + 1 = 0$

$a = 0$ (não serve pois $a \neq 0$)

$121a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{121} \qquad \text{(III)}$

Substituindo (III) em (I), temos:

$b = -44 \cdot \left(-\dfrac{1}{121}\right) = \dfrac{44}{121} = \dfrac{4}{11}$

Portanto, a lei da função é:

$f(x) = -\dfrac{1}{121}x^2 + \dfrac{4}{11}x + 1$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

34. Determine as coordenadas do vértice das parábolas referentes às funções dadas por:

a. $h(x) = -x^2 - 2x + 8$ **34 a.** (–1, 9)

b. $i(x) = x^2 - 2x - 8$ **34 b.** (1, –9)

c. $j(x) = x^2 + 2x - 3$ **34 c.** (–1, –4)

d. $k(x) = x^2 - 4x + 4$ **34 d.** (2, 0)

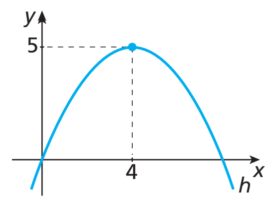
35. Considere as funções da atividade anterior. **35.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. Qual é o maior valor que cada função pode assumir (maior imagem)?

b. Qual é o menor valor que cada função pode assumir (menor imagem)?

c. Qual característica a lei de formação deve ter para que a função tenha um valor máximo? E para que tenha um valor mínimo?

36. Considere o gráfico de uma função quadrática apresentado a seguir.

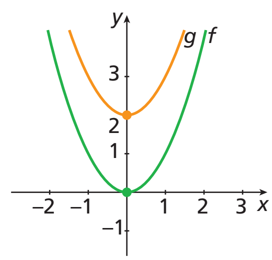


a. Analisando o gráfico, calcule os zeros da função, sabendo que o gráfico passa pela origem do plano cartesiano. **36 a.** 0 e 8

b. Encontre a lei dessa função quadrática. **36 b.** $h(x) = -\frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x$

37. Determine m e n para que as coordenadas do vértice da parábola que representa a função f, dada por $f(x) = -(m - 1)x^2 + 2x + n$, seja $(2, 5)$. **37.** $m = \frac{3}{2}$ e $n = 3$

38. No plano cartesiano a seguir estão representadas as funções dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 + 2$.



38 a. Espera-se que os estudantes percebam que, nas duas funções, tem-se $x_v = 0$.

a. Identifique uma característica comum entre as coordenadas do vértice dessas duas funções.

b. Verifique algebricamente que as coordenadas do vértice de uma função do tipo $h(x) = ax^2 + c$ serão sempre $(0, c)$. **38 b.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Conjunto imagem e valor máximo ou valor mínimo da função quadrática

Em um barco, avarias ou outras situações de emergência podem ocorrer. Nessas circunstâncias, sinalizadores luminosos devem ser disparados para dar um alerta à guarda costeira ou a outras embarcações nas proximidades. No projeto industrial dos sinalizadores, uma propriedade importante é a medida de altura máxima que o artefato pode alcançar na sua trajetória de arco parabólico. Para modelar essa situação, emprega-se uma função quadrática e determina-se a ordenada do vértice da parábola de sua presumida trajetória.

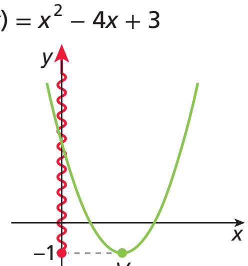
IVAN MUÑOZ OSORIO/ ACERVO DO FOTÓGRAFO

A trajetória luminosa do disparo desse sinalizador se parece com um arco de parábola.

Uma função quadrática tem um **valor máximo** ou um **valor mínimo**. Esse valor é a ordenada do vértice da parábola que a representa e nos permite determinar o conjunto imagem dessa função. Quando a concavidade da parábola é voltada para baixo, a função tem um valor máximo; quando a concavidade é voltada para cima, tem um valor mínimo.

Observe os exemplos.

a. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

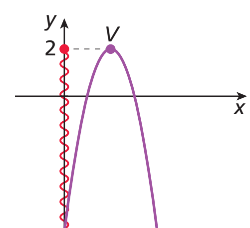


Essa função tem $y_v = -1$.

A parábola tem concavidade voltada para cima. Então, $f(x) \geqslant -1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Logo, -1 é o valor mínimo de f e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$.

b. $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$



Essa função tem $y_v = 2$.

A parábola tem concavidade voltada para baixo. Então, $f(x) \leqslant 2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

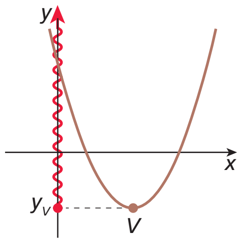
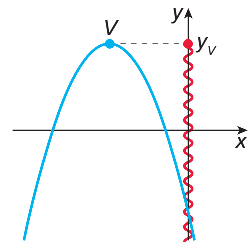
Logo, 2 é o valor máximo de g e $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2\}$.

Observação

O símbolo $\forall$ significa "para todo" ou "qualquer que seja".

Para uma função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, temos:

Concavidade e valor mínimo ou máximo

Concavidade voltada para cima ($a > 0$)	Concavidade voltada para baixo ($a < 0$)
 Essa função tem valor mínimo y_V. O valor mínimo de f é $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$. $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}\right\}$	 Essa função tem valor máximo y_V. O valor máximo de f é $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$. $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}\right\}$

Atividades resolvidas

R12. Determinar o valor máximo ou mínimo da função f dada por $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x - 15$ e escrever seu conjunto imagem.

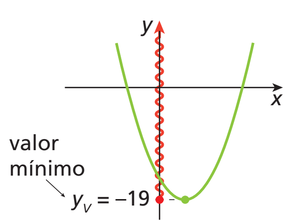
▶ Resolução

Como $a > 0$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima.

Portanto, a função tem valor mínimo.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-15)\right]}{4 \cdot \frac{1}{4}}$$

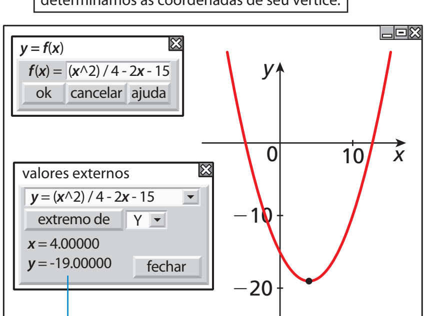
$$y_V = \frac{-(4 + 15)}{1} = -19$$



Logo, -19 é o valor mínimo dessa função e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -19\}$.

Poderíamos resolver essa atividade com o auxílio de um *software* de construção de gráficos. Nesse caso, não seria necessário calcular a ordenada do vértice. Observe:

Construímos o gráfico da função e depois determinamos as coordenadas de seu vértice.



Selecionando a ferramenta “valores extremos”, obtemos as coordenadas do ponto extremo, ou seja, do vértice da parábola.

Portanto, o vértice é (4, −19), e como a parábola tem concavidade para cima: $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -19\}$.

R13. Durante uma situação de emergência, o capitão de um barco disparou um sinalizador em busca de ajuda.

A lei que descreve a medida de altura atingida pelo sinal luminoso em função do tempo é dada por $h(t) = 80t - 5t^2$, sendo h a medida de altura do sinal, em metro, e t a medida de tempo decorrido após o disparo, em segundo.

a. Qual medida de altura máxima esse sinal luminoso atinge?

b. Quantos segundos se passam, após o disparo, até o sinal luminoso atingir a medida de altura máxima?

▶ Resolução

a. Para determinar a medida de altura máxima que esse sinal atinge, precisamos encontrar o valor máximo da função. Analisando o sinal do coeficiente a, podemos concluir que o gráfico da função h é um arco de parábola com concavidade voltada para baixo.

É possível determinar o valor máximo da função usando a fórmula da ordenada do vértice:

$$\Delta = 80^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 6.400$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-6.400}{-20} = 320$$

Logo, a medida de altura máxima que o sinal luminoso atinge é 320 metros.

b. A medida de tempo que o sinal luminoso leva para atingir a medida de altura máxima corresponde ao x_V da parábola. Utilizando a fórmula da abscissa do vértice, temos:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2 \cdot (-5)} = \frac{-80}{-10} = 8$$

Logo, o sinal luminoso atinge a medida de altura máxima 8 segundos após o disparo.

R14. Seja a função quadrática f dada por $f(x) = (m - 3)x^2 + 2x - m$. Para que valores reais de m a função tem -1 como valor máximo?

▶ Resolução

Se -1 é o valor máximo da função, então a parábola tem concavidade voltada para baixo e $y_V = -1$.

Aplicando a fórmula da ordenada do vértice, temos $-1 = \frac{-\Delta}{4a}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

45 c. Espera-se que os estudantes percebam que essa afirmação é falsa, pois o custo da produção de pacotes de 1 quilograma de balas está relacionado ao número de toneladas de balas produzidas por meio de uma função quadrática.

Substituindo os valores dos coeficientes na fórmula e resolvendo-a, obtemos:

$$-1=\frac{-[2^2-4\cdot(m-3)\cdot(-m)]}{4\cdot(m-3)}$$

$$-1=\frac{-[4+4m^2-12m]}{4m-12}$$

$$-4m+12=-4-4m^2+12m$$

$$4m^2-16m+16=0$$

$$m^2-4m+4=0$$

$$m=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$$

$$m=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}$$

$$m=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{4\pm0}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Portanto, para $m=2$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e -1 como valor máximo.

42. Não existe m real tal que $\frac{4}{3}$ seja valor mínimo de f.

44 d. A medida de tempo de subida é igual à medida de tempo de descida.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

39. Determine o valor máximo ou mínimo das funções quadráticas dadas por:

a. $f(x)=2x^2+7x-4$

b. $h(x)=-\sqrt{5}\,x^2-5x+1$

c. $n(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}$

39 c. Valor mínimo: $\frac{7}{18}$

40. SOFTWARE Determine o conjunto imagem das funções quadráticas dadas pelas leis a seguir. Se quiser, como auxílio, use um *software* de construção de gráficos que seu professor indicar. **40 c.** $\text{Im}(h)=\{y\in\mathbb{R}\mid y\leqslant 8\}$

a. $f(x)=x^2-5x+1$

b. $g(x)=-2x^2+3x+7$

c. $h(x)=-3x^2+8$

41. O conjunto imagem da função quadrática g, com $g(x)=ax^2+8x+12$, é $\{y\in\mathbb{R}\mid y\leqslant 16\}$.

41 a. Valor máximo.

a. A função g tem valor máximo ou valor mínimo?

b. A concavidade da parábola correspondente está voltada para cima ou para baixo? **41 b.** Para baixo.

c. Qual é o valor de a? **41 c.** -4

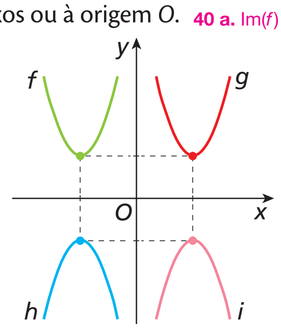
41 d. $(1, 16)$

d. Determine as coordenadas do vértice da parábola.

42. Calcule os valores reais de m para que a função de lei $f(x)=3x^2+2mx+m$ tenha $\frac{4}{3}$ como valor mínimo.

43. Observe os gráficos das funções quadráticas f, g, h e i.

Considere que os vértices das parábolas são simétricos em relação aos eixos ou à origem O. **40 a.** $\text{Im}(f)=\left\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqslant-\frac{21}{4}\right\}$



Sabendo que $\text{Im}(h)=\left\{y\in\mathbb{R}\mid y\leqslant-\frac{3}{2}\right\}$ e que a abscissa do vértice do gráfico de g é 2, calcule a área do retângulo determinado pelos vértices dessas funções.

43. 12 unidades de área.

44. Uma pedra é lançada verticalmente para cima. Um segundo após o lançamento, a pedra atinge 5 metros de medida de altura e começa a descer. A lei que descreve a medida de altura h, em metro, em relação à medida de tempo t, em segundo, é do tipo $h(t)=at^2+bt$, com $a, b\in\mathbb{R}$ e $a\neq0$.

a. Determine a lei dessa função. **44 a.** $h(t)=-5t^2+10t$

b. Qual é a medida de altura da pedra 2 segundos após o lançamento? **44 b.** 0 m

c. SOFTWARE Usando um *software* de construção de gráficos que seu professor indicar, trace o gráfico correspondente a essa situação. **44 c.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

d. Compare a medida de tempo de subida com a medida de tempo de descida da pedra. O que você pode concluir?

45. Uma empresa produtora de alimentos verificou que o custo por pacotes de 1 quilograma (em real) para a produção mensal de x toneladas de balas pode ser calculado por meio da seguinte lei matemática:

$c(x)=\frac{x^2}{10.000}-\frac{x}{10}+30$, com $100\leqslant x\leqslant 800$ **45 a.** R$ 21,00

a. Determine o custo (em real) por quilograma de bala dessa empresa com a produção de 100 toneladas de balas.

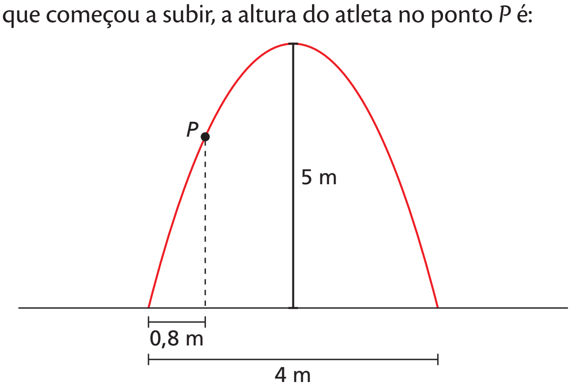
b. Quanto essa empresa gasta por quilograma para produzir 200 toneladas de balas? **45 b.** R$ 14,00

c. Pode-se afirmar que quanto maior o número de toneladas de balas produzidas menor será o custo por pacotes de 1 quilograma de balas?

d. Quantas toneladas de balas deverão ser produzidas para obter um custo mínimo por quilograma? **45 d.** 500 toneladas.

e. Qual é o valor desse custo mínimo? **45 e.** R$ 5,00

46. **(UFLA – 2022)** O salto com vara é um esporte olímpico em que o corpo do atleta descreve a trajetória de uma parábola ao saltar. Considerando que a altura máxima atingida por um atleta foi de 5 metros e que, como ilustrado na figura, ele percorreu uma distância de 4 metros na horizontal desde que começou a subir, a altura do atleta no ponto P é:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

a. 1 m **b.** 2 m **c.** 2,2 m **d.** 3,2 m

46. Alternativa **d.**

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

39 a. Valor mínimo: $-\frac{81}{8}$ **39 b.** Valor máximo: $\frac{5\sqrt{5}+4}{4}$ **40 b.** $\text{Im}(g)=\left\{y\in\mathbb{R}\mid y\leqslant\frac{65}{8}\right\}$

47. **(Uece – 2023)** No sistema usual de coordenadas cartesianas, o gráfico da função quadrática *f* é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. Se o valor máximo que *f* assume é igual a 16 e se a distância entre os pontos de cruzamento do gráfico de *f* com o eixo das abscissas é igual a 8, então a expressão algébrica da função *f* é **47.** Alternativa **c**.

a. $f(x) = -x^2 + 4x + 16.$

b. $f(x) = -2x^2 + 2x + 16.$

c. $f(x) = -x^2 + 16.$

d. $f(x) = -2x^2 + 16.$

48. **(Fuvest-2020)** A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um combo a R$ 10,00, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de R$ 1,00 nesse preço, ela vende 100 combos a mais. Nessas condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse combo? **48.** Alternativa **c**.

a. R$ 2.000,00

b. R$ 3.200,00

c. R$ 3.600,00

d. R$ 4.000,00

e. R$ 4.800,00

49. Na atividade anterior, para obter a máxima arrecadação diária, a dona da lanchonete deveria vender cada combo por quanto? **49.** R$ 6,00

50. **EM DUPLA** **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** Elabore um problema contextualizado que envolva máximo ou mínimo de uma função quadrática. Passe seu problema para um colega resolver e resolva o problema criado por ele.

50. Resposta pessoal.

Construção do gráfico da função quadrática

Escolhendo pontos convenientes

Para esboçar o gráfico (parábola) correspondente a uma função quadrática, podem-se escolher os seguintes pontos convenientes:

- os pontos em que a parábola intercepta o eixo *y* e o eixo *x* (caso existam);
- o vértice.

Considere o exemplo.

Vamos esboçar o gráfico da função dada pela lei $f(x) = -x^2 - 4x - 3$.

Calculamos os elementos necessários para determinar os pontos convenientes. Temos:

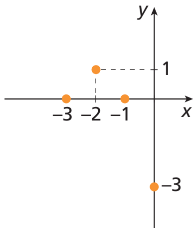
- coeficiente *c*: -3
- zeros da função: -3 e -1
- coordenadas dos vértices: $x_V = -2$ e $y_V = 1$

Pontos formados:

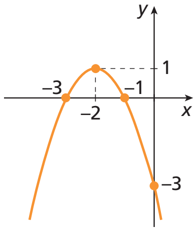
- intersecção com os eixos: $(0, -3)$, $(-3, 0)$ e $(-1, 0)$
- vértice: $(-2, 1)$

Com essas informações, vamos esboçar o gráfico da função *f* realizando duas etapas.

1ª etapa: Localizamos os pontos no plano cartesiano.



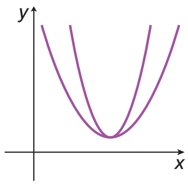
2ª etapa: Traçamos uma parábola que passa pelos pontos.



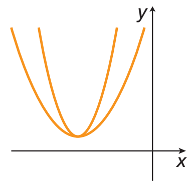
Existem parábolas cujo vértice não se encontra sobre nenhum dos eixos e a função associada a elas não possui zeros reais.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

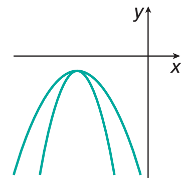
Nesses casos, para construir a parábola relacionada a uma função desse tipo, é necessário determinar as coordenadas do vértice da parábola e identificar o ponto em que a parábola intercepta o eixo y. Com essas informações, pode-se esboçar o gráfico da função utilizando a simetria da parábola em relação à reta vertical que passa pelo vértice.



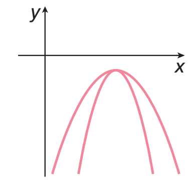
Parábolas com vértice no 1º quadrante e que não interceptam o eixo x.



Parábolas com vértice no 2º quadrante e que não interceptam o eixo x.

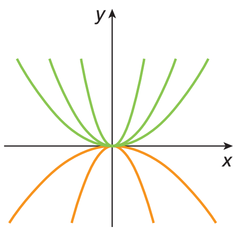


Parábolas com vértice no 3º quadrante e que não interceptam o eixo x.

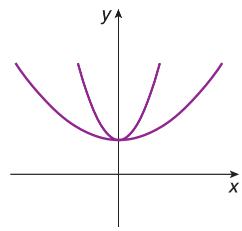


Parábolas com vértice no 4º quadrante e que não interceptam o eixo x.

Há, ainda, parábolas cujos vértices se encontram sobre o eixo y, e as funções a elas associadas têm apenas um zero ou não têm zero.

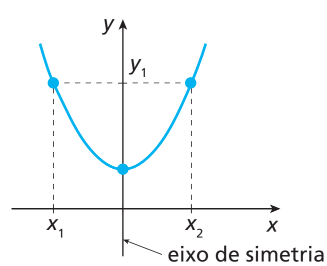


Parábolas com vértice (0, 0).



Parábolas com vértice no eixo y e que não interceptam o eixo x.

Nesses casos, como existem infinitas parábolas com esse vértice, para construir gráficos desse tipo é necessário atribuir outro valor a x, calcular a imagem correspondente e, a partir daí, esboçar o gráfico da função utilizando a simetria da parábola.



Analise o exemplo.

Vamos esboçar o gráfico da função g dada por $g(x) = 2x^2 + 1$.

Repetindo o procedimento do exemplo anterior, calculamos os elementos necessários para determinar os pontos convenientes. Temos:

- coeficiente c: 1
- zeros da função: $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -8$
  (Logo, a função g não tem zeros reais.)
- coordenadas do vértice: $x_v = -\dfrac{0}{2 \cdot 2} = 0$; $y_v = -\dfrac{(0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1)}{4 \cdot 2} = -\dfrac{(-8)}{8} = 1$

Observando os valores encontrados, verificamos que o gráfico da função g não intercepta o eixo x, e o vértice da parábola coincide com o ponto em que o gráfico intercepta o eixo y: (0, 1)

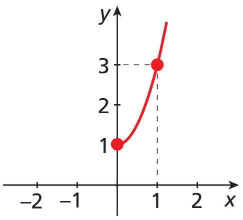
Então, vamos determinar outro ponto pertencente ao gráfico da função g. Para isso, atribuiremos um valor para x e calcularemos sua respectiva imagem.

Sendo $x = 1$, temos: $g(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \Rightarrow g(1) = 3$

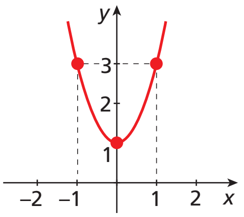
Logo, a parábola passa pelo ponto (1, 3).

Com essas informações, vamos traçar o esboço do gráfico dessa função.

1ª etapa: Localizamos os pontos (0, 1) e (1, 3) no plano cartesiano e traçamos parte da parábola.



2ª etapa: Utilizamos simetria para traçar o restante da parábola.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

52 a. A medida de altura máxima é 25,5 metros.
52 b. Aproximadamente a 14,14 metros do ponto de saque.
52 c. Sim, pois 9 m < 14,14 m < 18 m.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

51. Faça o esboço do gráfico das funções dadas pelas leis a seguir. **51.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. $f(x) = -4x^2 + 6x - 9$

b. $g(x) = x^2 + 6x$

c. $h(x) = \frac{3x^2}{5} + x + 5$

d. $i(x) = 2x^2 + 7x - 4$

e. $j(x) = x^2 + 3$

f. $l(x) = -2x^2 - 2$

52. Voltando ao saque de voleibol "Jornada nas Estrelas" da abertura do capítulo, considere que a trajetória parabólica da bola esteja contida em um plano perpendicular ao plano da rede e que seja descrita pela função $h(x) = -0{,}5x^2 + 7x + 1$, em que h representa a medida da altura da bola em relação ao chão da quadra e x representa a medida da distância horizontal a partir da linha de saque do fundo da quadra.

a. Qual é a medida da altura máxima alcançada pela bola?

b. A que medida de distância aproximada do ponto de saque a bola cairia no chão?

c. Sabendo que a rede separa cada parte da quadra de vôlei em dois quadrados com lados medindo 9 m de comprimento, a bola cairia na quadra adversária? Justifique.

53. Certa parábola intercepta os eixos x e y em um mesmo ponto, que coincide com seu vértice.

Quais são as coordenadas do vértice dessa parábola?

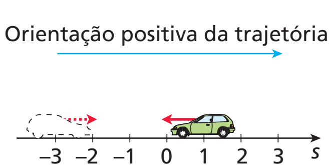
53. $V(0, 0)$

Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função

A análise do gráfico de uma função favorece o entendimento da variação das grandezas envolvidas. Em situações práticas, essa facilidade é mais evidente.

Considere os exemplos.

a. Um móvel percorre uma trajetória retilínea descrevendo um movimento uniformemente variado cuja lei da posição s (em metro) em função da medida de tempo t (em segundo) é $s(t) = -3 + 4t - t^2$. O móvel saiu da posição −3 com velocidade medindo 4 m/s, com movimento a favor da orientação positiva da trajetória. Diminuiu a medida de velocidade até parar e voltou, aumentando a medida de velocidade.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos determinar os intervalos de medida de tempo em que o móvel se movimenta a favor da orientação positiva da trajetória e contra ela. Em que instantes o móvel passa pela posição zero (origem) da trajetória?

Para visualizar melhor a variação da posição (s) em função da medida de tempo (t), vamos construir o gráfico da função s.

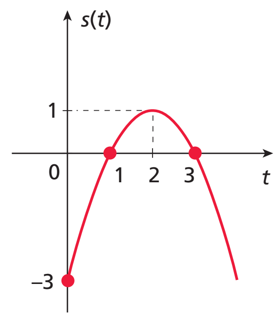
Como 1 e 3 são os zeros da função s, então a parábola intercepta o eixo x em (1, 0) e (3, 0).

Calculando as coordenadas do vértice, obtemos:

- $x_V = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$
- $y_V = \frac{-[4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)]}{4 \cdot (-1)} = 1$

Para $t = 0$, temos $s(0) = -3$.

Portanto, a parábola intercepta o eixo y no ponto (0, -3).



Observe que $D(s) = [0, +\infty[$ e $Im(s) =]-\infty, 1]$.

Pelo gráfico construído, analisamos o que ocorre nos intervalos:

- para $0 < t < 2$, o móvel se movimentou a favor da orientação positiva da trajetória;
- para $t = 2$, o móvel parou e alterou o sentido do movimento;
- para $t > 2$, o móvel se movimentou contra a orientação positiva da trajetória.

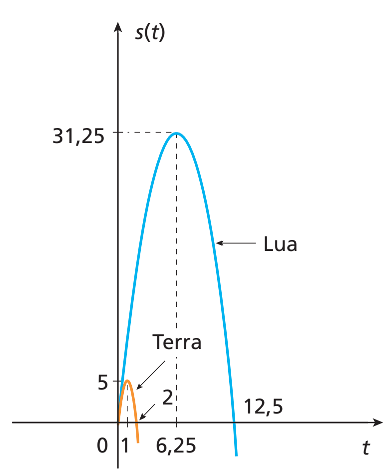
No gráfico, os instantes em que o móvel passa pela posição zero são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo x, ou seja, os zeros da função. Nesse caso, são os instantes $t = 1$ e $t = 3$.

b. Na Lua, um astronauta lança uma rocha verticalmente para cima com velocidade medindo 10 m/s. Ao chegar à Terra, o astronauta faz essa experiência com a mesma rocha e a mesma medida de velocidade. As leis que representam o movimento da rocha (em metro), em função da medida de tempo (em segundo), em cada local são:

$$s_{Lua}(t) = 10t - 0{,}8t^2 \quad \text{e} \quad s_{Terra}(t) = 10t - 5t^2$$

Vamos calcular em qual dos dois locais a medida de tempo de subida e descida são menores e qual é a diferença entre essas medidas.

Podemos construir as duas parábolas em um mesmo plano cartesiano.



Analisando as parábolas, vemos que a medida de tempo de subida e de descida da rocha é menor na Terra. A diferença entre essas medidas é de 10,5 segundos.

Observações

- $s_{Lua}(t) = 10t - 0{,}8t^2$
  Zeros da função: 0 e 12,5
  Ponto de intersecção do gráfico com o eixo y: (0, 0)
  Vértice do gráfico: (6,25; 31,25)
- $s_{Terra}(t) = 10t - 5t^2$
  Zeros da função: 0 e 2
  Ponto de intersecção do gráfico com o eixo y: (0, 0)
  Vértice do gráfico: (1, 5)

54 b. Neste gráfico, a abscissa e a ordenada do vértice indicam, respectivamente, o instante e o local em que o móvel parou e alterou o sentido do movimento.

56. subida: 0 s a 2,5 s
descida: 2,5 s a 5,37 s (aproximadamente)

Atividades propostas

Registre em seu caderno

54. ARGUMENTAÇÃO Com relação ao movimento uniformemente variado, responda às questões a seguir e justifique suas respostas.

a. Como pode ser o gráfico (posição × tempo) de um móvel, em um movimento desse tipo, que não passa pela origem dos espaços?

b. Qual é o significado do vértice do gráfico da função em um movimento desse tipo?

55. Uma empresa de TV a cabo, que tem 60.000 assinantes e cobra R$ 75,00 mensais de cada um, fez uma pesquisa de mercado para decidir o aumento que aplicará em sua mensalidade. Os resultados desse estudo indicam que a empresa perderá 400 assinantes para cada real adicionado à mensalidade.

a. Escreva a sentença que determina o número de assinantes em função da quantidade de reais adicionados à mensalidade. **55 a.** $60.000 - 400x$

b. Encontre a sentença que determina o valor de uma mensalidade (em real) em função do aumento. **55 b.** $75 + x$

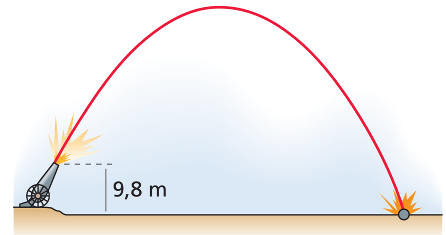
c. Dê a lei da função que determina o faturamento mensal (em real), dependendo da quantidade de reais adicionada à mensalidade. **55 c.** $y = 4.500.000 + 30.000x - 400x^2$

d. De quanto deve ser o aumento para maximizar o faturamento mensal? **55 d.** R$ 37,50

e. Qual é a arrecadação máxima que a empresa pode obter em um mês ao aplicar esse aumento? **55 e.** R$ 5.062.500,00

f. Quantos assinantes deverá ter essa empresa para obter a arrecadação máxima? **55 f.** 45.000

56. Um projétil é lançado e sua medida de altura em função da medida de tempo é dada por $h(t) = -4{,}9t^2 + 24{,}5t + 9{,}8$, com h em metro e t em segundo. Determine os intervalos de medida de tempo em que o projétil está subindo e descendo.



57. Dois móveis, A e B, no mesmo instante, partem do mesmo ponto e realizam movimentos retilíneos que obedecem às leis $s_A(t) = 5 + 5t$ e $s_B(t) = 5 - 5t + t^2$. Determine o intervalo de medida de tempo em que o móvel A fica na frente do móvel B. **57.** O móvel A fica na frente do móvel B no intervalo]0, 10[.

58. *SOFTWARE* Resolva a atividade a seguir usando um *software* de construção de gráficos.

(Enem – 2020) Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos 72 mil reais no mês de janeiro (mês 1), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8) e que a prefeitura gastou 105 mil reais no mês de dezembro (mês 12). A curva que modela esses gastos é a parábola $y = T(x)$, com x sendo o número correspondente ao mês e $T(x)$, em milhar de real.

A expressão da função cujo gráfico é o da parábola descrita é **58.** Alternativa **a**.

a. $T(x) = -x^2 + 16x + 57$

b. $T(x) = -\frac{11}{16}x^2 + 11x + 72$

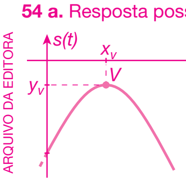
c. $T(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{381}{5}$

d. $T(x) = -x^2 - 16x + 87$

e. $T(x) = \frac{11}{6}x^2 - \frac{11}{2}x + 72$

Inequações do 2º grau

54 a. Resposta possível:



ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

Este gráfico pode representar a lei de formação do movimento uniformemente variado de um móvel que não passa pela origem dos espaços.

Toda inequação que pode ser reduzida a uma desigualdade em que o primeiro membro é um polinômio do tipo $ax^2 + bx + c$ (com a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$) e o segundo membro é zero é chamada de **inequação do 2º grau** na incógnita x.

Observe os exemplos.

a. $x^2 + x - 6 > 0$ **b.** $-x^2 + 0{,}5x \leqslant 0$ **c.** $5x^2 - 2 < 0$ **d.** $-4x^2 + x + \sqrt{3} > 0$

Na resolução de inequações do 2º grau, temos de fazer o estudo do sinal da função quadrática, conforme visto no tópico *Estudo do sinal da função por meio de seus zeros*, neste capítulo.

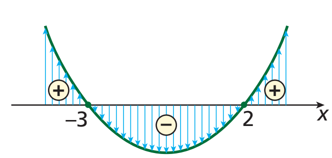
Para resolver a inequação do exemplo **a**, considerando x um número real qualquer, calculamos os zeros da função $x^2 + x - 6$ e depois fazemos o esboço do seu gráfico para determinar a solução da inequação.

$x^2 + x - 6 > 0$

$(x + 3) \cdot (x - 2) = 0$

$x + 3 = 0$ ou $x - 2 = 0$

$x = -3$ ou $x = 2$



Como $x^2 + x - 6 > 0$, a solução desta inequação é qualquer número real tal que $x < -3$ ou $x > 2$.

ILUSTRAÇÕES:ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade resolvida

R15. Resolver, em $\mathbb{Z}$, a inequação

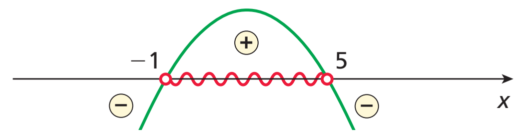
$$-3x^2 + 7x + 4 > -2x^2 + 3x - 1.$$

▶ **Resolução**

$$-3x^2 + 7x + 4 > -2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3x^2 + 7x + 4 + 2x^2 - 3x + 1 > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underbrace{-x^2 + 4x + 5}_{f(x)} > 0$$

Calculando os zeros da função f, obtemos $x = -1$ ou $x = 5$.

Conhecendo os zeros da função, podemos fazer o esboço do gráfico:



A função é positiva para x real tal que $-1 < x < 5$. Como queremos somente valores inteiros, apenas 0, 1, 2, 3 e 4 satisfazem essa condição.

Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

59. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações do 2º grau.

a. $-x^2 + 1 < 0$ **59 a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

b. $2x^2 + 3x + 7 \leqslant 0$ **59 b.** $S = \varnothing$

c. $-x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$ **59 c.** $S = \{1\}$

d. $x^2 + 2(x - 4) - 1 \leqslant 2x^2 - 9$ **59 d.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

e. $x^2 - 4x \geqslant -4$ **59 e.** $S = \mathbb{R}$

f. $(-2x + 1)^2 > 0$ **59 f.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

60. *SOFTWARE* Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das funções f e g dadas por $f(x) = 2x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$, se possível usando um *software* de construção de gráficos que seu professor indicar.

Em seguida, analise os intervalos do domínio em que $f(x) > g(x)$.

Monte a inequação, resolva-a e depois compare a solução com sua análise dos gráficos. **60.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

Observação

Só podemos usar o quadro de sinais quando o segundo membro da inequação for igual a zero.

Inequação-produto e inequação-quociente

Você já trabalhou com inequações-produto e inequações-quociente que envolvem funções afins. Agora, estudaremos inequações desse tipo que também envolvem funções quadráticas, utilizando novamente o quadro de sinais.

Atividade resolvida

R16. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{x-5}{x^2 - x - 42} \geqslant 0.$

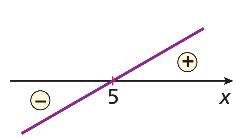
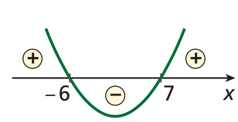
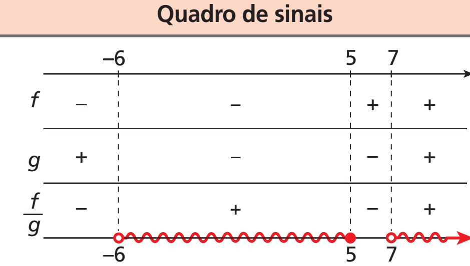
▶ **Resolução**

Para $\dfrac{x-5}{x^2 - x - 42} \geqslant 0$, vamos considerar $f(x) = x - 5$ e $g(x) = x^2 - x - 42$.

O zero de f é 5, e os zeros de g são -6 e 7.

Vamos estudar o sinal das funções f e g e, em seguida, montar o quadro de sinais.

Estudo do sinal de $\frac{f}{g}$

Sinal de f	Sinal de g	Quadro de sinais
		

Observe que -6 e 7 não são soluções da inequação, pois o denominador $x^2 - x - 42$ deve ser diferente de zero.

Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x \leqslant 5 \text{ ou } x > 7\}$.

61 a. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } \frac{7}{3} \leqslant x \leqslant 4\right\}$

64 a. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

$g(x) = -2x^2 + 2x + 4$

64 b. $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{8}\right)$ e $(2, 0)$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

61. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

a. $(3x^2 - 10x + 7)(-x^2 + 4x) \geqslant 0$

b. $2x^3 + 9x^2 - 35x \leqslant 0$ 61 b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -7 \text{ ou } 0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$

c. $x^4 - 4 < 0$ 61 c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$

d. $\dfrac{3x+5}{2x^2 - 7x - 4} \leqslant 0$ 61 d. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{5}{3} \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 4\right\}$

e. $\dfrac{-x^2 + 5x - 4}{x^2 - 14x + 48} \geqslant 0$ 61 e. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ ou } 6 < x < 8\}$

f. $-\dfrac{(x-5)^2}{(-x+5)^2} > 0$ 61 f. $S = \varnothing$

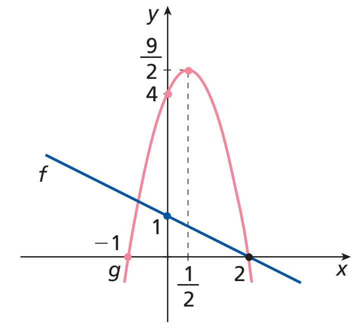
62. Reduza cada inequação a outra com o segundo membro igual a zero e determine a solução em $\mathbb{R}$.

a. $\dfrac{-6}{x^2 - 4} \leqslant 2$ 62 a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x > 2\}$

b. $\dfrac{1}{-x} < \dfrac{1}{2}x + 1$ 62 b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

63. Encontre o menor valor natural que x pode assumir para que $\dfrac{(2x+8)(-x+3)}{-x^2+1} \leqslant 0$. 63. 2

64. Uma função afim f e uma função quadrática g estão representadas a seguir.



a. Determine as leis das funções f e g.

b. Em que pontos os gráficos se interceptam?

c. Sem fazer cálculos, com base no gráfico, determine quais valores de x tornam $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$. 64 c. $x \geqslant -1$

d. Resolva a inequação $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ e compare a resposta com a do item **c.** 64 d. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$

Inequações simultâneas

Nesse tópico, vamos estudar inequações simultâneas envolvendo funções quadráticas.

Inequações simultâneas são aquelas apresentadas por duas desigualdades ou por meio de um sistema de inequações.

Para resolver inequações desse tipo, devemos:

1º. encontrar a solução de cada inequação;

2º. fazer a intersecção das soluções.

Atividades resolvidas

R17. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $4x^2 - 7x + 2 \leqslant 2x^2 - 3x + 2 < -3x + 4$.

▸ Resolução

Inicialmente, vamos reduzir a inequação simultânea em:

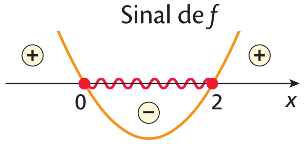
(I) $4x^2 - 7x + 2 \leqslant 2x^2 - 3x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x \leqslant 0$

(II) $2x^2 - 3x + 2 < -3x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 2 < 0$

Considerando $f(x) = 2x^2 - 4x$ e $g(x) = 2x^2 - 2$, temos:

- Zeros de f: 0 e 2

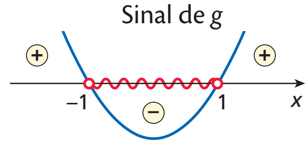
Sinal de f



$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

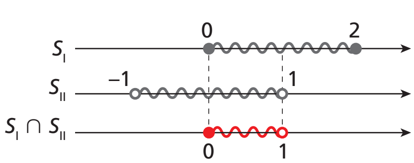
- Zeros de g: -1 e 1

Sinal de g



$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

Agora, vamos fazer a intersecção das soluções das inequações (I) e (II).



Logo, o conjunto solução das inequações simultâneas é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

R18. Resolver, em $\mathbb{R}$, o sistema de inequações: $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ -\frac{1}{2}(x^2 + x) \leqslant \frac{1}{3}(3 - 6x) \end{cases}$

▶ Resolução

Primeiro, vamos reduzir a segunda inequação a uma forma mais simples:

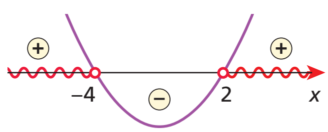
$$-\frac{1}{2}(x^2 + x) \leqslant \frac{1}{3}(3 - 6x) \Rightarrow \frac{-x^2}{2} - \frac{x}{2} \leqslant 1 - 2x \Rightarrow -x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ -x^2 + 3x - 2 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{x^2 + 2x - 8}^{f(x)} > 0 \text{ e } \overbrace{-x^2 + 3x - 2}^{g(x)} \leqslant 0$$

Zeros de f: -4 e 2

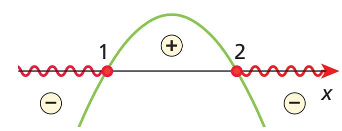
- Sinal de f



$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$

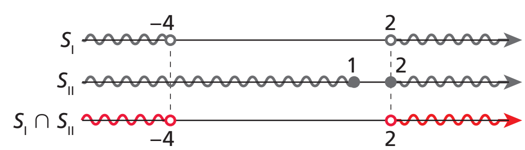
Zeros de g: 1 e 2

- Sinal de g



$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

Agora, fazemos a intersecção das soluções de cada uma das inequações.



Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

65. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

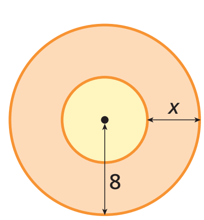
a. $2x \leqslant -x^2 + 4x < 4$ **65 a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\}$

b. $-4 < \frac{x^2 + 8x + 16}{2} < 8$ **65 b.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$

c. $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geqslant 0 \\ x^2 - 2x + 8 < 0 \end{cases}$ **65 c.** $S = \varnothing$

d. $\begin{cases} -x^2 + 5x \geqslant 0 \\ x^2 - 4x \geqslant x \end{cases}$ **65 d.** $S = \{0, 5\}$

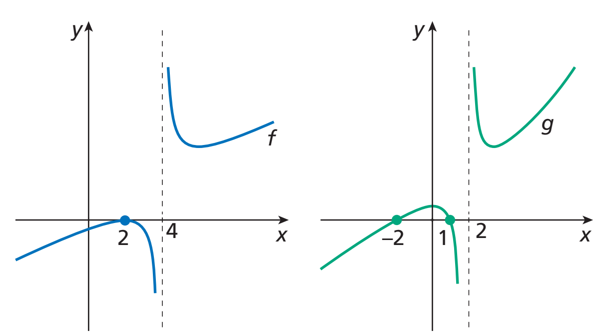
66. A figura mostra dois círculos de mesmo centro.



a. Encontre a medida da área $A(x)$ da coroa circular (região alaranjada). **66 a.** $A(x) = 16\pi x - \pi x^2$

b. Determine x para que essa medida de área fique entre 28π e 65π. **66 b.** $2 < x < 8$

67. Os gráficos a seguir representam, respectivamente, as funções de leis: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4}$ e $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$



Observe os gráficos e resolva os itens a seguir.

a. $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ **67 a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b. $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ **67 b.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

c. $f(x) < 0 < g(x)$ **67 c.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

d. $g(x) < 0 < f(x)$ **67 d.** $S = \varnothing$

Identificação do domínio de uma função por meio de inequações

Nem todas as funções reais têm como domínio o conjunto $\mathbb{R}$. Algumas, pela natureza de sua lei, apresentam restrição de valores, tendo como domínio um subconjunto de $\mathbb{R}$ (distinto de $\mathbb{R}$).

Utilizando o estudo que fizemos das inequações, podemos identificar o domínio de algumas dessas funções.

Observações

- O denominador de expressões fracionárias não pode ser zero.
- O radicando de raízes de índice par não pode ser negativo, ou seja, deve ser positivo ou nulo.

Atividade resolvida

R19. Identificar o domínio da função dada pela lei: $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x - 7}}$

▸ Resolução

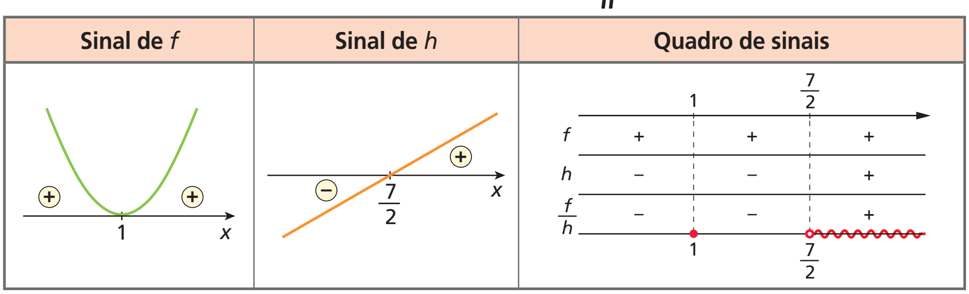
Em $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x - 7}}$, devemos ter: $\dfrac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{f(x)}}{\underbrace{2x - 7}_{h(x)}} \geqslant 0$

Inicialmente, vamos resolver a inequação-quociente:

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ (zero real duplo de f: 1)

$h(x) = 2x - 7$ $\left(\text{zero de } h\text{: } \dfrac{7}{2}\right)$

Estudo do sinal de $\dfrac{f}{h}$



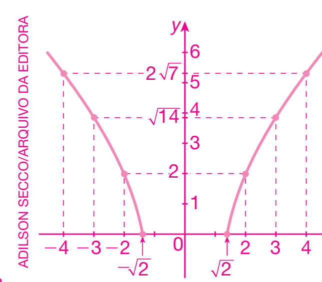
O zero da função h não pode ser considerado, pois anula o denominador da inequação.

Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ ou } x > \dfrac{7}{2}\right\}$.

72. Condição de existência:
$2x^2 - 4 \geqslant 0 \Rightarrow 2x^2 \geqslant 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $x \geqslant \sqrt{2}$
Logo: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $x \geqslant \sqrt{2}\}$

$y = \sqrt{2x^2 - 4}$

x	y
$-\sqrt{2}$	0
$\sqrt{2}$	0
2	2
−2	2
3	$\sqrt{14}$
−3	$\sqrt{14}$
4	$2\sqrt{7}$
−4	$2\sqrt{7}$



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

68 c. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1$ ou $x > 1\}$

68 d. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6$ ou $-2 \leqslant x < 0$ ou $x \geqslant 4\}$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

68. Identifique o domínio de cada função.

a. $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$

68 a. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 4\}$

b. $y = \sqrt{-x^2 + 14x - 49}$

68 b. $D = \{7\}$

c. $y = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$

d. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 6x}}$

69. Para que valores reais de x a função dada por $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ não está definida? 69. $x = 0$

70. Escreva para que valores reais cada função dada a seguir está definida.

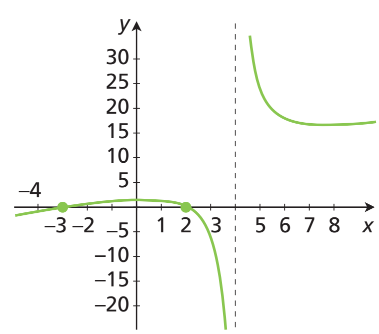
a. $f(x) = \dfrac{-3}{(x^2 - 2x)(x - 5)}$ 70 a. $\mathbb{R} - \{0, 2, 5\}$

b. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{(x - 3)(x^2 - x)}$

c. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x^2}$ 70 c. $\mathbb{R} - \{0\}$

d. $i(x) = \dfrac{\frac{\sqrt{x}}{x}}{\frac{2}{3}}$

71. Analise o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4}$.



a. Determine as soluções das seguintes inequações:

(I) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} \geqslant 0$ (II) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} < 0$

Explique como você determinou as soluções.

b. Escreva o domínio da função f. 71 b. $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

72. Investigue como seria o gráfico da função dada por: $y = \sqrt{2x^2 - 4}$

70 b. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$ e $x \neq 3\}$
70 d. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

71 a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4$ ou $-3 \leqslant x \leqslant 2\}$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3$ ou $2 < x < 4\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

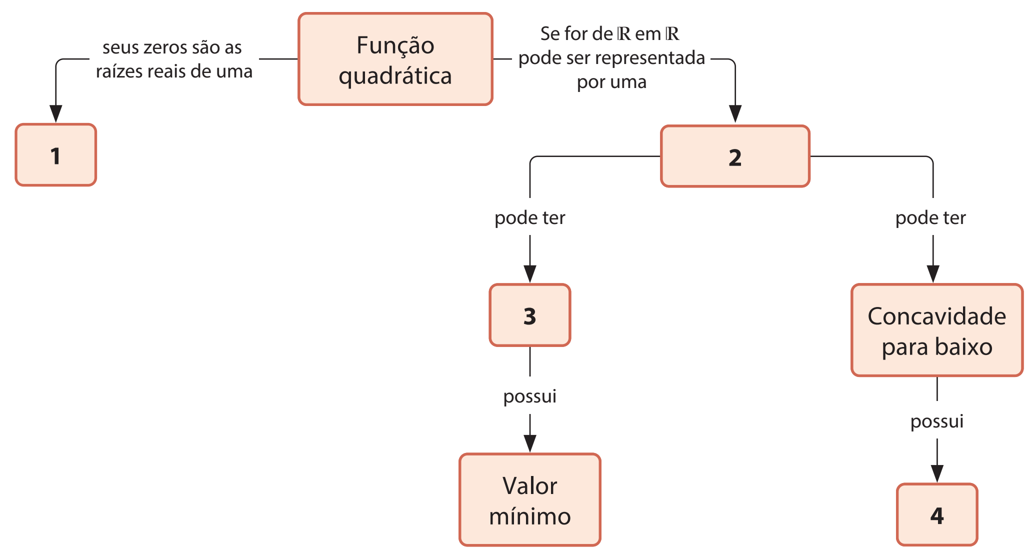
PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 5

Registre em seu caderno

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Valor máximo

B. equação do 2º grau

C. parábola

D. Concavidade para cima

Conexões entre conceitos. A – 4; B – 1; C – 2; D – 3.

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro

REPRODUÇÃO/CIA DAS LETRAS

O diabo dos números: um livro de cabeceira para todos aqueles que têm medo de Matemática

Hans Magnus Enzensberger

São Paulo: Cia. das Letras, 1997.

A Matemática se resume a uma montanha de números? E os cálculos, para que servem? O autor, um dos maiores poetas da língua alemã, escreveu esse livro pensando em quem tem medo de Matemática e não gosta de estudá-la. Robert, personagem que conduz a história, também pensava que os números eram monstruosos, absurdos e inúteis. Mas, um dia, ele começou a sonhar com Teplotaxl, um senhor do tamanho de um gafanhoto com aparência de diabo, que brinca com os números e surpreende com seus conhecimentos matemáticos. As situações sonhadas pelo menino apresentam vários assuntos vistos na escola, como a relação de Euler e a sequência de Fibonacci, de maneira curiosa e divertida. A leitura amplia o universo de conhecimentos de todos os leitores.

Simulador

Gráfico de quadráticas

Na plataforma Phet simulações interativas, que é um projeto da Universidade do Colorado em Boulder, está disponível um simulador do gráfico de uma função quadrática em que é possível alterar os valores dos coeficientes da função e observar as alterações que ocorrem no gráfico.

Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/graphing-quadratics. Acesso em: 12 set. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Para que uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$ seja quadrática, o coeficiente de x^2 deve ser: **Q1.** Alternativa **c.**

a. igual a zero. **c.** não nulo.
b. positivo. **d.** inexistente.

Q2. A concavidade da parábola dada por $y = (-m + 1)x^2 + nx + p$ está voltada para cima se, e somente se: **Q2.** Alternativa **b.**

a. $m > -1$ **c.** $n > 0$
b. $m < 1$ **d.** $p > 0$

Q3. Os zeros da função de lei $y = -x^2 + 9$ são: **Q3.** Alternativa **c.**

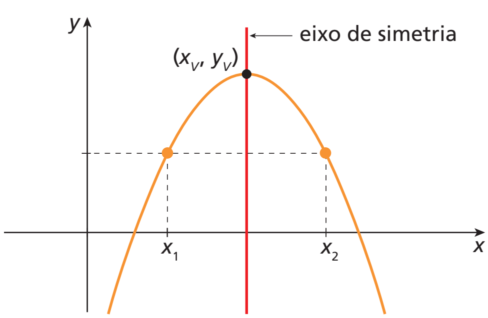
a. inexistentes. **c.** 3 e −3.
b. iguais a 3. **d.** iguais a 4,5.

Q4. A função dada por ______ é sempre positiva. **Q4.** Alternativa **d.**

a. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ **c.** $y = x^2 + 3x$
b. $y = -x^2 + 1$ **d.** $y = x^2 + \sqrt{3}$

Q5. Ao analisar o gráfico a seguir, da função quadrática *f*, concluímos que: **Q5.** Alternativa **c.**

a. $f(x_1) \neq f(x_2)$ **c.** $f(x_v) > f(x_2)$
b. $f(x_1) > f(x_2)$ **d.** $f(x_v) < f(x_1)$



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Q6. Alternativa **b.**

Q6. Sabendo que o vértice da parábola dada por $y = x^2 - 4x + 3$ é o ponto $(2, -1)$, o conjunto imagem dessa função é:

a. $\mathbb{R}$ **c.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$
b. $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$ **d.** $]-\infty, -1]$

Q7. Um carro percorre uma trajetória retilínea descrevendo um movimento cuja lei da posição *s* (em metro) em função do tempo *t* (em segundo) $s(t) = 4t - 2t^2$. No instante ______, o carro para e altera o sentido do movimento. **Q7.** Alternativa **d.**

a. 5 segundos.
b. 30 minutos.
c. 1 hora.
d. 1 segundo.

Q8. Um arquiteto iniciou a planta de uma casa desenhando um retângulo que representa o terreno. O perímetro do retângulo mede 100 cm. Como cada centímetro do desenho equivale a 1 metro, então a medida da área máxima do terreno é: **Q8.** Alternativa **a.**

a. 625 m^2. **c.** 50 m^2.
b. 100 m^2. **d.** 25 m^2.

Q9. A solução da inequação $\frac{x^2 - 1}{x} \leqslant 0$ é: **Q9.** Alternativa **a.**

a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } 0 < x \leqslant 1\}$
b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$
c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x > 1\}$
d. $S = \varnothing$

Q10. O domínio da função *f*, tal que $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 2x - 15}}$, é **Q10.** Alternativa **b.**

a. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 3\}$
b. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant 0 \text{ ou } x > 3\}$
c. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 0 \text{ ou } x > 3\}$
d. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Identificar uma função quadrática.	X	X	X	X						
Resolver problemas que envolvam funções quadráticas.							X	X		
Analisar o gráfico de uma função quadrática.		X		X	X	X				
Resolver inequações que envolvam funções quadráticas.									X	X

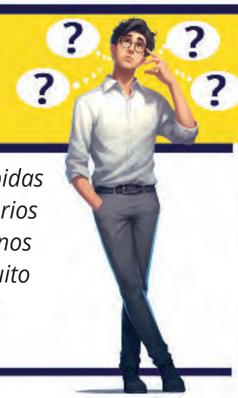
EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

ODS 4 ODS 16

Janela Ajuda

PORTAL DE NOTÍCIAS

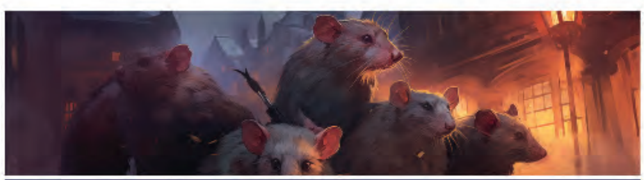
FATO OU *FAKE*?



As fake news *se espalham em uma velocidade impressionante: são 70% mais rápidas que as notícias verdadeiras e alcançam mais pessoas. Estiveram presentes em vários momentos da história mundial, mas ganharam força e persuasão nos últimos anos – principalmente na pandemia de Covid-19. Compartilhar conteúdos falsos é muito perigoso e pode trazer graves consequências. Por isso, saiba como identificar o que é fato e o que é* fake *antes de divulgar qualquer informação.*

NOTÍCIAS APELATIVAS

De acordo com estudos feitos, as pessoas são vulneráveis a conteúdos enganosos porque têm mais facilidade em aceitar informações que reforcem seus pensamentos e confirmem suas crenças do que confrontar notícias que as desafiam.



MENTIRAS HISTÓRICAS

As *fake news* não são apenas um mal deste século. Na Idade Média, por exemplo, vários judeus foram mortos após serem apontados como responsáveis pela peste negra, sendo que a praga era transmitida por ratos. Boatos e notícias falsas também mudaram o rumo da política e tiveram um papel importante em conflitos e guerras. “Uma mentira dita mil vezes torna-se verdade”, já dizia Joseph Goebbels, ministro da propaganda na Alemanha nazista.

O termo ganhou relevância em 2016, durante as eleições presidenciais dos Estados Unidos. Na época em que Donald Trump foi eleito, houve um aumento considerável de *fake news* envolvendo adversários do republicano.

REDES SOCIAIS

No Brasil:

72% dos usuários estão muito preocupados com a quantidade de notícias falsas divulgadas nas redes sociais.

91% concordam que as redes sociais influenciam muito a opinião das pessoas.

82% acreditam que, nas redes sociais, notícias falsas ganham mais visibilidade que notícias verdadeiras.

Cada postagem verdadeira atinge, em média, mil pessoas, enquanto as postagens falsas e mais populares atingem de mil a cem mil pessoas.

NOTÍCIA VERDADEIRA

Procure informações em fontes confiáveis, como veículos de comunicação e órgãos governamentais.

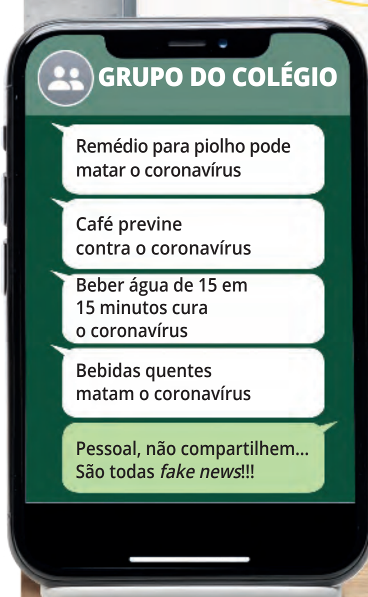
ILUSTRAÇÕES: LUIZ IRIA/ARQUIVO DA EDITORA

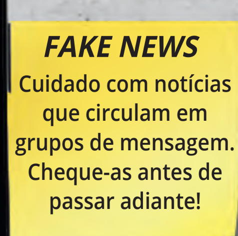
1. Exemplo de resposta: As notícias falsas costumam se espalhar 70% mais rápido que as notícias verdadeiras. Além disso, estudos indicam que as pessoas são propensas a acreditar em notícias que reforcem seus pensamentos e suas crenças.

COMBATE ÀS FAKE NEWS

As principais plataformas digitais têm adotado algumas medidas para conter a onda de notícias falsas. Durante a pandemia de Covid-19, por exemplo, além de remover conteúdos duvidosos e teorias da conspiração, as redes sociais direcionavam o usuário para páginas oficiais do Ministério da Saúde e da Organização Mundial da Saúde (OMS), nas quais era possível tirar várias dúvidas.

4. Não. Ainda é necessário verificar a data da notícia e checar se as informações sobre a fonte são/eram verdadeiras.





3. Não. Na Idade Média, por exemplo, houve a propagação da notícia que relacionava os judeus à peste, o que impactou na morte de milhares de pessoas.

5. Embora beber água seja importante para manter a hidratação e a saúde em geral, não há evidências científicas que sugiram que beber água em intervalos com medidas específicas possa curar ou prevenir o coronavírus. Para se proteger do coronavírus, é essencial seguir as diretrizes fornecidas pelas autoridades de saúde, como lavar as mãos regularmente com água e sabão, praticar o distanciamento social, usar máscaras faciais em locais públicos lotados e seguir os protocolos de vacinação recomendados.

Atividades

Registre em seu caderno

1. **ARGUMENTAÇÃO** Quais são os riscos de propagar notícias falsas? Justifique sua resposta.
2. Durante a pandemia de Covid-19, você se deparou com alguma notícia duvidosa? Se sim, o que fez para verificar a veracidade da notícia? 2. Respostas pessoais.
3. É possível dizer que as *fake news* são um mal recente e provocado exclusivamente pela facilidade de comunicação promovida pelas redes sociais?
4. Ao se deparar com uma notícia cuja fonte é confiável e não parece absurda, podemos compartilhar a informação sem preocupação?
5. Por que é falsa a afirmação de que beber água de 15 em 15 minutos cura o coronavírus? Faça uma pesquisa em fontes confiáveis para responder.

Dados obtidos em: Pesquisa DataSenado: redes sociais e noticias falsas. Disponível em: https://www12.senado.leg.br/institucional/datasenado/arquivos/redes-sociais-e-noticias-falsas; Massachusetts Institute of Technology (MIT). Disponível em: http://news.mit.edu/2018/study-twitter-false-news-travels-faster-true-stories-0308; Ipsos Public Affairs. Disponível em: https://www.ipsos.com/sites/default/files/ct/news/documents/2018-08/fake_news-report.pdf; *Nexo Jornal*. Disponível em: https://www.nexojornal.com.br/expresso/2020/03/16/O-que-as-redes-sociais-fazem-para-coibir-fake-news-em-meio-%C3%A0-pandemia; *Forbes*. Disponível em: https://forbes.com.br/colunas/2019/06/brasil-e-o-pais-que-mais-se-preocupa-com-fake-news-na-internet/. Acessos em: 7 ago. 2024.

Videodocumentário

ODS 4 ODS 17

OBJETIVOS

Pesquisar educação para o trânsito; pesquisar a contribuição da ciência e da tecnologia para a segurança no trânsito; criar um videodocumentário; apresentar o videodocumentário à comunidade escolar com o intuito de conscientizá-la sobre a importância da educação para o trânsito.

OBJETO DIGITAL **Vídeo: Código de Trânsito Brasileiro**

O vídeo aborda a importância do Código de Trânsito Brasileiro no cotidiano dos cidadãos, abordando informações relativas às normas de trânsito e dados sobre acidentes, complementando a atividade proposta nesta seção, contribuindo com o desenvolvimento da **competência geral 10** e do **TCT Educação para o Trânsito**.

Você sabia que um dos principais causadores de acidentes no trânsito é o próprio ser humano, seja ele pedestre, seja condutor? A pressa de chegar ao destino e o desconhecimento e descumprimento das leis de trânsito, como o consumo de bebidas alcoólicas e o uso de celular ao volante, são algumas das causas de acidentes.

As leis são medidas indispensáveis para tornar o trânsito seguro. O Código de Trânsito Brasileiro (CTB), documento que reúne as leis de trânsito vigentes no Brasil, determina que a preferência é do menor veículo e sempre do pedestre em relação aos veículos. Além das leis, a ciência e a tecnologia também contribuem para um trânsito mais seguro, como os cálculos realizados para determinar a medida da velocidade máxima nas vias de circulação de automóveis e os testes de segurança realizados em veículos.

EDNEI MARX/ARQUIVO DA EDITORA

Segundo o parágrafo 2º do art. 29 da Lei nº 9.503, de 23 de setembro de 1997 (que instituiu o CTB), o trânsito de veículos nas vias terrestres que forem abertas à circulação deverá obedecer às seguintes normas: "§ 2º respeitadas as normas de circulação e conduta estabelecidas neste artigo, em ordem decrescente, os veículos de maior porte serão sempre responsáveis pela segurança dos menores, os motorizados pelos não motorizados e, juntos, pela incolumidade dos pedestres".

Esses recursos, entretanto, não são suficientes. Para promover um convívio mais saudável que valorize a integridade física de condutores, ciclistas e pedestres, é importante que adultos e crianças sejam educados para o trânsito, tenham atitudes de respeito com o próximo, além de responsabilidade e cooperação; é preciso que a vida seja valorizada.

Nesse contexto, os videodocumentários são uma forma interessante de conscientização; por isso, nesta atividade, vocês vão pesquisar informações e dados estatísticos sobre trânsito e educação para o trânsito. Depois, vão elaborar, por meio de entrevistas, encenação, músicas e textos, videodocumentários para apresentar esses dados à comunidade escolar com o objetivo de incentivar a reflexão sobre ações no trânsito.

Etapa 1: Educação para o trânsito e contribuição da ciência e da tecnologia para a segurança no trânsito

Etapa 1: Comentários no *Suplemento para o professor*.

1. **EM GRUPO** Reflita e converse com o professor e os colegas sobre as questões a seguir.
   - **a.** Qual é a importância da educação para o trânsito?
   - **b.** Como é o trânsito no município em que vivemos?
   - **c.** Em nosso município, as vias são seguras para os pedestres? E para os ciclistas? E para os condutores de motocicletas, carros e veículos maiores (caminhões, por exemplo)? As vias são acessíveis para pessoas que usam cadeiras de rodas?
   - **d.** Por que existe uma hierarquia de responsabilidade no trânsito?
   - **e.** Você já teve uma experiência negativa no trânsito? E positiva? Se sim, como foi?

2. **EM GRUPO** Reúnam-se em grupos de, no máximo, sete integrantes. Leiam atentamente os temas e as questões propostas a seguir para que cada grupo escolha um dos temas.

Tema 1 – Acidentes de trânsito no Brasil

- Quais são as principais causas de acidentes de trânsito no Brasil? Quantos acidentes ocorreram no Brasil neste ano? Com relação ao mesmo período do ano passado, houve um aumento ou uma diminuição no número de acidentes?
- Existe uma época do ano em que o número de acidentes aumenta? Se sim, qual?
- Qual é a faixa etária da população que mais sofre com os acidentes de trânsito? Por qual motivo isso acontece?
- Como interpretar e apresentar os dados estatísticos e as informações coletadas de maneira que seja possível incentivar a reflexão da população sobre a diminuição no número de acidentes?

Tema 2 – Leis de trânsito brasileiras

- No Brasil, quais são as principais leis de trânsito para pedestres, ciclistas e condutores?
- Quais são as leis mais desrespeitadas que geram um número maior de infrações? Com relação ao mesmo período do ano passado, houve aumento ou diminuição na quantidade de infrações?
- Qual é o perfil da população que mais desrespeita as leis de trânsito? Qual ação pode ser tomada para reverter essa situação?
- Como interpretar e apresentar os dados estatísticos e as informações coletadas de maneira que seja possível incentivar a reflexão acerca do cumprimento das leis de trânsito?

Observação

Para saber mais sobre o Código de Trânsito Brasileiro (CTB), acesse: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9503compilado.htm. Acesso em: 2 set. 2024.

Tema 3 – Medida de velocidade × medida de tempo de frenagem dos veículos e medidas de velocidades nas vias

- O que é a medida de tempo de frenagem de um veículo?
- Qual é a relação entre a medida de tempo de frenagem e a medida de velocidade dos veículos?
- Como são determinadas as medidas de velocidades nas vias?
- Como podemos apresentar essas informações para que seja possível incentivar a reflexão da população sobre o respeito das medidas de velocidades na via?

Tema 4 – Tecnologias para testar a segurança dos veículos

- Como a segurança automotiva evoluiu? Qual foi o resultado na saúde do trânsito após a evolução dos itens de segurança?
- Quais são os testes obrigatórios que o fabricante deve realizar antes de comercializar um automóvel? Como esses testes funcionam?
- Em motos e bicicletas, quais são os itens de segurança necessários? Quais são as tecnologias utilizadas para testar esses itens?
- Como podemos apresentar essas informações para que seja possível incentivar a reflexão da população sobre o uso de itens de segurança?

3. Realizem as pesquisas em *sites* confiáveis, como os de instituições educativas e órgãos governamentais. As informações pesquisadas serão usadas na criação do videodocumentário da próxima etapa.

4. Compartilhem as informações e os dados obtidos com os colegas, em um momento definido pelo professor, apresentando os resultados de suas pesquisas. Conversem sobre as informações encontradas e sobre como elas vão auxiliar na construção da mensagem do videodocumentário.

Etapa 2: Videodocumentário

Etapa 2: Comentários no *Suplemento para o professor*.

5. A criação de um videodocumentário envolve diferentes fases. É importante ter organização para definir a função que cada integrante deseja desempenhar. Leia a seguir as funções envolvidas na produção do vídeo.
   - **Roteiristas:** responsáveis por criar o roteiro, descrevendo cada cena e a ordem em que aparecerão. A organização das cenas deve ser definida com todo o grupo e registrada pelos roteiristas.
   - **Redatores:** responsáveis por escrever os textos que farão parte do vídeo – por exemplo, o texto que poderá ser lido pelo narrador. Lembrem-se de que as informações pesquisadas na etapa 1 deverão ser utilizadas nesse momento. Também são responsáveis por definir e pesquisar quem serão os entrevistados, como um ciclista ou um agente de trânsito, caso a técnica seja escolhida pelo grupo.
   - **Diretores:** responsáveis pela organização geral do trabalho. Devem acompanhar todas as fases, organizando-as para que o grupo alcance o objetivo do videodocumentário dentro do cronograma previsto.
   - **Produtores:** responsáveis por organizar os espaços que serão filmados – por exemplo, onde ocorrerão as entrevistas.
   - **Técnicos de som e imagem:** responsáveis por gravar as entrevistas e outras cenas relacionadas ao tema.
   - **Entrevistadores:** responsáveis por elaborar as perguntas e realizar as entrevistas. Para criar as perguntas, pensem em quem será entrevistado e como essa pessoa pode contribuir falando sobre suas experiências. É importante que o entrevistado esteja confortável no momento da gravação; por isso, entreguem as perguntas antes do dia da entrevista, expliquem que a conversa será gravada, combinem o dia, o horário e o local em que a entrevista ocorrerá.
   - **Editores:** responsáveis por editar as cenas produzidas, utilizando, para isso, programas específicos de edição (de texto e de imagem).
   - **Atores:** responsáveis por recriar as cenas no documentário, se desejarem utilizar essa técnica.
   - **Narradores:** responsáveis por narrar o texto que ligará as partes do documentário. O narrador tem o papel de deixar o texto coerente e inteligível a quem vê o vídeo. Lembre-se de que o narrador deve ser objetivo e transmitir as mensagens de maneira interessante e compreensível.
   - **Divulgadores:** responsáveis por divulgar o evento de lançamento do videodocumentário. Para isso, podem criar cartazes informando dia, horário, tema do trabalho com imagens e informações que despertem a curiosidade das pessoas para assistir ao vídeo.

6. O grupo deve definir as técnicas que serão utilizadas no documentário – por exemplo, entrevistas, dramatização, ilustrações e filmagem de cenas.

7. Para organizar o trabalho de produção e divulgação do vídeo, definam, com o professor, um cronograma, determinando as datas para a entrega das entrevistas, das filmagens, do vídeo editado e do vídeo finalizado. Além disso, determinem a data, o horário e o local do evento para a divulgação dos vídeos.

Etapa 3: Exibição do videodocumentário

Etapa 3: Comentários no *Suplemento para o professor*.

8. Após a edição, a turma deverá assistir aos vídeos para analisar se o tema foi abordado da forma desejada e se há algo que precisa ser alterado para a elaboração da versão final dos vídeos. Não se esqueçam de criar um título para o documentário.

9. Organizem o evento para a exibição do videodocumentário, conforme a orientação do professor. Não se esqueçam de testar os aparelhos para verificar se estão funcionando corretamente.

Etapa 4: Análise e síntese do trabalho realizado

Etapa 4: Comentários no *Suplemento para o professor*.

10. Em sala de aula, conversem com o professor e os colegas sobre a atividade realizada: as etapas do processo, do que mais gostaram, o que poderia ter sido melhor e se acham que o videodocumentário mostrou de modo evidente o ponto de vista da turma sobre educação para o trânsito.

11. Nesse momento, você fará uma autoavaliação. Para isso, escreva um relatório respondendo às questões a seguir e acrescente outras informações que julgar importantes sobre sua autoavaliação. Em seguida, entregue o relatório ao professor.
    - Ouvi com atenção as orientações do professor durante a atividade?
    - Participei dos momentos de pesquisa, de conversa, de produção e de exibição do videodocumentário?
    - Como as pesquisas mostraram que a educação para o trânsito é uma ferramenta importante para conscientizar a população?
    - Ajudei meu grupo apresentando sugestões e propondo mudanças durante a criação do videodocumentário?
    - Ouvi as sugestões dos colegas com atenção e respeito?
    - Houve dificuldades durante o trabalho? Se sim, quais? Como busquei resolvê-las?
    - Compreendi como a ciência e a tecnologia podem contribuir para tornar o trânsito mais seguro?
    - Entendi a importância da educação para o trânsito? Qual é essa importância?
    - O que aprendi durante a criação do videodocumentário?

1. Alternativa **d**.

1. Qual é o valor da expressão numérica $\left(2^{-2}\right)^3 \cdot \left(3^0 \cdot 2\right)^5$?

a. -2
b. 0
c. 2^{-7}
d. 2^{-1}
e. 4^{-1}

2. Considere o seguinte sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. **2.** Alternativa **c**.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

Qual dos pares ordenados a seguir é solução desse sistema?

a. $(52, 23)$
b. $(8, -1)$
c. $(4, -1)$
d. $\left(\frac{44}{7}, \frac{1}{7}\right)$
e. $\left(\frac{11}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

3. Para $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, a sequência $(1, 3, 5, 7, \ldots)$ pode ser obtida pela lei de formação: **3.** Alternativa **d**.

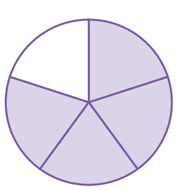
a. $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + 2$.
b. $a_1 = 7$ e $a_{n+1} = a_n - 2$.
c. $a_n = n$.
d. $a_n = 2n - 1$.
e. $a_n = 2n + 1$.

4. A sequência de Fibonacci é uma sequência numérica em que os dois primeiros termos são 1 e os demais, a partir do terceiro, são obtidos adicionando os dois termos anteriores. Qual é o oitavo termo da sequência de Fibonacci? **4.** Alternativa **c**.

a. 8
b. 13
c. 21
d. 29
e. 37

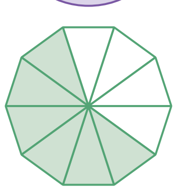
5. Nas alternativas, as figuras foram divididas em partes iguais. Assinale a alternativa que representa corretamente a porcentagem de partes pintadas. **5.** Alternativa **b**.

a.



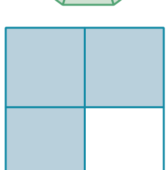
8%

b.



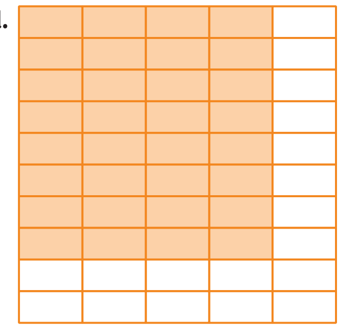
60%

c.



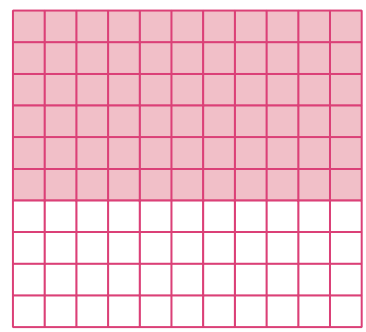
72,5%

d.



32%

e.



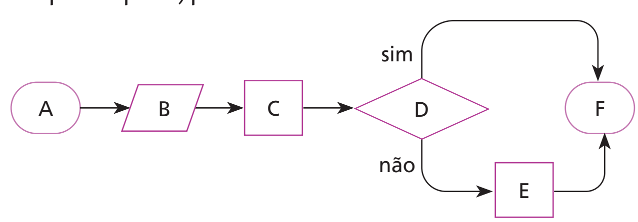
66%

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

6. Uma pessoa realiza uma aplicação de R$ 200,00 a juro composto de 5% ao mês. Qual será o valor aproximado do montante dessa aplicação após 3 meses? **6.** Alternativa **d**.

a. R$ 203,02
b. R$ 202,01
c. R$ 230,00
d. R$ 231,53
e. R$ 500,00

7. Rebeca está fazendo este fluxograma (esquema que mostra um passo a passo) para calcular a medida de volume de um cubo.



Rebeca usou os passos a seguir no fluxograma.

1. Considere a medida a de comprimento da aresta do cubo. **7.** Alternativa **c**.
2. Fim
3. A medida obtida está na unidade de medida desejada?
4. Início
5. Converta a medida obtida para a unidade de medida desejada.
6. Calcule a^3.

Qual é a correspondência entre as figuras e os passos do fluxograma?

a. A1, B4, C6, D3, E2, F5.
b. A4, B1, C6, D3, E2, F5.
c. A4, B1, C6, D3, E5, F2.
d. A4, B1, C3, D5, E2, F6.
e. A4, B1, C3, D5, E6, F2.

Capítulo 6

FUNÇÃO EXPONENCIAL

LORISVALDO DE PAULA/O POPULAR/ESTADÃO CONTEÚDO

Técnicos da Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) trabalham na região contaminada pelo acidente radiológico com césio-137 em Goiânia (GO), em 1987.

OBJETO DIGITAL
***Podcast*: O acidente radiológico em Goiânia**

O *podcast* amplia o texto de abertura do capítulo apresentando aos estudantes como aconteceu esse acidente e os perigos para o meio ambiente. Esse OED dialoga com o **TCT Educação Ambiental** e permite o desenvolvimento da **competência geral 7** favorecendo o desenvolvimento da consciência ambiental.

Em setembro de 1987, aconteceu em Goiânia, capital do estado de Goiás, um dos maiores acidentes radiológicos do mundo. O manuseio indevido de um aparelho de radioterapia abandonado gerou contaminação com césio-137, que é material radioativo com meia-vida de cerca de 30 anos. O acidente envolveu direta e indiretamente centenas de pessoas e até hoje algumas regiões contaminadas com a substância estão isoladas.

A meia-vida de um material radioativo é a medida de tempo necessária para que sua medida de massa se reduza à metade. Assim, determinada quantidade de césio-137 teria sua medida de massa reduzida pela metade somente após cerca de 30 anos. Esse decaimento pode ser expresso por meio de uma função obtida a partir de uma função exponencial.

A função que representa a medida da massa $m(t)$ de césio-137 após t anos, considerando uma medida de massa inicial m_0, é:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

Além de situações como essa, funções obtidas a partir da exponencial são usadas para descrever muitos fenômenos da vida real, como cálculos financeiros, datação de materiais arqueológicos (por meio de técnicas que utilizam a radioatividade), crescimento ou decrescimento de uma população etc. Em alguns casos, a função fornece apenas valores aproximados para os valores reais, pois os fenômenos são influenciados por diversos fatores, que podem não estar sendo considerados na função matemática.

Introdução ao estudo da função exponencial

Considere a seguinte situação.

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2022, o Brasil tinha 203.080.756 de habitantes e uma taxa de crescimento populacional de 0,52% ao ano de 2010 a 2022. Com base nesses dados e supondo que a taxa se mantenha constante, podemos fazer uma estimativa da população para o ano de 2050.

Estimativa populacional brasileira até 2050

Ano	População estimada
2023	$203.080.756 + 0{,}0052 \cdot 203.080.756 \simeq 204.136.776$
2024	$204.136.776 + 0{,}0052 \cdot 204.136.776 \simeq 205.198.287$
⋮	⋮
2049	$232.398.462 + 0{,}0052 \cdot 232.398.462 \simeq 233.606.934$
2050	$233.606.934 + 0{,}0052 \cdot 233.606.934 = 234.821.690$

Fonte: elaborado com base em CABRAL, Umberlândia. De 2010 a 2022, população brasileira cresce 6,5% e chega a 203,1 milhões. **Agência IBGE**. 27 out. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37237-de-2010-a-2022-populacao-brasileira-cresce-6-5-e-chega-a-203-1-milhoes. Acesso em: 5 set. 2024.

Portanto, se a taxa de crescimento permanecer constante até 2050, a população brasileira será de 234.821.690 habitantes.

Observação

Na página do IBGE, há diversas projeções para a população do Brasil e dos estados brasileiros. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/. Acesso em: 12 ago. 2024.

Note que é trabalhoso construir uma tabela como essa, pois cada valor depende do cálculo da população do ano anterior. Ou seja, a cada passo o valor obtido anteriormente é multiplicado por 1,0052. Então, para estimar a população de 2050, precisamos calcular a população ano a ano, de 2023 a 2050.

Uma maneira de facilitar esses cálculos seria usar uma planilha eletrônica, como a seguir.

Campo que mostra a célula selecionada. A célula B3 é a célula que está na coluna B e na linha 3.

Campo que mostra a fórmula associada à célula.

Números que indicam as linhas da planilha.

Letras que indicam as colunas na planilha.

B3 | *Fórmula* | =B2+(B2*0,0052)

	A	B	C
1	**Ano**	**População estimada**	
2	2022	203.080.756	
3	2023	204.136.776	
4	2024		
5	2025		

Inicialmente, digitamos a população de 2022 em uma célula da planilha – na célula B2, por exemplo. Então, na célula B3, digitamos:
=B2+(B2*0,0052)
(Adicionar o valor da célula anterior a esse valor multiplicado por 0,0052.)
Essa fórmula nos fornece a população estimada em 2023.

B30 | *Fórmula* | =B29+(B29*0,0052)

	A	B	C
1	**Ano**	**População estimada**	
2	2022	203.080.756	
3	2023	204.136.776	
4	2024	205.198.287	
⋮	⋮	⋮	
29	2049	233.606.934	
30	2050	234.821.690	
31			

Não é necessário repetir a fórmula para cada célula da coluna. Basta selecionar a célula B3, levar o cursor até a quina direita da seleção e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção até a célula correspondente à população em 2050 (B30). Esse procedimento copia a fórmula da célula B3 para as células B4 a B30, substituindo B2, respectivamente, por B3, B4, B5, ..., e B29.
Dessa forma, obtemos a população estimada em cada um dos anos.

Além da planilha eletrônica, outra maneira de representar os mesmos cálculos é perceber uma regularidade entre os valores de cada linha.

Estimativa populacional brasileira

Ano	População estimada
2023	$203.080.756 \cdot (1 + 0{,}0052)^1 \simeq 204.136.776$
2024	$203.080.756 \cdot (1 + 0{,}0052)^2 \simeq 205.198.287$
⋮	⋮
2049	$203.080.756 \cdot (1 + 0{,}0052)^{27} \simeq 233.606.934$
2050	$203.080.756 \cdot (1 + 0{,}0052)^{28} = 234.821.690$
x	$203.080.756 \cdot (1 + 0{,}0052)^{x-2022}$

Fonte: elaborado com base em CABRAL, Umberlândia. De 2010 a 2022, população brasileira cresce 6,5% e chega a 203,1 milhões. **Agência IBGE**. 27 out. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37237-de-2010-a-2022-populacao-brasileira-cresce-6-5-e-chega-a-203-1-milhoes. Acesso em: 5 set. 2024.

A diferença no cálculo a partir da regularidade é que um valor não dependerá do número da população do ano anterior. Com essa nova tabela, também é possível perceber que o crescimento é exponencial: a população de cada ano é o produto da constante 203.080.756 (que se refere à população brasileira em 2022) por uma potência de base 1,0052.

É importante ressaltar que as estimativas nem sempre revelam os fatos da realidade com muita precisão. Por exemplo, para estimar a população brasileira em 2050, consideramos que a taxa de crescimento se manterá constante; no entanto, de acordo com o IBGE, essa taxa ainda está diminuindo. Isso significa que, em 2050, a população real poderá ser menor que a população estimada.

A seguir, ampliaremos o estudo da potenciação e de suas propriedades, o que nos auxiliará no estudo da função exponencial e na resolução de equações e inequações exponenciais.

Potência de expoente natural

As potências são úteis para representar números muito grandes, como a medida da distância da Terra ao Sol, ou números muito pequenos, como a medida de massa de um átomo.

A distância da Terra ao Sol, por exemplo, mede aproximadamente 150.000.000.000 m e pode ser representada por $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

Nessa notação, utilizamos uma potência de base 10.

ANDRZEJ WOJCICKI/SCIENCE PHOTO LIBRARY/GETTY IMAGES

Ilustração esquemática sem escala representando o Sol e a Terra em cores fantasia.

Dados um número real a e um número natural n, com $n \geqslant 2$, a potência de base a e expoente n é indicada por a^n e é o produto de n fatores iguais a a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Observação

Para $n = 1$ e $n = 0$, definimos:

- $a^1 = a$;
- $a^0 = 1$, para $a \neq 0$.

Analise os exemplos a seguir.

a. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

b. $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

c. $(\sqrt{7})^1 = \sqrt{7}$

d. $(-1)^0 = 1$

e. $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

f. $(0{,}1)^3 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$

Dados dois números reais a e b e dois números naturais m e n, temos as seguintes propriedades:

- **1ª propriedade**: $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$;
- **2ª propriedade**: $\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{(m-n)}$ (para $a \neq 0$ e $m > n$);
- **3ª propriedade**: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;
- **4ª propriedade**: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (para $b \neq 0$);
- **5ª propriedade**: $(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$.

Considere os exemplos a seguir.

a. $5^2 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^5 = 5^{(2+3)}$

b. $\frac{8^5}{8^3} = \frac{8 \cdot 8 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8}}{\cancel{8} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8}} = 8^2 = 8^{5-3}$

c. $(8 \cdot 9)^2 = (8 \cdot 9) \cdot (8 \cdot 9) = 8 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 = 8^2 \cdot 9^2$

d. $(7 : 3)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7 \cdot 7}{3 \cdot 3} = \frac{7^2}{3^2}$

e. $(3^4)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^{(4+4)} = 3^{(4 \cdot 2)}$

Observação

Dados um número real a e dois números naturais m e n, temos, em geral, $a^{m^n} \neq (a^m)^n$.
Por exemplo, $3^{1^2} \neq (3^1)^2$, pois:

$$3^{1^2} = 3^{1 \cdot 1} = 3^1 = 3 \text{ e } (3^1)^2 = 3^{1 \cdot 2} = 3^2 = 9$$

Observe que, para $a \neq 0$, definimos a^0 de modo que a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$ seja válida para m ou n (ou ambos) nulos. Por exemplo:

$$4^0 \cdot 4^7 = 1 \cdot 4^7 = 4^7 = 4^{(0+7)}$$

Potência de expoente inteiro

Dados um número real a, diferente de zero, e um número natural n, vamos definir a^{-n} de maneira que a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$, que vale quando m e n são números naturais, seja preservada quando m e n são números inteiros.

Em particular, para $a \neq 0$, devemos ter:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{(n+(-n))} = a^0 = 1$$

Portanto, $a^n \cdot a^{-n} = 1$ implica definir:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ para } a \neq 0$$

Dizemos que a^{-n} é o **inverso** de a^n.

Analise os exemplos a seguir.

a. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

b. $(-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49}$

c. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

As cinco propriedades das potências de expoentes naturais são válidas para quaisquer expoentes m e n inteiros.

Para a 2ª propriedade, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, como m e n são números inteiros, m não precisa ser maior que n, basta que a seja diferente de zero.

Observação

Nas ciências, é usual escrever números muito grandes ou muito pequenos, que tenham representação decimal finita, em **notação científica**. Nesse tipo de notação, o número é escrito na forma:

$$N \cdot 10^m, \text{ em que } 1 \leqslant N < 10 \text{ e } m \text{ é um número inteiro}$$

CLOUDS HILL IMAGING LTD/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Ácaros *Dermatophagoides pteronyssinus*. Imagem obtida por microscopia eletrônica de varredura com ampliação de 35 vezes e colorizada artificialmente.
O comprimento dessa espécie de ácaro mede aproximadamente $3 \cdot 10^{-4}$ m.

4. Não foram utilizadas: início da vida na Terra (4,6 bilhões de anos), surgimento dos primeiros ancestrais dos seres humanos (4 milhões de anos) e aparecimento do *Homo sapiens* (entre 400 e 100 mil anos). Resposta pessoal.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Calcule as potências a seguir.

a. $(-2)^4$ 1 a. 16
b. $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$ 1 b. $-\frac{1}{125}$
c. 0^{10} 1 c. 0
d. $\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}$ 1 d. $\frac{81}{64}$
e. 3^0 1 e. 1
f. π^1 1 f. π

2. Calcule o valor das expressões a seguir.

a. $10^9 \cdot 10^{(-4)}$ 2 a. 100.000
b. $\frac{13^{19}}{13^{17}}$ 2 b. 169
c. $(-5)^{15} : (-5)^{12}$ 2 c. −125
d. $2^{-1} \cdot 2^{-2}$ 2 d. $\frac{1}{8}$
e. $(10 \cdot 7)^2$ 2 e. 4.900
f. $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ 2 f. $-\frac{27}{125}$
g. $(2^3)^2$ 2 g. 64
h. $((\sqrt{7})^5)^0$ 2 h. 1

3. A vida na Terra teve início há cerca de 4,6 bilhões de anos, mas os primeiros ancestrais dos seres humanos só surgiram há aproximadamente 4 milhões de anos. O *Homo habilis*, um de nossos ancestrais, surgiu há cerca de 2 milhões e 200 mil anos. O *Homo erectus* apareceu há apenas 2 milhões de anos. Nossa espécie, o *Homo sapiens*, surgiu entre 400 mil e 100 mil anos atrás, o que significa que nossa existência é relativamente recente.

3. Alternativa **b**.

Qual é a diferença de medida de tempo, em ano, entre o surgimento do *Homo habilis* e do *Homo erectus*, aproximadamente?

a. $4 \cdot 10^5$
b. $2 \cdot 10^5$
c. $1{,}8 \cdot 10^6$
d. $2 \cdot 10^6$
e. $4{,}1 \cdot 10^6$

4. ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS Quais informações do enunciado da atividade anterior não foram utilizadas na resolução? Depois, elabore um problema com essas informações.

Potência de expoente racional

Raiz enésima

Dado um número *a*, real e não negativo, e um número natural *n*, com $n \geqslant 1$, a **raiz enésima** de *a* é definida como o número *b*, real e não negativo, tal que $b^n = a$. Escrevemos:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ e } b \geqslant 0$$

O símbolo $\sqrt{}$ é conhecido como **radical**, *a* é o **radicando** e *n* é o **índice**.

- Se *n* for um número ímpar, pode-se definir $\sqrt[n]{a} = b$, em que *a* e *b* são números reais negativos tais que $b^n = a$.
  Observe o exemplo a seguir.
  $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3)^3 = -27$.
- Se *n* for um número par e *a* for um número real negativo, não é possível definir $\sqrt[n]{a}$ em $\mathbb{R}$, pois, nesse caso, não há um número real *b* tal que $b^n = a$.
  Confira o exemplo a seguir.
  $\sqrt{-9}$ não está definida nos números reais, pois não existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^2 = -9$.
  Analise mais estes exemplos:
  a. $\sqrt{16} = 4$, pois $4^2 = 16$;
  b. $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$;
  c. $\sqrt[4]{0} = 0$, pois $0^4 = 0$;
  d. $\sqrt[10]{1.024} = 2$, pois $2^{10} = 1.024$.

A raiz enésima de um número apresenta as seguintes propriedades (sendo *a* e *b* reais não negativos, *m* inteiro, *n* e *p* naturais e não nulos):

- **1ª propriedade**: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;
- **2ª propriedade**: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (para $b \neq 0$);
- **3ª propriedade**: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$;
- **4ª propriedade**: $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$;
- **5ª propriedade**: $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Observação

Em geral, o índice 2 é omitido na representação de raízes. Assim:

$$\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$$

Atividades resolvidas

R1. Simplificar a expressão $\sqrt{12} + \sqrt{108}$.

▸ **Resolução**

Fatorando os radicandos, temos:

$$\sqrt{12} + \sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} =$$

$$= 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

Portanto, $\sqrt{12} + \sqrt{108} = 8\sqrt{3}$.

R2. Racionalizar o denominador da expressão $\dfrac{5}{\sqrt{3}+2}$.

▸ **Resolução**

Para racionalizar, é necessário eliminar as raízes do denominador de uma expressão. No caso da expressão apresentada, deve-se fazer as seguintes manipulações:

$$\frac{5}{\sqrt{3}+2} = \frac{5}{\sqrt{3}+2} \cdot \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2} =$$

$$= \frac{5(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3})^2 - 2^2} = \frac{5\sqrt{3}-10}{3-4} = \frac{5\sqrt{3}-10}{-1} = 10 - 5\sqrt{3}$$

Portanto, $\dfrac{5}{\sqrt{3}+2} = 10 - 5\sqrt{3}$.

Definição de potência de expoente racional

Dados um número real positivo a e um número racional $\dfrac{p}{q}$ (em que $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q > 0$), definimos:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Considere os exemplos a seguir.

a. $7^{\frac{2}{9}} = \sqrt[9]{7^2} = \sqrt[9]{49}$

b. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}} = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{27}$

c. $(\sqrt{11})^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{11})^2} = \sqrt[3]{11}$

d. $\left[(-5)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

Observação

No cálculo da raiz de índice par de uma potência de expoente par, o resultado é positivo, seja a base da potência um número positivo ou negativo. Exemplos:

$\sqrt{(-3)^2} = 3$

$\sqrt{3^2} = 3$

$\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$

$\sqrt[4]{2^4} = 2$

As cinco propriedades enunciadas para as potências de expoentes naturais também são válidas para as potências de expoentes racionais, do mesmo modo que foram válidas para os expoentes inteiros.

Atividade resolvida

R3. Calcular o valor de x tal que:

$$x = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{2}}$$

▸ **Resolução**

$$x = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{9} = 3\sqrt{3}$$

Portanto, $x = 3\sqrt{3}$.

Potência de expoente irracional

Sendo *a* um número real positivo e *x* um número irracional, podemos estimar uma potência a^x por meio de aproximações, conforme mostra a atividade resolvida a seguir.

Atividade resolvida

R4. Determinar entre quais potências de 3 com expoente natural está compreendido $3^{\sqrt{2}}$.

▶ **Resolução**

Como $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$, temos que $3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$, ou seja, $3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$. Portanto, $3^{\sqrt{2}}$ situa-se entre os números inteiros 3 e 9.

As cinco propriedades estudadas para as potências de expoentes naturais também são válidas para as potências de expoentes irracionais, do mesmo modo que foram válidas para os expoentes inteiros e racionais.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

5. Determine o valor de:

a. $\sqrt{1{,}69}$ **5 a.** 1,3

b. $\sqrt[3]{-1{,}728}$ **5 b.** −1,2

c. $81^{\frac{1}{2}}$ **5 c.** 9

d. $4^{\frac{2}{3}}$ **5 d.** $2\sqrt[3]{2}$

6. Efetue as operações e determine o resultado ao final.

a. $121^{0{,}9} : 121^{0{,}4}$ **6 a.** 11

b. $(0{,}3)^8 \cdot (0{,}3)^{-7} : (0{,}3)^{-2}$ **6 b.** 0,027

c. $\dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{(-3)^2 \cdot 3^{-2}}$ **6 c.** $\sqrt[3]{3}$

d. $\left[32^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{2}{25}}$ **6 d.** 2

7. Simplifique as expressões.

a. $\sqrt{50} - \sqrt{8}$ **7 a.** $3\sqrt{2}$

b. $\sqrt{80} + \sqrt{180}$ **7 b.** $10\sqrt{5}$

8. Racionalize o denominador das expressões a seguir.

a. $\dfrac{2}{\sqrt{3} - 3}$ **8 a.** $\dfrac{-\sqrt{3} - 3}{3}$

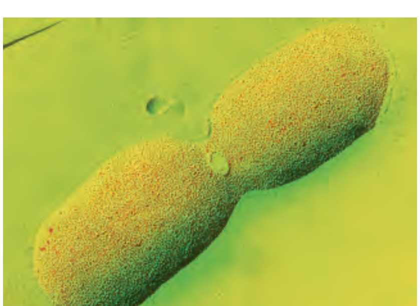
b. $\dfrac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ **8 b.** $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

9. Determine entre quais números inteiros a potência $5^{\sqrt{2}}$ está. **9.** Entre 5 e 25.

Função exponencial

Acompanhe a situação a seguir.

A principal forma de multiplicação das bactérias é a divisão binária. Nesse tipo de divisão, o material genético é duplicado, e a bactéria se divide ao meio, originando duas novas bactérias idênticas a ela.



DR. TONY BRAIN/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Bactéria *E. coli* em processo de divisão binária. Imagem obtida por microscopia eletrônica de transmissão com fratura por congelamento com ampliação de 24.225 vezes e colorizada artificialmente.

CULTURE CREATIVE/AFP

A Microbiologia é o estudo dos microrganismos, ou seja, de seres vivos que só podem ser vistos por meio de microscópios, como vírus, bactérias e alguns fungos.

Sabendo que determinada colônia, iniciada por uma única bactéria, duplica a cada 20 minutos, quantas bactérias existirão após 2 horas e 40 minutos?

Após um período de 20 minutos, teremos 2 bactérias. Após dois períodos de 20 minutos, ou seja, 40 minutos, teremos 4 bactérias. Vamos fazer um esquema:

1 período de 20 min $\longrightarrow$ 2 bactérias $\longrightarrow$ 2^1
2 períodos de 20 min $\longrightarrow$ 4 bactérias $\longrightarrow$ 2^2
3 períodos de 20 min $\longrightarrow$ 8 bactérias $\longrightarrow$ 2^3
4 períodos de 20 min $\longrightarrow$ 16 bactérias $\longrightarrow$ 2^4

Então, após 2 horas e 40 minutos, ou seja, após 8 períodos de 20 minutos, teremos 256 bactérias.

Da mesma maneira, após x períodos de 20 minutos, o número n de bactérias será dado por $n = 2^x$. Esse é um exemplo de função em que a variável está no expoente da expressão que a define.

Observação

O símbolo $\mathbb{R}_+^*$ indica que consideramos apenas os números reais positivos.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é chamada de **função exponencial** de base a quando existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Considere os exemplos a seguir de funções exponenciais para $x \in \mathbb{R}$.

a. $f(x) = 3^x$ **b.** $g(x) = (0{,}7)^x$ **c.** $h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ **d.** $i(x) = (\sqrt{5})^x$

Em uma função exponencial de lei $f(x) = a^x$, a base a deve ser positiva e diferente de 1, pois:

- se $a = 1$, então f é uma função constante igual a 1;
- se $a = 0$ e $x \leqslant 0$, então a^x não está definida, e f também não está;
- se $a = 0$ e $x > 0$, então f é uma função constante igual a 0;
- se $a < 0$, então f não está definida para todo x real. Por exemplo, se $a = -4$, então $f(x) = (-4)^x$, e $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$.

Observação

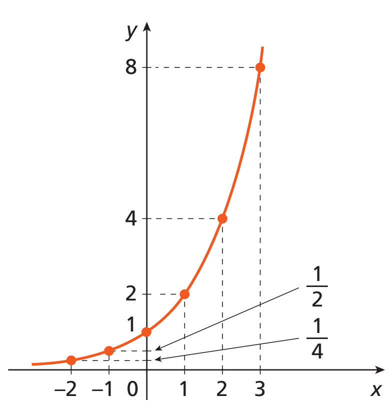
Existem funções que podem ser obtidas a partir de funções exponenciais. Por exemplo:
$f(x) = 3^{(2x + 1)}$
$g(x) = 5 \cdot 4^x$
$h(x) = 2^x - 1$

Gráfico da função exponencial

Analise os gráficos e alguns pontos das funções exponenciais dadas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

$\mathbf{f(x) = 2^x}$

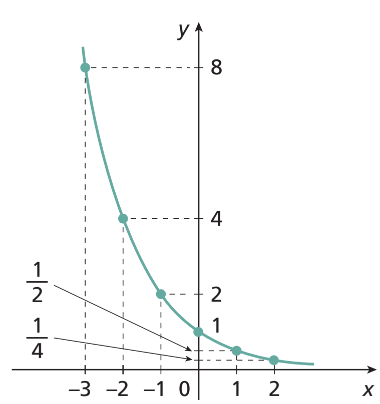
x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

$\mathbf{g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$

x	$g(x)$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$



$D(g) = \mathbb{R}$
$Im(g) = \mathbb{R}_+^*$

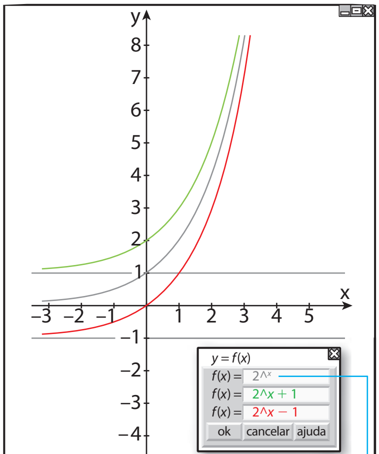
Observação

Uma função $f: A \rightarrow B$ é **sobrejetora** quando, para qualquer $y \in B$, sempre há x tal que $f(x) = y$, ou seja, quando $Im(f) = CD(f)$.

Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, exponencial, dada pela lei $g(x) = a^x$; segue da definição de função exponencial que g é sobrejetora, pois $Im(g) = CD(g) = \mathbb{R}_+^*$.

O gráfico de qualquer função exponencial cuja lei é $f(x) = a^x$ é uma curva que tem aspecto semelhante ao dos gráficos apresentados e intercepta o eixo y no ponto $(0, 1)$.

Observe que os gráficos das funções se aproximam do eixo x, mas não o interceptam nem o tangenciam. Por isso, a reta $y = 0$ é chamada de **assíntota** desses gráficos.



Cada *software* tem uma maneira diferente de escrever as expressões que representam as funções. Nesse exemplo, para indicar "2 elevado a *x*", escrevemos: 2^*x*. Note também que nesse *software* as leis das funções são diferenciadas pelas cores, pois todas elas estão representadas pela letra *f*.

As funções obtidas a partir de funções exponenciais nem sempre têm essas características.

Em um *software* de construção de gráficos, construímos os gráficos das funções f (em cinza), i (em verde) e h (em vermelho), tais que $f(x) = 2^x$, $i(x) = 2^x + 1$ e $h(x) = 2^x - 1$, para analisar as características dos gráficos das funções i e h em relação ao gráfico da função exponencial f.

Note que:

- o gráfico da função $i(x) = 2^x + 1$ é o gráfico da função f transladado 1 unidade para cima;
- o gráfico da função $h(x) = 2^x - 1$ é o gráfico da função f transladado 1 unidade para baixo.

Observe que o gráfico da função h passa pela origem do plano cartesiano, no ponto (0, 0), o domínio de h é $D(h) = \mathbb{R}$ e seu conjunto imagem é $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -1\}$. A assíntota do gráfico de h é a reta $y = -1$.

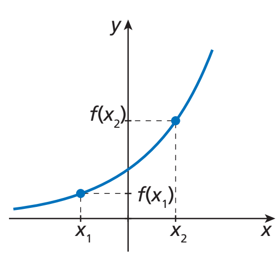
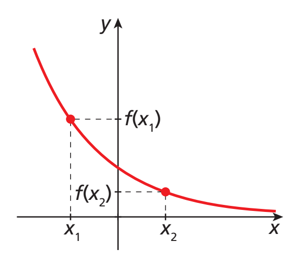
Crescimento e decrescimento de uma função exponencial

Analisando os quadros de valores e os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, apresentados na página anterior, podemos obter as conclusões a seguir.

- Quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de $f(x) = 2^x$ também aumentam. Isso ocorre porque a base a é maior que 1 (nesse exemplo, $a = 2$). Portanto, a função f é **crescente**.
- Quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ diminuem. Isso ocorre porque a base a está entre 0 e 1 $\left(\text{nesse exemplo, } a = \frac{1}{2}\right)$. Portanto, a função g é **decrescente**.

De modo geral, temos:

Crescimento e decrescimento de uma função do tipo $f(x) = a^x$

Função crescente ($a > 1$)	Função decrescente ($0 < a < 1$)
	
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Considere os exemplos.

a. $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
g é decrescente

b. $h(x) = (0{,}4)^x$
h é decrescente

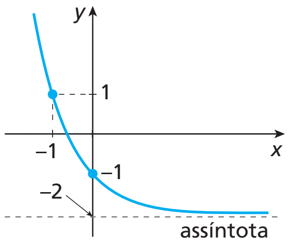
c. $i(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$
i é crescente

Observação

Uma função $f: A \to B$ é **injetora** se, para quaisquer x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Considere $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$, exponencial, dada pela lei $g(x) = a^x$ e x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$, tais que $x_1 \neq x_2$.
Suponha, por absurdo, que $g(x_1) = g(x_2)$, ou seja, $a^{x_1} = a^{x_2}$. Como $a^{x_1} = a^{x_2}$, então $x_1 = x_2$, o que é absurdo.
Essa contradição nos indica que, se $x_1 \neq x_2$, temos $g(x_1) \neq g(x_2)$, isto é, g é injetora.

Atividade resolvida

R5. Observar o gráfico da função f, dada por $f(x) = a \cdot 3^{-x} + b$, e determinar os valores de a e b.



▸ Resolução

Os pontos $(-1, 1)$ e $(0, -1)$ pertencem ao gráfico de f.

Para $x = -1$, temos: $f(-1) = 1$

Assim: $1 = a \cdot 3^{-(-1)} + b \Rightarrow 1 = a \cdot 3 + b$ (I)

Para $x = 0$, temos: $f(0) = -1$

Assim: $-1 = a \cdot 3^{-(0)} + b \Rightarrow -1 = a \cdot 1 + b$ (II)

Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), obtemos: $a = 1$ e $b = -2$

Portanto, $f(x) = 3^{-x} - 2$, ou seja, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$.

10. Respostas no *Suplemento para o professor*.

13. Para $f(x) \leqslant -2$, teríamos: $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 \leqslant -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 0$

Isso é absurdo, pois $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ é sempre maior que zero.

19. Para $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, todos os quocientes são iguais a $\frac{1}{4}$.

19 a. Sim, os resultados são sempre iguais à base a da função.

19 b. Para $f(x) = a^x$, concluímos que $\frac{f(x)}{f(x-1)} = a$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

10. Construa o gráfico das funções exponenciais a seguir.

a. $f(x) = 5^x$

b. $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c. $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

d. $i(x) = 4^x$

11. SOFTWARE Associe cada uma das leis de funções a seguir à sua respectiva representação gráfica. Em seguida, se possível, use um *software* de construção de gráficos para conferir sua resposta.

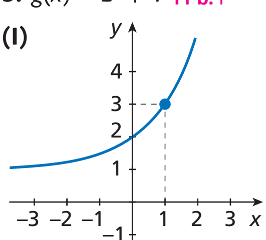
a. $f(x) = 3^{x+1}$ **11 a.** III

b. $g(x) = 2^x + 1$ **11 b.** I

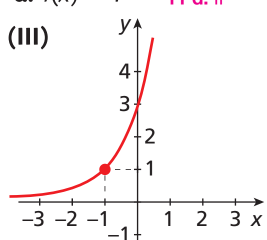
c. $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ **11 c.** IV

d. $i(x) = 4^{x-1}$ **11 d.** II

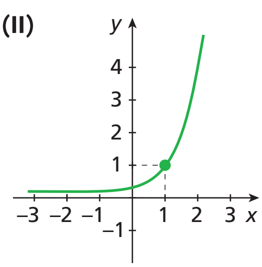
(I)



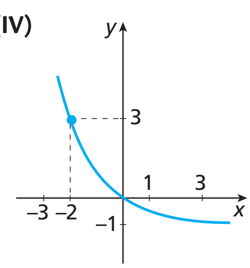
(III)



(II)



(IV)



12. D(i) = $\mathbb{R}$; Im(i) = $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$; ponto: (0, 2); assíntota: $y = 1$.

12. Qual é o domínio e o conjunto imagem da função $i(x) = 2^x + 1$? Em qual ponto o gráfico da função i corta o eixo y? Qual é sua assíntota?

13. ARGUMENTAÇÃO Por que, na **atividade resolvida R5**, $f(x)$ não pode ser menor ou igual a -2?

14. SOFTWARE Qual é o conjunto imagem da função $f(x) = 2^x + 4$? Se possível, use um *software* de construção de gráficos para ajudar na resolução. **14.** Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$

15. Classifique as funções dadas pelas leis a seguir em crescente ou decrescente.

a. $g(x) = (\sqrt{2})^x$

b. $h(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$

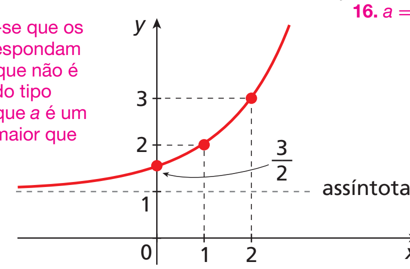
c. $i(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$

15 a. Crescente. **15 b.** Decrescente. **15 c.** Crescente.

16. Observe o gráfico da função f, dada por $f(x) = 2^{x+a} + b$, e determine os valores de a e b, sabendo que $a = -b$.

16. $a = -1$ e $b = 1$

20 b. Espera-se que os estudantes respondam que não, porque não é uma função do tipo $f(x) = a^x$, em que a é um número real maior que zero e $x \in \mathbb{R}$.



17. Dada a função f, tal que $f(x) = 5^x$, determine:

a. $\frac{f(4)}{f(3)}$ **17 a.** 5

b. $\frac{f(3)}{f(2)}$ **17 b.** 5

c. $\frac{f(2)}{f(1)}$ **17 c.** 5

d. $\frac{f(1)}{f(0)}$ **17 d.** 5

18. O que você observa nos resultados encontrados nos itens da atividade anterior? **18.** Os resultados são todos iguais.

19. ARGUMENTAÇÃO Refaça os itens da **atividade 17** empregando a lei $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

a. Os valores encontrados relacionam-se com o valor da base a da função? De que maneira?

b. A que conclusão podemos chegar?

20. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA Em 1640, Pierre de Fermat conjecturou que a função $f(n) = 2^{(2^n)} + 1$ gerava sempre um número primo para todos os inteiros não negativos n. No entanto, a conjectura se revelou incorreta quando Leonhard Euler (1707-1783) mostrou que $f(5)$ não é um número primo.

Fonte: elaborado com base em EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2011. p. 390-392.

a. Calcule $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$ e verifique se os valores obtidos são números primos.

b. ARGUMENTAÇÃO A função que Fermat conjecturou é uma função exponencial? Por quê?

UNIVERSAL HISTORY ARCHIVE/UNIVERSAL IMAGES GROUP/GETTY IMAGES - COLEÇÃO PARTICULAR

Pierre de Fermat (1601?-1665).

20 a. $f(1) = 5$, $f(2) = 17$ e $f(3) = 257$; os números 5, 17 e 257 são primos.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Aplicações da função exponencial

São muitas as áreas do conhecimento que fazem uso de funções do tipo exponencial, ou de funções obtidas a partir dela, para resolver situações recorrentes: Engenharia, Ciências da Natureza, Geologia, Finanças, entre outras. Analise alguns exemplos.

a. Um capital de R$ 100,00 foi investido em uma aplicação financeira que rende 2% ao mês.

Podemos utilizar a expressão $M(t) = 100 \cdot 1{,}02^t$ para calcular o saldo M dessa aplicação após t meses.

Para $t = 1$, temos: $M(1) = 100 \cdot 1{,}02^1 \Rightarrow M(1) = 102$

Portanto, após 1 mês, o saldo será de R$ 102,00.

Para $t = 12$, temos: $M(12) = 100 \cdot 1{,}02^{12} \Rightarrow M(12) \simeq 126{,}82$

Logo, após 1 ano, o saldo será aproximadamente de R$ 126,82.

b. Em determinado município, o número de habitantes é dado pela função H, sendo $H(d) = k \cdot 2^{3d}$, em que k é constante e d (medida da distância ao centro desse município) é positiva e dada em quilômetro.

Sabendo que existem 12.288 habitantes a 4 km do centro, quantos habitantes há a 6 km do centro?

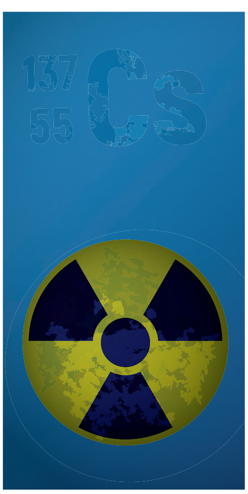
Empregando a função dada, podemos descobrir o valor da constante k:

$$12.288 = k \cdot 2^{3 \cdot 4} \Rightarrow 12.288 = k \cdot 2^{12} \Rightarrow k = \frac{12.288}{2^{12}} \Rightarrow k = \frac{12.288}{4.096} \Rightarrow k = 3$$

Assim, para calcular o número de habitantes a 6 km do centro, substituímos k por 3 e d por 6:

$$H(6) = 3 \cdot 2^{(3 \cdot 6)} \Rightarrow H(6) = 3 \cdot 2^{18} \Rightarrow H(6) = 786.432$$

Portanto, há 786.432 habitantes a 6 km do centro desse município.



MEGGI/SHUTTERSTOCK

Isótopo radioativo césio-137.

c. A meia-vida de um elemento radioativo é a medida de tempo necessária para que sua medida de massa se reduza à metade. Considerando que a meia-vida do césio-137 é cerca de 30 anos, a medida de massa de determinada quantidade desse elemento ao longo do tempo pode ser dada por $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$, em que m_0 é a medida de massa inicial e t é a medida do tempo, em ano.

Assim, considerando, por exemplo, uma quantidade de 96 g de césio-137, sua massa após t anos medirá: $m(t) = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$

Vamos calcular a medida de massa após 90 anos, que corresponde a 3 meias-vidas:

$$m(t) = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{90}{30}} = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{96}{8} = 12$$

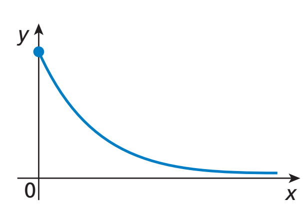
Logo, após 90 anos, 96 g de césio-137 se reduzirão a 12 g.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

21. ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS EM DUPLA Elabore uma pergunta para cada um dos exemplos anteriores. Passe suas questões para um colega resolver e resolva as questões criadas por ele. **21.** Resposta pessoal.

22. A radioatividade é a propriedade que algumas substâncias têm de emitir radiações. Observe o gráfico da função f, sendo $f(x) = a^x$, com $a \neq 1$, que representa a radioatividade y de determinado minério em função da medida de tempo x.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, responda às questões. **22 a.** Diminuindo, pois: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

a. A radioatividade está aumentando ou diminuindo? Por quê?

b. Esse minério deixará de ser radioativo em algum momento? Por quê? **22 b.** Não, porque a curva não corta o eixo x.

c. Quais são os possíveis valores de a? **22 c.** $\{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$

25 b. 15.000 bactérias. **25 d.** $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant 6\}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 5.000 \leqslant y \leqslant 15.000\}$

23. Certo montante pode ser calculado pela fórmula $M = C \cdot (1 + i)^t$, em que C é o capital, i é a taxa corrente e t é a medida de tempo. Com um capital de R$ 20.000,00, a uma taxa anual de 12% ($i = 0{,}12$), qual será o montante após 3 anos? **23.** R$ 28.098,56

24. Segundo a lei de resfriamento do cientista inglês Isaac Newton (1643-1727), a medida de temperatura de um corpo diminui exponencialmente. Por exemplo, sob certas condições, a medida de temperatura T de batatas assadas, após saírem do forno, em grau Celsius, é dada por $T = 20 + 160 \cdot e^{-6t}$, em que $e \simeq 2{,}7$ e t é a medida de tempo decorrido, em hora.

a. Qual era a medida de temperatura das batatas quando saíram do forno? **24 a.** 180 °C

b. Com uma calculadora, calcule a medida de temperatura das batatas 30 minutos após saírem do forno. **24 b.** Aproximadamente 28 °C.

25. Observe o gráfico a seguir, que indica o crescimento de uma cultura de bactérias no decorrer de 6 meses de uma pesquisa.

a. Com quantas bactérias se iniciou a pesquisa? **25 a.** 5.000 bactérias.

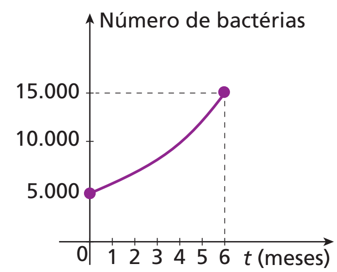
b. Após 6 meses, qual é a quantidade total de bactérias?

c. Admitindo a lei de formação da função que representa essa situação como $f(t) = k \cdot a^t$, determine os valores de a e de k.

d. Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função?

e. Qual é o número de bactérias após 3 meses?

25 e. Aproximadamente 8.650 bactérias. **25 c.** $a = \sqrt[6]{3}$ e $k = 5.000$



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Equações exponenciais e sistemas

Equações que têm a incógnita em pelo menos um expoente são chamadas de **equações exponenciais**.

Observe os exemplos.

a. $2^x = 7$ **b.** $5^{-x} = \sqrt{5}$ **c.** $14^{x+9} = \left(\frac{1}{28}\right)^{-x} + 2$

Podemos resolver algumas dessas equações escrevendo ambos os membros da igualdade como potências de mesma base a (com $a > 0$ e $a \neq 1$) e aplicando a propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Atividades resolvidas

R6. Resolver a equação exponencial $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{27}$ em $\mathbb{R}$.

▸ Resolução

Primeiro, vamos escrever os membros da equação em uma mesma base:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{27} \Rightarrow \left(3^{-1}\right)^x = 27^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-x} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{3}{2}}$$

Logo: $-x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Portanto, $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

R7. Resolver a equação $4^x + 4 \cdot 2^x = 5$ em $\mathbb{R}$.

▸ Resolução

$4^x + 4 \cdot 2^x = 5 \Rightarrow \left(2^2\right)^x + 4 \cdot 2^x - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(2^x\right)^2 + 4 \cdot \left(2^x\right) - 5 = 0$

Escrevendo $2^x = y$, temos: $y^2 + 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -5$

Como $y = 2^x$, temos:

- $2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$;
- $2^x = -5$ (não existe x real que satisfaça essa equação).

Portanto, $S = \{0\}$.

R8. Para x e y em $\mathbb{R}$, resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = \frac{1}{2} \\ 7^{x+y} = 1 \end{cases}$$

▸ Resolução

Primeiro, vamos desenvolver cada uma das equações.

- $2^x \cdot 4^y = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x \cdot \left(2^2\right)^y = 2^{-1} \Rightarrow 2^x \cdot 2^{2y} = 2^{-1} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2^{x+2y} = 2^{-1} \Rightarrow x + 2y = -1$ (I)
- $7^{x+y} = 1 \Rightarrow 7^{x+y} = 7^0 \Rightarrow x + y = 0$ (II)

Agora, resolveremos o sistema das equações (I) e (II):

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = -1$$

Portanto, $S = \{(1, -1)\}$.

Observação

Note que a solução do sistema é o par ordenado $(1, -1)$, em que $x = 1$ e $y = -1$, e não os números 1 e -1.

R9. Determinar o ponto de intersecção dos gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{2^{x+1}}$ e $g(x) = 4^{x+1}$ em $\mathbb{R}$.

▶ Resolução

Para que os gráficos tenham um ponto em comum, deve existir pelo menos um valor de x tal que as imagens desse valor pelas duas funções coincidam, ou seja, $f(x) = g(x)$. Assim:

$$\frac{1}{2^{x+1}} = 4^{x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \left(2^2\right)^{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2^{-1}\right)^{x+1} = 2^{2x+2} \Rightarrow 2^{-x-1} = 2^{2x+2}$$

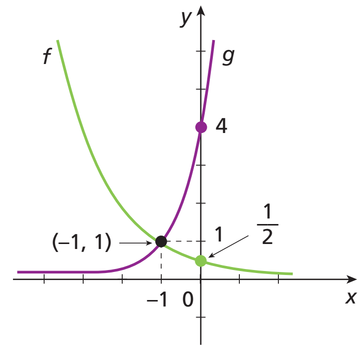
Portanto: $-x - 1 = 2x + 2 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$

Para $x = -1$, temos:

$f(-1) = g(-1) = 4^{-1+1} = 4^0 = 1$

Logo, o ponto de intersecção é $(-1, 1)$.

Para visualizar esse ponto no plano cartesiano, podemos construir os gráficos das funções:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

29. Porque, para todo $a > 0$ e todo x real, temos $a^x > 0$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

26. Dê o conjunto solução em $\mathbb{R}$ das equações a seguir.

a. $10^x = 1.000$ **26 a.** $S = \{3\}$

b. $(0,1)^{2x} = 10$ **26 b.** $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

c. $(0,001)^x = 1.000$ **26 c.** $S = \{-1\}$

d. $\left(\frac{1}{100}\right)^{2x} = 0,0001$ **26 d.** $S = \{1\}$

27. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais.

a. $2^x = 64$ **27 a.** $S = \{6\}$

b. $(0,5)^x = 4^{(1-3x)}$ **27 b.** $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

c. $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x = \frac{1}{128}$ **27 c.** $S = \{14\}$

d. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-10} = \frac{1}{729}$ **27 d.** $S = \{-4, 4\}$

e. $3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x = -1$ **27 e.** $S = \{-1, 0\}$

f. $11^{2x} + 2 \cdot 11^x = 3$ **27 f.** $S = \{0\}$

28. Entre quais números inteiros consecutivos está x para que $2^x = 20$? **28.** Como $2^4 < 20 < 2^5$, temos $4 < x < 5$.

29. ARGUMENTAÇÃO Sejam $a, b, x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $b < 0$. Por que não existe x real que satisfaça a equação $a^x = b$?

30. Dada a equação $2^x = 7$, podemos determinar entre quais números inteiros consecutivos está sua solução. Basta observar que $4 < 2^x < 8$, ou seja, $2^2 < 2^x < 2^3$. Como potências de base 2 crescem quando crescem seus expoentes, e vice-versa, concluímos que $2 < x < 3$, isto é, a solução está entre 2 e 3.

Agora, indique entre quais números inteiros consecutivos está a solução de cada equação.

a. $2^x = 14$ **30 a.** $3 < x < 4$

b. $3^x = 29$ **30 b.** $3 < x < 4$

c. $3^{x+1} = 10$ **30 c.** $1 < x < 2$

d. $2^{x-1} = 100$ **30 d.** $7 < x < 8$

31. **(UFAM – 2022)** O número de refeições servidas ao mês por determinado restaurante, em certo ano, pode ser descrito aproximadamente pela função $f(x) = 3.000 \cdot (1,2)^{x-2}$, em que x representa o mês do ano (para janeiro, por exemplo, $x = 1$). A quantidade de refeições, aproximadamente, que foram servidas por esse restaurante em abril, foi de: **31.** Alternativa **c.**

a. 2.840 refeições.

b. 3.280 refeições.

c. 4.320 refeições.

d. 5.430 refeições.

e. 6.360 refeições.

32. Resolva os sistemas de equações exponenciais a seguir considerando que x e y são números reais.

a. $\begin{cases} 2^{2x+y} = 4 \\ 2^{x-y} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$ **32 a.** $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

b. $\begin{cases} 3^{x+y} = 3^{-2} \\ 7^{2x} : 7^y = 1 \end{cases}$ **32 b.** $S = \left\{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$

33. Certa substância se decompõe segundo a lei $m(t) = k \cdot 2^{-0,5t}$, em que k é uma constante, t indica a medida de tempo em minuto e $m(t)$ é a medida de massa da substância em grama no instante t.

a. Sabendo que no instante inicial ($t = 0$) há 2.048 gramas, qual é o valor de k? **33 a.** $k = 2.048$

b. A medida de massa dessa substância decai para 512 gramas após quantos minutos? **33 b.** 4 minutos

34. Uma das raízes reais da equação $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$ é $x = 1$. A outra raiz é: **34.** Alternativa **c.**

a. -1

b. 0

c. 2

d. 3

e. 6

35. **(PUC Goiás – 2023)** A quantidade de um líquido num recipiente varia de acordo com a equação $Q(x) = K \cdot 2^{-0,1x}$, em que x representa o tempo em meses.

Nessas condições, marque a única alternativa que apresenta corretamente o tempo necessário para que o volume desse líquido se reduza à metade: **35.** Alternativa **d.**

a. 9 meses.

b. 8 meses.

c. 7 meses.

d. 10 meses.

36. Determine o ponto de intersecção dos gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{9^{x-1}}$ e $g(x) = 3^{x+1}$ em $\mathbb{R}$. **36.** $\left(\frac{1}{3}, 3\sqrt[3]{3}\right)$

Inequações exponenciais

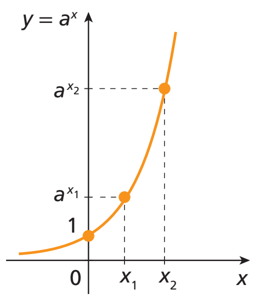
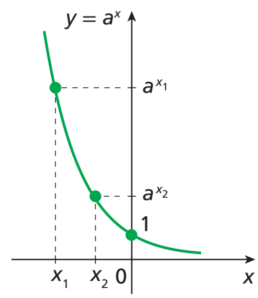
Inequações que têm a incógnita em pelo menos um expoente são chamadas de **inequações exponenciais**.

Considere os exemplos.

a. $3^x < 27$ **b.** $2^{-3x} \geqslant \sqrt{5}$ **c.** $\left(\frac{1}{7}\right)^x > 7^3$ **d.** $8^{x+6} \leqslant \left(\frac{1}{16}\right)^{-x} + 2^x$

Dependendo do valor da base *a*, uma função exponencial pode ser crescente ou decrescente.

Crescimento e decrescimento de uma função do tipo $y = a^x$

Função crescente ($a > 1$)	Função decrescente ($0 < a < 1$)
	
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} < a^{x_1}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Dessa maneira, podemos obter as conclusões a seguir.

- Quando a base da potência é maior que 1, o sentido da desigualdade se mantém entre os expoentes. Ou seja, para $\boldsymbol{a > 1}$, temos:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow x_2 > x_1$$

sentido da desigualdade mantido

- Quando a base da potência está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre as potências se inverte entre os expoentes. Ou seja, para $\boldsymbol{0 < a < 1}$, temos:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow x_2 < x_1$$

sentido da desigualdade invertido

Sempre que for possível escrever ambos os membros de uma inequação exponencial como potências de mesma base, poderemos resolvê-la usando alguma dessas relações.

Observação

Analogamente, temos as seguintes conclusões.

- Se $a > 1$, então: $a^{x_2} \geqslant a^{x_1} \Rightarrow$ $\Rightarrow x_2 \geqslant x_1$
- Se $0 < a < 1$, então: $a^{x_2} \geqslant a^{x_1} \Rightarrow$ $\Rightarrow x_2 \leqslant x_1$

Atividades resolvidas

R10. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação exponencial $5^{x+12} < 25$.

▸ Resolução

$5^{x+12} < 25 \Rightarrow 5^{x+12} < 5^2$

Como a base 5 é maior do que 1, temos:

$x + 12 < 2 \Rightarrow x < -10$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -10\}$.

R11. Determinar, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8$$

▸ Resolução

Como $0 < \frac{1}{8} < 1$, temos:

$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8 \Rightarrow x + 3 \geqslant 8 \Rightarrow x \geqslant 5$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$.

Outro modo:

Note que, aplicando as propriedades de potências, também poderíamos trabalhar com uma inequação com base maior que 1:

$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8 \Rightarrow 8^{-(x+3)} \leqslant 8^{-8} \Rightarrow$

$\Rightarrow -(x+3) \leqslant -8 \Rightarrow x \geqslant 5$

R12. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+5x} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

▶ **Resolução**

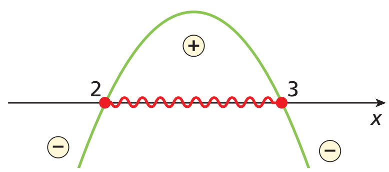
Como a base é um número entre 0 e 1, temos:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+5x} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^6 \Rightarrow -x^2 + 5x \geqslant 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$

Resolvendo a equação $-x^2 + 5x - 6 = 0$, obtemos $x = 2$ ou $x = 3$.

Então, para $-x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$, temos o intervalo indicado:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$.

R13. Determinar, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $2^x < 2^3 < 2^{2x}$.

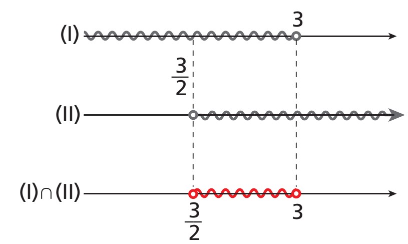
▶ **Resolução**

Esse tipo de inequação é conhecido como **inequação exponencial dupla**, por ter mais de uma desigualdade na mesma sentença.

Dessa maneira, estudam-se os dois casos separadamente.

- $2^x < 2^3 \Rightarrow x < 3$ (I)
- $2^3 < 2^{2x} \Rightarrow 3 < 2x \Rightarrow x > \frac{3}{2}$ (II)

As duas desigualdades devem ser simultaneamente satisfeitas: $x < 3$ e $x > \frac{3}{2}$



Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 3\right\}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

37. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais.

a. $6^{x^2+1} < 6^5$ **37 a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

b. $\frac{1}{9} \geqslant 3^{x+3}$ **37 b.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

c. $(0{,}44)^{x^2-4} \leqslant 1$ **37 c.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

d. $\sqrt[3]{3^x} > 3^x \cdot 3^8$ **37 d.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -12\}$

38. Identifique o domínio das funções f e g.

a. $f(x) = \sqrt{3^x - 243}$ **38 a.** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$

b. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2^x}}$ **38 b.** $D(g) = \mathbb{R}$

39. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações a seguir.

a. $2 \leqslant 2^x \leqslant 2^3$ **39 a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$

b. $\frac{1}{81} < 81^{x-1} < 9^x$ **39 b.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

40. EM DUPLA Com um colega, a partir da resposta da **atividade resolvida R12**, determinem, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+5x} > \left(\frac{2}{3}\right)^6$ **40.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

41. Em um mesmo plano cartesiano, trace os gráficos das funções f e g, tal que $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 8$. Em seguida, com base nos gráficos, resolva a equação e as inequações a seguir em $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = g(x)$

b. $f(x) > g(x)$

c. $f(x) \leqslant g(x)$

41. Gráficos no *Suplemento para o professor*.
41 a. $S = \{3\}$
41 b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
41 c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

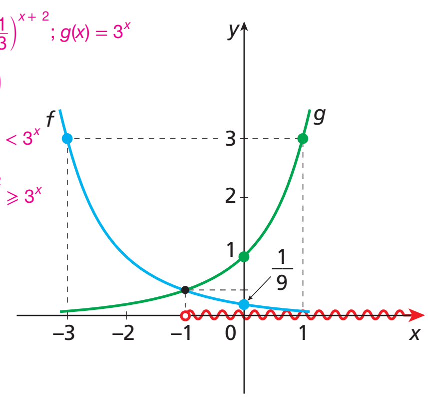
42. Observe os gráficos das funções f e g, tal que g é uma função exponencial e f é uma função obtida a partir da exponencial, do tipo $f(x) = a^{x+k}$, em que k é um número inteiro.

42 a. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$; $g(x) = 3^x$

42 b. $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

42 c. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$

42 d. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geqslant 3^x$



a. Quais são as leis de formação das funções representadas na figura?

b. Qual é o ponto de intersecção dos gráficos das funções?

c. Escreva uma inequação exponencial, usando as leis das funções f e g, cuja solução seja o intervalo de x destacado no plano cartesiano.

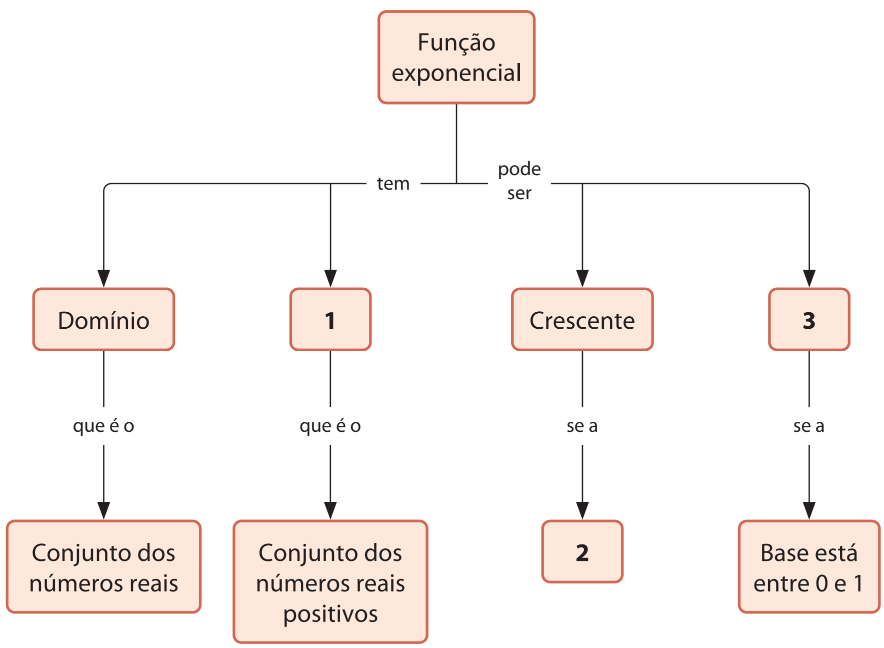
d. Escreva uma inequação cuja solução seja o complementar do intervalo de x destacado no plano cartesiano.

43. *SOFTWARE* Se possível, use um *software* de construção de gráficos para determinar o conjunto solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 1$ em $\mathbb{R}$. **43.** Gráficos no *Suplemento para o professor*; $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Conexões entre conceitos. A – 3; B – 1; C – 2.

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

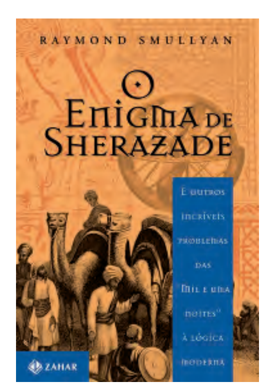
A. Decrescente
B. Imagem
C. Base maior que 1

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro

O enigma de Sherazade: e outros incríveis problemas das "Mil e uma noites" à lógica moderna

Raymond Smullyan
Rio de Janeiro: Zahar, 1998.



REPRODUÇÃO/EDITORA ZAHAR

Nessa obra, o autor coloca Sherazade, famosa personagem que narra os contos das **Mil e uma noites**, no centro de narrativas que relatam enigmas, quebra-cabeças e problemas de lógica que envolvem o leitor. O livro propõe charadas matemáticas, adivinhações, enigmas e exercícios de verdade e mentira, cuja solução exige raciocínio lógico e estratégias que surpreendem o leitor desde a primeira página. Uma leitura original e cativante para todos os leitores.

Software

Desmos

Desmos é uma calculadora gráfica que pode ser usada *on-line* e que possibilita ao usuário representar, de forma simples e intuitiva, gráficos de diferentes tipos de função, inclusive de funções exponenciais ou de funções obtidas a partir de funções exponenciais.

Disponível em: https://www.desmos.com/calculator. Acesso em: 13 ago. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Pode-se afirmar que $\frac{(\sqrt{7})^8}{(\sqrt{7})^6}$ é igual a: **Q1.** Alternativa **a.**

a. 7
b. $(\sqrt{7})^{14}$
c. $(\sqrt{7})^{\frac{4}{3}}$
d. $(\sqrt{7})^{48}$

Q2. O inverso de $3^{\frac{1}{2}}$ é: **Q2.** Alternativa **c.**

a. $\frac{1}{3}$
b. $\sqrt{3}$
c. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
d. $\frac{1}{3^{-\frac{1}{2}}}$

Q3. Após racionalizar a expressão $\frac{2}{\sqrt{8}}$, obtém-se: **Q3.** Alternativa **c.**

a. $2\sqrt{4}$
b. $\frac{\sqrt{8}}{2}$
c. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d. $\frac{\sqrt{8}}{8}$

Q4. A sentença ______ **não** é a lei de formação de uma função exponencial. **Q4.** Alternativa **c.**

a. $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$
b. $g(x) = (\sqrt{2})^x$
c. $h(x) = \frac{1^x}{5}$
d. $i\,(x) = (0{,}3)^x$

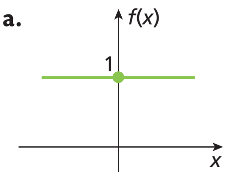
Q5. O gráfico da função exponencial dada por $f(x) = a^x$, com a real, $a > 0$ e $a \neq 1$, para todo x real, passa pelo ponto: **Q5.** Alternativa **d.**

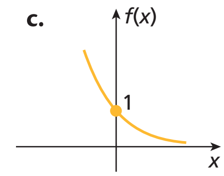
a. (0, 0)
b. (1, 0)
c. (0, –1)
d. (0, 1)

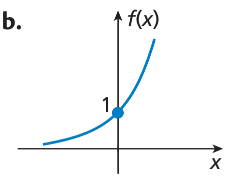
Q6. A função exponencial dada por $f(x) = (\sqrt{11})^x$ é: **Q6.** Alternativa **d.**

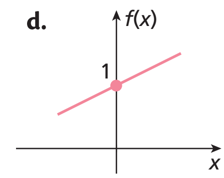
a. decrescente.
b. nula.
c. constante.
d. crescente.

Q7. A função f, tal que $f(x) = \pi^x$, pode ser representada pelo gráfico: **Q7.** Alternativa **b.**

a.


c.


b.


d.


Q8. No início deste século, a população da Índia girava em torno de 1,029 bilhão de habitantes. Supondo que ela cresça 20% a cada década, em 2031, essa população será de aproximadamente: **Q8.** Alternativa **d.**

a. 1,235 bilhão de habitantes.
b. 1,482 bilhão de habitantes.
c. 1,5 bilhão de habitantes.
d. 1,778 bilhão de habitantes.

Q9. Na equação $5^{-x} = 125$ definida em $\mathbb{R}$, o valor de x é: **Q9.** Alternativa **b.**

a. 3
b. –3
c. –1
d. 0,3

Q10. Se $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x+5} \geqslant \left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}$ em $\mathbb{R}$, então temos que: **Q10.** Alternativa **a.**

a. $x \leqslant -6$
b. $x \geqslant 6$
c. $x \leqslant 6$
d. $x \geqslant -6$

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Efetuar as operações de potenciação e radiciação.	X	X	X							
Identificar uma função exponencial.				X						
Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial.					X	X	X			
Resolver situações-problema que envolvam funções exponenciais.								X		
Resolver equações, sistemas e inequações exponenciais.									X	X

Capítulo 7

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS

Ecoturistas observando céu estrelado em Aquidauana (MS). Foto de 2021.

Hiparco de Niceia (c. 180 a.C.-125 a.C.), astrônomo e matemático grego, catalogou aproximadamente 850 estrelas visíveis a olho nu. De sua época aos dias atuais, o mundo passou por muitas transformações. Atualmente, graças aos avanços científicos e tecnológicos, é possível estimar que só na Via Láctea, galáxia do nosso Sistema Solar, existam centenas de bilhões de estrelas; no Universo, há outra centena de bilhões de galáxias, cada uma contendo outras centenas de bilhões de estrelas.

LEBRECHT HISTORY/BRIDGEMAN IMAGES/ FOTOARENA - COLEÇÃO PARTICULAR

Observatório de Alexandria na época de Hiparco de Niceia (c. 180 a.C.-125 a.C.).

ATENÇÃO! AS IMAGENS ESTÃO REPRESENTADAS SEM PROPORÇÃO ENTRE ELAS.

SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Retrato do astrônomo inglês Norman Robert Pogson (1829-1891).

Hiparco determinou uma grandeza para especificar o brilho aparente das estrelas e dividiu-a em uma escala com seis categorias, sendo a categoria 1 para as estrelas mais brilhantes e a categoria 6 para as que tinham menor brilho. Tempos depois, essa grandeza veio a ser chamada de **magnitude**.

Em 1856, o astrônomo inglês Norman Robert Pogson (1829-1891), considerando o fato de que as estrelas da 1ª categoria, na escala usada por Hiparco, eram aproximadamente 100 vezes mais brilhantes do que as estrelas da 6ª categoria, propôs uma expressão matemática com base em **logaritmos** para determinar a magnitude de uma estrela.

Nessa definição, o Sol é classificado com magnitude medindo −26,7 (estrela de maior brilho a olho nu), e a estrela Vega, com magnitude de medida zero. (Vega é usada como referência na obtenção da medida da magnitude de outras estrelas.) Com esses dois exemplos, pode-se perceber que, quanto menor for a medida de magnitude de uma estrela, maior será seu brilho aparente.

Fontes: elaborado com base em ALMEIDA, Guilherme de. **Norman Robert Pogson e a escala de magnitudes estelares**. [*S. l.*: *s. n.*], [2011]. Disponível em: https://www.uc.pt/iii/romuloccv/recursos_multimedia/artigos_apresentacoes_cientificas/docs/NormanPogson.pdf. Acesso em: 23 abr. 2024; EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. São Paulo: Ed. da Unicamp, 2004. p. 202.

Logaritmo

No capítulo anterior, vimos diversas situações que apresentam comportamento exponencial. Agora, estudaremos aquelas que podem ser modeladas pela sua função inversa, a **função logarítmica**. Inicialmente, vamos entender o que significa **logaritmo**.

Acompanhe a situação a seguir.

Determinada bactéria divide-se ao meio a cada hora, conforme indica o quadro a seguir.

Relação entre a medida do tempo e o número de bactérias

Medida de tempo (t)	0	1	2	3	4
Número de bactérias (n)	1	2	4	8	16

Analisando os dados, concluímos que o número n de bactérias em função da medida de tempo em horas pode ser descrito por: $n = 2^t$

Com base nessas informações, podemos responder às seguintes perguntas:

a. Quantas bactérias haverá após 10 horas?

Antes de explorar os cálculos com os estudantes, dê um tempo para que eles tentem responder à questão utilizando suas estratégias pessoais. Depois, reserve um momento para discutir as estratégias.

Essa é uma pergunta que envolve potenciação, e a resposta é:

$n = 2^t$

$n = 2^{10}$

$n = 1.024$

Logo, haverá 1.024 bactérias.

b. Em quantas horas haverá 1.024 bactérias?

Essa é uma pergunta que envolve logaritmo, pois, para respondê-la, devemos encontrar o valor do **expoente** t na equação: $1.024 = 2^t$

O valor de t é 10, pois $2^{10} = 1.024$, isto é, teremos 1.024 bactérias após 10 horas.

Dizemos que 10 é o **logaritmo** de 1.024 na **base** 2. Representamos assim:

$10 = \log_2 1.024$ ou $\log_2 1.024 = 10$

Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, o **logaritmo de b na base a** é o número real x tal que $a^x = b$. Ou seja:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

O número b é conhecido por **logaritmando**.

$\log_a b$ existe quando ocorrem as condições $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq 1$, chamadas condições de existência.

Considere os exemplos.

a. $\log_6 36 = 2$, pois $6^2 = 36$.

b. $\log_2 0{,}5 = -1$, pois $2^{-1} = 0{,}5$.

c. $\log_{10} 1 = 0$, pois $10^0 = 1$.

d. $\log_{\sqrt[3]{12}} 12 = 3$, pois $\left(\sqrt[3]{12}\right)^3 = 12$.

Observação

Sempre que a base é omitida, subentende-se que o logaritmo tem base 10, ou seja, $\log_{10} b = x$ pode ser escrito também como $\log b = x$. Por exemplo:

a. $\log 1.000 = 3$, pois $10^3 = 1.000$.

b. $\log 0{,}01 = -2$, pois $10^{-2} = 0{,}01$.

Atividades resolvidas

R1. Calcular os valores de:

a. $\log_2 32$

b. $\log 0{,}001$

▸ Resolução

Podemos encontrar esses valores mentalmente.

a. Para descobrir o valor do logaritmo, nos perguntamos: "O número 2 elevado a qual expoente resulta em 32?".
A resposta é 5, pois $2^5 = 32$.
Portanto, $\log_2 32 = 5$.

b. Como a base não está escrita, subentendemos que ela vale 10. Então, nos perguntamos: "O número 10 elevado a qual expoente resulta em 0,001?".
A resposta é -3, pois:

$$10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \left(\frac{1}{1.000}\right) = 0{,}001$$

Portanto, $\log 0{,}001 = -3$.

Outro modo:

Também podemos encontrar esses valores algebricamente. Para isso, vamos indicar o valor desconhecido por x.

a. Seja $\log_2 32 = x$. Então, pela definição de logaritmo:
$2^x = 32$
Escrevendo os dois membros na mesma base, temos:
$2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$
Ou seja, $\log_2 32 = 5$.

b. $\log 0{,}001 = x \Rightarrow \log_{10} 0{,}001 = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 10^x = 0{,}001 \Rightarrow 10^x = \frac{1}{1.000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^x = \left(\frac{1}{10}\right)^3 \Rightarrow 10^x = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$$

Ou seja, $\log 0{,}001 = -3$.

R2. Determinar o valor de $\log_{\frac{1}{8}} (\sqrt{2})^3$.

▸ Resolução

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$\log_{\frac{1}{8}} (\sqrt{2})^3 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^x = (\sqrt{2})^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2^3}\right)^x = \sqrt{2^3} \Rightarrow (2^{-3})^x = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{-3x} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Logo: $\log_{\frac{1}{8}} (\sqrt{2})^3 = -\frac{1}{2}$

R3. Verificar entre quais números inteiros está $\log_4 20$.

▸ Resolução

Sendo $\log_4 20 = x$, temos: $4^x = 20$
Sabemos que $4^2 = 16$ e $4^3 = 64$.
Então: $4^2 < 20 < 4^3$, ou seja, $4^2 < 4^x < 4^3$.
Logo: $2 < x < 3$
Portanto, $\log_4 20$ está entre 2 e 3.

R4. Calcular quanto vale k se $\log_k 81 = 4$.

▸ Resolução

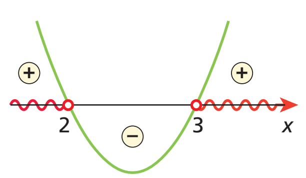
Primeiro, observamos as restrições. Pela definição de logaritmo, para a base, devemos ter $k > 0$ e $k \neq 1$.
$\log_k 81 = 4 \Rightarrow k^4 = 81 \Rightarrow k = 3$ ou $k = -3$ (-3 não serve em razão das condições de existência)
Logo, k vale 3.

R5. Calcular para que valores reais de x existe $\log_{x-2} (x^2 - 5x + 6)$.

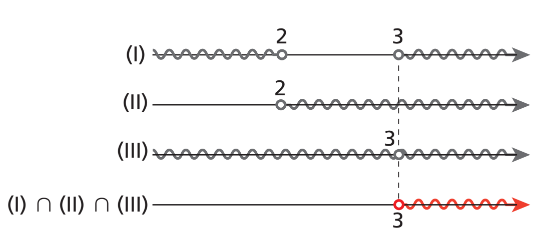
▸ Resolução

Para que exista o logaritmo indicado, devemos impor as seguintes condições:

- para o logaritmando:
$x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x < 2$ ou $x > 3$ (I)



- para a base: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ (II)
- para a base: $x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$ (III)



Como as três condições devem ocorrer: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Calcule mentalmente e depois registre o resultado.

a. $\log_5 125$ **1 a.** 3

b. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$ **1 b.** 4

c. $\log_2 \frac{1}{16}$ **1 c.** –4

d. $\log 1.000$ **1 d.** 3

2. Entre quais números inteiros estão os logaritmos a seguir?

a. $\log 560$ **2 a.** Entre 2 e 3.

b. $\log_5 3$ **2 b.** Entre 0 e 1.

3. Entre quais números inteiros está $\log_3 10$? **3.** Entre 2 e 3.

4. Calcule, aplicando a definição de logaritmo.

a. $\log_{\sqrt{2}} 2$ **4 a.** 2

b. $\log 0,1$ **4 b.** –1

c. $\log_{\frac{1}{4}} 16$ **4 c.** –2

d. $\log_2 \sqrt{128}$ **4 d.** $\frac{7}{2}$

5. Se $A = \log_7 7$, $B = \log_{76} 1$, $C = \log_{0,5} 8$ e $D = \log_8 8^{-2}$, determine $B^A + C \cdot D$. **5.** 6

6. Aplicando a definição de logaritmo, calcule o valor de m nas expressões a seguir.

a. $\log (2m - 5) = 3$ **6 a.** 502,5

b. $\log (m - 9) = -2$ **6 b.** 9,01

c. $\log_2 (5 - m) = 0$ **6 c.** 4

d. $\log_m 0,1 = -1$ **6 d.** 10

7. Determine os possíveis valores de x para que exista:

a. $\log_x 5$ **7 a.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$

b. $\log_2 (3x + 5)$ **7 b.** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{3}\right\}$

c. $\log_5 (x^2 - 2x + 1)$ **7 c.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

8. Nas igualdades a seguir, aparecem expressões que não respeitam as restrições da definição de logaritmo. Tente calcular x em cada uma delas e veja o que acontece.

8. Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. logaritmando não positivo:

$\log_5 (-25) = x$; $\log_2 0 = x$

b. base igual a 1:

$\log_1 10 = x$

c. base não positiva:

$\log_0 2 = x$; $\log_{-1} 6 = x$

Propriedades que são consequências da definição de logaritmo

Satisfeitas as condições de existência de um logaritmo, temos:

1ª Propriedade: $\log_a 1 = 0$

Pois $\log_a 1 = x \Leftrightarrow a^x = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^x = a^0 \Leftrightarrow x = 0$.

Exemplo: $\log_7 1 = 0$

2ª Propriedade: $\log_a a = 1$

Pois $\log_a a = x \Leftrightarrow a^x = a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^x = a^1 \Leftrightarrow x = 1$.

Exemplo: $\log_6 6 = 1$

3ª Propriedade: $\log_a a^m = m$

Pois $\log_a a^m = x \Leftrightarrow a^x = a^m \Leftrightarrow x = m$.

Exemplo: $\log_3 3^5 = 5$

4ª Propriedade: $a^{\log_a b} = b$

Pois, fazendo $\log_a b = x$, temos: $a^x = b$.
Substituindo x por $\log_a b$ em $a^x = b$, obtemos: $a^{\log_a b} = b$.

Exemplo: $2^{\log_2 9} = 9$

5ª Propriedade: $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Pois, considerando $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, temos: $a^x = b$ e $a^y = c$.

Se $b = c$, temos: $a^x = a^y \Rightarrow x = y \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_a b = \log_a c$.

Se $\log_a b = \log_a c$, temos: $x = y \Rightarrow$
$\Rightarrow a^x = a^y \Rightarrow b = c$.

Exemplo: $\log_4 z = \log_4 8 \Leftrightarrow z = 8$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

9. Com base nas propriedades estudadas, calcule o valor das expressões a seguir.

a. $\log_{11} 11$ **9 a.** 1

b. $\log_{32} 1$ **9 b.** 0

c. $\log_6 6^7$ **9 c.** 7

d. $\log 100$ **9 d.** 2

e. $15^{\log_{15} 16}$ **9 e.** 16

f. $\log_3 \sqrt{81}$ **9 f.** 2

10. Determine os valores desconhecidos de:

a. $\log_7 b = 1$ **10 a.** 7

b. $\log_8 x = \log_8 \left(\frac{2}{3}\right)$ **10 b.** $\frac{2}{3}$

c. $3^{\log_3 2} = n$ **10 c.** 2

d. $\log x^2 = \log 9$ **10 d.** 3 ou –3

e. $y = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{81}$ **10 e.** –2

f. $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[6]{5} = k$ **10 f.** $\frac{1}{3}$

11. Determine o valor das expressões a seguir.

a. $(\log_5 10)^{\log_3 1}$ **11 a.** 1

b. $(\log_{64} 64)^{\log_3 2}$ **11 b.** 1

c. $\log (\log 10^{10})$ **11 c.** 1

d. $(\log 0,01) \cdot (\log 100)$ **11 d.** –4

e. $(\log_3 1) \cdot (\log_5 20)$ **11 e.** 0

f. $(\log_{11} 121) \cdot (\log_{13} 169)$ **11 f.** 4

12. O pH de uma solução indica se ela é ácida (pH < 7) ou básica (pH > 7) e é dado pela fórmula pH $= -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração de íons H^+ na solução, em mol/L. Uma solução com concentração de 10^{-3} mol/L de íons H^+ é ácida ou básica? **12.** Ácida.

13. Considerando a fórmula da atividade anterior, se o pH de uma substância é igual a 9, qual é a concentração de H^+ em mol/L? **13.** 10^{-9}

14. ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS | EM DUPLA Reescreva a **atividade 12** substituindo o valor da concentração em mol/L de íons H^+ de modo que a solução torne-se básica. Peça a um colega que resolva a atividade reescrita por você. Resolva a atividade de seu colega. **14.** Resposta pessoal.

Propriedades operatórias dos logaritmos

Logaritmo de um produto

O logaritmo do produto de dois números positivos, em uma base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números na base a.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Observe:

$$\log_3 (3 \cdot 9) = \log_3 (3^1 \cdot 3^2) = \log_3 3^{1+2} = 1 + 2 = \log_3 3 + \log_3 3^2 = \log_3 3 + \log_3 9$$

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

(II) $\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$

(III) $\log_a (b \cdot c) = z \Leftrightarrow a^z = b \cdot c$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$a^z = b \cdot c \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y \Rightarrow \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Observe os exemplos.

a. $\log_5 (25 \cdot 625) = \log_5 25 + \log_5 625 = \log_5 5^2 + \log_5 5^4 = 2 + 4 = 6$

b. $\log 500 = \log (100 \cdot 5) = \log 100 + \log 5 = 2 + \log 5$

Logaritmo de um quociente

O logaritmo do quociente de dois números positivos, em uma base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é igual à diferença dos logaritmos de cada um desses números na base a.

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Observe:

$$\log_3 \left(\frac{3}{9}\right) = \log_3 \left(\frac{3^1}{3^2}\right) = \log_3 3^{1-2} = 1 - 2 = \log_3 3 - \log_3 3^2 = \log_3 3 - \log_3 9$$

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

(II) $\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$

(III) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z \Leftrightarrow a^z = \frac{b}{c}$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$a^z = \frac{b}{c} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y \Rightarrow \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

Observe os exemplos.

a. $\log_5 \left(\frac{125}{625}\right) = \log_5 125 - \log_5 625 = \log_5 5^3 - \log_5 5^4 = 3 - 4 = -1$

b. $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = \log_4 1 - \log_4 16 = \log_4 1 - \log_4 4^2 = 0 - 2 = -2$

Observação

Note que:

$\frac{125}{625} = \frac{1}{5}$.

Aplicando o logaritmo de um quociente, temos:

$\log_5\left(\frac{1}{5}\right) =$

$= \log_5 1 - \log_5 5 =$

$= 0 - 1 = -1$

Logaritmo de uma potência

O logaritmo de uma potência em uma base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é igual ao produto do expoente da potência pelo logaritmo da base da potência.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Observe:

$\log_5 4^3 = \log_5 (4 \cdot 4 \cdot 4) = \log_5 4 + \log_5 4 + \log_5 4 = 3 \cdot \log_5 4$

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

(II) $\log_a b^n = y \Leftrightarrow a^y = b^n$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$a^y = b^n$

$a^y = (a^x)^n$

$a^y = a^{x \cdot n}$

$y = n \cdot x$

$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Observe os exemplos.

a. $\log_5 5^8 = 8 \cdot \log_5 5 = 8 \cdot 1 = 8$

b. $\log_2 \sqrt{3} = \log_2 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 3$

Observações

- $(\log_a b)^n = \log_a^n b$
- $\log_a^n b \neq \log_a b^n$

Por exemplo:

(I) $\log_5^2 3 =$
$= (\log_5 3) \cdot (\log_5 3)$

(II) $\log_5 3^2 =$
$= 2 \cdot \log_5 3$

Observe que (I) é diferente de (II).

Atividades resolvidas

R6. Aplicando as propriedades operatórias, reescrever os logaritmos a seguir na forma de uma adição e/ou subtração.

a. $\log (3^2 \cdot 5^3)$

b. $\log \left(\frac{2^3 \cdot 3}{5^2 \cdot 7}\right)$

▶ **Resolução**

a. $\log (3^2 \cdot 5^3) = \log 3^2 + \log 5^3 = 2 \cdot \log 3 + 3 \cdot \log 5$

b. $\log \left(\frac{2^3 \cdot 3}{5^2 \cdot 7}\right) = \log (2^3 \cdot 3) - \log (5^2 \cdot 7) =$

$= \log 2^3 + \log 3 - (\log 5^2 + \log 7) =$

$= 3 \cdot \log 2 + \log 3 - 2 \cdot \log 5 - \log 7$

R7. Dado $\log 2 \simeq 0{,}3$, obter o valor aproximado de:

a. $\log 5$

b. $\log 20$

c. $\log \sqrt{5}$

▶ **Resolução**

a. $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \simeq 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

b. $\log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 \simeq 0{,}3 + 1 = 1{,}3$

c. $\log \sqrt{5} = \log 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 5 \simeq \frac{1}{2} \cdot 0{,}7 = 0{,}35$

Pelo **item a**, $\log 5 \simeq 0{,}7$

R8. Utilizando as propriedades, simplificar a expressão: $\log 50 + \log 20 - \log 8$

▶ **Resolução**

$\log 50 + \log 20 - \log 8 = \log (2 \cdot 5^2) + \log (2^2 \cdot 5) - \log 2^3 =$

$= \log 2 + \log 5^2 + \log 2^2 + \log 5 - \log 2^3 =$

$= \cancel{\log 2} + 2 \cdot \log 5 + \cancel{2 \cdot \log 2} + \log 5 - \cancel{3 \cdot \log 2} = 3 \cdot \log 5$

17 a. $\log_a b + \log_a c + \log_a d$ 17 b. $\log_a 2 + \log_a k - \log_a d$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

15. Aplicando as propriedades estudadas, simplifique ao máximo cada um dos itens.

a. $\log_2 (64 \cdot 13)$ **15 a.** $6 + \log_2 13$

b. $\log_{\sqrt{2}} (2 \cdot 3)$ **15 b.** $2 + \log_{\sqrt{2}} 3$

c. $\log_3 (13 \cdot 3)$ **15 c.** $\log_3 13 + 1$

d. $\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{16}\right)^9$ **15 d.** 18

e. $\log \left(\frac{1}{10}\right)^{19}$ **15 e.** -19

f. $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{26}{32}\right)$ **15 f.** $\log_{\frac{1}{2}} 13 + 4$

16. Utilizando as propriedades dos logaritmos, determine o valor de *A*.

a. $A = \log 30 + \log 7 - \log 21$ **16 a.** 1

b. $A = \log_2 100 - \log_2 25$ **16 b.** 2

17. Admitindo satisfeitas as condições de existência, desenvolva as expressões a seguir, aplicando as propriedades dos logaritmos.

a. $\log_a (b \cdot c \cdot d)$

b. $\log_a \left(\frac{2 \cdot k}{d}\right)$

c. $\log_a a^{-n}$ **17 c.** $-n$

d. $\log_a \left(\frac{1}{y}\right)$ **17 d.** $-\log_a y$

18. Calcule os logaritmos a seguir sabendo que $\log_{12} 3 \simeq 0{,}442$ e $\log_{12} 2 \simeq 0{,}279$.

a. $\log_{12} \left(\frac{3}{4}\right)$ **18 a.** $\simeq -0{,}116$

b. $\log_{12} 6$ **18 b.** $\simeq 0{,}721$

19. Considerando $\log 3 = 0{,}477$, $\log 5 = 0{,}699$ e $\log_2 5 = 2{,}322$, calcule:

a. $\log 15$ **19 a.** 1,176

b. $\log 45$ **19 b.** 1,653

c. $\log \left(\frac{5}{3}\right)$ **19 c.** 0,222

d. $\log 0{,}6$ **19 d.** $-0{,}222$

e. $\log_2 20$ **19 e.** 4,322

f. $\log_2 25$ **19 f.** 4,644

20. Vimos que o pH de uma solução é dado pela fórmula $pH = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração de íons H^+ na solução, em mol/L. Qual é o pH de uma solução com concentração de $3{,}8 \cdot 10^{-5}$ mol/L de íons H^+? **20.** $\simeq 4{,}42$

(*Dado*: $\log 3{,}8 \simeq 0{,}58$)

21. O pH do sangue dos seres humanos, em condições normais, é 7,4 (levemente básico). Algumas alterações, como certas doenças, podem modificar esse valor. Pode-se calcular o pH do sangue pela equação de Henderson-Hasselbalch, dada por $pH = 6{,}1 + \log \left(\frac{B}{C}\right)$, em que *B* representa a concentração de bicarbonato, a substância básica (ou alcalina), em mmol/L, e *C* representa a concentração de ácido carbônico, a substância ácida, em mmol/L. Calcule o pH do sangue de uma pessoa cuja concentração de bicarbonato é 25 mmol/L e de ácido carbônico é 2 mmol/L. **21.** $\simeq 7{,}197$

(*Dados*: $\log 5 \simeq 0{,}699$ e $\log 2 \simeq 0{,}301$)

(mmol/L significa milimol por litro.)

Mudança de base

Se você observar com atenção, verá que algumas calculadoras científicas têm a tecla log. Essa tecla calcula logaritmos na base 10. Se, em uma calculadora como a da imagem, apertarmos a tecla log e, em seguida, digitarmos o número 100, aparecerá o número 2, que é o resultado de log 100. Em calculadoras como essa, se quisermos calcular logaritmos em bases diferentes de 10, teremos de usar a propriedade de mudança de base, enunciada a seguir.

Se *a*, *b* e *c* são números reais positivos, com $a \neq 1$ e $c \neq 1$, então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_c b = x \Leftrightarrow c^x = b$ (II) $\log_c a = y \Leftrightarrow c^y = a$ (III) $\log_a b = z \Leftrightarrow a^z = b$

Pelas sentenças (I) e (III), temos $a^z = c^x$. Substituindo (II) nessa expressão, obtemos:

$$a^z = c^x \Rightarrow (c^y)^z = c^x \Rightarrow c^{y \cdot z} = c^x \Rightarrow y \cdot z = x \Rightarrow z = \frac{x}{y} \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Analise os exemplos.

a. Recorrendo à propriedade de mudança de base, vamos determinar o valor de $\log_8 16$. Escolhendo a base 2, temos:

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3} = \frac{4 \cdot \log_2 2}{3 \cdot \log_2 2} = \frac{4}{3}$$

b. Sabendo que $\log 11 \simeq 1{,}04$, vamos determinar um valor aproximado de $\log_{11} 1.000$.

Para isso, como o dado fornecido está na base 10, vamos fazer a mudança para essa base:

$$\log_{11} 1.000 = \frac{\log 1.000}{\log 11} = \frac{\log 10^3}{\log 11} = \frac{3 \cdot \log 10}{\log 11} = \frac{3}{\log 11} \simeq \frac{3}{1{,}04} \simeq 2{,}88$$

ARTUR SYNENKO/SHUTTERSTOCK

Detalhe da imagem com ampliação de 2,65 vezes.

OBJETO DIGITAL
Infográfico clicável: Calculadora científica
O infográfico tem como objetivo apresentar algumas teclas da calculadora científica que não são de uso comum por parte dos estudantes, por exemplo, a tecla que calcula o valor de um logaritmo na base 10, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica 4** da BNCC.

Atividades resolvidas

R9. Determinar o resultado de:

a. $\frac{1}{8} \cdot (\log_7 10) \cdot (\log 49)$

b. $\log 6 \cdot \log_6 10$

c. $\log_3 8 \cdot \log_2 3$

▸ **Resolução**

a. $\frac{1}{8} \cdot (\log_7 10) \cdot (\log 49) = \frac{1}{8} \cdot (\log_7 10) \cdot \frac{\log_7 49}{\log_7 10} =$

$= \frac{1}{8} \cdot \cancel{(\log_7 10)} \cdot \frac{2}{\cancel{\log_7 10}} = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$

b. $\log 6 \cdot \log_6 10 = \cancel{\log 6} \cdot \frac{\log 10}{\cancel{\log 6}} = \log 10 = 1$

c. $\log_3 8 \cdot \log_2 3 = \frac{\log_2 8}{\cancel{\log_2 3}} \cdot \cancel{\log_2 3} = \log_2 2^3 =$

$= 3 \cdot \log_2 2 = 3$

R10. Em uma calculadora científica, calcular $\log_4 20$.

▸ **Resolução**

Na calculadora científica, como vimos, geralmente temos apenas a tecla $\boxed{\text{log}}$, que calcula o logaritmo na base 10. Por isso, para calcular $\log_4 20$, devemos efetuar a mudança para a base 10: $\log_4 20 = \frac{\log 20}{\log 4}$

Na calculadora, obtemos: $\log 20 \simeq 1{,}3$ e $\log 4 \simeq 0{,}6$.

Assim:

$$\log_4 20 = \frac{\log 20}{\log 4} \simeq \frac{1{,}3}{0{,}6} \simeq 2{,}17$$

Então, concluímos que $\log_4 20 \simeq 2{,}17$.

> **Observação**
>
> Os logaritmos de base 10 são denominados **logaritmos decimais**.

R11. Uma dívida D aumenta 10% ao mês.

a. Determinar o valor da dívida após 1 mês, após 2 meses e após n meses.

b. Calcular o número n de meses para que a dívida quadruplique.

▸ **Resolução**

a. Após 1 mês, a dívida valerá:

$(100\% + 10\%) \cdot D = 110\% \cdot D = 1{,}1D = D(1{,}1)^1$

No 2º mês, o juro incide sobre a dívida acumulada no final do 1º mês. Então, após 2 meses, a dívida valerá:

$(100\% + 10\%) \cdot 1{,}1D = 110\% \cdot 1{,}1D = 1{,}1 \cdot 1{,}1D = D(1{,}1)^2$

Após n meses, teremos: $D(1{,}1)^n$

b. Vamos calcular o número n de meses para que a dívida quadruplique, ou seja, para que ela seja $4D$:

$$D(1{,}1)^n = 4D \Rightarrow (1{,}1)^n = 4$$

Aplicando a definição de logaritmo nessa última equação, podemos escrever:

$n = \log_{1,1} 4$

Efetuando a mudança de base, temos:

$$n = \frac{\log 4}{\log 1{,}1}$$

Em uma calculadora científica, obtemos $\log 4 \simeq 0{,}6021$ e $\log 1{,}1 \simeq 0{,}0414$. Assim:

$$n \simeq \frac{0{,}6021}{0{,}0414} \Rightarrow n \simeq 14{,}5$$

Como o cálculo é feito mês a mês, concluímos que a dívida quadruplicará em 15 meses.

25 b. O logaritmo de b na base a é igual ao inverso do logaritmo de a na base b.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

22. Com uma calculadora científica, determine o valor aproximado, com quatro casas decimais, de:

a. $\log 32$ **22 a.** $\simeq 1{,}5051$

b. $\log_6 40$ **22 b.** $\simeq 2{,}0587$

23. Considerando $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}48$, calcule os seguintes logaritmos:

a. $\log 6$ **23 a.** 0,78

b. $\log 30$ **23 b.** 1,48

c. $\log_3 2$ **23 c.** 0,625

d. $\log 5$ **23 d.** 0,7

e. $\log 144$ **23 e.** 2,16

f. $\log \sqrt[3]{30}$ **23 f.** 0,4933...

24. Transforme cada logaritmo a seguir em um logaritmo na base indicada.

a. $\log_3 10$ na base 10 **24 a.** $\frac{1}{\log 3}$

b. $\log_2 5$ na base 5 **24 b.** $\frac{1}{\log_5 2}$

c. $\log 3$ na base 3 **24 c.** $\frac{1}{\log_3 10}$

d. $\log_7 121$ na base 11 **24 d.** $\frac{2}{\log_{11} 7}$

25. Sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, transforme $\log_a b$ para a base b e responda às questões.

a. Qual é o resultado? **25 a.** $\frac{1}{\log_b a}$

b. Com base no logaritmo que foi dado e no logaritmo encontrado, que conclusão pode ser obtida?

c. De acordo com sua conclusão, o que acontecerá ao multiplicar $\log_a b$ por $\log_b a$? **25 c.** O resultado será 1.

26. Quando simplificada, qual é o valor da expressão $9 - (\log_{15} 8) \cdot (\log_2 15)$? **26.** 6

27. Calcule os valores de: **27.** $A = 1$ e $B = 2$

$$A = \log_{\frac{1}{5}} 16 \cdot \log_{16} \frac{1}{5} \text{ e } B = \frac{1}{\log_{25} 5}$$

28. Calcule o produto: **28.** 1

$$\log_3 5 \cdot \log_7 2 \cdot \log_5 7 \cdot \log_2 3$$

29. Admitindo satisfeitas as condições de existência, calcule o valor das expressões a seguir.

a. $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c$ **29 a.** 1

b. $\dfrac{\log_c a}{\log_c b} - \log_b a$ **29 b.** 0

c. $\log_b a^2 \cdot \log_a b^2$ **29 c.** 4

d. $a \cdot \log_c b \cdot \log_{b^a} c^5$ **29 d.** 5

30. Admitindo satisfeitas as condições de existência, escreva $\log_{a^n} b$ na base a. **30.** $\frac{1}{n} \cdot \log_a b$

31. ARGUMENTAÇÃO Poderíamos escolher uma base diferente de 2 para determinar o valor de $\log_8 16$? Justifique sua resposta.

32. Thiago investiu R$ 1.400,00 em uma aplicação financeira que rende 0,9% ao mês. A fórmula $M = 1.400 \cdot (1{,}009)^t$ relaciona o montante M (valor total acumulado) com a medida de tempo t de investimento, em meses.

Com uma calculadora, calcule:

a. o montante após 1 ano de aplicação; **32 a.** $\simeq$ R$ 1.558,91

b. a medida de tempo de aplicação necessária para que o montante chegue a R$ 2.100,00. **32 b.** 46 meses

33. EM DUPLA Reúna-se com um colega e resolvam a atividade.

Uma microempresa realizou um empréstimo no valor de R$ 1.500,00. A cada trimestre sem pagamento, o valor que deverá ser pago pelo empréstimo é corrigido aplicando-se uma taxa de juro trimestral de 20%.

a. Qual será o valor da dívida dessa empresa após 1 trimestre? E após 2 trimestres? **33 a.** R$ 1.800,00 e R$ 2.160,00, respectivamente.

b. Escrevam uma fórmula que possa ser utilizada para calcular o valor d dessa dívida após n trimestres. (*Dica*: Analisem os cálculos feitos no item anterior.)

c. Quantos anos são necessários para que essa dívida seja de R$ 3.110,40? **33 c.** 1 ano

33 b. $d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n$

d. Escrevam uma lei matemática que possa ser utilizada para determinar o número n de trimestres necessários para que essa dívida atinja um valor d. **33 d.** $n = \log_{1,2} \left(\frac{d}{1.500}\right)$

34. EM DUPLA ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS Reescreva a atividade anterior considerando outro valor de empréstimo, outro valor de taxa de juro e outro prazo. Elabore também um novo valor para o item *c*. Depois, peça a um colega que resolva sua atividade, enquanto você resolve a dele. **34.** Resposta pessoal.

31. Sim, pois, para $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

$$\log_8 16 = \frac{\log_a 2^4}{\log_a 2^3} = \frac{4 \cdot \cancel{\log_a 2}}{3 \cdot \cancel{\log_a 2}} = \frac{4}{3}$$

Função logarítmica

Como vimos no início deste capítulo, considerando bactérias que se multiplicam por divisões sucessivas, originando, a cada hora, duas bactérias, é possível determinar o número n de bactérias em função da medida de tempo t em horas por meio da equação $n = 2^t$.

Aplicando o que foi visto sobre logaritmo, pode-se escrever uma igualdade a fim de determinar a medida de tempo t em horas necessárias para que se obtenha n bactérias: $n = 2^t \Rightarrow t = \log_2 n$

Nesse caso, a medida de tempo t em horas é determinada em função da quantidade n de bactérias. Observe que esse é um exemplo de função em que a variável está no logaritmando.

Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ chama-se **função logarítmica** quando existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Considere os exemplos.

a. $f(x) = \log_7 x$

b. $g(x) = \log_{0,3} x$

c. $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Observação

Existem funções que podem ser obtidas de uma função logarítmica. Por exemplo:

a. $f(x) = \log (x + 1)$

b. $g(x) = \log_{\frac{3}{2}} x^2$

c. $h(x) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} (3x - 4)$

Atividades resolvidas

R12. Dadas as funções $f(x) = \log(x + 3)$ e $g(x) = \log_5 x$, calcular $f(7)$ e $g(1)$.

▶ Resolução

Para calcular $f(7)$, basta substituir x por 7 em $f(x) = \log(x + 3)$. Assim:

$$f(7) = \log(7 + 3) = \log 10 = 1$$

Do mesmo modo, para calcular $g(1)$, substituímos x por 1 na lei da função g:

$$g(1) = \log_5 1 = 0$$

R13. Identificar o domínio das seguintes funções:

a. $g(x) = \log(x^2 - 1)$

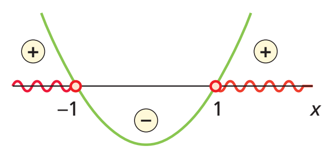
b. $h(x) = \log_{x+1}(4 - x^2)$

▶ Resolução

a. $g(x) = \log(x^2 - 1)$

Considerando as condições de existência, devemos ter: $x^2 - 1 > 0$

Estudando o sinal da função dada por $y = x^2 - 1$, cujos zeros são -1 e 1, podemos fazer o seguinte esquema:



Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

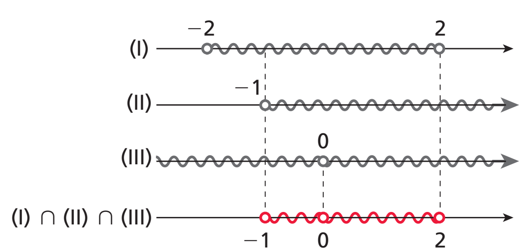
b. $h(x) = \log_{x+1}(4 - x^2)$

Considerando as condições de existência, temos:

(I) $4 - x^2 > 0 \Rightarrow -2 < x < 2$

(II) $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

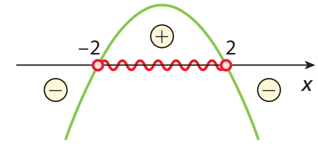
(III) $x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$



Portanto, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2 \text{ e } x \neq 0\}$.

Observação

Para $4 - x^2 > 0$, temos:



Atividades propostas

Registre em seu caderno

35. Considerando a função dada por $f(x) = \log_2(x + 1)$, determine:

a. $f(7)$ **35 a.** 3

b. $f(0)$ **35 b.** 0

c. $f(-0{,}5)$ **35 c.** -1

d. $f(\sqrt{2} - 1)$ **35 d.** $\frac{1}{2}$

36. Dada a função g, tal que $g(x) = \log_3(x - 4)$, determine o valor de x para:

a. $g(x) = 3$ **36 a.** 31

b. $g(x) = \frac{1}{2}$ **36 b.** $\sqrt{3} + 4$

37. Identifique o domínio das funções dadas por:

a. $f(x) = \log(2x + 5)$ **37 a.** $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{2}\right\}$

b. $f(x) = \log_{x+2}(3 - x)$ **37 b.** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq -1\}$

c. $g(x) = \log_{18} 2^x$ **37 c.** $D(g) = \mathbb{R}$

38. **(Ufam – 2022)** O domínio da função $f(x) = \log_{x-5}(x + 3)$ é o conjunto: **38.** Alternativa **b.**

a. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3 \text{ e } x \neq -3\}$

b. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \text{ e } x \neq 6\}$

c. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5 \text{ e } x \neq 6\}$

d. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \text{ e } x = 3\}$

e. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \text{ e } x \neq 6\}$

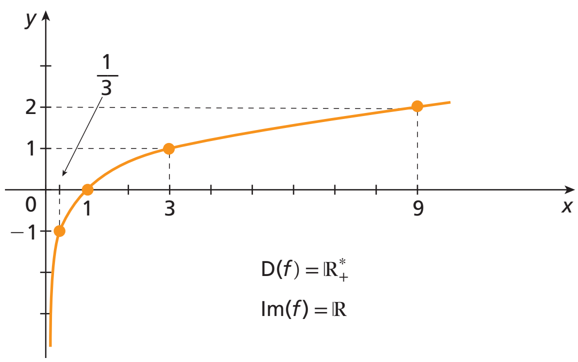
Gráfico da função logarítmica

Considere os gráficos de duas funções logarítmicas.

a. $f(x) = \log_3 x$

$f(x) = \log_3 x$

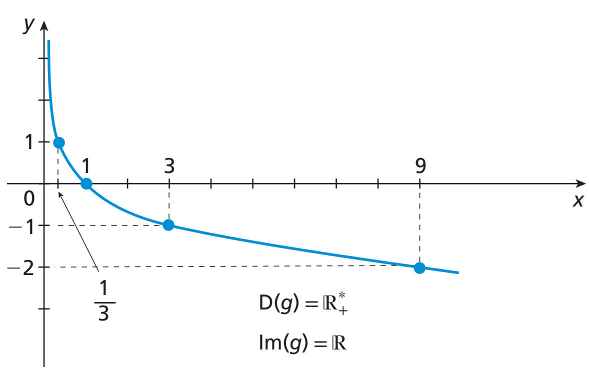
x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f(x)$	-1	0	1	2



b. $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

$g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$g(x)$	1	0	-1	-2



Observação

Observe que, quanto mais o valor de x se aproxima de zero, pela direita, mais o gráfico de f se aproxima do eixo y, sem tocá-lo, isto é, o eixo y é a reta assíntota de f. O mesmo vale para a função g. Além disso, percebe-se por meio do gráfico que o $CD(f) = Im(f)$, ou seja, f é uma função sobrejetora.

Observando esses gráficos, percebemos que ambos interceptam o eixo x no ponto (1, 0) e não encostam no eixo das ordenadas. O gráfico de qualquer função logarítmica $f(x) = \log_a x$ tem essas características e aspecto parecido com o dos gráficos apresentados.

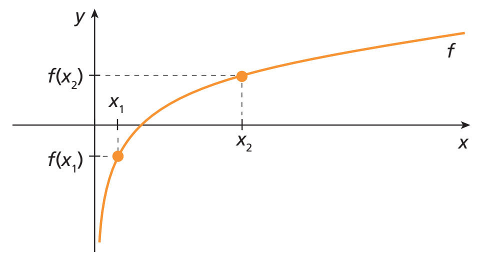
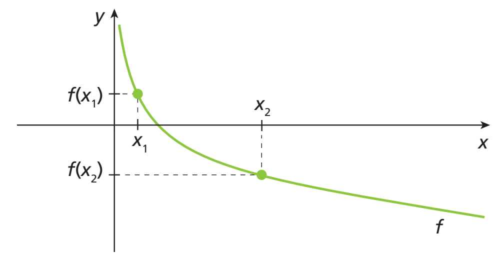
Crescimento e decrescimento de uma função logarítmica

Analisando as tabelas de valores e os gráficos das funções $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ apresentados anteriormente, podemos chegar às conclusões a seguir.

- Quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de $f(x) = \log_3 x$ também aumentam. Isso ocorre porque a base a é maior que 1 ($a = 3$). Portanto, a função f é **crescente**.
- Quando os valores de x aumentam, os correspondentes valores de $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ diminuem. Isso ocorre porque a base a está entre 0 e 1 $\left(a = \frac{1}{3}\right)$. Portanto, a função g é **decrescente**.

De modo geral, temos:

Crescimento e decrescimento de uma função do tipo $f(x) = \log_a x$

Função crescente ($a > 1$)	Função decrescente ($0 < a < 1$)
	
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Observe os exemplos.

a. $g(x) = \log_2 x$

g é crescente

b. $h(x) = \log_{\sqrt{3}} x$

h é crescente

c. $i(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

i é decrescente

d. $j(x) = \log_{0,1} x$

j é decrescente

Uma relação entre a função logarítmica e a função exponencial

Analise uma importante relação entre a função logarítmica e a função exponencial.

Dada uma função bijetora $f: A \to B$, chamamos de **função inversa** de f a função $f^{-1}: B \to A$ tal que, para todo $x \in A$ e $y \in B$, com $y = f(x)$, temos $f^{-1}(y) = x$.

A partir da definição podemos compreender que a função inversa f^{-1} associa um elemento $y \in \text{Im}(f)$ ao elemento $x \in \text{D}(f)$. Uma consequência disso é que os gráficos da função e da sua função inversa são simétricos em relação ao gráfico da função identidade i, definida como $i(x) = x$, que é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

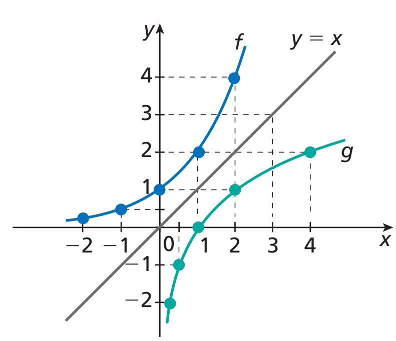
As funções logarítmica e exponencial são funções inversas. Como exemplo, observe os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

$f(x) = 2^x$

x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

$g(x) = \log_2 x$

x	$f(x)$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2



Observação

Uma função $f: A \to B$ é dita **bijetora** se for sobrejetora e injetora. Sabemos que a função logarítmica é sobrejetora. Além disso, ela é injetora, pois dados quaisquer $x_1, x_2 \in \text{D}(f)$, com $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$. Observe:

Sejam $x_1, x_2 \in \text{D}(f)$, com $x_1 \neq x_2$. Suponha por absurdo que $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Aplicando a definição de logaritmo temos: $a^{\log_a x_2} = x_1$. Pelas propriedades de logaritmo vistas anteriormente, sabemos que $a^{\log_a x_2} = x_2$. Assim, chegamos a um absurdo, pois esse resultado nos diz que $x_1 = x_2$. Portanto, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo, f é injetora.

Atividades resolvidas

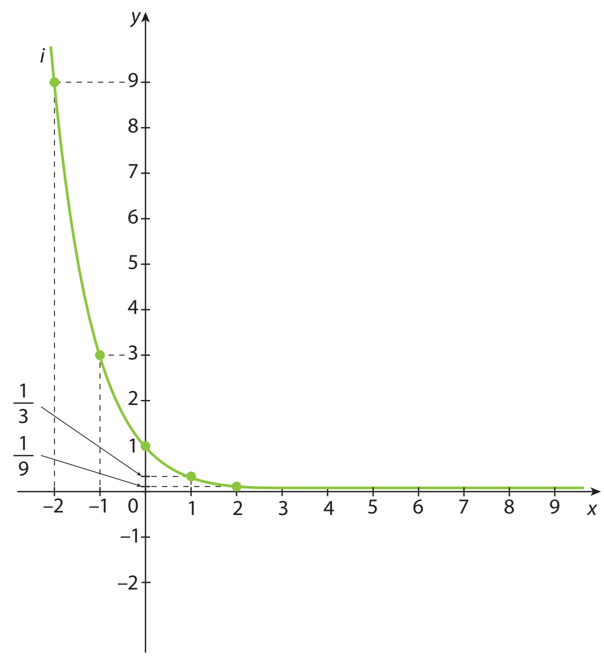
R14. Esboçar os gráficos das funções inversas i e h, tais que $i(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

▶ **Resolução**

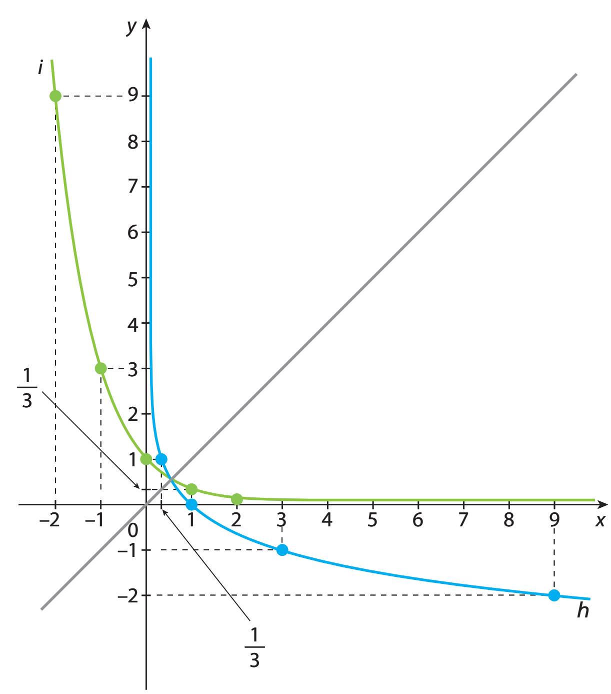
Primeiro, faremos um esboço do gráfico da função i. Para isso, vamos atribuir valores a x e calcular os respectivos valores de $i(x)$.

$$i(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

x	$i(x)$
−2	9
−1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$



Sabendo que os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à reta $y = x$, é possível fazer o esboço do gráfico da função h.

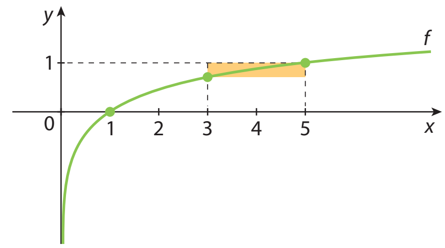


Logo, os gráficos de i e h estão representados no plano cartesiano pelas curvas verde e azul, respectivamente.

Observação

Poderíamos ter feito primeiro o esboço do gráfico da função h e, a partir dele, por simetria, fazer o esboço do gráfico da função i.

R15. A figura a seguir representa o gráfico de uma função logarítmica.



a. Determinar a lei da função.

b. Calcular a medida da área da região retangular destacada.
(Considere: $\log_5 3 \simeq 0{,}68$)

▶ Resolução

a. A função é da forma $y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Precisamos descobrir o valor da base a.
Pelo gráfico, temos $f(5) = 1$.
Então:
$1 = \log_a 5 \Rightarrow a^1 = 5 \Rightarrow a = 5$
Logo: $f(x) = \log_5 x$

b. O comprimento da base do retângulo que limita a região mede:
$5 - 3 = 2$
A altura mede:
$\log_5 5 - \log_5 3 = 1 - \log_5 3$
Assim, calculamos a medida da área da região retangular:
$2 \cdot (1 - \log_5 3) = 2 - 2 \cdot \log_5 3 \simeq 2 - 2 \cdot 0{,}68 = 0{,}64$
Logo, a área da região retangular mede, aproximadamente, 0,64 unidade de área.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

39. Usando um quadro, esboce os gráficos das seguintes funções logarítmicas: **39.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. $h(x) = \log_2 x$

b. $i(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

40 b. Resposta no *Suplemento para o professor*.

40. Com relação às funções da atividade anterior, responda às questões a seguir. **40 a.** A função do item **a** é crescente e a função do item **b** é decrescente.

a. Qual função é crescente e qual é decrescente?

b. Como você responderia a essas perguntas sem construir os gráficos correspondentes?

41. Classifique cada uma das funções em crescente ou decrescente, justificando sua resposta. **41.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

a. $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ **41 a.** Decrescente.

b. $y = \log x$ **41 b.** Crescente.

42. Dê o sinal de $\log_a x$ para:

a. $a > 1$ e $x > 1$ **42 a.** Positivo.

b. $a > 1$ e $0 < x < 1$ **42 b.** Negativo.

c. $0 < a < 1$ e $x > 1$ **42 c.** Negativo.

d. $0 < a < 1$ e $0 < x < 1$ **42 d.** Positivo.

43. Determine o valor de k para que: **43 a.** $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$

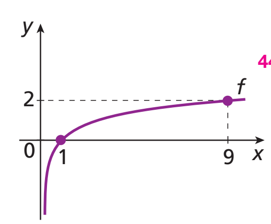
a. $f(x) = \log_{k-3} x$ seja uma função crescente.

b. $f(x) = \log_{3k-1} x$ seja uma função decrescente.

43 b. $\left\{k \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}\right\}$

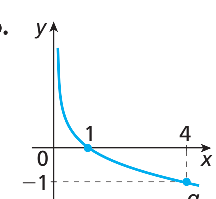
44. Em cada item, determine a função logarítmica representada pelo gráfico.

a.



44 a. $f(x) = \log_3 x$

b.



44 b. $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

45. Resposta possível: (1, 0), (0, 1), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, (4, −1) e (−1, 4).

45. Esboce o gráfico das funções $m(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ e $n(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, destacando ao menos dois pares de pontos simétricos e o ponto de intersecção do gráfico das funções.

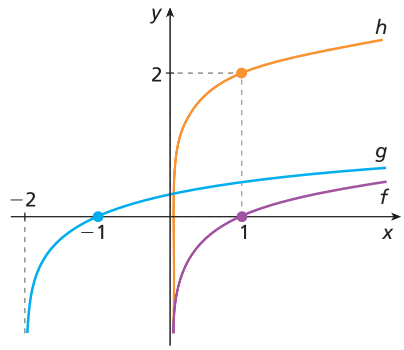
46. Em cada item, construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções dadas por:

a. $f(x) = \log x$ e $g(x) = 10^x$

b. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

46. Resposta no *Suplemento para o professor*.

47. Carlos esboçou, em um plano cartesiano, o gráfico da função $f(x) = \log x$. Depois, apenas com base nesse gráfico, esboçou os gráficos das funções $g(x) = \log (x + 2)$ e $h(x) = \log x + 2$, obtendo o seguinte resultado: **47.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

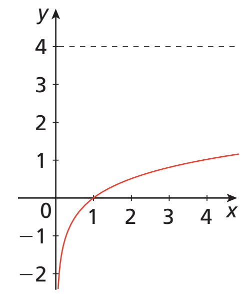


a. SOFTWARE ARGUMENTAÇÃO Explique como Carlos construiu esses gráficos. Se achar conveniente, avalie sua hipótese em um *software* de construção de gráficos, testando outros valores.

b. Utilizando a mesma estratégia de Carlos, faça, em um único plano cartesiano, um esboço para os gráficos das funções dadas por $f(x) = \log x$, $i(x) = \log (x + 1)$ e $j(x) = \log x + 1$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

48. (UEA – 2023) Considere a função $f\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_4 x$ e o esboço de seu gráfico no plano cartesiano, que destaca também, por meio da linha tracejada, os pontos do plano cuja ordenada é 4. **48.** Alternativa **e**.



O valor de x para o qual $f(x) = 4$ é

a. 16 b. 32 c. 64 d. 128 e. 256

49. EM DUPLA Reúna-se com um colega e, com base no gráfico da função $f(x) = \log x$, construam o esboço dos gráficos das seguintes funções: **49.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. $g(x) = \log \left(\frac{x}{10}\right)$ b. $g(x) = \log \left(\frac{x}{100}\right)$

(*Dica*: Primeiro, reescrevam as leis das funções usando as propriedades dos logaritmos.)

Equações logarítmicas e sistemas

Equações que têm a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo (ou em ambos) são classificadas como **equações logarítmicas**.

Considere os exemplos.

a. $\log (2x - 3) = -1$

b. $\log_x^2 x + \log_x x = 2$

c. $\log_x 5 + 7 = 0$

Podemos resolver equações logarítmicas de diversas maneiras: aplicando a definição de logaritmo, usando as propriedades dos logaritmos, efetuando mudanças de variável etc. Acompanhe, nas atividades resolvidas a seguir, alguns modos de resolução.

Observação

Se o número obtido na resolução de uma equação logarítmica não satisfizer as condições de existência do logaritmo, o conjunto solução será o conjunto vazio.

Atividades resolvidas

R16. Determinar o valor de x sabendo que $\log_6 (x + 5) = 2$.

▶ **Resolução**

Primeiro, estabelecemos a condição de existência:

$$x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$$

Em seguida, resolvemos a equação dada usando a definição de logaritmo:

$$\log_6 (x + 5) = 2 \Rightarrow 6^2 = x + 5 \Rightarrow x = 31$$

Como 31 atende à condição de existência do logaritmo, então x é igual a 31.

R17. Resolver a equação $\log_5 (2x + 7) = \log_5 (x - 6)$.

▶ **Resolução**

Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x + 7 > 0 \\ x - 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{7}{2} \\ x > 6 \end{cases} \Rightarrow x > 6$$

Da 5ª propriedade dos logaritmos, temos:

$\log_5 (2x + 7) = \log_5 (x - 6) \Rightarrow 2x + 7 = x - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -13$

Como $x = -13$ não obedece à condição de existência ($x > 6$), concluímos que não existe x que satisfaça a equação, ou seja, $S = \varnothing$.

R18. Resolver a equação $\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 0$.

▶ **Resolução**

Estabelecemos as condições de existência:

$\begin{cases} x > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$

Resolvemos a equação utilizando as propriedades e a definição de logaritmo:

$\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 0 \Rightarrow \log_3 [x(x - 2)] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 (x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x = 3^0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

Apenas x_1 atende às condições de existência. Portanto, $S = \{1 + \sqrt{2}\}$.

R19. Resolver o sistema: $\begin{cases} \log x - \log y = \log 4 \\ 4^{x+y} = 1.024 \end{cases}$

▶ **Resolução**

Condições de existência do logaritmo:

$x > 0$ e $y > 0$

Preparando o sistema, temos:

$\begin{cases} \log x - \log y = \log 4 \\ 4^{x+y} = 1.024 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log \frac{x}{y} = \log 4 \\ 4^{x+y} = 4^5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4y & \text{(I)} \\ x + y = 5 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II): $4y + y = 5 \Rightarrow y = 1$

Substituindo y por 1 em (I): $x = 4 \cdot 1 \Rightarrow x = 4$

Como ambos os resultados obedecem à condição de existência, $S = \{(4, 1)\}$.

Observação

Em um sistema em que há duas equações e duas incógnitas, a solução, se existir, será um par ordenado (x, y). Por isso, há necessidade de usar, além das chaves do conjunto solução, os parênteses: $S = \{(x, y)\}$

R20. Resolver a equação $\log^2 x - 5 \cdot \log x + 4 = 0$.

▶ **Resolução**

Condição de existência: $x > 0$

Substituindo $\log x$ por y, obtemos:

$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 4$ e $y_2 = 1$

Como $y = \log x$, temos:

$\log x = 1 \Rightarrow x = 10$

$\log x = 4 \Rightarrow x = 10.000$

Como ambos os resultados obedecem à condição de existência, temos $S = \{10, 10.000\}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

50. Resolva as equações a seguir.

a. $\log_x 64 = 2$ **50 a.** $S = \{8\}$

b. $\log_4 (x + 1) = 2$ **50 b.** $S = \{15\}$

c. $\log (x - 1)^2 = \log 1$ **50 c.** $S = \{0, 2\}$

d. $\log_{21} (x + 2) + \log_{21} (x + 6) = 1$ **50 d.** $S = \{1\}$

e. $\log_2 (x - 2) - \log_2 (2x - 7) = 1$ **50 e.** $S = \{4\}$

f. $\log x + 2 \cdot \log^2 x - 1 = 0$ **50 f.** $S = \left\{\frac{1}{10}, \sqrt{10}\right\}$

51. Resolva o sistema.

$\begin{cases} \log_2 (x - 2) - \log_2 (y + 1) = 1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$ **51.** $S = \{(8, 2)\}$

52. A medida de massa A de uma substância radioativa decai segundo a lei $A = A_0 \cdot 10^{-0,012t}$, em que t é a medida de tempo de decaimento, em hora, e A_0 é a medida de massa inicial, isto é, a medida de massa correspondente a $t = 0$. Para calcular a meia-vida dessa substância, ou seja, a medida de tempo decorrida para que $A = \frac{1}{2}A_0$, um químico substituiu A por $\frac{1}{2}A_0$ nessa lei e obteve a equação $\log 0,5 = \log 10^{-0,012t}$. Considerando $\log 0,5 = -0,30$, resolva essa equação para obter a meia-vida da substância.

52. 25 horas.

Inequações logarítmicas

Inequações que têm a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo (ou em ambos) são denominadas **inequações logarítmicas**.

Considere os exemplos.

a. $\log_3 (x + 1) > \log_3 x$

b. $\log_5 (x - 2) - \log_7 (x^2 + 4) \leqslant 9$

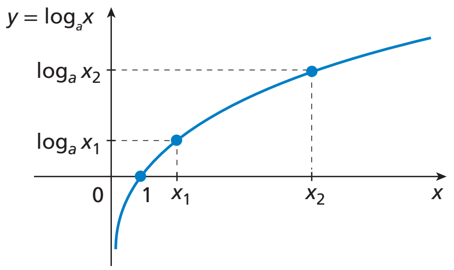
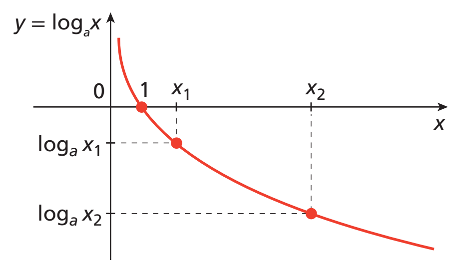
c. $\log_6 x \geqslant 0$

Observação

Nesta obra, estudaremos apenas as inequações logarítmicas que apresentam a incógnita no logaritmando.

Já vimos que uma função logarítmica pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor da base a.

Crescimento e decrescimento de uma função do tipo $h(x) = \log_a x$

Função crescente ($a > 1$)	Função decrescente ($0 < a < 1$)
	
$x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$	$x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1$

Assim, podemos chegar às conclusões a seguir.

a. Quando a base do logaritmo é maior que 1, o sentido da desigualdade entre os logaritmos se mantém entre os logaritmandos. Ou seja, para $\mathbf{a > 1}$, f e g leis de funções em x, temos:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$$

sentido da desigualdade mantido

b. Quando a base do logaritmo está entre 0 e 1, o sentido da desigualdade entre os logaritmos se inverte entre os logaritmandos. Ou seja, para $\mathbf{0 < a < 1}$, f e g leis de funções em x, temos:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$$

sentido da desigualdade invertido

Observação

Analogamente, temos:

- se $a > 1$, então:
  $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \geqslant g(x)$
- se $0 < a < 1$, então:
  $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \leqslant g(x)$

Apesar de essas regras serem análogas às utilizadas na resolução de inequações exponenciais, devemos lembrar que a função exponencial tem domínio $\mathbb{R}$, ou seja, não há condição de existência, ao contrário da função logarítmica, cujo domínio é $\mathbb{R}_+^*$. Portanto, ao resolver inequações logarítmicas, é fundamental determinar as condições de existência.

Atividades resolvidas

R21. Resolver a inequação $\log (x + 13) > \log 2$.

▸ Resolução

Condição de existência:

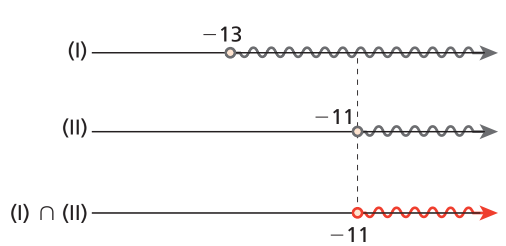
$x + 13 > 0 \Rightarrow x > -13$ (I)

Como a base é 10 (maior que 1), o sentido da desigualdade entre os logaritmos se mantém entre os logaritmandos:

$\log (x + 13) > \log 2 \Rightarrow x + 13 > 2 \Rightarrow x > -11$ (II)

sentido da desigualdade mantido

As duas desigualdades devem ser satisfeitas: $x > -13$ e $x > -11$:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -11\}$.

R22. Resolver a inequação $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (-x + 10) \leqslant -2$.

▶ Resolução

Condições de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ -x + 10 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 10 \text{ (I)}$$

Agora, para resolver a inequação, devemos escrever -2 como o logaritmo de um número na base $\frac{1}{3}$. De acordo com a 3ª propriedade de logaritmo, para escrever um número real n como logaritmo de base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, basta trocá-lo por $\log_a a^n$. Assim:

$$-2 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{3}} 3^2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$$

Portanto:

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (-x + 10) \leqslant -2$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (-x + 10) \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$$

$$\log_{\frac{1}{3}} [x(-x + 10)] \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$$

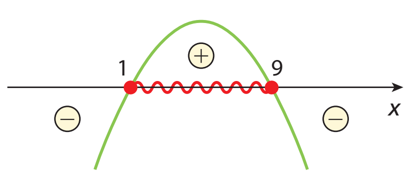
Como a base é $\frac{1}{3}$ (está entre 0 e 1), sentido da desigualdade entre os logaritmos se inverte entre os logaritmandos:

$$\log_{\frac{1}{3}} [x(-x + 10)] \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9 \Rightarrow [x(-x + 10)] \geqslant 9 \Rightarrow$$

sentido da desigualdade invertido

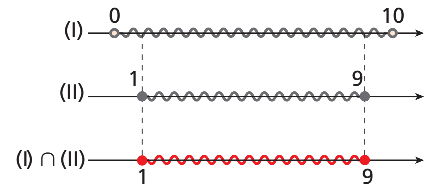
$$\Rightarrow -x^2 + 10x - 9 \geqslant 0$$

Resolvendo a equação $-x^2 + 10x - 9 = 0$, obtemos $x = 1$ ou $x = 9$.



Portanto: $-x^2 + 10x - 9 \geqslant 0 \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 9$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 9\}$.

R23. Determinar os valores de x que tornam verdadeira a desigualdade: $1 < \log_3 (2x - 1) < 4$

▶ Resolução

Condição de existência:

$$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \text{ (I)}$$

Devemos escrever 1 e 4 como os logaritmos de um número na base 3:

- $1 = \log_3 3^1 = \log_3 3$
- $4 = \log_3 3^4 = \log_3 81$

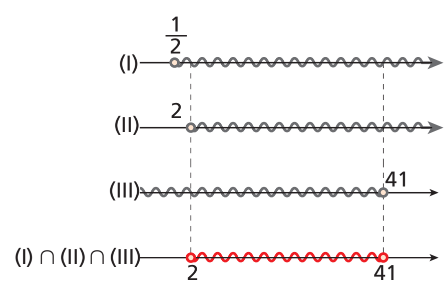
Dessa forma, temos: $\log_3 3 < \log_3 (2x - 1) < \log_3 81$

Como a base é 3 (maior que 1): $3 < 2x - 1 < 81$

Assim:

- $3 < 2x - 1 \Rightarrow x > 2$ (II)
- $2x - 1 < 81 \Rightarrow x < 41$ (III)

As desigualdades (I), (II) e (III) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 41\}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

53. Resolva as inequações.

a. $\log_{12} (x + 9) > \log_{12} 1$ **53 a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$

b. $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) < \log_{\frac{1}{5}} 5$ **53 b.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3$ ou $x > 3\}$

c. $\log_8 x \geqslant 2$ **53 c.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 64\}$

d. $\log_{0,2} (x + 3) > 0$ **53 d.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$

e. $\log_{0,3} (2x - 2) + \log_{0,3} 2 > 1$ **53 e.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1{,}075\}$

f. $0 < \log_3 (x - 2) < 2$ **53 f.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 11\}$

54. Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos de $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2$.

a. Analise, com um colega, os intervalos do domínio em que $f(x) \geqslant g(x)$.

b. Resolvam a inequação $f(x) \geqslant g(x)$ e comparem a solução com a análise dos gráficos.

c. Redijam a conclusão a que chegaram. **54.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

55. ***SOFTWARE*** Use um *software* de construção de gráficos para determinar o conjunto solução da inequação $\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x \leqslant -2$. **55.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

TRABALHO E JUVENTUDES

Geólogo

USGS/ALAMY/FOTOARENA

Geólogo observando lava que fluiu de uma fissura no Parque Nacional dos Vulcões do Havaí, em Kilauea, Havaí. Foto de 2024.

O geólogo é o profissional que estuda a composição, a estrutura, a origem, a história e a evolução da Terra, incluindo a análise da crosta terrestre e de seus constituintes, sejam sólidos, líquidos ou gasosos. Portanto, a tarefa desse especialista consiste em reconhecer e prever, a curto e longo prazo, os efeitos e os problemas causados pela interação entre os **processos geológicos** e as atividades humanas. Em geral, o geólogo realiza esses estudos em uma área delimitada, que pode variar em escala, desde um município até regiões maiores. Em campo, faz o mapeamento geológico, em que percorre uma área, coleta amostras, descreve as rochas que encontra, faz anotações e, em seguida, elabora o mapa geológico. Com base nesse mapa, é possível definir as áreas mais favoráveis para realizar uma pesquisa mineral, calcular a estabilidade do solo para a construção de uma estrada ou de um edifício, prever deslizamentos de terra, entre outras ações. Geólogos também mapeiam águas subterrâneas e detectam possíveis causas de contaminação dos solos.

Processos geológicos: processo natural pelo qual as características da Terra são modificadas.

Em parceria com os físicos, os geólogos ainda estudam o campo magnético terrestre, o fluxo de calor interno da Terra e o movimento das ondas sísmicas, que estão associadas aos terremotos. Para isso, os geólogos lidam com a escala de magnitude Richter: a escala mais utilizada para mensurar a magnitude de um terremoto, idealizada por Charles Richter (1900-1985). Essa magnitude pode ser definida por meio da função:

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$$

Nela, x indica a quantidade de energia liberada pelo terremoto, em quilowatt-hora, e $7 \cdot 10^{-3}$ kWh é uma constante.

Para tornar-se geólogo, é necessário ter formação superior em Geologia ou Engenharia Geológica em uma instituição de ensino reconhecida pelo Ministério da Educação (MEC). No curso são estudadas disciplinas relacionadas a matemática, física, química e biologia. Geólogos podem trabalhar em empresas públicas (federais, estaduais e municipais), em órgãos do governo, em universidades ou em empresas de mineração e construção civil.

Atividades

Registre em seu caderno

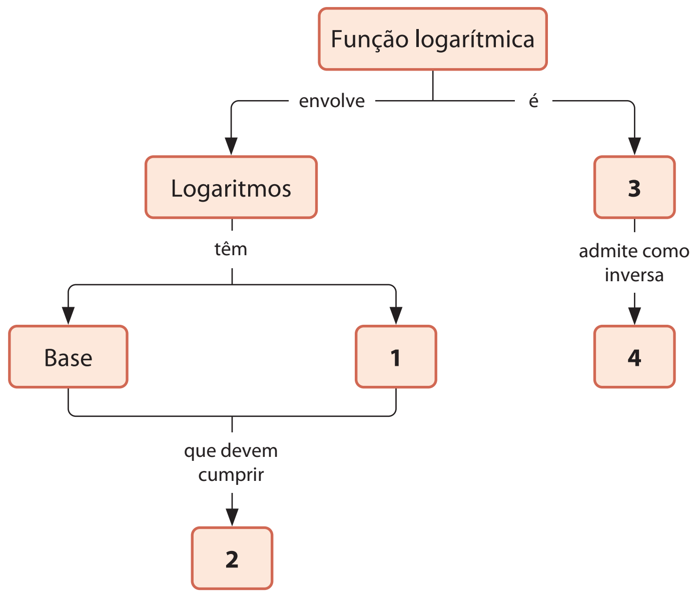
1. Em sua opinião, quais são os pontos positivos e negativos de ser geólogo? **1.** Resposta pessoal.
2. Qual é a magnitude de um terremoto que tenha liberado energia equivalente a $7 \cdot 10^9$ kWh? **2.** Magnitude 8.
3. Um terremoto de magnitude 6 na escala Richter libera quanta energia em kWh? **3.** $7 \cdot 10^6$ kWh.

Registre em seu caderno

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Conexões entre conceitos. A – 4; B – 3; C – 1; D – 2.

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Função exponencial

B. Bijetora

C. Logaritmando

D. Condições de existência do logaritmo

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

REPRODUÇÃO/EDITORA RECORD

Livro

O universo e a xícara de chá: a Matemática da verdade e da beleza

K. C. Cole

Rio de Janeiro: Record, 2006.

Nesse livro, a autora, jornalista especializada em Ciências, percorre uma vasta gama de áreas do conhecimento e de situações (científicas ou cotidianas) para desmistificar a ideia geral de que a Matemática é incompreensível à maioria dos mortais propondo o exame crítico do significado dos números com que convivemos no dia a dia. Com uma linguagem objetiva e simples e uma abordagem perspicaz e bem-humorada, ela consegue esclarecer fatos numéricos aparentemente obscuros ou muito complexos.

Museu

Matemateca

O Centro de Difusão e Ensino Matemateca, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), é um órgão cujo objetivo é prestar serviços referentes à divulgação da Matemática para o público em geral e, em particular, para estudantes de todos os níveis de ensino. A Matemateca realiza exposições dentro e fora da USP e possui um acervo com diversos objetos, jogos e experimentos matemáticos, entre eles uma régua de cálculo (cujo princípio se baseia em uma propriedade dos logaritmos) e uma máquina de somar que usa potências de base 2.

Mais informações podem ser encontradas em: http://matemateca.ime.usp.br/. Acesso em: 05 set. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Sendo g e h números reais positivos, com $g \neq 1$, se $\log_g h = i$, então: **Q1.** Alternativa **a.**

a. $g^i = h$ **c.** $h^g = i$

b. $g^h = i$ **d.** $i^h = g$

Q2. Considerando $\log_g h = i$, pode-se afirmar que: **Q2.** Alternativa **c.**

a. g pode ser zero.

b. h pode ser zero.

c. h deve ser positivo.

d. h deve ser diferente de 1.

Q3. É possível afirmar que $\log_4 \left(\frac{2}{3}\right)$ equivale a: **Q3.** Alternativa **c.**

a. $\log_4 2 + \log_4 3$ **c.** $\log_4 2 - \log_4 3$

b. $\log_4 2 : \log_4 3$ **d.** $\log_4 2 \cdot \log_4 3$

Q4. Pode-se afirmar que $\log_{39} 42$ equivale a: **Q4.** Alternativa **b.**

a. $\log 42 \cdot \log 39$ **c.** $\log_{42} 39$

b. $\dfrac{\log 42}{\log 39}$ **d.** $\dfrac{\log 39}{\log 42}$

Q5. Admitindo $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}47$, então $\log 6$ é igual a: **Q5.** Alternativa **b.**

a. 0,141 **c.** $-0{,}17$

b. 0,77 **d.** 0,15

Q6. Sabemos que o pH de uma solução é dado pela fórmula $pH = -\log [H^+]$; então, podemos afirmar que, se o pH de uma substância é 10, a concentração de H^+ é: **Q6.** Alternativa **a.**

a. 10^{-10} **c.** -10^{10}

b. 10^{10} **d.** 1.010

Q7. A função f, tal que $f(x) = \log_{\frac{2}{7}} x$, é: **Q7.** Alternativa **d.**

a. crescente. **c.** constante.

b. nula. **d.** decrescente.

Q8. Alternativa **c.**

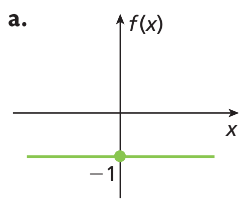
Q8. As funções dadas por $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = 3^x$ são:

a. opostas. **c.** inversas.

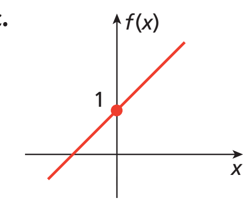
b. polinomiais. **d.** constantes.

Q9. A função f, de lei $f(x) = \log_3 x$, pode ser representada pelo gráfico: **Q9.** Alternativa **b.**

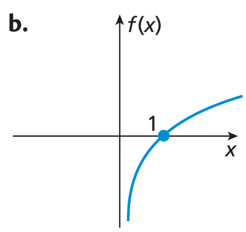
a.



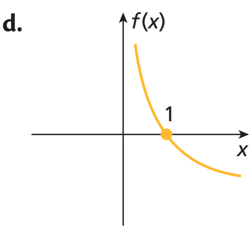
c.



b.



d.



Q10. A equação $\log_x 8 = 2$ tem por solução: **Q10.** Alternativa **d.**

a. 64 **b.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $-\sqrt{2}$ **d.** $2\sqrt{2}$

Q11. Se $\log (x^2 + 6) < 1$, então $x \in \mathbb{R}$ tal que: **Q11.** Alternativa **d.**

a. $x > 2$ **c.** $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

b. $x < -2$ **d.** $-2 < x < 2$

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11
Calcular logaritmo.	X	X	X	X	X						
Identificar uma função logarítmica.							X	X	X		
Analisar e construir o gráfico de uma função logarítmica.							X		X		
Resolver situações-problema que envolvam logaritmos.						X					
Resolver equações, sistemas e inequações logarítmicas.						X				X	X

Capítulo 8

SEQUÊNCIAS


EDU LYRA/PULSAR IMAGENS

Comemoração em homenagem ao início do ano do dragão do calendário chinês no bairro da Liberdade, em São Paulo (SP). Foto de 2024.

OBJETO DIGITAL **Mapa clicável: Ano-novo no continente africano**

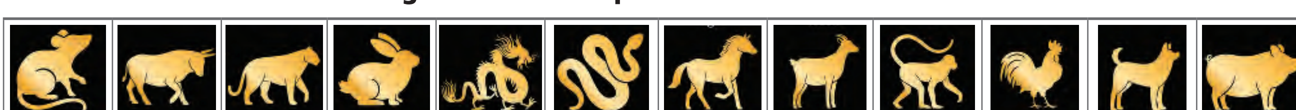
O mapa clicável amplia o tema tratado na abertura deste capítulo apresentando quando e como alguns países africanos comemoram o início de um novo ano, que, geralmente, estão relacionados com as religiões predominantes no país.

O calendário adotado pelos chineses é o lunissolar, que marca eventos importantes, como a celebração do Ano-novo Chinês. Ao contrário do calendário gregoriano, estabelecido pelo Papa Gregório XIII em 1582 para facilitar a comunicação entre as nações, o calendário chinês baseia-se nos movimentos da Lua e do Sol.

Sua origem data de aproximadamente 2697 a.C., quando introduziu ciclos de doze anos associados a diferentes animais, como rato, boi, tigre, coelho, dragão, serpente, cavalo, cabra, macaco, galo, cão e porco. Cada ano compreende doze meses correspondentes a lunações de 29 ou 30 dias, totalizando 354 dias. A adição de um mês a cada três anos aproxima o calendário ao ciclo solar de 365,25 dias.

O quadro a seguir mostra os signos do horóscopo chinês nos anos de 1924 a 2031.

Signos do horóscopo chinês de 1924 a 2031


STOCKSMARTSTART/ SHUTTERSTOCK

rato	boi	tigre	coelho	dragão	serpente	cavalo	cabra	macaco	galo	cão	porco
1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935
1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947
1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031

De acordo com o quadro, os anos relacionados ao dragão no período apresentado são: 1928, 1940, 1952, 1964, 1976, 1988, 2000, 2012 e 2024. Esse conjunto de números exemplifica o objeto de estudo deste capítulo: as **sequências numéricas**.

Sequências e padrões

Podemos representar os anos do dragão, indicados no quadro, como uma **sequência** ou **sucessão** da seguinte maneira:

(1928, 1940, 1952, 1964, 1976, 1988, 2000, 2012, 2024)

Os elementos ou termos dessa sequência podem ser representados por uma letra (geralmente a letra *a*) e um índice, que indica a posição ou a ordem do elemento na sequência. Dessa maneira: $a_1 = 1928$ é o primeiro termo da sequência, $a_2 = 1940$ é o segundo termo, e assim sucessivamente, até $a_9 = 2024$.

Com os dados fornecidos pelo quadro, também podemos escrever outras sequências, como:

- a sequência dos anos do rato: (1924, 1936, 1948, 1960, 1972, 1984, 1996, 2008, 2020);
- os primeiros quatro anos do cavalo a partir de 1970: (1978, 1990, 2002, 2014).

Se a sequência tiver um último termo, ela é **finita**; caso contrário, dizemos que ela é **infinita** e a representamos com reticências no final.

Considere os exemplos.

a. A sequência dos números naturais primos é infinita. Para indicá-la, escrevemos seus primeiros elementos e acrescentamos reticências no final:

(2, 3, 5, 7, 11, 13, ...)

b. A sequência formada pelas letras iniciais dos dias de uma semana é finita: (D, S, T, Q, Q, S, S). Perceba que os termos de uma sequência não são necessariamente distintos.

Note que todas essas sequências pressupõem certa ordem em seus termos.

Em uma sequência, a_n representa um termo genérico, na posição *n*. Assim, se $n = 5$, a_5 é o quinto termo; se $n = 100$, a_{100} é o centésimo termo. O termo subsequente a a_n é representado por a_{n+1}, e o antecessor de a_n, a partir do segundo termo, é representado por a_{n-1}.

Sequências numéricas

Um tipo importante de sucessão são as sequências numéricas.

Uma **sequência numérica infinita** é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^*$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

Uma **sequência numérica finita** de *n* termos é uma função cujo domínio é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

Observação

Quando for conveniente, podemos representar o primeiro termo de uma sequência por a_0, em vez de a_1. Nesse caso, o domínio da função é $\mathbb{N}$.

Assim, temos $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$. Uma sequência finita de *n* termos é indicada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, e uma sequência infinita é indicada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$.

Determinação de uma sequência numérica

Algumas sequências numéricas podem ser determinadas por uma **lei de formação**, ou seja, uma lei que associa a cada número natural *n* diferente de zero um termo $a_n = f(n)$. O termo a_n, nesse caso, é conhecido como **termo geral** da sequência.

Considere os exemplos.

a. Para determinar a sequência de números naturais ímpares, podemos utilizar a seguinte lei de formação: $f(n) = 2n - 1$, em que $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$. Essa lei de formação associa cada número natural diferente de zero a um termo da sequência formada pelos números naturais ímpares. Nesse caso, o primeiro termo da sequência será indicado por $\boldsymbol{a_1}$. No quadro a seguir estão determinados os quatro primeiros termos dessa sequência.

Determinação dos primeiros termos de $f(n) = 2n - 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$

n	1	2	3	4
a_n	$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$	$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$	$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$	$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

Assim, podemos verificar que a sequência dos números naturais ímpares é (1, 3, 5, 7, ...). Como $\boldsymbol{n}$ pertence a um conjunto infinito, a sequência também é infinita. A lei de formação que expressa $\boldsymbol{a_n}$ em função de *n* é $a_n = 2n - 1$, com *n* natural não nulo.

b. Considerando a sequência (7, 14, 21, 28, 35), verificamos que pode ser estabelecida uma relação entre o valor de cada termo e sua posição na sequência:

Relação entre o valor de cada termo e sua posição na sequência (7, 14, 21, 28, 35)

n	1	2	3	4	5
a_n	$a_1 = 7 = 7 \cdot 1$	$a_2 = 14 = 7 \cdot 2$	$a_3 = 21 = 7 \cdot 3$	$a_4 = 28 = 7 \cdot 4$	$a_5 = 35 = 7 \cdot 5$

Com base na análise do quadro, pode-se deduzir e descrever essa sequência por meio do termo geral $a_n = 7n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Atividades resolvidas

R1. Escrever a sequência definida por:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 5, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$$

▶ **Resolução**

A primeira sentença da lei de formação serve para identificar o primeiro termo e a outra, para identificar os próximos termos (a_n), que dependem do anterior (a_{n-1}).

Determinação dos primeiros termos da sequência

n	a_n
1	$a_1 = -2$
2	$a_2 = 3 \cdot a_1 - 5 = 3 \cdot (-2) - 5 = -11$
3	$a_3 = 3 \cdot a_2 - 5 = 3 \cdot (-11) - 5 = -38$
4	$a_4 = 3 \cdot a_3 - 5 = 3 \cdot (-38) - 5 = -119$

Portanto, a sequência pedida é:

$$(-2, -11, -38, -119, ...)$$

R2. Descrever, por meio de um exemplo de expressão do termo geral, a sequência (0, 6, 12, 18, 24, 30, ...).

▶ **Resolução**

Para $n = \mathbf{1}$, temos: $a_1 = 0 = 6 \cdot 0 = 6 \cdot (\mathbf{1} - 1)$

Para $n = \mathbf{2}$, temos: $a_2 = 6 = 6 \cdot 1 = 6 \cdot (\mathbf{2} - 1)$

Para $n = \mathbf{3}$, temos: $a_3 = 12 = 6 \cdot 2 = 6 \cdot (\mathbf{3} - 1)$

Para n qualquer, temos: $a_n = 6 \cdot (n - 1)$

Logo, um termo geral possível é: $a_n = 6(n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

R3. Considerar a sequência numérica definida por $f(n) = 3n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Calcular os quatro primeiros termos.

b. Determinar a ordem do termo 163.

c. Verificar se 111 pertence a essa sequência.

▶ **Resolução**

a. **Determinação dos primeiros termos de $f(n) = 3n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$**

n	$f(n) = 3n + 1$
1	$f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$
2	$f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$
3	$f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$
4	$f(4) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$

Portanto, os quatro primeiros termos da sequência são: 4, 7, 10 e 13.

b. Devemos calcular n, $n \in \mathbb{N}^*$, tal que $f(n) = 163$.

$$3n + 1 = 163 \Rightarrow n = \frac{163 - 1}{3} \Rightarrow n = 54$$

Logo, 163 é o 54º termo da sequência.

c. Devemos verificar se existe n, $n \in \mathbb{N}^*$, tal que $3n + 1 = 111$.

$$3n + 1 = 111 \Rightarrow n = \frac{111 - 1}{3} \Rightarrow n = \frac{110}{3}$$

Como $\frac{110}{3} \notin \mathbb{N}^*$, concluímos que 111 não pertence à sequência.

Usando planilhas eletrônicas para determinar os termos de uma sequência

Algumas vezes, o termo geral de uma sequência é dado por uma lei tal que, para calcular um termo, é necessário conhecer os termos anteriores. Por exemplo, observe a sequência dada pela lei de formação:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 10 \\ a_n = n + a_{n-1} - a_{n-2}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Como você faria para calcular o termo a_{57} dessa sequência?

Para calcular o termo a_{57}, seria necessário conhecer os valores de a_{56} e a_{55}. Mas, para calcular esses valores, seria necessário saber os valores de a_{54} e a_{53} e assim por diante; ou seja, para determinar o termo a_{57}, seria preciso calcular todos os termos do a_3 ao a_{56}.

Perceba que realizar esse procedimento fazendo as contas uma a uma, mesmo usando uma calculadora, seria extremamente trabalhoso. Uma maneira de facilitar esse processo seria usar uma planilha eletrônica, como mostrado a seguir.

Vamos usar duas colunas da planilha: A e B. A coluna A será usada para os valores de n, e a coluna B, para os valores de a_n.

Inicialmente, para preencher a coluna A, basta digitar 1 na célula A2 e, na célula A3, digitar a fórmula: =A2+1

(Adiciona 1 ao valor da célula A2)

Para preencher as próximas células dessa coluna, basta selecionar a célula A3, levar o cursor até o canto inferior direito da célula e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção para baixo, até onde for conveniente; no nosso caso, pelo menos até $n = 57$.

B4 | *Fórmula* =A4+B3–B2

	A	B
1	***n***	a_n
2	1	−2
3	2	10
4	3	15
5	4	
6	5	
7	6	
8	7	
9	8	

B58 | *Fórmula* =A58+B57–B56

	A	B
1	***n***	a_n
2	1	−2
3	2	10
4	3	15
5	4	9
6	5	−1
7	6	−4
⋮	⋮	⋮
52	51	63
53	52	57
54	53	47
55	54	44
56	55	52
57	56	64
58	57	69
59	58	

Para copiar a fórmula para as outras células da coluna, basta selecionar a célula B4, levar o cursor até o canto inferior direito da seleção e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção para baixo. Assim, preenchemos os valores de a_n até $n = 57$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Digitamos os valores de a_1 e de a_2 nas células B2 e B3, respectivamente.
Então, na célula B4, digitamos a fórmula: =A4+B3–B2
(No caso da sequência, o valor de A4 é o valor correspondente a ***n***, o valor de B3 é o correspondente a $\boldsymbol{a_{n-1}}$, e o valor de B2 é o correspondente a $\boldsymbol{a_{n-2}}$)

Assim, encontramos o termo a_{57} da sequência: $a_{57} = 69$

Observação

Note que, para determinar qualquer outro termo dessa sequência, bastaria continuar arrastando a seleção da célula B4 até a célula conveniente.

5 a. A cada 28 anos, os calendários se repetem, com as datas caindo sempre no mesmo dia da semana.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, determine os cinco primeiros termos das sequências numéricas definidas pelas leis:

a. $f(n) = 4n - 8$ **1 a.** −4, 0, 4, 8 e 12.

b. $f(n) = -3$ **1 b.** −3, −3, −3, −3 e −3.

c. $f(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2$ **1 c.** $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{9}{2}$, 8 e $\frac{25}{2}$.

2. Determine e escreva os quatro primeiros termos das sequências numéricas definidas pelas seguintes leis:

a. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 5n, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ **2 a.** 4, 40, 600 e 12.000.

b. $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_n\ 3^n \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ **2 b.** $-\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{243}{2}$ e $-\frac{19.683}{2}$.

c. $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = (a_{n-1})^{-2}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ **2 c.** −2, $\frac{1}{4}$, 16 e $\frac{1}{256}$.

3. Escreva uma lei de formação para as seguintes sequências:

a. (0, 2, 4, 6, 8, 10, ...)

b. (17, 17, 17, 17, ...)

c. (−3, 4, 11, 18, ...)

d. $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, ...\right)$

e. (−5, 5, −5, 5, ...)

3. Respostas no *Suplemento para o professor*.

4. Considere a sequência determinada pela lei:

$\begin{cases} a_1 = x - 1 \\ a_n = x \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ **4.** (−4, 12, −36, 108, ...) ou (3, 12, 48, 192, ...).

Sabendo que $a_2 = 12$, escreva os elementos dessa sequência.

5. Pesquise e obtenha o calendário (gregoriano) do ano em que você nasceu, os calendários de 28 e de 56 anos antes e os de 28 e 56 anos depois de nascido. Compare-os.

a. O que você descobriu sobre esses calendários?

b. Escreva uma sequência de cinco termos com anos que têm calendários similares. **5 b.** Resposta pessoal.

6. Suponha que a lei de formação que determina uma sequência associe cada número natural a um termo $a_n = f(n)$. Resolva os itens a seguir.

a. Represente o primeiro termo dessa sequência. **6 a.** a_0

b. Considerando $n \in \mathbb{N}$, a lei de formação $f(n) = 2n - 1$ da sequência de números naturais ímpares mencionada anteriormente precisará ser alterada. Por quê?

c. Escreva uma nova lei de formação para determinar a sequência de números naturais ímpares considerando $n \in \mathbb{N}$.

6 c. $f(n) = 2n + 1$

6 b. A lei de formação precisará ser alterada porque, ao substituir n por 0, devemos obter 1, que é o primeiro número natural ímpar.

8. Não; pode ser, por exemplo, 6, caso a lei de formação seja: $a_n = -\frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{n}{6}$

Se julgar oportuno, comentar com os estudantes que não podemos presumir o próximo termo sem conhecer a lei de formação de uma sequência.

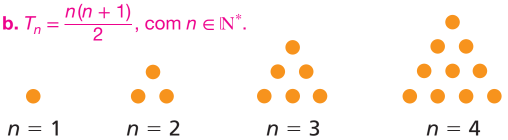
7. Por que na sequência do exemplo **b** da página 178 se considerou $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e não $n \in \mathbb{N}^*$? **7.** Porque a sequência apresentada é finita.

8. **ARGUMENTAÇÃO** Dada a representação da sequência infinita (1, 3, 5, ...), podemos afirmar que o próximo elemento é, com certeza, 7? Por quê?

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

9. A quantidade de pontos nas figuras a seguir forma a sequência de números triangulares. Observe e faça o que se pede.

9 b. $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.



a. Calcule os valores numéricos de $n \cdot (n + 1)$ para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ e compare-os com os números de pontos das figuras. **9 a.** 2, 6, 12, 20. Para cada n, o valor de $n \cdot (n+1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura.

b. Determine uma lei de formação que dá o número de pontos da enésima figura dessa sequência. **9 c.** 91 pontos.

c. Indique quantos pontos formarão a 13ª figura.

d. Responda: essa sequência tem uma figura com 110 pontos? E com 120 pontos? **9 d.** Não; sim.

10. Considere a sequência numérica infinita a seguir e calcule o valor das subtrações em cada item.

(−5, −1, 3, 7, 11, 15, 19, ...)

a. $a_2 - a_1$ **10 a.** 4

b. $a_3 - a_2$ **10 b.** 4

c. $a_4 - a_3$ **10 c.** 4

d. $a_5 - a_4$ **10 d.** 4

e. $a_6 - a_5$ **10 e.** 4

f. $a_7 - a_6$ **10 f.** 4

11 c. Espera-se que os estudantes percebam que basta adicionar 4 ao valor de a_n para determinar a_{n+1}.

11. Analisando os resultados obtidos na atividade anterior, resolva os itens a seguir.

a. Que resultado você espera encontrar para a subtração $a_n - a_{n-1}$, para $n \geqslant 2$? **11 a.** 4

b. Utilizando o valor de a_7, determine o valor de a_8. **11 b.** 23

c. Elabore uma estratégia que possa ser utilizada para determinar o valor de a_{n+1} conhecendo o valor de a_n.

12. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA** Leonardo de Pisa, também conhecido por Leonardo Fibonacci ou "filho de Bonaccio", foi um dos mais talentosos matemáticos da Idade Média. Entre suas descobertas, pode ser citada a "sequência de Fibonacci":

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)

a. **EM DUPLA** Analisando os sete primeiros termos dessa sequência, descubra o padrão de formação para essa sequência e escreva um parágrafo para explicar sua descoberta. Você pode resolver esse item com um colega.

b. Utilizando o padrão de formação identificado no item anterior e sabendo que $n \in \mathbb{N}^*$, escreva os termos a_8, a_9 e a_{10} dessa sequência. **12 b.** $a_8 = 21$; $a_9 = 34$; $a_{10} = 55$.

c. Escreva a lei de formação dessa sequência.

d. A "sequência de Fibonacci" pode ser aplicada no desenvolvimento de diversos padrões relacionados a fenômenos naturais. Faça uma pesquisa e identifique algumas dessas aplicações. **12 d.** Resposta pessoal.

12 a. Espera-se que os estudantes percebam que, a partir do terceiro termo, cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores.

12 c. $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \end{cases}$, com $n \geqslant 3$.

Progressões aritméticas

O dono de uma papelaria preparou um quadro com o valor a ser pago de acordo com a quantidade de fotocópias simples pedida pelos clientes.

Relação entre o número de fotocópias simples e o valor a ser pago

Número de fotocópias simples	Valor a ser pago (R$)
1	0,40
2	0,80
3	1,20
4	1,60
5	2,00
6	2,40
7	2,80
8	3,20
9	3,60
10	4,00

KUNAKORN RASSADORNYINDEE/ ISTOCK/GETTY IMAGES

Pessoa utilizando impressora multifuncional para tirar fotocópias.

Observe que o valor a ser pago, em função do número de fotocópias simples, determina a sequência: (0,40; 0,80; 1,20; 1,60; 2,00; 2,40; 2,80; 3,20; 3,60; 4,00).

Os termos dessa sequência, a partir do segundo, são obtidos adicionando a constante 0,40 ao termo antecedente. Esse é um exemplo de **progressão aritmética**.

Uma **progressão aritmética (PA)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando-se ao anterior uma constante r, chamada de **razão da PA**.

A razão pode ser calculada fazendo $r = a_n - a_{n-1}$, para qualquer $n \geqslant 2$.

Observe os exemplos.

a. $(-7, -4, -1, 2, 5)$ é uma PA e sua razão é:
$\boldsymbol{r = a_2 - a_1} = -4 - (-7) = 3$

b. $(32, 12, -8, ...)$ é uma PA e sua razão é:
$\boldsymbol{r = a_3 - a_2} = -8 - 12 = -20$

c. $(6, 6, 6, 6, ...)$ é uma PA e sua razão é:
$\boldsymbol{r = a_4 - a_3} = 6 - 6 = 0$

Em relação à classificação de uma PA, ela pode ser:

- **crescente**, quando $\boldsymbol{r > 0}$, ou seja, quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior;
- **decrescente**, quando $\boldsymbol{r < 0}$, ou seja, quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior;
- **constante**, quando $\boldsymbol{r = 0}$, ou seja, quando todos os termos têm o mesmo valor.

Considere os exemplos.

a. $\left(2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, ...\right)$ é uma PA crescente $\left(r = \frac{1}{2}\right)$.

b. $(4, 1, -2, -5, -8, -11, ...)$ é uma PA decrescente $(\boldsymbol{r} = -3)$.

c. $(-3, -3, -3, -3, ...)$ é uma PA constante $(\boldsymbol{r} = 0)$.

Observações

- Note que a expressão do termo geral é a lei de formação de uma função e que n é o número de termos da PA até o termo a_n.
- Quando o primeiro termo de uma PA é representado por a_0, o termo geral é dado por: $a_n = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$.

Termo geral de uma PA

Em uma PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$ de razão r, podemos escrever qualquer termo em função do primeiro. Para isso, basta considerar a definição de PA:

$$a_2 = a_1 + r \qquad a_3 = a_2 + r \qquad a_4 = a_3 + r$$
$$a_3 = (a_1 + r) + r \qquad a_4 = (a_1 + 2r) + r$$
$$a_3 = a_1 + 2r \qquad a_4 = a_1 + 3r$$

Se continuarmos seguindo o mesmo raciocínio, chegaremos à conclusão de que o **termo geral** é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

Atividades resolvidas

R4. Descrever a sequência (8, 15, 22, 29, 36, ...) por meio da expressão de seu termo geral.

▸ Resolução

Nessa sequência, cada um dos termos, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com 7. Então, essa sequência é uma PA de razão $r = 7$ e primeiro termo $a_1 = 8$.

Como o termo geral de uma PA pode ser dado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$a_n = 8 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow a_n = 8 + 7n - 7 \Rightarrow a_n = 1 + 7n$

Portanto, o termo geral dessa sequência é $a_n = 1 + 7n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

R5. Camila estabeleceu como meta para seus treinos que a cada semana nadaria 400 metros a mais que na semana anterior. Sabe-se que, na segunda semana, ela nadou 1.100 m. Quantos metros nadará na décima semana?

▸ Resolução

A sequência dos percursos de Camila é uma PA de razão $r = 400$ e $a_2 = 1.100$. Queremos obter a_{10}. Observe o esquema que relaciona a_{10} com a_2 e r:

$$a_2 \xrightarrow{+r} a_3 \xrightarrow{+r} a_4 \xrightarrow{+r} a_5 \xrightarrow{+r} a_6 \xrightarrow{+r} a_7 \xrightarrow{+r} a_8 \xrightarrow{+r} a_9 \xrightarrow{+r} a_{10}$$

$a_{10} = a_2 + 8 \cdot r \Rightarrow a_{10} = 1.100 + 8 \cdot 400 \Rightarrow a_{10} = 4.300$

Portanto, Camila nadará 4.300 metros na décima semana.

R6. Dados três termos consecutivos de uma PA, a_p, a_q, a_s, nessa ordem, escrever a_q em função de a_p e a_s.

▸ Resolução

Pela definição de PA, temos: $r = a_q - a_p$ e $r = a_s - a_q$

Assim: $a_q - a_p = a_s - a_q \Rightarrow 2a_q = a_s + a_p$

Portanto, $a_q = \dfrac{a_p + a_s}{2}$, ou seja, dados três termos consecutivos de uma PA, o termo do meio é a **média aritmética** dos outros dois.

R7. Em uma estrada, um projeto de segurança pública prevê a instalação de cinco postos de apoio aos motoristas. Esses postos devem se situar ao longo da estrada a igual medida de distância um do outro e dos marcos km 4 e km 250. Determinar a localização desses postos.

▶ **Resolução**

Este problema equivale a interpolar cinco meios aritméticos entre 4 e 250.

Interpolar meios aritméticos significa inserir termos entre os que já foram dados de maneira que a sequência seja uma PA. Nesse caso:

$$4, \underbrace{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6}_{\text{cinco meios aritméticos}}, 250$$

Assim, a PA considerada contém sete termos, sendo $a_1 = 4$ e $a_7 = 250$.

Como $a_7 = a_1 + 6r$, segue que:

$250 = 4 + 6r \Rightarrow r = 41$

Agora, podemos calcular:

$a_2 = 4 + 1 \cdot 41 \Rightarrow a_2 = 45$

$a_3 = 4 + 2 \cdot 41 \Rightarrow a_3 = 86$

$a_4 = 4 + 3 \cdot 41 \Rightarrow a_4 = 127$

$a_5 = 4 + 4 \cdot 41 \Rightarrow a_5 = 168$

$a_6 = 4 + 5 \cdot 41 \Rightarrow a_6 = 209$

Logo, os postos de apoio aos motoristas devem ser instalados nos quilômetros 45, 86, 127, 168 e 209.

R8. Quantos múltiplos de 6 existem entre 4.000 e 5.000?

▶ **Resolução**

A sequência dos múltiplos de 6 é uma PA de razão 6.

O primeiro múltiplo de 6 existente nesse intervalo é $a_1 = 4.002$ e o último é $a_n = 4.998$.

Substituindo esses valores na expressão $a_n = a_1 + (n - 1)r$, obtemos:

$4.998 = 4.002 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow n = 167$

Portanto, existem 167 múltiplos de 6 entre 4.000 e 5.000.

R9. Determinar os cinco termos de uma PA sabendo que o produto dos extremos é igual a -48 e que a soma dos demais termos é igual a 12.

▶ **Resolução**

Os termos dessa PA podem ser indicados da seguinte forma: $x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} (x - 2r) \cdot (x + 2r) = -48 \\ (x - r) + (x) + (x + r) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4r^2 = -48 \quad \text{(I)} \\ 3x = 12 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos: $3x = 12 \Rightarrow x = 4$

Substituímos x por 4 na equação (I):

$4^2 - 4r^2 = -48 \Rightarrow 4r^2 = 64 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$ ou $r = -4$

- Se $r = -4$, temos a PA $(12, 8, 4, 0, -4)$.
- Se $r = 4$, temos a PA $(-4, 0, 4, 8, 12)$.

Logo, os termos da PA são -4, 0, 4, 8 e 12.

16 d. Crescente; $r = \frac{1}{1.000}$; $a_n = \frac{n}{1.000}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

13. Identifique quais das sequências são PA. **13.** Alternativas **a** e **d**.

a. (3, 10, 17, 24)

b. $\left(\frac{1}{1.000}, \frac{1}{500}, \frac{3}{1.000}, \frac{3}{500}, \ldots\right)$

c. $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$

d. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots\right)$

14. Calcule os cinco primeiros termos de cada PA.

a. $a_1 = 12$ e $r = 7$ **14 a.** 12, 19, 26, 33 e 40.

b. $a_1 = 12$ e $r = -7$ **14 b.** 12, 5, -2, -9 e -16.

c. $a_1 = -2$ e $r = \frac{1}{2}$ **14 c.** $-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$ e 0.

d. $a_1 = 12$ e $r = -0{,}25$ **14 d.** 12; 11,75; 11,5; 11,25 e 11.

15. PENSAMENTO COMPUTACIONAL Escreva um passo a passo para explicar o que se deve calcular para concluir se uma PA de razão r é crescente, decrescente ou constante. **15.** Resposta no *Suplemento para o Professor*.

16. Classifique cada PA em crescente, decrescente ou constante, identificando a razão de cada uma. A seguir, considerando o primeiro termo e a razão, obtenha uma lei de formação para essas progressões aritméticas.

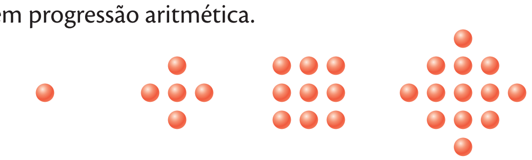
a. $(-2, -5, -8, -11, -14)$ **16 a.** Decrescente; $r = -3$; $a_n = 1 - 3n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b. $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \ldots)$ **16 b.** Constante; $r = 0$; $a_n = \sqrt{3}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c. $(-10, 0, 10, \ldots)$ **16 c.** Crescente; $r = 10$; $a_n = -20 + 10n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

d. $\left(\frac{1}{1.000}, \frac{1}{500}, \frac{3}{1.000}, \frac{1}{250}, \ldots\right)$

17. Na sequência de figuras, as quantidades de bolinhas estão em progressão aritmética.



1ª figura 2ª figura 3ª figura 4ª figura

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Continuando a sequência, quantas bolinhas formarão a 12ª figura? **17.** 45 bolinhas

18. Determine a razão de uma PA que tem $a_1 = 5$ e $a_{12} = 247$. **18.** 22

19. Durante os treinos para uma maratona, um atleta decidiu a cada dia aumentar em 1.400 m a medida da distância a ser percorrida. Sabendo que no segundo dia ele percorreu 2 km, quantos quilômetros ele terá percorrido no oitavo dia? **19.** 10,4 km

20. Um artesão confecciona carteiras e as vende em uma feira por R$ 14,20 cada uma. Para incentivar as vendas no atacado, ele decidiu fazer uma promoção, na qual o cliente pagará de acordo com a quantidade que comprar, limitada a 10 carteiras, segundo o quadro:

Relação entre o número de carteiras e o valor unitário

Número de carteiras	1	2	3	4
Valor unitário (R$)	14,30	13,60	12,90	12,20

Note que o valor unitário decresce em PA à medida que aumenta o número de carteiras compradas.

a. Qual é a razão dessa PA? **20 a.** –0,70

b. Se alguém comprar 10 carteiras, qual será o valor total da compra? **20 b.** R$ 80,00

c. Comparando com o valor não promocional, quanto uma pessoa economizaria se comprasse 8 carteiras na promoção? **20 c.** R$ 39,20

21. Determine o primeiro termo da PA na qual:

a. $a_{17} = -39$ e $r = 4$ **21 a.** –103

b. $a_{10} = 9$ e $r = -\frac{1}{9}$ **21 b.** 10

22. **EM DUPLA** Construa uma PA de cinco termos e troque-a com a construída por um colega. Cada um deve descobrir uma lei de formação para a PA do outro. Depois destroquem para avaliar se o colega respondeu corretamente.
22. Resposta pessoal.

23. Calcule os valores de a_1 e de r em uma PA sabendo que $a_4 = 10$ e que $a_7 + a_{13} = -25$. **23.** $a_1 = \frac{85}{4}$; $r = -\frac{15}{4}$.

24. Determine o valor de p para que a sequência $(p + 5, 3p, p^2 - 1)$ seja uma PA. **24.** $p = 1$ ou $p = 4$.

25. As medidas de comprimento dos lados de um quadrilátero estão em PA e podem ser expressas em ordem crescente por 3, $x + 7$, $x^2 - 4$ e $6x$. Qual é a medida do perímetro desse quadrilátero? **25.** 66 unidades de comprimento

26. (–12, 0, 12, 24, 36, 48)

26. Interpole quatro meios aritméticos entre –12 e 48.

27. Quantos são os múltiplos de 4 entre 101 e 3.001? **27.** 725

28. Quantos números pares existem entre os números 23 e 987? **28.** 482

29. Quantos meios aritméticos devem ser inseridos entre os números 10 e 184 para que a razão da PA obtida seja igual a 6? **29.** 28

30. Na compra de uma moto a prazo, Rui pagou R$ 3.500,00 de entrada e 12 prestações que decaíam em PA, sendo a primeira de R$ 660,00, a segunda de R$ 630,00, a terceira de R$ 600,00 e assim por diante.
30 a. R$ 330,00; R$ 360,00.

a. Qual foi o valor da última prestação? E da penúltima?

b. Qual é a soma da primeira com a última prestação? E da segunda com a penúltima? **30 b.** R$ 990,00; R$ 990,00.

c. Qual foi o valor final da moto a prazo? **30 c.** R$ 9.440,00.

31. Três números estão em PA. Qual é essa PA se o produto deles é 420 e a soma é –12? **31.** (–15, –4, 7) ou (7, –4, –15).

Representação gráfica de uma PA

Para fazer reparos na instalação elétrica, um técnico cobra R$ 120,00 pela visita mais R$ 70,00 a cada hora transcorrida. Observe o quadro a seguir.

Relação entre medida do tempo (em hora) e o custo

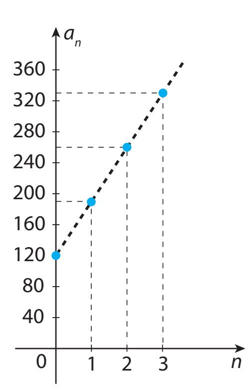
Medida de tempo (h)	0	1	2	3
Custo (R$)	120,00	190,00	260,00	330,00

O custo, em função das horas gastas no reparo, forma uma PA (120, 190, 260, 330, ...), em que $a_0 = 120$ e $r = 70$.

O termo geral (a_n) de uma PA, de primeiro termo a_0 e razão r, é uma função que associa a cada número natural n o valor $a_n = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$.

A lei de formação que descreverá a situação assemelha-se a uma função afim, mas com domínio no conjunto dos números naturais: $a_n = 70n + 120$

Assim, o gráfico dessa função será formado por pontos colineares: $(0, a_0)$, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., (n, a_n), ... Observe os pontos de coordenadas (0, 120), (1, 190), (2, 260) e (3, 330).



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade resolvida

R10. Sabendo que a soma e o produto dos três primeiros termos de uma PA crescente são iguais a -3 e 8, respectivamente, escrever a lei e construir o gráfico dessa sequência.

▶ **Resolução**

Podemos representar os três primeiros termos dessa PA por $x - r$, x e $x + r$.

Pelo enunciado: $(x - r) + x + (x + r) = -3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$

Como o produto desses primeiros termos é igual a 8, temos:

$(x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow (-1 - r) \cdot (-1) \cdot (-1 + r) = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow (r + 1) \cdot (r - 1) = 8 \Rightarrow r^2 - 1 = 8 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = -3$ ou $r = 3$

Como a razão não pode ser negativa, pois a PA é crescente, então r é igual a 3. Assim, os três primeiros termos dessa PA são -4, -1 e 2.

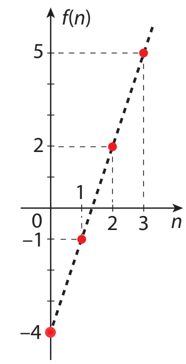
Agora, escrevemos a lei de formação:

$f(n) = a_n \Rightarrow f(n) = a_0 + nr \Rightarrow f(n) = -4 + 3n$, com $n \in \mathbb{N}$

Partindo dessa lei de formação, podemos construir o gráfico da PA.

Determinação dos primeiros termos de $f(n) = -4 + 3n$, com $n \in \mathbb{N}$

n	$f(n) = -4 + 3n$
0	$f(0) = -4 + 3 \cdot 0 = -4$
1	$f(1) = -4 + 3 \cdot 1 = -1$
2	$f(2) = -4 + 3 \cdot 2 = 2$
3	$f(3) = -4 + 3 \cdot 3 = 5$



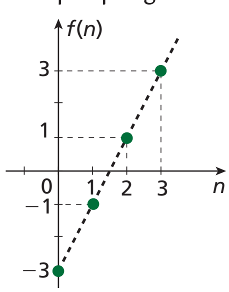
Observe que os pontos do gráfico da PA pertencem ao gráfico de uma função afim.

Atividades propostas

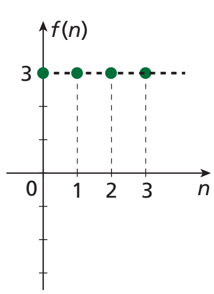
Registre em seu caderno

32. Identifique qual gráfico representa a PA (3, 1, -1, ...). 32. Alternativa **d**.

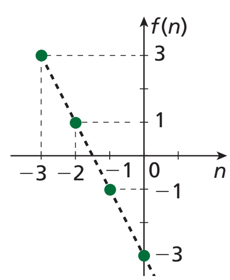
a.



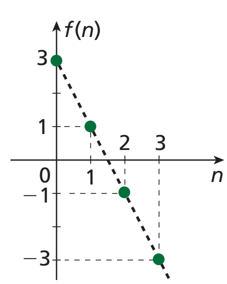
b.



c.



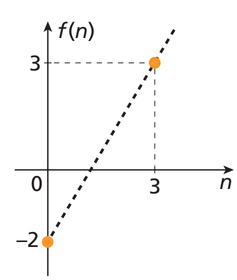
d.



33. Sendo n um número natural, construa, em um plano cartesiano para cada item, o gráfico da progressão aritmética determinada pela lei de formação: **33.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. $a_n = -n - 2$
b. $a_n = -2$
c. $a_n = n$
d. $a_n = 2n - 2$

34. Escreva os elementos da PA de cinco termos sabendo que dois de seus pontos estão representados no gráfico. **34.** $\left(-2, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}\right)$



Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos do século XVIII. Conta-se que, quando criança, o professor de sua turma pediu aos estudantes que calculassem a soma 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 + 100. Para surpresa do professor, Gauss resolveu rapidamente o desafio e foi o único a acertar a resposta: 5.050. Ele percebeu que:

1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100

101

101

101

Carl Friedrich Gauss, retratado por Christian Albrecht Jensen (1850), era filho único de pais sem instrução. Foi matemático, astrônomo e físico. Óleo sobre tela, 66 cm × 52 cm.

Como são 50 parcelas iguais a 101, a soma dos termos dessa PA é igual a:

$$50 \cdot 101 = 5.050$$

A soma dos n primeiros termos de uma PA, sendo conhecidos o primeiro e o último termos da progressão, é dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Demonstração

Considere a PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$. A soma dos n primeiros termos pode ser indicada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \text{ (I)}$$

Ou, invertendo a ordem dos elementos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1 \text{ (II)}$$

Somando membro a membro as igualdades (I) e (II), obtemos:

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_3 + a_{n-2})}_{a_1 + a_n} + ... + \underbrace{(a_{n-2} + a_3)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_{n-1} + a_2)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_n + a_1)}_{a_1 + a_n}$$

Note que $2 \cdot S_n$ tem n parcelas iguais a $a_1 + a_n$. Assim: $2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$

Portanto: $S_n = \dfrac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

Para justificar o fato de que a soma de dois termos (a_p e a_q), equidistantes dos extremos de uma PA, é igual à soma dos extremos, vamos considerar dois grupos com a mesma quantidade de termos:

$$(\underbrace{a_1, a_2, a_3, ..., a_p}_{a_p = a_1 + (p-1)r}, \; ..., \underbrace{a_q, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n}_{a_n = a_q + (n-q)r})$$

Subtraindo a_p de a_n, temos: $a_n - a_p = [a_q + (n - q)r] - [a_1 + (p - 1)r]$

Lembrando que $(p - 1) = (n - q)$, obtemos: $a_n - a_p = a_q - a_1$

Logo: $a_n + a_1 = a_q + a_p$

Atividade resolvida

R11. Calcular a soma dos 45 primeiros números naturais pares não nulos.

▸ Resolução

A sequência dos números naturais pares não nulos (2, 4, 6, ...) forma uma PA de razão 2 e primeiro termo 2.

Assim: $a_{45} = a_1 + 44r = 2 + 44 \cdot 2 = 90$

Logo:

$$S_{45} = \frac{45 \cdot (a_1 + a_{45})}{2} = \frac{45 \cdot (2 + 90)}{2} = 2.070$$

Portanto, a soma dos 45 primeiros números naturais pares não nulos é 2.070.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

35. Calcule a soma dos 24 primeiros termos de cada PA.

a. $(-57, -27, 3, ...)$ **35 a.** 6.912

b. $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{14}{3}, ...\right)$ **35 b.** 568

c. $(7, 7, 7, ...)$ **35 c.** 168

d. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, ...\right)$ **35 d.** 57

36. Calcule o valor de um terreno vendido a um cliente nas seguintes condições: 1ª parcela de R$ 600,00 e, daí em diante, parcelas que aumentam R$ 5,00 a cada mês, até completar o pagamento, em 12 anos. **36.** R$ 137.880,00

37. Uma academia de ginástica oferece o seguinte plano anual: em janeiro, o aluno paga R$ 140,00. A partir daí, o valor da mensalidade decresce R$ 8,00 a cada mês.

37 a. R$ 84,00

a. Quanto o aluno pagará no oitavo mês do plano?

b. Que valor total anual o aluno pagará? **37 b.** R$ 1.152,00

c. Em um ano, em média, quanto o aluno pagará por mês? **37 c.** R$ 96,00

38. Dada a PA (3, 19, 35, ...), qual deve ser o valor de n para que $S_n = 472$? **38.** 8

39. A soma dos 30 primeiros termos de uma PA é 1.430. Sabendo que a razão é 6, determine seu oitavo termo. **39.** $\frac{8}{3}$

40. Calcule a soma dos múltiplos de 6 compreendidos entre 230 e 650. **40.** 30.870

41. Resolva a equação.

$$\frac{x}{2} + \frac{7x}{10} + \frac{9x}{10} + ... + \frac{17x}{10} = 462$$ 41. $S = \{60\}$

42. Um teatro tem 448 lugares, distribuídos da seguinte maneira: na primeira fila, há 13 poltronas; na segunda, 15; na terceira, 17; e assim sucessivamente, até completar *n* filas. Determine o número total de filas desse teatro. 42. 16

43. **(UER – 2023)** Para preparar uma nova obra de arte, um artista plástico precisa cortar 40 pedaços de tubos de ferro da seguinte forma: o menor pedaço de tubo deve ter comprimento de 20 cm; os comprimentos dos demais pedaços de tubos devem ser maiores, de acordo com uma progressão aritmética de razão 2,5 cm. Nessas condições, os 40 tubos de ferro cortados pelo artista terão um comprimento total somado, em metros, igual a 43. Alternativa **d**.

a. 23,50 **b.** 26,81 **c.** 27,30 **d.** 27,50 **e.** 28,00

44. Em uma PA crescente de cinco termos, a soma do segundo com o terceiro é igual a −26, e o quadrado do quarto termo é 144. Determine o valor da razão e a soma dos termos dessa PA. 44. $r = \frac{50}{3}$ e $S = -\frac{70}{3}$ ou $r = \frac{2}{3}$ e $S = -\frac{190}{3}$.

Antes de prosseguir com a resolução da situação-problema, incentive os estudantes a resolver utilizando suas estratégias pessoais. Depois, reserve um momento para conversar sobre como fizeram.

Progressões geométricas

Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2022 o estado mais populoso do Brasil era São Paulo, com 44.411.238 habitantes, população essa maior que as das regiões Norte e Centro-Oeste juntas. Sabendo que a população do estado de São Paulo teve média de crescimento anual de cerca de 0,6% em relação ao censo realizado pelo IBGE em 2010, e supondo que essa média de crescimento anual se mantenha, qual seria a estimativa para a população desse estado em 2025?

Para calcular esse valor, vamos partir da população em 2022.

ALISON NUNES CALAZANS/SHUTTERSTOCK

Pedestres na Avenida Paulista, na cidade de São Paulo (SP), com o Museu de Arte de São Paulo Assis Chateaubriand (MASP) ao fundo. Foto de 2022.

População estimada do estado de São Paulo

Ano	Número de habitantes
2022	44.411.238
2023	44.411.238 · 1,006 = 44.677.705,43
2024	44.677.705,43 · 1,006 = 44.945.771,66
2025	44.945.771,66 · 1,006 = 45.215.446,29

Fonte: elaborado com base em PANORAMA. *In*: IBGE. Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/sp/panorama. Acesso em: 12 ago. 2024.

Logo, em 2025, a população estimada seria de aproximadamente 45.215.446 habitantes.

Observe que, a partir de 2023, a estimativa da população do estado de São Paulo foi obtida multiplicando-se a população do ano anterior pela constante 1,006.

A sequência (44.411.238; 44.677.705,43; 44.495.771,66; 45.215.446,29) é um exemplo de **progressão geométrica**.

Uma **progressão geométrica (PG)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante *q*, chamada de **razão da PG**.

Quando $a_{n-1} \neq 0$, a razão pode ser calculada fazendo-se $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, para qualquer $n \geqslant 2$.

Analise os exemplos.

a. (−2, −4, −8, −16, ...) é uma PG e sua razão é: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-4}{-2} = 2$

b. (1, −3, 9, −27, ...) é uma PG e sua razão é: $q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{-27}{9} = -3$

c. (10, 10, 10, 10, ...) é uma PG e sua razão é: $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{10}{10} = 1$

Classificação de uma PG

Uma PG pode ser classificada em crescente, decrescente, constante, estacionária ou oscilante, de acordo com suas características. Observe o quadro a seguir.

Exemplos de PGs e características

Exemplos de PGs	Características
$(-8, -4, -2, -1, ...)$; com $a_1 = -8$ e $q = \frac{1}{2}$ $(3, 6, 12, 24, ...)$; com $a_1 = 3$ e $q = 2$	Os termos das duas PGs estão em ordem crescente de valor. Na primeira: $\boldsymbol{a_1 < 0}$ e $\boldsymbol{0 < q < 1}$; na segunda: $\boldsymbol{a_1 > 0}$ e $\boldsymbol{q > 1}$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **crescente**.
$(-3, -9, -27, ...)$; com $a_1 = -3$ e $q = 3$ $\left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, ...\right)$; com $a_1 = 8$ e $q = \frac{1}{2}$	Os termos das duas PGs estão em ordem decrescente de valor. Na primeira: $\boldsymbol{a_1 < 0}$ e $\boldsymbol{q > 1}$; na segunda: $\boldsymbol{a_1 > 0}$ e $\boldsymbol{0 < q < 1}$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **decrescente**.
$(\sqrt{7}, \sqrt{7}, \sqrt{7}, ...)$; com $a_1 = \sqrt{7}$ e $q = 1$ $(0, 0, 0, 0, 0, ...)$; com $a_1 = 0$ e $q \in \mathbb{R}$	Em cada uma das PGs, todos os termos têm o mesmo valor. Na primeira: $\boldsymbol{a_1 \neq 0}$ e $\boldsymbol{q = 1}$; na segunda: $\boldsymbol{a_1 = 0}$ e $\boldsymbol{q \in \mathbb{R}}$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **constante**.
$(3, 0, 0, 0, ...)$; com $a_1 = 3$ e $q = 0$	Apenas o primeiro termo da PG é diferente de zero ($\boldsymbol{a_1 \neq 0}$); além disso, sua razão é $\boldsymbol{q = 0}$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **estacionária**.
$(2, -10, 50, ...)$; com $a_1 = 2$ e $q = -5$ $(-7, 14, -28, ...)$; com $a_1 = -7$ e $q = -2$	Em ambas as PGs, dois termos consecutivos têm sinais alternados. Na primeira: $\boldsymbol{a_1 > 0}$ e $\boldsymbol{q < 0}$; na segunda: $\boldsymbol{a_1 < 0}$ e $\boldsymbol{q < 0}$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **oscilante**.

Termo geral de uma PG

Dada uma PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$ de razão q, podemos escrever qualquer termo em função do primeiro. Para isso, basta considerar a definição de PG:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q$$
$$a_3 = (a_1 \cdot q) \cdot q$$
$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q$$
$$a_4 = (a_1 \cdot q^2) \cdot q$$
$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

Seguindo o mesmo raciocínio, encontraremos o **termo geral**, que ocupa a enésima posição na PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

Observe que essa fórmula é a lei de formação de uma função e que n é o número de termos da PG até o termo a_n.

Atividades resolvidas

R12. Determinar o oitavo termo da progressão geométrica $(-3, 18, -108, ...)$.

▶ **Resolução**

Primeiro, devemos encontrar a razão da PG:

$$q = \frac{-108}{18} \Rightarrow q = -6$$

Depois, basta aplicar a fórmula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ para $n = 8$, $a_1 = -3$ e $q = -6$:

$$a_8 = -3 \cdot (-6)^{8-1} \Rightarrow a_8 = 839.808$$

Logo, o oitavo termo dessa PG é 839.808.

R13. Quantos termos tem a PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, ..., \frac{81}{32}\right)$?

▶ **Resolução**

A PG tem $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{3}{2}$.

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{81}{32} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4} \Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5$$

Logo, a PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, ..., \frac{81}{32}\right)$ tem cinco termos.

R14. Interpolar três meios geométricos entre 4 e 256.

▶ **Resolução**

Interpolar meios geométricos significa inserir termos entre os que já foram dados de tal forma que a sequência seja uma PG. Nesse caso:

$$4, \underbrace{a_2, a_3, a_4}_{\text{três meios geométricos}}, 256$$

A PG considerada tem cinco termos, sendo $a_1 = 4$ e $a_5 = 256$.

$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 256 = 4 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow q = 2\sqrt{2}$ ou $q = -2\sqrt{2}$

Há duas possibilidades:

- para $q = 2\sqrt{2}$, a PG procurada é $(4, 8\sqrt{2}, 32, 64\sqrt{2}, 256)$;
- para $q = -2\sqrt{2}$, a PG é $(4, -8\sqrt{2}, 32, -64\sqrt{2}, 256)$.

R15. Obter três números em PG de modo que a soma deles seja 333 e o produto seja 27.000.

▶ **Resolução**

Sendo x o termo intermediário e $q \neq 0$ a razão da PG, podemos denotar os três termos consecutivos da seguinte maneira: $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$

Primeiro, indicamos o produto, determinando o valor de x:

$\frac{x}{q} \cdot x \cdot x \cdot q = 27.000 \Rightarrow x^3 = 27.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{27.000} \Rightarrow x = 30$

Depois, indicamos a soma:

$\frac{x}{q} + x + x \cdot q = 333 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot q^2 + x \cdot q + x - 333q = 0 \quad (\mathrm{I})$

Substituindo o valor x por 30 na equação (I), obtemos:

$30 \cdot q^2 + 30 \cdot q + 30 - 333q = 0$

$30q^2 - 303q + 30 = 0$

Resolvendo a equação, chegamos a $q = \frac{1}{10}$ ou $q = 10$.

Assim:

- para $q = \frac{1}{10}$, obtemos a PG: (300, 30, 3)
- para $q = 10$, obtemos a PG: (3, 30, 300)

Logo, os números procurados são 3, 30 e 300.

48. Na representação gráfica, para cada valor n, marcamos o valor a_n correspondente, obtendo os pontos (n, a_n) no plano cartesiano.

49. Espera-se que os estudantes percebam que os valores obtidos são estimativas, não valores exatos.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

45. Identifique quais das sequências numéricas podem ser PA e quais podem ser PG.

a. $\left(-8, -2, -\frac{1}{2}, ...\right)$ **45 a.** PG

b. (5, 15, 25, ...) **45 b.** PA

c. (1, 2, 4, 8, ...) **45 c.** PG

d. (1, 2, 3, 4, ...) **45 d.** PA

46. Classifique as PGs em constante, oscilante, crescente ou decrescente.

a. $(\pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4, \pi^5, ...)$ **46 a.** Crescente.

b. PG com $q < 0$ e $a_1 \neq 0$ **46 b.** Oscilante.

c. PG com $a_1 < 0$ e $q > 1$ **46 c.** Decrescente.

d. $\left(\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}\right)$ **46 d.** Constante.

47. Calcule a razão e escreva a lei de formação de cada PG a seguir, em função do primeiro termo e da razão.

a. $\left(-3, -\frac{12}{5}, -\frac{48}{25}, ...\right)$ **47 a.** $q = \frac{4}{5}$; $a_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

b. $(\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, ...)$ **47 b.** $q = \sqrt{3}$; $a_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3})^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c. $\left(5, \frac{10}{\pi}, \frac{20}{\pi^2}, ...\right)$ **47 c.** $q = \frac{2}{\pi}$; $a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

d. (5, −10, 20, ...) **47 d.** $q = -2$; $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

48. Que processo adotaríamos para representar graficamente as progressões da atividade anterior?

49. Por que os números obtidos a partir de 2023, na situação inicial do tópico, não são números inteiros?

50. Invertendo a ordem dos termos de uma PG de três termos e razão q, não nula, obtemos uma PG de razão $\frac{1}{q}$? **50.** Sim.

51. Quando, em uma PG de razão q, o primeiro termo é representado por a_0, qual é a lei de formação da função que determina o termo geral da PG? **51.** $a_n = a_0 \cdot q^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

52. Responda às perguntas.

a. Quais são os cinco primeiros termos da PG em que $a_1 = 4$ e $q = 6$? **52 a.** 4, 24, 144, 864 e 5.184.

b. Quais são os seis primeiros termos da PG em que $a_1 = x^2$ (com $x \neq 0$) e $q = \frac{y}{x^3}$? **52 b.** $x^2, \frac{y}{x}, \frac{y^2}{x^4}, \frac{y^3}{x^7}, \frac{y^4}{x^{10}}$ e $\frac{y^5}{x^{13}}$.

53. **EM DUPLA** Construa uma PG de cinco termos e peça a um colega que descubra uma lei de formação. Você deve descobrir uma lei de formação da PG construída por ele. Depois, destroquem para avaliar se as respostas estão corretas. **53.** Resposta pessoal.

54. Uma população de bactérias dobra seu número a cada 30 minutos. Considerando que o processo se inicia com uma única bactéria, quantas existirão após 4 horas e 30 minutos? **54.** 512 bactérias

55. Determine o primeiro termo da PG em que $a_4 = 27$ e $a_7 = 125$. **55.** $\frac{729}{125}$

56. O segundo termo de uma PG é 1 e o quinto termo é $\frac{1}{343}$. Determine a razão dessa PG. **56.** $\frac{1}{7}$

57. Determine o número de termos da PG $\left(3, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}, ..., \frac{1}{19.683}\right)$. **57.** 6 termos

58. Um atleta corre, a cada dia, o dobro da medida da distância que correu no dia anterior. Sabendo que esse atleta correu 6.600 m no quarto dia de treinamento, qual é a medida da distância que ele:

a. correrá no sexto dia? **58 a.** 26.400 m

b. correu no primeiro dia? **58 b.** 825 m

59. A sequência $(x, 2x, x^2)$ forma uma PG crescente. Determine o valor de x. **59.** 4

60. Que número deve ser adicionado a 2, 6 e 15, nessa ordem, para que a nova sequência se torne uma PG? **60.** $\frac{6}{5}$

61. Interpole quatro meios geométricos entre 6 e 192. **61.** (6, 12, 24, 48, 96, 192)

62. Três números, que estão em PG, têm soma 105 e produto 27.000. Determine esses números. **62.** 15, 30 e 60.

63. Em um quadrado, a medida do comprimento de um lado, a medida do comprimento da diagonal e a medida da área formam uma PG. Determine a razão dessa PG e as medidas dos comprimentos do lado e do perímetro desse quadrado. **63.** $\sqrt{2}$; 2; 8

64. Um capital inicial C_0 foi aplicado e cresce à taxa de i ao mês. Após o primeiro mês, o montante aplicado foi:

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i \Rightarrow C_1 = C_0(1 + i)$$

a. De quanto será o montante aplicado após o segundo mês? E após o terceiro mês? **64 a.** $C_2 = C_0(1 + i)^2$; $C_3 = C_0(1 + i)^3$.

b. Qual é a razão da PG $(C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, ...)$? **64 b.** $q = (1 + i)$

c. Utilize a fórmula do termo geral para determinar C_n (montante após n meses) em função de C_0.
64 c. $C_n = C_0(1 + i)^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Representação gráfica de uma PG

Na medicina nuclear, é importante conhecer a medida de velocidade com a qual um elemento radioativo se desintegra para saber por quanto tempo haverá radioatividade no organismo.

ODS 3

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Médica realizando exame de tomografia computadorizada em paciente no Hospital Estadual Leonardo da Vinci, Fortaleza (CE). Foto de 2022.

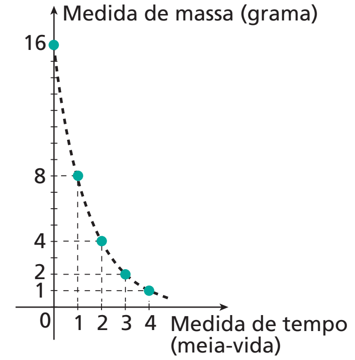
Chama-se **meia-vida** a medida de tempo necessária para desintegrar metade da medida de massa de algum elemento radioativo presente em uma amostra. Um exemplo é do isótopo radioativo do iodo, cuja meia-vida é de 8 dias, aproximadamente. Esse elemento é usado no diagnóstico de doenças da glândula tireoide.

É possível interpretar graficamente o decaimento radioativo. Suponha que se deseje representar a desintegração de 16 gramas de iodo.

A lei de formação que descreverá a situação é de uma função exponencial: $f(n) = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, em que n é a quantidade de meias-vidas ($n \in \mathbb{R}_+$) e $f(n)$ é a medida de massa.

Observe que, para $n \in \mathbb{N}$, temos a sequência (16, 8, 4, 2, 1, ...), que é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

O termo geral (a_n) de uma PG, de primeiro termo a_0 e razão q, é uma função que associa a cada número natural n o valor $a_n = a_0 \cdot q^n$. Para $a_0 \neq 0$, $q > 0$ e $q \neq 1$, essa função é similar a uma função exponencial com restrição do domínio ao conjunto dos números naturais. O gráfico dessa função será formado pelos pontos $(0, a_0)$, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., (n, a_n), ... Observe no gráfico os pontos de coordenadas (0, 16), (1, 8), (2, 4), (3, 2) e (4, 1).



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade resolvida

R16. Construir o gráfico da progressão geométrica em que $a_0 = \frac{1}{3}$ e $q = 3$.

▶ Resolução

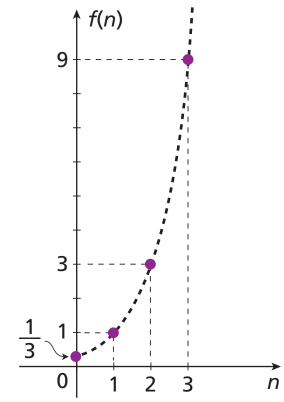
Inicialmente, escrevemos a lei de formação dessa PG:

$a_n = f(n) = \frac{1}{3} \cdot 3^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando a lei, encontramos alguns pontos do gráfico da PG:

- para $n = 0$: $f(0) = \frac{1}{3} \cdot 3^0 = \frac{1}{3}$
- para $n = 1$: $f(1) = \frac{1}{3} \cdot 3^1 = 1$
- para $n = 2$: $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = 3$
- para $n = 3$: $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$

Observe que os pontos do gráfico da PG pertencem ao gráfico de uma função do tipo exponencial.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

66 a. $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

65. Construa o gráfico das progressões geométricas.

65. Respostas no *Suplemento para o professor*.

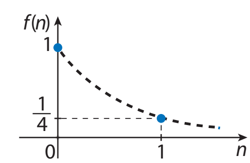
a. $(1, 2, 4, 8, ...)$

b. $\left(3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...\right)$

c. PG com $a_0 = -8$ e $q = \frac{1}{2}$

d. PG com $a_0 = \sqrt{3}$ e $q = 1$

66. Observe o gráfico de uma PG.



a. Qual é a lei de formação dessa PG?

b. Qual é o décimo termo dessa PG? 66 b. $\frac{1}{4^9}$

Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

A soma dos n primeiros termos de uma PG, sendo conhecidos o primeiro termo a_1 e a razão q, com $q \neq 1$, é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Demonstração

Primeiro, consideramos a soma dos termos da PG: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ (I)

Depois, multiplicamos os dois membros da sentença pela razão q, com $q \neq 1$:

$q \cdot S_n = q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$

$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_n \cdot q$

$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n+1}$ (II)

Subtraindo (I) de (II), vem:

$q \cdot S_n - S_n = (a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$

$q \cdot S_n - S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_{n+1} - a_1 - a_2 - a_3 - ... - a_n$

$S_n \cdot (q - 1) = a_{n+1} - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{[a_1 \cdot q^{(n+1)-1}] - a_1}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 \cdot q^n) - a_1}{q - 1}$

Logo, para $q \neq 1$, temos: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

Observação

Para a PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de razão $q = 1$, temos:

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + ... + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 + a_1 \cdot 1 + ... + a_1 \cdot 1^{n-1} =$

$= \underbrace{a_1 + a_1 + ... + a_1}_{n \text{ vezes}} = n \cdot a_1$

Atividades resolvidas

R17. Calcular a soma dos sete primeiros termos da PG (6, 18, 54, ...).

▶ **Resolução**

Essa PG tem $a_1 = 6$ e $q = 3$. Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG, obtemos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{6 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow$$

$$S_7 = \frac{6 \cdot (2.187 - 1)}{2} \Rightarrow S_7 = 3 \cdot 2.186$$

$$S_7 = 6.558$$

Portanto, a soma dos sete primeiros termos dessa PG é 6.558.

R18. Determinar o valor de x na sentença $4x + 16x + ... + 4.096x = 10.920$, sabendo que os termos do primeiro membro formam uma PG.

▶ **Resolução**

A PG $(4x, 16x, ..., 4.096x)$ tem $a_1 = 4x$, $a_n = 4.096x$ e $q = 4$, com $x \neq 0$.

Vamos calcular o valor de n utilizando a fórmula do termo geral de uma PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 4.096x = 4x \cdot 4^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.024 = 4^{n-1} \Rightarrow 4^5 = 4^{n-1} \Rightarrow 5 = n - 1 \Rightarrow n = 6$$

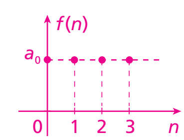
Agora, aplicamos a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{4x \cdot (4^6 - 1)}{4 - 1} \Rightarrow 10.920 = 4x \cdot \frac{4.095}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10.920 = 5.460x \Rightarrow x = 2$$

Então, x é igual a 2.

68. Espera-se que os estudantes percebam que, se $q = 1$, a PG assemelha-se a uma função constante, com restrição do domínio aos números naturais. Nesse caso, a lei de formação é $f(n) = a_0$, com $n \in \mathbb{N}$.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

74 a. 1,875 ou $\frac{15}{8}$ **74 b.** $\simeq 1,998$; $\simeq 1,999$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

67. A soma dos n termos de uma PG finita é 504. Sabe-se que $a_n = 256$ e $q = 2$. Calcule o primeiro termo da PG. **67.** 8

68. Se $q = 1$, como é o gráfico da PG cuja lei de formação é $a_n = a_0 \cdot q^n$?

69. Qual é a soma dos n primeiros termos de uma PG de razão $q = 0$?

70. Calcule x na equação a seguir, sabendo que os termos do primeiro membro formam uma PG. **70.** 2

$$7x + 21x + ... + 189x = 560$$

71. A cada ano, o número de passageiros de uma empresa de ônibus cresce 4%. Se em 2014 foram transportadas 500.000 pessoas, calcule o total de passageiros transportados de 2014 a 2020.
71. Aproximadamente 3.949.147 passageiros.

72. Em janeiro do ano passado, uma empresa produziu 25.000 unidades de certo produto. A partir de fevereiro, a cada mês, a produção foi 15% maior que no mês anterior. Determine a quantidade total de unidades que essa empresa produziu nesse ano. **72.** Aproximadamente 725.042 unidades.

73. No sábado passado, Paula enviou uma mensagem por *e-mail* para três amigos. No dia seguinte, cada amigo de Paula que recebeu o *e-mail* o enviou para três amigos e assim por diante. Se nenhuma pessoa recebeu a mensagem mais de uma vez, descubra quantas pessoas receberam a mensagem até o sábado seguinte. **73.** 9.840 pessoas.

74. Considere a PG infinita, em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.

a. Calcule a soma dos quatro primeiros termos.

b. Usando uma calculadora, responda: qual é a soma dos dez primeiros termos? E dos vinte primeiros?

c. Conforme aumentamos o número de termos adicionados, você acha que a soma se aproxima de algum número? Se sim, qual? **74 c.** Sim, aproxima-se do número 2.

75. **(PUC-Rio – 2024)** Seja (a_n) uma progressão geométrica de números reais positivos. Sabe-se que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 31$ e que $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 992$.
Qual é o valor de $a_4 + a_5 + a_6 + a_7$? **75.** Alternativa **d.**

a. 100
b. 101
c. 117
d. 120
e. 125

69. Espera-se que os estudantes percebam que $S_n = a_1$ para $q = 0$.
Se julgar oportuno, peça-lhes que apliquem a fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ e verifiquem sua validade nesse caso.

Soma dos infinitos termos de uma PG

Já estudamos a soma nos n primeiros termos de uma PG para $n \in \mathbb{N}^*$. Agora, veremos como calcular a soma dos termos de uma PG infinita. Para isso, vamos primeiro analisar o valor de algumas potências. Observe.

Valores de $\left(\frac{3}{4}\right)^n$, para $n = 1, 2, 3, ..., 10$

n	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$
1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$
2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0{,}5625$
3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} = 0{,}421875$
⋮	⋮
10	$\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{59.049}{1.048.576} \simeq 0{,}056314$

Valores de $\left(-\frac{1}{5}\right)^n$, para $n = 1, 2, 3, ..., 10$

n	$\left(-\frac{1}{5}\right)^n$
1	$\left(-\frac{1}{5}\right)^1 = -\frac{1}{5} = -0{,}2$
2	$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0{,}04$
3	$\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125} = -0{,}008$
⋮	⋮
10	$\left(-\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{9.765.625} \simeq 0{,}0000001$

Observação

Vale lembrar que o módulo de um número real x é tal que:
$|x| = x$, se $x \geqslant 0$
$|x| = -x$, se $x < 0$

Analisando os valores obtidos, verificamos que, em ambas as potências, quanto maior for o valor de n, mais próximo de zero será o resultado obtido. Intuitivamente, podemos considerar que para qualquer número real a, com $0 < |a| < 1$, quanto maior for o valor de n, mais próximo de zero estará o valor de a^n. Dizemos, então, que, para $-1 < a < 1$, quando n tende a infinito, o valor de a^n tende a zero, ou, ainda, para $-1 < a < 1$, o limite de a^n, quando n tende a infinito, é igual a zero.

Em linguagem simbólica: $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$, para $-1 < a < 1$

Analise os exemplos.

a. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ **b.** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ **c.** $\lim\limits_{n \to \infty} (-0{,}6)^n = 0$

Cálculo da soma dos infinitos termos de uma PG

Para calcular a soma dos termos de uma PG infinita, vamos partir do cálculo da soma dos n primeiros termos de uma PG.

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ uma progressão geométrica na qual $q \in \mathbb{R}$ e $-1 < q < 1$, ou seja, $0 < |q| < 1$. Como vimos, quando n tende a infinito, a potência q^n tende a zero. Sabendo disso, vamos calcular o **limite** da soma S_n nesse caso.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1}$$

Logo, para $-1 < q < 1$, a soma dos infinitos termos da PG é dada por:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Atividades resolvidas

R19. Calcular a soma dos termos da PG infinita $(-8, 4, -2, 1, ...)$.

▸ **Resolução**

Primeiro, calculamos a razão q da PG:

$q = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

Como $-1 < q < 1$ e $a_1 = -8$, utilizamos a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{-8}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-8}{\frac{2 + 1}{2}} =$$

$$= -\frac{8}{\frac{3}{2}} = -8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{16}{3}$$

Assim, a soma dos infinitos termos dessa PG é $-\frac{16}{3}$.

R20. Determinar o valor de:

$10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + ...$

▶ **Resolução**

Os termos adicionados formam uma PG infinita, na qual $q = \frac{1}{2}$ e $a_1 = 10$.

Como $-1 < q < 1$, aplicamos a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{10}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 10 \cdot 2 = 20$$

Logo: $10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + ... = 20$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

76. Calcule a soma dos infinitos termos de cada PG.

a. $\left(15, 10, \frac{20}{3}, ...\right)$ **76 a.** 45

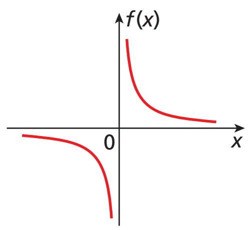
b. $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, ...\right)$ **76 b.** -2π

77. Calcule o valor de:

a. $2 - 1 + \frac{1}{2} - ...$ **77 a.** $\frac{4}{3}$

b. $12 - 4 + \frac{4}{3} - ...$ **77 b.** 9

78. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, observe o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Quando x tende a infinito, para qual valor tende $f(x)$?

78. Quanto maior ou quanto menor o valor de x, mais o gráfico de f se aproxima do eixo x. Portanto, quando x tende a infinito, $f(x)$ tende a zero.

79. Imagine que um atleta corra 20 km no primeiro dia de treinamento, 10 km no segundo, 5 km no terceiro, e assim sucessivamente, até parar de correr. Nessa sequência de treinamentos, o atleta conseguiria totalizar 40 km de corrida?

79. Não, pois o atleta teria de prolongar indefinidamente seu treinamento.

80. Uma bola é solta de altura medindo 100 m, atinge o solo e sobe a uma medida de altura igual à metade da anterior. Esse movimento ocorre sucessivamente até ela parar. Qual é a medida da distância total percorrida pela bola?

80. 300 m

81. Considere um quadrado de lado a. Unindo-se os pontos médios dos lados desse quadrado, obtém-se um novo quadrado. Unindo-se os pontos médios dos lados do novo quadrado, obtém-se um terceiro quadrado, e assim por diante. Qual é o limite da soma das medidas das áreas determinadas por esses quadrados? **81.** $2a^2$

Problemas que envolvem PA e PG

Depois de estudar progressões aritméticas e progressões geométricas, vamos resolver alguns problemas que envolvem essas sequências simultaneamente.

1. Determinar os valores de x e y de modo que a sequência $(x, 7, y)$ seja uma PA e que $(y, 15, 75)$ seja uma PG.

Se x, 7 e y estão em PA, então:

$7 - x = y - 7 \Rightarrow x + y = 14$

Se y, 15 e 75 estão em PG, então:

$\frac{15}{y} = \frac{75}{15} \Rightarrow y = 3$

Substituindo y por 3 na equação $x + y = 14$, obtemos: $x + 3 = 14 \Rightarrow x = 11$

Logo, os valores de x e y são, respectivamente, 11 e 3.

2. As empresas A e B foram inauguradas na mesma data. A empresa A manteve-se em crescimento: no primeiro ano, obteve lucro de R$ 100.000,00; após dois anos, obteve lucro de R$ 110.000,00; após três anos, R$ 120.000,00; e assim por diante. A empresa B também se manteve em crescimento: no primeiro ano, obteve lucro de R$ 20.000,00; após dois anos, obteve lucro de R$ 40.000,00; após 3 anos, R$ 80.000,00; e assim por diante.

a. Representar graficamente o crescimento anual do lucro das duas empresas.

A sequência dos lucros da empresa A forma uma PA:

(100.000, 110.000, 120.000, ...), em que $a_1 = 100.000$ e $r = 10.000$

A lei de formação dessa PA é:

$$a_n = 100.000 + 10.000 \cdot (n - 1), \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

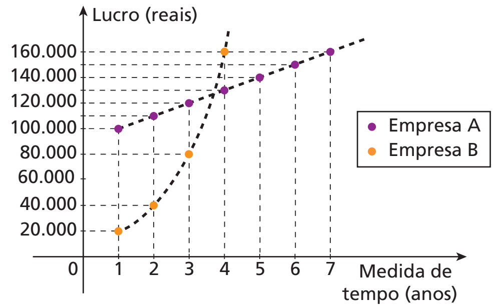
Já a sequência dos lucros da empresa B forma uma PG:

(20.000, 40.000, 80.000, ...), em que $a_1 = 20.000$ e $q = 2$

A lei de formação dessa PG é:

$$a_n = 20.000 \cdot 2^{n-1}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

Representando graficamente a PA e a PG, temos:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observações

- Um gráfico pode ter eixos em escalas diferentes, pois isso não impede uma análise qualitativa da informação.
- O tempo é uma grandeza contínua, mas estamos tratando de valores discretos, considerando que os lucros das empresas são contabilizados apenas uma vez ao ano.

Observação

Para identificar qual é o crescimento mais rápido, podemos comparar a variação do lucro de cada empresa ao longo de um mesmo intervalo.

b. Qual dos lucros cresce mais rapidamente: o da empresa A ou o da empresa B?

Comparando as representações gráficas, percebemos que o lucro da empresa B cresce mais rapidamente que o da empresa A.

Podemos verificar que, após quatro anos de funcionamento, a empresa B atingiu um lucro de R$ 160.000,00 (8 vezes o lucro inicial); já a empresa A, após esse mesmo período, atingiu um lucro de R$ 130.000,00 (1,3 vez o lucro inicial).

Atividades propostas

Registre em seu caderno

82. Sendo $\left(10, x, \frac{19}{2}\right)$ uma PA e $(1, x - 8, y)$ uma PG, determine x e y. **82.** $x = \frac{39}{4}$ e $y = \frac{49}{16}$.

83. $a = 10$, $b = \frac{7}{2}$, $c = 4$, $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$.

83. A sequência $\left(20, a, 5, \frac{5}{2}\right)$ é uma PG de razão q. A sequência $(5q, 3, b, c)$ é uma PA de razão r. Calcule os valores de a, b, c, q e r.

84. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA **(Unifor – 2023)** O Dia do Matemático é comemorado no Brasil em 6 de maio. Essa data foi escolhida em homenagem ao matemático brasileiro Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido como Malba Tahan, que nasceu nesse dia em 1895.

Malba Tahan foi um importante escritor de livros de matemática, que utilizava histórias e fábulas orientais para ensinar conceitos matemáticos de forma lúdica e divertida. Suas obras, como "O Homem que Calculava" e "Lendas do Deserto", são até hoje muito populares entre estudantes e entusiastas da matemática.

O Dia do Matemático é uma oportunidade para valorizar a importância dessa ciência em nossa vida e reconhecer o trabalho dos profissionais que se dedicam a estudá-la e ensiná-la. A matemática é uma ferramenta fundamental em diversas áreas, como engenharia, ciência da computação, finanças, estatística, entre outras, e contribui significativamente para o desenvolvimento da sociedade como um todo.

Em comemoração ao dia do Matemático, um professor de matemática propôs o seguinte problema aos seus alunos: considere uma sequência de quatro termos formando uma PG. Subtraindo-se 2 do primeiro termo e k do quarto termo, transforma-se a sequência original em uma PA. Uma terceira sequência é obtida somando-se os termos correspondentes da PG e da PA. Finalmente, uma quarta sequência, uma nova PA, é obtida a partir da terceira sequência, subtraindo-se 2 do terceiro termo e sete do quarto. Determine a soma dos termos da PG original. O valor encontrado pelos alunos é igual a **84.** Alternativa **c.**

a. 50 **b.** 57 **c.** 65 **d.** 72 **e.** 80

85. Descubra três números positivos em PA sabendo que sua soma é igual a 90 e que, se acrescentarmos 10 ao segundo termo e 40 ao último termo, eles formarão uma PG. **85.** 20, 30, 40.

86. Uma PA e uma PG têm, ambas, o primeiro termo igual a 2. Sabe-se também que seus terceiros termos são maiores que zero e iguais e que o segundo termo da PA excede o segundo termo da PG em 1. Qual é o terceiro termo das progressões? **86.** 8

87. Sabe-se que a sequência $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é uma PA de razão $r = 4$ e que a sequência $(d_1, d_2, d_3, ...)$ é uma PG de razão q. Sabe-se, ainda, que $q = r - 1$, $d_1 = a_1 + 3$, $d_2 = a_2 + 5$ e $d_3 = a_3 + 19$.

Determine: **87 a.** $a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $d_1 = 3$; $d_2 = 9$; $d_3 = 27$.

a. os valores de a_1, a_2, a_3, d_1, d_2 e d_3.

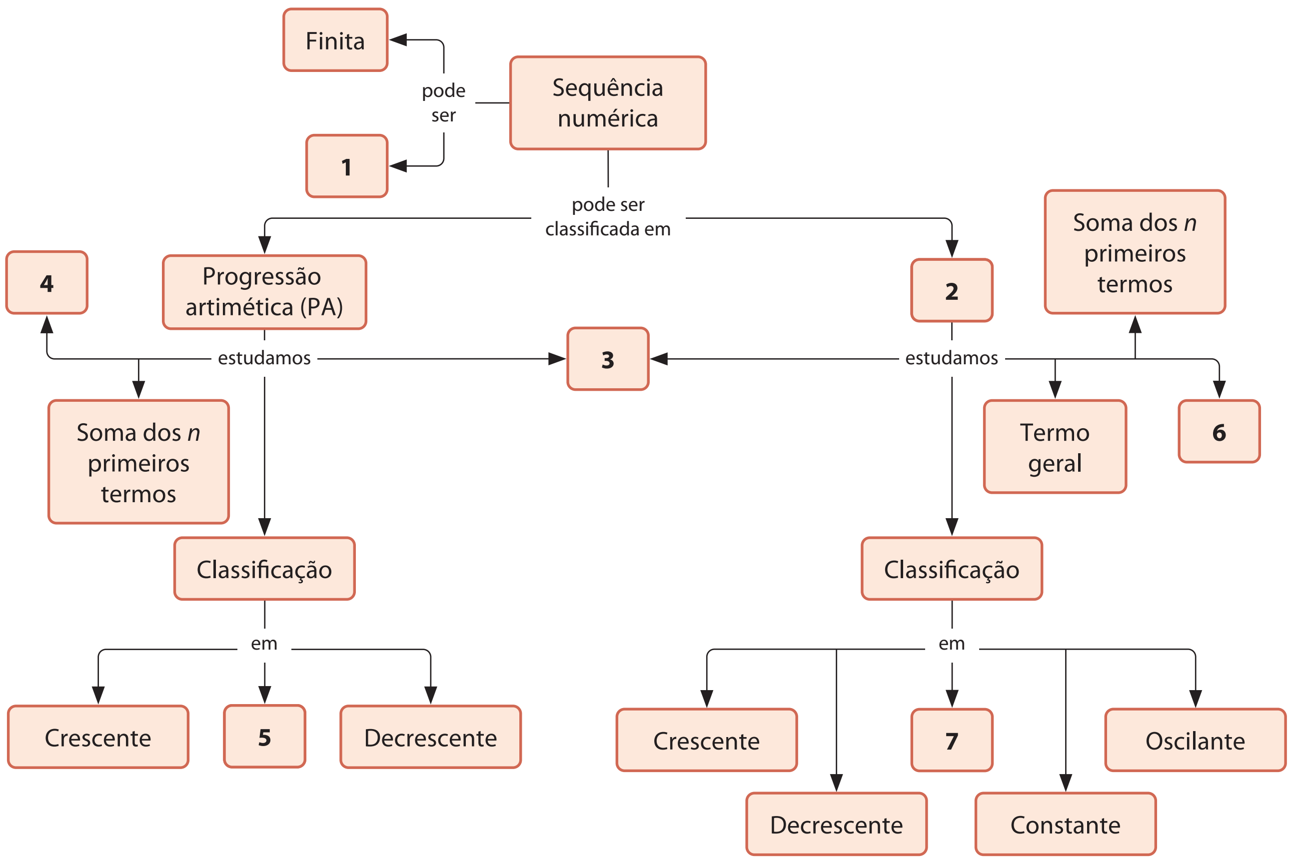
b. a soma dos 10 primeiros termos da PA. **87 b.** $S_{10} = 180$

c. a soma dos 5 primeiros termos da PG. **87 c.** $S_5 = 363$

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir que relaciona alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Conexões entre conceitos. A – 7; B – 5; C – 4; D – 1; E – 3; F – 6; G – 2.

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Estacionária
B. Constante
C. Termo geral
D. Infinita
E. Representação gráfica
F. Soma dos infinitos termos
G. Progressão geométrica (PG)

SUGESTÃO DE AMPLIAÇÃO

Livro

Desafios e enigmas: uma forma descontraída de colocar à prova seu raciocínio

Juliano Niederauer e Marla Fernanda C. de Aguiar

São Paulo: Novera, 2007.

Por meio de um texto bem-humorado, os autores exploram desafios e enigmas matemáticos que estimulam a criação de estratégias de resolução de maneira divertida. São situações que envolvem a aplicação de equações, sistemas de equação, teoria dos conjuntos, sequências, análise combinatória, probabilidade etc. Para aprender e se divertir!

REPRODUÇÃO/EDITORA NOVERA

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. As ______ (2, 5, 8, 11, ...) e (3, 12, 48, 192, ...) são determinadas, respectivamente, pelas leis de formação $a_n = 3n - 1$ e $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, com n natural não nulo. A alternativa que completa a sentença é: **Q1.** Alternativa **b.**

a. inequações
b. sequências
c. progressões geométricas
d. progressões aritméticas

Q2. A sequência (2, 4, 8, 16, ...) é uma: **Q2.** Alternativa **c.**

a. função constante.
b. progressão aritmética.
c. progressão geométrica.
d. função afim.

Q3. O termo geral da PA (7, 5, 3, ...) é: **Q3.** Alternativa **d.**

a. $a_n = 5n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$
b. $a_n = 7n$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c. $a_n = 8n - 7$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d. $a_n = 9 - 2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Q4. Os pontos do gráfico de uma PA pertencem ao gráfico de uma função: **Q4.** Alternativa **a.**

a. afim.
b. quadrática.
c. exponencial.
d. logarítmica.

Q5. Calculando a soma dos vinte primeiros termos da PA (1, 2, 3, ..., 20), obtemos: **Q5.** Alternativa **c.**

a. 110
b. 20
c. 210
d. 300

Q6. O termo geral da PG (−2, −6, −18, ...) é: **Q6.** Alternativa **b.**

a. $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
b. $a_n = (-2) \cdot 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c. $a_n = (-3) \cdot 2^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Q7. A população de um município é de 20.000 habitantes. Sabendo que essa população cresce à taxa de 2% ao ano, daqui a 10 anos ela será de aproximadamente: **Q7.** Alternativa **b.**

a. 22.200 habitantes.
b. 24.380 habitantes.
c. 27.300 habitantes.
d. 26.430 habitantes.

Q8. Os pontos do gráfico de uma PG pertencem ao gráfico de uma função do tipo: **Q8.** Alternativa **c.**

a. afim.
b. quadrática.
c. exponencial.
d. logarítmica.

Q9. Calculando a soma dos quatro primeiros termos da PG (3, 24, 192, ...), obtemos: **Q9.** Alternativa **d.**

a. 1.500
b. 200
c. 27
d. 1.755

Q10. O valor de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ é: **Q10.** Alternativa **a.**

a. 2
b. 5
c. 10
d. 7

Q11. Três números positivos estão em PA. Sua soma é igual a 30. Se acrescentarmos a eles, respectivamente, 1, 2 e 9, obteremos uma PG. Então, o menor deles é: **Q11.** Alternativa **b.**

a. 2
b. 5
c. 10
d. 7

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11
Identificar padrões numéricos e sequências.	X	X									
Resolver problemas que envolvam sequências.			X		X	X	X		X	X	X
Interpretar graficamente progressões aritméticas e progressões geométricas.				X				X			

Capítulo 9

MATEMÁTICA FINANCEIRA

CHICO FERREIRA/PULSAR IMAGENS

Loja de artigos de cerâmica feitos por quilombolas do Quilombo dos Potes, em São João da Varjota (PI). Foto de 2022.

O Censo Demográfico de 2022, do IBGE, revelou que havia 1.327.802 pessoas quilombolas no Brasil, o que representava 0,67% da população.

Os quilombolas são moradores de comunidades quilombolas e seus descendentes. Essas comunidades foram formadas por pessoas escravizadas (africanos e indígenas) que resistiram ao regime escravocrata no Brasil. Mesmo após o fim desse regime, as comunidades quilombolas continuaram existindo e surgiram outras, como territórios ocupados por grupos étnicos raciais com presença de ancestralidade negra.

As comunidades quilombolas compartilham os recursos entre seus membros e buscam ser autossuficientes, utilizando recursos locais e desenvolvendo atividades econômicas próprias, como agricultura familiar, artesanato e turismo comunitário.

Em 2023, o Grupo A do Programa Nacional de Fortalecimento da Agricultura Familiar (Pronaf) passou a atender pessoas quilombolas, visando ao desenvolvimento da agricultura familiar. Assim, pessoas quilombolas passaram a ter acesso a crédito com uma taxa de juro composto de 0,5% ao ano, com possibilidade de pagamento em até 10 anos.

Você sabe o que é juro composto? Se uma pessoa quilombola obteve um crédito de R$ 5.000,00 para pagar ao final de 2 anos, qual será o valor dessa dívida após esse período?

Aproximadamente R$ 5.050,13.

ODS 1 ODS 2
ODS 8 ODS 10
ODS 11 ODS 12

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre estes e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

OBJETO DIGITAL
Mapa clicável: Quilombos

Esse mapa clicável apresenta algumas fotos de comunidades quilombolas surgidas entre os séculos XVII e XIX e que existem no Brasil até hoje. Dessa forma, o OED visa possibilitar o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS601** e dialoga com o **TCT Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras.**

Introdução

Imagine que você está planejando comprar algo importante. Se souber calcular o juro, você pode determinar a diferença entre o valor do pagamento à vista e o parcelado, facilitando a decisão entre comprar agora em parcelas ou acumular o dinheiro até obter o valor total do que deseja comprar.

Acompanhe o problema a seguir, que envolve cálculo de juro.

Professor, este problema será retomado e resolvido no tópico *Juro simples*, na página 202.

Marcelo tem uma dívida de R$ 5.226,00. Daqui a 3 meses, ele receberá uma indenização cujo valor permitirá quitar sua dívida acrescida de juro. Segundo seus cálculos, quando receber a indenização, sua dívida, em decorrência de juro, passará a R$ 5.670,21. O que Marcelo deve fazer: pedir um empréstimo (a ser pago após 3 meses, com juro simples de 2,6% ao mês) para quitar as dívidas hoje, ou esperar os 3 meses e quitá-las com o dinheiro da indenização?

Esse problema apresenta uma situação do cotidiano em que o conhecimento de operações financeiras auxilia na tomada da melhor decisão. Neste capítulo, vamos estudar a teoria matemática que pode ser empregada para resolver problemas desse tipo, como cálculo de empréstimos, financiamentos, descontos, taxas de juro e rendimento de investimentos.

Taxa percentual

É comum encontrarmos no comércio promoções como "Leve 5 e pague 3". Esse tipo de promoção equivale a um desconto para o consumidor, que pode ser determinado da seguinte maneira: nessa promoção, não se paga por 2 das 5 unidades compradas, isto é, há um desconto de $\frac{2}{5}$. Essa fração é equivalente a $\frac{40}{100}$; por isso, dizemos que o desconto nessa promoção é de $\frac{40}{100}$ ou de 40% (lemos: "quarenta por cento").

Observações

- A expressão "por cento" vem do latim *per centum*, que significa "por cem".
- A porcentagem é um conceito relativo, ou seja, só podemos falar em "porcentagem de alguma coisa".

Observe que o desconto foi representado de duas formas distintas: na forma fracionária e na forma percentual. No exemplo dado, 40% corresponde à representação na forma de **taxa percentual**.

Taxa percentual, ou **porcentagem**, é a representação da razão entre um número real p e o número 100, que indicamos por p%.

Observe os exemplos.

a. 25% de 200 $= \frac{25}{100} \cdot 200 = 0{,}25 \cdot 200 = 50$

b. 120% de 60 $= \frac{120}{100} \cdot 60 = 1{,}2 \cdot 60 = 72$

c. 30% de 40% de 75 $= \frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot 75 = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 75 = 9$

Algumas das aplicações mais importantes sobre taxa percentual são as transações mercantis (compra e venda), que envolvem, por exemplo, descontos, lucros ou prejuízos.

Acompanhe a resolução de um problema.

O preço de uma mercadoria era R$ 100,00 e sofreu acréscimo de 20%. Vamos determinar o novo valor da mercadoria.

Primeiro, calculamos: 20% de 100 $= \frac{20}{100} \cdot 100 = 0{,}2 \cdot 100 = 20$ (acréscimo)

Depois, adicionamos o acréscimo ao valor inicial:

R$ 100,00 + R$ 20,00 = R$ 120,00 (novo valor)

Outro modo de determinar o valor da mercadoria, após sofrer o acréscimo de 20%, é efetuando o cálculo:

$100 + 0{,}2 \cdot 100 = 100 \cdot (1 + 0{,}2) = 100 \cdot (1{,}2) = 120$

Portanto, o novo valor da mercadoria é R$ 120,00.

Observe que o segundo modo apresenta o cálculo com apenas uma etapa. Esse modo pode ser generalizado da seguinte maneira. Acompanhe.

Sendo V_f o valor final da mercadoria, que é obtido pelo acréscimo ou pelo desconto de uma taxa percentual (representada por i) aplicada sobre o valor inicial (representado por V_0), temos:

$$V_f = V_0 \cdot (1 \pm i)$$

Observações

- i representa a taxa percentual e deve ser utilizada na forma de número decimal. Por exemplo, 25% corresponde a 0,25.
- Se a variação percentual é de aumento (valorização/acréscimo), usamos o termo $(1 + i)$ na fórmula.
- Se a variação percentual é de desconto (depreciação/decréscimo), usamos o termo $(1 - i)$ na fórmula.

Aumentos e descontos sucessivos

Situações em que o valor de uma mercadoria se altera mediante aumentos ou descontos sucessivos são comuns no cotidiano.

Acompanhe a situação a seguir para entender como isso funciona.

Uma mercadoria cujo valor inicial V_0 é R$ 100,00 passa por dois aumentos sucessivos, um de 5% e outro de 12%; depois, sofre um desconto de 10%. Vamos determinar o novo valor V_f da mercadoria.

Inicialmente, calculamos o valor V_1 após o primeiro aumento de 5%:

$V_1 = 100 \cdot (1 + 0,05)$

$V_1 = 100 \cdot 1,05 = 105,00$

O segundo aumento, de 12%, incide sobre R$ 105,00, não mais sobre R$ 100,00. Então, calculamos o valor V_2 após o segundo acréscimo:

$V_2 = 105 \cdot (1 + 0,12)$

$V_2 = 105 \cdot 1,12 = 117,60$

Finalmente, o desconto de 10% é calculado sobre R$ 117,60 para determinar o novo valor V_f:

$V_f = 117,60 \cdot (1 - 0,10)$

$V_f = 117,60 \cdot 0,90 = 105,84$

Portanto, o novo valor V_f da mercadoria é R$ 105,84.

Podemos calcular V_f de outro modo. Observe.

$V_f = 100 \cdot (1 + 0,05) \cdot (1 + 0,12) \cdot (1 - 0,10)$

$V_f = 100 \cdot 1,05 \cdot 1,12 \cdot 0,90 = 105,84$

Aqui, novamente, o segundo modo apresenta o cálculo em apenas uma etapa.

Logo, podemos dizer que, quando o valor inicial sofre variações sucessivas de taxas percentuais i_1, i_2, i_3, ..., i_n, o valor final é determinado da maneira a seguir.

$$V_f = V_0 \cdot (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n)$$

Na situação anterior, note que os dois aumentos e o desconto elevam o preço da mercadoria para R$ 105,84, o que equivale a um aumento de 5,84% sobre o valor inicial. A taxa percentual de 5,84% é o que denominamos **taxa acumulada**.

De modo geral, a taxa acumulada $i_{acumulada}$ é dada por:

$i_{acumulada} = (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n) - 1$

Assim:

$$1 + i_{acumulada} = (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n)$$

Observações

- Quando ocorre um acréscimo no valor inicial, temos: $i_{acumulada} > 0$
- Quando ocorre um decréscimo no valor inicial, temos: $i_{acumulada} < 0$

Com o objetivo de ampliar a situação apresentada na **atividade 8**, o infográfico clicável traz dados estatísticos sobre a doença, como ela é transmitida e sintomas comuns de alguém que a tenha contraído. Além disso, apresenta, informações relevantes sobre medidas preventivas e campanha de vacinação.

Atividades resolvidas

R1. Considere que um automóvel zero-quilômetro sofre uma depreciação de 15% ao ano nos 3 primeiros anos, estabilizando-se em um patamar inferior a esse nos anos seguintes. Se hoje um automóvel zero-quilômetro custa R$ 100.000,00, qual será seu valor daqui a 3 anos?

▶ **Resolução**

Como a taxa de depreciação é constante nos 3 anos, temos:

$V_f = 100.000 \cdot (1 - 0,15)^3 = 100.000 \cdot (0,85)^3 = $
$= 61.412,5$

Portanto, o valor do automóvel será R$ 61.412,50 daqui a 3 anos.

R2. O preço de um produto teve aumento total de 61% por causa de dois aumentos sucessivos. Se o primeiro aumento foi de 15%, qual foi a taxa percentual do segundo aumento?

▶ **Resolução**

61% é a taxa acumulada que corrigiu o preço do produto. Então:

$1 + i_{acumulada} = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + 0,61 = (1 + 0,15) \cdot (1 + i_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + i_2 = \dfrac{1,61}{1,15} \Rightarrow i_2 = 1,4 - 1 \Rightarrow i_2 = 0,4$

Portanto, a taxa percentual do segundo aumento foi 40%.

Observações

- No caso de n aumentos iguais à taxa i, temos:
$V_f = V_0 \cdot (1 + i)^n$
- No caso de n descontos iguais à taxa i, temos:
$V_f = V_0 \cdot (1 - i)^n$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Se há 24 passageiros sentados em um ônibus de 40 lugares, qual é a porcentagem de lugares vazios? **1.** 40%

2. Pesquise em um supermercado alguns produtos que estejam em promoção, como "leve 5 e pague 3". Anote o valor do produto da promoção e o valor do produto unitário, fora da promoção.

a. Vale a pena comprar o produto da promoção? Qual é o valor do desconto oferecido? **2 a.** Respostas pessoais.

b. EM DUPLA Agora, reúna-se com um colega e pesquisem no *Código de defesa do consumidor* alguns dos direitos básicos do consumidor. Façam uma apresentação para a turma. **2 b.** Resposta pessoal.

3. Nos itens a seguir, responda:

a. Por quanto devemos multiplicar um número se quisermos 500% desse número? **3 a.** 5

b. E se quisermos 0,15% desse número? **3 b.** 0,0015

4. Dos produtos de uma farmácia, 10% são de uso contínuo e, destes, 50% exigem receita médica. Qual é a taxa percentual dos produtos da farmácia que são de uso contínuo e exigem receita médica? **4.** 5%

5. Se o consumo mensal de energia elétrica de uma residência passou de 120 kWh para 156 kWh, qual foi a taxa percentual de aumento? **5.** 30%

6. No primeiro dia de sua liquidação anual, uma loja de eletrodomésticos vendeu 40% do estoque de determinado produto; no segundo dia, vendeu 25% do restante. Que porcentagem do estoque do produto não foi vendida? **6.** 45%

7. EM DUPLA Reúna-se com um colega e resolvam a questão.

(UEG – 2023) Uma indústria tem, mensalmente, uma quantidade fixa do composto A e do composto B para a fabricação de seus produtos. Recebeu-se um pedido de 1.150 litros do produto P_1 e 1.400 litros do produto P_2. Sabe-se que para produzir essa quantidade do produto P_1 são necessários 10% do composto A e 50% do composto B disponíveis. Para produzir a quantidade necessária do produto P_2 deve-se utilizar 80% do composto A e 10% do composto B. A quantidade, em litros, do composto B necessária para atender o pedido é de

a. 1.200 **b.** 1.800 **c.** 2.000 **d.** 600 **e.** 345

7. Alternativa **a**.

8. EM DUPLA O setor de vigilância sanitária de determinado município registrou as seguintes informações quanto ao número de casos de dengue:

- em fevereiro, relativamente a janeiro, houve aumento de 10%;
- em março, relativamente a fevereiro, houve redução de 10%.

OBJETO DIGITAL Infográfico clicável: Dengue

Converse com um colega e respondam: Esses dados indicam que, nesse município, houve aumento ou diminuição nos casos da doença no período considerado? De quanto? **8.** Diminuição; de 1%.

9. ARGUMENTAÇÃO A mercadoria que sofre um aumento e um desconto à mesma taxa percentual apresenta um valor final maior, menor ou igual ao valor inicial? Explique sua resposta.

10. A valorização de uma ação foi de 38% em dois meses. Qual foi a sua valorização no segundo mês se, no primeiro mês, a valorização foi de 15%? **10.** 20%

11. A **inflação** de um país corresponde ao aumento geral dos preços de produtos e serviços, que causa a perda do valor de compra de sua moeda.

a. Se em um país a inflação mensal é de 5%, qual é a taxa de inflação trimestral? **11 a.** Aproximadamente 15,8%.

b. Uma inflação de 44%, acumulada em 2 anos, corresponde a que inflação média ao ano? **11 b.** 20%

12. Em 1º de abril, um produto que custava R$ 250,00 teve uma diminuição de preço de p%. Em 1º de maio, novamente ocorreu uma redução de valor de p%, passando o preço do produto a R$ 211,60. Utilizando uma calculadora, determine o valor de p. **12.** 8

9. Menor que o valor inicial. Justificativa no *Suplemento para o professor*.

Lucro e prejuízo

De maneira geral, podemos entender **lucro** como o ganho obtido em uma operação comercial, que é gerado pela diferença entre o preço de venda de determinada mercadoria e seu preço de custo (compra). Caso uma mercadoria seja vendida por um preço menor que seu custo, diz-se que a operação comercial gerou **prejuízo**, o que também pode ser entendido como **lucro negativo**.

Sendo L o lucro, P_v o preço de venda e P_C o preço de custo (compra), podemos representar:

$$L = P_v - P_c$$

Observação

Em uma operação comercial, o lucro pode ser calculado como uma porcentagem tanto do preço de custo quanto do preço de venda. No enunciado de um problema, quando não é mencionado se o lucro refere-se ao custo ou ao preço de venda, admitimos que deve ser calculado em relação ao preço de custo.

Atividades resolvidas

R3. Um produto tem preço de custo de R\$ 160,00 e é vendido por R\$ 200,00. Qual é a porcentagem do lucro sobre o preço de custo? E sobre o preço de venda?

▶ **Resolução**

Sendo $L = P_v - P_c$, temos:

$L = 200 - 160 \Rightarrow L = 40$

Portanto, o lucro é R\$ 40,00.

A porcentagem do lucro sobre o preço de custo é:

$\frac{L}{P_c} = \frac{40}{160} = 0{,}25 = 25\%$

A porcentagem do lucro sobre o preço de venda é:

$\frac{L}{P_v} = \frac{40}{200} = 0{,}20 = 20\%$

R4. Um objeto, ao ser renegociado, foi vendido por R\$ 10.000,00, com prejuízo de 20% sobre o preço de compra original. Determinar por quanto o objeto havia sido comprado.

▶ **Resolução**

Do enunciado, temos:

$P_v = P_c - P_c \cdot 0{,}2 = (1 - 0{,}2) \cdot P_c \Rightarrow$

$\Rightarrow P_v = 0{,}8 \cdot P_c$

Como $P_v = 10.000$, então:

$10.000 = 0{,}8 \cdot P_c \Rightarrow P_c = 12.500$

Portanto, o objeto havia sido comprado por R\$ 12.500,00.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

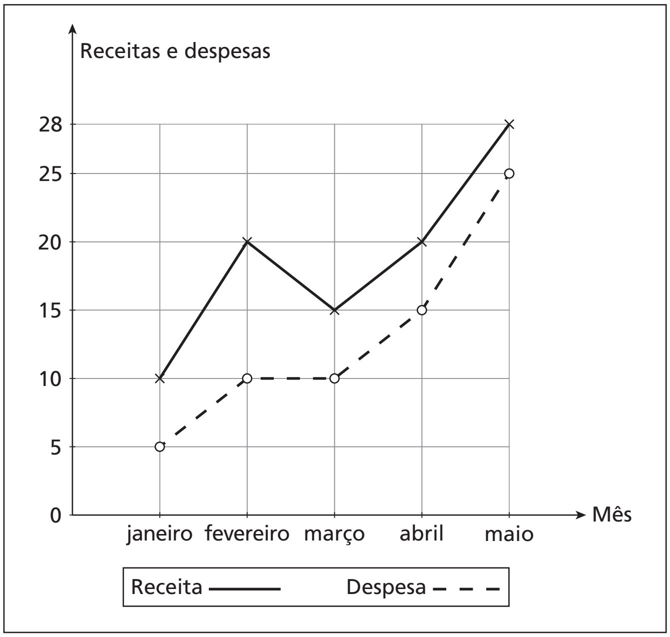
13. **(Enem-2021)** A receita R de uma empresa ao final de um mês é o dinheiro captado com a venda de mercadorias ou com a prestação de serviços nesse mês, e a despesa D é todo o dinheiro utilizado para pagamento de salários, contas de água e luz, impostos, entre outros. O lucro mensal obtido ao final do mês é a diferença entre a receita e a despesa registradas no mês. O gráfico apresenta as receitas e despesas, em milhão de real, de uma empresa ao final dos cinco primeiros meses de um dado ano.

A previsão para os próximos meses é que o lucro mensal não seja inferior ao maior lucro obtido até o mês de maio.

Nessas condições, o lucro mensal para os próximos meses deve ser maior ou igual ao do mês de

a. janeiro.
b. fevereiro.
c. março.
d. abril.
e. maio.

13. Alternativa **b**.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

14. Um automóvel usado custou R$ 20.000,00. Por quanto deve ser vendido para que haja um lucro de 6% sobre o preço de custo? **14.** R$ 21.200,00

15. Comprei um terreno pelo valor de R$ 34.500,00 e vendi-o por R$ 38.640,00. Qual foi a taxa de lucro que obtive em relação ao valor de compra do terreno? **15.** 12%

16. Arrependida da compra de uma esteira ergométrica, Débora vendeu-a para Ana Paula com prejuízo de 15% em relação ao preço pago na loja. Em seguida, Ana Paula vendeu-a para Fernando por R$ 1.955,00, obtendo lucro de 15% sobre o preço que pagou. Quantos reais Fernando pagaria a mais se tivesse comprado na mesma loja em que Débora comprou? **16.** R$ 45,00

17. Considere os itens a seguir como possíveis alterações para o enunciado da atividade anterior e determine que consequências cada uma delas traria para sua resolução.

a. Inclusão da informação "Ana Paula pagou R$ 1.700,00 a Débora". **17 a.** Não traria nenhuma consequência para a resolução.

b. Inclusão da informação "Ana Paula pagou R$ 1.600,00 a Débora". **17 b.** O problema não teria solução.

c. Substituição da informação "Ana Paula vendeu-a para Fernando por R$ 1.955,00, obtendo lucro de 15% sobre o preço que pagou" por "Fernando comprou-a de Ana Paula, que obteve lucro de 15%. Ele pagou R$ 45,00 a menos do que o preço da loja." e alterar a pergunta para "Qual é o preço dessa esteira na loja?". **17 c.** A resposta seria R$ 2.000,00.

d. Omissão do valor de venda para Fernando (R$ 1.955,00). **17 d.** Não seria possível determinar o valor da esteira.

18. Um comerciante compra um produto por R$ 28,00 a unidade e revende-o com lucro igual a 20% do preço de venda. Qual é o preço de venda do produto? E se o lucro fosse de 20% do preço de custo? **18.** R$ 35,00; R$ 33,60

19. Um vendedor repassa seus produtos ao consumidor com lucro de 60% em relação ao preço de venda. Qual é a taxa de lucro do comerciante em relação ao preço de custo? **19.** 150%

Juro simples e juro composto

OBJETO DIGITAL
***Podcast*: Financiamentos**

Em aplicações feitas em instituições financeiras, ou empréstimos tomados delas, recebemos ou pagamos **juro**, respectivamente. Quando fazemos uma aplicação, basicamente estamos emprestando dinheiro à instituição financeira; como "recompensa" por esse empréstimo, recebemos um valor a mais, além daquele aplicado. Esse valor é o juro. Da mesma maneira, quando uma instituição financeira nos concede um empréstimo, devemos pagar juro por esse dinheiro que foi disponibilizado.

Neste capítulo, trataremos de dois regimes de juro: o **simples** e o **composto**.

O *podcast* amplia o conteúdo do tópico *Juro simples* e *juro composto*, discutindo sobre as diferentes modalidades de financiamentos e o juro cobrado pelas instituições financeiras, contribuindo com o desenvolvimento do **TCT Educação Financeira.**

Juro simples

No regime de **juro simples**, o juro incide apenas sobre o capital investido, e o **montante** (soma do capital investido mais o juro relativo ao período de investimento) resgatado nesse regime depende do capital, da medida de tempo de aplicação e da taxa de juro. Para melhor compreensão, acompanhe a resolução do problema de Marcelo, apresentado na página 198.

De acordo com a situação, Marcelo deve: pedir um empréstimo de R$ 5.226,00 (a ser pago após 3 meses, com juro simples de 2,6% ao mês) para quitar as dívidas hoje, ou esperar para pagar a dívida no valor de R$ 5.670,21 após 3 meses, com o dinheiro da indenização que vai receber.

No empréstimo, o juro cobrado após 1 mês é dado por: $5.226 \cdot 0{,}026 \simeq 135{,}88$

No sistema de juro simples, para calcular o juro J cobrado após 3 meses, basta multiplicar por 3 o juro cobrado após 1 mês: $J = 5.226 \cdot 0{,}026 \cdot 3 \simeq 407{,}63$

Após 3 meses do empréstimo, o montante M a ser pago será:

$M \simeq$ R$ 5.226,00 + R$ 407,63 = R$ 5.633,63

Logo, a melhor opção é pedir o empréstimo, economizando aproximadamente R$ 36,58 (5.670,21 – 5.633,63).

De modo geral, sendo C o capital, i a taxa percentual de juro simples, t a medida de tempo (ou a quantidade de períodos) de investimento, J o juro após t períodos e M o montante, temos:

- juro obtido ao fim de um período: $C \cdot i$;
- juro obtido ao fim de t períodos: $C \cdot i \cdot t$.

Assim, podemos escrever:

$$J = C \cdot i \cdot t \qquad M = C + J$$

Dessas igualdades, temos:

$$M = C + C \cdot i \cdot t \Rightarrow \boxed{M = C(1 + i \cdot t)}$$

Para o cálculo do juro, a medida de tempo e a taxa devem considerar o mesmo período. Por exemplo, se a taxa é mensal, o tempo deve ser medido em mês. Em cálculos contábeis, aplica-se o **ano comercial** com 360 dias, sendo 12 meses de 30 dias cada um.

Observação

Ao indicar a taxa percentual de juro, abreviam-se "ao ano" por a.a., "ao mês" por a.m. e "ao dia" por a.d.
Considerando o ano comercial, para juro simples, temos:
$i_{a.a.} = 12 \cdot i_{a.m.} = 360 \cdot i_{a.d.}$

Atividade resolvida

R5. Um investidor aplica R$ 1.000,00 a juro simples de 2% ao mês. Determinar a taxa equivalente ao ano, o juro recebido após 1 mês, o juro recebido após 2 anos e o montante após 8 meses.

▸ Resolução

- A taxa equivalente ao ano, no regime de juro simples, é:
  $i_{a.a} = 12 \cdot i_{a.m} \Rightarrow i_{a.a} = 12 \cdot 2\% = 24\%$
- O juro recebido após 1 mês pode ser calculado por meio da taxa equivalente ao mês:
  $J = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 1 \Rightarrow J = 20$
  Portanto, após 1 mês, o juro será de R$ 20,00.
- O juro recebido após 2 anos da aplicação pode ser calculado por meio da taxa equivalente ao ano:
  $J = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0{,}24 \cdot 2 \Rightarrow J = 480$
  Portanto, após 2 anos, o juro será de R$ 480,00.
- Para obter o montante após 8 meses de aplicação, podemos calcular primeiro o juro no período:
  $J = 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 8 \Rightarrow J = 160$
  E, depois, adicioná-lo ao capital:
  $M = C + J = 1.000 + 160 \Rightarrow M = 1.160$
  Portanto, após 8 meses, o montante será de R$ 1.160,00.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

20. Uma aplicação de R$ 2.000,00 é feita a juro simples de 24% a.a.

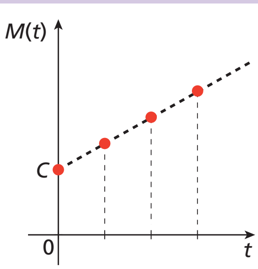
20 a. R$ 3.440,00

a. Qual será o montante após 3 anos de aplicação?

b. Escreva uma expressão que forneça o montante M da aplicação em função do número n de anos decorridos após a aplicação. **20 b.** $M = 2.000 + 480n$

c. Faça o gráfico do montante em função do prazo n da aplicação, expresso em anos. **20 c.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

21. Para t períodos, em que $t \in \mathbb{N}$, a aplicação em regime de juro simples cresce, em cada período, a uma razão aditiva constante. O capital aplicado C e os montantes $M(t)$ nos períodos seguintes ao da aplicação formam uma **progressão aritmética**, mostrada no gráfico a seguir.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é a razão dessa progressão? **21.** i

22. A qual medida de tempo um capital aplicado a juro simples de 15% a.a., com rendimento ao fim de cada mês, deve permanecer investido para que renda juro igual a 50% de seu valor? **22.** 3 anos e 4 meses

23. Um investidor aplicou na mesma data os capitais de R$ 110.000,00 e de R$ 80.000,00 a juro simples em instituições financeiras diferentes com período de 3 meses. O maior capital foi aplicado à taxa de 6% a.m. e rendeu, de juro, R$ 10.200,00 a mais que o menor. Qual foi a taxa de juro da aplicação do menor capital? **23.** 4% a.m.

24. Carina aplicou, no início do ano, 25% de suas economias em um fundo de investimentos (FI) e o restante em um fundo de ações. Após 1 ano, a rentabilidade do fundo de investimentos foi 16%, e a do fundo de ações, 26%.

a. Se o saldo do FI, após 1 ano da data de aplicação, foi R$ 29.000,00, qual foi o valor aplicado nesse FI?

b. Qual foi a rentabilidade global dessas aplicações? **24 b.** 23,5%

25. Carlos adquiriu uma moto nas seguintes condições: entrada de R$ 3.000,00 e financiamento de uma parcela única de R$ 9.000,00, paga 2 meses após a compra. Sabendo que o preço à vista da moto é R$ 11.000,00, responda às questões.

24 a. R$ 25.000,00


OVUONG/SHUTTERSTOCK

a. Qual é a taxa mensal de juro simples do financiamento? **25 a.** 6,25%

b. Após quantos meses da compra deveria vencer a parcela de R$ 9.000,00 para que a taxa de juro simples do financiamento fosse de 2,5% ao mês? **25 b.** 5 meses

Observação

Regime de capitalização é o método pelo qual o capital é remunerado.

Destacam-se o regime de capitalização simples e o regime de capitalização composto.

Juro composto

No regime de **juro composto**, o rendimento obtido ao final de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem ao montante. Dessa forma, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior, o que chamamos de "juro sobre juro". Essa é a modalidade de remuneração mais empregada pelas instituições financeiras.

Os cálculos envolvidos na resolução de problemas de juro composto em geral são trabalhosos; por isso, recomenda-se usar uma calculadora.

Acompanhe, no quadro a seguir, a evolução do montante gerado pelo investimento de R$ 1.000,00 à taxa de 2% ao mês sob os dois regimes de capitalização estudados.

Evolução do montante gerado pelo investimento de R$ 1.000,00 à taxa de 2% ao mês sob os regimes de juro simples e composto

Período	Juro simples	Juro composto
Início	$M_0 = 1.000$	$M_0 = 1.000$
Após 1 mês	$M_1 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 1 \Rightarrow M_1 = 1.020$	$M_1 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_1 = 1.020$
Após 2 meses	$M_2 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 2 \Rightarrow M_2 = 1.040$	$M_2 = 1.020 + 1.020 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_2 = 1.040{,}40$
Após 3 meses	$M_3 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 3 \Rightarrow M_3 = 1.060$	$M_3 = 1.040{,}40 + 1.040{,}40 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_3 \simeq 1.061{,}21$
Após 4 meses	$M_4 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 4 \Rightarrow M_4 = 1.080$	$M_4 \simeq 1.061{,}21 + 1.061{,}21 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_4 \simeq 1.082{,}43$
Após 5 meses	$M_5 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 5 \Rightarrow M_5 = 1.100$	$M_5 \simeq 1.082{,}43 + 1.082{,}43 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_5 \simeq 1.104{,}08$
Após t meses	$M_t = 1.000 \cdot (1 + 0{,}02 \cdot t)$	$M_t = M_{t-1} + M_{t-1} \cdot 0{,}02$

Vamos detalhar os cálculos feitos na coluna do juro composto. Para isso, considere o capital investido C, a taxa de juro composto i e a quantidade de períodos de aplicação t.

- Após 1 mês: $M_1 = C + C \cdot i \Rightarrow M_1 = C(1 + i)$
- Após 2 meses: $M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) \Rightarrow M_2 = C(1 + i) \cdot (1 + i) = C(1 + i)^2$
- Após 3 meses: $M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1 + i) \Rightarrow M_3 = C(1 + i)^2 \cdot (1 + i) = C(1 + i)^3$

$\vdots$

- Após t meses: $M_t = M_{t-1} + M_{t-1} \cdot i = M_{t-1}(1 + i) \Rightarrow M_t = C(1 + i)^{t-1} \cdot (1 + i) = C(1 + i)^t$

Então, podemos calcular o montante resultante dessa aplicação da seguinte forma:

$$M = C(1 + i)^t$$

Atividades resolvidas

R6. Com um capital de R$ 1.500,00 foi feita uma aplicação a juro composto de 1,2% ao mês. Qual será o saldo (montante) dessa aplicação após 6 meses se, durante esse período, não houver nenhuma movimentação na conta?

▶ **Resolução**

Aplicando a fórmula do juro composto, temos:

$$M = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{1,2}{100}\right)^6 \Rightarrow M = 1.500 \cdot (1,012)^6$$

Utilizando uma calculadora, obtemos $M \simeq 1.611,29$.

Portanto, o saldo dessa aplicação será aproximadamente R$ 1.611,29.

R7. Uma dívida contraída a juro composto, capitalizado mensalmente, aumenta 69% em 2 meses. Determinar a taxa mensal de juro.

▶ **Resolução**

É importante perceber que 69% é a taxa acumulada em 2 meses para essa dívida.

$$1 + 0,69 = (1 + i_{\text{a.m.}})^2 \Rightarrow 1 + i_{\text{a.m.}} = \sqrt{1,69} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_{\text{a.m.}} = 30\%$$

Portanto, a taxa mensal de juro dessa dívida é 30%.

R8. Uma loja oferece as seguintes alternativas para o pagamento de uma mercadoria:

- no pix, com 3% de desconto sobre o preço de tabela;
- no cartão de crédito para pagar daqui 30 dias, no valor de tabela da mercadoria.

Considerando que um consumidor tenha dinheiro para comprar a mercadoria no pix e que esse dinheiro possa ser aplicado em uma instituição financeira à taxa de 0,8% a.m., qual é a opção mais vantajosa para comprar nessa loja? Explicar.

▶ **Resolução**

Sendo P_t o preço de tabela da mercadoria e P_p seu preço no pix, temos: $P_p = 0,97 \cdot P_t$ (desconto de 3% sobre o preço de tabela).

O valor da mercadoria que seria pago no pix pode ser aplicado e produzir um montante, após 1 mês:

$$M = 0,97 \cdot P_t \cdot (1 + 0,008) \Rightarrow M = 0,97776 \cdot P_t$$

Logo, o valor do resgate seria insuficiente para saldar a fatura do cartão de crédito, pois: $0,97776 \cdot P_t < P_t$

Portanto, é mais vantajoso para o consumidor pagar a mercadoria no pix.

R9. O valor de uma máquina sofre depreciação anual de 25%. Se ela custa hoje R$ 2.000,00, daqui a quantos anos valerá metade do valor atual? (*Adotar*: log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48)

Observação

Satisfeitas as condições de existência dos logaritmos, são válidas as seguintes propriedades:

- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

▶ **Resolução**

Como o valor da máquina a cada ano é multiplicado pelo mesmo fator, podemos aplicar a fórmula do juro composto. Usando também a definição e as propriedades operatórias dos logaritmos, temos:

$$1.000 = 2.000 \cdot (1 - 0,25)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0,75)^t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \log_{0,75}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0,75)} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - \log 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - \log 2^2} = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - 2 \cdot \log 2}$$

Adotando log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, temos:

$$t = \frac{0 - 0,30}{0,48 - 2 \cdot 0,30} = \frac{-0,30}{-0,12} = 2,5$$

Logo, a máquina terá seu valor reduzido à metade em 2 anos e meio, contados a partir de hoje.

Atividades propostas

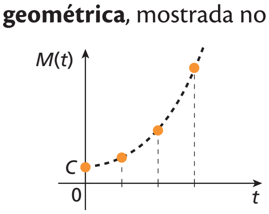
Registre em seu caderno

26. **(UEMG – 2019)** Marisa aplicou R$ 25.000,00 a juros compostos de 2% ao mês. Quantos reais Marisa terá, após um trimestre de aplicação? 26. Alternativa **c**.

a. R$ 26.500,00.
b. R$ 1.530,20.
c. R$ 26.530,20.
d. R$ 23.469,80.

27. Celso aplicou R$ 500,00 por 2 anos à taxa de 1% a.m. a juro composto. Qual foi o montante ao final desse período? 27. Aproximadamente R$ 634,87.

28. Para t períodos, em que $t \in \mathbb{N}$, a aplicação em regime de juro composto cresce, em cada período, a uma razão multiplicativa constante. O capital aplicado C e os montantes $M(t)$ nos períodos seguintes ao da aplicação formam uma **progressão geométrica**, mostrada no gráfico a seguir.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é a razão dessa progressão? 28. $1 + i$

29. Um capital de R$ 1.500,00 foi aplicado a juro composto à taxa de 2% ao mês. Ao completar 2 meses de aplicação, o montante foi retirado e aplicado a juro simples à taxa de 5% ao mês. Se, após certo prazo, o montante final era R$ 1.950,75, qual foi o prazo da segunda aplicação? **29.** 5 meses

30. Quanto Mariana deveria aplicar hoje em um investimento que rende juro composto à taxa de 10% a.a. para ter um montante de R$ 13.310,00 daqui a 3 anos? **30.** R$ 10.000,00

31. Considerando a situação dada na **atividade resolvida R8**, qual é o menor valor da taxa de juro que a aplicação deveria ter para que a decisão de pagar no cartão de crédito não fosse desvantajosa? **31.** Aproximadamente 3,1%.

32. Certo capital duplica em 2 meses de aplicação no regime de juro composto. Qual é, aproximadamente, a taxa mensal de juro desse investimento? **32.** Aproximadamente 41%

33. Em 3 anos, o crescimento do setor agroindustrial de certa região foi 700%. Qual foi a taxa de crescimento média por ano? Se a taxa de crescimento no primeiro ano foi 25% e a do segundo foi 100%, qual foi a taxa de crescimento no terceiro ano? **33.** 100%; 220%

34. Um investidor aplicou R$ 4.000,00 em um fundo de ações e teve um prejuízo de 40% sobre o total do investimento no primeiro mês. Na tentativa de recuperar o dinheiro perdido, aplicou o montante dessa aplicação em outro investimento por um prazo de 60 dias a uma taxa de 20% a.m. Esse investidor conseguiu recuperar o dinheiro investido? Após a segunda aplicação, qual foi a taxa percentual do montante em relação aos R$ 4.000,00 aplicados? **34.** Não; 86,4%.

35. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** Exercícios de Matemática financeira que envolvem depreciação ou valorização de bens com questões como "Daqui a quantos anos o bem valerá a metade do que vale hoje?" ou "Daqui a quantos anos o capital duplicará de valor?" podem ser resolvidos com o auxílio de função logarítmica.

Com base no que você estudou neste tópico e na **atividade resolvida R9**, elabore um problema em que, para determinar uma previsão de valorização ou depreciação, deve-se, necessariamente, utilizar a ideia de logaritmo. **35.** Resposta pessoal.

Atualização financeira

Certo capital C aplicado por t períodos, a juro composto com taxa percentual i, tem seu valor final calculado pela fórmula $M = C \cdot (1 + i)^t$. Agora, acompanhe a situação.

Um capital de R$ 500,00, aplicado, rende juro composto de 2% a.m. e produz os montantes a seguir.

- Após 1 mês: $M_1 = 500 \cdot (1 + 0{,}02) \Rightarrow M_1 = 510{,}00$
- Após 2 meses: $M_2 = 500 \cdot (1 + 0{,}02)^2 \Rightarrow M_2 = 520{,}20$
- Após 3 meses: $M_3 = 500 \cdot (1 + 0{,}02)^3 \Rightarrow M_3 \simeq 530{,}60$

  ⋮
- Após t meses: $M_t = 500 \cdot (1 + i)^t$

Observe que, ao projetarmos o valor de uma aplicação ou de uma dívida, devemos multiplicar o valor presente pelo fator $(1 + i)^t$.

Vamos analisar agora o que ocorre na situação inversa, ou seja, a de uma dívida cujo valor já está calculado com juro composto embutido, que vence daqui a uma medida de tempo, mas tem seu pagamento antecipado.

Uma loja vende um aparelho de som por R$ 1.011,24 para pagamento daqui a 60 dias. Se a loja está cobrando juro de 6% ao mês, qual é o preço à vista do aparelho?

Para saber o preço à vista, devemos calcular o valor presente do aparelho. Para isso, devemos calcular e subtrair o juro embutido no preço final da mercadoria.

Utilizando $M = C \cdot (1 + i)^t$, temos:

$$1.011{,}24 = C \cdot (1 + 0{,}06)^2 \Rightarrow C = \frac{1.011{,}24}{(1{,}06)^2} \Rightarrow C = 900$$

Portanto, o preço à vista do aparelho é R$ 900,00.

Observe que, para trazer o valor da mercadoria para o presente (preço à vista), dividimos o valor no futuro pelo fator $(1 + i)^t$. Normalmente, nesta etapa do estudo, alteramos a classificação de montante (M) para dívida (D) e de capital (C) para valor presente (VP). Assim, temos: $D = VP \cdot (1 + i)^t$

Logo, o valor presente é dado por:

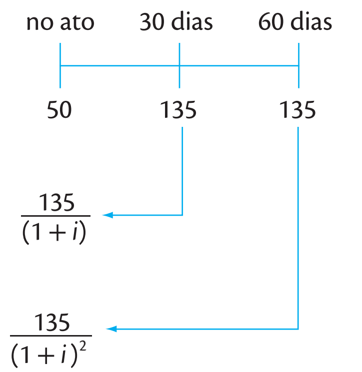
$$VP = \frac{D}{(1 + i)^t}$$

Atividades resolvidas

R10. Uma loja vende uma bicicleta por R$ 300,00 à vista, ou por R$ 50,00 de entrada e mais 2 pagamentos mensais de R$ 135,00. Qual é a taxa mensal de juro na compra a prazo? (*Usar*: $\sqrt{6.129} = 78$)

▶ **Resolução**

Calculamos o valor presente de todas as parcelas:



Nesse caso, temos:

$$50 + \frac{135}{(1+i)} + \frac{135}{(1+i)^2} = 300$$

Fazendo $1 + i = k$, temos:

$$50 + \frac{135}{k} + \frac{135}{k^2} = 300$$

$$50k^2 - 27k - 27 = 0 \Rightarrow k = \frac{-(-27) \pm \sqrt{6.129}}{2 \cdot 50}$$

$k = 1{,}05$ ou $k = -0{,}51$ (não serve)

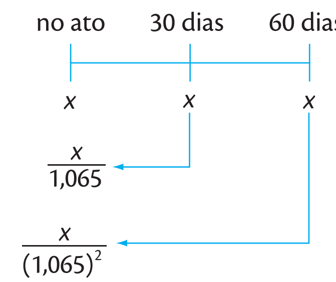
Logo, $1 + i = 1{,}05$, ou seja, $i = 0{,}05$.

Portanto, a taxa de juro na compra a prazo é de 5% a.m.

R11. Uma compra de R$ 600,00 vai ser paga em 3 parcelas mensais e iguais, sendo a primeira à vista. Determinar o valor de cada parcela sabendo que a loja cobra juro de 6,5% a.m.

▶ **Resolução**

Observe o esquema a seguir.



A soma da entrada com o valor presente das demais parcelas (descontado o juro) fornece o valor da compra à vista:

$$x + \frac{x}{1{,}065} + \frac{x}{(1{,}065)^2} = 600$$

$$(1{,}065)^2 x + 1{,}065x + x = (1{,}065)^2 \cdot 600$$

$$3{,}199225x = 680{,}535$$

$$x \simeq 212{,}72$$

Logo, cada parcela da compra é de, aproximadamente, R$ 212,72.

36. 101,2%; a comparação depende da taxa de inflação da época.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

36. Uma taxa de juro de 6% ao mês equivale a uma taxa de juro composto de, aproximadamente, quantos por cento ao ano? Compare-a com a taxa de inflação dos últimos doze meses.

37. Um imóvel, no valor total de R$ 364.000,00, vai ser pago em 3 parcelas anuais iguais, sendo a primeira no ato da compra. Qual é o valor de cada parcela, se está sendo cobrado juro de 20% ao ano na segunda e na terceira parcelas? **37.** R$ 144.000,00

38. Um ventilador que custa R$ 200,00 à vista é vendido em uma loja em 2 parcelas iguais de R$ 120,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda a vencer em 30 dias. Qual é a taxa mensal de juro cobrada pela loja? **38.** 50%

39. Um aparelho de TV custa R$ 1.200,00 à vista, ou zero de entrada e mais 2 parcelas iguais de R$ 650,00, com vencimentos em 30 e 60 dias após a compra.

Qual é a taxa mensal de juro cobrada pela loja nesse plano de pagamento?

(*Use*: $\sqrt{1.417} = 38$) **39.** 6,25%

40. No dia 15 de julho, João contraiu uma dívida, com a promessa de quitá-la em 15 de julho do ano seguinte, mediante um único pagamento de R$ 208.080,00. Nessa quantia, já está incluso o juro composto correspondente aos 12 meses, à taxa mensal de 2%. João entrou em contato com o credor, mostrando interesse em liquidar sua dívida no dia 15 de maio, desde que a dívida seja recalculada com a retirada do juro correspondente aos 2 meses de antecipação. Supondo que o credor concorde com João, quanto ele terá de pagar? **40.** R$ 200.000,00

41. Em um comercial de televisão, é feito o anúncio:

> **Amanhã é o dia do refrigerador.**
> Compre seu refrigerador por R$ 600,00
> de entrada e mais R$ 900,00 daqui a 2 meses,
> ou traga sua proposta para análise!

Um consumidor, ouvindo a propaganda, foi até a loja e propôs pagar R$ 600,00 de entrada e mais 2 prestações mensais e iguais. Sabendo que a loja opera com taxa de juro composto de 5% ao mês, qual deve ser o valor de cada prestação para que os dois planos sejam equivalentes?
41. Aproximadamente R$ 439,02.

O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros

Além da calculadora, as planilhas eletrônicas são muito usadas para nos auxiliar nos cálculos relacionados a operações financeiras. Vamos acompanhar dois exemplos de problemas resolvidos empregando planilhas.

a. Lorena tem R$ 50.000,00 e duas opções para investir esse dinheiro:
- aplicação A com rendimento à taxa de 1% a.m. em regime de juro simples;
- aplicação B com rendimento à taxa de 0,9% a.m. em regime de juro composto.

Qual das aplicações é mais vantajosa para Lorena?

Vamos analisar, com o auxílio de uma planilha eletrônica, o que acontece com o montante no decorrer do tempo em cada uma das aplicações.

Campo que mostra a célula selecionada. B3 é a célula que está na coluna B e na linha 3.

Campo que mostra a fórmula associada à célula.

B3 | *Fórmula* | =50000*(1+0,01*A3)

Números que indicam as linhas da planilha.

Letras que indicam as colunas da planilha.

	A	B	C	D
1	**Período (mês)**	**Montante (R$) na aplicação A**	**Montante (R$) na aplicação B**	
2	0	50.000,00	50.000,00	
3	1	50.500,00		
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			
9	7			
10	8			

⋮

Para preencher a coluna A, digitamos 0, 1 e 2, identificando, assim, os primeiros meses. Selecionamos essas três células e, com o cursor na quina da seleção e com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastamos a seleção para preencher os meses seguintes.

Para calcular o montante da aplicação A (regime de juro simples) ao fim do 1º mês, digitamos, na célula correspondente, a fórmula:
=50000*(1+0,01*A3)

valor da célula A3
taxa mensal
capital inicial

[Calcula o valor de: 50.000 · (1 + 0,01 · 1)]

Para preencher a coluna B com os montantes ao fim de cada mês, basta selecionar a célula B3 e arrastar a seleção para baixo, como foi feito na coluna A. Esse procedimento copia a fórmula da célula B3 para as células B4, B5, B6, B7, …, substituindo A3, respectivamente, por A4, A5, A6, A7, …

C3 | *Fórmula* | =50000*(1+0,009)^A3

	A	B	C	D
1	**Período (mês)**	**Montante (R$) na aplicação A**	**Montante (R$) na aplicação B**	
2	0	50.000,00	50.000,00	
3	1	50.500,00	50.450,00	
4	2	51.000,00		
5	3	51.500,00		
6	4	52.000,00		
7	5	52.500,00		
8	6	53.000,00		
9	7	53.500,00		
10	8	54.000,00		

⋮

Para calcular o montante da aplicação B (regime de juro composto) ao fim do 1º mês, digitamos, na célula correspondente, a fórmula:
=50000*(1 + 0,009)^A3

valor da célula A3
taxa mensal
capital inicial

[Calcula o valor de: 50.000 · $(1 + 0,009)^1$]

Assim como fizemos para a coluna B, arrastamos a seleção da célula C3 para as outras células da coluna.

Com os dados da planilha preenchidos, é possível comparar os montantes no decorrer do tempo para as duas aplicações. Preenchendo apenas o começo da planilha, acharemos, erroneamente, que a aplicação A é sempre mais vantajosa.

Arrastando a seleção das fórmulas para um número maior de meses, a partir do 25º mês, a aplicação B passa a ser mais vantajosa que a aplicação A.

		Fórmula		
	A	B	C	D
1	Período (mês)	Montante (R$) na aplicação A	Montante (R$) na aplicação B	
2	0	50.000,00	50.000,00	
3	1	50.500,00	50.450,00	
4	2	51.000,00	50.904,05	
5	3	51.500,00	51.362,19	
⋮	⋮	⋮	⋮	
25	23	61.500,00	61.442,21	
26	24	62.000,00	61.995,19	
27	25	62.500,00	62.553,15	
28	26	63.000,00	63.116,12	

Portanto, deve-se considerar a medida de tempo em que Lorena deixará esse capital aplicado. Caso essa medida seja inferior a 25 meses, a aplicação A será mais vantajosa; caso seja superior ou igual a 25 meses, a aplicação B será mais vantajosa.

b. Para comprar uma casa, Juliana deu uma entrada correspondente a 10% do valor do imóvel e fez um financiamento para o restante da dívida, a uma taxa fixa de 0,97% ao mês, a ser pago em 10 anos, com prestações mensais fixas de R$ 3.700,00. Qual é o valor do imóvel à vista?

Vamos usar uma planilha eletrônica para calcular o valor presente de cada uma das 120 parcelas mensais (equivalentes a 10 anos de pagamento). Em seguida, basta adicionar esses valores para calcular o valor presente da dívida e, então, calcular o valor do imóvel considerando que a dívida equivale a 90% de seu valor.

Inicialmente, preenchemos a coluna com os períodos até o 120º mês.

Para calcular o valor presente das parcelas ao fim de cada período, digitamos, em B2, a fórmula:
=3700/(1+0,0097)^A2

[Calcula o valor de: $\frac{3.700}{(1+0,0097)^1}$]

Em seguida, selecionamos essa célula e arrastamos a seleção até B121.

B2	*Fórmula*	=3700/(1+0,0097)^A2
	A	B
1	Período (mês)	Valor presente da parcela (R$)
2	1	3.664,45
3	2	
4	3	
⋮	⋮	⋮
118	117	
119	118	
120	119	
121	120	
122	121	

Assim, calculados os valores presentes de todas as parcelas, digitamos em uma célula da planilha (neste exemplo, na célula C2), a fórmula:
=SOMA(B2:B121)
[Adiciona os valores das células B2 a B121]
Essa soma representa o valor total da dívida no presente.

C2	*Fórmula*	=SOMA(B2:B121)		
	A	B	C	D
1	Período (mês)	Valor presente da parcela (R$)	Valor presente total da dívida (R$)	Valor à vista do imóvel (R$)
2	1	3.664,45	261.673,52	290.748,36
3	2	3.629,25		
4	3	3.594,39		
⋮	⋮	⋮	⋮	
118	117	1.195,90		
119	118	1.184,41		
120	119	1.173,04		
121	120	1.161,77		
122	121	1.150,61		

Para calcular o valor total do imóvel à vista, digitamos, em outra célula (neste exemplo, na célula D2), a fórmula:
= C2/0,90
[Calcula a razão entre o valor da célula C2 e 0,90]
Essa razão fornece o valor à vista do imóvel.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, o valor do imóvel à vista é R$ 290.748,36.

Construção de gráficos com dados da planilha eletrônica

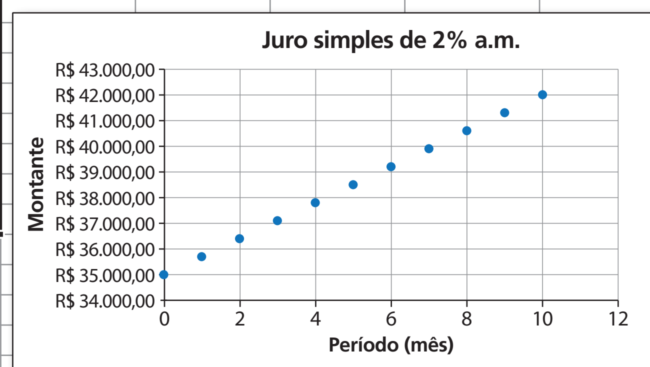
Podemos construir um gráfico com os dados apresentados em uma planilha. Observe.

Selecionamos as células relativas aos dados que queremos no gráfico e clicamos em "Inserir gráficos". Há várias opções de gráficos; no exemplo, construímos o gráfico só com os pontos, uma vez que o montante é obtido ao final de cada mês.

Observação

Note que o gráfico representado na planilha eletrônica corresponde à função f tal que $f(x) = 35.000 \cdot (1 + 0{,}02x)$, em que $x \in \mathbb{N}$.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período (mês)	Montante a juro simples de 2% a.m.					
2	0	R$ 35.000,00					
3	1	R$ 35.700,00					
4	2	R$ 36.400,00					
5	3	R$ 37.100,00					
6	4	R$ 37.800,00					
7	5	R$ 38.500,00					
8	6	R$ 39.200,00					
9	7	R$ 39.900,00					
10	8	R$ 40.600,00					
11	9	R$ 41.300,00					
12	10	R$ 42.000,00					
13							
14							
15							
16							
17							



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Com o gráfico construído, pode-se compor ou alterar o título do gráfico, o título do eixo, mudar a cor do gráfico, mudar a escala, compor linhas auxiliares etc.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

42. SOFTWARE Luana está juntando dinheiro para fazer uma viagem, que custará R$ 4.200,00. Ela vai aplicar seu dinheiro em uma poupança, com rendimento de 0,6% ao mês. Sabendo que hoje aplicou R$ 1.000,00 e que, ao fim de cada mês, ela depositará na poupança R$ 200,00, após quantos meses, no mínimo, Luana conseguirá juntar a quantia necessária para fazer a viagem? (Se possível, resolva o problema usando uma planilha eletrônica.) **42.** 15 meses

43. SOFTWARE Everton fez um empréstimo de R$ 50.000,00 em uma instituição financeira, a juro de 8% ao mês sobre o saldo devedor. Ao fim de cada mês após o empréstimo, ele pagou R$ 3.000,00 à instituição, a fim de diminuir a dívida. Porém, devido ao crescimento acelerado da dívida, contatou a instituição após 38 meses para renegociar a dívida. Se puder, use uma planilha eletrônica para calcular quanto era a dívida de Everton nessa data. **43.** R$ 270.315,95

44. Claudia pretende investir R$ 150.000,00, que recebeu na venda de um apartamento, por 10 anos. O gerente de uma instituição financeira ofereceu a ela dois tipos de investimento: um, a juro simples, com taxa de 20% ao ano; outro, a juro composto, com taxa anual de 15%.

a. SOFTWARE Se possível, use uma planilha eletrônica para simular os montantes anuais para cada tipo de investimento. **44 a.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

b. Em 10 anos, o rendimento da aplicação no sistema de juro composto supera o rendimento da aplicação em juro simples? Se sim, após quantos anos isso acontece?

c. Qual é a diferença entre os montantes ao final do 10º ano de aplicação? **44 c.** R$ 156.833,66

d. Qual é a melhor aplicação a ser feita no período de 10 anos? **44 d.** A do regime de juro composto.

e. SOFTWARE Se possível, use uma planilha eletrônica para construir o gráfico do montante da aplicação em função do período nos dois investimentos.

45. ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS EM DUPLA Elabore um problema em que seja necessário comparar um gráfico com crescimento exponencial e um gráfico com crescimento linear. Os dois gráficos devem ser relacionados a montantes de dois tipos de investimento. Ao final, resolva o problema elaborado por um colega e peça a ele que resolva o problema elaborado por você. **45.** Resposta pessoal.

44 e. Resposta no *Suplemento para o professor*. **44 b.** Sim; após 5 anos.

INSPIRING.TEAM/SHUTTERSTOCK

Produção artística com palavras que de alguma forma têm relação com as *Fintechs*, um tipo de *startup*.

ODS 8 ODS 9

Startups: empresas que, segundo o Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas (Sebrae), nascem em torno de uma ideia diferente, repetível (capaz de entregar o mesmo produto novamente com pequenas customizações), escalável (pode aumentar cada vez mais a receita sem aumentar tanto o custo) e em condições de extrema incerteza (cenário no qual não há como afirmar se uma ideia ou projeto vai realmente dar certo).

Fintechs

Nos últimos anos, houve um aumento significativo do número de empresas que oferecem soluções inovadoras ao setor financeiro. Essa tendência de inovação, que se tornou mundial, veio para transformar a maneira como as pessoas se relacionam com o dinheiro. Nesse contexto, estão inseridas as *fintechs* (abreviação de *financial technology*, ou "tecnologia financeira", em português): ***startups*** ou empresas que desenvolvem produtos financeiros totalmente digitais, em que o uso da tecnologia é o principal diferencial em relação às empresas tradicionais do setor.

As *fintechs* se distinguem de instituições financeiras tradicionais, como os bancos, por apresentar soluções personalizadas, de uso simplificado e com baixo ou nenhum custo para o consumidor. Alguns exemplos de serviços prestados pelas *fintechs* são contas digitais gratuitas, cartões de débito, cartões de crédito isentos de anuidade e diversas transações financeiras por meio de *smartphone*. Existem também *fintechs* especializadas em gestão financeira, empréstimos e negociação de dívidas, investimentos, financiamentos, seguros, câmbio e outros serviços.

De acordo com a pesquisa *Fintech Report 2023*, havia 1.450 *fintechs* no país em 2022. Para trabalhar em uma *fintech*, é desejável que o candidato tenha feito algum curso na área tecnológica, como ciências da computação, engenharia da computação, engenharia de *software*, sistemas de informação, telecomunicações etc.

Atividades

Registre em seu caderno

1. Você já utilizou ou conhece alguém que usou os serviços de alguma *fintech*? Se sim, quais?
1. Respostas pessoais.
2. **EM GRUPO** Em sua opinião, qual deve ser o perfil do profissional que cria ou trabalha em uma *fintech*? Pesquise sobre o assunto e converse com os colegas.
3. Segundo a *Fintech Report 2023*, havia 763 *fintechs* no país em 2017. Qual foi o percentual aproximado de crescimento do número de *fintechs* de 2017 para 2022?
3. Aproximadamente 90,04%.

2. Exemplo de resposta: Criativo, flexível, que trabalha bem em equipe, comunicativo, que não tem medo de se arriscar etc.

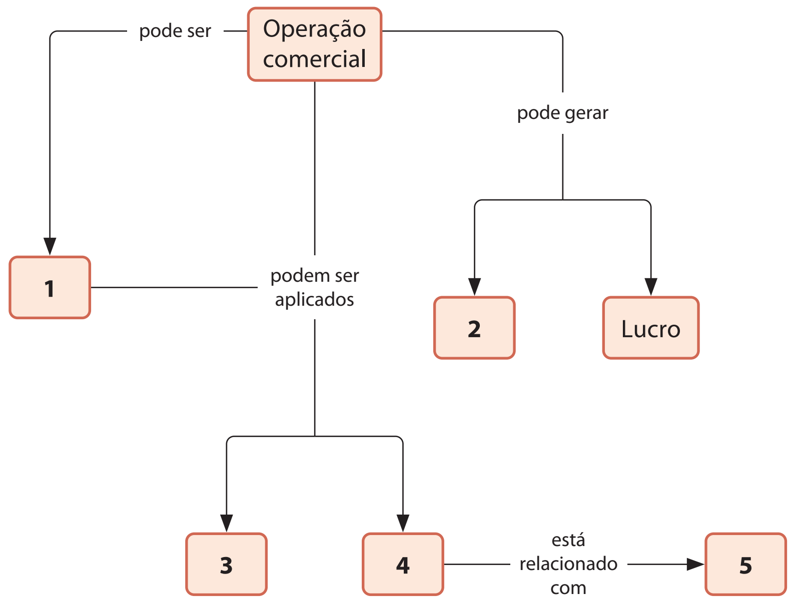
PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 9

Registre em seu caderno

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Observe o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos que foram estudados neste capítulo e estão representados por números.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

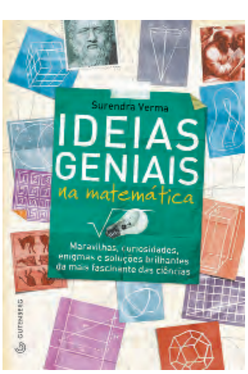
Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Prejuízo
B. Juro composto
C. Aplicação financeira
D. Atualização financeira
E. Juro simples

Conexões entre conceitos. Exemplo de resposta: A – 2; B – 4; C – 1; D – 5; E – 3.

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro



REPRODUÇÃO/EDITORA GUTENBERG

Ideias geniais na Matemática: maravilhas, curiosidades, enigmas e soluções brilhantes da mais fascinante das ciências

Surendra Verma

Belo Horizonte: Gutenberg, 2013.

Com explicações curtas e simples, o leitor descobrirá que a Matemática não é assustadora e complicada, mas um divertido e fascinante conjunto de ideias utilizadas para explicar o mundo em que vivemos.

Software

GeoGebra

O GeoGebra é um *software* que combina Geometria e Álgebra e pode ser usado *on-line*. Entre suas diversas funcionalidades estão a realização de atividades de Geometria dinâmica e a construção e a manipulação de gráficos de funções.

Disponível em: https://www.geogebra.org/classic. Acesso em: 12 set. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Em uma sala de aula, a razão entre o número de meninos e o número de meninas é $\frac{3}{5}$. Em relação ao total de alunos na sala, a porcentagem de meninas é: **Q1.** Alternativa **c.**

a. 37,5% **c.** 62,5%
b. 60% **d.** 40%

Q2. Na composição do feijão, 22% são proteínas. A medida de massa de proteínas existente em 300 g de feijão é: **Q2.** Alternativa **a.**

a. 66 g **c.** 156 g
b. 132 g **d.** 660 g

Q3. Ao comprar uma bicicleta de R$ 950,00 com desconto de 18%, o cliente pagará: **Q3.** Alternativa **c.**

a. R$ 932,00 **c.** R$ 779,00
b. R$ 968,00 **d.** R$ 171,00

Q4. Após um aumento de 15%, um produto passou a ser vendido por R$ 48,30. O preço desse produto, antes do aumento, era: **Q4.** Alternativa **b.**

a. R$ 33,30 **c.** R$ 43,30
b. R$ 42,00 **d.** R$ 32,00

Q5. Um aparelho de TV com preço original de R$ 1.000,00 é vendido por R$ 885,00. Assim, a loja está oferecendo um: **Q5.** Alternativa **d.**

a. aumento de 88,5%. **c.** aumento de 11,5%.
b. desconto de 88,5%. **d.** desconto de 11,5%.

Q6. Ao ser aplicado, um capital *C* cresceu 4% no primeiro mês. No segundo mês, houve uma diminuição de 4% sobre o novo valor, obtendo o montante *M*. Podemos dizer que: **Q6.** Alternativa **b.**

a. houve lucro. **c.** *C* é igual a *M*.
b. houve prejuízo. **d.** *M* é maior que *C*.

Q7. No regime de ____, o juro incide apenas sobre o capital investido, e o montante resgatado nesse regime depende do capital, do período de aplicação e da taxa de juro. **Q7.** Alternativa **c.**

a. juro composto
b. aplicações sucessivas
c. juro simples
d. descontos sucessivos

Q8. ____ o rendimento obtido ao fim de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem a um novo montante; a partir disso, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior. **Q8.** Alternativa **a.**

a. No regime de juro composto
b. No regime de juro simples
c. Em qualquer regime de capitalização
d. Não há regime de capitalização no qual

Q9. Uma loja vende um produto no valor de R$ 150,00 e oferece duas opções de pagamento aos clientes: à vista com 10% de desconto ou, sem desconto, em 2 parcelas iguais, sendo uma no ato da compra e outra 30 dias depois. A taxa de juro cobrada na compra parcelada é: **Q9.** Alternativa **d.**

a. 10% **c.** 18%
b. 15% **d.** 25%

Q10. O salário líquido mensal de uma pessoa é R$ 3.000,00. Todo mês ela poupa 10% de seu salário líquido e aplica esse valor em um fundo que rende juro composto à taxa de 2% ao mês. O saldo dessa aplicação logo após o terceiro depósito é: **Q10.** Alternativa **a.**

a. R$ 918,12 **c.** R$ 903,00
b. R$ 906,00 **d.** R$ 618,12

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

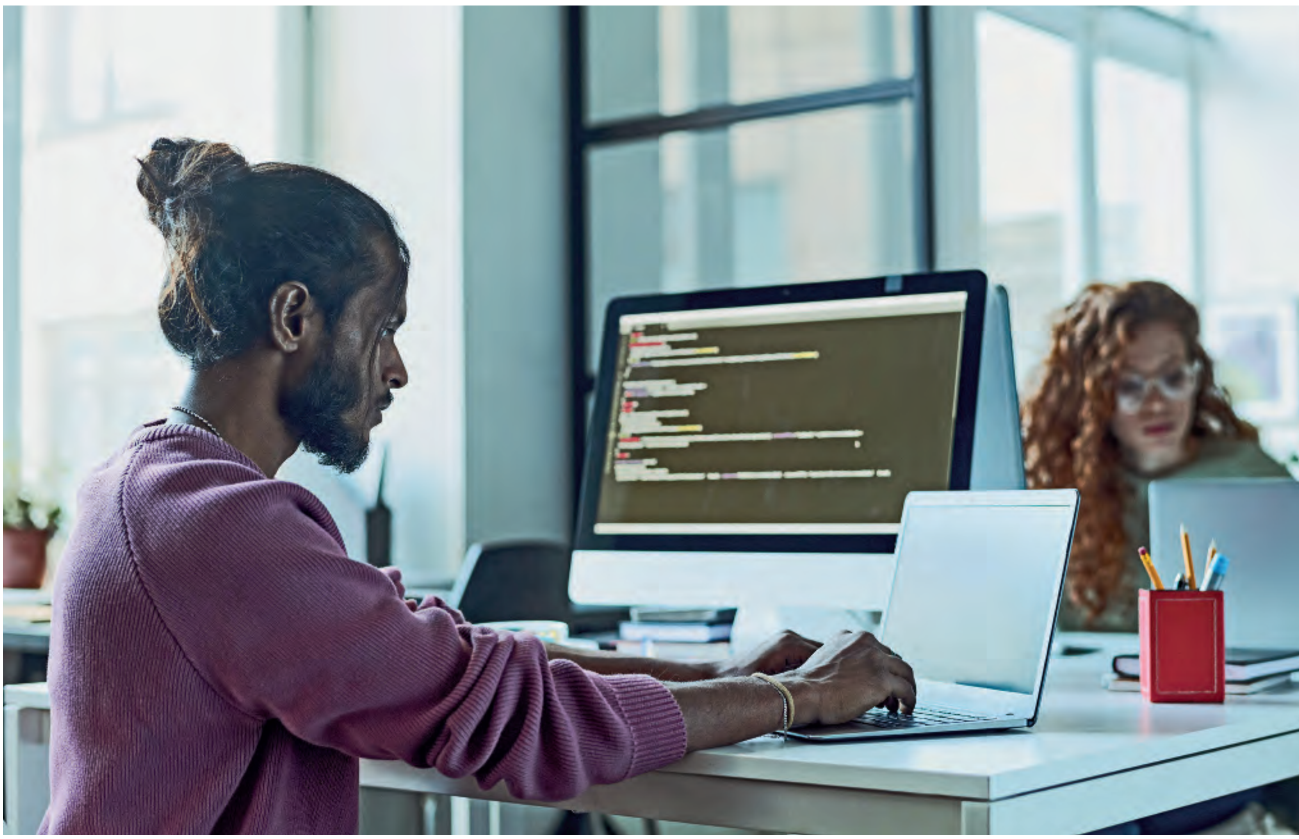
Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Resolver problemas que envolvam taxa percentual.	X	X	X	X	X	X			X	X
Analisar e aplicar os regimes de juro simples e de juro composto.							X	X	X	X

Capítulo 10

ALGORITMOS E INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO

ANNASTILLS/ISTOCK/GETTY IMAGES



Programadores são fundamentais na criação e na manutenção de *softwares* que usamos diariamente, desde aplicativos de celular até sistemas complexos.

OBJETO DIGITAL
Vídeo: Você sabia? Patinho feio

O vídeo dialoga com o **TCT Ciência e Tecnologia** ao abordar a construção do primeiro computador digital do Brasil, durantes os anos 1971 e 1972, por alunos do curso de pós-graduação da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP).

Da origem dos computadores até o desenvolvimento dos atuais, foram necessários o trabalho e a cooperação de diversos homens e mulheres ao longo dos séculos.

Charles Babbage (1791-1871), por exemplo, foi quem projetou a Máquina Analítica, que serviu de inspiração para os computadores eletrônicos atuais. Em 1843, Augusta Ada Byron (1815-1852), também conhecida como Condessa de Lovelace, escreveu em um artigo sobre a máquina projetada por Babbage o que veio a ser conhecido como o primeiro algoritmo de computador da história.

Durante a Segunda Guerra Mundial (1939-1945), foi criado o Mark I (1944), primeiro computador eletromecânico, com a finalidade de realizar cálculos de balística. No período foram desenvolvidos também o Bomb e o Colossus (1945), cuja função era decifrar mensagens criptografadas pelos alemães nazistas.

O ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Computer*) foi o primeiro computador eletrônico construído com interesses além da esfera militar. Projetado por John Presper Eckert (1919-1995) e John Mauchly (1907-1980), ocupava uma área que media 180 m^2 e tinha medida de massa de aproximadamente 30 toneladas.

A partir de 1970, iniciou-se a era dos computadores pessoais marcada pelo aperfeiçoamento da tecnologia já existente, pela diminuição do tamanho das máquinas e pela facilidade de uso para o usuário. Um exemplo disso foi o primeiro microcomputador comercial, produzido por Steve Jobs (1955-2011) e Steve Wozniak (1950-) em 1976.

Atualmente, o desenvolvimento tecnológico de computadores busca integrar tarefas em apenas um dispositivo, como um *smartphone*.

Algoritmos

Como vimos anteriormente, Condessa de Lovelace escreveu o que veio a ser conhecido como o primeiro **algoritmo** de computador. O termo "algoritmo" geralmente está associado à execução de uma sequência finita de instruções ou passos. Por isso, algoritmos podem estar presentes em diferentes situações cotidianas, como a mostrada a seguir.

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 3

OBJETO DIGITAL
***Podcast*: Ciência da computação, algoritmo e comportamento**

ILUSTRAÇÕES: EDNEI MARX/ARQUIVO DA EDITORA

O *podcast* apresenta o conceito de algoritmo, a importância deste para a resolução de problemas complexos em diferentes profissões e como os algoritmos estão presentes nos conteúdos e propagandas que aparecem na navegação de um usuário de internet, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 4** da BNCC.

Para preparar o sanduíche, é necessário seguir um número finito de passos ordenados. Qualquer mudança na ordem dos passos pode inviabilizar ou alterar o sabor do sanduíche natural de frango. Por exemplo, não é possível mudar a ordem dos passos 1 e 2, pois não seria viável espalhar o ***cream cheese*** em uma das fatias de pão depois de espalhar a cenoura ralada. Além disso, não podemos mudar a ordem dos passos 3 e 4, pois não seria possível temperar a cenoura com limão, azeite e sal, se já tivéssemos colocado o frango desfiado por cima dela.

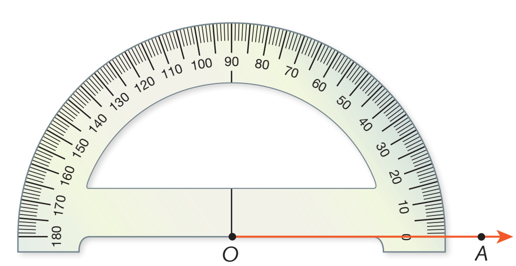
Cream cheese: é um tipo de queijo cremoso que pode ser usado em receitas doces ou salgadas.

Um **algoritmo** é uma sequência finita e bem definida de passos para realizar uma tarefa.

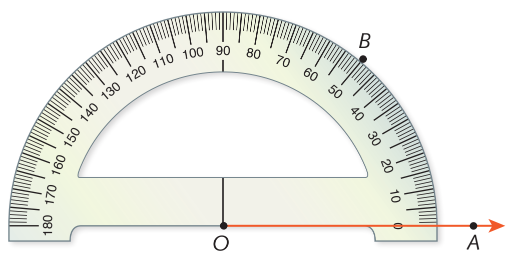
Para construir com transferidor um ângulo cuja abertura mede 50°, também utilizamos a ideia de algoritmo.

Passo 1. Trace uma semirreta $\overrightarrow{OA}$.

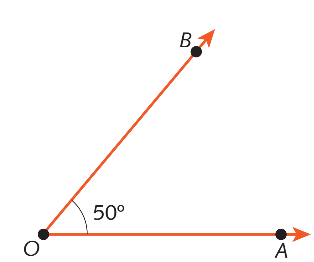
Passo 2. Centre o transferidor em O e posicione a linha que indica zero grau sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$.



Passo 3. Marque o ponto B em 50° junto à escala do transferidor.



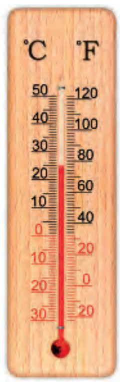
Passo 4. Retire o transferidor e trace a semirreta $\overrightarrow{OB}$.



ILUSTRAÇÕES: NILSON CARDOSO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade resolvida

R1. A conversão entre uma medida de temperatura c em grau Celsius e uma medida de temperatura f em grau Fahrenheit pode ser feita pela relação $\frac{c}{5} = \frac{f - 32}{9}$.



TOMAS RAGINA/SHUTTERSTOCK

a. Escreva um algoritmo para explicar como converter uma medida de temperatura c em grau Celsius para uma medida de temperatura f em grau Fahrenheit.

b. Simule o algoritmo escrito no item **a** para 100 °C.

▶ **Resolução**

a. Reescrevendo a relação $\frac{c}{5} = \frac{f - 32}{9}$, temos:

$$f = 1{,}8c + 32$$

A partir dessa relação, é possível escrever o algoritmo:

Passo 1. Considere uma medida de temperatura c em grau Celsius.

Passo 2. Multiplique por 1,8.

Passo 3. Adicione 32.

Passo 4. Obtenha a medida de temperatura f em grau Fahrenheit correspondente a c.

b. Para 100 °C, temos:

Passo 1. $c = 100$

Passo 2. $1{,}8 \cdot 100 = 180$

Passo 3. $180 + 32 = 212$

Passo 4. $f = 212$

Portanto, a medida de temperatura 100 °C corresponde a 212 °F.

Observação

Embora usemos no cotidiano o grau Celsius como unidade de medida de temperatura, a unidade de medida padrão dessa grandeza no Sistema Internacional de Unidades (SI) é Kelvin (símbolo K). Já o grau Fahrenheit é usado geralmente em países de língua inglesa, como Estados Unidos e Inglaterra.

1. Resposta no *Suplemento para o professor*.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. EM GRUPO Em que situações do dia a dia você já utilizou algoritmos? Explique.

2. PENSAMENTO COMPUTACIONAL Para obter a medida de temperatura k em Kelvin correspondente a uma medida de temperatura c em grau Celsius, usamos a relação $c = k - 273$. Escreva um algoritmo em linguagem materna para a conversão de uma medida de temperatura c em grau Celsius para uma medida de temperatura k em Kelvin. **2.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

3. PENSAMENTO COMPUTACIONAL Ao lavar a louça, composta de copos, pratos e talheres, Flávio realiza o seguinte algoritmo: **3.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

Passo 1. Abra a torneira.

Passo 2. Ensaboe os copos.

Passo 3. Enxágue os copos.

Passo 4. Ensaboe os talheres.

Passo 5. Enxágue os talheres.

Passo 6. Ensaboe os pratos.

Passo 7. Enxágue os pratos.

Passo 8. Feche a torneira.

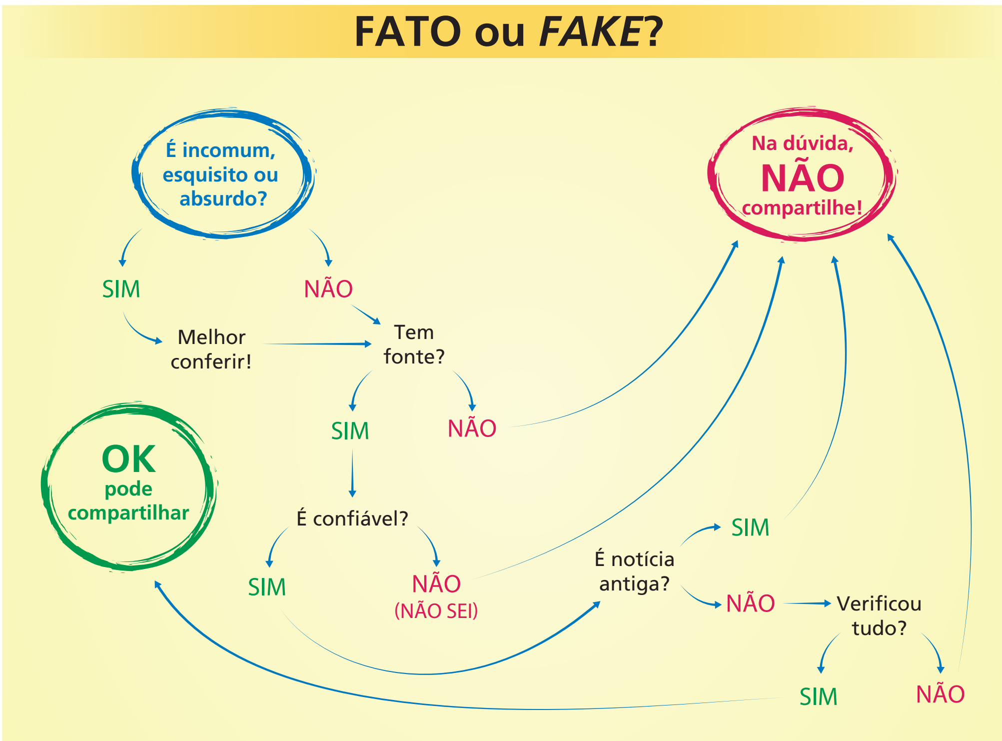
Como esse processo desperdiça muita água, reordene os passos e produza um algoritmo em linguagem materna que utilize menos água.

4. PENSAMENTO COMPUTACIONAL EM DUPLA Em uma folha de papel quadriculado, represente um plano cartesiano e marque dois pontos distintos (A e B). Forneça as coordenadas desses pontos a um colega para que ele escreva um algoritmo em linguagem materna para o deslocamento de A até B. Em seguida, simule o algoritmo no plano cartesiano para conferir a resposta. **4.** Resposta pessoal.

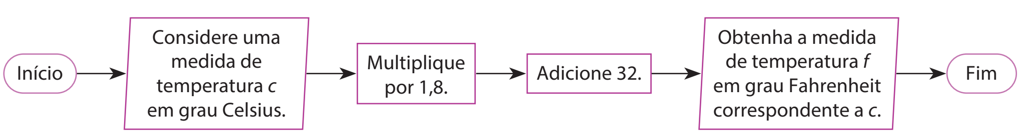
Fluxogramas

Um **fluxograma** é um esquema que apresenta um processo, sistema ou algoritmo de maneira clara e fácil de entender por meio de **setas que indicam o sentido da leitura**. Fluxogramas são usados em diversas áreas de atuação, como a Computação.

Confira este fluxograma que visa o combate à disseminação de *fake news*.



A seguir, apresentamos o fluxograma correspondente ao algoritmo do item **a** da **atividade resolvida R1**, utilizado para converter uma medida de temperatura em grau Celsius para grau Fahrenheit.



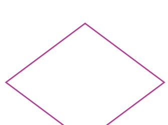
Nesse fluxograma, estão presentes diferentes símbolos. Cada um desses símbolos tem um nome e um significado.

Símbolo de início/fim
Representa o início e o fim do fluxograma.

Símbolo de processo
Representa um processo ou uma ação realizada no fluxograma.

Símbolo de entrada/saída
Representa uma entrada ou uma saída de dados no fluxograma.

Outro símbolo que aparece com frequência em fluxogramas é o **símbolo de decisão**:



Símbolo de decisão
Representa uma questão a ser respondida, geralmente com “Sim”/”Não” ou ”Verdadeiro”/”Falso”.

Após esse símbolo, o caminho do fluxograma se divide em diferentes ramificações para seguir as consequências da resposta.

Observação

A **entrada de dados** corresponde às informações fornecidas antes de realizar os processos do fluxograma. A **saída de dados** corresponde às informações obtidas após a ocorrência dos processos do fluxograma. Por exemplo, em um fluxograma que represente a multiplicação de dois números fornecidos, a entrada corresponde aos dois números e a saída corresponde ao produto desses números.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Confira o uso do símbolo de decisão nesta atividade resolvida.

Atividade resolvida

R2. Podemos escrever uma sequência numérica com base na recorrência entre os termos, ou seja, conseguimos determinar cada termo a partir de um ou mais termos anteriores.

a. Escreva um algoritmo em linguagem materna para determinar um termo qualquer da sequência (3, 10, 17, 24, ...), a partir do(s) termo(s) anterior(es).

b. Represente o algoritmo escrito no item **a** usando fluxograma.

▶ **Resolução**

a. Na sequência (3, 10, 17, 24, ...), temos:

- $a_1 = 3$;
- $a_n = a_{n-1} + 7$, em que n é um número natural maior do que 1.

Com base nessas relações, é possível escrever este algoritmo:

Passo 1. Escolha um número natural n, maior do que zero, correspondente à posição do termo da sequência que se quer descobrir.

Passo 2. Considere o termo atual $a_1 = 3$.

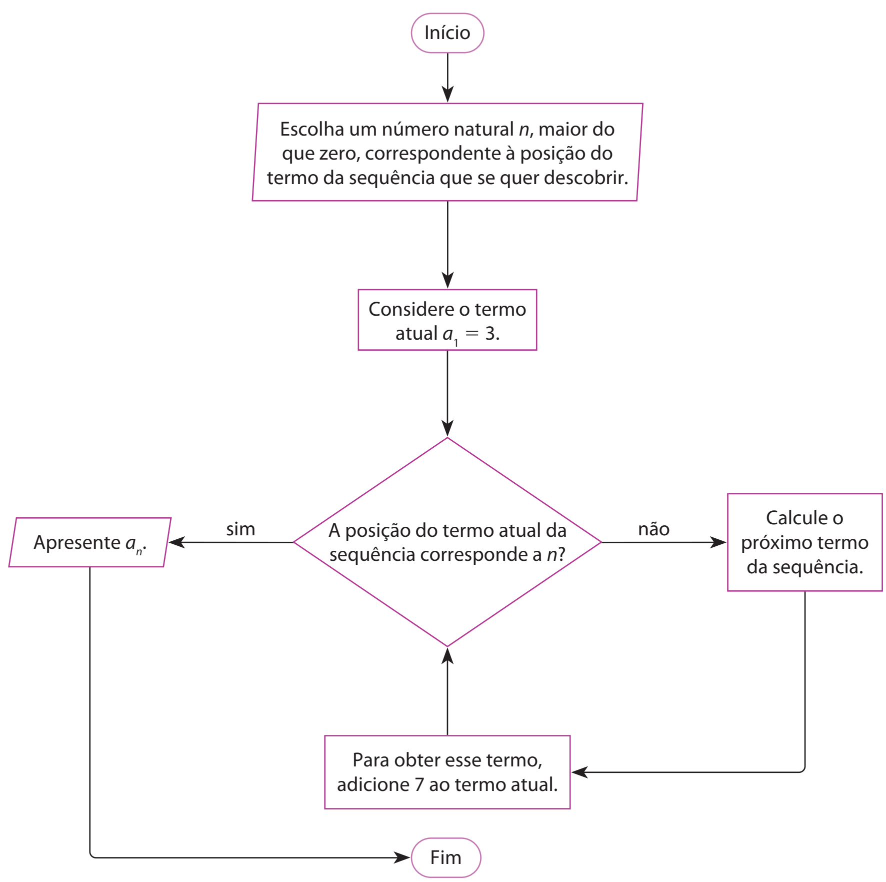
Passo 3. Se a posição do termo atual da sequência corresponde a n, siga para o **passo 4**. Se não, siga para o **passo 5**.

Passo 4. Apresente a_n. O algoritmo é encerrado.

Passo 5. Calcule o próximo termo da sequência.

Passo 6. Para obter este termo, adicione 7 ao termo atual. Volte para o **passo 3**.

b.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Cada vez que um conjunto de passos é executado por completo na repetição, dá-se o nome de **iteração**.

No caso da **atividade resolvida R2**, se $n = 6$, o laço de repetição terá duas iterações se o termo atual for a_4.

Analise o algoritmo da **atividade resolvida R2** em linguagem materna e no fluxograma. Repare que o conjunto de instruções dos **passos** de **3** a **6** pode ser repetido algumas vezes até que a posição do último termo conhecido da sequência corresponda ao número n. Devido à repetição, pode-se chamar essa parte do algoritmo de **laço de repetição**.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

5. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Simule o algoritmo apresentado no fluxograma no item **b** da **atividade resolvida R2** para determinar a_5 e a_7 da sequência (3, 10, 17, 24, ...).

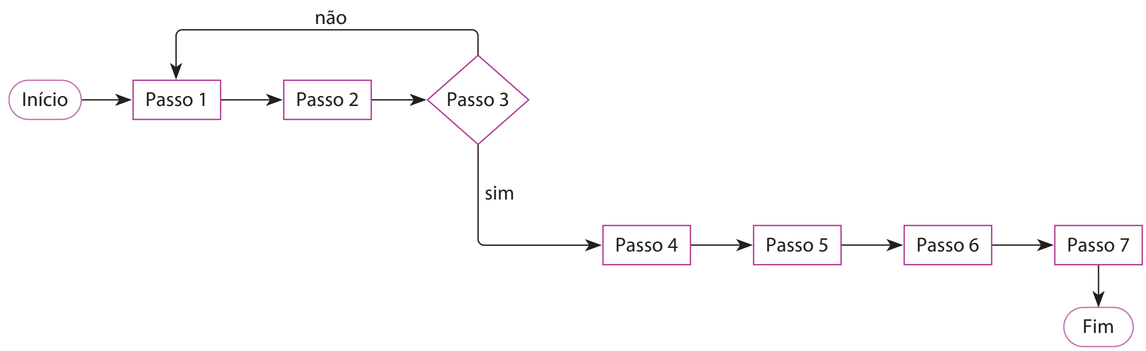
5. $a_5 = 31$; $a_7 = 45$.

6. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** De acordo com a Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa), o ato de lavar as mãos corretamente contribui para a prevenção da transmissão de diversas doenças, dentre elas a covid-19.

Relacione os passos indicados no fluxograma que apresenta um algoritmo de como lavar as mãos corretamente com os números das etapas de I a VII.

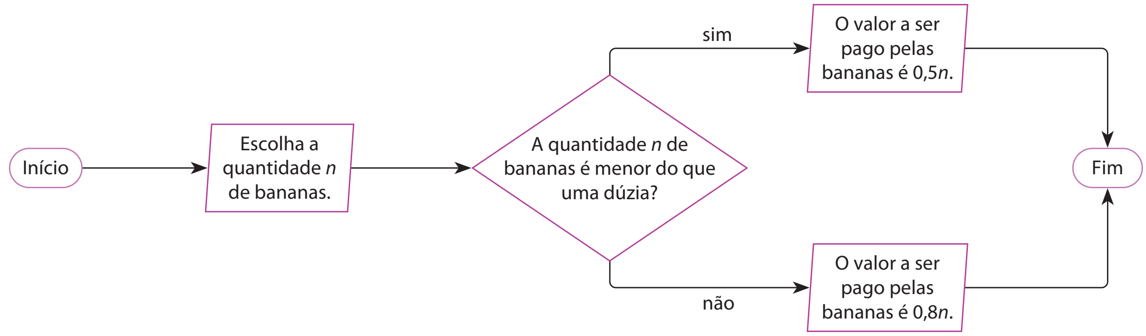
6. Passo 1 - III, Passo 2 - V, Passo 3 - II, Passo 4 - I, Passo 5 - IV, Passo 6 - VI, Passo 7 - VII.

I. Abra a torneira.
II. As mãos estão limpas?
III. Ensaboe as mãos.
IV. Enxágue as mãos.
V. Esfregue bem todas as partes da mão até o pulso.
VI. Feche a torneira.
VII. Seque as mãos.



7. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Uma mercearia faz promoções dependendo da quantidade de frutas compradas. Por exemplo, se o consumidor levar menos do que uma dúzia de bananas, cada uma custa R$ 0,80. Ao comprar pelo menos uma dúzia, as bananas custam R$ 0,50 cada. O fluxograma a seguir apresenta um algoritmo que calcula o valor a ser pago por n bananas nessa promoção, mas ele apresenta um erro. Identifique-o.

7. Espera-se que os estudantes percebam que estão trocados os valores $0{,}8n$ e $0{,}5n$ nos símbolos de saída.



8. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Um número natural é chamado de par quando é divisível por 2, ou seja, a divisão desse número por 2 tem resto igual a zero. Então, se essa divisão tiver resto diferente de zero, o número não é divisível por 2 e é chamado de ímpar.

Escreva um algoritmo em linguagem materna ou em fluxograma que verifica se um número natural n fornecido é par ou ímpar. Para isso, a entrada de dados deve ser um número natural n, e a saída de dados deve ser a indicação se ele é par ou ímpar.

8. Exemplos de resposta no *Suplemento para o professor*.

9. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** **ARGUMENTAÇÃO** Qual representação é mais fácil de visualizar um algoritmo com laço de repetição: a representação em linguagem materna ou em fluxograma? Justifique sua resposta comparando as respostas dos itens **a** e **b** da **atividade resolvida R2**.

9. Espera-se que os estudantes respondam que o fluxograma é mais fácil, pois é possível verificar visualmente qual é o conjunto de instruções que se repete.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Linguagem de programação

Os algoritmos que desenvolvemos até agora podem ser simulados com lápis e papel. Com as próximas atividades, não será diferente. Entretanto, para que os algoritmos funcionem em um computador, a máquina precisa entender o que cada passo (ou instrução) significa e, para isso, utilizamos uma **linguagem de programação**. Existem diferentes tipos de linguagem de programação, e cada uma tem suas particularidades, permitindo construir algoritmos e realizar a modelagem de situações-problema de diversas maneiras.

No entanto, como surgiu a programação? E as linguagens de programação?

A programação surgiu antes do primeiro computador, com o tear mecânico de Joseph Marie Jacquard em 1801. A máquina produzia padrões complicados em tecidos seguindo a programação de grandes cartões perfurados, ou seja, os furos presentes nesses cartões indicavam o funcionamento do tear.

DEAGOSTINI/GETTY IMAGES - MUSEU DE CIÊNCIAS, LONDRES

Joseph Marie Jacquard (1752-1834).

SSPL/GETTY IMAGES

Tear mecânico de Jacquard, com destaque para os cartões perfurados.

OBJETO DIGITAL
Carrossel de imagens: Mulheres na Ciência

Ada Lovelace é uma de muitas mulheres que foram fundamentais no desenvolvimento da sociedade. O carrossel de imagens apresenta um breve resumo da contribuição de quatro mulheres: Hipatia de Alexandria e sua contribuição para a aritmética; Bertha Luz e sua contribuição na criação de leis voltadas às mulheres; Katherine Johnson e sua contribuição na Nasa e, por fim, Sônia Guimarães, primeira mulher negra a ter um doutorado em Física.

Em 1833, inspirado nesse tear, Charles Babbage idealizou a Máquina Analítica, o primeiro computador mecânico, mas nunca a construiu.

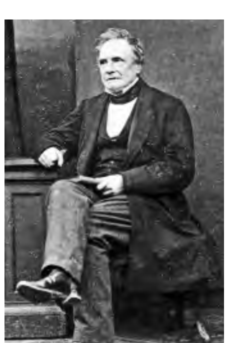
Em 1840, em um seminário em Turim, Itália, Babbage apresentou diversas informações sobre essa máquina. Um dos participantes do seminário, o matemático italiano Luigi Menabrea, publicou em 1842 um artigo em francês para divulgar as informações apresentadas por Babbage à comunidade científica.

Após a publicação, Babbage pediu a Ada Lovelace que traduzisse o artigo para o inglês e acrescentasse suas próprias notas por já conhecer a ideia da Máquina Analítica. Em uma dessas notas, Ada escreveu o primeiro programa de computador, isto é, o primeiro algoritmo que podia ser interpretado pela máquina de Babbage. Na época, como ainda não existia linguagem de programação, o algoritmo era baseado no uso de cartões perfurados, fazendo correspondência entre os furos (presença e ausência) e o sistema binário (que usa somente 0 e 1), inventado por Gottfried Leibniz no século XVIII.

Observação

Augusta Ada Byron, conhecida como Ada Lovelace, era filha do poeta Lord Byron (1788-1824) e foi a primeira programadora da história. Por isso, ela foi homenageada pelo Departamento de Defesa dos EUA, que deu seu nome à linguagem de programação Ada.

SSPL/GETTY IMAGES - COLEÇÃO PARTICULAR



Charles Babbage (1791-1871).

DEAGOSTINI/GETTY IMAGES - COLEÇÃO PARTICULAR

Luigi Menabrea (1809-1896).

PHOTO12/UNIVERSAL IMAGES GROUP/GETTY IMAGES - COLEÇÃO PARTICULAR

Ada Lovelace (1815-1852).

AKG-IMAGES/ALBUM/FOTOARENA - HERZOG ANTON ULRICH-MUSEUM, BRAUNSCHWEIG

Gottfried Leibniz (1646-1716).

Embora a máquina entenda um algoritmo escrito em sistema binário, foram criadas linguagens de programação para facilitar a comunicação entre computadores e seres humanos.

Vamos estudar a criação de algoritmos utilizando uma linguagem de programação visual chamada **Scratch**.

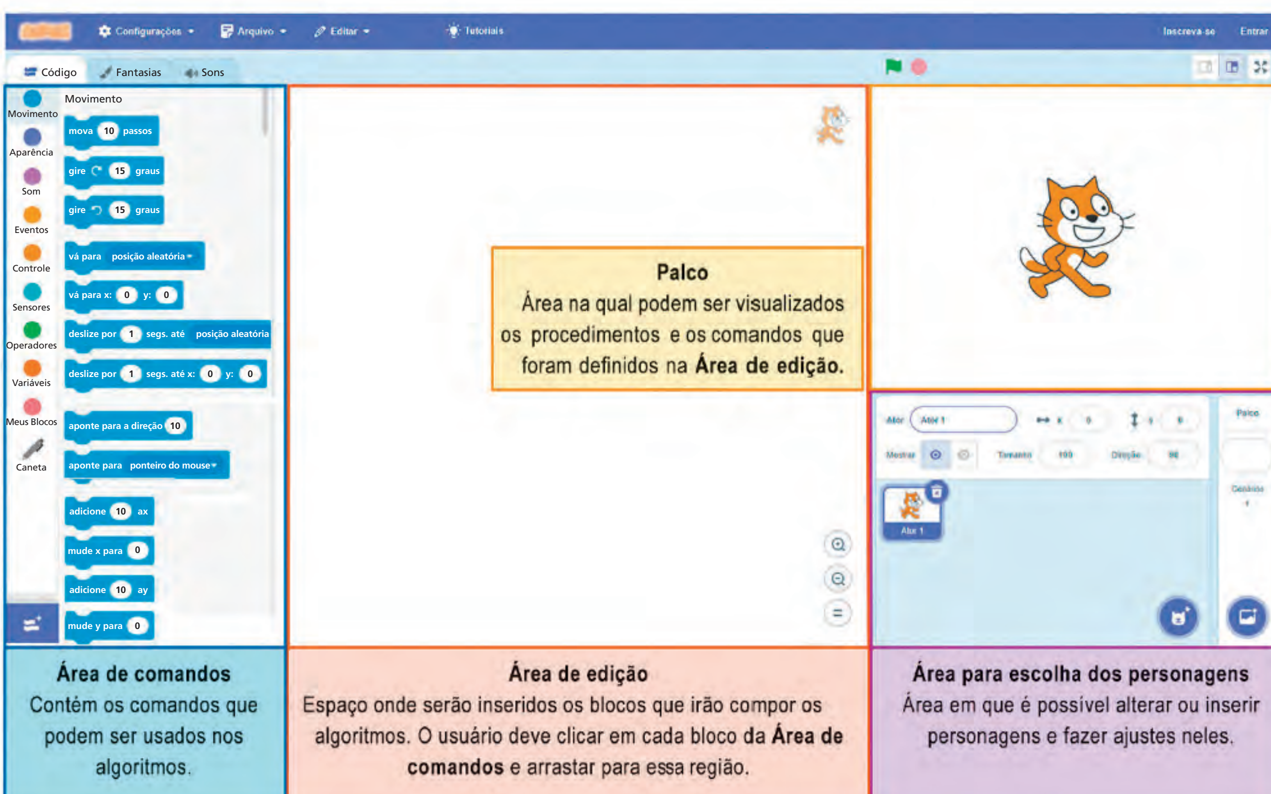
Conhecendo o Scratch

O Scratch é uma linguagem de programação visual, totalmente gratuita, cujo acesso se dá pelo endereço https://scratch.mit.edu/ (acesso em: 13 ago. 2024). Essa linguagem de programação foi desenvolvida pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) e permite a criação de animações, histórias interativas, jogos etc. por meio da movimentação de blocos coloridos que se encaixam perfeitamente e representam diferentes comandos.

A vantagem do Scratch está em utilizar apenas o navegador de seu computador ou *tablet*. Há ainda um aplicativo, que pode ser baixado em sua loja de aplicativos e permite criar projetos sem a necessidade de se conectar à internet.

Ao acessá-lo pela primeira vez, é importante configurar o idioma para português brasileiro. Isso pode ser feito clicando em "Configurações", na parte superior.

No *site* há muitas informações, tutoriais e exemplos de programas desenvolvidos com o Scratch. A imagem a seguir mostra a tela inicial no Scratch.



FOTOS: SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CANBRIDGE, EUA

De modo geral, o funcionamento se resume à escolha de comandos que o usuário vai encaixando para que cada personagem os execute no palco.

Observação

Mesmo alterando o idioma para o português brasileiro, algumas instruções do Scratch ainda podem aparecer em inglês. Isso pode ocorrer quando há alguns elementos do programa que ainda não foram traduzidos no pacote de idiomas.

Os comandos do Scratch estão organizados em categorias, conforme mostra o esquema a seguir.

Os comandos dessa categoria possibilitam controlar a posição e o movimento do personagem.

Os comandos dessa categoria permitem mudar a aparência do personagem, inserir balões de fala/pensamento, modificar o cenário, entre outras coisas.

Os comandos dessa categoria são relacionados a sons.

Os comandos dessa categoria indicam o que precisa ser feito para que determinado bloco de comandos se inicie ou pare: quando a bandeira verde for clicada..., quando uma tecla for pressionada... etc.

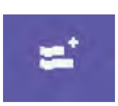
Os comandos dessa categoria permitem testar condições e repetir procedimentos.

Os comandos dessa categoria captam as respostas do usuário para que as ações possam ser executadas.

Os comandos dessa categoria permitem fazer cálculos, comparar números, entre outras coisas.

Os comandos dessa categoria permitem criar variáveis.

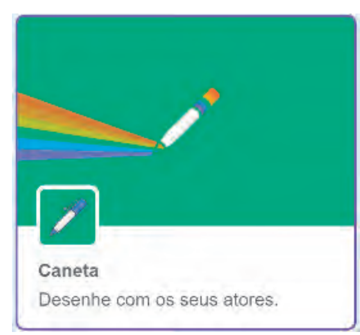
Os comandos dessa categoria permitem que o usuário crie seus próprios blocos.



Comando usado para adicionar uma extensão.

Em **Adicionar uma extensão**, clicando no último botão da área de comandos, podemos encontrar a extensão **Caneta**. Essa extensão contém blocos que podem gerar um rastro do movimento realizado pelo personagem e ainda controlar a aparência desse rastro.

Vamos explorar com mais detalhes algumas categorias de comando.



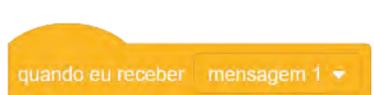
Comandos da categoria Eventos

Os comandos da categoria **Eventos** iniciam a execução de blocos de comando em resposta a ações específicas, como clicar na bandeira verde, pressionar uma tecla ou clicar em um personagem.

Analise alguns exemplos.

Comando utilizado para iniciar a execução de um algoritmo. Quando clicamos na bandeira verde, os comandos ligados a ele são realizados.

Comando utilizado para iniciar a execução de um algoritmo ao pressionar determinada tecla (espaço, setas, letras etc.).



Comando utilizado para iniciar a execução de um algoritmo quando um personagem recebe determinada mensagem.

Comandos da categoria Movimento

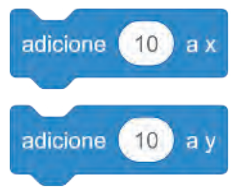
Os comandos da categoria **Movimento** controlam a posição e o movimento dos personagens. Eles permitem mover o personagem em diferentes direções, girá-los e alterar a medida da velocidade de deslocamento.

Considere os exemplos.

Comando utilizado para mover o personagem para frente determinada quantidade de passos.

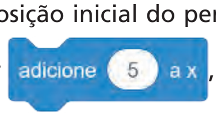
Comandos utilizados para girar o personagem no sentido horário ou anti-horário determinada quantidade de graus.

Comando utilizado para posicionar o personagem no ponto correspondente ao par ordenado (*x*, *y*).



Comandos utilizados para mover o personagem na horizontal (eixo *x*) ou na vertical (eixo *y*) determinada quantidade de unidades.

Os espaços em branco nos blocos são editáveis, isto é, pode-se alterar a quantidade de passos, graus e unidades.

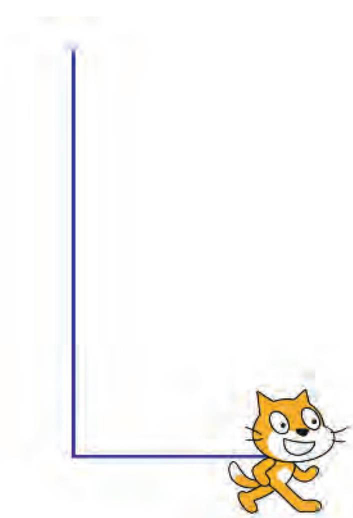
Ao criar um projeto novo, a posição inicial do personagem corresponde ao ponto (0, 0). Dessa maneira, se o comando for , o personagem vai se mover 5 unidades da esquerda para a direita. Se o comando for , o personagem vai se mover 5 unidades da direita para a esquerda.

Se houver possibilidade, explore o Scratch com a ajuda de seu professor ou de um colega. Com isso, você se diverte e se familiariza com os comandos e botões. Agora, acompanhe a seguir alguns exemplos de algoritmo.

a. Movimentar o personagem deixando um rastro que lembre a letra L.

Algoritmos na linguagem materna e Scratch

Linguagem materna	Scratch
Passo 1. Iniciar quando clicar na bandeira verde. **Passo 2.** Usar a caneta. **Passo 3.** Mover 200 unidades para baixo. **Passo 4.** Mover 100 unidades para frente.	



A imagem mostra o resultado desses comandos no palco.

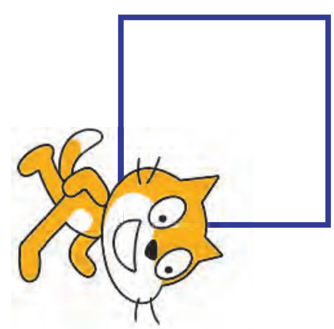
FOTOS: SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CANBRIDGE, EUA

b. Movimentar o personagem deixando um rastro que se pareça com um quadrado.

Algoritmos na linguagem materna e Scratch

Linguagem materna	Scratch
Passo 1. Iniciar quando a tecla *espaço* for pressionada. **Passo 2.** Usar a caneta. **Passo 3.** Mover 100 passos para frente. **Passo 4.** Girar 90° no sentido anti-horário. **Passo 5.** Mover 100 passos para frente. **Passo 6.** Girar 90° no sentido anti-horário. **Passo 7.** Mover 100 passos para frente. **Passo 8.** Girar 90° no sentido anti-horário. **Passo 9.** Mover 100 passos para frente.	

A imagem a seguir mostra o resultado desses comandos no palco.



PENSAMENTO COMPUTACIONAL O que é necessário para que a sequência termine com o personagem em pé, como no início do movimento?

Questão. Acrescentar mais um bloco com a solicitação para o personagem girar 90° no sentido anti-horário ou 270° no sentido horário.

Comandos da categoria Aparência

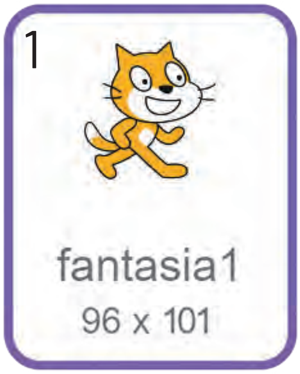
Alguns comandos da categoria **Aparência** permitem a inserção de balões de fala ou de pensamento, conforme os exemplos a seguir.

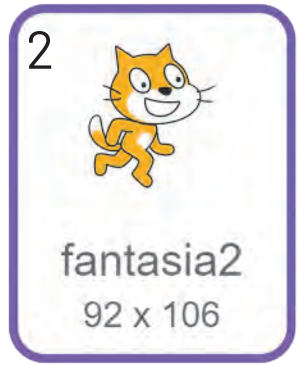
Comando utilizado quando se deseja que os personagens apresentem mensagens por meio de balões de fala.

Comando utilizado quando se deseja que os personagens apresentem mensagens por meio de balões de pensamento.

FOTOS: SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CANBRIDGE, EUA

Cada personagem possui algumas “fantasias” disponíveis, além de outras que podem ser criadas. Para visualizá-las, busque a aba “fantasias” no canto superior esquerdo da tela. Por exemplo, o gato andando possui duas fantasias prontas e o que as diferencia é a posição da perna.



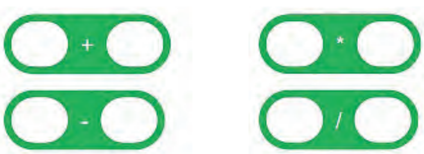


Para mudar a fantasia, é utilizado o comando a seguir.

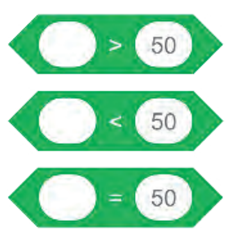
Comandos da categoria Operadores

Os comandos da categoria **Operadores** permitem realizar operações matemáticas, comparar números, entre outras coisas.

Verifique alguns exemplos de comandos a seguir.



Comandos utilizados para adicionar, subtrair, multiplicar e dividir dois números.



Comandos utilizados para comparar dois números.

Comando que fornece o resto da divisão do primeiro número pelo segundo.

O algoritmo a seguir tem por objetivo fazer o personagem dizer o resultado de (5 + 10) **:** 3 após se movimentar 100 passos para a frente.

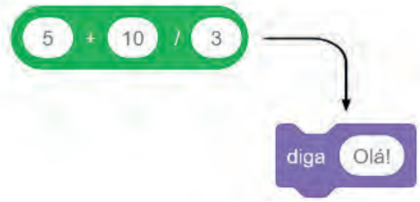
Algoritmos na linguagem materna e Scratch

Linguagem materna	Scratch
Passo 1. Iniciar quando clicar na bandeira verde. **Passo 2.** Mover 100 passos para a frente. **Passo 3.** Calcular (5 + 10). **Passo 4.** Dividir o resultado obtido no **passo 3** por 3. **Passo 5.** Dizer o resultado obtido no **passo 4**.	

Essa imagem mostra o resultado dos comandos no palco.

Observe que, para calcular (5 + 10) **:** 3, foi necessário inserir o bloco que vai calcular (5 + 10) no espaço correspondente ao dividendo do bloco que vai dividir por 3:

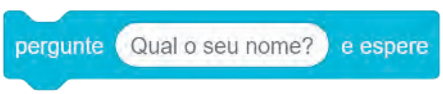
Por fim, pede-se ao personagem que diga o resultado de (5 + 10) : 3. Para isso, foi necessário inserir o bloco com a expressão no espaço em que está escrito "Olá!" no bloco "diga".



Comandos da categoria Sensores

Os comandos da categoria **Sensores** permitem que o usuário interaja com o programa, percebendo, por exemplo, a manipulação do teclado ou a posição do *mouse*.

Considere os exemplos.



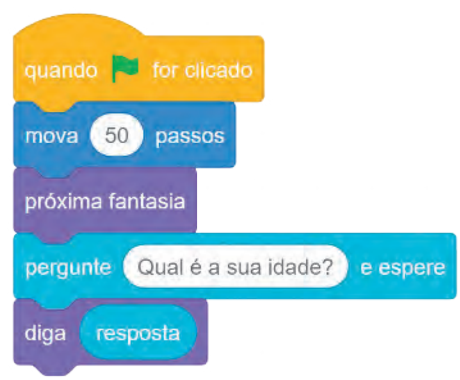
Comando utilizado para fazer perguntas ao usuário e aguardar a resposta.

Comando utilizado para armazenar a resposta do usuário à pergunta feita.

Comando que percebe se o *mouse* foi pressionado.

O algoritmo a seguir tem por objetivo mover o personagem para frente, mudar a fantasia, pausar, incluir a pergunta e dizer a resposta.

Algoritmos na linguagem materna e Scratch

Linguagem materna	Scratch
Passo 1. Iniciar quando clicar na bandeira verde. **Passo 2.** Mover 50 passos para frente. **Passo 3.** Trocar a fantasia. **Passo 4.** Perguntar "Qual é sua idade?". **Passo 5.** Dizer a idade digitada pelo usuário.	

As imagens a seguir mostram o que acontece com o personagem após alguns comandos, considerando que o usuário colocou 16 como resposta

Imagem inicial

Após o **passo 4**.

Após o **passo 5**.

EM GRUPO **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Converse com os colegas e respondam: o que é necessário para que, após todos os comandos, o personagem termine na mesma fantasia que iniciou?

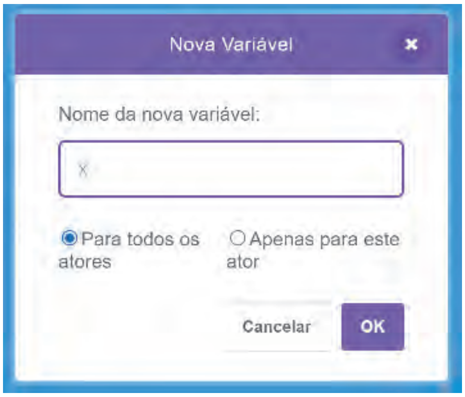
Questão. Exemplo de resposta: acrescentar mais um comando entre os atuais **passos 4** e **5** para trocar de fantasia.

Comandos da categoria Variáveis

No contexto dos algoritmos, as **variáveis** são como "recipientes", isto é, espaços reservados na memória do computador para o armazenamento de dados, permitindo que eles sejam alterados em caso de necessidade. O armazenamento de um valor em uma variável é chamado de **atribuição de valor**.

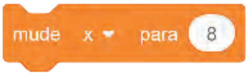
Os comandos da categoria **Variáveis** possibilitam criar uma variável, atribuir valor a ela, manipular esse valor, entre outras coisas.

Ao clicar no comando "Criar uma variável", aparecerá uma janela que possibilita a criação de uma variável com um nome qualquer. Além disso, é possível escolher se essa variável estará disponível para todos os personagens ou só para o atual.



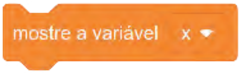
Janela para criar uma variável.

Conheça outros comandos da categoria Variáveis.



Comando utilizado para atribuir valor a uma variável.

Comando utilizado para adicionar um valor a uma variável.



Comando utilizado para exibir a variável.

O algoritmo a seguir tem por objetivo gerar os números da sequência (10, 20, 30, 40).

Algoritmos na linguagem materna e Scratch

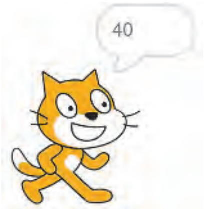
Linguagem materna	Scratch
Passo 1. Iniciar quando clicar na bandeira verde. **Passo 2.** Atribuir 10 a uma variável. **Passo 3.** Dizer a variável. **Passo 4.** Esperar 1 segundo. **Passo 5.** Adicionar 10 unidades à variável. **Passo 6.** Dizer o novo valor atribuído à variável. **Passo 7.** Esperar 1 segundo. **Passo 8.** Adicionar 10 unidades à variável. **Passo 9.** Dizer o novo valor atribuído à variável. **Passo 10.** Esperar 1 segundo. **Passo 11.** Adicionar 10 unidades à variável. **Passo 12.** Dizer o novo valor atribuído à variável.	

As imagens a seguir mostram o que acontece com o personagem após alguns comandos.

Após o **passo 3**.

Após o **passo 6**.

Após o **passo 9**.



Após o **passo 12**.

Observação

No programa anterior, foi utilizado um comando da categoria **Controle**.

Esse comando tem a função de pausar a execução do programa por determinada medida de tempo antes de prosseguir. No exemplo, os balões de fala ficarão parados por 1 s na tela para que o usuário tenha tempo de lê-los.

Outros comandos da categoria **Controle** serão explorados mais adiante.

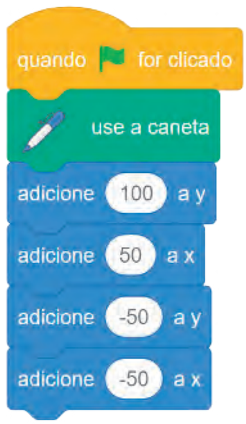
FOTOS: SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CANBRIDGE, EUA

11 a. Movimentar o personagem deixando um rastro que se pareça com um triângulo equilátero.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

10. PENSAMENTO COMPUTACIONAL O algoritmo a seguir vai movimentar o personagem deixando um rastro que se parece com qual letra? **10.** Letra P.



11. PENSAMENTO COMPUTACIONAL Analise o algoritmo a seguir.

FOTOS: SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE, EUA

a. Qual é a finalidade desse algoritmo?

b. Escreva esse algoritmo na língua materna.

11 b.
Passo 1. Iniciar quando a tecla *espaço* for pressionada.
Passo 2. Usar a caneta.
Passo 3. Mover 100 passos para frente.
Passo 4. Girar 120° no sentido anti-horário.
Passo 5. Mover 100 passos para frente.
Passo 6. Girar 120° no sentido anti-horário.
Passo 7. Mover 100 passos para frente.

12. PENSAMENTO COMPUTACIONAL Qual dos algoritmos a seguir vai fazer o personagem dizer o valor da expressão $40 + 100 \times 5$? **12.** Algoritmo II.

Algoritmo I

Algoritmo II

13. PENSAMENTO COMPUTACIONAL Considere o algoritmo.

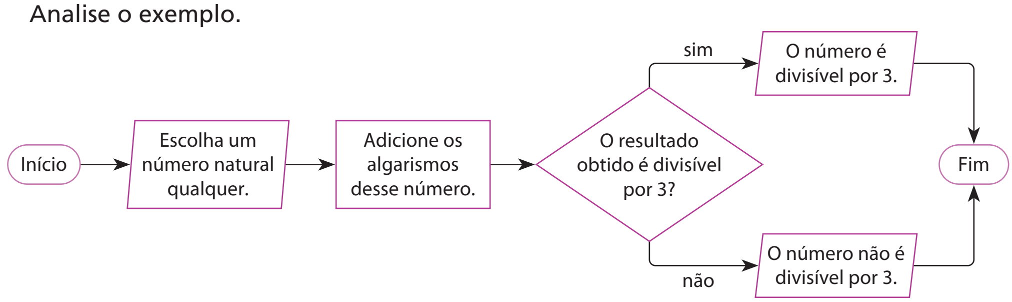
a. Quantas variáveis são utilizadas nesse algoritmo? Como elas foram nomeadas? **13 a.** Duas variáveis: COMPRIMENTO e ALTURA.

b. Qual é o objetivo desse algoritmo?
13 b. Calcular a medida da área de um retângulo cujas medidas de comprimento e de altura foram dadas pelo usuário.

Estrutura de condição

Em programação, existem algoritmos capazes de decidir quais comandos serão executados e quais não serão, dependendo das condições dadas. Em algoritmos como esses, estão presentes as chamadas **estruturas de condição**.

Analise o exemplo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Exemplo de estrutura de condição no Scratch.

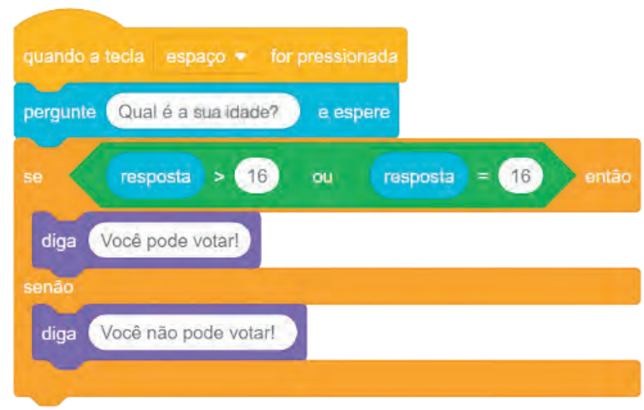
Na estrutura de condição mais simples, **se** uma condição estiver satisfeita, serão executados alguns comandos; **se não**, serão executados outros comandos.

No Scratch, os comandos com estruturas de condição estão na categoria **Controle**.

Acompanhe os exemplos.

a. Algoritmo que verifica se um número natural é ou não divisível por 3.

b. Algoritmo que verifica se uma pessoa está ou não apta a votar com base em sua idade.



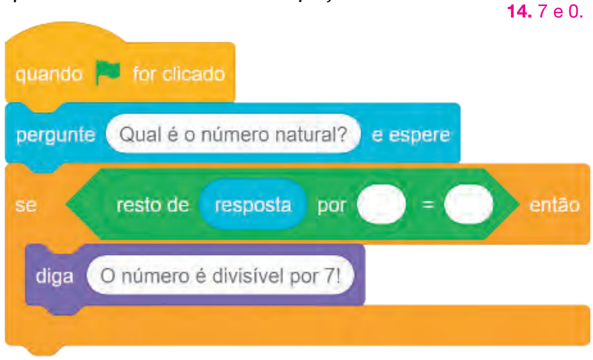
15 c. Blocos A e D. Primeiro o bloco A e depois o bloco D.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

14. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Observe e descubra os valores que devem ser escritos nos espaços em branco dos blocos.

14. 7 e 0.



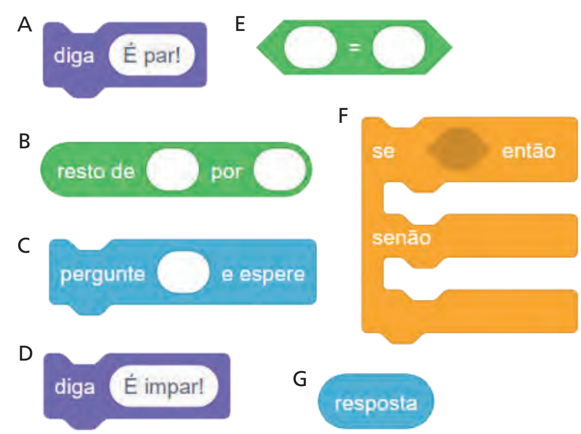
15. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Considere o algoritmo e os blocos do Scratch a seguir.

Passo 1. Perguntar "Qual é o número natural?".

Passo 2. Verificar se o número é divisível por 2.

Passo 3. Se sim, dizer "É par!".

Passo 4. Se não, dizer "É ímpar!".



a. Qual é o primeiro bloco desse algoritmo? O que deve ser escrito nele? **15 a.** O bloco C. Deve ser escrito "Qual é o número natural?".

b. Quais blocos são utilizados para indicar a condição? Como devem ser organizados esses blocos e o que deve ser escrito em cada um deles?

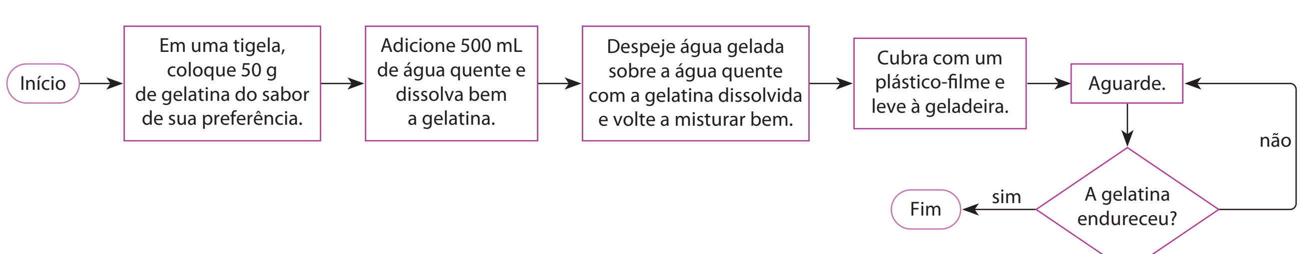
c. Quais blocos devem ser inseridos dentro da estrutura de condição? Em que ordem?

15 b. Blocos F, E, B e G.
I. O bloco G deve ser arrastado para o espaço da esquerda do bloco B, e o espaço da direita do bloco B deve ser preenchido com o número 2.
II. O bloco obtido em **I** deve ser arrastado para o espaço da esquerda do bloco E, e o espaço da direita do bloco E deve ser preenchido com o número 0.
III. O bloco obtido em **II** deve ser arrastado para o espaço do bloco F.

Estrutura de repetição

As **estruturas de repetição** são recursos presentes em alguns algoritmos para indicar que um conjunto de passos deve ser executado mais de uma vez.

Analise o exemplo.



FOTOS: SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE, EUA

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

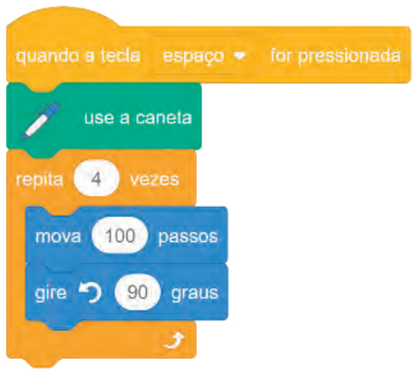
Note que, enquanto a gelatina não tiver endurecido, é preciso aguardar.

No Scratch, os comandos com estruturas de repetição estão na categoria **Controle**.

Exemplo de estrutura de repetição no Scratch.

Acompanhe os exemplos.

a. Algoritmo que movimenta o personagem deixando um rastro que se pareça com um quadrado.



b. Algoritmo que gera os números da sequência (10, 20, 30, 40).

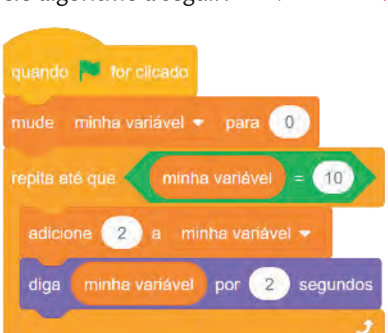
Atividades propostas

Registre em seu caderno

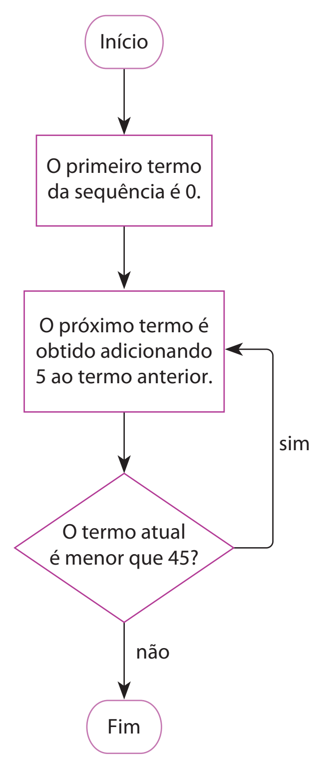
16. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** O rastro do personagem obtido nesse algoritmo se parece com qual letra?

16. Letra M.

17. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Qual é a sequência numérica gerada pelo algoritmo a seguir? **17.** (2, 4, 6, 8, 10)



18. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Analise o fluxograma a seguir.



a. Qual é a sequência numérica gerada pelo algoritmo representado por esse fluxograma?

b. **EM DUPLA** Converse com um colega sobre como vocês poderiam implementar esse algoritmo no Scratch.

18 a. (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45)
18 b. Resposta no *Suplemento para o professor*.

TRABALHO E JUVENTUDES

O programador e o desenvolvimento de jogos digitais


FRAME STOCK FOOTAGE/SHUTTERSTOCK

Programador trabalhando no desenvolvimento de um jogo digital.

O programador é um dos profissionais envolvidos na criação de jogos para computadores, celulares, *tablets* ou *videogames*. Ele trabalha em parceria com roteiristas, ilustradores, *designers* de som e *designers* gráficos, entre outros.

Esse profissional utiliza diferentes linguagens de programação para elaborar algoritmos que estão por trás de um jogo e, por isso, é interessante que ele tenha formação acadêmica nas áreas relacionadas à tecnologia da informação, como Ciência da computação. Assim, é comum que muitos desenvolvedores de jogos sejam também **cientistas da computação**.

Cientistas da computação: profissionais responsáveis por desenvolver, gerenciar e monitorar soluções computacionais que podem aprimorar e empoderar não apenas a sociedade, mas também os mais variados modelos de negócios. Esses profissionais são aptos a construir *softwares*, a fazer uso de diferentes linguagens de programação e a desenvolver algoritmos e modelos computacionais para resolver problemas do cotidiano, por exemplo.

Atividades

Registre em seu caderno

1. **ARGUMENTAÇÃO** Segundo a Pesquisa Game Brasil 2023, 66% dos 14.825 brasileiros entrevistados concordavam, alguns totalmente e outros parcialmente, que existiam boas oportunidades de carreira no Brasil para quem desejasse trabalhar com programação de jogos digitais. Se você fosse entrevistado agora, o que responderia? Justifique sua resposta.

2. **EM GRUPO** Você conhece alguma pessoa que trabalha como programador? Se sim, o que essa pessoa faz? Compartilhe com os colegas. **2.** Respostas pessoais.

3. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Faz parte do trabalho dos programadores identificar e corrigir erros em algoritmos. Imagine que você seja um programador e precise corrigir o algoritmo a seguir. Como você o reescreveria?

   Passo 1. Passe pela primeira fase.

   Passo 2. Finalize o jogo e receba o prêmio.

   Passo 3. Passe pela última fase.

   Passo 4. Inicie o jogo.

   Passo 5. Passe pela segunda fase.

3. Exemplo de resposta:
Passo 1. Inicie o jogo.
Passo 2. Passe pela primeira fase.
Passo 3. Passe pela segunda fase.
Passo 4. Passe pela última fase.
Passo 5. Finalize o jogo e receba o prêmio.

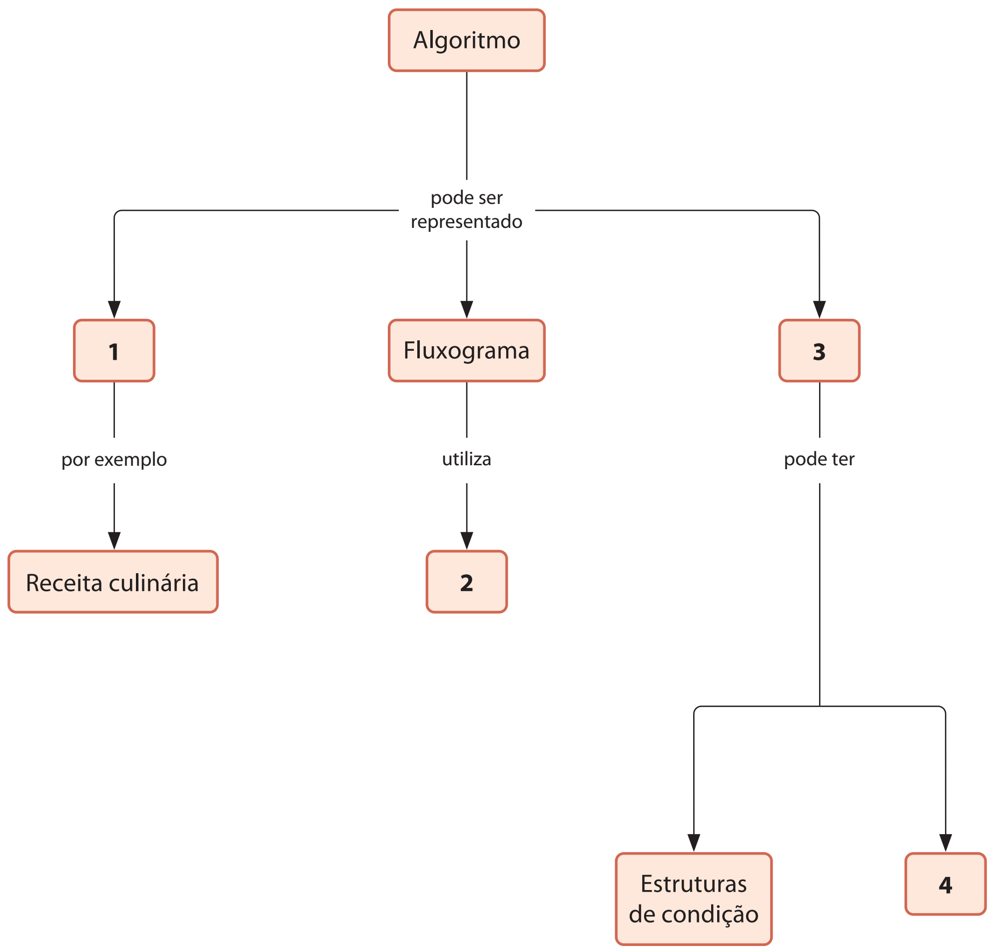
1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes justifiquem sua resposta levando em consideração a percepção de consumo de jogos digitais por parte das pessoas.

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 10

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Relacione os números do mapa conceitual com os termos apresentados a seguir.

A. Estruturas de repetição

B. Símbolos

C. Linguagem de programação

D. Linguagem materna

Conexões entre conceitos. A – 4; B – 2; C – 3; D – 1.

SUGESTÃO DE AMPLIAÇÃO

Livro

REPRODUÇÃO/NOVATEC EDITORA

Aprenda a programar com Scratch: uma introdução visual à programação com jogos, arte, ciência e matemática

Majed Marji

São Paulo: Novatec, 2014.

Com esse livro, é possível aprender a resolver problemas de programação do mundo real usando o Scratch.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Um algoritmo: **1.** Alternativa **c.**

a. é um conjunto de instruções que realizam apenas operações com números na forma de fração e na forma decimal.
b. pode ser usado apenas em computadores.
c. é uma sequência finita e bem definida de passos para realizar uma tarefa.
d. é um programa de computador.
e. não pode ser representado graficamente.

Q2. Um símbolo de decisão: **2.** Alternativa **b.**

a. pode ser representado por uma seta em qualquer fluxograma.
b. é representado por um losango em fluxogramas.
c. representa o início e o fim em fluxogramas.
d. é representado por um retângulo em fluxogramas.
e. representa uma saída de dados em fluxogramas.

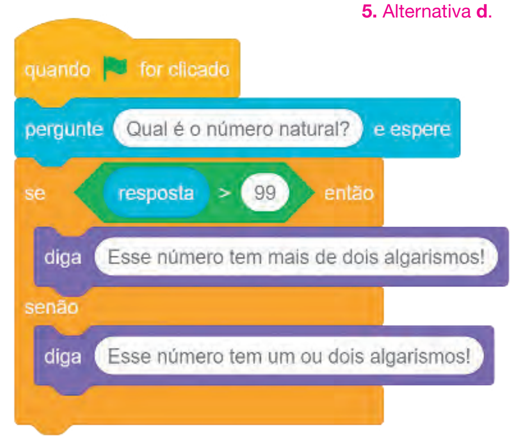
Q3. Um laço de repetição: **3.** Alternativa **c.**

a. repete um único passo um número fixado de vezes.
b. não permite a entrada de dados em seu interior.
c. precisa de uma condição de parada bem definida e que deve ser atingida.
d. deve ser evitado para que o algoritmo tenha possibilidade de acabar.
e. serve apenas para adicionar números.

Q4. No contexto dos algoritmos, uma variável: **4.** Alternativa **a.**

a. armazena valores que podem até ser diferentes de números.
b. deve guardar um valor que não pode ser alterado.
c. armazena apenas valores numéricos.
d. armazena apenas valores do tipo cadeia de caracteres.
e. não pode ser utilizada em uma operação matemática.

Q5. Observe o algoritmo a seguir e indique o que ele faz.
5. Alternativa **d.**



SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CANBRIDGE, EUA

a. Avalia se um número é par.
b. Pede um número maior que 99.
c. Avalia quantos algarismos tem o número 99.
d. Avalia se um número digitado tem 1 ou 2 algarismos ou mais de 2 algarismos.
e. Repete o movimento por 99 vezes.

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Compreender o conceito de algoritmo.	X				
Interpretar e construir fluxogramas que representam algoritmos.		X	X		
Compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas.				X	X
Resolver problemas usando uma linguagem de programação.					X

O que há por trás dos dados?

ODS 3 ODS 16

Todos os dias lidamos, por meio de diferentes mídias, com dados estatísticos. Esses dados nos ajudam a compreender variadas situações no dia a dia, a propiciar a realização de previsões confiáveis e a tomar decisões da maneira mais acertada possível, de acordo com objetivos preestabelecidos. No entanto, muitos desses dados escondem informações importantes ou são apresentados de modo a induzir determinada interpretação.

Acompanhe a cena a seguir.

LUIZ IRIA/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, leia as inferências a seguir a respeito das informações da cena.

Interpretação equivocada da média: a fala da repórter na televisão pode induzir o telespectador a achar que as pessoas que vivem no município têm uma renda próxima de 15 mil reais; no entanto, esse dado pode camuflar a desigualdade social existente no local. É comum, por exemplo, que a maior parte da população de um município tenha renda inferior à média e uma parcela pequena tenha uma renda bem superior.

Informação escondida: a leitura imediata do texto no jornal é positiva. A prefeitura parece fazer seu trabalho. No entanto, a informação de que um terço da população ainda não conta com coleta de lixo ficou escondida na frase, levando o leitor a não prestar tanta atenção a essa informação negativa.

Porcentagem × números absolutos: dizer que o número de acidentes de trânsito na região aumentou apenas 0,01% minimiza um problema que pode ser mais sério do que parece. Essa porcentagem pode corresponder a 1.000 acidentes, por exemplo, o que não é um número baixo. Algumas vezes, quando a situação é desfavorável, os dados são apresentados na forma de porcentagem e, quando a situação é favorável, eles são apresentados em números absolutos.

Ao se deparar com dados estatísticos, questione sempre! Procure saber quem publicou, quem fez a pesquisa, como os dados foram coletados, que informações estão faltando e se as informações fazem sentido.

2. Respostas no *Suplemento para o professor*.

Atividades

Registre em seu caderno

1. EM GRUPO Reúna-se com três colegas, leiam as notícias a seguir e conversem sobre possíveis informações escondidas em cada uma delas. **1.** Exemplos de respostas no *Suplemento para o professor*.

2. EM GRUPO Leia a propaganda a seguir publicada em uma rede social.

ILUSTRAÇÕES: EDNEI MARX/ARQUIVO DA EDITORA

Com os colegas da atividade anterior, responda:

a. Na opinião de vocês, qual foi a estratégia utilizada por essa propaganda para vender máscaras?

b. Com que intenção o dado 100% foi utilizado nessa propaganda?

c. Leiam a informação a seguir.

> Usando máscaras você não pega covid-19.

Essa informação é verdadeira ou falsa? Façam a checagem e justifiquem a resposta.

3. EM GRUPO Com os colegas, analisem a propaganda de uma loja de carros em um *outdoor*.

Agora, respondam. **3 a. b.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. É verdade que não há cobrança de juro na venda do carro?

b. Na opinião de vocês, por que a informação sobre a taxa de cadastro no banco está menor que as outras informações na propaganda?

c. Supondo que uma pessoa compre um carro cujo preço à vista seria de R$ 89.900,00. Nas condições da propaganda, qual seria o valor total pago ao final do financiamento, ou seja, após pagar as 48 prestações? Use uma calculadora para resolver.

3 c. Aproximadamente R$ 144.251,91.

Telejornal

OBJETIVOS

Pesquisar sobre os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) relacionados ao meio ambiente; pesquisar informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal; divulgar a pesquisa realizada à comunidade escolar.

A preservação do meio ambiente é indispensável para manter a saúde do planeta Terra e de todos os seres vivos que o habitam. Por se tratar de um tema tão importante, essa é uma das pautas da Organização das Nações Unidas (ONU), que anualmente reúne diversos países em congressos, conferências e encontros sobre os mais variados assuntos, como a reflexão sobre o meio ambiente e a promoção de ações para preservá-lo.

Pensando no desenvolvimento sustentável do planeta e na qualidade de vida das atuais e das futuras gerações, os países-membros da ONU definiram os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS). Alguns desses objetivos estão relacionados ao meio ambiente.

Conscientizar as pessoas sobre a importância de preservar os recursos é um dos passos para a preservação ambiental. Por isso, nesta seção, você e seus colegas vão pesquisar informações e dados estatísticos sobre o meio ambiente e apresentá-los, no formato de um telejornal, à comunidade escolar (pais, estudantes e professores). Dessa maneira, é possível realizar um trabalho de conscientização sobre a importância da preservação do meio ambiente e do desenvolvimento sustentável.

Etapa 1: A ONU e os ODS

Etapa 1: Comentários no *Suplemento para o professor*.

1. Pesquise e responda às questões a seguir.

a. O que é a ONU? Qual é o objetivo principal dessa organização?

b. O que são e quais são os ODS?

c. Quais ODS estão relacionados diretamente com a preservação do meio ambiente? Indique as principais ações propostas por esses objetivos.

Etapa 2: Informações e dados estatísticos sobre a degradação do meio ambiente

Etapa 2: Comentários no *Suplemento para o professor*.

2. **EM GRUPO** Reúna-se com os colegas em grupos. Escolham um dos temas listados a seguir para pesquisar sobre ele, obtendo referências do município em que residem e do Brasil.

Tema 1 – Água potável e saneamento: dados estatísticos sobre o acesso à agua potável e ao saneamento adequado no Brasil; dados sobre a reciclagem de material; dados sobre a reutilização da água; informações sobre como o despejo de dejetos e de produtos químicos no ar, em rios etc. poluem e degradam o ambiente; informações sobre a gestão dos recursos hídricos no Brasil e a escassez de água; dados sobre programas de coleta de água, eficiência do uso e tecnologias para o reúso.

Tema 2 – Energia limpa e sustentável: o que é energia renovável e quais são os tipos existentes; informações sobre a pesquisa, o acesso e as tecnologias usadas para a produção de energia limpa (energia renovável, eficiência energética e tecnologias de combustíveis fósseis); dados estatísticos sobre o fornecimento de energia; dados sobre o tipo de energia e a porcentagem de energia sustentável usada pelos brasileiros.

Tema 3 – Consumo e produção sustentáveis: o que são gestão sustentável e uso eficiente dos recursos naturais; dados sobre a situação no Brasil nesses quesitos; informações sobre a redução da geração de resíduos por meio da prevenção, da redução, da reciclagem e do reúso.

3. **EM GRUPO** Com base no tema escolhido, realizem as pesquisas em livros, revistas especializadas, jornais ou *sites*. Peçam orientação ao professor, quando necessário, e busquem *sites* seguros, nos quais possam encontrar informações confiáveis. Lembrem-se de que sempre devemos indicar as fontes de pesquisa.

4. **EM GRUPO** Com base nos dados e nas informações coletados, respondam às questões a seguir.

a. As informações coletadas foram obtidas em fontes confiáveis? Existem informações conflitantes ou de fontes diferentes? Se sim, o que fazer nesse caso?

b. De que maneira os dados coletados estavam apresentados na fonte pesquisada? Existe outra maneira de indicar esses dados, tornando-os mais atrativos aos espectadores do telejornal, a fim de que um maior número de pessoas compreenda as informações transmitidas?

5. **EM GRUPO** Selecionem as informações que consideram mais importantes sobre o tema pesquisado e o modo como elas poderão ser apresentadas.

Etapa 3: Criação do telejornal

6. Analise a organização de um telejornal. **Etapa 3:** Comentários no *Suplemento para o professor*.

Etapas em que o recurso de trilha sonora é usual.

QUEM É QUEM

- **ÂNCORAS**: apresentam o telejornal e podem expor seu ponto de vista, assumindo a responsabilidade.
- **EDITORES DE VÍDEO**: responsáveis por editar todo o material (reportagens, vinhetas, trilha sonora etc.) seguindo o roteiro preestabelecido.
- **PRODUTORES**: responsáveis pela organização geral, verificam os textos e cuidam da programação dos horários e da organização das etapas do telejornal.
- **REPÓRTERES**: produzem as reportagens por meio de pesquisas, entrevistas etc.
- **ROTEIRISTAS**: definem e registram como o telejornal será organizado – a sequência de apresentação das reportagens, a sequência de fala dos âncoras e o momento de entrada das reportagens e das vinhetas.
- **OPERADORES DE CÂMERA**: responsáveis pela gravação do telejornal.

ESCALADA — Serve para chamar a atenção do telespectador com a introdução das principais manchetes, que são selecionadas pelos PRODUTORES.

ABERTURA — Mostra a identidade do telejornal. Pode apresentar uma vinheta e o cenário principal.

INTRODUÇÃO — Feita pelos ÂNCORAS para anunciar as reportagens. Esta etapa é definida pelos ROTEIRISTAS.

REPORTAGENS — Produzidas e muitas vezes apresentadas pelos REPÓRTERES, trazem imagens e vídeos, relacionados ao assunto, com as fontes e o nome do repórter e do cinegrafista.
- ao vivo (interação entre âncoras e repórteres)
- gravada (com ou sem a presença do repórter)
- entrevista com especialista

AMARRAÇÕES e INTERVALO — Momentos de pausa entre as reportagens, que procuram manter a atenção do telespectador, gerando expectativa.

ENCERRAMENTO e CRÉDITO — Finaliza o telejornal, podendo trazer um resumo das notícias apresentadas. O crédito apresenta a equipe envolvida na produção do telejornal.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

O telejornal pode abordar temas como mudanças climáticas, poluição ambiental, desmatamento, sustentabilidade, consumo consciente, energias renováveis, entre outros.

7. EM GRUPO Agora, você e sua turma vão criar um telejornal, buscando conscientizar as pessoas sobre a situação ambiental e o futuro do meio ambiente.

Deem um nome ao telejornal. O telejornal poderá ser gravado e depois transmitido à comunidade escolar em um evento agendado.

8. EM GRUPO Para a produção do telejornal, a organização da turma poderá ser feita de acordo com as funções com que cada um mais se identifica. Todas as etapas do trabalho são importantes e todos devem trabalhar juntos para que o telejornal aconteça. Troquem ideias, organizem as tarefas e definam as reportagens de destaque. O trabalho em equipe permite que o telejornal fique mais organizado e aborde melhor o tema.

9. EM GRUPO Após produzirem as reportagens e definirem a organização do telejornal, façam um ensaio. Esse momento é importante para verificar o que está bom e o que precisa ser melhorado. Vocês podem ensaiar mais de uma vez, para que se sintam confiantes no momento da gravação, antes da edição do vídeo.

Etapa 4: Apresentação do telejornal

Etapa 4: Comentários no *Suplemento para o professor*.

10. EM GRUPO Após a edição da gravação, em um dia previamente agendado, transmitam o telejornal aos telespectadores. Na data combinada, organizem um espaço para que as pessoas possam se sentar e assistir ao telejornal.

Etapa 5: Análise e síntese do trabalho realizado

Etapa 5: Comentários no *Suplemento para o professor*.

11. EM GRUPO Após a apresentação do telejornal, reúna-se com a turma para avaliar o trabalho realizado. É interessante que todos opinem sobre alguns pontos, como:

- O que acharam do telejornal?
- O tema ficou claro para os expectadores?
- A turma conseguiu trabalhar de forma colaborativa?
- O que poderia ter sido mais bem preparado?

12. Nesse momento, você fará uma autoavaliação. Para isso, escreva um relatório respondendo às questões a seguir e acrescente informações que julgar importantes sobre sua autoavaliação. Em seguida, entregue o relatório ao professor.

- Ajudei meu grupo durante a pesquisa do tema?
- Tive dificuldade em encontrar dados e informações em fontes confiáveis?
- Houve alguma dificuldade durante a coleta das informações?
- Compreendi o teor das informações e dos dados estatísticos coletados para conscientizar as pessoas sobre a importância de preservar o meio ambiente?
- Ajudei a turma propondo ideias, sugestões e mudanças durante a criação do telejornal?
- Participei dos momentos de conversa, de pesquisa, de organização e de produção do telejornal?
- Ouvi as sugestões dos colegas com atenção e respeito?
- Tive dificuldades durante o trabalho? Se sim, quais? Como busquei resolvê-las?
- O que aprendi durante a criação do telejornal?

PREPARE-SE PARA O ENEM E VESTIBULARES

Registre em seu caderno

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

1. **(Enem – 2022)** Um borrifador de atuação automática libera, a cada acionamento, uma mesma quantidade de inseticida. O recipiente desse produto, quando cheio, contém 360 mL de inseticida, que duram 60 dias se o borrifador permanecer ligado ininterruptamente e for acionado a cada 48 minutos.

A quantidade de inseticida que é liberada a cada acionamento do borrifador, em mililitro, é **1.** Alternativa **b.**

a. 0,125. **b.** 0,200. **c.** 4,800. **d.** 6,000. **e.** 12,000.

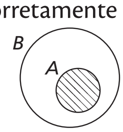
2. **(Fatec – 2023)** Peter Drucker, pai da Administração moderna, enunciou a proposição "*Todas as inovações eficazes são surpreendentemente simples*".

Considere verdadeiras a proposição de Drucker e a proposição **p**: "*uma roda é uma inovação eficaz*".

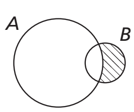
Em cada alternativa são apresentados diagramas de Euler-Veen, nas quais **A** é o conjunto das inovações eficazes, **B** é o conjunto das inovações "supreendentemente simples", e existe uma região tracejada que representa o conjunto ao qual uma roda pertence.

Assim sendo, assinale a alternativa cujo diagrama indica corretamente as relações descritas. **2.** Alternativa **a.**

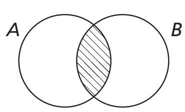
a.



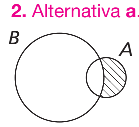
b.



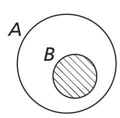
c.



d.



e.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

3. **(Fatec – 2023)** Os aplicativos de entrega modificaram o consumo e os hábitos de trabalho. Por exemplo, no que se refere aos valores recebidos pelos entregadores, um aplicativo paga, na cidade de São Paulo, R$ 3,20 para cada retirada de alimento, R$ 1,40 por entrega realizada e, para cada quilômetro rodado, o entregador ganha R$ 1,10.

https://tinyurl.com/yx68dbl2. Acesso em: 28.10.2022. Adaptado.

De acordo com o texto, a função que relaciona a quantidade de quilômetros percorridos (x) com o valor em reais (y) pago pelo aplicativo a um entregador que executou um único processo completo, descrito no texto, é **3.** Alternativa **b.**

a. $y = 0{,}70x$.

b. $y = 4{,}60 + 1{,}10x$.

c. $y = 4{,}30 + 1{,}40x$.

d. $y = 2{,}50 + 3{,}20x$.

e. $y = 5{,}70x$

4. **(UESB – 2023)** Dentre os pontos de coordenadas inteiras pertencentes ao segmento de reta $y = \frac{5}{6}x$, $0 \leqslant x \leqslant 50$, quantos têm a ordenada que é um número divisível por 6?

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3 **e.** 4

4. Alternativa **c.**

5. **(UEG – 2023)** Seja a função $f(x) = -x^2 + x + 6$. Constata-se que o gráfico de $f(x)$ **5.** Alternativa **a.**

a. intersecta o eixo das ordenadas no ponto (0, 6).

b. não intersecta o eixo das abscissas.

c. tem como vértice o ponto (−2, 0).

d. representa uma função crescente para $x \in [-2, 3]$.

e. é uma parábola com concavidade voltada para cima.

6. **(Enem – 2020)** Uma torneira está gotejando água em um balde com capacidade de 18 litros. No instante atual, o balde se encontra com ocupação de 50% de sua capacidade. A cada segundo caem 5 gotas de água da torneira, e uma gota é formada, em média, por 5×10^{-2} mL de água.

Quanto tempo, em hora, será necessário para encher completamente o balde, partindo do instante atual?

a. 2×10^{1} **b.** 1×10^{1} **c.** 2×10^{-2} **d.** 1×10^{-2} **e.** 2×10^{-3}

6. Alternativa **b.**

7. **(Unicamp – 2021)** Se $f(x) = \log_{10}(x)$ e $x > 0$, então $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(100x)$ é igual a **7.** Alternativa **b.**

a. 1. **b.** 2. **c.** 3. **d.** 4.

8. **(Fuvest – 2023)** Joana comprou um celular e dividiu o pagamento em 24 parcelas mensais que formam uma progressão aritmética crescente. As três primeiras parcelas foram de R$ 120,00, R$ 126,00 e R$ 132,00. Sabendo que, ao final, constatou-se que Joana não pagou a 19ª parcela, o valor pago por ela foi: **8.** Alternativa **d.**

a. R$ 3.954,00 **b.** R$ 4.026,00 **c.** R$ 4.200,00 **d.** R$ 4.308,00 **e.** R$ 4.382,00

9. **(Uerj – 2023)** Considere a seguinte equação:

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \ldots = 18,\ x \in \mathbb{R}$$

Sabendo que o primeiro membro dessa equação é a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, o valor de x é igual a: **9.** Alternativa **d.**

a. 6 **b.** 8 **c.** 10 **d.** 12

10. **(Uece – 2023)** O Produto Interno Bruto (PIB), que revela o crescimento econômico de um país, é um valor numérico monetário que representa a soma de todos os bens e serviços produzidos no país, em geral no período de um ano. O PIB individualizado, denominado PIB "per capita" é calculado dividindo-se o PIB pelo número de habitantes do país. No ano de 2022, o PIB do país X cresceu 18% em relação ao PIB de 2021 e, na mesma referência de tempo, a população cresceu 10%. Com base nos dados apresentados, o crescimento percentual do PIB "per capita" do país X no ano de 2022, em relação ao ano de 2021, foi aproximadamente **10.** Alternativa **a.**

a. 7%. **b.** 6%. **c.** 9%. **d.** 8%.

Avaliação diagnóstica 1

1. Alternativa **a**.
2. Alternativa **a**.
3. Alternativa **d**.
4. Alternativa **b**.
5. Alternativa **e**.
6. Alternativa **d**.
7. Alternativa **c**.
8. Alternativa **c**.
9. Alternativa **d**.
10. Alternativa **b**.
11. Alternativa **b**.
12. Alternativa **e**.
13. Alternativa **a**.

CAPÍTULO 1 Grandezas e medidas

1. a. Perímetro é uma grandeza.
b. Área é uma grandeza.
c. Volume é uma grandeza.
2. a. 20 u, 30 u, 20 u, 30 u.
b. 50 u, 70 u, 50 u, 70 u, 100 u.
c. 100 peças, 150 peças, 100 peças, 150 peças, 600 peças; 100 u^2, 150 u^2, 100 u^2, 150 u^2, 600 u^2.
3. Tarefa do estudante.
4. a. Exemplo de resposta: fita métrica, milímetro; balança, grama; termômetro, grau Celsius; esfigmomanômetro, milímetro de mercúrio (mmHg).
b. Exemplo de resposta: trena, milímetro; recipiente graduado em litro ou dm^3, litro ou dm^3.
c. Exemplo de resposta: calendário, semana; relógio, minuto; cronômetro, segundo.
5. a. 2 algarismos significativos.
b. 4 algarismos significativos.
c. 5 algarismos significativos.
d. 4 algarismos significativos.
e. 2 algarismos significativos.
f. 5 algarismos significativos.
6. Total: 7.700.000, 7.500.000, 7.600.000, 7.800.000, 7.900.000; integrado: 600.000, 600.000, 700.000, 700.000, 800.000.
7. Andréa pode comprar nas duas primeiras lojas (aproximadamente R$ 47,00), mas na última (aproximadamente R$ 51,00), não.
8. e **9.** Respostas pessoais.
10. Alternativa **b**.
11. 43.300.000.000.000.000.000; $4{,}33 \cdot 10^{19}$.
12. 200 µm
13. a. $1{,}3 \cdot 10^{40}$ kg **b.** $1{,}3 \cdot 10^{19}$ Yg
14. a. Resposta pessoal.
b. Chumbo tem maior medida de massa específica, 11,3 g/cm^3; o "peso" é o mesmo em ambas as mãos.
15. 75 kg
16. Aproximadamente 7,2 m/s e 25,92 km/h.
17. a. 2,25 m^2; as medidas de comprimento dos lados são iguais a 1,5 m.
b. Não, será 4 vezes maior que a medida de área anterior.
c. Não, será 9 vezes maior que a medida de área anterior.
18. Resposta pessoal.
19. a. Sim, pois 1 m/s = 3,6 km/h.
b. Sim, o fator de conversão é o inverso de 3,6, ou seja, basta dividir a medida de velocidade em km/h por 3,6 para obter a respectiva medida de velocidade em m/s.
20. a. 273,15 K **b.** 373,15 K
21. Alternativa **b**.
22. 1.280 arquivos; não é possível responder à questão por falta de dados.
23. Não, o erro aumenta para cerca de 21%.

Trabalho e juventudes – *Chef* de cozinha

1. Resposta pessoal.
2. Tarefa do estudante.
3. Exemplo de resposta: Medir a massa de ingredientes, medir o tempo de cozimento dos alimentos ou do preparo de um prato, ajustar a medida da temperatura em que algo deve assar no forno ou ser conservado na geladeira, separar a medida de volume de um líquido para uma receita etc.
4. Exemplo de resposta: Balança, cronômetro, termômetro, copo medidor etc.
5. Respostas pessoais.

Para finalizar o capítulo 1

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c**.
Q2. Alternativa **b**.
Q3. Alternativa **d**.
Q4. Alternativa **a**.
Q5. Alternativa **a**.
Q6. Alternativa **d**.
Q7. Alternativa **d**.

CAPÍTULO 2 Conjuntos

1. a. $A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$
b. $B = \{A, E, I, O\}$
c. $C = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$
2. a. Exemplo de resposta: *D*: *x* tal que *x* é um número natural múltiplo de 12 e menor que 40.
b. Exemplo de resposta: E: fases da Lua.
c. Exemplo de resposta: F: *x* tal que *x* é um número ímpar maior que 3 e menor que 21.
3. a. Falsa. **b.** Verdadeira. **c.** Verdadeira. **d.** Falsa. **e.** Verdadeira. **f.** Verdadeira.
4. a. Não. Há números ímpares que não são múltiplos de 3: por exemplo, 5.
b. Não. Há números ímpares que não são primos: por exemplo, 49.
c. Não. Há um número primo que é par: o número 2.
5. A e C.
6. a. $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b. $Y = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
7. a. Falsa. **b.** Verdadeira. **c.** Falsa. **d.** Verdadeira. **e.** Falsa. **f.** Verdadeira. **g.** Falsa. **h.** Verdadeira. **i.** Verdadeira.
8. a. {2, 9} **b.** {3, 9} **c.** {8, 4} **d.** {5, 7, 9}
9. $M = \{b\}$ ou $M = \{a, b\}$ ou $M = \{b, c\}$ ou $M = \{a, b, c\}$.
10. Exemplos de resposta: $A \supset B$; $A \supset C$; $A \supset D$; $B \supset C$; $D \subset B$; $D \subset C$; $B \not\subset C$; $C \not\subset D$.
11. O = {João, Rui} ou O = {João, Rui, Jonas} ou O = {João, Rui, Carlos} ou O = {João, Rui, Carlos, Jonas}.
12. a. {1, 2, 3, 4} **b.** {1, 3, 5} **c.** {1, 2, 3, 4, 5} **d.** {1, 2, 3, 4, 5}
13. 213.317.639 elementos.
14. a. B **b.** $\varnothing$ **c.** $\varnothing$ **d.** B
15. a. $\varnothing$ **b.** {5} **c.** {5, 6, 7, 8, 9}
16. a. Exemplo de resposta: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
b. Exemplos de resposta: $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(B \cap C) - A$
17. 8 voluntários; 34 voluntários.
18. 25 pessoas.
19. a. 46%
b. Os filmes *X* e *Z*, porque $n(X \cup Z) > n(Y \cup Z) > n(X \cup Y)$.
20. A conclusão I está de acordo com os dados apresentados.
21. a. {6, 8, 10} **b.** {0, 2, 10} **c.** {0, 2, 6, 8, 10} **d.** {6, 8}
22. O próprio conjunto *C*.
23. a. 15 **b.** 27 **c.** 0 **d.** 5
24. a. Falsa. **b.** Verdadeira. **c.** Verdadeira. **d.** Falsa. **e.** Verdadeira. **f.** Falsa.
25. Exemplo de resposta: Essa conclusão é uma generalização indevida, pois o resultado de 3 dividido por 2, por exemplo, não está definido no conjunto dos números inteiros.
26. a. $\mathbb{N}$ **b.** $\mathbb{Q}$ **c.** $\mathbb{Z}$ **d.** $\mathbb{Q}$
27. Tarefa do estudante.
28. a. $-\frac{91}{9}, -\frac{991}{99}$ **b.** $\frac{4}{3}, \frac{23}{15}$
29. e **30.** Tarefas do estudante.
31. a. Não, por exemplo:
$(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 1$ e $1 \in \mathbb{Q}$.
b. Não, por exemplo:
$\left(\frac{1}{2} + \pi\right) + \left(1 - \pi\right) = \frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$.
32. a. Verdadeira. **b.** Verdadeira. **c.** Falsa. **d.** Verdadeira. **e.** Verdadeira. **f.** Falsa.
33. Tarefa do estudante.
34. a. Dois. **b.** Três. **c.** Infinitos. **d.** Infinitos.
35. a. $\notin$ **b.** $\notin$ **c.** $\notin$ **d.** $\in$ **e.** $\subset$ **f.** $\subset$ **g.** $\subset$ **h.** $\not\subset$ **i.** $\not\subset$
36. a. Verdadeira. **b.** Falsa. **c.** Falsa. **d.** Falsa.
37. a. $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ ou $]1, 5[$
b. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leqslant x < 7\}$ ou $[\sqrt{2}, 7[$
c. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ou $]-\infty, 0[$
d. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0{,}33...\}$ ou $[0{,}33...; +\infty[$
38. a. $A \cup B = A$
$A \cap B = B$
$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2$ ou $5 \leqslant x < 7\}$
$B - A = \varnothing$
b. $A \cup B = [-1, +\infty[$
$A \cap B =]1, 6[$
$A - B = [-1, 1]$
$B - A = [6, +\infty[$

c. $A \cup B = [-3, 1] \cup [2, 5[$
$A \cap B = \varnothing$
$A - B = A$
$B - A = B$

39. Alternativa **d**.
40. Alternativa **c**.

Para finalizar o capítulo 2

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c**.
Q2. Alternativa **c**.
Q3. Alternativa **d**.
Q4. Alternativa **b**.
Q5. Alternativa **a**.
Q6. Alternativa **c**.
Q7. Alternativa **a**.
Q8. Alternativa **b**.
Q9. Alternativa **b**.

CAPÍTULO 3 Funções

1. a. Não.
b. R$ 72,50; R$ 154,20.
c. $78\,m^3$

2. O diagrama não representa uma função de A em B porque nem todo elemento de A tem um correspondente em B. Além disso, existe um elemento de A com mais de um correspondente em B.

3. a. É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.
b. Não é função, pois existe um elemento em A (o elemento 3) que tem dois correspondentes em B.
c. Não é função, pois existe um elemento em A (o elemento 5) que não tem correspondente em B.
d. É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.

4. a. Tarefa do estudante.
b. Não, pois existe um elemento em A (o elemento 4) que não tem correspondente em B.

5. $f(8, 1) = 6 + 3{,}20 \cdot 8 = 31{,}60$
$f(8, 9) = 6 + 3{,}20 \cdot 8 = 31{,}60$
Logo, as viagens têm tarifas iguais, pois $f(8, 1) = f(8, 9)$.

6. a. Medida do diâmetro da base; preço de custo.
b. R$ 0,09
c. 5 mm
d. R$ 45,00
e. 100%
f. Não há dados suficientes para que seja dada uma resposta a esse item.

7. Não, pois em uma função podem existir elementos de B sem correspondentes em A.

8. a. $D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{6, 7, 8, 9\}$.
b. Não existe x tal que $f(x) = 4$.
c. $f(5) = 6$

9. a. $\frac{5}{2}$
b. 0
c. 4 e –4
d. Não tem zero.

10. a. 2
b. $\frac{1}{2}$
c. 2 e $\frac{1}{2}$

11. $s(\ell) = 2\ell^2$; $D(s) = \mathbb{R}^*_+$; $Im(s) = \mathbb{R}^*_+$.

12. a. 17
b. –7
c. –47
d. 37

13. a. $f(1) = 41, f(2) = 43, f(5) = 61, f(10) = 131, f(11) = 151$ e $f(41) = 41^2 = 1.681$.
b. Exemplo de resposta: porque, para $n = 41$, a função não gera um número primo.

14. a. $D(f) = \mathbb{R}$
b. $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$
c. $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 8\}$
d. $D(j) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1 \text{ e } x \neq 3\}$

15. a. $Im(f) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$
b. $Im(w) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

16. a. 4
b. 1
c. Não há zero real.
d. Não há zero real.

17. 0 ou 2.
18. –29

19. a. $a = 3$; $b = 2$.
b. $-\frac{2}{3}$

20. $A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(-6, 0)$; $D(-1, -3)$; $E(2, -1)$; $F(-5, 3)$; $G(0, 2)$; $H(0, -2)$; $I(4, 0)$.

21. Tarefa do estudante.

22. Sim, porque o ponto $R(1, -2)$ tem abscissa 1, ordenada –2 e está localizado no 4º quadrante; o ponto $S(-2, 1)$ tem abscissa –2, ordenada 1 e está localizado no 2º quadrante.

23. –2
24. $x \leqslant 0$ e $y \geqslant -3$.

25. a. Exemplo de resposta: $f(3) = 1$; $f(-2) = -1$; $f(4) = 3$ e $f(2) = 5$.
b. Exemplo de resposta: para $f(x) = 1$, temos $x = 0$ e $x = 3$; para $f(x) = 0$, temos $x = -0, 5$; para $f(x) = 3$, temos $x = 0{,}9$, $x = 2{,}5$ e $x = 4$; para $f(x) = 4$, temos $x = 1{,}3$ e $x = 2{,}4$.
c. Exemplo de resposta: $Im(f) = [-1, 5]$.
d. Nenhum; 3; 2; 1
e. Não; não.

26. Tarefas do estudante.

27. a. Não, pois $f(8) = 31 \neq -1$.
b. 2
c. Não, pois $3 \notin D(f)$.

28. a. Variável independente: tempo; variável dependente: número de litros.
b. $y = 8x$, em que y é o número de litros e x é o tempo em hora.
c. Em 1 hora e meia, a máquina produz 12 litros.
d. 48 litros; 80 litros.
e. 0,5 hora.

29. a. $y = 5{,}82x$
b. R$ 8,73
c. 3 L; 10 L.
d. 50 L

30. Tarefa do estudante.

31. a. $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}$
Zero: 2
b. $D(h) = [-2, 2]$
$Im(h) = [-3, 3]$
Zeros: –2, 0 e 2.

32. a. Sim.
b. Não.

33. a. f é crescente para $x \in \mathbb{R}$; g é crescente para $x \in [0, +\infty[$ e decrescente para $x \in\ ]-\infty, 0]$; h é crescente para $x \in]-\infty, -1]$ e para $x \in [1, +\infty[$ e decrescente para $x \in [-1, 1]$.
b. Só g tem um valor mínimo, e esse valor é $y = 1$.

34. Tarefa do estudante.

35. a. 2
b. 4
c. Nesse intervalo, a função assume valores positivos.
d. Não.
e. $D(f) = [-3, 4]$
f. $Im(f) = [-2, 4]$
g. 4
h. –2

36. a. $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$; 4 é o valor máximo de f.
b. $Im(g) = \mathbb{R}$; g não tem valor máximo nem mínimo.
c. $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$; h não tem valor máximo nem mínimo.
d. $Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$; 0 é o valor mínimo de i.
e. $Im(j) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$; –3 é o valor mínimo de j; 3 é o valor máximo de j.

37. 38. e **39.** Tarefas do estudante.

40. a. Verdadeira.
b. Falsa, pois no intervalo [0, 1] a função é decrescente.
c. Falsa, pois no intervalo [0, 2] a função é negativa ou nula.
d. Verdadeira.
e. Verdadeira.

41. a. –2 e 2.
b. Crescente: $[0, +\infty[$; decrescente: $]-\infty, 0]$.
c. Positiva: $x < -2$ ou $x > 2$; negativa: $-2 < x < 2$.
d. $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-4, +\infty[$
e. –4; imagem de zero.

42. Itens **a** e **d**, pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $x^2 + 1 > 0$ e $2x > 0$.

43. $f(x) = -5$ ou $y = -5$.

44. a. $D(m) = \mathbb{R}$; $Im(m) =]-\infty, 3]$
b. Para $x > 2$.
c. Apenas um zero, porque o gráfico intercepta o eixo x uma só vez.
d. Positiva em $\left]-\sqrt{6}, +\infty\right[$; negativa em $\left]-\infty, -\sqrt{6}\right[$.

45. a. $f(x) =$
$$= \begin{cases} 10{,}5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leqslant x < 30 \\ 17{,}5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leqslant x \leqslant 100 \\ 28x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100 \end{cases}$$
b. R$ 1.400,00; R$ 2.828,00.

46. a. 9
b. $\frac{19}{7}$
c. Não é possível calcular o valor de $p(x)$ para esse item porque a função não está definida para valores maiores que 3.
d. 4
e. 2
f. $\frac{20}{7}$

47. Não é sobrejetora, porque $CD(g) \neq Im(g)$. Não é injetora, porque dois elementos de A têm a mesma imagem: $g(-1) = g(1) = 1$

48. Sim, pois uma função bijetora é sobrejetora e injetora.

49. a. $f^{-1}(x) = \frac{9x - 1}{2 - x}$
b. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$
c. $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
d. $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$
e. $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$

50. a. $f^{-1}(x) = \frac{x - 9}{4}$
b. $g^{-1}(x) = \frac{3 - x}{2}$

c. $h^{-1}(x) = \frac{-2x - 1}{14}$

d. $m^{-1}(x) = 3x - 5$

e. $n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

f. A função p não é bijetora. Assim, não tem inversa.

51. **a.** O item **f** não admite função inversa, pois a função p não é bijetora.

b. Com exceção do item **f**, que não tem inversa, as leis obtidas devem ser iguais às dadas.

c. A inversa da função inversa de uma função bijetora é a própria função.

52. Tarefa do estudante.

53. Sim, pois essa função é injetora e sobrejetora, ou seja, bijetora.

54. Resposta possível: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, pois f não é bijetora.

55. Tarefa do estudante.

56. Desde que exista f^{-1}, sim, pela própria definição de função inversa.

57. **a.** $f^{-1}(x) = -x + 3$

b. $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

c. $h^{-1}(x) = 3x + 6$

d. $k^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

58. Tarefa do estudante.

59. Em **a**, **c** e **d**, pois, em cada um desses casos, os gráficos de f e de g são simétricos em relação ao gráfico da função identidade.

Trabalho e juventudes – Como calcular a contribuição previdenciária?

1. Aproximadamente R$ 609,93.

2. $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y \leqslant 876{,}97\}$

Para finalizar o capítulo 3

Autoavaliação

Q1. Alternativa **a**.
Q2. Alternativa **b**.
Q3. Alternativa **c**.
Q4. Alternativa **b**.
Q5. Alternativa **d**.
Q6. Alternativa **c**.
Q7. Alternativa **c**.

CAPÍTULO 4 Função afim

1. **a.** $a = 2$ e $b = 4$.

b. Não é função afim.

c. $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$.

d. $a = -13$ e $b = 0$.

2. **a.** 7 **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $-3\sqrt{2} + 1$ **d.** -6

3. Tarefa do estudante.

4. $\frac{5}{2}$

5. $p = \pm\sqrt{2}$; $q = 3$.

6. **a.** R$ 34,50; R$ 50,50.

b. 330 minutos.

c. $f(x) = \begin{cases} 34{,}50, \text{ se } 0 < x \leqslant 100 \\ 34{,}50 + 0{,}08(x - 100), x < 100 \end{cases}$

d. R$ 103,50

7. **a.** 3 **b.** 3 **c.** 3 **d.** 3

8. Tarefas do estudante.

9. **a.** $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 2$.

b. e **c.** Tarefas do estudante.

d. Uma reta.

10. **Passo 1.** Seja T_K uma medida de temperatura qualquer, em Kelvin.
Passo 2. Seja T_C a medida de temperatura em grau Celsius. Faça $T_C = T_K - 273$.
Passo 3. T_C é a medida de temperatura convertida, em grau Celsius. Encerra-se o algoritmo.

11. **a.** Zero da função f: $\frac{2}{3}$; zero da função g: $\frac{1}{2}$.

b. A função constante $f(x) = b$, com $b \neq 0$, não tem zeros e os zeros da função constante $f(x) = 0$ são todos os números reais.

12. e **13.** Tarefas do estudante.

14. **a.** $f(x) = x + 3$; $g(x) = -x + 1$.

b. $P(-1, 2)$

15. $A(-2, 0)$; $B\left(\frac{14}{5}, -\frac{6}{5}\right)$; $C(0, 3)$.

16. **a.** Não; a torneira A tem a maior vazão.

b. A: 40 e B: 20.

c. A: 360 e B: 420.

d. As quantidades de litros que há em cada caixa antes da abertura das torneiras.

e. Sendo A a função da caixa A e B a função da caixa B, temos: $A(x) = 360 + 40x$ e $B(x) = 420 + 20x$.

f. A: 16 minutos; B: 29 minutos.

g. $D(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 16\}$ e $D(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 29\}$.

h. $Im(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid 360 \leqslant y \leqslant 1.000\}$ e $Im(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid 420 \leqslant y \leqslant 1.000\}$.

17. **a.** $\frac{27}{50} = 0{,}54$

b. Significa a constante de velocidade com que o NO_2 se decompõe.

c. 0,01 mol/L

d. $y = 0{,}54x + 100$, com $0 \leqslant x \leqslant 300$.

18. Alternativa **e**.

19. Tarefa do estudante.

20. Não. Na função que relaciona as grandezas inversamente proporcionais, a variável independente encontra-se no denominador de uma fração, diferentemente de uma função linear que é do tipo $f(x) = ax$.

21. **a.** Decrescente. **b.** Crescente. **c.** Crescente. **d.** Decrescente.

22. **a.** $x = 0$ **b.** (0, 0); (0, 0).

23. **a.** $f(x) = 0$ para $x = -\frac{1}{4}$; $f(x) > 0$ para $x > -\frac{1}{4}$; $f(x) < 0$ para $x < -\frac{1}{4}$

b. $g(x) = 0$ para $x = 2$; $g(x) > 0$ para $x < 2$; $g(x) < 0$ para $x > 2$.

24. A função é crescente para $m > \frac{1}{2}$ e decrescente para $m < \frac{1}{2}$.

25. **a.** g: 1; h: $\frac{1}{3}$. **b.** g: -1; h: 1. **c.** (3, 2) **d.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

26. **a.** R$ 2.260,00; R$ 1.950,00.

b. $s_A(x) = 2.000 + 0{,}02x$
$s_B(x) = 0{,}15x$

c. Loja A: R$ 50.000,00; loja B: R$ 20.000,00.

d. A partir de valores acima de R$ 15.384,62.

27. Variando o parâmetro a em $y = ax + b$, modificamos a inclinação da reta. Mantendo o coeficiente a e variando o coeficiente b, a reta é transladada paralelamente à reta original.

28. Tarefa do estudante.
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1 \text{ ou } y = 2\}$

29. $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \geqslant 1 \\ 1, \text{ se } -1 \leqslant x < 1 \\ x, \text{ se } x < -1 \end{cases}$

30. **a.** 80 km/h

b. $s(t) = 10 + 80t$

c. $D(s) = \mathbb{R}_+$ e $Im(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geqslant 10\}$.

d. 330 quilômetros.

e. 3 horas.

31. **a.** $s(t) = \begin{cases} 5t, \text{ se } 0 \leqslant t < 10 \\ 50, \text{ se } 10 \leqslant t < 20 \\ 100 - 2{,}5t, \text{ se } 20 \leqslant t \leqslant 40 \end{cases}$

b. 25 m; 12,5 m.

c.
- Uma velocidade constante de 5 m/s.
- Nesse intervalo, a taxa de variação é zero, o que significa que o corpo permanece em repouso.
- A taxa de variação é negativa, $-2{,}5$. Nesse caso, significa que o movimento é retrógrado, isto é, o corpo está se deslocando no sentido contrário da trajetória.

d. Tarefa do estudante.

32. **a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{7}\right\}$

33. Tarefas do estudante.

34. **a.** $x = -5$

b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

35. **a.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{6}\right\}$

b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 2\}$

c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geqslant -\frac{3}{4}\right\}$

36. Alternativa **b**.

37. Alternativa **e**.

38. **a.** -1; $-\frac{1}{3}$.

b. f é crescente e g é decrescente.

c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$

d. Resposta possível: $\frac{x + 1}{-3x - 1} \leqslant 0$

39. **a.** $S = \varnothing$

b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{10}{13} \leqslant x \leqslant 0\right\}$

c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$

d. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

40. **a.** $140 + 50x$, em que $x \leqslant 20$.

b. $220 + 40x$, em que $x \leqslant 60$.

c. 8 consultas.

d. Plano Laranja.

e. Plano Azul.

41. **a.** $V_s(x) = 2x - 10.000$

b. $V_f(x) = 3x - 12.000$

c. 2.000 quilogramas.

d. $S = \varnothing$

e. Cultura de feijão.

f. 2.001 quilogramas.

42. Enquanto $x - 7$ tem de ser diferente de zero, $2x - 2$ pode ser zero. Dessa maneira, $\frac{2x - 2x}{x - 7}$ pode ser zero. Então, devemos considerar $\frac{2x - 2x}{x - 7} \geqslant 0$ e $x - 7 \neq 0$.

43. **a.** $D(j) = \mathbb{R}$
b. $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{2}\right\}$
c. $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
d. $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$
e. $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

Para finalizar o capítulo 4

Autoavaliação

Q1. Alternativa **b.** **Q6.** Alternativa **a.**
Q2. Alternativa **b.** **Q7.** Alternativa **b.**
Q3. Alternativa **a.** **Q8.** Alternativa **c.**
Q4. Alternativa **c.** **Q9.** Alternativa **d.**
Q5. Alternativa **d.** **Q10.** Alternativa **a.**

CAPÍTULO 5 Função quadrática

1. **a.** $a = 1, b = -1$ e $c = 0$.
b. $a = 1, b = 0$ e $c = \sqrt{7}$.
c. Não é lei de uma função quadrática.
d. Não é lei de uma função quadrática.

2. **a.** 0
b. $4 + 5\sqrt{2}$
c. $\frac{34}{25}$
d. $x = -1$ ou $x = 6$.
e. $\frac{5}{2}$
f. Não existe x real que satisfaça $f(x) = 20$.

3. **a.** Tarefa do estudante.
b. Resposta pessoal.

4. $\frac{64}{5}$

5. $x = 4$

6. $m = 0$

7. Se o coeficiente do termo x^2 for igual a zero, ou seja, se $f(x) = 0x^2 + bx + c$, então f será uma função afim, cuja lei pode ser representada por $f(x) = bx + c$.

8. **a.** A lei da função quadrática ficaria indeterminada, pois teríamos um sistema, em qualquer das três situações, de três incógnitas e apenas duas equações.
b. A lei da função quadrática ficaria a mesma $f(x) = 3x^2 - x + 2$, pois $f(1) = 4$.
c. Não existiria a função, pois para $x = 1$ haveria mais de uma imagem.

9. **a.** $p \neq -\frac{3}{2}$ **b.** $p \neq -\frac{5}{3}$ e $p \neq -7$.

10. **a.** 2; 6; 12; 90.
b. Tarefa do estudante.
c. Sendo n o número de pessoas, o número de *e-mails* é $n(n - 1)$.
d. 12 integrantes.

11. **a.** $A(x) = 4x^2 + 64x$ **b.** 228 m²

12. Tarefas do estudante.

13. **a.** Concavidade voltada para cima.
b. Concavidade voltada para baixo.

14. **a.** Se $k > 0$, a concavidade é voltada para cima; se $k < 0$, a concavidade é voltada para baixo.
b. Se $k < -1$ ou $k > 5$, a concavidade é voltada para cima; se $-1 < k < 5$, a concavidade é voltada para baixo.

15. **a.** Respostas pessoais.
b. Tarefa do estudante.
c. Sim, o vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para baixo.
d. $g(x) = -x^2$
e. Tarefa do estudante.

16. Tarefas do estudante.

17. **a.** $(0, -1)$ **b.** $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ **c.** $(0, 0)$

18. Resposta pessoal.

19. **a.** -2 e -1.
b. Não existem zeros reais.
c. $\frac{1}{3}$

20. Resposta pessoal.

21. **a.** $k > \frac{1}{100}$ **b.** $k > \frac{25}{8}$

22. Não. Como o domínio de uma função quadrática é $\mathbb{R}$, o gráfico correspondente a essa função sempre intercepta o eixo y, pois o elemento 0 (abscissa do ponto em que o gráfico intercepta o eixo y) pertence a $\mathbb{R}$.

23. **a.** $a = 1$ e $b = -4$. **b.** $a = 1$ e $b = 4$.

24. **a.** $f(x) = x^2 + 8x + 15$
b. $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 6$

25. 2

26. $m = 3$; $(\sqrt{6}, 0)$ e $(-\sqrt{6}, 0)$.

27. **I.** Tarefa do estudante.
II. $x = 0$
III. $f(0) = c$

28. Respostas pessoais.

29. **a.** Para qualquer valor real de x.
b. Não há valor real de x.
c. $-3 < x < 3$ **d.** $-2 < x < -1$
e. Para qualquer valor real de x.

30. **a.** $g(x) > 0$ para qualquer valor de x real.
b. $\begin{cases} h(x) > 0 \text{ para nenhum valor de } x \\ h(x) = 0 \text{ para } x = 1 \\ h(x) < 0 \text{ para } x \neq 1 \end{cases}$
c. $\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } -3 < x < 3 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 3 \\ i(x) < 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

31. **a.** $0 < x < 2$ **b.** $x \neq 1$

32. e **33.** Tarefas do estudante.

34. **a.** $(-1, 9)$ **c.** $(-1, -4)$
b. $(1, -9)$ **d.** $(2, 0)$

35. Tarefa do estudante.

36. **a.** 0 e 8. **b.** $h(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{5}{2}x$

37. $m = \frac{3}{2}$ e $n = 3$.

38. **a.** Nas duas funções, temos $x_v = 0$.
b. Tarefa do estudante.

39. **a.** Valor mínimo: $-\frac{81}{8}$
b. Valor máximo: $\frac{5\sqrt{5} + 4}{4}$
c. Valor mínimo: $\frac{7}{18}$

40. **a.** $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{21}{4}\right\}$
b. $\text{Im}(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{65}{8}\right\}$
c. $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 8\}$

41. **a.** Valor máximo. **c.** -4
b. Para baixo. **d.** $(1, 16)$

42. Não existe m real tal que $\frac{4}{3}$ seja valor mínimo de f.

43. 12 unidades de área.

44. **a.** $h(t) = -5t^2 + 10t$ **b.** 0 m
c. Tarefa do estudante.
d. A medida de tempo de subida é igual à medida de tempo de descida.

45. **a.** R$ 21,00 **b.** R$ 14,00
c. Afirmação é falsa, pois o custo da produção de pacotes de 1 quilograma de balas está relacionado ao número de toneladas de balas produzidas por meio de uma função quadrática.
d. 500 toneladas. **e.** R$ 5,00

46. Alternativa **d.**

47. Alternativa **c.**

48. Alternativa **c.**

49. R$ 6,00

50. Resposta pessoal.

51. Tarefas do estudante.

52. **a.** 25,5 metros.
b. Aproximadamente a 14,14 metros do ponto de saque.
c. Sim, pois 9 m < 14,14 m < 18 m.

53. $V(0, 0)$

54. **a.** Tarefa do estudante.
b. Nesse gráfico, a abscissa e a ordenada do vértice indicam, respectivamente, o instante e o local em que o móvel parou e alterou o sentido do movimento.

55. **a.** $60.000 - 400x$ **b.** $75 + x$
c. $y = 4.500.000 + 30.000x - 400x^2$
d. R$ 37,50
e. R$ 5.062.500,00
f. 45.000

56. Subida: 0 s a 2,5 s
Descida: 2,5 s a 5,37 s (aproximadamente)

57. O móvel A fica na frente do móvel B no intervalo]0, 10[.

58. Alternativa **a.**

59. **a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
b. $S = \varnothing$ **c.** $S = \{1\}$
d. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
e. $S = \mathbb{R}$ **f.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

60. Tarefa do estudante.

61. **a.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } \frac{7}{3} \leqslant x \leqslant 4\right\}$
b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -7 \text{ ou } 0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$
c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\right\}$
d. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{5}{3} \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 4\right\}$
e. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ ou } 6 < x < 8\}$
f. $S = \varnothing$

62. **a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x > 2\}$
b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

63. 2

64. **a.** $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
$g(x) = -2x^2 + 2x + 4$
b. $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{8}\right)$ e $(2, 0)$
c. $x \geqslant -1$ **d.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$

65. **a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\}$
b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$
c. $S = \varnothing$ **d.** $S = \{0, 5\}$

66. a. $A(x) = 16\pi x - \pi x^2$ **b.** $2 < x < 8$

67. a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$
c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$
d. $S = \varnothing$

68. a. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 4\}$
b. $D = \{7\}$
c. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
d. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } -2 \leqslant x < 0 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

69. $x = 0$

70. a. $\mathbb{R} - \{0, 2, 5\}$
b. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2 \text{ e } x \neq 3\}$
c. $\mathbb{R} - \{0\}$ **d.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

71. a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ ou } -3 \leqslant x \leqslant 2\}$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 2 < x < 4\}$
b. $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

72. $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leqslant -\sqrt{2} \text{ ou } x \geqslant \sqrt{2}\right\}$
Tarefa do estudante.

Para finalizar o capítulo 5

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c.** **Q6.** Alternativa **b.**
Q2. Alternativa **b.** **Q7.** Alternativa **d.**
Q3. Alternativa **c.** **Q8.** Alternativa **a.**
Q4. Alternativa **d.** **Q9.** Alternativa **a.**
Q5. Alternativa **c.** **Q10.** Alternativa **b.**

Educação midiática – Fato ou *fake*?

1. Exemplo de resposta: As notícias falsas costumam se espalhar 70% mais rápido que as notícias verdadeiras. Além disso, estudos indicam que as pessoas são propensas a acreditar em notícias que reforcem seus pensamentos e suas crenças.
2. Respostas pessoais.
3. Não. Na Idade Média, por exemplo, houve a propagação da notícia que relacionava os judeus à peste, o que impactou na morte de milhares de pessoas.
4. Não. Ainda é necessário verificar a data da notícia e checar se as informações sobre a fonte são/eram verdadeiras.
5. Embora beber água seja importante para manter a hidratação e a saúde em geral, não há evidências científicas que sugiram que beber água em intervalos com medidas específicas possa curar ou prevenir o coronavírus. Para se proteger do coronavírus, é essencial seguir as diretrizes fornecidas pelas autoridades de saúde, como lavar as mãos regularmente com água e sabão, adotar o distanciamento social, usar máscaras faciais em locais públicos lotados e seguir os protocolos de vacinação recomendados.

Pesquisa e ação – Videodocumentário

Tarefa do estudante.

Avaliação Diagnóstica 2

1. Alternativa **d.**
2. Alternativa **c.**
3. Alternativa **d.**
4. Alternativa **c.**
5. Alternativa **b.**
6. Alternativa **d.**
7. Alternativa **c.**

CAPÍTULO 6 Função exponencial

1. a. 16 **c.** 0 **e.** 1
b. $-\frac{1}{125}$ **d.** $\frac{81}{64}$ **f.** π

2. a. 100.000 **e.** 4.900
b. 169 **f.** $-\frac{27}{125}$
c. -125 **g.** 64
d. $\frac{1}{8}$ **h.** 1

3. Alternativa **b.**

4. Não foram utilizadas: início da vida na Terra (4,6 bilhões de anos), surgimento dos primeiros ancestrais dos seres humanos (4 milhões de anos) e aparecimento do *Homo sapiens* (entre 400 e 100 mil anos). Resposta pessoal.

5. a. 1,3 **c.** 9
b. $-1{,}2$ **d.** $2\sqrt[3]{2}$

6. a. 11 **c.** $\sqrt[3]{3}$
b. 0,027 **d.** 2

7. a. $3\sqrt{2}$ **b.** $10\sqrt{5}$

8. a. $\frac{-\sqrt{3} - 3}{3}$ **b.** $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

9. Entre 5 e 25.

10. Tarefas do estudante.

11. a. III **b.** –I **c.** IV **d.** II

12. $D(i) = \mathbb{R}$; $Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$; ponto: (0, 2); assíntota: $y = 1$.

13. Para $f(x) \leqslant -2$, teríamos: $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 \leqslant -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 0$
Isso é absurdo, pois $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ é sempre maior que zero.

14. $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$

15. a. Crescente. **c.** Crescente.
b. Decrescente.

16. $a = -1$ e $b = 1$.

17. a. 5 **b.** 5 **c.** 5 **d.** 5

18. Os resultados são todos iguais.

19. Para $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, todos os quocientes são iguais a $\frac{1}{4}$.
a. Sim, os resultados são sempre iguais à base *a* da função.
b. Para $f(x) = a^x$, concluímos que $\frac{f(x)}{f(x-1)} = a$.

20. a. $f(1) = 5$, $f(2) = 17$ e $f(3) = 257$; os números 5, 17 e 257 são primos.
b. Não, porque não é uma função do tipo $f(x) = a^x$, em que *a* é um número real maior que zero e $x \in \mathbb{R}$.

21. Resposta pessoal.

22. a. Diminuindo, pois:
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
b. Não, porque a curva não corta o eixo *x*.
c. $\{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$

23. R$ 28.098,56

24. a. 180 °C **b.** Aproximadamente 28 °C.

25. a. 5.000 bactérias.
b. 15.000 bactérias.
c. $a = \sqrt[6]{3}$ e $k = 5.000$.
d. $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant 6\}$;
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 5.000 \leqslant y \leqslant 15.000\}$
e. Aproximadamente 8.650 bactérias.

26. a. $S = \{3\}$ **c.** $S = \{-1\}$
b. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **d.** $S = \{1\}$

27. a. $S = \{6\}$ **d.** $S = \{-4, 4\}$
b. $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$ **e.** $S = \{-1, 0\}$
c. $S = \{14\}$ **f.** $S = \{0\}$

28. Como $2^4 < 20 < 2^5$, temos $4 < x < 5$.

29. Porque, para todo $a > 0$ e todo x real, temos $a^x > 0$.

30. a. $3 < x < 4$ **c.** $1 < x < 2$
b. $3 < x < 4$ **d.** $7 < x < 8$

31. Alternativa **c.**

32. a. $S = \left\{\left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$
b. $S = \left\{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$

33. a. $k = 2.048$ **b.** 4 minutos.

34. Alternativa **c.**

35. Alternativa **d.**

36. $\left(\frac{1}{3}, 3\sqrt[3]{3}\right)$

37. a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$
b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$
c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
d. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -12\}$

38. a. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$
b. $D(g) = \mathbb{R}$

39. a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$
b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

40. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

41. Tarefa do estudante.
a. $S = \{3\}$
b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

42. a. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$; $g(x) = 3^x$.
b. $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ **d.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geqslant 3^x$
c. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$

43. Tarefa do estudante.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

Para finalizar o capítulo 6

Autoavaliação

Q1. Alternativa **a.** **Q6.** Alternativa **d.**
Q2. Alternativa **c.** **Q7.** Alternativa **b.**
Q3. Alternativa **c.** **Q8.** Alternativa **d.**
Q4. Alternativa **c.** **Q9.** Alternativa **b.**
Q5. Alternativa **d.** **Q10.** Alternativa **a.**

CAPÍTULO 7 Função logarítmica

1. a. 3 **b.** 4 **c.** –4 **d.** 3

2. a. Entre 2 e 3. **b.** Entre 0 e 1.

3. Entre 2 e 3.

4. a. 2 **b.** –1 **c.** –2 **d.** $\frac{7}{2}$

5. 6

6. a. 502,5 **c.** 4
b. 9,01 **d.** 10

7. a. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$
b. $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > -\frac{5}{3}\right\}$
c. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

8. Tarefas do estudante.

9. a. 1 **c.** 7 **e.** 16
b. 0 **d.** 2 **f.** 2

10. a. 7 **c.** 2 **e.** –2
b. $\frac{2}{3}$ **d.** 3 ou –3 **f.** $\frac{1}{3}$

11. a. 1 **c.** 1 **e.** 0
b. 1 **d.** –4 **f.** 4

12. Ácida.
13. 10^{-9}
14. Resposta pessoal.
15. **a.** $6 + \log_2 13$ **b.** $2 + \log_{\sqrt{2}} 3$ **c.** $\log_3 13 + 1$ **d.** 18 **e.** -19 **f.** $\log_{\frac{1}{2}} 13 + 4$
16. **a.** 1 **b.** 2
17. **a.** $\log_a b + \log_a c + \log_a d$
b. $\log_a 2 + \log_a k - \log_a d$
c. $-n$
d. $-\log_a y$
18. **a.** $\simeq -0,116$ **b.** $\simeq 0,721$
19. **a.** 1,176 **b.** 1,653 **c.** 0,222 **d.** $-0,222$ **e.** 4,322 **f.** 4,644
20. $\simeq 4,42$
21. $\simeq 7,197$
22. **a.** $\simeq 1,5051$ **b.** $\simeq 2,0587$
23. **a.** 0,78 **b.** 1,48 **c.** 0,625 **d.** 0,7 **e.** 2,16 **f.** 0,4933...
24. **a.** $\frac{1}{\log 3}$ **b.** $\frac{1}{\log_5 2}$ **c.** $\frac{1}{\log_3 10}$ **d.** $\frac{2}{\log_{11} 7}$
25. **a.** $\frac{1}{\log_b a}$
b. O logaritmo de b na base a é igual ao inverso do logaritmo de a na base b.
c. O resultado será 1.
26. 6
27. $A = 1$ e $B = 2$.
28. 1
29. **a.** 1 **b.** 0 **c.** 4 **d.** 5
30. $\frac{1}{n} \cdot \log_a b$
31. Sim, pois, para $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:
$$\log_8 16 = \frac{\log_a 2^4}{\log_a 2^3} = \frac{4 \cdot \log_a 2}{3 \cdot \log_a 2} = \frac{4}{3}$$
32. **a.** $\simeq$ R$ 1.558,91 **b.** 46 meses.
33. **a.** R$ 1.800,00 e R$ 2.160,00, respectivamente.
b. $d = 1.500 \cdot (1,2)^n$
c. 1 ano
d. $n = \log_{1,2}\left(\frac{d}{1.500}\right)$
34. Resposta pessoal.
35. **a.** 3 **b.** 0 **c.** -1 **d.** $\frac{1}{2}$
36. **a.** 31 **b.** $\sqrt{3} + 4$
37. **a.** $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{2}\right\}$
b. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq -1\}$
c. $D(g) = \mathbb{R}$
38. Alternativa **b**.
39. Tarefas do estudante.
40. **a.** A função do item **a** é crescente, e a função do item **b** é decrescente.
b. Tarefas do estudante.
41. Tarefas do estudante.
a. Decrescente. **b.** Crescente.
42. **a.** Positivo. **b.** Negativo. **c.** Negativo. **d.** Positivo.
43. **a.** $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$
b. $\left\{k \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}\right\}$
44. **a.** $f(x) = \log_3 x$ **b.** $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$
45. Resposta possível: $(1, 0)$, $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(4, -1)$ e $(-1, 4)$.

46. e 47. Tarefas do estudante.
48. Alternativa **e**.
49. Tarefas do estudante.
50. **a.** $S = \{8\}$ **b.** $S = \{15\}$ **c.** $S = \{0, 2\}$ **d.** $S = \{1\}$ **e.** $S = \{4\}$ **f.** $S = \left\{\frac{1}{10}, \sqrt{10}\right\}$
51. $S = \{(8, 2)\}$
52. 25 horas.
53. **a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$
b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$
c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 64\}$
d. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$
e. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1,075\}$
f. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 11\}$
54. e 55. Tarefas do estudante.

Trabalho e juventudes – Geólogo

1. Resposta pessoal.
2. Magnitude 8.
3. $7 \cdot 10^6$ kWh

Para finalizar o capítulo 7

Autoavaliação

Q1. Alternativa **a**.
Q2. Alternativa **c**.
Q3. Alternativa **c**.
Q4. Alternativa **b**.
Q5. Alternativa **b**.
Q6. Alternativa **a**.
Q7. Alternativa **d**.
Q8. Alternativa **c**.
Q9. Alternativa **b**.
Q10. Alternativa **d**.
Q11. Alternativa **d**.

CAPÍTULO 8 Sequências

1. **a.** $-4, 0, 4, 8$ e 12.
b. $-3, -3, -3, -3$ e -3.
c. $\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8$ e $\frac{25}{2}$.
2. **a.** 4, 40, 600 e 12.000.
b. $-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{243}{2}$ e $-\frac{19.683}{2}$.
c. $-2, \frac{1}{4}, 16$ e $\frac{1}{256}$.
3. Tarefas do estudante.
4. $(-4, 12, -36, 108, ...)$ ou $(3, 12, 48, 192, ...)$.
5. **a.** A cada 28 anos, os calendários se repetem, com as datas caindo sempre no mesmo dia da semana.
b. Tarefa do estudante.
6. **a.** a_0
b. A lei de formação precisará ser alterada porque, ao substituir n por 0, devemos obter 1, que é o primeiro número natural ímpar.
c. $f(n) = 2n + 1$
7. Porque a sequência apresentada é finita.
8. Não; pode ser, por exemplo, 6, caso a lei de formação seja:
$$a_n = -\frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{n}{6}$$
9. **a.** 2, 6, 12, 20. Para cada n, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura.
b. $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
c. 91 pontos.
d. Não; sim.
10. **a.** 4 **b.** 4 **c.** 4 **d.** 4 **e.** 4 **f.** 4
11. **a.** 4 **b.** 23
c. Basta adicionar 4 ao valor de a_n para determinar a_{n+1}.
12. **a.** A partir do terceiro termo, cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores.
b. $a_8 = 21$; $a_9 = 34$; $a_{10} = 55$.
c. $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$
d. Resposta pessoal.
13. Alternativas **a** e **d**.
14. **a.** 12, 19, 26, 33 e 40.
b. 12, 5, -2, -9 e -16.
c. $-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$ e 0.
d. 12; 11,75; 11,5; 11,25 e 11.
15. Tarefa do estudante.
16. **a.** Decrescente; $r = -3$; $a_n = 1 - 3n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
b. Constante; $r = 0$; $a_n = \sqrt{3}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
c. Crescente; $r = 10$; $a_n = -20 + 10n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
d. Crescente; $r = \frac{1}{1.000}$; $a_n = \frac{n}{1.000}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
17. 45 bolinhas.
18. 22
19. 10,4 km
20. **a.** $-0,70$ **b.** R$ 80,00 **c.** R$ 39,20
21. **a.** -103 **b.** 10
22. Resposta pessoal.
23. $a_1 = \frac{85}{4}$; $r = -\frac{15}{4}$.
24. $p = 1$ ou $p = 4$.
25. 66 unidades de comprimento.
26. $(-12, 0, 12, 24, 36, 48)$
27. 725
28. 482
29. 28
30. **a.** R$ 330,00; R$ 360,00.
b. R$ 990,00; R$ 990,00.
c. R$ 9.440,00.
31. $(-15, -4, 7)$ ou $(7, -4, -15)$.
32. Alternativa **d**.
33. Tarefas do estudante.
34. $\left(-2, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}\right)$
35. **a.** 6.912 **b.** 568 **c.** 168 **d.** 57
36. R$ 137.880,00
37. **a.** R$ 84,00 **b.** R$ 1.152,00 **c.** R$ 96,00
38. 8 termos.
39. $\frac{8}{3}$
40. 30.870
41. $S = \{60\}$
42. 16
43. Alternativa **d**.
44. $r = \frac{50}{3}$ e $S = -\frac{70}{3}$ ou $r = \frac{2}{3}$ e $S = -\frac{190}{3}$.
45. **a.** PG **b.** PA **c.** PG **d.** PA
46. **a.** Crescente. **b.** Oscilante. **c.** Decrescente. **d.** Constante.
47. **a.** $q = \frac{4}{5}$; $a_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
b. $q = \sqrt{3}$; $a_n = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c. $q = \frac{2}{\pi}$; $a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
d. $q = -2$; $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

48. Na representação gráfica, para cada valor n, marcamos o valor *na* correspondente, obtendo os pontos (n, a_n) no plano cartesiano.
49. Porque os valores obtidos são estimativas, e não valores exatos.
50. Sim.
51. $a_n = a_0 \cdot q^n$, com $n \in \mathbb{N}$.
52. **a.** 4, 24, 144, 864 e 5.184.
b. $x^2, \frac{y}{x}, \frac{y^2}{x^4}, \frac{y^3}{x^7}, \frac{y^4}{x^{10}}$ e $\frac{y^5}{x^{13}}$.
53. Resposta pessoal.
54. 512 bactérias.
55. $\frac{729}{125}$
56. $\frac{1}{7}$
57. 6 termos.
58. **a.** 26.400 m
b. 825 m
59. 4
60. $\frac{6}{5}$
61. (6, 12, 24, 48, 96, 192)
62. 15, 30 e 60.
63. $\sqrt{2}$; 2; 8.
64. **a.** $C_2 = C_0(1+i)^2$; $C_3 = C_0(1+i)^3$.
b. $q = (1+i)$
c. $C_n = C_0(1+i)^n$, com $n \in \mathbb{N}$.
65. Tarefas do estudante.
66. **a.** $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$.
b. $\frac{1}{4^9}$
67. 8
68. Se $q = 1$, a PG assemelha-se a uma função constante, com restrição do domínio aos números naturais. Nesse caso, a lei de formação é $f(n) = a_0$, com $n \in \mathbb{N}$.
69. $S_n = a_1$ para $q = 0$.
70. 2
71. Aproximadamente 3.949.147 passageiros.
72. Aproximadamente 725.042 unidades.
73. 9.840 pessoas.
74. **a.** 1,875 ou $\frac{15}{8}$
b. $\simeq 1{,}998$; $\simeq 1{,}999$
c. Sim, aproxima-se do número 2.
75. Alternativa **d**.
76. **a.** 45
b. -2π
77. **a.** $\frac{4}{3}$
b. 9
78. Quanto maior ou quanto menor o valor de x, mais o gráfico de f se aproxima do eixo x. Portanto, quando x tende a infinito, $f(x)$ tende a zero.
79. Não, pois o atleta teria de prolongar indefinidamente seu treinamento.
80. 300 m
81. $2a^2$
82. $x = \frac{39}{4}$ e $y = \frac{49}{16}$.
83. $a = 10$, $b = \frac{7}{2}$, $c = 4$, $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$.
84. Alternativa **c**.
85. 20, 30, 40.
86. 8
87. **a.** $a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $d_1 = 3$; $d_2 = 9$; $d_3 = 27$.
b. $S_{10} = 180$
c. $S_5 = 363$

Para finalizar o capítulo 8

Autoavaliação

Q1. Alternativa **b**.
Q2. Alternativa **c**.
Q3. Alternativa **d**.
Q4. Alternativa **a**.
Q5. Alternativa **c**.
Q6. Alternativa **b**.
Q7. Alternativa **b**.
Q8. Alternativa **c**.
Q9. Alternativa **d**.
Q10. Alternativa **a**.
Q11. Alternativa **b**.

CAPÍTULO 9 Matemática Financeira

1. 40%
2. Respostas pessoais.
3. **a.** 5
b. 0,0015
4. 5%
5. 30%
6. 45%
7. Alternativa **a**.
8. Diminuição; de 1%.
9. Menor que o valor inicial. Justificativa: tarefa do estudante.
10. 20%
11. **a.** Aproximadamente 15,8%.
b. 20%
12. 8
13. Alternativa **b**.
14. R$ 21.200,00
15. 12%
16. R$ 45,00
17. **a.** Não traria nenhuma consequência para a resolução.
b. O problema não teria solução.
c. A resposta seria R$ 2.000,00.
d. Não seria possível determinar o valor da esteira.
18. R$ 35,00; R$ 33,60.
19. 150%
20. **a.** R$ 3.440,00
b. $M = 2.000 + 480n$
c. Tarefa do estudante.
21. i
22. 3 anos e 4 meses.
23. 4% a.m.
24. **a.** R$ 25.000,00
b. 23,5%
25. **a.** 6,25%
b. 5 meses.
26. Alternativa **c**.
27. Aproximadamente R$ 634,87.
28. $1 + i$
29. 5 meses.
30. R$ 10.000,00
31. Aproximadamente 3,1%.
32. 41%
33. 100%; 220%.
34. Não; 86,4%.
35. Resposta pessoal.
36. 101,2%; a comparação depende da taxa de inflação da época.
37. R$ 144.000,00
38. 50%
39. 6,25%
40. R$ 200.000,00
41. Aproximadamente R$ 439,02.
42. 15 meses.
43. R$ 270.315,95
44. **a.** Tarefa do estudante.
b. Sim; após 5 anos.
c. R$ 156.833,66
d. A do regime de juro composto.
e. Tarefa do estudante.
45. Tarefa do estudante.

Trabalho e juventudes – *Fintechs*

1. Respostas pessoais.
2. Exemplo de resposta: Criativo, flexível, que trabalha bem em equipe, comunicativo, que não tem medo de se arriscar etc.
3. Aproximadamente 90,04%.

Para finalizar o capítulo 9

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c**.
Q2. Alternativa **a**.
Q3. Alternativa **c**.
Q4. Alternativa **b**.
Q5. Alternativa **d**.
Q6. Alternativa **b**.
Q7. Alternativa **c**.
Q8. Alternativa **a**.
Q9. Alternativa **d**.
Q10. Alternativa **a**.

CAPÍTULO 10 Algoritmos e introdução à programação

1. 2. e **3.** Tarefas do estudante.
4. Resposta pessoal.
5. $a_5 = 31$; $a_7 = 45$.
6. Passo 1 – III, Passo 2 – V, Passo 3 – II, Passo 4 – I, Passo 5 – IV, Passo 6 – VI, Passo 7 – VII.
7. Espera-se que os estudantes percebam que estão trocados os valores 0,8n e 0,5n nos símbolos de saída.
8. Tarefa do estudante.
9. No fluxograma é mais fácil, pois é possível verificar visualmente qual é o conjunto de instruções que se repete.
10. Letra P.
11. **a.** Movimentar o personagem, deixando um rastro que se pareça com um triângulo equilátero.
b. **Passo 1.** Iniciar quando a tecla *espaço* for pressionada.
Passo 2. Usar a caneta.

Passo 3. Mover 100 passos para a frente.
Passo 4. Girar 120° no sentido anti-horário.
Passo 5. Mover 100 passos para a frente.
Passo 6. Girar 120° no sentido anti-horário.
Passo 7. Mover 100 passos para a frente.

12. Algoritmo II.

13. **a.** Duas variáveis: comprimento e altura.
b. Calcular a medida da área de um retângulo cujas medidas de comprimento e de altura foram dadas pelo usuário.

14. 7 e 0.

15. **a.** O bloco C. Deve ser escrito "Qual é o número natural?".
b. Blocos F, E, B e G.
I. O bloco G deve ser arrastado para o espaço da esquerda do bloco B, e o espaço da direita do bloco B deve ser preenchido com o número 2.
II. O bloco obtido em I deve ser arrastado para o espaço da esquerda do bloco E, e o espaço da direita do bloco E deve ser preenchido com o número 0.
III. O bloco obtido em II deve ser arrastado para o espaço do bloco F.
c. Blocos A e D. Primeiro o bloco A e depois o bloco D.

16. Letra M.

17. (2, 4, 6, 8, 10)

18. **a.** (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45)
b. Tarefa do estudante.

Trabalho e juventudes – O programador e o desenvolvimento de jogos digitais

1. Resposta pessoal.
2. Respostas pessoais.
3. Exemplo de resposta:

Passo 1. Inicie o jogo.
Passo 2. Passe pela primeira fase.
Passo 3. Passe pela segunda fase.
Passo 4. Passe pela última fase.
Passo 5. Finalize o jogo e receba o prêmio

Para finalizar o capítulo 10

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c**.
Q2. Alternativa **b**.
Q3. Alternativa **c**.
Q4. Alternativa **a**.
Q5. Alternativa **d**.

Educação midiática – O que há por trás dos dados?

1. e **2.** Tarefas do estudante.
3. **a.** e **b.** Tarefas do estudante.
c. Aproximadamente R$ 144.251,91.

Pesquisa e ação - Telejornal

Tarefa do estudante.

Prepare-se para o Enem e vestibulares

1. Alternativa **b**.
2. Alternativa **a**.
3. Alternativa **b**.
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **a**.
6. Alternativa **b**.
7. Alternativa **b**.
8. Alternativa **d**.
9. Alternativa **d**.
10. Alternativa **a**.

LISTA DE SIGLAS

CNEN – Comissão Nacional de Energia Nuclear

COB – Comitê Olímpico Brasileiro

COI – Comitê Olímpico Internacional

CTB – Código de Trânsito Brasileiro

Enem – Exame Nacional do Ensino Médio

Fatec – Faculdade de Tecnologia

Fuvest – Fundação Universitária para o Vestibular

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

IME-USP – Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

MIT – Massachusetts Institute of Technology (Instituto de Tecnologia de Massachusetts)

Oaci – Organização da Aviação Civil Internacional

ODS – Objetivo(s) de Desenvolvimento Sustentável

OMS – Organização Mundial da Saúde

ONU – Organização das Nações Unidas

Pronaf – Programa Nacional de Fortalecimento da Agricultura Familiar

PUC-Goiás – Pontifícia Universidade Católica de Goiás

SI – Sistema Internacional de Unidades

SMD – Sistema Métrico Decimal

UEA – Universidade do Estado do Amazonas

Uece – Universidade Estadual do Ceará

UEG – Universidade Estadual de Goiás

UEMG – Universidade do Estado de Minas Gerais

Uerj – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

UFAM – Universidade Federal do Amazonas

UFLA – Universidade Federal de Lavras

Unicamp – Universidade Estadual de Campinas

Unifor – Universidade de Fortaleza

UPE – Universidade de Pernambuco

UVA – Universidade Estadual Vale do Acaraú (Ceará)

BLIKSTEIN, Paulo. **O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação**. 22 dez. 2008. Disponível em: http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html. Acesso em: 11 set. 2024.
Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas também para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.
Livro conceituado e referência em história da Matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. **Currículo de referência em tecnologia e computação**: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. São Paulo: Cieb, 2018. Disponível em: https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.
Esse documento propõe um currículo para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental, complementando a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com foco em tecnologia e computação. A proposta é baseada em três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: https://ibge.gov.br/. Acesso em: 11 maio 2020.
O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 11 set. 2024.
Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, ampliando o tempo mínimo do estudante na escola de 800 horas para 1.000 horas anuais (até 2022) e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple a BNCC, conhecido como Novo Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC: SEB, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.
Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC: SEB: Dicei, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 11 set. 2024.
As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica e orientaram a criação da BNCC. Elas são estabelecidas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019.
Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: propostas de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019.
Materiais elaborados como complementação ao que estabelece a BNCC sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).
Livro conceituado em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. **Matemática**: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.
Com mais de 25 anos de experiência, as autoras incentivam professores de Matemática do Ensino Médio a buscar novas ideias para a sala de aula.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade**: história, teoria e pesquisa. 18. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).
Essa obra propõe reflexões sobre a construção de um conhecimento mais integrado e livre, destacando a conexão entre diferentes áreas no ensino e aprendizagem.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos (tomo 1)**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.
Livro sobre história da Matemática com foco na invenção dos algarismos.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos (tomo 2)**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000. v. 2.
Em dois volumes, essa obra busca responder, de forma simples, a diversas questões sobre a história dos algarismos e do cálculo, desde a Pré-história até a era dos computadores.

LIMA, Elon Lages *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).
Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro apresenta tópicos como teoria dos conjuntos e funções (afins, quadráticas, polinomiais, logarítmicas e trigonométricas).

MACEDO, Horácio. **Dicionário de Física ilustrado**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.
Esse dicionário é voltado para quem busca informações gerais e sucintas sobre conceitos de Física, incluindo definições, comentários e referências a verbetes relacionados.

MESTRE, P. A. A. **O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos**. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, 2017.
Essa dissertação propõe estratégias para resolver problemas matemáticos, mapeando as capacidades fundamentais da Matemática, no nível de letramento do Pisa, aos conceitos do pensamento computacional.

SUPLEMENTO PARA O PROFESSOR

Esta coleção tem como objetivo proporcionar aos estudantes uma sólida formação matemática, alinhada com as mais recentes diretrizes educacionais e políticas públicas. Desenvolvida em conformidade com o **Decreto nº 12.021, de 16 de maio de 2024**, que altera o **Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017**, a coleção reforça o compromisso do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) em fornecer recursos educacionais de alta qualidade para a educação básica.

Com uma linguagem acessível ao estudante, a coleção favorece a compreensão e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos. Em cada volume é dado destaque para quatro temas – Desenvolvimento sustentável, Trabalho e juventudes, Educação midiática e Estratégias de estudo –, que procuram engajar os estudantes, facilitar o aprendizado e prepará-los para os desafios do mundo contemporâneo.

Com base nesses critérios, foi elaborado este *Suplemento para o professor*, que se apresenta dividido em duas partes: Parte Geral e Parte Específica.

Na Parte Geral, são feitas considerações e reflexões sobre temas diversos relacionados à educação, aos jovens e à diversidade cultural e étnica do Brasil. Há também uma descrição da estrutura do Livro do Estudante, bem como recomendações de materiais suplementares e sugestões de cronograma bimestral, trimestral e semestral.

A Parte Específica de cada volume traz comentários e orientações que objetivam enriquecer, tanto no aspecto teórico como no metodológico, os temas abordados nos capítulos, além de fornecer resoluções de todas as atividades. Ainda nesta parte, são explicitadas todas as conexões com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), facilitando o planejamento pedagógico.

Com esta coleção, esperamos contribuir para o seu trabalho em sala de aula e oferecer a você uma ferramenta auxiliar para o aprendizado do estudante.

Os editores

SUMÁRIO

PARTE GERAL

Pressupostos teóricos e metodológicos

As **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica**, definidas pelo Parecer CNE/CEB nº 7, de 7 de abril de 2010, e pela Resolução CNE/CEB nº 4, de 13 de julho de 2010, têm como finalidade orientar e assegurar a coerência e a qualidade da Educação Básica no Brasil. Elas estabelecem princípios, fundamentos e procedimentos que devem ser seguidos pelas instituições de ensino em todo o território nacional, garantindo um currículo que promova a formação integral dos estudantes. As diretrizes visam, ainda, assegurar a inclusão, a equidade e o respeito à diversidade, contribuindo para o desenvolvimento das competências e das habilidades necessárias para a vida em sociedade, para o exercício da cidadania e para a continuidade dos estudos em níveis mais avançados.

No que se refere mais especificamente ao Ensino Médio, o documento propõe uma revisão do currículo e uma nova dinâmica ao processo educativo, a fim de se adequar aos tempos de aprendizagem dos estudantes. Segundo as **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** (2013, p. 149), é preciso "permitir diferentes formas de oferta e de organização, mantida uma unidade nacional, sempre tendo em vista a qualidade de ensino".

Esta coleção foi elaborada tendo como referência as **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** e a **Base Nacional Comum Curricular**, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório que norteia a construção dos currículos de todos os sistemas e redes de ensino da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que o conjunto de aprendizagens essenciais e progressivas nela contido constitui o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas, dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC, orientada pelos princípios delineados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, estabelece os conhecimentos, as competências e as habilidades que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Segundo a BNCC (2018, p. 8):

> [...] **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC, dessa forma, estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Conhecimento

Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Pensamento científico, crítico e criativo

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Repertório cultural

Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Comunicação

Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Cultura digital

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Trabalho e projeto de vida

Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentação

Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Autoconhecimento e autocuidado

Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Empatia e cooperação

Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Responsabilidade e cidadania

Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fontes: BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9, 10; INSTITUTO Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Competências gerais da nova BNCC**. Brasília, DF: MEC. Disponível em: http://inep80anos.inep.gov.br/inep80anos/futuro/novas-competencias-da-base-nacional-comum-curricular-bncc/79. Acesso em: 12 set. 2024.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:

EM 13 MAT 103 → Esse código refere-se à habilidade 3 relacionada à competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definições curriculares.

EM: Ensino Médio

13: a habilidade pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição do currículo

MAT: Matemática e suas Tecnologias

1: competência específica à qual se relaciona a habilidade
03: numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência

É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial da BNCC, referente à etapa do Ensino Médio, que aponta as cinco competências específicas para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

Competências específicas[1]	Habilidades
Competência específica 1 Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	**(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT102)** Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas. **(EM13MAT103)** Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos. **(EM13MAT104)** Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. **(EM13MAT105)** Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). **(EM13MAT106)** Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

CONTINUA

1 Para saber mais sobre a finalidade de cada competência específica, consulte: BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 532, 534, 535, 536, 538, 540.

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 2 Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	**(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. **(EM13MAT202)** Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos. **(EM13MAT203)** Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
Competência específica 3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	**(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT303)** Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. **(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. **(EM13MAT307)** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. **(EM13MAT309)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 3	**(EM13MAT312)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. **(EM13MAT313)** Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro. **(EM13MAT314)** Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.). **(EM13MAT315)** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. **(EM13MAT316)** Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
Competência específica 4 Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	**(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. **(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. **(EM13MAT403)** Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. **(EM13MAT404)** Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT405)** Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. **(EM13MAT406)** Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra. **(EM13MAT407)** Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.
Competência específica 5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	**(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. **(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT504)** Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. **(EM13MAT505)** Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

CONTINUA

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 5	**(EM13MAT506)** Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. **(EM13MAT509)** Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. **(EM13MAT510)** Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: elaborado com base em BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 532-541.

As mudanças no Ensino Médio

A **Constituição Federal de 1988**, a **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB** (Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996) e o **Plano Nacional de Educação – PNE** (Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014) garantem a obrigatoriedade do Ensino Médio como dever do Estado e direito de todos, com progressiva universalização e gratuidade. O objetivo é preparar os estudantes para o exercício da cidadania, qualificá-los para o trabalho e desenvolver sua capacidade de continuar aprendendo e adaptando-se com flexibilidade às demandas da sociedade contemporânea, como as rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico.

Nesse contexto, o Ensino Médio, por meio da Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017, passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola e proporcionar uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela formação geral básica, que abrange as competências e as habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC. Além disso, sugere-se a introdução dos Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se afirmar que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do docente que apenas transmite informações, e do estudante que recebe o conteúdo de modo mecânico e descontextualizado.

Dessa maneira, torna-se premente organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como na esfera do trabalho.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

Os jovens e as juventudes

Diante da fluidez das mudanças que se desenham na sociedade contemporânea e que refletem no Ensino Médio, faz-se necessário compreender os jovens: suas identidades culturais, seus gostos, seus estilos, seus valores, suas vivências bem como a ideia do que representa ser jovem hoje.

Nessa óptica, a juventude é entendida de forma mais ampla e não como uma etapa da vida. O indivíduo vai se descobrindo, construindo-se de acordo com o contexto histórico, social e cultural próprios, o que, por sua vez, implica diferentes modos de vivenciar a juventude; daí dizermos juventudes no plural, enfatizando essa grande diversidade dos modos de ser jovem. Para Carrano e Dayrell (2013, p. 15):

> [...] a juventude é uma categoria dinâmica. Ela é transformada no contexto das mutações sociais que vêm ocorrendo ao longo da história. Na realidade, não há tanto uma juventude, e, sim, jovens enquanto sujeitos que a experimentam e a sentem segundo determinado contexto sociocultural onde se inserem e, assim, elaboram determinados modos de ser jovem.

E as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155) consideram

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

Assim, inserir-se no universo dos jovens e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino e aprendizagem.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, como sujeito crítico, participativo, sendo reconhecido no exercício pleno da cidadania e agente de transformação da sociedade. Segundo o **Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA** (Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990):

> Art. 53. A criança e o adolescente têm direito à educação, visando ao pleno desenvolvimento de sua pessoa, preparo para o exercício da cidadania e qualificação para o trabalho, assegurando-se lhes:
>
> I – igualdade de condições para o acesso e permanência na escola;
>
> II – direito de ser respeitado por seus educadores;
>
> III – direito de contestar critérios avaliativos, podendo recorrer às instâncias escolares superiores;
>
> IV – direito de organização e participação em entidades estudantis [...]

A experiência participativa na escola e na própria sociedade permite exercitar não somente a vivência da cidadania como também as escolhas para o seu projeto de vida e para o mundo do trabalho, no qual muitos jovens já estão inseridos enquanto estudam. Tratando-se de escolhas e projeto de vida, vale destacar o jovem do campo. Para acolher esses jovens, é preciso proporcionar um ambiente de aprendizagem que respeite suas origens e experiências. Ao garantir a esses estudantes condições para que se sintam bem-vindos e apoiados, a escola pode combater a evasão escolar e incentivar a continuidade dos estudos, contribuindo para o desenvolvimento sustentável das comunidades rurais. A inclusão desses jovens na educação formal permite ainda que tragam suas perspectivas únicas, enriquecendo o ambiente escolar e promovendo uma educação mais diversa e representativa.

As **Diretrizes Operacionais para a Educação Básica nas Escolas do Campo** (Parecer CNE/CEB nº 36, de 4 de dezembro de 2001, Resolução CNE/CEB nº 1, de 3 de abril de 2002, Parecer CNE/CEB nº 3, de 18 fevereiro de 2008, e Resolução CNE/CEB nº 2, de 28 de abril de 2008) orientam a organização e a implementação de uma educação que atenda às especificidades e necessidades das populações rurais. Essas diretrizes visam assegurar que a educação oferecida nas escolas do campo seja de qualidade, contextualizada e relevante para o cotidiano dos estudantes, promovendo a valorização das culturas locais e o desenvolvimento sustentável das comunidades. Além disso, buscam garantir o direito à educação a todos os jovens do campo, combatendo a desigualdade educacional e fortalecendo a inclusão social por meio de práticas pedagógicas que respeitem as identidades e os saberes do meio rural.

Outro aspecto das juventudes a ser destacado é a sociabilidade. O mundo cultural em qual o jovem está inserido possibilita o reforço da construção de sua identidade. Por meio das diferentes linguagens culturais, o jovem forma grupos nos quais expressa comportamentos e atitudes, posicionando-se diante de si e da sociedade. Dayrell (2016, p. 28) pontua que "o mundo da cultura aparece como um espaço privilegiado de práticas, representações, símbolos e rituais onde os jovens buscam demarcar uma identidade juvenil".

Estar atento aos grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento de seus modos de agir e de seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e bullying* (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotos e vídeos constrangedores.

As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Nesse contexto, vale destacar as dificuldades enfrentadas pelos jovens que se identificam como LGBTQIAP+, por exemplo: *bullying*, agressões físicas, exclusão social e a falta de representação e de apoio adequado no currículo e nas políticas escolares.

O quadro a seguir explica o significado da sigla LGBTQIAP+, que designa diversas minorias sexuais e de gênero em resposta ao tamanho do espectro e das demandas da comunidade.

Entenda a sigla LGBTQIAP+

L	**Lésbicas:** designa as mulheres, cis ou trans, que sentem atração por outras mulheres, cis ou trans, de forma romântica ou sexual.
G	**Gays**: corresponde aos homens, cis ou trans, que se sentem atraídos por outros homens, cis ou trans, de forma romântica ou sexual.
B	**Bissexuais:** diz respeito às pessoas que se relacionam romântica ou sexualmente com indivíduos de ambos os sexos/gêneros (feminino e masculino).
T	**Transgêneros e travestis:** a transexualidade se refere aos indivíduos que se identificam com o gênero que se distingue ao sexo designado ao nascer, abarcando homens e mulheres que buscam adequar-se à sua identidade de gênero. Já travestis são pessoas que buscam a construção de uma identidade feminina permanente oposta ao seu sexo biológico.
Q	***Queer*:** trata-se de uma designação tida como "guarda-chuva", funcionando como um termo que abrange todos da comunidade que não desejam ou não se veem dentro das demais designações, ou seja, sujeitos que não se identificam nem se nomeiam com nenhum gênero em específico.
I	**Intersexo:** abarca as pessoas que têm desígnios sexuais biológicos (órgãos, hormônios e cromossomos masculinos e femininos) de ambos os gêneros.
A	**Assexuais:** nomeiam indivíduos que não sentem atração sexual pelas demais pessoas, sejam sujeitos do mesmo gênero/sexo, sejam indivíduos opostos.
P	**Pansexuais:** orientação sexual que designa as pessoas que desenvolvem atração romântica e sexual pelos demais indivíduos, independentemente da identidade de gênero destes. É importante ressaltar que a pansexualidade se difere da bissexualidade como nível de importância da identidade de gênero para que o indivíduo se relacione ou não com a pessoa.
+	**+ (mais):** corresponde a outras orientações sexuais, identidades e expressões de gênero que são abraçadas pela sigla, além de representar a abertura de uma futura inserção de novas orientações e identidades, demonstrando uma infinitude plural e diversa diante do espectro romântico, sexual e de gênero da humanidade.

Fonte: elaborado com base em UNICEF BRASIL. **LGBTQIAP+ e saúde mental**: acolhendo e lutando contra estigmas e preconceito. [*S. l.*], 23 jun. 2023. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/blog/lgbtqiap-mais-e-saude-mental. Acesso em: 13 set. 2024.

Promover um ambiente inclusivo e seguro contribui para que todos se sintam aceitos e respeitados. Cabe à equipe escolar investir na formação dos profissionais para que compreendam melhor a sexualidade e acolham todos os estudantes. É necessário discutir a sexualidade abertamente e estabelecer regras baseadas no respeito. É essencial realizar rodas de conversa com aqueles que não cumprem as regras ou estão envolvidos em conflitos. Uma escola que acolhe a diversidade ensina valores importantes e prepara os estudantes para viver em uma sociedade plural e melhorar o desempenho acadêmico e a autoestima dos jovens LGBTQIAP+.

Em relação aos jovens em situação de itinerância, como povos ciganos, circenses, migrantes, imigrantes, ou em trânsito, é preciso flexibilizar o currículo, permitindo ajustes no conteúdo e no cronograma das atividades escolares para acomodar as particularidades de suas trajetórias nômades. O suporte adicional, que pode incluir aulas de reforço, também é fundamental para garantir que esses estudantes acompanhem o ritmo escolar e se sintam acolhidos no ambiente educativo.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é importante educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha papel relevante na organização dessa rede, como mediador do processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

Princípios éticos para a construção da cidadania

Vivemos em uma sociedade em que as relações entre indivíduos devem ser pautadas na ética, fortalecendo a dignidade humana, o direito de expressar opiniões e ideias e o respeito sem discriminação. Para Lodi e Araujo (2007, p. 70) essas relações precisam ser construídas "a partir do diálogo, na interação estabelecida entre pessoas imbuídas de razão e emoções em um mundo constituído de pessoas, objetos e relações multiformes, díspares e conflitantes".

Por isso, é necessário aprender a ser cidadão, respeitando e sendo solidário, responsável, justo e não violento, além de dialogar em diversas situações. É importante ser cidadão do lugar onde está inserido, preocupado com as questões locais e ampliando esse conceito, ser cidadão do mundo – a ideia de cidadania global postulada pela Unesco – consciente e preocupado com questões globais, como a pobreza, as desigualdades, as mudanças climáticas e os direitos humanos.

Uma das maneiras de promover essa aprendizagem está no estímulo às reflexões e vivências sobre questões reais na prática, criando no convívio escolar espaços democráticos para tais discussões e busca de soluções que promovam o diálogo, o respeito e a dignidade.

Trazemos algumas questões que podem permear tais discussões. Uma delas é a questão ambiental, preocupação da **Política Nacional de Educação Ambiental – PNEA** (Lei nº 9.795, de 27 de abril de 1999) e das **Diretrizes Curriculares para a Educação Ambiental** (Resolução CNE/CEB nº 2, de 15 de junho de 2012). A PNEA estabelece um marco para a integração da educação ambiental em todos os níveis de ensino, buscando garantir que os estudantes desenvolvam uma compreensão crítica dos problemas ambientais e estejam capacitados para atuar de forma responsável e ética em relação ao meio ambiente. As Diretrizes Curriculares para a Educação Ambiental, por sua vez, orientam a implementação desses princípios no currículo escolar, propondo metodologias e conteúdos que fomentem o pensamento crítico e a ação prática em questões ambientais. Juntas, essas políticas visam promover uma educação que não apenas informe sobre questões ambientais, mas que também engaje os indivíduos em práticas sustentáveis e na construção de um futuro mais equilibrado e sustentável.

Outra questão a ser discutida na escola é aquela relativa ao envelhecimento da população, buscando conscientização e soluções para esse desafio, visto que muitas pessoas idosas são discriminadas, violentadas em seus direitos e, principalmente, abandonadas afetivamente. De acordo com o Censo Demográfico 2022 do IBGE, o Brasil tinha 15,8% da população com 60 anos ou mais de idade, o que indicava um crescimento de aproximadamente 46% em relação ao Censo Demográfico 2010, quando representava 10,8% da população. O **Estatuto da Pessoa Idosa** (Lei nº 10.741, de 1º de outubro de 2003), que assegura à pessoa idosa autonomia, integração e participação efetiva na sociedade, estabelece medidas de proteção contra abusos, negligência e discriminação, assegurando acesso a serviços de saúde, assistência social, educação, cultura e lazer.

Explorar com os estudantes dados estatísticos e situações reais mostradas nos noticiários promove uma compreensão mais profunda das condições e dos desafios enfrentados pelas pessoas idosas. Essa análise permite identificar tendências, problemas e oportunidades de melhoria na qualidade de vida dos idosos, além de sensibilizar os jovens sobre questões de saúde, segurança e direitos. Ao engajar-se com esses dados e relatos, os estudantes desenvolvem habilidades críticas e empáticas, tornando-se cidadãos mais conscientes e preparados para contribuir positivamente para uma sociedade que valoriza e respeita as pessoas idosas.

A questão da violência contra a mulher também precisa estar presente na escola se quisermos uma sociedade mais justa e igualitária. Tratar desse tema ajuda a desconstruir estereótipos de gênero, promovendo o respeito e a igualdade. Para isso, sensibilize os estudantes sobre os impactos da violência e a importância de denunciar e combater tais comportamentos. Para enriquecer debates e reflexões, pode-se trazer para a sala de aula a **Lei Maria da Penha** (Lei nº 11.340, de 7 de agosto de 2006), que criou medidas protetivas, delegacias especializadas, centro de reabilitação e educação para os agressores e diversas ferramentas públicas para o atendimento à mulher. Ao integrar essa temática no ambiente escolar, cria-se um espaço seguro para discutir questões de direitos humanos e empoderamento, preparando os jovens para reconhecer e enfrentar a violência de forma consciente e proativa, contribuindo assim para a redução da violência de gênero a longo prazo.

Outro ponto que contribui para a construção da cidadania é a discussão, na escola, de como nos relacionamos no trânsito. O **Código de Trânsito Brasileiro** (Lei nº 9.503, de 23 de setembro de 1997), em seu artigo 76, propõe a educação para o trânsito em todas as etapas da educação, o que está diretamente ligado a um processo de construção de conceitos para o exercício da cidadania. Ensinar as regras e a importância da segurança no trânsito ajuda a prevenir acidentes e a salvar vidas. Além disso, desenvolve nos estudantes uma compreensão das responsabilidades individuais e coletivas, incentivando atitudes de respeito e cooperação no espaço público. Ao internalizar esses valores, os estudantes se tornam cidadãos mais preparados para contribuir com um trânsito mais seguro e harmonioso, refletindo uma sociedade mais organizada e atenta ao bem-estar de todos.

Nesta coleção, princípios éticos como os da dignidade, do respeito, da liberdade, da responsabilidade e da justiça são trabalhados por meio da abordagem de questões ambientais, do Estatuto da Pessoa Idosa, da Lei Maria da Penha, do Código de Trânsito Brasileiro etc. Tais abordagens podem estar presentes em aberturas de capítulos, seções, contextos de introdução de conteúdos, atividades e objetos educacionais digitais.

Identidades

A diversidade cultural e pluriétnica do Brasil é uma de suas características mais marcantes, resultante de sua rica história de encontros e misturas entre povos indígenas, africanos, europeus e asiáticos. Essa diversidade se reflete em diversos aspectos da vida brasileira, incluindo a música, a culinária, as festas populares, as tradições religiosas e as expressões artísticas. A convivência e a integração de diferentes etnias e culturas contribuem para a formação de uma identidade nacional única e plural, valorizando a multiplicidade de perspectivas e enriquecendo a sociedade. Reconhecer e celebrar essa diversidade é essencial para promover o respeito, a inclusão e a igualdade, fortalecendo a coesão social e a democracia no Brasil.

Por outro lado, toda essa diversidade traz com ela desigualdades sociais, econômicas e raciais. Discriminação, preconceito e exclusão são problemas persistentes que afetam grupos marginalizados, incluindo povos indígenas, afro-brasileiros e imigrantes. A falta de reconhecimento e valorização de todas as culturas pode levar à invisibilidade e à perda de patrimônios culturais importantes. Além disso, políticas públicas inadequadas e a insuficiente implementação de ações agravam essas desigualdades, dificultando a construção de uma sociedade verdadeiramente justa e inclusiva.

Esse panorama também se reflete na escola. Por isso, a fim de contribuir com uma sociedade mais justa e igualitária e promover uma educação antirracista, convém explorar com os estudantes a **História e Cultura Afro-Brasileira e Indígena** (Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003, e Lei nº 11.645, de 10 de março de 2008). Essa exploração pode ser realizada por meio de rodas de conversa e trabalhos em grupo, além da sugestão de elaboração de um produto final, como cartaz, *podcast*, curta-metragem ou outras produções multimídia, ao longo do ano letivo. A formação de uma roda de conversa permitirá que os estudantes compartilhem e debatam suas experiências e perspectivas sobre o racismo e a diversidade em um ambiente seguro e empático. Como conclusão, os estudantes poderão trabalhar em grupo, utilizando ferramentas digitais para a elaboração de projetos que sintetizem as discussões. Para que as ideias e os aprendizados sejam divulgados de modo mais amplo, considere a possibilidade de compartilhar os trabalhos finalizados com a comunidade escolar. Essa abordagem visa não apenas aprofundar a compreensão dos temas antirracistas, mas também engajar os estudantes de maneira significativa e prática, demonstrando que é possível, sim, construir uma educação antirracista. As **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana** (Parecer CNE/CP nº 3, de 10 de março de 2004, e Resolução CNE/CP nº 1, de 17 de junho de 2004), respaldadas pela Lei nº 12.288, de 20 de julho de 2010, que institui o Estatuto da Igualdade Racial e estabelece em sua Seção II, art. 11, a obrigatoriedade do estudo da história geral da África e da população negra no Brasil, observado o disposto na Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, especificam os conteúdos e as metodologias a serem adotados, garantindo que a educação das relações étnico-raciais seja integrada de forma transversal em todos os componentes curriculares, contribuindo para uma formação cidadã que valorize a contribuição desses grupos para a constituição da sociedade brasileira e que se sintam encorajados a combater o racismo estrutural e a discriminação, enfatizando, nesse sentido, uma educação antirracista, que ainda se mostra incipiente no Brasil.

Já as **Diretrizes Nacionais para a Educação Escolar Quilombola** (Resolução CNE/CEB nº 8, de 20 de novembro de 2012), por sua vez, visam garantir que o currículo escolar valorize e preserve a herança cultural quilombola, assegurando que as escolas quilombolas e as que atendem estudantes provenientes de territórios quilombolas levem em consideração as especificidades e práticas socioculturais de tais comunidades. Além disso, essas diretrizes contribuem para a educação antirracista ao promover o respeito e a compreensão das diversidades culturais, combatendo estereótipos e preconceitos desde o início da vida escolar.

As **Diretrizes Nacionais para a Educação em Direitos Humanos** (Resolução CNE/CP nº 1, de 30 de maio de 2012), por sua vez, têm como foco a promoção de uma cultura de respeito, valorização e defesa dos direitos humanos em todas as etapas e modalidades da educação no Brasil e estão alinhadas com as demais diretrizes aqui mencionadas. Incluir essas histórias e culturas no currículo escolar fortalece a identidade e o respeito pelos povos indígenas, afro-brasileiros e quilombolas, incentivando a construção de uma sociedade mais equitativa e democrática, na qual a diversidade é vista como uma riqueza a ser celebrada e protegida.

Esta coleção busca abranger a diversidade cultural e étnica do Brasil por meio de aberturas de capítulos e contextos presentes no estudo de conteúdos e nas atividades. A intenção é enriquecer a experiência de aprendizado para todos os estudantes e promover um ambiente de respeito, valorização e equidade.

A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a **Etnomatemática** – campo de estudo que explora as práticas matemáticas em diferentes contextos culturais. A ideia central é entender como diferentes grupos culturais desenvolvem e utilizam conceitos e técnicas matemáticas para resolver problemas no dia a dia. Isso pode incluir, por exemplo, a forma como comunidades indígenas medem terras, constroem suas habitações ou fazem cálculos para atividades agrícolas.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e precisam ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obra e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por exemplo, usando trigonometria).

Com base nessa perspectiva e diante da diversidade cultural que forma a identidade do povo brasileiro e está presente na sala de aula, trazer a matemática presente na cultura indígena e africana é uma possibilidade de compreender os saberes e fazeres desses povos, valorizando a contribuição cultural, além de diminuir a fronteira entre o currículo e a matemática prática que está fora da sala de aula.

Um modo de atingir esse objetivo é explorar, por exemplo, os grafismos da arte indígena presentes na pintura corporal, na cestaria ou na cerâmica para estudar as transformações geométricas.

Da cultura africana, podemos utilizar não só a arte das estampas e das máscaras, mas também os jogos. Um dos mais conhecidos é o mancala[2], comparável, em alguns aspectos, com o xadrez. O objetivo é distribuir as sementes uma a uma em um tabuleiro com duas cavidades maiores (os oásis) e doze cavas menores. O vencedor será aquele que terminar com o maior número de sementes no oásis. O trabalho com esse jogo permite estimular o raciocínio lógico e estratégico, já que o jogador precisa elaborar estratégias para vencer, e estabelecer relações com a cultura africana, desconstruindo preconceitos, valorizando a contribuição cultural africana.

Portanto, utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrirem a Matemática do dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática com base na valorização cultural dos diferentes grupos que compõem nossa sociedade e estão presentes na sala de aula.

A gestão de sala de aula

Uma boa gestão de sala de aula incentiva a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem instigante tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas, e requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando de sua conservação. Incluí-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático, que atenda a todos os estudantes, incluindo aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e de participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 27) explicam que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os estudantes podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e as atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se realiza uma atividade individual, reduzem drasticamente a interação entre os estudantes. Ao planejar a aula, é necessário também que o professor pense a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

---

2 **Como jogar o mancala.**

Há pelo menos 200 variações do jogo. No Brasil, a mais difundida é a que segue:

Número de participantes: 2

Material: 36 sementes e um tabuleiro com 12 cavas pequenas e dois oásis (cavas maiores que servem de reservatórios).

Objetivo: colocar o maior número de sementes no próprio oásis. Entenda a dinâmica:

1. Os jogadores se sentam frente a frente e ficam com o oásis à sua direita. Em seguida, cada um distribui 18 sementes em suas seis cavas (três em cada). No início, o oásis fica vazio.
2. Quem começa escolhe uma das cavas do seu campo, pega todas as sementes dela e as distribui, uma a uma, nas cavas seguintes, em sentido anti-horário.
3. Se passar pelo próprio oásis, o jogador deixa uma semente nele e segue colocando as demais no campo adversário, mas nunca no oásis de lá. Se a última semente cair no próprio oásis, ele pode fazer outra jogada. Se ela cair em uma cava vazia, ele pode adicionar ao seu oásis todas as sementes da cava seguinte.

Quando as sementes se reduzirem a ponto de não ser mais possível semear o campo adversário, os jogadores recolhem suas sobras, juntam ao seu oásis e contam. Quem tiver mais é o vencedor (disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/9104/um-jogo-para-semear-colher-e-contar. Acesso em: 24 ago. 2024).

A organização do tempo também precisa ser avaliada: um bom planejamento prévio do que e de como será trabalhado, com estratégias diferenciadas a fim de atender às especificidades de cada turma, permite envolver os estudantes em atividades que favoreçam a real aprendizagem.

Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala e intelectual, entre outras), transtornos de aprendizagem, de comportamento ou de conduta – déficit de atenção/hiperatividade, transtorno do espectro autista (TEA)[3] e transtorno opositivo desafiador (TOD)[4], entre outros. É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças que podem impedir a participação na sociedade desses indivíduos.

Para tanto, é necessário mudar paradigmas e rever como se dá a inclusão na escola, respaldada desde 1990 no **Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA** (Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990), no **Estatuto da Juventude** (Lei nº 12.852, de 5 de agosto de 2013) e no **Estatuto da Pessoa com Deficiência** (Lei nº 13.146, de 6 de julho de 2015), que asseguram a todas as crianças e a todos os adolescentes, independentemente de suas condições físicas, sensoriais ou intelectuais, o acesso à educação de qualidade. Nesse contexto, o **Atendimento Educacional Especializado – AEE** (Decreto nº 7.611, de 17 de novembro de 2011) desempenha papel fundamental ao complementar e suplementar o ensino regular, oferecendo recursos e serviços de apoio especializado que promovem a plena participação e aprendizagem dos estudantes com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades (superdotação). O AEE deve ser organizado a fim de atender às necessidades específicas de cada estudante, com a formação de professores capacitados e a adaptação de materiais e espaços escolares, reforçando o compromisso com uma educação inclusiva e equitativa, conforme os princípios do ECA e do Estatuto da Juventude.

Entretanto, apesar do respaldo legal, a garantia do direito de concluir seus estudos e de estar inserido no mercado de trabalho não ocorre na prática. A solução para reverter esse quadro é o acolhimento de estudantes que apresentam deficiências e transtornos de aprendizagem, de comportamento e conduta, com base no entendimento de suas necessidades e criar um ambiente de aceitação na sala de aula por meio de ações, como atividades em grupos que incentivem a interação entre todos.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são caminhos viáveis. No início, pode parecer difícil; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

Nesse contexto de inclusão, é fundamental combater a LGBTQIAP+fobia (junção da sigla LGBTQIAP+ com o sufixo *-fobia*), que, segundo o guia LGBTQIAP+: um guia educativo, significa "medo exagerado ou intolerância/aversão às pessoas que se identificam nessa sigla" (Santos e Jesus, p. 19).

Embora a LGBTQIAP+fobia seja crime, isso não é suficiente para que uma sociedade mude seu padrão de comportamento sociocultural. Para combatê-la, seja no ambiente escolar, seja fora dele, é importante dialogar e criar espaços acolhedores para todos aqueles que se identificam como LGBTQIAP+. Nesse âmbito, é importante combater o preconceito e as diferenças cristalizadas entre meninos e meninas, respeitando o direito de cada indivíduo ser quem é, além de incentivar e apoiar todos a denunciarem atos de discriminação em qualquer campo.

Outro preconceito presente na sociedade e que se reflete na escola é a gordofobia: preconceito contra pessoas gordas manifestado em atitudes, falas, representações negativas e barreiras para a inclusão dos corpos considerados acima do peso "ideal". Torna-se uma violência que precisa ser debatida na escola, ouvindo os estudantes gordos e aqueles que praticam tal violência na busca de tornar a escola um ambiente inclusivo e acolhedor. Para discutir e combater a gordofobia no ambiente escolar, pode-se incentivar os estudantes a relatarem, caso se sintam confortáveis, em uma roda de conversa acolhedora e respeitosa, casos de preconceito e/ou *bullying* de que foram vítimas, por não apresentarem o padrão de beleza imposto pelo mundo da moda e da mídia, ou situações de gordofobia que presenciaram. Como proposta de atividade interdisciplinar com o componente curricular Arte, proponha à turma um estudo sobre os padrões de beleza em diferentes épocas da história e em distintas sociedades, para que possam desconstruir padrões estéticos impostos pela sociedade.

Concomitante a essa discussão – independentemente de ser gordo ou magro, evitando-se estereótipos –, é preciso estabelecer uma conexão com o **Guia alimentar da população brasileira** (2014), elaborado pelo Ministério da Saúde. Esse guia oferece orientações abrangentes sobre alimentação saudável para a população e enfatiza a importância de uma dieta elaborada com alimentos *in natura* ou minimamente processados, promovendo práticas alimentares que valorizam a cultura e a diversidade alimentar brasileira. Além de fornecer diretrizes nutricionais, o guia

3 De acordo com o *site* **InformaSUS/UFSCar**, o transtorno do espectro autista (TEA) é uma alteração no neurodesenvolvimento que dificulta a organização de pensamentos, sentimentos e emoções, gerando prejuízos nas interações sociais, na comunicação e no aprendizado. As características desse transtorno variam de caso a caso, daí o nome espectro. As pessoas com TEA podem apresentar déficits persistentes na comunicação e na interação social verbal e não verbal; abordagem social anormal; dificuldade para estabelecer conversa; compartilhamento reduzido de interesses, emoções ou afeto; dificuldade para iniciar ou responder a interação; déficit na compreensão e no aprendizado de gestos e expressões faciais; fragmentação do contato visual e dificuldade de manter relacionamentos. Saiba mais em: https://informasus.ufscar.br/transtorno-do-espectro-autista-tea-o-que-precisamos-aprender/ e https://institutoolgakos.org.br/assets/pdf/publicacao/Cartilha-TEA%20(1).pdf. Acessos em: 24 ago. 2024.

4 O transtorno opositivo desafiador (TOD) é um distúrbio que afeta crianças e adolescentes ou, em algumas situações, é resultado do enfrentamento de situações estressantes (conflitos familiares ou dificuldades escolares) vivenciadas pelo indivíduo, transtornos de ansiedade, transtorno de déficit de atenção e hiperatividade ou transtorno de conduta. Caracteriza-se por um padrão de comportamento desafiador persistente (desafio às regras e à figura da autoridade), frequente e duradoura em relação a esse tipo de comportamento observado na maioria das outras crianças da mesma idade. Dificuldade em lidar com frustrações, teimosia, crises explosivas de raiva após ser contrariado e desejo exacerbado de vingança são características desse transtorno.

aborda aspectos sociais, culturais e ambientais da alimentação, incentivando escolhas conscientes que contribuem para a saúde individual e coletiva. É essencial que esse documento seja utilizado nas escolas de maneira que promova uma compreensão holística da saúde, valorizando a diversidade corporal e combatendo a gordofobia, incentivando práticas alimentares saudáveis sem estigmatizar ou discriminar qualquer grupo de estudantes.

A escola precisa ser um espaço democrático no qual todos possam se expressar, ouvindo e sendo ouvidos em suas diferenças e necessidades. Os educadores precisam estar atentos, como já mencionado, para não reproduzir estereótipos, mas, sim, tornar a escola um espaço de reflexão e transformação da sociedade.

A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo. Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem, ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, consigam se desenvolver. Essas propostas, certamente, necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

As metodologias ativas

Para a escola acompanhar as muitas e rápidas mudanças que ocorrem na sociedade, é necessário superar a educação bancária tradicional e focar no protagonismo do estudante exercido no processo de ensino e aprendizagem por meio de uma educação centrada na resolução de problemas, desafios e jogos. Um modo desse protagonismo acontecer é investir nas metodologias ativas. Segundo Jose Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares. Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, utilizando problemas e situações reais, e a ser o protagonista de seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É nessa relação professor-estudante-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, por meio das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar nos conteúdos desenvolvidos e no que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas representam a oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola, além de ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

Como aplicar as metodologias ativas com o livro didático

O uso do livro didático varia conforme a visão pedagógica do professor. Em uma abordagem que valoriza o protagonismo do estudante e a ideia de juventude plural, o livro didático torna-se um recurso a mais para enriquecer a prática docente.

Nesse sentido, esta coleção didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. A **aprendizagem baseada em projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmos ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões coletivas, refletem, analisam e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, a fim de estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessárias, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é importante planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É imprescindível também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar, e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta coleção, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa a ser colocada em prática é a da **sala de aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, fazem uso de aplicativos) ou sugerir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor levantará algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que necessitam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na sala de aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os estudantes aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam também no seu próprio ritmo.

Nesta coleção, o professor poderá propor aos estudantes que analisem antes as aberturas de capítulos, para que tragam dúvidas e comentem o que entenderam. É possível pedir, ainda, que realizem previamente as atividades propostas, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades a serem elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta coleção, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível com base em perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para explicar e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

É importante organizar os grupos de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas e a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e o melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, podem-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que nem todos participam, é fundamental abordar os integrantes do grupo, a fim de retomar os procedimentos de trabalho e revisar as regras. Se a falta de participação persistir, sugere-se a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprenderem a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual apresenta ora uma linguagem formal, ora um sistema de representação.

Tanto a língua materna como a linguagem matemática apresentam um sistema de representação simbólico, com letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer maior esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É por esse motivo que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

A teoria do filósofo francês Raymond Duval (2011) contribui para que o professor encontre caminhos para a resolução de tal entrave. Na teoria dos registros de representações semióticas em Matemática, Duval explica que, para aprender matemática, é importante que o estudante compreenda ao menos dois tipos de registro de um mesmo objeto matemático (uma representação linguística, uma simbólica ou uma gráfica).

A professora Claudia Flores (2006), em seu artigo "Representações semióticas em Matemática", explica que, para Duval, o pensamento está ligado às operações semióticas e a sua compreensão só é possível com o recurso das representações semióticas, uma vez que:

> [...] as representações no domínio da matemática são consideráveis, já que os objetos matemáticos, não sendo acessíveis pela percepção, só podem sê-lo por sua representação, lembrando que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes, dependendo da necessidade e do uso. Para o caso do objeto matemático, a função, por exemplo, pode-se ter um registro de representação linguística (função linear), um registro de representação simbólica ($y = x$ ou $f(x) = x$), ou ainda, um registro de representação gráfica (o desenho do gráfico da função).

Daí a importância de incentivar a conversão entre esses registros de representação.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante adquira habilidades de leitura e consiga resolver as situações de maneira mais eficaz.

Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é solicitar aos estudantes que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, peça a eles que, em duplas, leiam o texto do colega e dê contribuições para melhorar o texto.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[5] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais – gráficos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas –, bem como ao uso de *softwares*. É preciso que os educadores incluam em sua rotina meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática, propondo atividades em que os estudantes explicitem o raciocínio, aplicando o uso de diferentes gêneros textuais, promovendo discussões/debates e registros variados (orais, pictóricos e corporais).

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da **competência geral 4** da BNCC. Por outro lado, é necessário que haja interação entre os estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode também promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

Para ajudar os estudantes a desenvolver a capacidade argumentativa e de inferência em textos orais e escritos, é essencial incentivar a leitura crítica e diversificada, proporcionando acesso a diferentes gêneros textuais. Promover discussões e debates sobre os textos lidos ajuda a identificar argumentos, pontos de vista e evidências, aprimorando a habilidade de inferência. No que diz respeito à expressão escrita, deve-se incentivar a redação de textos argumentativos, concentrando-se na estrutura lógica e no uso de dados e exemplos concretos. Oferecer *feedback* detalhado e construtivo é fundamental para o desenvolvimento dessas habilidades. Atividades orais, como debates e apresentações, também fortalecem a argumentação e a capacidade de inferência, estimulando a articulação clara e persuasiva das ideias.

Nesta coleção, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, as seções *Educação midiática* e *Trabalho e juventudes*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente, e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

Nesse contexto de mudanças rápidas, os objetos educacionais digitais (OEDs) – *podcasts*, vídeos, carrosséis de imagens, infográficos clicáveis e mapas clicáveis – emergem como ferramentas essenciais para complementar e enriquecer os temas estudados. Esses recursos não apenas aproveitam o potencial das TDIC, mas também estão alinhados com as diretrizes da **Portaria nº 451**, de 16 de maio de 2018, que define critérios e procedimentos para a produção, recepção, avaliação e distribuição de recursos educacionais abertos ou gratuitos voltados para a Educação Básica em programas e plataformas oficiais do Ministério da Educação. Ao atender esses critérios, os OEDs garantem que os materiais oferecidos sejam de qualidade, acessíveis e estejam em conformidade com as políticas educacionais nacionais, tornando-se, assim, fundamentais para a educação no mundo digitalizado de hoje.

A preocupação com essas transformações e sua repercussão na formação das novas gerações faz-se presente na **Política Nacional de Educação Digital – Pned** (Lei nº 14.533, de 11 de janeiro de 2023), que objetiva aprimorar o acesso de toda a população brasileira aos recursos e às ferramentas

5 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

digitais, bem como a garantia da inserção da educação digital no ambiente escolar.

Tais preocupações também estão presentes na BNCC (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e critica.

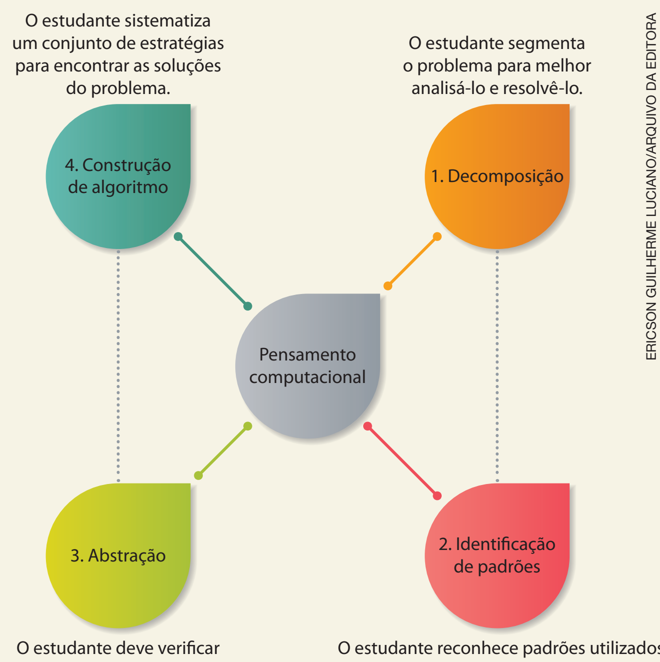
Portanto, o uso do computador no que se refere à educação escolar não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas também à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Como complemento à BNCC, foram instituídas as **Normas sobre Computação na Educação Básica** (Resolução CNE/CE nº 1, de 4 de outubro de 2022), cuja finalidade é integrar o ensino de computação e pensamento computacional de forma transversal no currículo escolar. Essa integração procura desenvolver nos estudantes competências essenciais para o século XXI, como a resolução de problemas, a lógica, a criatividade e a capacidade de inovação. Essas normas visam ainda promover a inclusão digital e a equidade, assegurando a estudantes de diferentes contextos sociais e econômicos oportunidades iguais para aprender e se beneficiar das tecnologias da informação e comunicação.

O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo "*Computational thinking*", da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, para que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares, conforme mostra o esquema a seguir.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Processos cognitivos relacionados ao pensamento computacional.

Fonte: Os editores.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para desenvolver o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. O trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", apresenta atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", realizadas sem o uso do computador, são importantes para incentivar a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão no trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- *Code.org:* apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os estudantes, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.
- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante descobre uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o *Scratch* trazem blocos de comandos que se encaixam, aproximando-se de termos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são encorajados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

Nesta coleção, o Capítulo 10 do volume 1 é inteiro dedicado ao pensamento computacional. Esse capítulo tem como objetivos orientar os estudantes a compreender o conceito de algoritmo, interpretar e construir fluxogramas, entender o que é linguagem de programação e suas estruturas e propõe problemas para que eles resolvam com o auxílio do *Scratch*. Além disso, ao longo da coleção, há diversas atividades pensadas intencionalmente para desenvolver o pensamento computacional.

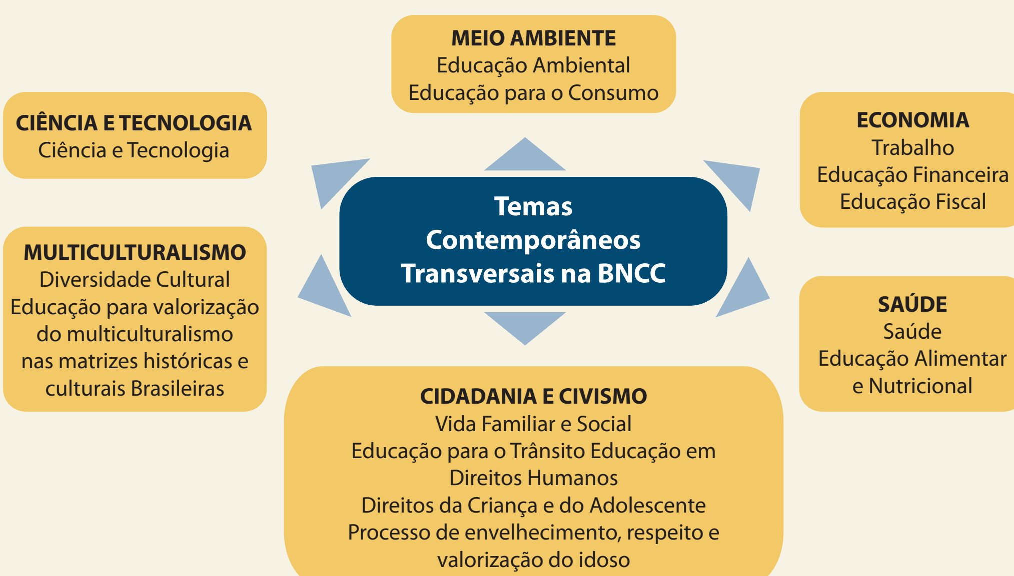
Os Temas Contemporâneos Transversais e a interdisciplinaridade

Os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) têm como finalidade integrar diferentes áreas do conhecimento e abordar questões relevantes e atuais na formação educacional dos estudantes. Eles promovem uma educação crítica e reflexiva, preparando os estudantes para desafios complexos da sociedade contemporânea. Ao abordar temas como sustentabilidade, ética, cidadania, diversidade cultural e inclusão, os TCTs incentivam o trabalho integrado com diferentes áreas, desenvolvem competências socioemocionais e fomentam uma consciência cidadã e global. Desse modo, contribuem para a formação integral do indivíduo, capacitando-o para agir de maneira responsável e participativa na construção de um futuro mais justo e sustentável.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCTs quando afirma que:

> cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.

O esquema a seguir mostra como os quinze TCTs estão organizados em seis macroáreas.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC:** contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019a.

Ao longo desta coleção, os TCTs são trabalhados por meio de aberturas de capítulos, seções, contextos presentes na teoria e em algumas atividades. Na Parte Específica do Manual do Professor, há comentários que auxiliam o professor na identificação desses momentos e inspiram diálogos em sala de aula.

Os TCTs também podem ser explorados por meio da interdisciplinaridade, o que, por sua vez, vai ao encontro da forma como o currículo do Ensino Médio deve ser elaborado – por área de conhecimento – e planejado de maneira interdisciplinar e transdisciplinar.

O trabalho com a interdisciplinaridade visa proporcionar uma educação mais integrada, preparando os estudantes para compreender e enfrentar a complexidade do mundo contemporâneo. Ao conectar diferentes áreas do conhecimento, a interdisciplinaridade promove o desenvolvimento de habilidades críticas e criativas, facilitando a aplicação prática do aprendizado em situações reais. Além disso, essa abordagem estimula a colaboração entre professores de diferentes disciplinas, enriquecendo o processo educativo e tornando-o mais dinâmico e relevante para os estudantes. Em última análise, a interdisciplinaridade contribui para a formação de indivíduos mais preparados para a vida acadêmica, profissional e pessoal, capazes de pensar de maneira sistêmica e solucionar problemas de forma inovadora e eficaz.

Na coleção, estimula-se o trabalho interdisciplinar por meio dos contextos, seções (*Pesquisa e ação*, *Trabalho e juventudes* e *Educação midiática*), atividades e orientações para o professor.

Temas em destaque na coleção

Na coleção destacam-se quatro temáticas: **desenvolvimento sustentável**, **trabalho e juventudes**, **educação midiática** e **estratégias de estudo**. Essas temáticas são essenciais para proporcionar uma formação integral aos estudantes, conectando o aprendizado matemático às realidades contemporâneas e às demandas do século XXI. O desenvolvimento sustentável é abordado para fomentar, entre outras coisas, a consciência ambiental e a responsabilidade social. O tema trabalho e juventudes visa preparar os estudantes para os desafios do mercado de trabalho e para a construção de um futuro promissor. A educação midiática é integrada para capacitar os estudantes a navegarem e criticar a vasta quantidade de informações digitais. Por fim, as estratégias de estudo são apresentadas para que os estudantes desenvolvam técnicas eficazes de aprendizagem, promovendo a autonomia e a autoeficácia em suas jornadas educacionais.

Desenvolvimento sustentável

Em 2015, os 193 Estados-membros da Organização das Nações Unidas (ONU), incluindo o Brasil, comprometeram-se a adotar a chamada Agenda 2030 para o desenvolvimento sustentável, considerada uma das mais ambiciosas da história da diplomacia internacional. Essa agenda tem como finalidade orientar os esforços globais para alcançar um desenvolvimento sustentável e inclusivo até o ano de 2030. Ela estabelece 17 objetivos de desenvolvimento sustentável (ODS) e 169 metas que visam erradicar a pobreza, proteger o planeta e garantir a todas as pessoas que desfrutem de paz e prosperidade.

Objetivos do Desenvolvimento Sustentável (ODS)

ODS	Meta	ODS	Meta	ODS	Meta
1 ERRADICAÇÃO DA POBREZA	Acabar com a pobreza em todas as suas formas, em todos os lugares.	7 ENERGIA LIMPA E ACESSÍVEL	Assegurar o acesso confiável, sustentável, moderno e a preço acessível à energia para todas e todos.	13 AÇÃO CONTRA A MUDANÇA GLOBAL DO CLIMA	Tomar medidas urgentes para combater a mudança climática e seus impactos.
2 FOME ZERO E AGRICULTURA SUSTENTÁVEL	Acabar com a fome, alcançar a segurança alimentar e melhoria da nutrição e promover a agricultura sustentável.	8 TRABALHO DECENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO	Promover o crescimento econômico sustentado, inclusivo e sustentável, emprego pleno e produtivo e trabalho decente para todas e todos.	14 VIDA NA ÁGUA	Conservar e usar de maneira sustentável dos oceanos, dos mares e dos recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável.
3 SAÚDE E BEM-ESTAR	Assegurar uma vida saudável e promover o bem-estar para todas e todos, em todas as idades.	9 INDÚSTRIA, INOVAÇÃO E INFRAESTRUTURA	Construir infraestruturas resilientes, promover a industrialização inclusiva e sustentável e fomentar a inovação.	15 VIDA TERRESTRE	Proteger, recuperar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres, gerir de forma sustentável as florestas, combater a desertificação, deter e reverter a degradação da terra e deter a perda de biodiversidade.
4 EDUCAÇÃO DE QUALIDADE	Assegurar a educação inclusiva e equitativa e de qualidade, e promover oportunidades de aprendizagem ao longo da vida para todas e todos.	10 REDUÇÃO DAS DESIGUALDADES	Reduzir a desigualdade dentro dos países e entre eles.	16 PAZ, JUSTIÇA E INSTITUIÇÕES EFICAZES	Promover sociedades pacíficas e inclusivas para o desenvolvimento sustentável, proporcionar o acesso à justiça para todos e construir instituições eficazes, responsáveis e inclusivas em todos os níveis.
5 IGUALDADE DE GÊNERO	Alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas.	11 CIDADES E COMUNIDADES SUSTENTÁVEIS	Tornar as cidades e os assentamentos humanos inclusivos, seguros, resilientes e sustentáveis.	17 PARCERIAS E MEIOS DE IMPLEMENTAÇÃO	Fortalecer os meios de implementação e revitalizar a parceria global para o desenvolvimento sustentável.
6 ÁGUA POTÁVEL E SANEAMENTO	Assegurar a disponibilidade e gestão sustentável da água e saneamento para todas e todos.	12 CONSUMO E PRODUÇÃO RESPONSÁVEIS	Assegurar padrões de produção e de consumo sustentáveis.		

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

Fonte: elaborado com base em NAÇÕES UNIDAS BRASIL. Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil. **Nações Unidas Brasil**, Brasília, DF, [202-]. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 30 ago. 2024.

No Livro do Estudante, esses objetivos são trabalhados em aberturas de capítulos, seções e contextos da teoria. Esses momentos estão sinalizados por meio de releituras dos ícones anteriores. Na Parte Específica do Manual do Professor, há comentários a respeito da relação desses objetivos com os temas abordados no Livro do Estudante e de como fomentar discussões em sala de aula.

Trabalho e juventudes

Os jovens enfrentam diversos desafios no mundo do trabalho atualmente, resultantes das rápidas transformações econômicas, tecnológicas e sociais. A automação e a digitalização estão redefinindo o mercado de trabalho, exigindo novas habilidades e competências que muitos jovens ainda não possuem. Além disso, a precarização do trabalho e o crescimento do emprego informal dificultam o acesso a empregos estáveis e bem-remunerados. A competição acirrada e a falta de experiência prática também são obstáculos significativos, frequentemente resultando em altas taxas de desemprego juvenil. A desigualdade de oportunidades, baseada em fatores como gênero, raça e origem socioeconômica, agrava ainda mais a situação. Esses desafios exigem políticas públicas eficazes, educação e formação profissional adaptadas às novas demandas do mercado.

Nesta coleção, temas relacionados ao mundo do trabalho são desenvolvidos principalmente na seção *Trabalho e juventudes*. Nessa seção, são abordados vários temas, como profissões, tributos, igualdade de condições, inclusão no ambiente de trabalho, segurança no trabalho etc., favorecendo uma compreensão abrangente das dinâmicas do mercado de trabalho. Ao explorar diversas profissões e os requisitos associados a cada uma, os estudantes identificam suas próprias vocações e interesses. Assim, ao enfatizar a igualdade de condições e a inclusão, a seção promove a conscientização a respeito da importância de um ambiente de trabalho justo e acessível a todos.

As propostas dessa seção podem ser enriquecidas sugerindo aos estudantes que visitem os locais de trabalho de diversos profissionais. Com a devida autorização dos responsáveis, o professor pode organizar visitas guiadas, proporcionando uma experiência prática e concreta das diferentes carreiras. Isso permite que os estudantes observem de perto as rotinas e ambientes de trabalho, ampliando sua compreensão sobre as possibilidades profissionais.

Educação midiática

Compreender e analisar criticamente informações provenientes de diferentes mídias, como jornais, revistas, televisão, rádio, *sites*, redes sociais etc., é essencial para o exercício pleno da cidadania em um mundo cada vez mais conectado e carregado de informações.

A capacidade de discernir entre fontes confiáveis e questionáveis permite ao cidadão elaborar opiniões informadas, tomar decisões conscientes e participar de maneira ativa e responsável na sociedade. Esse discernimento é fundamental para combater a desinformação, as *fake news* e a manipulação midiática, que podem distorcer a realidade e influenciar negativamente o debate público. Além disso, a análise crítica das informações promove o desenvolvimento do pensamento crítico, a valorização da diversidade de perspectivas e a capacidade de argumentar. Desse modo, um cidadão bem-informado e crítico contribui para a construção de uma sociedade mais democrática, justa e resiliente, capaz de enfrentar desafios complexos e promover o bem comum.

Além de todo esse cenário, há que se citar a inteligência artificial, que vem ganhando cada vez mais espaço. É um campo da ciência da computação que desenvolve algoritmos capazes de realizar tarefas que normalmente requerem inteligência humana, como a capacidade de aprender, reconhecer padrões, tomar decisões e processar textos em linguagem natural. Usada em diversas áreas, como saúde, finanças, transporte, educação e entretenimento, a IA oferece soluções inovadoras e eficientes para problemas complexos, transformando significativamente o modo como vivemos e trabalhamos, trazendo benefícios substanciais, mas também levantando questões éticas e sociais que precisam ser abordadas, como privacidade, segurança e impacto no mundo do trabalho.

Na coleção, esse tema está contemplado na seção *Educação midiática*, que abrange temas essenciais para a formação crítica dos estudantes no mundo digital. Entre os tópicos destacados estão as *fakes news*, em que se explora a identificação e o combate de notícias falsas que circulam nas redes sociais e em outras mídias. Incentiva-se também a análise criteriosa de dados e informações, com o intuito de compreender a verdadeira intenção por trás deles. A seção trabalha ainda com gráficos que induzem a erro, fornecendo subsídios para que os estudantes reconheçam representações visuais enganosas. Além disso, desmistifica a “lenda do terraplanismo”, mostrando evidências científicas que refutam essa crença. O uso da inteligência artificial (IA) é outro ponto abordado, destacando suas potencialidades e limitações no fornecimento de informações. Por fim, a manipulação de imagens é discutida, mostrando técnicas e conceitos matemáticos usados para alterar fotografias, e como essas manipulações podem influenciar a percepção pública.

Estratégias de estudo

Trabalhar com o protagonismo juvenil proposto pela BNCC implica investir no desenvolvimento da autonomia do estudante, seja na escola, seja fora dela. Um dos pontos que dialoga com essa premissa é o ensinar a aprender, a estudar, a buscar informações, a pesquisar, a registrar.

De acordo com a pesquisa “Estratégias de estudo e aprendizagem utilizadas pelos estudantes do Ensino Médio”, desenvolvida por Maciel, Souza e Dantas (2015), o uso eficaz de estratégias de estudo e aprendizagem está associado a fatores motivacionais e autorregulatórios.

Há dois tipos de estratégias: as cognitivas e as metacognitivas. As estratégias cognitivas são aquelas que propiciam o armazenamento da informação como repetir, grifar ou resumir as ideias de um texto; memorizar as informações por meio de questionamentos, anotações e paráfrases; mapear as ideias centrais e fazer relações entre elas.

As estratégias metacognitivas são os meios que cada um usa para planejar, monitorar e regular seu próprio pensamento, avaliando se está obtendo os resultados desejados, ou seja, o estudante planeja o que e como irá estudar ao longo de determinado período, estabelecendo quais ações irá desenvolver para atingir o seu objetivo. Replaneja o que não está dando certo com base na reflexão, buscando outras ações para que, ao final, autoavalie o resultado, atingindo aquilo a que se propôs. É um processo que precisa ser ensinado pelo professor.

De acordo com a pesquisa citada anteriormente:

> [...] o uso de estratégias possibilitará ao estudante desenvolver maior autonomia sobre sua aprendizagem e reconhecer-se como sujeito na construção do próprio conhecimento. Outro ponto é que, ao se tornar mais

consciente do próprio processo de aprendizagem, o estudante pode sentir-se em melhores condições de controlar a própria motivação, tornando-se mais engajado em aprender (Maciel; Souza; Dantas, 2015).

Assim, indicar estratégias de estudo variadas para os estudantes é fundamental para promover um aprendizado mais eficaz e significativo. Ferramentas como mapas conceituais, por exemplo, auxiliam na organização e visualização das relações entre diferentes conceitos, facilitando a compreensão dos conteúdos. Já as avaliações permitem que os estudantes monitorem seu progresso e identifiquem áreas que necessitam de mais atenção. Ao utilizar essas estratégias, os estudantes desenvolvem habilidades metacognitivas, tornando-se mais autônomos e proativos no processo de aprendizagem.

Na coleção, as seções *Avaliação diagnóstica* (1 e 2), *Para finalizar o capítulo* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares* atendem essa temática.

Mapa conceitual

Mapa conceitual ou mapa de conceitos é uma estratégia de ensino que tem como finalidade permitir aos estudantes organizarem e integrarem o que estudaram de maneira visual e estruturada.

Na coleção, os mapas conceituais são explorados na subseção *Conexões entre conceitos* da seção *Para finalizar o capítulo*. Nessa subseção, é solicitado aos estudantes que identifiquem palavras/termos que completam corretamente um mapa conceitual parcialmente construído. Propostas como essa não apenas auxiliam na organização do conhecimento, mas também desenvolvem habilidades de pensamento crítico e analítico, à medida que o estudante avalia a relevância e a interdependência dos diferentes conceitos. Além disso, completar mapas conceituais promove a revisão e a consolidação do aprendizado, ajudando os estudantes a internalizar o conteúdo e a se preparar para aplicá-los nas atividades ou situações cotidianas.

Avaliação

Avaliar é uma tarefa difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou de meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico.

Nesse contexto, convém, em primeiro lugar, obter informações sobre habilidades, conhecimentos e necessidades individuais dos estudantes no início de um ciclo de ensino, o que pode ser feito por meio de **avaliações diagnósticas**. Para os estudantes, essas avaliações permitem identificar conhecimentos que dominam e dificuldades, favorecendo o recebimento de apoio direcionado e personalizado que pode ajudá-los a progredir de maneira efetiva na aprendizagem. Para os professores, as avaliações diagnósticas subsidiam o planejamento das aulas e a escolha de estratégias pedagógicas. Elas ajudam a adaptar as aulas às necessidades específicas da turma, promovendo um ambiente de aprendizagem mais inclusivo e eficiente. Ao compreender o ponto de partida dos estudantes, os professores podem estabelecer metas realistas e desafiadoras. Na coleção, em cada volume, são propostas duas avaliações diagnósticas, uma no início do ano letivo e outra no meio. Essas avaliações são compostas de questões de múltipla escolha que permitem identificar lacunas no aprendizado e detectar os conhecimentos previamente adquiridos.

As **avaliações formativas** complementam as avaliações diagnósticas, uma vez que possibilitam aos estudantes acompanharem seu progresso, detectando e identificando suas dificuldades e facilidades. Para os professores é a oportunidade de ajustar estratégias de ensino. A subseção *Autoavaliação* da seção *Para finalizar o capítulo* cumpre essa função.

As avaliações formativas servem de instrumento para que se coloquem em prática dois modelos avaliativos: modelo comparativo e ipsativo. O **modelo comparativo** tem como objetivo comparar o desempenho dos estudantes com um padrão ou critério externo ou com outros grupos de estudantes. Esse tipo de modelo pode motivá-los a buscar melhorias contínuas, pois visualizam seu desempenho em um contexto mais amplo. Já o **modelo ipsativo** tem como finalidade comparar o desempenho de um estudante com ele mesmo ao longo do tempo, possibilitando a ele a análise de seu próprio desenvolvimento e identificando pontos positivos e desafios que tem pela frente. O foco está no progresso individual e pessoal do estudante, valorizando a sua evolução em relação as suas próprias metas e objetivos de aprendizagem.

Ainda considerando a tarefa de avaliar, temos as **avaliações somativas** ou de **resultados**. Essas avaliações ocorrem ao final de um período, com o intuito de verificar se os objetivos educacionais foram alcançados. Além disso, elas oferecem dados importantes para os professores ajustarem suas práticas pedagógicas e melhorarem o currículo, garantindo que os estudantes estejam bem-preparados para os desafios acadêmicos futuros. São exemplos de avaliação somativa as provas, os testes e os projetos finais.

Ao final de cada volume da coleção, é proposta a seção *Prepare-se para o Enem e vestibulares*. Essa seção tem caráter de avaliação somativa e visa ajudar os estudantes a se prepararem para os exames de larga escala.

Um ponto a ser mencionado é a questão do acompanhamento das aprendizagens. Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e as habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho for de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações.

Outras estratégias de estudo

No mundo de constante transformações em que vivemos atualmente, o conhecimento evolui rapidamente. Por isso, é primordial estar sempre aprendendo; daí a necessidade de investir no aprender a aprender.

Listamos, a seguir, algumas estratégias de estudo que devem ser trabalhadas com os estudantes em sala de aula para que possam ser utilizadas por eles dentro de sua rotina.

- **Resumos dos conteúdos:** ao resumir os conteúdos, os estudantes identificam os pontos principais e estruturam o conhecimento de forma concisa, o que facilita a revisão e o entendimento aprofundado dos temas. Para que esse método seja eficiente, o estudante precisa ler a teoria, fazer as atividades e depois escrever a explicação do que foi lido e compreendido, com suas próprias palavras. Podem-se também acrescentar desenhos e figuras ao texto.
- **Consulta a materiais complementares:** consultar materiais complementares como livros, *sites*, jogos, *softwares* e videoaulas é uma estratégia de estudo essencial para aprofundar o conhecimento e diversificar as fontes de aprendizado. Esses recursos adicionais oferecem diferentes perspectivas e abordagens sobre o mesmo assunto, permitindo uma compreensão mais ampla e completa. Além disso, o uso de múltiplos formatos de mídia pode tornar o aprendizado mais dinâmico e engajador, facilitando a compreensão e a aplicação prática do conhecimento adquirido. Na coleção, são sugeridos materiais complementares para os estudantes na subseção *Sugestões de ampliação* da seção *Para finalizar o capítulo*.
- ***Flashcards*:** essa estratégia consiste na utilização de cartões pequenos, nos quais são escritos uma pergunta, termo ou conceito de um lado, e a resposta, definição ou explicação do outro. Esses cartões podem ser de papel (*post-it*, por exemplo) ou digitais (obtidos por meio de *softwares* específicos). O objetivo é melhorar a retenção e a recuperação de informações. São ideais para ser usados no estudo de fórmulas matemáticas, definições, propriedades, entre outros.

É importante lembrar que cada um tem suas características e seu ritmo próprio de estudar e aprender. Os estudantes devem estar à vontade para utilizar a estratégia que julgarem conveniente.

Organização e estrutura da obra

A seleção dos conteúdos e temas, nesta obra, foi feita com base nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e nas competências gerais, específicas e habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular. Essa seleção apoia a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes.

O encaminhamento dos conteúdos e as diversas atividades contribuem para que os estudantes apliquem os conhecimentos matemáticos e se apropriem de diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático: indução, dedução e raciocínio por analogia. Além disso, nas aberturas, contextos e seções são abordados temas que envolvem meio ambiente, saúde, pluralidade cultural, cidadania, educação financeira e tecnologia, entre outros, o que favorece a conexão entre o conteúdo e a realidade dos estudantes. Isso não apenas torna o ensino mais relevante e interessante, como também prepara os jovens para serem cidadãos informados e engajados, capazes de entender e enfrentar os desafios do mundo moderno. Essa abordagem promove a interdisciplinaridade, uma vez que facilita interconexões entre diferentes áreas do conhecimento.

A obra está organizada em três volumes, cada qual composto de seções, capítulos e boxes. As páginas iniciais de cada volume apresentam a *Organização da obra*, um texto sobre os *Objetivos de Desenvolvimento Sustentável* e o *Sumário*. No início e no meio de cada volume, são propostas *Avaliações diagnósticas*, que objetivam identificar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes a respeito dos conceitos e procedimentos estudados nos Anos Finais do Ensino Fundamental e que serão mobilizados no decorrer do semestre.

Após o trabalho com as avaliações diagnósticas, inicia-se o estudo dos assuntos previstos nos capítulos.

A abertura de cada capítulo traz um tema no qual está presente o conteúdo a ser estudado, o que possibilita realizar um diagnóstico dos conhecimentos prévios que os estudantes já têm sobre o conteúdo a ser desenvolvido.

Cuidou-se para que os conteúdos de cada capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e pelo boxe *Atividade(s) resolvida(s)*, que trabalha uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

No boxe *Atividades propostas*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade. Algumas delas recebem *tags* especiais, conforme mostra o quadro a seguir.

Significado das *tags* presentes em algumas atividades propostas

Tags	Característica da atividade
EM DUPLA	Para os estudantes realizarem em duplas. Promovem o diálogo e o aprendizado colaborativo.
EM GRUPO	Envolvem a participação de três ou mais estudantes. Também promovem o diálogo e o aprendizado colaborativo.
ARGUMENTAÇÃO	Têm como finalidade desenvolver a capacidade de pensar criticamente e defender pontos de vista, articulando ideias de forma clara e convincente.
SOFTWARE	Envolvem planilhas eletrônicas, *Scratch* ou *softwares* de construção de gráfico/geometria dinâmica.
PENSAMENTO COMPUTACIONAL	Trabalham um ou mais pilares do pensamento computacional, por meio de algoritmos representados por fluxogramas, na língua materna ou no *Scratch*.
ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS	Para os estudantes criarem questões ou enunciados de problemas.
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	Exploram fatos históricos ligados à Matemática.

Ao realizar atividades práticas que envolvem o uso de materiais como compasso ou tesoura, é importante ficar atento aos riscos envolvidos, assegurando sempre a integridade física de todos. É crucial que, antes de iniciar qualquer atividade, o professor identifique potenciais perigos e implemente medidas de segurança apropriadas. É importante sempre fornecer instruções claras e detalhadas aos estudantes sobre os procedimentos corretos e as precauções necessárias ao manusear esses instrumentos. Dessa forma, é possível criar um ambiente seguro e propício ao aprendizado, minimizando o risco de acidentes.

Em alguns capítulos, temos a seção *Trabalho e juventudes*, que aborda temas como profissões, tributos, igualdade de condições, inclusão no ambiente de trabalho, segurança no trabalho etc., favorecendo uma compreensão abrangente das dinâmicas do mercado de trabalho.

Ao término do capítulo, é proposta a seção *Para finalizar*, que se subdivide nas subseções *Conexões entre conceitos*, *Sugestões de ampliação* e *Autoavaliação*. Na subseção *Conexões entre conceitos*, é solicitado aos estudantes que identifiquem palavras/termos que completam corretamente um mapa conceitual parcialmente construído. Na subseção *Sugestões de ampliação*, são sugeridos recursos complementares, como livros, *sites*, jogos, *softwares* e videoaulas, para o enriquecimento e a ampliação do conhecimento e para diversificar as fontes de aprendizado. A subseção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os principais conteúdos trabalhados, o que possibilita aos estudantes acompanharem seu progresso, detectando e identificando suas dificuldades e facilidades. O quadro presente ao final dessa subseção relaciona as questões com os objetivos do capítulo e serve de guia para os estudantes retomarem o que foi estudado. Essa subseção permite trabalhar a **competência geral 10**, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

Ao final do volume, são propostas as seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*.

A seção *Educação midiática* explora temas essenciais para a formação crítica dos estudantes no mundo digital. Os tópicos explorados são: *fakes news*, análise crítica de informações, gráficos que induzem a erro, “lenda do terraplanismo”, Inteligência Artificial (IA) e a manipulação de imagens.

Na seção *Pesquisa e ação*, são propostas atividades em grupo que envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece a **competência geral 4**. A seção permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo em que exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a **competência geral 2**. Essa seção favorece também a **competência geral 7**, já que, em algumas atividades, os estudantes discutirão temas, como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a **competência geral 9**, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente.

A seção *Prepare-se para o Enem e vestibulares*, por sua vez, propõe questões do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e de vestibulares de diferentes regiões do país, com o intuito de ajudar os estudantes a se preparar para exames de larga escala.

Também, ao final do volume, são encontradas as *Respostas* de todas as atividades e as *Referências bibliográficas comentadas*.

Sugestões de cronograma

As diferenças de rendimento entre as turmas podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor a outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir sugestões de cronograma bimestrais, trimestrais e semestrais para cada um dos três volumes desta coleção. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

Sugestões de cronograma para o volume 1

Sugestão de cronograma bimestral

1º bimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2 e 3
2º bimestre	Capítulos 4 e 5 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
3º bimestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6, 7 e 8
4º bimestre	Capítulos 9 e 10 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma trimestral

1º trimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2, 3 e 4
2º trimestre	Capítulo 5 *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6 e 7
3º trimestre	Capítulos 8, 9 e 10 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma semestral

1º semestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2, 3, 4 e 5 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
2º semestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6, 7, 8, 9 e 10 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestões de cronograma para o volume 2

Sugestão de cronograma bimestral

1º bimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1 e 2
2º bimestre	Capítulos 3, 4 e 5 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
3º bimestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6 e 7
4º bimestre	Capítulos 8 e 9 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma trimestral

1º trimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2 e 3
2º trimestre	Capítulos 4 e 5 *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Avaliação diagnóstica 2* Capítulo 6
3º trimestre	Capítulos 7, 8 e 9 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma semestral

1º semestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2, 3, 4 e 5 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
2º semestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6, 7, 8 e 9 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestões de cronograma para o volume 3

Sugestão de cronograma bimestral

1º bimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1 e 2
2º bimestre	Capítulos 3 e 4 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
3º bimestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 5 e 6
4º bimestre	Capítulos 7 e 8 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma trimestral

1º trimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2 e 3
2º trimestre	Capítulo 4 *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 5 e 6
3º trimestre	Capítulos 7 e 8 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma semestral

1º semestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2, 3 e 4 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
2º semestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 5, 6, 7 e 8 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestões/referências suplementares

Livros e artigos

Ensino de Matemática

BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). **Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica**: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.

Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a educação e a educação matemática.

BOALER, J. **Mentalidades matemáticas**: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Tradução: Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro aponta os motivos que tornam a Matemática vilã para muitos e mostra como professores, gestores e família podem ajudar a modificar esse cenário. Traz exemplos e atividades práticas que podem tornar a aprendizagem da matemática acessível para todos.

CAMARGO, F.; DAROS, T. **A sala de aula inovadora**: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro mostra como é possível renovar e inovar a sala de aula trazendo mais de 40 estratégias destinadas à educação básica e ao ensino superior para implementar mudanças que levem a um aprendizado ativo.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.

O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

A obra aborda a história de conteúdos matemáticos, discorrendo sobre o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.

HUFF, D. **Como mentir com Estatística**. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.

PONTE, J. P. *et al*. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de trabalhar nessa perspectiva.

Tecnologias da Informação e Comunicação

BACICH. L.; NETO. T. A.; TREVISANI, F. M. **Ensino híbrido:** personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Discute o que é o ensino híbrido e traz propostas e experiências para que esse modelo possa ser implementando nas escolas brasileiras.

História da Matemática

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

A obra mostra o desenvolvimento da Matemática desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.

Sites e artigos da internet

Sites acessados em: 24 ago. 2024.

- http://www.periodicos.capes.gov.br/

Site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). Disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat

Site da **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Traz artigos de todas as edições publicadas.

- http://www.edumatec.mat.ufrgs.br

Site do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- https://www.ime.usp.br/lem/

Site do Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade de São Paulo (USP). Objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/

Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

Revistas e periódicos

BOLETIM GEPEM. Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da UFRRJ. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/index. Acesso em: 25 ago. 2024.

Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. Brasília, DF: Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/index. Acesso em: 25 ago. 2024.

Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem). Traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA (RPM). Rio de Janeiro: SBM. Disponível em: https://rpm.org.br/. Acesso em: 25 ago. 2024.

Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Destina-se àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

Referências bibliográficas comentadas

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE LÉSBICAS, *GAYS*, BISSEXUAIS, TRAVESTIS E TRANSEXUAIS. Secretaria de Educação. **Pesquisa nacional sobre o ambiente educacional no Brasil 2015**: as experiências de adolescentes e jovens lésbicas, *gays*, bissexuais, travestis e transexuais em nossos ambientes educacionais. Curitiba: ABGLT, 2016. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/materiais/pesquisa-nacional-sobre-o-ambiente-educacional-no-brasil-2016/. Acesso em: 25 ago. 2024.

O relatório apresenta as análises e os resultados da primeira pesquisa nacional virtual realizada no Brasil e em outros cinco países latino-americanos com adolescentes e jovens lésbicas, *gays*, bissexuais, travestis e transexuais sobre suas experiências nas instituições de ensino.

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam o uso de metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. **Ensino híbrido**: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

A obra apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, a fim de alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. Existem outras matemáticas? **Nova Escola**, 3 maio 2019. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas. Acesso em: 13 set. 2024.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. **Modernidade líquida**. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Zygmunt Bauman, em suas obras, usa o termo "modernidade líquida" para descrever a fluidez e volatilidade das relações no mundo contemporâneo, em contraste com a "modernidade sólida". Suas obras são referência sobre o tema.

BENDER, W. N. **Aprendizagem baseada em projetos**: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações na sala de aula.

BENEVIDES, B. G. **O que fazer em caso de violência lgbtifóbica**: cartilha de orientações à população LGBTI no combate à LGBTIfobia. Rio de Janeiro: ANTRA e ABGLT, 2020. Disponível em: https://antrabrasil.org/wp-content/uploads/2020/03/cartilha-lgbtifobia.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

A cartilha traz informações e orientações para o enfrentamento das violências e violações dos direitos da população LGBTQIAP+.

BLIKSTEIN, P. **O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação**. Palestra proferida durante o V Congresso Brasileiro de Informática na Educação. Rio de Janeiro, 24-27 out. 2016. Disponível em: http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html. Acesso em: 25 ago. 2024.

O autor aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa é identificar tarefas cognitivas que podem ser feitas mais rapidamente por um

computador, e a segunda é programá-lo para executar essas tarefas, transferindo o que não é essencialmente humano.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica**. (Tese de doutorado) Programa de Pós-graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/172208/001054290.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 25 ago. 2024.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. Casa Civil. **Decreto n. 7.611, de 17 de novembro de 2011**. Dispõe sobre a educação especial, o atendimento educacional especializado e dá outras providências. Brasília, DF: Casa Civil, 18 nov. 2011. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2011/decreto/d7611.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento dispõe sobre a educação especial e o atendimento de educação especializada nas instituições de ensino no país.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 8.069, de 13 de julho de 1990**. Dispõe sobre o Estatuto da Criança e do Adolescente e dá outras providências. Brasília: DF: Casa Civil, 1990. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l8069.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento garante os direitos e deveres das crianças e dos adolescentes em todo o país.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e as bases da educação nacional. Brasília, DF: Casa Civil, 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento disciplina a educação escolar vinculando-a ao mundo do trabalho e à prática social, além de abranger todos os processos formativos nos diferentes segmentos sociais.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 9.503, de 23 de setembro de 1997**. Institui o Código de Trânsito Brasileiro. Brasília: DF: Casa Civil, 1997. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9503.htm. Acesso em: 12 jul. 2024.

O documento institui o Código de Trânsito Brasileiro nas vias terrestres do território nacional.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 9.795, de 27 de abril de 1999**. Dispõe sobre a educação ambiental, institui a Política Nacional de Educação Ambiental e dá outras providências. Brasília: DF: Casa Civil, 1999 Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9795.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui a política nacional de educação ambiental, objetivando preservar, melhorar e recuperar a qualidade ambiental assegurando, no país, as condições necessárias para um desenvolvimento socioeconômico sustentável.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 10.639, de 9 de janeiro de 2003**. Altera a Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira" e dá outras providências. Brasília, DF: Casa Civil, 2003. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/l10.639.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento inclui no currículo oficial das redes de ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira".

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 10.741, de 1º de outubro de 2003**. Dispõe sobre o Estatuto do Idoso e dá outras providências. Brasília, DF: Casa Civil, 2003. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/L10.741compilado.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui o Estatuto do Idoso, regulando os direitos assegurados às pessoas com idade igual ou superior a 60 anos.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 11.340, de 7 de agosto de 2006**. Cria mecanismos para coibir a violência doméstica e familiar contra a mulher, nos termos do § 8º do art. 226 da Constituição Federal, da Convenção sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação contra as Mulheres e da Convenção Interamericana para Prevenir, Punir e Erradicar a Violência contra a Mulher; dispõe sobre a criação dos Juizados de Violência Doméstica e Familiar contra a Mulher; altera o Código de Processo Penal, o Código Penal e a Lei de Execução Penal e dá outras providências. Brasília, DF: Casa Civil, 2006. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2006/lei/l11340.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui a Lei Maria da Penha a fim de combater e coibir a violência contra a mulher no país.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 11.645, de 10 de março de 2008**. Altera a Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, modificada pela Lei n. 10.639, de 9 de janeiro de 2003, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da rede de ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira e Indígena". Brasília, DF: Casa Civil, 2008. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2008/lei/l11645.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento acrescenta à Lei nº 10.639 a obrigatoriedade de se estudar a história e a cultura indígena e afro-brasileira nos estabelecimentos de ensino fundamental e médio.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 12.288, de 20 de julho de 2010**. Institui o Estatuto da Igualdade Racial. Brasília, DF: Casa Civil, 2010. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2010/lei/l12288.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento estabelece a obrigatoriedade do estudo da história geral da África e da população negra no Brasil, observado o disposto na Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 12.852, de 5 de agosto de 2013**. Dispõe sobre o Estatuto da Juventude e dá outras providências. Brasília, DF: Presidência da República, 2013. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/CCIVIL_03/_Ato2011-2014/2013/Lei/L12852.htm. Acesso em: 14 abr. 2024.

O estatuto define os direitos dos jovens entre 15 e 29 anos e determina as diretrizes para as políticas públicas voltadas para esse grupo, com o objetivo de garantir o desenvolvimento integral dos jovens e sua participação ativa na sociedade.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 13.146, de 6 de julho de 2015**. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Brasília, DF: Casa Civil, 2015. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13146.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui o Estatuto da Pessoa com Deficiência, objetivando assegurar e promover, em condições de igualdade, o exercício dos direitos e das liberdades fundamentais por pessoa com deficiência, visando à sua inclusão social e à sua cidadania.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Altera a Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e as bases da educação nacional, e a Lei n. 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho – CLT, aprovada pelo Decreto-Lei n. 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei n. 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei n. 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Brasília, DF: Casa Civil, 2017. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

Documento que reorganiza o Ensino Médio substituindo a legislação vigente até então em todo o país.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 14.533 de 11 de janeiro de 2023**. Institui a Política Nacional de Educação Digital e altera a Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a Lei n. 9.448, de 14 de março de 1997, a Lei n. 10.260, de 12 de julho de 2001, e a Lei n. 10.753, de 30 de outubro de 2003. Brasília, DF: Casa Civil, 2023. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2023-2026/2023/Lei/L14533.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui a política nacional de educação digital visando incrementar os resultados das políticas públicas relacionadas ao acesso da população brasileira a recursos, ferramentas e práticas digitais, com prioridade para as populações mais vulneráveis.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CP n. 3, de 10 de março de 2004**. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana. Brasília, DF: CNE, 10 mar. 2004. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/cnecp_003.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento analisa e regulamenta a Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003, sobre as diretrizes e bases da educação nacional para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática “História e Cultura Afro-Brasileira”.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Parecer CNE/CEB n. 3, de 18 de fevereiro de 2008**. Reexame do Parecer CNE/CEB n. 23, de 12 de setembro de 2007. Brasília, DF: CNE/CEB, 18 fev. 2008. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/2008/pceb003_08.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento reexamina o parecer nº 23/2007 referente às orientações para o atendimento da educação no campo.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Parecer CNE/CEB n. 7, de 7 de abril de 2010**. Estabelece as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica. Brasília, DF: Ministério da Educação, 7 abr. 2010. Disponível em: https://prograd.ufu.br/sites/prograd.ufu.br/files/media/documento/parecer_cneceb_no_72010_aprovado_em_7_de_abril_de_2010.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento analisa as diretrizes curriculares nacionais gerais para a Educação Básica em todo o país.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Parecer CNE/CEB n. 36, de 4 de dezembro de 2001**. Dispõe sobre as diretrizes operacionais para a Educação Básica nas escolas do campo. Brasília, DF: CNE/CEB, 4 dez. 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/EducCampo01.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento analisa as diretrizes operacionais para a Educação Básica para as escolas do campo.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução CNE/CEB n. 1, de 4 de outubro de 2022**. Estabelece as normas sobre computação na Educação Básica – complemento à BNCC. Brasília, DF: CNE/ CEB, 4 out. 2022.

O documento é um complemento à BNCC e fundamenta as normas e os usos da tecnologia e da inclusão digital aos estudantes da Educação Infantil ao Ensino Médio.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução CNE/CEB n. 2, de 28 de abril de 2008**. Estabelece diretrizes complementares, normas e princípios para o desenvolvimento de políticas públicas de atendimento da Educação Básica do campo. Brasília, DF: CNE/ CEB, 28 abr. 2008. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/resolucao_2.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento estabelece as diretrizes complementares, as normas e os princípios para o desenvolvimento de políticas públicas de atendimento da Educação Básica do campo.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução n. 2, de 15 de junho de 2012**. Estabelece as Diretrizes Curriculares para a Educação Ambiental. Brasília, DF: CNE/CEB, 15 jun. 2012. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rcp002_12.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento estabelece as diretrizes curriculares nacionais para a Educação Ambiental em vigor no país.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução n. 8, de 20 de novembro de 2012**. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Escolar Quilombola na Educação Básica. Brasília, DF: CNE/CEB, 20 nov. 2012. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/etnico_racial/pdf/resolucao_8_201112.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento define as diretrizes curriculares nacionais para a Educação Escolar Quilombola na educação básica do país.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, DF: Presidência da República, [2016]. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 4 out. 2017.

O documento é a lei fundamental e suprema do país, regendo e validando todas as normativas de ordem jurídica, política e social.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

Esse documento oficial do MEC apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – Computação**: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022.

O documento é um complemento à BNCC e contém as normas que orientam a implementação do uso da tecnologia em sala de aula, da Educação Infantil ao Ensino Médio, garantindo o direito de aprendizagem relacionado ao uso crítico das ferramentas digitais.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução CNE/CEB n. 1, de 3 de abril de 2002**. Inclui as diretrizes operacionais para a Educação Básica no campo. Brasília, DF: MEC, 3 abr. 2002.

O documento institui as diretrizes operacionais para a Educação Básica no campo.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução n. 1, de 17 de junho de 2004**. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana. Brasília, DF: CNE/ CEB, 2004. Disponível em: https://prograd.ufu.br/legislacoes/resolucao-cnecp-no-1-de-17-de-junho-de-2004#:~:text=Resumo%3A,Cultura%20Afro%2DBrasileira%20e%20Africana. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento fundamenta a Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003, que institui as diretrizes curriculares nacionais para a educação das relações étnico-raciais e para o ensino de História e Cultura Afro-brasileira e Africana nas escolas do país.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução n. 4, de 13 de julho de 2010**. Estabelece as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica. Brasília, DF: MEC, 13 jul. 2010. Disponível em: https://prograd.ufu.br/sites/prograd.ufu.br/files/media/documento/resolucao_cneceb_no_4_de_13_de_julho_de_2010.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento define as diretrizes curriculares nacionais gerais para a Educação Básica para o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC: SEB: Dicei, 2013. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/mod/folder/view.php?id=3934461. Acesso em: 25 ago. 2024.

Esse documento do Ministério da Educação define as normas obrigatórias para a implementação do currículo da Educação Básica no país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a educação das relações étnico-raciais e para o ensino de História e Cultura Afro-brasileira e Africana**. Brasília, DF: MEC, 2004. Disponível em: https://media.ceert.org.br/portal-4/pdf/diretrizes.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento traz informações, marcos legais das diretrizes curriculares para a educação das relações étnico-raciais e para o ensino da História e da Cultura Afro-brasileira e Africana, ampliando o debate sobre o tema no país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BRASIL. Ministério das Relações Exteriores. **Transformando nosso mundo**: a agenda 2030 para o desenvolvimento sustentável. Brasília, DF: Governo Federal: ONU Brasil, 2016. Disponível em: https://www.mds.gov.br/webarquivos/publicacao/Brasil_Amigo_Pesso_Idosa/Agenda2030.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

A publicação traz informações sobre a Agenda 2030, a Declaração dos Objetivos Sustentáveis pela ONU, os 17 objetivos do desenvolvimento sustentável, os meios de implementação bem como seu acompanhamento.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília, DF: Ministério da Saúde/Secretaria de Atenção à Saúde/Departamento de Atenção Básica, 2014. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento apresenta as primeiras diretrizes alimentares oficiais para a população brasileira com o objetivo de promover a saúde e a boa alimentação, combatendo a desnutrição, prevenindo a obesidade, o diabetes, o AVC, o infarto e o câncer.

BUCK INSTITUTE FOR EDUCATION. **Aprendizagem baseada em projetos**: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

A obra descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos com ferramentas e recursos de auxílio a sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. **Gestão de EAD no ensino híbrido**: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Presidente Prudente: Centro Universitário Toledo Prudente, 2017. Disponível em: https://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O autor aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.

CARRANO, P.; DAYRELL, J. (org.). **Formação de professores do Ensino Médio**: o jovem como sujeito do Ensino Médio. Etapa I – caderno II. Curitiba: UFPR: Setor de Educação, 2013. Disponível em: https://observatorioensinomedio.wordpress.com/wp-content/uploads/2014/03/web-caderno-2.pdf. Acesso em: 13 set. 2024.

A coleção tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que pretendem facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. **Planejando o trabalho em grupo**: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em pesquisa e experiência docente, o livro traz atualizações importantes sobre a aplicação com sucesso da aprendizagem cooperativa, a fim de construir salas de aula equitativas. O livro inclui as mais recentes pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando a contribuição do trabalho em equipe para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e a organização das salas de aula pelos professores para que todos participem ativamente.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da Matemática e de seu ensino, bem como as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatematica.

DAYRELL J. (org.). **Por uma pedagogia das juventudes**: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária dedicado a construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de processos educativos efetivamente dialógicos, baseados em encontros inter e entre gerações.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. **Revista Thelma**, Pelotas, v. 14, n. 1, p. 268-288, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. As autoras realizam um estudo bibliográfico das principais teorias de aprendizagem, como a interação social de Vygotsky, a experiência de Dewey e a aprendizagem significativa de Ausubel.

EDUCAÇÃO para a cidadania global: preparando estudantes para os desafios do século XXI. Brasília, DF: Unesco, 2015. Disponível em: https://www.mprj.mp.br/documents/20184/1330165/Educacao_para_a_cidadania_global_-_Unesco.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

A publicação traz os pressupostos teóricos e práticos para a aplicação da educação para a cidadania global (ECG): abordagens curriculares, uso de tecnologias da informação e comunicação, abordagens baseadas nos esportes e na arte, na comunidade e na formação de professores, e iniciativas lideradas por jovens.

FARIA FILHO, F. de M.; OLIVEIRA, R. A.; RODRIGUES, E. L. de P. **LGBTQIA+**: um guia educativo. 1. ed. ampl. Ceres, GO: IF Goiano, 2022.

Esse guia educativo aborda de maneira acessível e informativa as questões relacionadas à diversidade de gênero e sexualidade.

FERRARI, A. C.; MACHADO, D; OCHS, M. **Guia da educação midiática**. São Paulo: Instituto Palavra Aberta, 2020. Disponível em: https://educamidia.org.br/api/wp-content/uploads/2021/03/Guia-da-Educac%CC%A7a%CC%83o-Midia%CC%81tica-Single.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O livro traz dicas e exemplos que ajudam o professor a incorporar a educação midiática em sua prática diária.

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In*: **Juventudes e tecnologias**: sociabilidades e aprendizagens. SOUSA, C. A. de M. *et al*. (org.). Brasília, DF: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nosso cotidiano. Adolescentes e jovens usam em seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O artigo apresenta estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Bolema**, v. 19, n. 26, p. 77-102, 2006. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1853. Acesso em: 25 ago. 2024.

O artigo aborda o papel dos registros de representações semióticas para a aprendizagem matemática com base nos estudos de Raymond Duval.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. **Nova Escola**, 14 ago. 2018. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula. Acesso em: 30 set. 2024.

Ao reconhecer que os professores têm receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). **Projetos pedagógicos no contexto escolar**: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade escolar e seus projetos, propondo caminhos para planejar e desenvolver processos de ensino. Discute práticas, sugere formas de implementá-las e incentiva sua realização nas escolas.

HORN, M. B.; STAKER, H. Blended: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Os autores apresentam um guia para implementar o ensino híbrido, combinando ensino presencial e virtual, centrado no estudante. O ensino híbrido é uma tendência global na educação, oferecendo um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). **Panorama do Censo 2022**. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/?utm_source=ibge&utm_medium=home&utm_campaign=portal. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento disponibiliza indicadores e mapas referentes aos resultados do Censo de 2022 nas diferentes áreas.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). **Pesquisa nacional por amostra de domicílios contínua**. Rio de Janeiro: IBGE, 2015. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9127-pesquisa-nacional-por-amostra-de-domicilios.html. Acesso em: 25 ago. 2024.

No *link* é possível encontrar tabelas e gráficos relativos às características do mercado de trabalho relativos às pessoas de 15 anos ou mais de idade.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). Pessoas com deficiência tem menor acesso à educação, ao trabalho e à renda. **Agência IBGE Notícias**, Rio de Janeiro, 7 jul. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37317-pessoas-com-deficiencia-tem-menor-acesso-a-educacao-ao-trabalho-e-a-renda. Acesso em: 25 ago. 2024.

No *link* é possível encontrar dados, tabulações, gráficos e análises relativos às pessoas com deficiência.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANISIO TEIXEIRA (INEP). **Censo de Educação Básica 2023**. Brasília, DF: Inep, 22 fev. 2024. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/censo-escolar/mec-e-inep-divulgam-resultados-do-censo-escolar-2023. Acesso em: 25 ago. 2024.

O *link* disponibiliza os resultados e comentários do Censo Escolar de 2023.

INSTITUTO PALAVRA ABERTA. **Educação midiática em rede**: guia prático para gestores. Disponível em: https://educamidia.org.br/api/wp-content/uploads/2022/01/guia-do-gestor-digital.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O guia traz sugestões e ideias para a formação do professor com base em quatro passos: sensibilizar, engajar, formar e sustentar, dando sentido ao uso da tecnologia e à fluência digital e midiática dos estudantes.

INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL COMO FERRAMENTA PARA A EDUCAÇÃO. **Somos Conexão**, São Paulo, n. 10, p. 18-30, 2024.

A matéria discute os desafios e as oportunidades que a inteligência artificial oferece tanto no desenvolvimento de estratégias personalizadas de ensino como na otimização do tempo para o trabalho do professor.

KRAUSE, M.; ANNUNCIATO, P. Um jogo para semear, colher e contar. **Nova Escola**, São Paulo, 23 nov. 2017. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/9104/um-jogo-para-semear-colher-e-contar. Acesso em: 25 ago. 2024.

O artigo traz explicações sobre o jogo africano mancala e suas possibilidades de uso na sala de aula com foco na Matemática.

LGBTQIAP+. *In*: **Dicionário LGBTQIAP+**: descomplicando a diversidade. Disponível em: https://www.ongarco.org/post/dicion%C3%A1rio-lgbtqiap-descomplicando-a-diversidade. Acesso em 25 ago. 2024.

O dicionário traz a diferença entre identidade de gênero e orientação sexual bem como o significado de cada letra da sigla LGBTQIAP+.

LIBANEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? **Revista Educativa**, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características sobre a juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Destaca ainda a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e estudantes e nos modos de aprender.

LODI, L. H.; ARAÚJO, U. F. Escola, democracia e cidadania. *In*: **Ética e cidadania**: construindo valores na escola e na sociedade. Secretaria de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Etica/liv_etic_cidad.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

O texto de Lucia Helena Lodi e de Ulisses Araújo contribui para a construção de uma escola baseada em participação democrática e desenvolvimento de uma cidadania consciente e crítica. Os autores propõem o programa Ética e Cidadania e o Fórum Escolar de Ética e da Cidadania.

LUCHESI, B.M.; LARA, E.M.O.; SANTOS, M.A. **Guia Prático de introdução às metodologias ativas**. Campo Grande: Ed. da UFMS, 2022.

O *e-book* traz informações básicas e essenciais das metodologias ativas de aprendizagem.

LUVISON, C. C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). **Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar a influência dessas relações na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, D.; TOBIAS, E. **5 contribuições da educação midiática à educação antirracista**. São Paulo: Instituto Palavra Aberta, 2022. Disponível em: https://educamidia.org.br/api/wp-content/uploads/2023/07/BIBLIOTECA_EM-e-educac%CC%A7a%CC%83o-antirracista_ISBN.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O guia aponta as cinco contribuições para a educação antirracista com base na educação midiática: reconhecimento de preconceitos e estereótipos, reflexão sobre o discurso de ódio e suas consequências, reconhecimento de preconceito algorítmico, engajamento e participação, e ocupação de espaços. Apresenta também cinco propostas de atividades para serem aplicadas pelo professor em sala de aula.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. **Revista da Faculdade de Educação**, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989.

O artigo analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MACIEL, Ana Cecília de Medeiros; SOUZA, Liliane Ferreira Neves Inglez de; DANTAS, Marilda Aparecida. Estratégias de estudo e aprendizagem utilizadas pelos estudantes do Ensino Médio. **Psicol. Ensino & Form.**, Brasília, DF, v. 6, n. 1, p. 14-32, 2015.

O artigo apresenta o estudo realizado com 534 estudantes do Ensino Médio do estado de São Paulo com o objetivo de identificar e analisar as estratégias de estudos e aprendizagem utilizadas por eles.

MANZINI, E. J. (org.). **Inclusão do estudante com deficiência na escola**: os desafios continuam. Marília: ABPEE/ Fapesp, 2007.

As pesquisas apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é ainda um tema polêmico e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola ainda carece de prática pedagógica para efetivar a inclusão. A obra pode orientar professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. **Metodologias ativas de bolso**: como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado, por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

MOREIRA, M. A. **Mapas conceituais e aprendizagem significativa**. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/mapasport.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O artigo traz o conceito e a fundamentação teórica dos mapas conceituais, além de fornecer exemplos na área de Ciências.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). **Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reúnem subsídios teóricos e práticos relativos as interfaces entre a educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

O FUTURO do mundo do trabalho para as juventudes brasileiras. **Fundação Itaú**, São Paulo, 27 set. 2023. Disponível em: https://www.fundacaoitau.org.br/observatorio/o-futuro-do-mundo-do-trabalho-para-juventudes-brasileiras. Acesso em: 25 ago. 2024.

O estudo traça um perfil dos jovens de 14 a 29 anos – cerca de 24% da população brasileira – e apresenta os principais desafios e caminhos para a inserção produtiva dessa faixa etária.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. **Estratégias educativas para a prevenção da violência**. Tradução: Joaquim Ozorio. Brasília, DF: Unesco: UCB, 2002.

O livro permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando a melhoria da convivência.

PADIAL, K. Igualdade de gênero. **Nova Escola**, São Paulo, 10 dez. 2015. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/7889/igualdade-de-genero. Acesso em: 25 ago. 2024.

A reportagem busca refletir sobre as relações de gênero na escola com os diferentes segmentos nela existentes.

REDE INTERMUNICIPAL DE COOPERAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO – RICD. Agenda 2030. Disponível em: https://rumoa2030.pt/a-agenda-2030/. Acesso em: 25 ago. 2024.

O *site* traz informações sobre o cumprimento da Agenda 2030 e seus desdobramentos.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. **Violência na escola**: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep/Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

O livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas Leste e Sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência praticadas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SALAS, P. Questões de gênero: caminhos para abordar o assunto em sala de aula. **Nova Escola**, São Paulo, 7 abr. 2022. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/21183/questoes-de-genero-caminhos-para-abordar-o-assunto-em-sala-de-aula. Acesso em: 25 ago. 2024.

A reportagem aborda as questões de gênero debatidas na escola e como elas podem ser trabalhadas a fim de construir uma sociedade mais equânime.

SANTOS, T. **Metodologias ativas de ensino-aprendizagem**. (Mestrado profissional em Educação Profissional e Tecnológica) – Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Pernambuco, Olinda, 2019. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/565843. Acesso em: 25 ago. 2024.

A cartilha traz informações sobre as características das metodologias ativas e descreve algumas delas trazendo o passo a passo para a sua implementação prática.

SILVA, G. M. da (coord.). **Educação quilombola em números**. Projeto Quilombos e Educação, [*s. l.*], 2020. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/comissoes/comissoes-permanentes/ce/apresentacoes-em-eventos/apresentacoes-audiencias-2021/arquivos-2021/GivaniaSilva.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

A apresentação traz os resultados do Projeto Quilombos e Educação com os números referentes à educação quilombola no país.

SOLE, I. **Estratégias de leitura**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo da obra é ajudar educadores e profissionais a promoverem a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

STARIOLO, M. Levantamento quantitativo pioneiro na América Latina mapeia comunidade LGBT no Brasil. **Jornal da Unesp**, [*s. l.*], 24 out. 2022. Disponível em: https://jornal.unesp.br/2022/10/24/levantamento-quantitativo-pioneiro-na-america-latina-mapeia-comunidade-algbt-no-brasil/#:~:text=O%20percentual%20de%20brasileiros%20adultos,os%20dados%20populacionais%20do%20IBGE. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento traz dados sobre orientação sexual no Brasil, fazendo um mapeamento da comunidade *LGBT* e os diferentes tipos de violência sofrida por essa minoria.

Este artigo destaca a importância de apoiar a saúde mental da população LGBTQIAP+, afetada por estigmas e preconceitos. A organização defende ambientes inclusivos e políticas que combatam a discriminação, promovendo o acesso a cuidados de qualidade e a redução da marginalização.

UNESCO. **Violência escolar e bullying: relatório sobre a situação mundial**. Brasília, DF: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres *Ewha*, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como valorizar as iniciativas que abordam o problema.

UNICEF BRASIL. LGBTQIAP+ e saúde mental: acolhendo e lutando contra estigmas e preconceito. **Unicef Brasil**, Brasília, DF, 23 jun. 2023. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/blog/lgbtqiap-mais-e-saude-mental. Acesso em: 27 set. 2024.

Esse artigo destaca a importância de apoiar a saúde mental da população LGBTQIAP+, afetada por estigmas e preconceitos. A organização defende ambientes inclusivos e políticas que combatam a discriminação, promovendo o acesso a cuidados de qualidade e a redução da marginalização.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. **Gestão da sala de aula**: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

O livro é um guia para criar um ambiente de aprendizagem organizado e produtivo, com exemplos de professores de várias disciplinas. Oferece recomendações práticas e ajuda a construir boas relações com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711. Acesso em: 25 ago. 2024.

Nesse artigo, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental que todas as pessoas devem dominar para atuar na sociedade moderna.

PARTE ESPECÍFICA

A BNCC neste volume

O quadro a seguir mostra as competências gerais, específicas e as habilidades da BNCC contempladas neste volume.

Competências e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias contempladas neste volume

Capítulos/ seções	Competências gerais	Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias e habilidades
Avaliação diagnóstica 1	-	EM13MAT101 EM13MAT103 EM13MAT104 EM13MAT201 EM13MAT302 EM13MAT314 EM13MAT501
Capítulo 1 – Grandezas e medidas	1	Competência específica 1: EM13MAT103 Competência específica 2: EM13MAT201 Competência específica 3: EM13MAT307, EM13MAT313, EM13MAT314
Capítulo 2 – Conjuntos	1	Competência específica 1 Competência específica 3 Competência específica 4 Competência específica 5
Capítulo 3 – Funções	2	Competência específica 1: EM13MAT101 Competência específica 3: EM13MAT302 Competência específica 4: EM13MAT401, EM13MAT402, EM13MAT404 Competência específica 5: EM13MAT501
Capítulo 4 – Função afim	8	Competência específica 1: EM13MAT101 Competência específica 3: EM13MAT302, EM13MAT315

CONTINUA

CONTINUAÇÃO

Capítulos/ seções	Competências gerais	Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias e habilidades
Capítulo 4 – Função afim	8	Competência específica 4: EM13MAT401, EM13MAT404 Competência específica 5: EM13MAT501, EM13MAT509
Capítulo 5 – Função quadrática	2	Competência específica 1: EM13MAT101 Competência específica 3: EM13MAT302 Competência específica 4: EM13MAT402, EM13MAT404 Competência específica 5: EM13MAT502, EM13MAT503
Educação midiática – Fato ou *fake*?	2, 7, 10	-
Pesquisa e ação – Videodocumentário	2, 4, 5, 7, 9, 10	Competência específica 1: EM13MAT101, EM13MAT102, EM13MAT104 Competência específica 2 Competência específica 4
Avaliação diagnóstica 2	-	EM13MAT303 EM13MAT313 EM13MAT315 EM13MAT405
Capítulo 6 – Função exponencial	2, 5	EM13MAT101 Competência específica 3: EM13MAT304 Competência específica 4: EM13MAT404 Competência específica 5
Capítulo 7 – Função logarítmica	1, 5	Competência específica 3: EM13MAT305 Competência específica 4: EM13MAT403, EM13MAT404

CONTINUA

Capítulos/ seções	Competências gerais	Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias e habilidades
Capítulo 8 – Sequências	1	Competência específica 3: EM13MAT304, EM13MAT315 Competência específica 4: EM13MAT401 Competência específica 5: EM13MAT507, EM13MAT508
Capítulo 9 – Matemática Financeira	5	Competência específica 1: EM13MAT101, EM13MAT104 Competência específica 2: EM13MAT203 Competência específica 3: EM13MAT303, EM13MAT304, EM13MAT305 Competência específica 4: EM13MAT507, EM13MAT508
Capítulo 10 – Algoritmos e introdução à computação	1, 2, 4, 5	Competência específica 3: EM13MAT315 Competência específica 4: EM13MAT405
Educação midiática – O que há por trás dos dados?	2, 7	-
Pesquisa e ação – Telejornal	2, 3, 4, 5, 7, 9, 10	Competência específica 1: EM13MAT102, EM13MAT103 Competência específica 2: EM13MAT201 Competência específica 4: EM13MAT407
Prepare-se para o Enem e vestibulares	-	EM13MAT104 Competência específica 3: EM13MAT302, EM13MAT314 Competência específica 5: EM13MAT503, EM13MAT507, EM13MAT508

Os Temas Contemporâneos Transversais neste volume

Este volume aborda diferentes Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), ao explorar temas atuais e relevantes para a formação dos estudantes. Esses temas também contribuem para a integração entre diferentes áreas do conhecimento.

O quadro a seguir elenca os TCTs contemplados em cada capítulo e seção deste volume.

Temas Contemporâneos Transversais contemplados neste volume

Capítulos/seções	Temas Contemporâneos Transversais
Capítulo 1 – Grandezas e medidas	Ciência e Tecnologia, Educação Ambiental, Trabalho
Capítulo 2 – Conjuntos	Ciência e Tecnologia
Capítulo 3 – Funções	Educação Ambiental, Educação para o Consumo, Trabalho, Educação Fiscal, Educação Financeira
Capítulo 4 – Função afim	Ciência e Tecnologia, Trabalho, Educação Fiscal, Saúde
Capítulo 5 – Função quadrática	Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso; Diversidade Cultural; Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras
Educação midiática – Fato ou *fake*?	Vida Familiar e Social
Pesquisa e ação – Videodocumentário	Ciência e Tecnologia, Educação para o Trânsito
Capítulo 6 – Função exponencial	Ciência e Tecnologia
Capítulo 7 – Função logarítmica	Ciência e Tecnologia, Trabalho
Capítulo 8 – Sequências	Trabalho, Saúde, Diversidade Cultural
Capítulo 9 – Matemática Financeira	Educação para o Consumo, Trabalho, Educação Financeira, Diversidade Cultural, Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras
Capítulo 10 – Algoritmos e introdução à computação	Ciência e Tecnologia, Educação Ambiental, Educação para o Consumo, Educação Alimentar e Nutricional
Educação midiática – O que há por trás dos dados?	Saúde, Vida Familiar e Social
Pesquisa e ação – Telejornal	Educação Ambiental, Educação para o Consumo

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 1

Objetivos

- Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes.
- Preparar os estudantes para os conteúdos que serão estudados no 1º semestre.

Orientações didáticas

A proposta desta avaliação é que os estudantes realizem as atividades com base nos conhecimentos prévios.

O quadro a seguir relaciona as atividades às habilidades da BNCC voltadas para o Ensino Fundamental – Anos finais que os estudantes mobilizam durante a resolução das atividades e às habilidades do Ensino Médio que serão desenvolvidas ao longo do semestre.

Relação entre as habilidades do Ensino Fundamental – Anos finais desenvolvidas nas atividades e as habilidades do Ensino Médio

Atividades	Assuntos	Habilidades do Ensino Fundamental – Anos finais	Habilidades do Ensino Médio
1	Grandeza área	**(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.	EM13MAT103, EM13MAT201 e EM13MAT314
2	Grandeza volume	**(EF09MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.	EM13MAT103, EM13MAT201 e EM13MAT314
3	Grandeza tempo	**(EF06MA24)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.	EM13MAT103
4	Média	**(EF08MA25)** Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.	–
5	Múltiplos e divisores	**(EF07MA01)** Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.	–
6 e 7	Equação	**(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.	–
8 e 9	Grandezas diretamente proporcionais	**(EF09MA08)** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.	EM13MAT302 e EM13MAT501
10	Plano cartesiano	**(EF06MA16)** Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.	EM13MAT101 e EM13MAT501
11	Desigualdade	**(EF07MA10)** Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.	–
12	Reta numérica e intervalos	**(EF07MA10)** Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.	–
13	Equação do 2º grau	**(EF08MA09)** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.	EM13MAT302

Analisando as respostas do estudante às atividades, é possível avaliar seus conhecimentos prévios e identificar defasagens ou enganos cometidos. Isso pode ajudar a planejar o trabalho durante o semestre.

A **atividade 1** retoma o cálculo da medida de área de um retângulo e a conversão de uma medida de área em metro quadrado para quilômetro quadrado. Se o estudante obteve a **alternativa b**, tentou calcular a medida de área do retângulo dividindo 300 por 500. Se obteve a **alternativa c**, calculou a medida de área do retângulo, mas dividiu essa medida apenas por 1.000, como se convertesse metro para quilômetro. Se escolheu a **alternativa d**, tentou calcular a medida de área do retângulo adicionando 500 e 300. E, se optou pela **alternativa e**, calculou a medida de área do retângulo, mas não converteu a unidade de medida para quilômetro quadrado.

A **atividade 2** relembra o cálculo da medida de volume de um bloco retangular, sendo necessária a conversão inicial de medidas de comprimento em centímetro para metro. Se o estudante considerou a **alternativa b** como correta, provavelmente adicionou as medidas das dimensões, em vez de multiplicá-las. Se indicou a **alternativa c**, equivocou-se na conversão de 50 cm para metro, considerando 5 m. Se respondeu a **alternativa d**, multiplicou as medidas das dimensões sem realizar a conversão. Se escolheu a **alternativa e**, converteu 2 m para 200 cm, mas não notou que a unidade de medida de volume deveria ser metro cúbico, em vez de centímetro cúbico.

A **atividade 3** trata de medidas de tempo e da conversão entre dias, horas e minutos. Se o estudante obteve a **alternativa a**, ele não realizou a conversão de horas para minutos. Se considerou as **alternativas b** ou **e**, não comparou a medida do tempo de viagem de barco com a da viagem de avião. Se respondeu que a **alternativa c** estava certa, considerou 60 horas no dia e deu o resultado em horas.

A **atividade 4** recorda média aritmética. Caso o estudante tenha indicado a **alternativa a** como resposta, deve ter considerado apenas uma ocorrência das notas que se repetem (10 e 9). Se tiver indicado as **alternativas c** ou **e**, deve ter levado em conta um dos valores com maior ocorrência. Se tiver respondido a **alternativa d**, deve ter considerado a média dos valores que se repetem.

Na **atividade 5**, o estudante precisa analisar afirmações envolvendo os termos "múltiplo", "divisor" e "número primo". Se considerou as afirmações das **alternativas a** ou **b** verdadeiras, confundiu os conceitos "múltiplo" e "divisor". Se considerou as afirmações das **alternativas c** ou **d** verdadeiras, identificou algum divisor a menos ou a mais, respectivamente, ou não entendeu o conceito de "número primo".

Na **atividade 6**, se o estudante identificou a **alternativa a** como certa, provavelmente reconheceu apenas a igualdade e não se atentou para a necessidade de uma equação apresentar incógnitas. Nesse caso, sugere-se mostrar que a **alternativa a** apresenta uma igualdade de expressões numéricas. Se respondeu a **alternativa b**, confundiu o conceito de equação com o de expressão numérica. Se indicou a **alternativa c**, considerou a necessidade de a equação apresentar incógnita, mas não se lembrou de que uma equação deve apresentar uma igualdade de duas expressões. Assim, confundiu os conceitos de equação e inequação. Se respondeu **alternativa e**, confundiu o conceito de equação com o de expressão algébrica.

Na **atividade 7**, se o estudante considerou certa a **alternativa a**, provavelmente errou na aplicação do princípio aditivo, adicionando $4x$ ao primeiro membro em vez de $(-4x)$. Se respondeu **alternativa b**, provavelmente errou na aplicação do princípio aditivo, adicionando $4x$ ao primeiro membro e 2 ao segundo membro em vez de $(-4x)$ e (-2), respectivamente. Se respondeu **alternativa d**, provavelmente errou na aplicação do princípio aditivo, adicionando 2 ao segundo membro em vez de (-2). Se respondeu **alternativa e**, provavelmente errou na aplicação do princípio aditivo, adicionando $4x$ ao primeiro membro e 2 ao segundo membro em vez de $(-4x)$ e (-2), respectivamente, e se enganou na aplicação do princípio multiplicativo, adicionando (-12) ao segundo membro em vez de multiplicá-lo por $\frac{1}{12}$. Assim, sugere-se reforçar os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade.

A **atividade 8** trata da relação entre as medidas de grandezas diretamente proporcionais. Se o estudante considerou certa a **alternativa a**, deve ter cometido um engano ao efetuar a divisão. Se considerou as **alternativas b** ou **e**, provavelmente inverteu as medidas a e b. Se obteve a **alternativa d**, não notou a falta da variável b no segundo termo da igualdade.

Na **atividade 9**, temos outro problema sobre grandezas diretamente proporcionais. Caso o estudante identifique a **alternativa a** como certa, deve ter considerado as grandezas inversamente proporcionais. Caso obtenha as **alternativas b** ou **e**, provavelmente não entendeu muito bem o contexto do problema e apenas adicionou ou subtraiu as medidas apresentadas numericamente. Caso indique a **alternativa c**, deve ter confundido ao efetuar a operação, dividindo as medidas em vez de multiplicá-las.

Na **atividade 10**, o estudante precisa identificar as coordenadas dos pontos apresentados no plano cartesiano. Se considerou as **alternativas a** ou **d** corretas, ele confundiu a ordem das coordenadas, utilizando o valor do eixo y na primeira coordenada do par ordenado e o valor do eixo x na segunda coordenada. Se considerou a **alternativa c**, utilizou o valor do eixo x nas duas coordenadas do par ordenado, em vez de zero na segunda coordenada. Se considerou a **alternativa e**, obteve as coordenadas do ponto D.

Na **atividade 11**, se o estudante considerou correta a **alternativa a**, comparou os valores absolutos dos números. Se indicou as **alternativas c**, **d** ou **e**, provavelmente tem dificuldade de comparar números racionais. Nesse caso, sugira a determinação de frações equivalentes de mesmo denominador para comparar os numeradores. Assim:

- como $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$ e $\frac{5}{6} < \frac{10}{6}$, então $\frac{5}{6} < \frac{5}{3}$;
- como $\frac{11}{3} = \frac{55}{15}$, $\frac{12}{5} = \frac{36}{15}$ e $\frac{55}{15} > \frac{36}{15}$, então $\frac{11}{3} > \frac{12}{5}$;
- como $2 = \frac{4}{2}$ e $\frac{4}{2} < \frac{5}{2}$, então $2 < \frac{5}{2}$.

Na **atividade 12**, se o estudante indicou a **alternativa a** como certa, não se atentou que -1 está à direta de -2 na reta numérica, ou seja, $-1 > -2$. Se respondeu **alternativa b**, não se atentou ao fato de que os elementos do conjunto B devem ser maiores que zero, e não maiores ou iguais a zero. Se respondeu **alternativa c**, não se atentou ao fato de 2 ser menor que 3. Se respondeu **alternativa d**, não considerou que $\frac{12}{2} = 6$ e, portanto, maior que 4.

Na **atividade 13**, se o estudante indicou como certas as **alternativas b** ou **d**, ao fatorar a equação e fazer que $x + 10 = 0$, não resolveu corretamente essa equação e considerou que $x = 10$. Se respondeu **alternativas c** ou **e**, não se atentou que essa equação tem duas raízes, obtendo apenas uma das raízes.

CAPÍTULO 1 Grandezas e medidas

Objetivos

- Compreender e distinguir os conceitos de grandeza e medida.
- Reconhecer algarismos significativos em um resultado de medição.
- Aplicar notação científica e arredondamento em medidas.
- Reconhecer, relacionar e aplicar grandezas, unidades e prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI) e fora dele.
- Empregar corretamente unidades da informática.

Justificativa dos objetivos

Quantificar é uma preocupação humana desde a Antiguidade. Saber se algum objeto cabe em determinado lugar, calcular medidas de distância, pesar objetos, determinar a quantidade de líquidos ou a quantidade de horas gastas em uma tarefa são exemplos de quantificação. Grandezas e medidas são usadas em diversas atividades cotidianas e compreendê-las auxilia no desenvolvimento do pensamento, pois envolve interpretação de diferentes escalas, unidades e relações matemáticas. Muitas profissões, desde a engenharia até a culinária, por exemplo, necessitam do conhecimento de grandezas e medidas para determinar cálculos com precisão. Desse modo, o estudo deste capítulo é de grande relevância para a compreensão desses conceitos.

BNCC

- **Competência geral da BNCC: 1**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  Competência específica 1: **EM13MAT103**.
  Competência específica 2: **EM13MAT201**.
  Competência específica 3: **EM13MAT307**, **EM13MAT313** e **EM13MAT314**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  Competência específica 2[1]: **EM13CNT202**[2] e **EM13CNT203**[3].
  Competência específica 3[4].
  Os textos na íntegra da competêncial geral, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Ciência e Tecnologia
- Educação Ambiental
- Trabalho

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

ODS 4 ODS 7 ODS 12

Orientações didáticas

Neste capítulo, optamos por conceituar e relacionar grandezas e medidas e por ampliar, em relação ao Ensino Fundamental, os exemplos de medidas e de situações em que elas são aplicadas. Convém incentivar a pesquisa desse tema nos campos de atividade humana e em outras áreas do conhecimento. A diversidade de grandezas e suas unidades de medida é surpreendente e significativa para o estudante.

A **competência específica 3** é favorecida ao longo do capítulo, uma vez que os estudantes utilizarão estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas.

O texto apresentado na abertura instiga o estudante a associar o aumento da população com a diminuição dos recursos naturais, sugerindo o uso de energias renováveis e o reúso de água, como nos projetos de residências, abordando o **TCT Educação Ambiental** e os **ODS 7: Energia limpa e acessível** e **ODS 12: Consumo e produção responsáveis**.

Grandeza × medida

Neste tópico, é discutida a diferença entre grandeza e medidas de grandeza, seguida de atividades que trabalham situações com as grandezas perímetro, área e volume, favorecendo o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT201** e **EM13MAT307** e das **competências específicas 2** e **3**.

As **atividades 1** e **2** exploram a diferença entre grandeza e medida de uma grandeza. Para complementar o conceito de medida de área, leve folhas de jornal para a aula e oriente os estudantes a considerar que cada folha seja uma unidade de medida. Ao final, sugira-lhes que identifiquem a medida da área de alguma superfície utilizando a folha como unidade de medida.

No subtópico *Medindo com instrumentos*, reforce que toda medida é acompanhada de erro, mas que há instrumentos, como o paquímetro que dão resultados mais precisos. Esse processo de medição será explorado na **atividade resolvida R1**.

1 **(Competência específica 2)** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

2 **(EM13CNT202)** Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

3 **(EM13CNT203)** Avaliar e prever efeitos de intervenções nos ecossistemas, e seus impactos nos seres vivos e no corpo humano, com base nos mecanismos de manutenção da vida, nos ciclos da matéria e nas transformações e transferências de energia, utilizando representações e simulações sobre tais fatores, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

4 **(Competência específica 3)** Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

Em seguida, peça aos estudantes que pesquisem a história do paquímetro, e de outros instrumentos de medida de precisão, como o micrômetro.

Na **atividade 4**, comente com os estudantes que, ao analisar qual instrumento é mais adequado para medir determinada grandeza, é importante considerar dois aspectos: o tipo de grandeza a ser medida e a precisão necessária, que depende da graduação do instrumento. Comente com eles que, para medir comprimento, por exemplo, uma régua pode ser suficiente em casos em que a precisão não é tão crítica, como em medidas aproximadas. Por outro lado, para medidas mais exatas, como em projetos de engenharia, um paquímetro seria mais apropriado, devido à menor graduação, obtendo maior precisão. A escolha do instrumento de medida certo garante resultados mais precisos e confiáveis, de acordo com o nível de exatidão necessário para a tarefa.

Em *Algarismos significativos*, são apresentadas as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos para que os estudantes mostrem se compreenderam esses conceitos na resolução da **atividade 5**, desenvolvendo a habilidade **EM13MAT313**.

Após analisar o conceito de arredondamento e a tabela apresentada, estabeleça uma ligação com o gráfico disponível em: https://odsbrasil.gov.br/objetivo4/indicador412 (acesso em: 23 set. 2024), que apresenta as taxas de conclusão do Ensino Fundamental e Médio de 2016 a 2023. Isso ajudará na abordagem do **ODS 4: Educação de qualidade**, que recomenda que, até 2030, seja garantido a todas as meninas e meninos o ensino primário e secundário gratuito, equitativo e de qualidade.

Nas **atividades 6** a **8**, os estudantes aplicam o conceito de arredondamento. Na **atividade 7**, discuta sobre estratégias utilizadas para realizar o cálculo mental. Uma delas é a decomposição de números.

Ao abordar o conceito de notação científica, apresente exemplos com números menores e que sejam múltiplos de 10. Aproveite este momento para retomar o conceito de algarismos significativos, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT313**.

Na **atividade 11**, se achar necessário, construa um quadro de ordens na lousa até a centena de quintilhão.

Comente que a resolução de um cubo mágico pode ser feita com o auxílio de um computador. Para saber mais, leia a monografia disponível em: https://www.ime.usp.br/~cef/mac499-11/monografias/walter/monografia.pdf (acesso em: 23 set. 2024).

Sistema Internacional de Unidades

Neste tópico serão trabalhadas as unidades de base do SI e seus derivados, com a discussão da importância de estabelecer padrões, comparando com os sistemas de unidades de medidas anteriores. Ao apresentar o desenvolvimento histórico da definição das unidades de base do SI e os prefixos delas, pode ser necessário retomar o conceito de notação científica.

Assim, este tópico visa contemplar a **competência geral 1**, pois valoriza e emprega conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, a fim de entender e explicar a realidade. Também favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103**, pois os estudantes deverão interpretar e compreender textos que empregam unidades de medidas de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas pelo SI.

Comente as principais unidades de base do SI e os respectivos símbolos utilizados. Para ampliar os conhecimentos sobre o desenvolvimento histórico dessas unidades, em http://www.inmetro.gov.br/metcientifica/Redefinicao_do_SI.asp (acesso em: 23 set. 2024), é possível verificar como quilograma, ampere, kelvin e mol, entre outras unidades, foram redefinidas a partir de 2019.

Em seguida, apresente os principais prefixos do SI relacionando-os com os respectivos símbolos e fatores.

Como grande parte dos prefixos também é utilizada em outras áreas, esse tópico permite ação interdisciplinar com a **área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. A habilidade **EM13CNT202** pode ser trabalhada ao analisar a imagem de uma bactéria.

Explique os exemplos apresentados no material para ajudar na compreensão da transformação de unidades. Depois, trabalhe com o texto *A hiperveloz fotobiologia estrutural*, que possibilita a escrita de medidas em notação científica usando prefixos do SI, além de propor uma ação interdisciplinar com a **área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, pois é favorecido o desenvolvimento parcial da habilidade **EM13CNT203**. Os estudantes poderão analisar um esquema da liberação e da transferência de prótons pela bacteriorrodopsina, o que explica a energia obtida pelas plantas na fotossíntese. Essa relação permite abordar o **TCT Ciência e Tecnologia**. Além disso, o tópico favorece o desenvolvimento da **competência específica 1** e da habilidade **EM13MAT103**, pois os estudantes deverão interpretar e compreender um texto divulgado pela mídia que emprega unidade de medida.

Na **atividade 12**, para converter nanômetro em micrômetro, se necessário, relembre que 1 micrômetro equivale a 1.000 nanômetros. Então, para converter 200.000 nanômetros em micrômetros, dividimos esse valor por 1.000. Assim, o diâmetro da bactéria mede 200 micrômetros.

No **item a** da **atividade 13**, é preciso obter o produto entre $6{,}5 \cdot 10^9$ e $2 \cdot 10^{30}$ e apresentar o resultado em notação científica. No **item b**, é preciso converter a unidade de medida; se necessário, os estudantes podem consultar o quadro apresentado em *Prefixos*. É importante pedir atenção com as unidades nesse item, pois a medida de massa calculada no **item a** está em quilograma, enquanto no quadro é apresentado o fator com relação ao grama.

No subtópico *Unidades derivadas do SI,* comente que as unidades derivadas do SI são obtidas pela multiplicação ou pela divisão das unidades de base. Em seguida, oriente os estudantes a resolver as **atividades 14** a **18** em duplas. Ao trabalharem em duplas, eles se deparam com a oportunidade de discutir diferentes abordagens, expondo os pensamentos e explicando suas ideias. Desse modo, constroem o conhecimento juntos.

As atividades propostas favorecem o desenvolvimento da **competência específica 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, pois os estudantes devem investigar situações-problema e aplicar o conhecimento científico e tecnológico, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, a fim de oferecer soluções para tais demandas. Além disso, visam ao desenvolvimento da habilidade **EM13MAT314**, pois os estudantes deverão resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas cujas medidas são determinadas pela razão ou pelo produto de medidas de outras grandezas.

Além das unidades do SI

Neste tópico, os estudantes vão aprender algumas unidades fora do SI muito utilizadas. Favorece-se, assim, o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT313**, pois os estudantes deverão empregar a notação científica na resolução de problemas que envolvem unidades de medida específicas fora do SI.

Faça a **atividade resolvida R2** na lousa, que justifica a regra prática utilizada para transformar uma medida de velocidade em metro por segundo em quilômetro por hora. A **atividade 19** aprofunda a conversão de medidas de velocidade entre essas unidades.

A **atividade 20** trabalha com a fórmula que relaciona as unidades de temperatura em graus Celsius (°C) e Kelvin (K). Comente que a unidade Kelvin corresponde à unidade de medida de temperatura do SI e que a unidade grau Celsius corresponde à unidade de medida que está fora do SI.

Em seguida, apresente as unidades de armazenamento de dados da informática, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103**, pois os estudantes deverão compreender textos que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e conversões entre elas. Possíveis dificuldades da turma podem estar relacionadas à operação de potências, além dos prefixos estudados anteriormente. Se necessário, retome esses conceitos.

As **atividades 21** a **23** exploram conceitos relacionados às unidades de armazenamento de dados, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103**, pois os estudantes deverão compreender textos que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e conversões entre elas.

Trabalho e juventudes – *Chef* de cozinha

Objetivo

Compreender o que faz um *chef* de cozinha.

Orientações didáticas

O texto informa as características principais para se tornar *chef* de cozinha. Essa profissão está em crescimento e tem aberto espaço para pequenos empreendedores.

Ao tratar desse ofício, aborda-se o **TCT Trabalho**. Também é possível promover o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT201** ao citar exemplos de *chefs* que elaboram cardápios mais saudáveis de escolas públicas. Nessa elaboração de cardápios, é necessário aplicar conceitos matemáticos no planejamento, promovendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT203** e, consequentemente, da **competência específica 2**.

Explore a seção por meio da leitura coletiva. Depois, reserve um tempo para que os estudantes manifestem suas impressões. Pergunte a eles quais habilidades são necessárias a alguém que quer se tornar *chef* de cozinha. Criatividade, paciência, organização, gestão, trabalho em equipe e resiliência são algumas delas.

Solicite aos estudantes que respondam à **atividade 1**. Como pontos positivos estão o fato de ser uma profissão em alta e ter um mercado de trabalho abrangente. Como pontos negativos estão a rotina de trabalho intensa e a lida com reclamações de clientes.

Por meio da pesquisa que os estudantes realizarão na **atividade 2**, eles poderão concluir que o mercado de trabalho para um *chef* é abrangente e pode envolver locais como cozinhas de *resorts*, navios e *spas*.

O *chef* de cozinha lida diariamente com grandezas e instrumentos de medida. As **atividades 3** e **4** exploram esse fato.

As questões da **atividade 5** têm por objetivo despertar nos estudantes o espírito empreendedor.

Comente que a infraestrutura necessária para montar um *food truck* deve ser planejada para atender às necessidades de preparação e comercialização dos alimentos e às exigências da Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa), da Prefeitura, da Secretaria Nacional de Trânsito (Senatran), do Departamento Estadual de Trânsito (Detran) e do Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro).

Avalie se os estudantes consideram que o produto que se pretende comercializar deve estar relacionado ao perfil do público-alvo. Por fim, se possível, reserve uma aula para o compartilhamento de ideias.

Para finalizar o capítulo 1

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma forma diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões dadas. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que fizerem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 2 Conjuntos

Objetivos

- Perceber situações nas quais se aplica a noção de conjunto.
- Descrever conjuntos.
- Efetuar operações com conjuntos.
- Resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos.
- Identificar os conjuntos numéricos.
- Representar e operar com intervalos reais.

Justificativa dos objetivos

A ideia de agrupar algo é uma característica intrínseca do ser humano. A Matemática organiza esse pensamento com a identificação de conjuntos, suas notações e operações. A Teoria dos conjuntos auxilia na resolução e na modelagem de problemas matemáticos e cotidianos, além de ser uma ferramenta para o trabalho com funções.

BNCC

- **Competência geral da BNCC: 1**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 1.

  Competência específica 3.

  Competência específica 4 .

  Competência específica 5.
- **Competências específicas e habilidades da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**

  Competência específica 2[1]: **EM13CNT201**[2], **EM13CNT202**[3] e **EM13CNT208**[4].

Os textos na íntegra da competência geral e das competências específicas da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Tema Contemporâneo Transversal

Ciência e Tecnologia

Objetivo de Desenvolvimento Sustentável

ODS 2

Orientações didáticas

A abertura do capítulo permite o trabalho interdisciplinar com a **área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Se julgar pertinente, proponha ao professor da área um estudo a respeito do surgimento e da evolução da vida, da Terra e do Universo, levando em consideração as teorias científicas aceitas atualmente. Além disso, é possível propor uma discussão a respeito da história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes formas de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana. Esse trabalho favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT201** e **EM13CNT208**, além da **competência específica 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Comente com os estudantes que a determinação dos períodos da história em que os hominídeos apresentados viveram pode ser obtida pela análise dos esqueletos nos quais pode ser encontrado algum tipo de isótopo radioativo, como carbono-14. Aborda-se, assim, o **TCT Ciência e Tecnologia**.

As **competências específicas 1**, **3** e **4** são favorecidas em vários momentos deste capítulo, uma vez que os estudantes lançarão mão de estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas, empregando diferentes registros de representação.

No início deste capítulo, é abordada a noção de conjunto como ideia de agrupamento. Em seguida, são trabalhados os conjuntos numéricos e, por fim, é proposta a análise de intervalos reais, fundamentais para o estudo de funções.

Conjuntos

Inicialmente, verifique se os estudantes compreendem as relações de pertinência e de inclusão. Uma maneira de ajudá-los no entendimento dos conceitos é orientá-los a criar exemplos simples de cada conteúdo para, em seguida, explicá-los na lousa. Para isso, organize a turma em trios. Oriente cada estudante a criar um ou dois exemplos para que, em seguida, os demais integrantes do trio verifiquem-nos. Por fim, solicite aos trios que apresentem seus exemplos para o restante da turma. Ao mostrar as representações de conjuntos, certifique-se de que todos compreendam a representação que utiliza determinada propriedade. Se necessário, apresente outros exemplos como: $A = \{x \mid x$ é um número natural maior que 5 e menor que 10$\}$ para $A = \{6, 7, 8, 9\}$.

Depois, apresente a relação de pertinência. Em seguida, faça a **atividade resolvida R1** na lousa. Os estudantes podem respondê-la de forma oral. Escreva as respostas deles na lousa e oriente-os a registrá-las no caderno.

As **atividades 1** e **2** trabalham com o conceito de representação de conjunto. A **atividade 1** também permite aos estudantes identificar as informações relevantes para determinar os elementos de um conjunto, trabalhando com o pilar **abstração** do pensamento computacional. Na **atividade 2**, eles devem identificar um padrão a fim de determinar a propriedade que define os conjuntos, o que está alinhado com o pilar **reconhecimento de padrões** do pensamento computacional.

---

1 **(Competência específica 2)** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

2 **(EM13CNT201)** Analisar e discutir modelos, teorias e leis propostos em diferentes épocas e culturas para comparar distintas explicações sobre o surgimento e a evolução da Vida, da Terra e do Universo com as teorias científicas aceitas atualmente.

3 **(EM13CNT202)** Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

4 **(EM13CNT208)** Aplicar os princípios da evolução biológica para analisar a história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes formas de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana.

As **atividades 3** e **4** abordam a relação de pertinência dos conjuntos dos números ímpares, dos números primos e dos números naturais múltiplos de 3. Caso a turma apresente dificuldade, incentive os estudantes a citar alguns elementos de cada conjunto para que você registre-os na lousa.

Em seguida, trabalhe com o conceito de igualdade de conjunto e com as definições de conjuntos vazio, unitário e universo. Reforce que, para representar o conjunto vazio, não se utiliza o símbolo $\{\varnothing\}$. Explique que o símbolo $\{\varnothing\}$ corresponde a um conjunto unitário cujo elemento é o conjunto vazio.

Depois, na lousa, faça a **atividade resolvida R2**, que trabalha com a representação do conjunto solução de uma equação.

Em seguida, proponha aos estudantes que, em duplas, resolvam as **atividades 5** e **6**. Na **atividade 5**, os estudantes devem identificar conjuntos iguais. Na **atividade 6**, eles vão enumerar os elementos dos conjuntos.

Apresente o exemplo dado no subtópico *Subconjuntos de um conjunto* na lousa e comente a relação de inclusão. Explicite os termos utilizados em "*A* está contido em *B*" e "*B* contém *A*", bem como os símbolos correspondentes. Depois, proponha a seguinte discussão com o intuito de auxiliar os estudantes a compreender a **atividade resolvida R3**: "Se um número é múltiplo de 4, então ele é também múltiplo de 2? Justifique".

Espera-se que eles identifiquem que os múltiplos de 4 estão contidos nos múltiplos de 2. Se $B \subset A$, então os elementos de *B* têm as propriedades de *A*. Se julgar conveniente, explore a relação *se/então* nos casos em que há relação de inclusão entre conjuntos.

Depois, solucione a **atividade resolvida R3**, que trabalha com a relação de inclusão.

Em seguida, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas. As **atividades 7** a **11** abordam as relações de pertinência e inclusão.

Operações com conjuntos

Neste tópico, serão estudadas as operações com conjuntos. Apresente cada operação com os respectivos diagramas dados no material, destacando as partes do diagrama associadas à respectiva operação. Se achar necessário, apresente para os estudantes outros exemplos usando diferentes diagramas. Organize a turma em duplas e oriente os estudantes a construir exemplos para cada operação, para que, em seguida, o colega da dupla valide os registros realizados.

Se achar conveniente, formalize com os estudantes que:

- se $A \cap B = \varnothing$, isto é, se *A* e *B* são disjuntos, então: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, $n(A - B) = n(A)$ e $n(A \cap B) = 0$
- se $B \subset A$, então: $n(A \cap B) = n(B)$, $n(A \cup B) = n(A)$ e $n(A - B) = n(A) - n(B)$

Depois, recorra aos mesmos exemplos utilizados nas operações de conjuntos para calcular o número de elementos da união, da intersecção e da diferença de conjuntos.

Depois, faça a **atividade resolvida R4** na lousa, seguindo as indicações dos estudantes. O contexto da atividade, pesquisa de desenvolvimento de plantas para aumentar a produtividade e a produção, pode ser abordado com o objetivo de garantir sistemas sustentáveis de produção de alimentos e implementar práticas agrícolas resilientes. Abordam-se, assim, o **TCT Ciência e Tecnologia** e o **ODS 2: Fome zero e agricultura sustentável**.

Esse contexto propicia um trabalho interdisciplinar com a **área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Ao analisar formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, contribui-se para o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT202**.

Durante a resolução na lousa, destaque aos estudantes que eles devem inserir os valores no diagrama em etapas, começando da intersecção entre os três conjuntos, seguindo para as interseções dois a dois. Por fim, devem computar os valores individualmente para cada conjunto. Ao terminar as etapas, o problema estará resolvido. Dessa maneira, a atividade dialoga com o pilar **decomposição** do pensamento computacional.

Na sequência, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas. As **atividades 12** a **20** trabalham com as operações de conjuntos. Sempre que necessário, solicite a eles que recorram às anotações ou ao início do tópico para sanar eventuais dúvidas. Na **atividade 14**, comente que, apesar do nome, o peixe-boi não é um peixe, mas um mamífero. Avalie a conveniência e a possibilidade de um trabalho interdisciplinar com o professor da **área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, explorando a classificação taxonômica do peixe-boi, o hábitat, a vulnerabilidade e a possível extinção desse animal.

Nas **atividades 19** e **20** são utilizadas estruturas semelhantes às da **atividade resolvida R4** por envolverem, respectivamente, a preferência do público em relação a três filmes e os três possíveis problemas de um novo modelo de carro. Se necessário, oriente os estudantes a analisar novamente essa atividade resolvida. A **atividade 20** retrata e propõe uma situação-problema frequente e importante de ser resolvida no mundo empresarial e do trabalho. A análise do sucesso comercial de um produto passa por um procedimento com várias etapas: coleta e organização de dados, conjecturas com base nesses dados, verificação dessas conjecturas e tomada de decisões. Os conceitos de conjunto e de suas operações constituem ferramentas a serem usadas para a validação ou não, nem sempre evidentes, das suposições elaboradas.

Apresente na lousa o conceito de complementar de um conjunto e o respectivo diagrama dado no material. Se achar necessário, dê outros exemplos utilizando conjuntos com número finito de elementos.

Em seguida, resolva na lousa a **atividade resolvida R5**.

Oriente os estudantes a resolver as atividades propostas. As **atividades 21** a **23** trabalham com o conceito de complementar de um conjunto.

Conjuntos numéricos

Neste tópico, é retomado o estudo dos conjuntos dos números naturais, inteiros , racionais, irracionais e reais, considerando que a maioria dos estudantes já foi apresentado a esses conjuntos numéricos no Ensino Fundamental. São trabalhadas a representação desses números na reta numérica e a relação entre esses conjuntos.

Ao longo do tempo, os números naturais tornaram-se fundamentais em muitas áreas do conhecimento e da vida cotidiana. Ao destacar a importância de usar e interpretar adequadamente os conjuntos numéricos, aborda-se a **competência geral 1**, levando os estudantes a desenvolver a capacidade de raciocínio lógico e de pensamento crítico, utilizando os números como ferramenta essencial para compreender o mundo e solucionar problemas do cotidiano.

Inicialmente, relembre com os estudantes o conjunto dos números naturais e inteiros e suas representações na reta numérica. Faça um diagrama para mostrar a relação de inclusão entre esses dois conjuntos numéricos. Comente os textos apresentados nos boxes *Observação*. Esses boxes trazem informações que serão utilizadas nas atividades.

Na **atividade 24**, os estudantes deverão utilizar os conceitos das relações de pertinência e inclusão, além das operações entre conjuntos. Se achar necessário, oriente-os a retomar esses assuntos.

A **atividade 25** estabelece relação com o próximo conjunto numérico a ser analisado, o dos números racionais. Ao resolvê-la, pergunte aos estudantes se lembram de um conjunto numérico em que o quociente de dois elementos quaisquer pertença ao conjunto referido. Com isso, pode-se introduzir o conjunto $\mathbb{Q}$, lembrando que não podemos efetuar uma divisão por zero.

No subtópico *Conjunto dos números racionais*, relembre com os estudantes que o conjunto dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma da razão $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Faça outro diagrama para mostrar a relação de inclusão entre o conjunto dos números racionais e os conjuntos dos números naturais e inteiros. Em seguida, resolva a **atividade resolvida R6**. Os estudantes poderão utilizar essa atividade como referência para resolver as **atividades 29** e **30**.

Relembre-os de como os números racionais são localizados na reta numérica e como podem ser representados, além de como obter a fração geratriz de uma dízima periódica. Aproveite a oportunidade para discutir com eles a veracidade e a recorrência da afirmação: "Entre dois números racionais, sempre existe um número racional".

Depois, se achar necessário, relembre os estudantes do cálculo da média aritmética. É possível que alguns deles tenham dificuldade em efetuar adição de frações. Nesse caso, recomenda-se propor alguns exemplos abordando esses conceitos, a fim de auxiliá-los a sanar as dúvidas.

Na **atividade 26**, os estudantes devem relacionar o número utilizado em cada situação a um conjunto numérico mais adequado. Na **atividade 27**, eles devem localizar os números em uma reta numérica. Na **atividade 28**, devem determinar a fração geratriz de alguns números racionais.

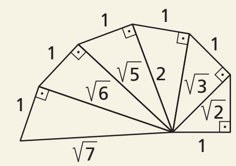
Para ampliar a **atividade 29**, proponha aos estudantes que demonstrem que a potência enésima de um número racional é um número racional, sendo *n* um número natural.

No subtópico *Conjunto dos números irracionais*, relembre com a turma os números irracionais apresentando os exemplos dados no material.

A partir da medida de comprimento de um quadrado de lado unitário, pode ser realizada a localização de alguns números irracionais na reta numérica. Assim, se achar oportuno, ao comentar alguns exemplos de números irracionais na forma de raiz quadrada, aproveite para localizá-los na reta numérica.

Para ampliar a localização dos números irracionais apresentada no material, peça aos estudantes que indiquem como obter $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$.

Exemplo de resposta



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Depois, mostre, por meio de um diagrama, que os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais não estão contidos no conjunto dos números irracionais. Isso indicará a importância de outro conjunto numérico que inclua todos eles: o conjunto dos números reais.

Em seguida, faça a **atividade resolvida R7** na lousa seguindo as indicações da turma. Essa atividade é uma boa oportunidade para apresentar os símbolos e a linguagem formal utilizada na lógica matemática e para mostrar as diferenças entre teorema, hipótese e tese. A **competência específica 5** é favorecida nessa atividade, uma vez que um conjunto de habilidades para a formulação de explicações e argumentos é mobilizado para realizar uma demonstração formal nessa resolução.

Como os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais não estão contidos no conjunto dos números irracionais, é importante representar o diagrama apresentado no início do subtópico *Relação de inclusão dos conjuntos numéricos* na lousa para mostrar como estão relacionados.

Nas **atividades 31** e **32**, os estudantes podem utilizar a **atividade resolvida R6** como referência no raciocínio a ser empregado. Também podem recorrer a alguns exemplos numéricos para compreender melhor as sentenças verdadeiras ou para justificar as sentenças falsas.

Nas **atividades 33** e **34**, os estudantes devem localizar os números apresentados na reta numérica e verificar a qual conjunto numérico alguns deles pertencem. Na **atividade 35**, eles devem utilizar os conceitos de pertinência e inclusão de conjuntos.

Intervalos

Neste tópico, os estudantes trabalharão com a representação de subconjuntos por intervalos e, em seguida, com operações com esses intervalos. Esse conteúdo será muito utilizado quando eles trabalharem com funções.

Inicie representando cada subconjunto indicado no material por intervalos. Depois de apresentar cada intervalo, dê um exemplo numérico para facilitar o entendimento dos estudantes. Reforce que, na reta numérica, ao comparar dois números, o maior sempre está à direita. Isso facilitará a identificação de qual parte da reta numérica deve ser marcada.

Se considerar interessante, antes de apresentar as operações com intervalos, oriente os estudantes a resolver a **atividade 37**.

Em seguida, apresente os exemplos relacionados às operações com intervalos. É importante que todos os conjuntos sejam representados de forma organizada para facilitar a compreensão dos estudantes. Quando houver mais de uma operação envolvida, faça separadamente cada operação, como mostra a **atividade resolvida R8**.

Na **atividade 38**, os estudantes devem resolver as operações entre os conjuntos dados. Ressalte que são quatro operações para cada item. Na **atividade 39**, oriente-os a determinar a medida de comprimento da circunferência e a medida da área do círculo e verificar em qual dos intervalos dados esses valores pertencem.

Oriente os estudantes a resolver a **atividade 40** baseando-se na **atividade resolvida R8**, em que a situação tem duas operações com conjuntos, que são resolvidas por partes. Antes de iniciar a atividade, discuta com eles qual operação deve ser realizada primeiro e conclua que deve ser a de intersecção, por estar entre parênteses.

Para finalizar o capítulo 2

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma forma diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões dadas. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que fizerem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 3 Funções

Objetivos

- Identificar uma função.
- Analisar e construir o gráfico de uma função.
- Resolver problemas que envolvam funções.
- Obter a função inversa de funções dadas.

Justificativa dos objetivos

O trabalho com funções estabelece relações com diferentes conceitos e propriedades da Matemática. Os gráficos a elas relacionados auxiliam na interpretação de dados e são importantes ferramentas de análise e resolução de problemas.

BNCC

- **Competência geral da BNCC: 2**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 1.

  Competência específica 3: **EM13MAT302**.

  Competência específica 4: **EM13MAT401**, **EM13MAT402** e **EM13MAT404**.

  Competência específica 5: **EM13MAT501**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**

  Competência específica 3[1]: **EM13CNT301**[2] e **EM13CNT310**[3].
- **Competências específicas e habilidades da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas:**

  Competência específica 3[4].

  Os textos na íntegra da competência geral, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Educação Financeira
- Trabalho
- Educação Fiscal
- Educação Ambiental
- Educação para o Consumo

1 **(Competência específica 3)** Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

2 **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

3 **(EM13CNT310)** Investigar e analisar os efeitos de programas de infraestrutura e demais serviços básicos (saneamento, energia elétrica, transporte, telecomunicações, cobertura vacinal, atendimento primário à saúde e produção de alimentos, entre outros) e identificar necessidades locais e/ou regionais em relação a esses serviços, a fim de avaliar e/ou promover ações que contribuam para a melhoria na qualidade de vida e nas condições de saúde da população.

4 **(Competência específica 3)** Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global.

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

ODS 8

Orientações didáticas

Neste capítulo, temos uma primeira interação com o conceito de função. Estabelecendo relações entre medidas de diferentes grandezas, é interessante explorar outros exemplos além dos apresentados, atentando-se a não usar apenas grandezas proporcionais. É importante ainda, durante todo o capítulo, relembrar algumas características essenciais de uma função, como o fato de que cada elemento do domínio tem um único representante na imagem, mas um mesmo elemento da imagem pode ser resultado de mais de um elemento do domínio.

A **competência específica 3** é favorecida em vários momentos deste capítulo, uma vez que os estudantes deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

Conceito de função

Nesse tópico, serão trabalhados o conceito de função, sua representação por diagramas e as definições de domínio, contradomínio, conjunto imagem e zero de uma função.

No início, o conceito de função é trabalhado por meio de uma relação entre as unidades de medidas de comprimento pé e metro e de uma relação entre as medidas do comprimento do lado e do perímetro de um quadrado. Em seguida, utilizam-se conceitos de conjunto. Por fim, há exemplos que analisam se as relações apresentadas por diagramas representam ou não funções.

Proponha aos estudantes, que façam em duplas, as **atividades resolvidas R1** e **R2**. Elas são parecidas com os exemplos apresentados no início do tópico. A **atividade resolvida R1** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT301 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Os estudantes poderão elaborar hipóteses, previsões e estimativas e verificar o emprego de instrumentos de medição, interpretando modelos explicativos sob uma perspectiva científica. Se julgar pertinente, proponha atividades similares em conjunto com o professor da área, discutindo a relevância dos modelos e dos instrumentos de medição para observar os fenômenos da realidade.

A **atividade 1** apresenta como uma companhia de saneamento faz o cálculo do valor a ser pago pelo consumo de água. Para ampliá-la, peça aos estudantes que levem para a sala de aula uma fatura de uma conta de água de sua residência ou de outra fonte, para que possam realizar cálculos sobre o consumo e o valor pago. Essa atividade tem como objetivo aproximar o conteúdo matemático da realidade cotidiana dos estudantes, permitindo que eles pratiquem diversas operações e interpretem dados. Por meio dessa análise, é possível levá-los a calcular o valor pago por metro cúbico de água, a comparar o consumo em diferentes meses e a refletir sobre o impacto do uso consciente dos recursos naturais. Além disso, essa proposta reforça a importância de entender os detalhes das contas que recebemos em casa, motivando a responsabilidade com o meio ambiente. Aborda-se, assim, a habilidade **EM13MAT404**. Desse modo, desenvolvem-se os **TCTs Educação Ambiental** e **Educação para o Consumo**, além de exercitar tanto a habilidade **EM13CNT310** quanto à **competência específica 3 da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, analisando seu consumo de água e o serviço de saneamento prestado pelo governo.

Nas **atividades 2** e **3**, os estudantes devem analisar os diagramas, justificando quais representam funções. Na **atividade 4**, devem verificar se uma lei que associa elementos de dois conjuntos representa ou não uma função. Na **atividade 5**, precisam verificar que a tarifa só é alterada a cada quilômetro completo. Na **atividade 6**, devem utilizar a lei matemática apresentada para responder aos itens.

Para estudar os conceitos de domínio, contradomínio e conjunto imagem, trabalhe com o diagrama do livro do estudante. Em paralelo, retome algum diagrama que represente uma função. Depois, mostre que algumas funções têm restrições de domínio. Em seguida, faça as **atividades resolvidas R3** a **R6**. Elas são aplicações diretas dos conceitos estudados.

A **atividade 7** trabalha com conceitos relacionados a contradomínio e imagem. Na **atividade 9**, os estudantes devem determinar os zeros de algumas funções. As **atividades 11**, **14** e **15** trabalham com análise de domínio e/ou contradomínio. A análise das restrições é similar aos exemplos apresentados no livro. Na **atividade 16**, eles devem determinar os zeros das funções, se existirem. Na **atividade 17**, eles devem resolver uma equação do 2º grau. As **atividades 18** e **19** recorrem ao conceito de função para determinar os coeficientes da função e, em seguida, fazer o que se pede.

Gráfico de uma função

Nesse tópico, é trabalhado como se constrói o gráfico de uma função, retomando o conteúdo sobre plano cartesiano de par ordenado. A construção dos gráficos se faz com base na atribuição de valores ao x da função, obtendo o respectivo valor de y. O subtópico *Construção do gráfico de uma função* favorece o desenvolvimento das **competências específicas 4** e **5** e das habilidades **EM13MAT401** e **EM13MAT501**, pois trabalha a conversão de representação algébrica de funções polinomiais do 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano.

Inicie esse tópico retomando as ideias de plano cartesiano e de par ordenado, por meio da análise das características de cada quadrante do plano cartesiano. Reforce que um par ordenado é um par de objetos matemáticos (números, por exemplo) cuja ordem de ocorrência é significante. Assim, no plano cartesiano, o par ordenado (1, 5) é diferente de (5, 1). Depois, oriente os estudantes a resolver a **atividade 22**.

Em seguida, para a construção dos gráficos, atribua valores ao x das funções apresentadas e obtenha os respectivos valores de y. Mostre a importância de definir o domínio e o contradomínio da função, pois isso definirá se o gráfico será representado por pontos, por um segmento ou por uma reta.

Depois, trabalhe com a **atividade resolvida R7**, que traz uma situação contrária da apresentada na teoria, apresentando primeiro o gráfico da função para que sejam determinados o domínio e o contradomínio da função.

Em seguida, organize a turma em duplas para realizar a **atividade 25**, que começa o trabalho de reconhecimento de gráficos de uma função. Os **itens a** e **b** permitem trabalhar com estimativa, o que pode gerar respostas ligeiramente diferentes.

Mostre aos estudantes o que precisa ser analisado em um gráfico para concluir se ele corresponde ou não a uma função. Se possível, associe cada gráfico que representa uma função com um diagrama. No gráfico 1, associe a um diagrama em que dois elementos do domínio se relacionem a um elemento do contradomínio. No gráfico 2, associe a um diagrama em que um elemento do domínio não se relacione a um elemento do contradomínio.

Nas **atividades 26** e **30**, os estudantes devem construir os gráficos das funções correspondentes. Na **atividade 26**, comente a diferença entre os gráficos dos **itens a**, **b** e **c** e ressalte a importância do domínio e da imagem na construção de um gráfico. No item **b**, se julgar interessante, indique um intervalo no domínio para que a turma determine a imagem.

Na **atividade 27**, os estudantes devem aplicar o conceito de função. Nas **atividades 28** e **29**, eles devem analisar o gráfico. Na **atividade 31**, devem analisar os gráficos apresentados para verificar o domínio, o conjunto imagem e o zero das funções.

Análise de gráficos de funções

Nesse tópico, são estudados os intervalos de crescimento e decrescimento, o valor máximo e mínimo, os sinais e a translação de funções.

Proponha a análise do gráfico referente a evolução do número de docentes no Brasil. Pelos valores apresentados, pode-se verificar se houve crescimento ou decrescimento em relação ao ano anterior. Nessa análise, pode-se ainda abordar o **ODS 8: Trabalho decente e crescimento econômico**, conversando com os estudantes sobre como é preciso promover o crescimento econômico inclusivo e sustentável, garantindo trabalho digno para todas as pessoas. Depois, explique que, para algumas funções, a análise para verificar se a função é crescente ou decrescente deve ser realizada por intervalos do domínio.

Na sequência, mostre que algumas funções podem ter valor máximo ou mínimo. Os exemplos numéricos facilitam o entendimento dos estudantes. Nas **atividades 33**, e **35**, eles devem verificar se a função é crescente ou decrescente e identificar valores máximo ou mínimo. Na **atividade 34**, também devem verificar se a função é crescente ou decrescente, mas precisam esboçar o gráfico antes. Para isso, oriente-os a construir um quadro atribuindo alguns valores para x.

Na **atividade 36**, os estudantes devem verificar o conjunto imagem e o valor máximo ou mínimo das funções. Nas **atividades 37** e **38**, eles devem construir os gráficos sugeridos. Para isso, se possível, providencie antecipadamente papel quadriculado.

Depois, explore o estudo do sinal das funções utilizando o exemplo do livro do estudante. Dê outros exemplos de função do 1º grau crescente. Se possível, apresente exemplos de funções do 1º grau decrescente, evidenciando as diferenças.

Se possível, faça a resolução da **atividade resolvida R10** utilizando um *software* de construção de gráficos com os estudantes. Essa atividade pode favorecer o desenvolvimento da **competência geral 2**, articulada com a **competência específica 4** e a habilidade **EM13MAT402**, pois os estudantes são convidados a refletir e a analisar o trabalho com um *software* de construção de gráficos, exercitando a curiosidade intelectual, elaborando e testando hipóteses a respeito dos diferentes registros matemáticos para uma função polinomial do 2º grau.

Na internet, há diversos *softwares* gratuitos ou livres, como o Desmos e o Mathway. Vale ressaltar que, dependendo do *software* escolhido, o passo a passo da construção pode variar. Por isso, é importante se familiarizar com o programa antes de usá-lo em sala de aula.

O subtópico *Translação do gráfico de uma função* favorece o desenvolvimento da **competência geral 2** e da **competência específica 4**, articuladas com a habilidade **EM13MAT402**, uma vez que os estudantes são convidados a refletir a respeito da influência de coeficientes e parâmetros, presentes em um registro matemático algébrico, no registro geométrico de uma função polinomial de 2º grau. Oriente os estudantes a acompanhar a explicação utilizando um *software* de construção de gráficos.

Função polinomial

Nesse tópico, os conceitos abordados anteriormente serão bastante acionados. Assim, em todos os exemplos comente sobre domínio e conjunto imagem, se a função é crescente ou decrescente, se há pontos de máximo ou de mínimo, ou se a função é positiva ou negativa nos intervalos trabalhados. O tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302**, uma vez que introduz os conceitos de funções polinomiais.

Apresente a função polinomial. Identifique os coeficientes e analise o grau das funções dos exemplos. Os exemplos das funções $f(x) = \frac{x}{4} + 1$ e $h(x) = x$ favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT401**; já o exemplo da função $g(x) = -2x^2 + 4$ favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT402**. Neles, há a conversão de representações algébricas de funções em representações gráficas no plano cartesiano.

Funções definidas por mais de uma sentença

Nesse tópico, os estudantes serão levados a usar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, além de compreender e utilizar diferentes registros de representação matemáticos, como tabelas e leis de formação de funções definidas por mais de uma sentença. Favorece-se, assim, o desenvolvimento das **competências específicas 1** e **4**, bem como da habilidade **EM13MAT404**, na medida em que os estudantes analisam funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações algébrica e gráfica.

Para apresentar esse conceito, utiliza-se o contexto de cálculo de imposto de renda. Entender como funciona esse cálculo e a aplicação do imposto é fundamental para que os estudantes exerçam sua cidadania. Além disso, permite reflexões de como gerenciar melhor suas finanças pessoais. Isso pode estimular uma melhora nas decisões financeiras, bem como refletir sobre opções de investimento, planejar a aposentadoria e até decidir sobre questões de emprego e empreendedorismo. Nesse sentido, é favorecido o trabalho com o **TCT Educação Financeira**.

Em seguida, proponha o exemplo apresentado. Depois, faça a **atividade resolvida R11**, que consiste em definir qual lei será utilizada para cada valor do domínio.

Se achar necessário, antes de os estudantes resolverem a **atividade 43**, oriente-os a retomar os exemplos apresentados no tópico *Funções polinomiais*.

Nas **atividades 44**, **45** e **46**, os estudantes trabalham com o pilar **decomposição** do pensamento computacional, na medida em que lidam com as funções compostas de mais de uma sentença. Além disso, a **atividade 45** permite o trabalho com o pilar **abstração**.

Função inversa

Nesse tópico, se achar necessário, retome os conceitos de conjunto.

Ao apresentar as definições de função injetora e sobrejetora, explore o uso de diagramas e apresente outros exemplos, incluindo funções que não são injetoras ou sobrejetoras. Para ampliar a exploração do exemplo **a** do livro do estudante, é possível perguntar: "A função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, é sempre sobrejetora? Justifique". Espera-se que respondam que não, pois: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+ \neq \text{CD}(f) = \mathbb{R}$.

Em seguida, faça a **atividade resolvida R12**, que permite verificar se uma função é injetora por meio de um gráfico. Quando uma reta paralela ao eixo x intersecta o gráfico em mais de um ponto, indica que, no domínio da função, existem elementos distintos com a mesma imagem. Então, a função não é injetora. Para ampliar, peça aos estudantes que mostrem que a função t dessa atividade não é sobrejetora. Um exemplo de resposta é indicar que 0 é elemento do contradomínio $\mathbb{R}$ e não há elemento x do domínio $\mathbb{R}$ tal que $0 = x^2 + 1$.

Apresente a definição de função inversa utilizando o exemplo do livro do estudante e fazendo uso de diagramas. Reforce que somente as funções bijetoras admitem inversa e apresente o método prático para obtenção da função inversa de uma função bijetora. Em seguida, faça a **atividade resolvida R13**, cujos resultados também podem ser verificados com o auxílio de um *software* de construção de gráficos.

Oriente os estudantes a resolver as atividades propostas. As **atividades 47** e **48** trabalham com os conceitos de funções sobrejetoras e injetoras. Na **atividade 49**, oriente-os a determinar a inversa de cada função. Um dos objetivos dessa atividade é fazer os estudantes usarem as igualdades $\text{D}(f) = \text{Im}(f^{-1})$ e $\text{D}(f^{-1}) = \text{Im}(f)$ para obter os conjuntos $\text{Im}(f)$ e $\text{Im}(f^{-1})$ a partir dos conjuntos $\text{D}(f)$ e $\text{D}(f^{-1})$.

Nesse caso, é interessante que eles percebam que $\text{D}(f)$ e $\text{D}(f^{-1})$ podem ser escritos da seguinte maneira:

$\text{D}(f) = \mathbb{R} - \{-9\}$ e $\text{D}(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$

Assim: $\text{Im}(f) = \text{D}(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$ e $\text{Im}(f^{-1}) = \text{D}(f) = \mathbb{R} - \{-9\}$

Os estudantes também podem escrever os domínios do seguinte modo:

$\text{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -9\}$ ou $\text{D}(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$

Nesse caso, para obter os conjuntos imagem, é necessário que os estudantes atentem à troca das letras x por y. Assim:

$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} | y \neq 2\}$ e $\text{Im}(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} | y \neq -9\}$

Na **atividade 50**, oriente os estudantes a utilizar a regra prática para determinar a inversa das funções. Na **atividade 51**, discuta o motivo de a função do **item f** não admitir inversa. As **atividades 51** e **55** propiciam descobrir uma propriedade de uma função invertível de domínio real, isto é, $[f^{-1}]^{-1}(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Organize a turma em duplas para resolver as **atividades 52** e **55**. Se possível, forneça papel quadriculado para o esboço dos gráficos. Os resultados podem ser conferidos com o auxílio de um *software* de construção de gráficos. As **atividades 53** e **54** envolvem os conceitos de função inversa estudados.

Apresente os exemplos no subtópico *Gráfico da função inversa* do livro do estudante, reforçando a simetria dos gráficos de uma função e sua inversa em relação ao gráfico da função identidade. Os estudantes podem conferir os resultados com um *software* de construção de gráficos.

Utilize alguns pontos dos gráficos apresentados para justificar a resposta da **atividade 56**. Na **atividade 57**, oriente-os estudantes a recorrer à regra prática.

TRABALHO E JUVENTUDES – Como calcular a contribuição previdenciária?

Objetivos

- Compreender o cálculo do desconto referente à contribuição previdenciária.
- Refletir sobre a importância da contribuição previdenciária.

Orientações didáticas

Nesta seção, é abordado um dos tributos mais importantes que acompanha a vida de todo trabalhador: a contribuição previdenciária. Nesse conteúdo desenvolvem-se os **TCTs Educação Financeira**, **Educação Fiscal** e **Trabalho**.

Antes de trabalhar o texto da seção, converse com os estudantes sobre as características dos trabalhos formais e informais. Explique que o trabalho formal tem contrato de trabalho e registro na Carteira de Trabalho e Previdência Social, bem como segue determinadas regras de acordo com a Consolidação das Leis do Trabalho (CLT). Já o trabalho informal não tem registro na Carteira de Trabalho e Previdência Social e costuma oferecer maior autonomia e flexibilidade ao trabalhador, porém não são garantidos direitos trabalhistas, como auxílio-doença, salário-maternidade, FGTS, férias, 13º salário, aposentadoria e seguro-desemprego. Verifique se há estudantes que trabalham em regime CLT ou na informalidade e incentive-os a verbalizar suas experiências.

Se possível, disponibilize para a turma um exemplo de holerite e um de Carteira de Trabalho e Previdência Social para que os estudantes possam analisar e externar aquilo que mais chama a atenção deles. Em seguida, explore o texto da seção por meio da leitura coletiva. Caso considere pertinente, reproduza na lousa o quadro com as faixas de salário e as alíquotas do INSS para maio de 2023 e mostre como calcular o desconto referente à contribuição previdenciária de um trabalhador que recebia em novembro de 2023 um salário bruto de R$ 4.500,00.

1º passo. Aplicação da alíquota de 7,5%

$0{,}075 \cdot \text{R\$ } 1.320{,}00 = \text{R\$ } 99{,}00$

2º passo. Aplicação da alíquota de 9%

$0{,}09 \cdot (\text{R\$ } 2.571{,}29 - \text{R\$ } 1.320{,}01) =$

$= 0{,}09 \cdot \text{R\$ } 1.251{,}28 \simeq \text{R\$ } 112{,}62$

3º passo. Aplicação da alíquota de 12%

$0{,}12 \cdot (\text{R\$ } 3.856{,}94 - \text{R\$ } 2.571{,}30) =$

$= 0{,}12 \cdot \text{R\$ } 1.285{,}64 \simeq \text{R\$ } 154{,}28$

4º passo. Aplicação da alíquota de 14%

$0{,}14 \cdot (\text{R\$ } 4.500{,}00 - \text{R\$ } 3.856{,}95) =$

$= 0{,}14 \cdot \text{R\$ } 643{,}05 \simeq \text{R\$ } 90{,}03$

5º passo. Total a recolher

$\text{R\$ } 99{,}00 + \text{R\$ } 112{,}62 + \text{R\$ } 154{,}28 + \text{R\$ } 90{,}03 = \text{R\$ } 456{,}13$

Portanto, a contribuição previdenciária de um trabalhador que recebia em novembro de 2023 um salário bruto de R$ 4.500,00 era de R$ 456,13.

Se considerar conveniente, explore outros exemplos com a turma. Isso é importante para que os estudantes possam compreender como a função *f* foi determinada.

Proponha aos estudante que façam a **atividade 1**. Explique que eles podem calcular o desconto aplicando as alíquotas ou utilizando $f(5.600)$. Deixe-os à vontade para utilizarem a estratégia que preferirem e, depois, faça a correção na lousa.

1º modo. Aplicando as alíquotas.

1º passo. Aplicação da alíquota de 7,5%

$0{,}075 \cdot \text{R\$ } 1.320{,}00 = \text{R\$ } 99{,}00$

2º passo. Aplicação da alíquota de 9%

$0{,}09 \cdot (\text{R\$ } 2.571{,}29 - \text{R\$ } 1.320{,}01) =$

$= 0{,}09 \cdot \text{R\$ } 1.251{,}28 \simeq \text{R\$ } 112{,}62$

3º passo. Aplicação da alíquota de 12%

$0{,}12 \cdot (\text{R\$ } 3.856{,}94 - \text{R\$ } 2.571{,}30) =$

$= 0{,}12 \cdot \text{R\$ } 1.285{,}64 \simeq \text{R\$ } 154{,}28$

4º passo. Aplicação da alíquota de 14%

$0{,}14 \cdot (\text{R\$ } 5.600{,}00 - \text{R\$ } 3.856{,}95) =$

$= 0{,}14 \cdot \text{R\$ } 1.743{,}05 \simeq \text{R\$ } 244{,}03$

5º passo. Total a recolher

$\text{R\$ } 99{,}00 + \text{R\$ } 112{,}62 + \text{R\$ } 154{,}28 + \text{R\$ } 244{,}03 = \text{R\$ } 609{,}93$

2º modo: Utilizando a função *f*.

$f(5.600) = 365{,}90 + 0{,}14 \cdot (5.600 - 3.856{,}94)$

$f(5.600) = 365{,}90 + 0{,}14 \cdot (1.743{,}06)$

$f(5.600) = 365{,}90 + 244{,}03$

$f(5.600) = 609{,}93$

Na **atividade 2**, espera-se que os estudantes notem que a função não é definida para valores de *x* menores ou iguais a zero, pois *x* indica o valor do salário bruto, em reais. Além disso, o valor passa a ser fixo para salários acima de R$ 7.507,49, que corresponde ao teto salarial. É importante que eles percebam que, mesmo que algum trabalhador receba salário maior que esse valor, sua contribuição e seus benefícios serão definidos com base no valor do teto vigente. Aproveite a oportunidade e verifique se eles apresentam dificuldade em relação aos conceitos de domínio e conjunto imagem de uma função.

Para finalizar o capítulo 3

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conceitos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize uma análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões dadas. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e identificar que conceitos precisam ser retomados. Depois que fizerem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 4 Função afim

Objetivos

- Identificar uma função afim.
- Resolver situações-problema que envolvam funções afins.
- Analisar o gráfico de uma função afim.
- Resolver inequações que envolvam funções afins.

Justificativa dos objetivos

A função afim, cujo gráfico é uma reta, serve para modelar problemas, como os econômicos, sociais e os que envolvem as Ciências da Natureza. Situações em que o comportamento é diretamente proporcional também são modeladas pela função afim. Nesse sentido, torna-se necessário e de grande importância o trabalho com esse tipo de função.

BNCC

- **Competência geral da BNCC: 8.**
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 1: **EM13MAT101**.

  Competência específica 3: **EM13MAT302** e **EM13MAT315**.

  Competência específica 4: **EM13MAT401** e **EM13MAT404**.

  Competência específica 5: **EM13MAT501** e **EM13MAT510**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**

  Competência específica 1[1]: **EM13CNT101**[2].

  Competência específica 2[3]: **EM13CNT204**[4].

  Os textos na íntegra da competência geral, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Saúde
- Ciência e Tecnologia

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

ODS 3 ODS 9

Orientações didáticas

Antes de iniciar o estudo da função afim, contextualize a pandemia causada pelo vírus SARS-CoV-2 explorando a imagem e a legenda da abertura deste capítulo.

Proponha aos estudantes que façam uma pesquisa na internet e expliquem o porquê de a Organização Mundial de Saúde recomendar o uso de máscaras durante a pandemia. O objetivo dessa proposta é estimular a busca por informações confiáveis nos meios digitais e incentivar o trabalho colaborativo dos estudantes sobre o assunto. Espera-se que eles identifiquem que a máscara foi recomendada para diminuir o contágio pelo coronavírus. Por exemplo, se uma de duas pessoas que estão conversando estiver contaminada e as duas estiverem usando máscaras, a chance de contágio cai consideravelmente. Também é importante citar a importância da higienização das mãos.

Aproveite a situação inicial para destacar a relevância da ciência e da pesquisa científica na área da saúde, contribuindo assim com o desenvolvimento dos **TCTs Saúde** e **Ciência e Tecnologia**, além de permitir a conscientização sobre a importância do cuidado com a própria saúde, favorecendo a **competência geral 8**.

O assunto da pandemia da Covid-19 que acometeu o Brasil e o mundo, também permite um trabalho interdisciplinar com a **área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, com a proposta da produção de um mural colaborativo contendo informações sobre a doença, o vírus, a expansão da pandemia no Brasil e no mundo, os métodos de tratamento e de prevenção, as taxas de mortalidade, a comparação com outras doenças virais, entre outros fatores, abordando o **ODS 3: Saúde e Bem-Estar**, no que tange a assegurar uma vida saudável e promover o bem-estar para todos, em todas as idades.

As **competências específicas 3** e **4** e as habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT401** são favorecidas em vários momentos deste capítulo, uma vez que os estudantes constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, modelar ou resolver problemas empregando funções e diversos registros de representação matemáticos.

Função afim

Nesse tópico, o conceito de função afim é apresentado e formalizado aos estudantes. Explore os exemplos validando a definição, de modo que eles sejam capazes de identificar os coeficientes de uma função afim. Em seguida, diferencia-se a função constante de uma função polinomial do 1º grau, a qual é exemplificada pela conversão de medidas de temperatura.

As atividades propostas incentivam a reflexão sobre o comportamento das variáveis e dos coeficientes das funções. Espera-se que, nas **atividades 2** e **3**, os estudantes reflitam sobre as possibilidades de construção de um gráfico partindo da lei de uma função. Amplie a **atividade 6** e peça a eles que comparem um plano de assinatura de telefone residencial com o apresentado pelo enunciado da questão.

A intenção da **atividade 8** é antecipar, por meio de cálculos com números inteiros e consecutivos atribuídos a x (isto é, fazendo $\Delta x = 1$), o fato de que a taxa de variação da função afim, cuja lei é dada por $y = ax + b$, é constante e igual a a.

A **atividade 9** leva os estudantes, após localizar no plano cartesiano os pontos de suas funções, apresentados em um quadro, a formular uma hipótese de como é o gráfico dessas funções. Espera-se que eles antecipem o conceito a ser estudado no tópico seguinte e concluam que o gráfico da função afim é uma reta.

---

1 **(Competência específica 1)** Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

2 **(EM13CNT101)** Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas.

3 **(Competência específica 2)** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

4 **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

A **atividade 10** trabalha o pilar **algoritmo** do pensamento computacional, bem como a habilidade **EM13MAT315**. Algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos que, quando rigorosamente seguidos na ordem determinada, permitem resolver um problema ou realizar uma tarefa. Nessa atividade, os estudantes vão escrever um algoritmo em linguagem materna. Você pode ampliar a proposta e ajudá-los a representar o algoritmo por meio de um fluxograma, como o mostrado a seguir.

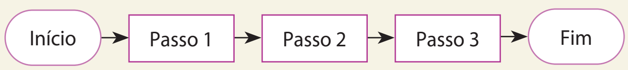


Gráfico da função afim

Nesse tópico, o objeto de estudo é a representação gráfica de uma função afim. Para isso, os estudantes analisarão a razão entre Δy e Δx, ou seja, a taxa de variação. Em seguida, precisam compreender a desigualdade triangular para então concluir que o gráfico de uma função afim é uma reta não perpendicular ao eixo *x*. Ainda nesse tópico, eles deverão construir e analisar gráficos de funções polinomiais do 1º grau. Esse trabalho favorece o desenvolvimento da **competência específica 4** e das habilidades **EM13MAT401**, **EM13MAT501** e **EM13MAT510**.

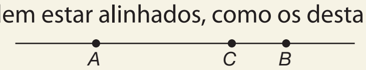
Pesquisadores e educadores têm estudado acerca das dificuldades na transposição do registro algébrico para a representação gráfica (e vice-versa). Por essa razão, é importante que os estudantes se apropriem de todos os conceitos envolvidos antes de construir a representação gráfica. Analisar o erro, em vez de ignorá-lo, promove a reflexão sobre aquele raciocínio.

Ao explorar o exemplo da taxa de variação, você pode propor os seguintes questionamentos para a turma.

- "Será que, para qualquer intervalo do domínio da função $f(x) = -3x + 1$, obteremos a mesma taxa de variação -3?" Sim, em qualquer intervalo a taxa de variação é -3.
- "O que isso significa?" Significa que a taxa de variação de uma função afim é constante para qualquer intervalo do domínio.

Se julgar conveniente, discuta com os estudantes a demonstração para essa função da conclusão sobre a constância da taxa de variação. Para isso, atribua a *x* valores x_2 e x_1 e depois calcule a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Então, peça a eles que calculem a taxa de variação em outros intervalos a fim de que percebam que o valor obtido é sempre -3. Esse fato será verificado na **atividade resolvida R2**.

Para o estudo da desigualdade triangular, pergunte aos estudantes: "Pode-se afirmar que, se $AC \neq AB + BC$, os pontos *A*, *B* e *C* não estão alinhados e, portanto, são vértices de um triângulo?". Espera-se que eles respondam que não, pois os pontos podem estar alinhados, como os desta figura:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Verifica-se que $AC \neq AB + BC$ e, no entanto, os pontos *A*, *B* e *C* não determinam um triângulo.

As atividades propostas têm as intenções de levar os estudantes a refletir sobre a abordagem assumida nesta obra, que é a associação entre Álgebra e Geometria, e a generalizar, sempre que possível, conscientemente suas conclusões.

A **atividade 14** favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT501** e **EM13MAT510**, pois os estudantes deverão investigar a representação de duas funções no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo-a como uma função polinomial de 1º grau.

Explique aos estudantes que, para construir o gráfico da **atividade 16**, foram adotadas escalas diferentes para os eixos vertical e horizontal, o que não invalida os dados usados para efetuar os cálculos necessários.

A **atividade 17** favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13CNT101**, pois os estudantes terão a oportunidade de interpretar uma situação relativa à **área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias** que envolve a variação de duas grandezas, pela análise do gráfico da função representada e da taxa de variação.

A situação inicial, proposta no subtópico *Função linear e proporcionalidade*, sobre a Estação Espacial Internacional, propicia trabalhar com o **ODS 9: Indústria, inovação e infraestrutura**, além da interdisciplinaridade com a **área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204**, uma vez que os estudantes poderão elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos desse veículo com base na análise das interações gravitacionais. Aproveite e pergunte: "Qual é a medida da distância percorrida pela Estação Espacial em 1 hora?". Espera-se que eles concluam que a medida dessa distância é 27.576 km.

A **atividade 19** relaciona, novamente, a Álgebra e a Geometria, uma vez que os estudantes devem verificar que a razão entre a medida ℓ do lado de um quadrado e a medida ℓ^2 de sua área não é constante, ou seja, não há uma constante de proporcionalidade.

A análise do gráfico de uma função polinomial do 1º grau, incluindo o crescimento, o decrescimento e o zero de uma função, favorece o desenvolvimento da **competência específica 4** e das habilidades **EM13MAT401**, **EM13MAT404** e **EM13MAT501**.

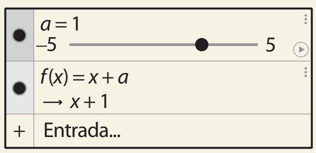
A translação do gráfico de uma função afim favorece o desenvolvimento da **competência específica 5**, uma vez que os estudantes serão incentivados a estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e *software* de construção de gráficos, identificando a necessidade ou não de uma demonstração cada vez mais formal na validação das conjecturas.

O objetivo das **atividades 21** a **25** é propiciar a reflexão sobre a relação entre o coeficiente angular da reta correspondente e o gráfico de uma função. Espera-se que os estudantes associem o fato de o gráfico de uma função ser crescente ao coeficiente *a* positivo e decrescente ao coeficiente *a* negativo.

Na **atividade 25**, pretende-se que os estudantes estabeleçam uma conexão entre as abordagens algébrica e gráfica. No **item d**, a intenção é antecipar, de maneira informal, o conceito de desigualdade aplicado na resolução de inequações, que será estudado no próximo tópico.

Para resolver a **atividade 26**, os estudantes devem identificar as informações relevantes à resolução do problema. Esse processo corrobora com o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao pilar **abstração** do pensamento computacional.

Para analisar a **atividade 27**, vale destacar que, em alguns *softwares* como o GeoGebra e o Desmos, basta inserir a expressão algébrica com o parâmetro para que o *software* disponibilize um controle deslizante do parâmetro; ao deslizar o controle, o gráfico é automaticamente transladado no plano, como pode ser conferido na figura a seguir.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

As **atividades 28** a **31** trazem problemas em que os estudantes são levados a aplicar o que aprenderam sobre função afim e sua representação gráfica, incluindo a interpretação e a análise dos resultados obtidos.

Inequações do 1º grau

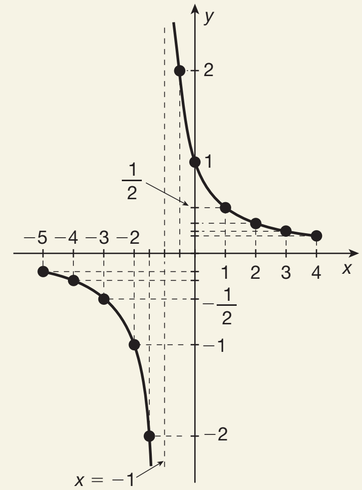
No início desse tópico, a definição de inequação e os princípios aditivo e multiplicativo de equivalência das desigualdades são retomados, seguidos de atividades resolvidas e propostas. Em seguida, exploram-se as definições de inequação-produto e inequação-quociente, acompanhadas de atividades que fazem uso do quadro de sinais para resolvê-las. Com essas definições consolidadas, são apresentadas as inequações simultâneas, as quais são exploradas em diversas atividades, inclusive por meio de sistemas de inequações. Ainda nesse tópico, o estudo das inequações é aplicado na identificação do domínio de funções que apresentam restrições de valores.

As **atividades 32** a **34** exploram a construção e a interpretação de gráficos de funções afim, incluindo a análise dos intervalos do domínio das funções e do conjunto solução de inequações.

A **atividade 38** propicia a reversibilidade procedimental das atividades imediatamente anteriores, levando os estudantes a refletir sobre os porquês dos procedimentos de resolução de inequação-produto e de inequação-quociente.

Atividades como a **40** (há outras no decorrer da coleção) oferecem aos estudantes um instrumento de análise e de tomada de decisão, em uma situação do dia a dia, promovendo o exercício da cidadania.

Para ampliar a **atividade 43**, solicite aos estudantes que investiguem o gráfico da função dada por $y = \frac{1}{x+1}$. Ao esboçarem o gráfico, oriente-os a considerar o domínio da função para atribuir os valores para x. Espera-se que eles percebam que o gráfico não intercepta a reta $x = -1$ nem intercepta o eixo x, como podemos observar na representação a seguir.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Para finalizar o capítulo 4

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conceitos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o esquema na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões dadas. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e identificar que conceitos precisam ser retomados. Depois que fizerem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 5 Função quadrática

Objetivos

- Identificar uma função quadrática.
- Analisar o gráfico de uma função quadrática.
- Resolver problemas que envolvam funções quadráticas.
- Resolver inequações que envolvam funções quadráticas.

Justificativa dos objetivos

Há várias situações-problema, como as de Cinemática, que podem ser modeladas por uma função quadrática. Tendo como gráfico uma parábola, esse tipo de função auxilia também na resolução de problemas que envolvem máximos e mínimos, por exemplo, a determinação de área máxima de um retângulo, dado seu perímetro.

BNCC

- **Competência geral da BNCC: 2**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 1: **EM13MAT101**.

  Competência específica 3: **EM13MAT302**.

  Competência específica 4: **EM13MAT402** e **EM13MAT404**.

  Competência específica 5: **EM13MAT502** e **EM13MAT503**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**

  Competência específica 2[1]: **EM13CNT204**[2].

  Os textos na íntegra da competência geral, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso
- Diversidade Cultural
- Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

ODS 3

Orientações didáticas

As **competências específicas 3** e **4** são favorecidas no decorrer do capítulo, uma vez que os estudantes deverão utilizar diferentes registros de representação e estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, modelar ou resolver problemas em diversos contextos.

Este capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302**, já que os estudantes construirão modelos empregando as funções polinomiais de 2º grau para resolver problemas em contextos diversos.

A situação apresentada na abertura do capítulo, a respeito do voleibol, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e também do **TCT Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso**. Além disso, por ser um esporte cultuado pelos jovens, está inserida na cultura juvenil e permite o estímulo à prática de esportes como promoção de qualidade de vida e de bem-estar, abordando o **ODS 3: Saúde e Bem-Estar**.

Função quadrática

Nesse tópico, é trabalhado o conceito de função quadrática e é retomada a fórmula de resolução de uma equação do 2º grau. Apresente os conceitos de função quadrática aos estudantes e, em seguida, relembre como a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau pode ser deduzida. Esse processo ajudará a turma a recordar das etapas de fatoração envolvidas. Depois, faça a verificação das raízes de uma equação do 2º grau com a análise do discriminante. Resolva os exemplos apresentados e, se necessário, apresente outras equações do 2º grau para os estudantes resolverem. Em seguida, faça as **atividades resolvidas R1**, **R2** e **R3** na lousa. Essas atividades trabalham com o conceito de função quadrática e servem para analisar o aprendizado dos estudantes. Em seguida, oriente-os a resolver as atividades propostas.

Na **atividade 1**, os estudantes devem identificar os coeficientes das funções apresentadas. Nas **atividades 2** a **4**, eles devem aplicar o conceito de função. O objetivo das questões apresentadas na **atividade 3** é propiciar uma reflexão sobre a análise de uma função com base em alguns pontos e conectar esse conteúdo com o que será explorado adiante. Na **atividade 5**, os estudantes devem utilizar a fórmula resolutiva. Nas **atividades 7** e **9**, eles devem realizar uma análise conceitual das funções quadráticas. Nas **atividades 10** e **11**, eles determinam funções quadráticas para resolver problemas. A **atividade 10** leva, de maneira informal, ao raciocínio combinatório por meio da aplicação do princípio multiplicativo. A resolução da equação do 2º grau para a obtenção do zero de uma função quadrática, que modela uma situação da combinatória, passa a ser vista pelos estudantes como ferramenta útil na resolução de problemas.

Gráfico da função quadrática

Nesse tópico, será mostrado que o gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada parábola para que se possam analisar seus elementos e realizar o estudo de sinais. Nesse processo, é incentivado o exercício da **competência geral 2**, bem como da **competência específica 5**, com os estudantes tendo a oportunidade de investigar os elementos da parábola por meio de diversas atividades e formular hipóteses durante esse estudo, podendo testá-las com o auxílio de *softwares* de Geometria dinâmica. Atribua os valores de x indicados nos exemplos para determinar os pontos da parábola e esboçar o gráfico. Mostre para os estudantes, por meio dos exemplos apresentados no livro, que o sinal do coeficiente a da função quadrática determina o sentido da concavidade da parábola. Para apresentar os elementos da parábola, faça os esboços dos gráficos apresentados nos exemplos. Destaque os pontos em que as parábolas interceptam o eixo y e os pontos em que interceptam o eixo x. Aproveite a oportunidade e comente que, quando a concavidade da parábola é voltada para cima, o vértice re-

1 **(Competência específica 2)** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

2 **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

presenta um ponto de mínimo da função e, quando a concavidade da parábola é voltada para baixo, o vértice representa um ponto de máximo da função. Depois, faça a **atividade resolvida R4** na lousa, que associa os aspectos destacados anteriormente ao conceito de função.

Na **atividade 12**, os estudantes devem atribuir valores a *x* para determinar alguns pontos do gráfico de cada função. Ao final da atividade, incentive-os a pensar sobre o máximo e o mínimo de uma função quadrática, explorados na determinação do vértice. Nas **atividades 13** e **14**, os estudantes devem analisar a concavidade da parábola com base nas informações fornecidas. No **item b** da **atividade 14**, é necessário retomar o conceito de inequação quociente. Nas **atividades 15** e **16**, organize a turma em duplas e oriente-as a analisar as funções considerando alguns pontos do gráfico. Para isso, é importante que os estudantes tenham acesso a um *software* de construção de gráficos. Caso não seja possível o uso de computadores, forneça papel quadriculado a eles e oriente-os a construir os gráficos no papel.

Em seguida, analise os pontos em que a parábola intercepta o eixo *y*. Conclua com os estudantes que a ordenada desses pontos corresponde ao coeficiente *c* da função. Depois, mostre que os zeros da função correspondem aos pontos em que a parábola intercepta o eixo *x*. Retome a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau e da análise da quantidade de pontos em que a parábola intercepta o eixo *x* a partir do discriminante. Em seguida, solucione a **atividade resolvida R5**, que determina a função por meio de alguns pontos da parábola. Na **atividade resolvida R6**, a análise das raízes é feita a partir do discriminante.

Na **atividade 17**, os estudantes devem determinar o ponto em que a parábola intercepta o eixo *y* a partir da função. A **atividade 18** propõe a reflexão da importância do ponto em que a parábola intercepta o eixo *y*. Nas **atividades 19** a **21** e **23**, os estudantes devem determinar os zeros da função ou relacionar com os coeficientes em cada situação proposta.

Na **atividade 24**, os estudantes devem escrever a lei da função quadrática usando alguns pontos conhecidos do gráfico. Para isso, eles devem conhecer e reconhecer as propriedades dos gráficos das funções quadráticas para encontrar as leis de cada uma, o que permite o reaproveitamento de estratégias para a obtenção das leis, como a observação do ponto em que a parábola intercepta o eixo *y* e quantas raízes reais a função possui. Dessa maneira, a atividade contribui para o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao pilar **reconhecimento de padrões** do pensamento computacional.

Na **atividade 25**, se necessário, comente com os estudantes que, se a parábola tangencia o eixo das abscissas, ela possui um zero real duplo. Na **atividade 26**, eles devem relacionar o coeficiente *c* da função com a informação dada.

Nas **atividades 27** e **28**, os estudantes devem realizar uma reflexão sobre a relação do coeficiente *c* da função e o ponto de intersecção com o eixo *y*. Espera-se que eles percebam que a ordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo *y* é o coeficiente *c* da lei da função quadrática que corresponde a essa parábola. A princípio, essa é uma questão aberta, uma vez que se pede aos estudantes que argumentem livremente sobre o ponto de intersecção do eixo *y* com o gráfico de uma função quadrática qualquer. Depois, eles são orientados a seguir os passos procedimentais para confrontar a argumentação que fizeram anteriormente com a conclusão decorrente desses passos, isto é, que o ponto de intersecção é (0, *c*). Na **atividade 28**, eles devem comparar seus argumentos com a descrição apresentada.

Na **atividade 29**, os estudantes devem verificar os valores de *x* em que se tem *f*(*x*) positivo nas situações apresentadas. Oriente-os a realizar as verificações sem desenhar o gráfico; em seguida, peça a eles que desenhem para verificar as respostas. O objetivo é apresentar um problema em que os estudantes sintam a necessidade de aprender os procedimentos do estudo do sinal de uma função, que será o próximo tópico a ser abordado.

No subtópico *Estudo do sinal da função por meio de seus zeros*, reforce a importância de verificar se a concavidade da parábola é para cima ou para baixo e se existem os zeros da função. Faça um esboço das situações apresentadas, mostrando os intervalos em que as funções são positivas e negativas. Em seguida, solucione a **atividade resolvida R7**, que faz o estudo dos sinais da função por meio da análise do coeficiente *a* e do discriminante. Se houver oportunidade, oriente os estudantes a conferir os resultados utilizando um *software* de construção de gráficos. Na **atividade resolvida R8**, os estudantes utilizam um *software* de construção de gráficos para realizar o estudo de sinais da função. Em alguns *softwares*, basta selecionar a curva que já ficam destacados os pontos em que ela cruza os eixos *y* e *x* (zeros) e, também, o vértice, no caso da parábola. Se não for possível utilizar o computador, forneça papel quadriculado aos estudantes e oriente-os a construir o respectivo gráfico para fazer as análises. Na **atividade resolvida R9**, deve-se realizar a análise do discriminante.

Nas **atividades 30** e **31**, os estudantes devem realizar o estudo de sinais da função em cada situação apresentada. Se possível, oriente-os a utilizar um *software* de construção de gráficos para a verificação dos resultados.

Na **atividade 32**, com base na análise de sinais, os estudantes devem esboçar o gráfico correspondente. Agora, o foco passa a ser o vértice do gráfico da função quadrática. Comente que o eixo de simetria da parábola passa pelo vértice e mostre as fórmulas de cálculo das coordenadas do vértice. Se julgar conveniente, faça passo a passo essa demonstração na lousa.

A **atividade 33** pode ser feita em duplas. A troca dos gráficos esboçados tem como objetivo levar os estudantes à percepção da relação entre os coeficientes *a* e *c* da lei da função quadrática dada por $j(x) = ax^2 + c$ e seu gráfico. A troca de respostas e a discussão de estratégias para realizar o estudo do sinal de uma função permitem aos estudantes praticar a oralidade e desenvolver a habilidade de argumentação.

Depois, faça a **atividade resolvida R10**, que traz uma aplicação direta das fórmulas estudadas. Na **atividade resolvida R11**, os estudantes aplicam as fórmulas estudadas para obter os coeficientes da equação. Essa atividade trata dos Jogos Mundiais dos Povos Indígenas, trazendo os **TCTs Diversidade Cultural** e **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras**.

Na **atividade 34**, os estudantes aplicam as fórmulas estudadas anteriormente. Se necessário, oriente-os a rever a **atividade resolvida R10**.

Na **atividade 35**, espera-se que os estudantes, com base nas funções apresentadas **na atividade 34**, identifiquem as características das parábolas que permitirão responder às questões propostas. Essa atividade introduz os conceitos de valor máximo e valor mínimo, assuntos que serão explorados no próximo tópico.

No **item c**, espera-se que os estudantes percebam que:

- a concavidade determinará se a função terá valor mínimo ($a > 0$) ou valor máximo ($a < 0$);
- o valor máximo ou mínimo será igual a y_V em cada função.

Nas **atividades 36** e **38**, os estudantes devem analisar os gráficos apresentados para responder às questões propostas. Na **atividade 37**, eles utilizam os conceitos de função e de vértice da parábola para determinar os coeficientes da equação.

O subtópico *Conjunto imagem e valor máximo ou valor mínimo da função quadrática* favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT503**, uma vez que os estudantes investigam pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos diversos, usando ou não tecnologias digitais.

Apresente os exemplos do livro do estudante na lousa e identifique os conjuntos imagens por meio dos pontos de máximo e de mínimo das parábolas. Relembre com os estudantes as fórmulas para determinar a abscissa e a ordenada do vértice. As **atividades resolvidas R12** e **R13** são similares aos exemplos apresentados, com a diferença de que há um contexto real na **R13**. Se achar conveniente, oriente-os a resolver as atividades. Depois, solucione-as na lousa. Sugira a eles que façam a verificação dessa atividade utilizando um *software* de construção de gráficos. Em alguns *softwares*, basta selecionar a parábola traçada que já ficam destacados os pontos em que ela cruza os eixos *y* e *x* (zeros) e o vértice (com as devidas coordenadas). A **atividade resolvida R13** pode contribuir com o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, uma vez que os estudantes devem elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra.

Na **atividade resolvida R14**, a fórmula da ordenada do vértice é utilizada para determinar os coeficientes da função. Depois, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

Nas **atividades 39** a **42**, eles realizam análises semelhantes às feitas nas **atividades resolvidas R12** e **R13**. Assim, se houver dúvidas, oriente-os a retomar essas atividades. Na **atividade 43**, eles devem verificar os vértices das parábolas para resolver o problema proposto.

Nas **atividades 44** e **46**, os estudantes aplicam os conceitos nas questões cujos contextos envolvem a área de Física, podendo ser trabalhadas de forma interdisciplinar com o professor da **área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Na **atividade 44**, se possível, oriente-os a utilizar um *software* de construção de gráficos para verificar os resultados. Comente que o *software* traça o gráfico da função, cuja lei é $h(t) = -5t^2 + 10t$, sem considerar as restrições da situação. Nesse caso, a função não assume valores para $x < 0$ nem para $y < 0$. Avalie a conveniência de elucidar aos estudantes a diferença entre o gráfico (parábola) da função e a trajetória descrita pela pedra.

Como na **atividade 44**, os estudantes devem identificar as informações relevantes à resolução do problema no enunciado e aplicar os conhecimentos prévios na obtenção da lei de formação da função, a fim de obter os coeficientes dela, trabalhando com os pilares **abstração** e **reconhecimento de padrões** do pensamento computacional.

Nas **atividades 45**, **48** e **49**, os estudantes aplicam os conceitos de valor máximo e de valor mínimo em situações-problema. Na **atividade 49**, verifique se eles não cometem o equívoco de responder que ela deve vender cada combo por R$ 4,00. Lembre-os de que, na função, *x* representa a redução no preço do combo, e não seu preço.

Na **atividade 46**, observe com os estudantes que o gráfico apresentado na atividade é parte de uma parábola, pois a medida da altura atingida pelo atleta é sempre maior ou igual a zero.

Na **atividade 47**, oriente os estudantes a esboçar o gráfico da função para determinar mais facilmente a lei de formação correspondente. Para a **atividade 50**, organize-os em duplas e, se possível, peça a eles que trabalhem com um *software* e construção de gráficos para ajudar na elaboração dos problemas.

Construção do gráfico da função quadrática

Esse tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT402** e **EM13MAT502**, na medida em que os estudantes vão estudar como traçar gráficos de funções quadráticas com base em suas representações algébricas, distinguindo casos nos quais uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra.

Nesse momento, será apresentado um modo prático para esboçar uma parábola de uma função quadrática. Para isso, os estudantes devem analisar a concavidade da parábola e os pontos estudados anteriormente com o vértice e os pontos de intersecção com os eixos *x* e *y*. Apresente os exemplos de parábolas desenvolvidos no livro do estudante e resolva-os. Depois, oriente os estudantes a resolver a **atividade 51** em duplas. A troca de ideias pode favorecer o aprendizado deles.

O subtópico *Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função* favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT404**, articuladas com as respectivas **competências específicas 1** e **4**, além da **competência específica 3**, já que os estudantes interpretarão situações diversas e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvem a variação de grandezas e analisarão funções em suas representações algébrica e gráfica. Também favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204** de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, uma vez que os estudantes elaboram explicações e cálculos relativos aos movimentos de objetos na Terra.

Resolva os exemplos apresentados no livro do estudante. Nesse momento, será necessária a análise de domínio da função e de intervalos de valores do domínio, além dos conceitos vistos sobre o vértice da parábola e dos pontos de intersecção com os eixos *x* e *y*. Se necessário, faça uma recapitulação desses assuntos. A **atividade 54** é relacionada ao primeiro exemplo proposto. Se achar conveniente, ela pode ser resolvida após a explicação desse exemplo. Para isso, os estudantes devem realizar uma reflexão do movimento apresentado no exemplo.

Nas **atividades 55** a **57**, os estudantes aplicam os conceitos de função e dos pontos de intersecção com os eixos x e y, além do vértice da parábola.

Inequações do 2º grau

Nesse tópico, serão estudadas as inequações do 2º grau em que serão requisitados conceitos relacionados à análise de intervalos, sinais da função e os pontos de intersecção com o eixo x (zero da função). Por isso, é importante realizar uma breve recapitulação desses assuntos. Apresente exemplos de inequações do 2º grau e depois solucione a **atividade resolvida R15**. Depois, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

A **atividade 59** é similar à **atividade resolvida R15**. Se necessário, oriente os estudantes a rever essa atividade. No **item f**, relembre que qualquer número real ou expressão real elevado ao quadrado tem o resultado positivo ou nulo.

Na **atividade 60**, os estudantes devem realizar comparações e análises. Sugira que se organizem em duplas para realizar a atividade. A troca de ideias e conhecimentos pode ajudar a consolidar os conhecimentos.

No subtópico *Inequação-produto e inequação-quociente*, os estudantes se depararão com situações envolvendo inequações do 1º grau e casos de fatoração, além das inequações do 2º grau. Se necessário, faça uma revisão desses conteúdos. Utilize a **atividade resolvida R16** para mostrar como se resolvem inequações desse tipo. Comente que a análise do quadro de sinais é feita da mesma forma para as inequações-produto e as inequações-quociente. Depois, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

As **atividades 61** a **63** são semelhantes à **atividade resolvida R16**. Se necessário, oriente os estudantes a rever essa atividade. A **atividade 64** consolida os conceitos de inequações de 1º e de 2º grau e pode ser resolvida em duplas para ajudar os estudantes na consolidação dos conceitos.

No subtópico *Inequações simultâneas*, mostre que elas podem ser representadas por um sistema de inequações. Assim, as inequações devem ser resolvidas separadamente, e a solução corresponderá à intersecção das soluções das inequações.

Utilize as **atividades resolvidas R17** e **R18** para mostrar como se resolvem inequações desse tipo. Depois, oriente-os a fazer as atividades propostas.

Na **atividade 66**, se necessário, recorde com os estudantes como se determina a medida da área de uma coroa circular, em função das medidas dos comprimentos dos raios dos círculos concêntricos.

Na **atividade 67**, aproveite para explicar que a reta vertical tracejada que passa por $x = 4$ é uma assíntota do gráfico de f, ou seja, quanto mais perto o valor de x estiver de 4, mais perto o gráfico estará dessa reta, pela direita ou pela esquerda dela, mas nunca vai "encostar" nela ou "ultrapassá-la", pois o domínio da função f é $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$.

No subtópico *Identificação do domínio de uma função por meio de inequações*, comente com os estudantes que nem todas as funções reais têm como domínio o conjunto dos reais e que a resolução das inequações do tipo inequações-quociente pode ajudar na determinação do domínio dessas funções. Utilize a **atividade resolvida R19** para ilustrar essas situações.

Nas atividades **68** a **70**, os estudantes devem analisar o domínio das funções dadas. O objetivo da **atividade 71** é apresentar o gráfico de f e analisar os sinais. Para verificar os resultados encontrados, oriente-os a resolver por meio de inequações-quociente.

Para finalizar o capítulo 5

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conceitos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões dadas. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e identificar que conceitos precisam ser retomados. Depois que fizerem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA – Fato ou *fake*?

Objetivos

- Refletir sobre os impactos do compartilhamento de notícias falsas.
- Identificar notícias falsas.

Tema Contemporâneo Transversal

Vida Familiar e Social

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

ODS 4 ODS 16

Orientações didáticas

Nessa seção, pretende-se ajudar os estudantes a compreender o potencial de compartilhamento de uma notícia falsa e, a partir de uma abordagem histórica, fazer com que reflitam a respeito do impacto que uma notícia desse tipo pode ter na sociedade. Além disso, um dos objetivos é fazer os estudantes aprenderem a identificar e a decidir se podem acreditar em uma notícia recebida por meio de redes sociais ou aplicativos de mensagens instantâneas e compartilhá-la.

As reflexões promovidas pela seção contribuem para o desenvolvimento do **ODS 4: Educação de qualidade** e do **ODS 16: Paz, justiça e instituições eficazes**. O **ODS 4: Educação de qualidade** enfatiza a importância de dotar os indivíduos de conhecimentos e habilidades essenciais, incluindo a capacidade de pensar criticamente e reconhecer a veracidade das informações. O **ODS 16: Paz, justiça e instituições eficazes** destaca a necessidade de assegurar o acesso público à informação confiável e proteger as liberdades fundamentais. Refletir sobre os impactos das notícias falsas ajuda a manter a integridade da informação pública e fortalecer as instituições democráticas.

O **TCT Vida Familiar e Social** também tem seu desenvolvimento favorecido por meio dessa seção, uma vez que, nesse contexto, a desinformação pode gerar desconfiança e prejudicar relacionamentos interpessoais e comunitário.

Nas **atividades 1** e **2**, os estudantes podem trazer exemplos pessoais que ajudem a mostrar o efeito negativo das *fake news*, além de utilizar dados apresentados no texto.

Na **atividade 3**, é importante relembrar o que foi lido no início da seção e, na **atividade 4**, é interessante revisitar o esquema e verificar que ainda há mais etapas importantes para garantir que seja seguro compartilhar a notícia. Na **atividade 5**, garanta que os estudantes estejam acessando fontes confiáveis, para que possam verificar que, ainda que a hidratação seja importante para lidar com diversas doenças, ela não é uma cura milagrosa.

PESQUISA E AÇÃO – Videodocumentário

Objetivos

- Pesquisar sobre educação para o trânsito.
- Pesquisar sobre a contribuição da ciência e da tecnologia para a segurança no trânsito.
- Criar um videodocumentário.
- Apresentar o videodocumentário à comunidade escolar com o intuito de conscientizá-la sobre a importância da educação para o trânsito.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 2**, **4**, **5**, **7**, **9** e **10.**
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 1: **EM13MAT101**, **EM13MAT102** e **EM13MAT104**.

  Competências específicas 2 e 4.
- **Competências específica da área de Linguagens e suas Tecnologias:**

  Competência específica 7[1].

  Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Educação para o Trânsito
- Ciência e Tecnologia

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

ODS 4 ODS 17

Orientações didáticas

Com a finalidade de organizar o trabalho, o projeto dessa seção é proposto em etapas, que poderão ser feitas no decorrer do período escolar. Mesmo que algumas etapas, como a pesquisa, possam ser realizadas fora da sala de aula, é importante avaliar o perfil dos estudantes e orientá-los com relação ao planejamento, ao prazo, ao material preciso e a outros aspectos necessários à realização do trabalho, selecionando algumas aulas (momentos presenciais) para as orientações e o acompanhamento.

É importante haver ações que conscientizem todos a agir de maneira colaborativa nos diferentes papéis que possam assumir no trânsito: de pedestres, ciclistas, condutores ou passageiros. A proposta dessa seção é mobilizar os estudantes a refletir sobre educação para o trânsito e possibilitar que eles se tornem multiplicadores da mensagem de conscientização para a comunidade escolar. Por tudo isso, a seção contribui para que seja desenvolvido o **TCT Educação para o Trânsito**.

O tema e as reflexões promovidas pela seção contribuem para que os **ODS 4: Educação de qualidade** e **ODS 17: Parcerias e meios de implementação** tenham seu desenvolvimento favorecido. A Educação no trânsito se encaixa no **ODS 4: Educação de qualidade** ao capacitar os cidadãos com conhecimentos sobre segurança viária, regras de trânsito e comportamentos responsáveis, promovendo uma cultura de prevenção de acidentes desde a juventude. O tema também está alinhado ao **ODS 17: Parcerias e meios de implementação**, pois a colaboração entre governos, instituições educacionais, empresas e comunidades é essencial para desenvolver e implementar programas educacionais eficazes, bem como para melhorar a infraestrutura viária e promover políticas públicas que priorizem a segurança no trânsito.

1 **(Competência específica 7)** Mobilizar práticas de linguagem no universo digital, considerando as dimensões técnicas, críticas, criativas, éticas e estéticas, para expandir as formas de produzir sentidos, de engajar-se em práticas autorais e coletivas, e de aprender a aprender nos campos da ciência, cultura, trabalho, informação e vida pessoal e coletiva.

Para criar o videodocumentário, os estudantes devem pesquisar e aprender como utilizar tecnologias e recursos digitais para a captura do áudio e do vídeo e como realizar a edição desse material, o que pode contribuir para o desenvolvimento da **competência geral 5** e da **competência específica 7** da **área de Linguagens e suas Tecnologias**. Ao compor o documentário, os estudantes devem utilizar diferentes abordagens e linguagens para atrair a atenção dos telespectadores e transmitir a mensagem de maneira clara e objetiva, o que contribui para o desenvolvimento da **competência geral 4**. Uma vez que os registros devem apresentar porcentagens, envolver a criação de gráficos e tabelas para apresentar dados, também é favorecido o desenvolvimento das **competências específicas 1, 2** e **4** articuladas com as habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT102** e **EM13MAT104**.

ETAPA 1

Nessa etapa, com base nas questões propostas, a turma será orientada a pesquisar e a conversar sobre a contribuição da ciência e da tecnologia para a segurança no trânsito (**TCT Ciência e Tecnologia**) e sobre a importância da educação para o trânsito a fim de torná-lo mais cooperativo e seguro. Estimule os estudantes a pensar sobre a relevância da solidariedade e da cooperação para que o trânsito seja seguro, aspecto que pode ser abordado no videodocumentário. A tarefa visa exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, promovendo a investigação, a reflexão e uma análise crítica a respeito das informações obtidas, o que pode favorecer o desenvolvimento da **competência geral 2**.

Os momentos de conversa das **atividades 1** e **2** têm o objetivo de envolver os estudantes no tema e despertar em cada um o interesse pela produção do videodocumentário. Estimule-os a expor suas ideias e opiniões e faça contribuições a fim de ajudá-los a pensar no tema.

Na **atividade 3**, oriente os estudantes a buscar informações e dados em *sites* confiáveis que serão utilizados na criação do videodocumentário, o que pode contribuir para o desenvolvimento da **competência geral 7**.

Na **atividade 4**, para a criação do videodocumentário, é preciso que o grupo elenque um ponto de vista a ser defendido ou refutado. Por isso, o momento de pesquisa e de compartilhamento de informações entre os estudantes é importante para que ampliem seu repertório de conhecimentos sobre o tema e definam uma abordagem, produzindo uma obra consistente e com objetivo claro.

ETAPA 2

Caso julgue oportuno, apresente aos estudantes um videodocumentário sobre trânsito, a fim de que eles se inspirem e observem a estrutura desse gênero. Enquanto assistem, peça que observem: o ponto de vista apresentado, se há um narrador, se o conteúdo é exposto por meio de entrevistas, quem é o entrevistado, se há música, se há cenas filmadas e quais são essas cenas, qual é o título do videodocumentário e como ele é apresentado, como os dados são divulgados etc. Uma sugestão de videodocumentário que trata do trânsito chama-se "Luto em luta", produzido por jovens após perderem o amigo em um acidente de trânsito, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=6vG4NXgdJA8. Acesso em: 24 set. 2024.

Na **atividade 5**, caso os estudantes decidam narrar um texto, explique aos redatores que esse texto deve ser conciso e interligar as cenas de forma coerente, construindo uma linha de raciocínio.

Na **atividade 6**, explique que a filmagem de cenas como carros e ciclistas transitando nas vias deve ser feita acompanhada por um adulto. Além disso, oriente os estudantes a não filmar o rosto das pessoas, pois, para uso de imagem, seria necessária a autorização delas. É importante dizer também que as cenas podem transmitir a mensagem por si mesmas, sem que seja preciso narrador ou ator.

Na **atividade 7**, para a criação do videodocumentário, atue como mediador, a fim de que os estudantes tenham autonomia para criar, mas sejam orientados quanto à organização e à realização das atividades. Os grupos precisam ter sempre em mente que o ponto de vista do videodocumentário deve ser apresentado de modo coerente. Assim, é importante que todos os integrantes do grupo conversem e definam juntos os aspectos do trabalho em todas as fases.

ETAPA 3

Na **atividade 8**, é importante que os estudantes tenham um olhar clínico nessa etapa para garantir que o documentário esteja como o desejado. Além disso, a elaboração do título é uma etapa importante de trabalho coletivo, e os estudantes podem optar por uma votação para garantir que seja um processo democrático.

Na **atividade 9**, caso julgue oportuno, escolha, com a turma, alguns estudantes que poderão realizar a abertura e o fechamento do evento de exibição dos vídeos, explicando os objetivos, o processo de criação e produção, bem como a importância da educação para o trânsito na sociedade.

Os vídeos também podem ser disponibilizados no *site* ou nas redes sociais da instituição, para ampliar e divulgar a mensagem de conscientização e educação para o trânsito; porém, para isso, é importante providenciar autorização de uso de imagem de estudantes e entrevistados.

ETAPA 4

Na **atividade 10**, após a exibição dos vídeos, é importante promover um momento de conversa com os estudantes para que avaliem todas as etapas da atividade, reflitam sobre os pontos positivos e negativos e sugiram melhorias para a criação de outros videodocumentários no futuro.

Durante o momento de autoavaliação **da atividade 11**, espera-se que os estudantes sejam incentivados a pensar sobre seu processo de aprendizagem, a analisar as dificuldades enfrentadas e como foram resolvidas, bem como a refletir sobre o que aprenderam.

As etapas **3** e **4** favorecem o desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10**, pois os estudantes são convidados a assistirem aos videodocumentários dos colegas, refletindo sobre o conteúdo apresentado e como podem contribuir de maneira construtiva para melhorar cada documentário apresentado, exercitando a empatia, o diálogo, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro. Além disso, devem discutir e refletir sobre como a ciência e a tecnologia contribuem para um trânsito mais seguro e sobre a importância da educação para o trânsito. Ao produzir os documentários, os estudantes agem coletivamente com autonomia, responsabilidade, sendo flexíveis às ideias e propostas, trabalhando com resiliência e determinação para a conclusão da atividade, tendo como base as leis de trânsito e o bem-estar dos cidadãos.

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 2

Objetivos

- Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes.
- Preparar os estudantes para os conteúdos que serão estudados no 2º semestre.

Orientações didáticas

A proposta desta avaliação é que os estudantes realizem as atividades com base nos conhecimentos prévios.

O quadro a seguir relaciona as atividades às habilidades da BNCC voltadas para o Ensino Fundamental – Anos finais que os estudantes mobilizam durante a resolução das atividades e às habilidades do Ensino Médio que serão desenvolvidas ao longo do semestre.

Relação entre as habilidades do Ensino Fundamental – Anos finais desenvolvidas nas atividades e as habilidades do Ensino Médio

Atividades	Assuntos	Habilidades do Ensino Fundamental – Anos finais	Habilidades do Ensino Médio
1	Potência de um número real com expoente inteiro	**(EF09MA03)** Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.	–
2	Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas	**(EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.	–
3 e 4	Sequências	**(EF08MA11)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.	–
5	Porcentagem	**(EF08MA04)** Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.	EM13MAT303
6	Juro composto	**(EF09MA05)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.	EM13MAT303
7	Fluxograma	**(EF06MA34)** Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).	EM13MAT315 e EM13MAT405

Analisando as respostas do estudante às atividades, é possível avaliar seus conhecimentos prévios e identificar defasagens ou enganos cometidos. Isso pode ajudar a planejar o trabalho durante o semestre.

Na **atividade 1**, se o estudante indicou a **alternativa a** como sendo a correta, provavelmente considerou que o sinal do expoente de 2^{-1} corresponde ao sinal da base da potência. Se indicou a **alternativa b**, é possível que tenha considerado 3^0 igual a 0. Se obteve a **alternativa c**, possivelmente considerou que potência de uma potência é uma potência cujo expoente também é uma potência; por exemplo: $(2^3)^2$ como 2^{3^2}. Se indicou a **alternativa e**, é provável que tenha considerado que, no produto de potências de mesma base, deva ser feita a adição das bases e a adição dos expoentes.

Na **atividade 2**, se o estudante obteve as **alternativas a** ou **d**, pode ter se enganado na aplicação do princípio aditivo em algum momento, anulando um termo no primeiro membro da igualdade, mas adicionando esse mesmo termo, em vez de seu oposto, ao segundo membro. Caso tenha indicado a **alternativa b**, é possível que tenha calculado que o valor de y é -1; no entanto, ao tentar determinar o valor de x, substitui y incorretamente por 1. E, se escolheu a **alternativa e**, pode ter se esquecido do termo $(-3y)$ da primeira equação.

A **atividade 3** relembra a identificação da lei de formação de uma sequência. Se o estudante obteve as **alternativas a** ou **e**, provavelmente não notou que a sequência produzida não tem o primeiro termo da sequência do enunciado (1). Se indicou a **alternativa b**, não identificou que a sequência deve ser crescente e de primeiro termo 1. Se optou pela **alternativa c**, não considerou que os números pares não devem fazer parte da sequência.

Na **atividade 4**, se o estudante identificou como sendo correta a **alternativa a**, pode ter relacionado o oitavo termo com o número 8. Se obteve a **alternativa b**, pode não ter determinado o oitavo termo, mas, sim, o sétimo. Se identificou as **alternativas d** ou **e**, pode ter adicionado os três termos anteriores da sequência, respectivamente, a partir do sétimo e do quinto termo.

Na **atividade 5**, se o estudante indicou como sendo correta a **alternativa a**, pode ter considerado $\frac{4}{5} = 0{,}8$ e, de modo equivocado, ter associado esse resultado a 8%. Se indicou a **alternativa c**, pode ter confundido 75% com 72,5%. Se optou pela **alternativa d**, possivelmente deve ter contabilizado apenas as partes pintadas (32 partes) e considerado ser a porcentagem representada. Se indicou a **alternativa e**, pode ter considerado que há 100 partes no total, quando, de fato, há 110 partes.

Na **atividade 6**, se obteve as **alternativas a** ou **b**, o estudante se equivocou ao multiplicar o capital inicial e o montante de cada mês por 1,005 em vez de 1,05 (após 1 mês de aplicação, o montante será de R$ 201,00; após 2 meses, R$ 202,01; e após 3 meses, R$ 203,02); além disso, se identificou a **alternativa b**, possivelmente ele calculou o montante apenas após 1 mês de aplicação. Se indicou a **alternativa c**, é possível que ele tenha realizado os cálculos considerando a modalidade de juro simples (5% de R$ 200,00 é igual a R$ 10,00; após 1 mês de aplicação, o montante será de R$ 210,00; após 2 meses, R$ 220,00; e após 3 meses, R$ 230,00). Se optou pela **alternativa e**, provavelmente ele tenha aplicado a modalidade de juro simples e a taxa de 0,5 em vez de 0,05 ($0{,}5 \times$ R$ 200,00 = = R$ 100,00; após 1 mês de aplicação, o montante será de R$ 300,00; após 2 meses, R$ 400,00; e após 3 meses, R$ 500,00). Em qualquer uma das situações apresentadas, sugere-se que seja feita uma revisão dos conceitos e dos cálculos de juro simples e composto, destacando as diferenças de cada uma dessas modalidades.

Na **atividade 7**, o estudante deve relacionar as figuras e os passos de um fluxograma. Se ele indicou as **alternativas a**, **b** ou **d** como sendo as corretas, provavelmente se confundiu com a ordem de ocorrência das figuras E e F, não identificando o passo “Fim” como o último do fluxograma. Além disso, na **alternativa a**, é possível que ele não tenha notado que o “Início” ficou como segundo passo. Se ele escolheu as **alternativas d** ou **e**, não conseguiu diferenciar as figuras C e D do fluxograma, que indicam, respectivamente, uma ação e uma tomada de decisão.

CAPÍTULO 6 Função exponencial

Objetivos

- Efetuar as operações de potenciação e radiciação.
- Identificar uma função exponencial.
- Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial.
- Resolver situações-problema que envolvam funções exponenciais.
- Resolver equações, sistemas e inequações exponenciais.

Justificativa dos objetivos

A função exponencial pode ser usada para representar modelos matemáticos de muitas situações da vida real, tais como: cálculos financeiros, datação de materiais arqueológicos e crescimento ou decrescimento de uma população. Um exemplo de comportamento exponencial ocorrido recentemente foi a disseminação do coronavírus. Dessa maneira, a função exponencial tem importância pelas aplicações em diversas áreas e aspectos da vida social e da pesquisa científica.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 2** e **5**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  Competência específica 1: **EM13MAT101**.
  Competência específica 3: **EM13MAT304**.
  Competência específica 4: **EM13MAT404**.
  Competência específica 5.
- **Competências específicas e habilidades da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  Competência específica 1[1]: **EM13CNT103**[2] e **EM13CNT104**[3].

1 **(Competência específica 1)** Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

2 **(EM13CNT103)** Utilizar o conhecimento sobre as radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação em equipamentos de uso cotidiano, na saúde, no ambiente, na indústria, na agricultura e na geração de energia elétrica.

3 **(EM13CNT104)** Avaliar os benefícios e os riscos à saúde e ao ambiente, considerando a composição, a toxicidade e a reatividade de diferentes materiais e produtos, como também o nível de exposição a eles, posicionando-se criticamente e propondo soluções individuais e/ou coletivas para seus usos e descartes responsáveis.

Competência específica 2[1]: **EM13CNT202**[2] e **EM13CNT203**[3].

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Tema Contemporâneo Transversal

Ciência e Tecnologia

Orientações didáticas

Os tópicos deste capítulo articulam-se com a **competência geral 5**, a **competência específica 4** e a habilidade **EM13MAT304**, uma vez que os estudantes estudam as funções exponenciais a fim de compreendê-las e utilizá-las, com flexibilidade e precisão, na modelagem e na resolução de problemas com ou sem o apoio de tecnologias digitais.

Se julgar pertinente, amplie a exploração da abertura deste capítulo propondo um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias utilizando como tema o acidente radioativo com césio-137, ocorrido em Goiânia (GO) em 1987. Oriente os estudantes a pesquisarem sobre radioatividade, radioatividade do césio-137, isótopos radioativos e suas aplicações na ciência e na tecnologia. Podem ser feitas perguntas norteadoras como: "O que é um elemento radioativo?"; "O que é um isótopo radioativo de um elemento químico?"; "Quais são suas aplicações na ciência e na tecnologia?"; "Quais são as consequências para a saúde e para o ambiente ao manipular material radioativo sem os devidos cuidados?"; "Quantos anos serão necessários para que a região afetada pelo césio-137 se torne segura?"; "Como deve ser o descarte de lixo radioativo?"; "Você já ouviu falar de outros acidentes radioativos? Se sim, quais eram os elementos químicos envolvidos?". Uma fonte confiável para obter informações a respeito desse assunto está disponível no *site* da Secretaria de Estado da Saúde de Goiás: https://goias.gov.br/saude/cesio-137-goiania/ (acesso em: 25 set. 2024). Nesse *site*, há um vídeo e algumas fotografias sobre o acidente com o césio-137 que podem enriquecer a pesquisa.

O assunto dialoga com o **TCT Ciência e Tecnologia** e com a **competência específica 1 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, uma vez que o estudante é levado a refletir sobre um elemento químico e um fenômeno natural associado (o césio e sua meia-vida), seu uso em equipamentos médico-hospitalares e a destinação de resíduos radioativos em nosso país. Esse trabalho também pode favorecer o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT103** e **EM13CNT104**, com o estudo de radiações, suas aplicações, potencialidades e riscos à saúde e ao ambiente, ao propor uma discussão a respeito do descarte adequado de material radioativo.

Introdução ao estudo da função exponencial

Para iniciar o estudo da função exponencial, o tópico contextualiza uma situação que pode ser modelada por uma função exponencial: o crescimento populacional. Nesse momento, os estudantes devem analisar uma tabela contendo os dados estimados com base em uma taxa de crescimento populacional anual apresentada pelo IBGE para compreender o papel dessa taxa. Em seguida, o uso de planilha eletrônica é apresentado como recurso para agilizar os cálculos envolvendo a taxa de crescimento populacional. Se julgar oportuno e houver disponibilidade de um laboratório de informática na escola, reproduza nele a planilha com os estudantes e analisem a regularidade que pode ser observada nos dados da tabela para fazer a constatação de que o crescimento populacional é exponencial.

Nesse momento, é importante revisar e aprofundar os conhecimentos acerca da potenciação. As **atividades 1** a **3** exploram as potências de expoente natural e de expoente inteiro negativo, e as propriedades dessas potências.

Na **atividade 4**, os estudantes vão identificar as informações que não foram utilizadas para a resolução da **atividade 3**. Buscar a informação relevante, filtrando-a de todas as disponíveis, durante a resolução de um problema pode favorecer o desenvolvimento de um dos pilares do pensamento computacional: a **abstração**.

As **atividades 5** a **9** exploram as potências com expoente racional e com expoente irracional, bem como a simplificação e a racionalização do denominador de expressões.

Nos **itens a** e **b** da **atividade 5**, os estudantes podem ser incentivados a resolver por tentativa e erro, aplicando seus conhecimentos prévios a respeito de raízes que envolvem apenas números naturais para, depois, calcular as raízes dos números racionais da atividade. No **item a**, eles podem procurar o número natural que elevado ao quadrado seja igual a 169; no **item b**, o número natural que elevado ao cubo resulta em 1.728. Encontrando esses valores, é mais fácil determinar os valores das raízes dos números racionais.

Explique aos estudantes que a **atividade 9** usa a ideia da interpolação, ou seja, uma técnica para estimar valores em um intervalo de um conjunto discreto.

Função exponencial

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT304** e **EM13MAT404**, já que os estudantes analisarão funções em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínio, imagem e intervalos de crescimento e decrescimento.

O tema que introduz o tópico favorece o desenvolvimento da **competência geral 2**, uma vez que os estudantes vão estudar o crescimento populacional de bactérias fundamentados em uma modelagem matemática. Se julgar oportuno,

1 **(Competência específica 2)** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

2 **(EM13CNT202)** Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

3 **(EM13CNT203)** Avaliar e prever efeitos de intervenções nos ecossistemas, e seus impactos nos seres vivos e no corpo humano, com base nos mecanismos de manutenção da vida, nos ciclos da matéria e nas transformações e transferências de energia, utilizando representações e simulações sobre tais fatores, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

proponha um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Os estudantes podem pesquisar, por exemplo, quais fatores podem influenciar o desenvolvimento de bactérias em nosso organismo ou no ambiente, identificando as que podem ser prejudiciais à saúde, e, em seguida, buscar informações que os ajudem a prevenir a disseminação e o crescimento populacional indesejável de bactérias. Esse trabalho também pode favorecer o desenvolvimento da **competência específica 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e das habilidades **EM13CNT202** e **EM13CNT203**.

Após a definição de função exponencial, os estudantes analisarão sua representação gráfica, de modo que possam identificar a curva a que se assemelha. Em seguida, com base no quadro de valores e na representação gráfica, incentive-os a verificar o crescimento ou o decrescimento da função exponencial.

Na **atividade 11**, os estudantes mobilizam estratégias e conhecimentos previamente adquiridos para relacionar as leis de cada função a seus respectivos gráficos, uma vez que os padrões do comportamento da função em termos gráficos podem ser analisados a partir dos expoentes e da base da função exponencial. Dessa maneira, mobilizam-se habilidades do **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do pensamento computacional.

Para ampliar o trabalho, se julgar pertinente, sugira o uso de um *software* de construção de gráficos e proponha as atividades de exploração em grupo apresentadas a seguir.

- Peça aos estudantes que construam os gráficos das funções g_1, g_2, g_3 e g_4, dadas por $g_1(x) = 2^x + 1$, $g_2(x) = 2^x + 2$, $g_3(x) = 2^x - 1$ e $g_4(x) = 2^x - 2$, em um mesmo plano cartesiano. Depois, eles devem redigir um texto explicando como obter o gráfico da função $g(x) = 2^x + k$, tendo como base o gráfico de 2^x. Espera-se que percebam que o gráfico de g é obtido deslocando-se o gráfico de 2^x, verticalmente, k unidades, para cima se $k > 0$ e para baixo se $k < 0$.
- Peça aos estudantes que construam os gráficos das funções f_1, f_2, f_3 e f_4, dadas por $f_1(x) = 3^{x+1}$, $f_2(x) = 3^{x+2}$, $f_3(x) = 3^{x-1}$ e $f_4(x) = 3^{x-2}$, em um mesmo plano cartesiano. Depois, devem explicar em um texto como obter o gráfico da função $f(x) = 3^{x+k}$, tendo como base o gráfico de 3^x. Espera-se que percebam que o gráfico de f é obtido deslocando-se o gráfico de 3^x, horizontalmente, k unidades, para a esquerda se $k > 0$ e para a direita se $k < 0$.

As **atividades 12** a **14** incentivam os estudantes a refletirem acerca da função exponencial, especialmente na análise do domínio e do conjunto imagem. Na **atividade 14**, espera-se que percebam que o gráfico da função f é o gráfico da função $g(x) = 2^x$ transladado 4 unidades para cima. Com base nessas informações, é possível obter o conjunto imagem de f sem construir seu gráfico.

A **atividade 16** traz dados a mais que o estritamente necessário para a resolução. É interessante questionar os estudantes se, retirada a informação sobre as coordenadas de um dos três pontos destacados no gráfico, ainda assim a resolução é possível.

As **atividades 17** a **19** exploram o fato de que os resultados obtidos são sempre iguais à base a da função exponencial, de modo que eles possam concluir que $\frac{f(x)}{f(x-1)} = a$.

A **atividade 20** explora a história da Matemática como um recurso para despertar o interesse dos estudantes e propicia a reflexão, a investigação e a formulação de argumentos, caracterizando a atividade matemática como uma atividade humana e favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 5**.

O subtópico *Aplicações da função exponencial* favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT304**, visto que os estudantes resolvem e elaboram problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação entre grandezas. Além disso, permite articulação com a **competência específica 3**, uma vez que os estudantes utilizam os conceitos e os procedimentos relacionados às funções exponenciais, e outras funções obtidas a partir dela, como estratégia na elaboração e resolução de problemas, como pode ser observado na **atividade 21**.

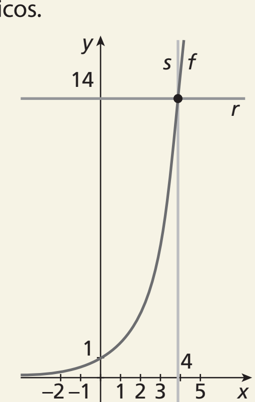
As **atividades 22**, **24** e **25** exploram a função exponencial em contextos que propiciam uma abordagem interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

O regime de juro composto e a obtenção de suas fórmulas serão estudados no capítulo 9, por isso a fórmula está explícita no enunciado, de modo que não seja um impeditivo para a resolução da **atividade 23**.

Equações exponenciais e sistemas

O estudo das equações exponenciais propicia o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT304** e de habilidades relacionadas ao raciocínio lógico e matemático, além de favorecer o desenvolvimento da **decomposição**, um dos pilares do pensamento computacional, uma vez que os estudantes serão incentivados a usar as propriedades dos expoentes e técnicas de resolução de sistemas, de modo a simplificar as resoluções. A compreensão das equações exponenciais também é essencial para o estudo das funções logarítmicas no próximo capítulo.

A **atividade 30** retoma a ideia de cálculo por estimativa proposta na **atividade 28**. É importante os estudantes perceberem que, no estudo da Matemática, não há apenas questões com resultados únicos e exatos; há também resultados estimados em um intervalo. Outra maneira de estimar o valor de x, em cada item, é por meio da construção do gráfico da função cuja lei é dada pela expressão do 1º membro da igualdade. Por exemplo, no **item a**, após construir o gráfico de $f(x) = 2^x$, obtemos o valor de x tal que $2^x = 14$, traçando uma reta horizontal r pelo ponto (0, 14) e uma reta vertical s pelo ponto de intersecção de r com o gráfico de f. A reta s intercepta o eixo x em um ponto cuja abscissa é o valor procurado. Se possível, esse procedimento pode ser feito em um *software* de construção de gráficos.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

As **atividades 31** e **35** são questões contextualizadas extraídas de vestibulares recentes que exploram as funções e as equações exponenciais.

Para resolver a **atividade 36**, os estudantes devem considerar a existência de um valor x de modo que $f(x) = g(x)$ para determinar ponto de intersecção.

Inequações exponenciais

Neste tópico, os estudantes identificarão e resolverão inequações exponenciais, retomando a representação gráfica das funções exponenciais crescente ou decrescente e analisando a base da potência.

Na **atividade 38**, os estudantes precisam empregar o que aprenderam sobre inequações exponenciais para a identificação do domínio das funções.

Nas **atividades 41** a **43**, os estudantes devem responder às questões propostas com base na análise da representação gráfica. Mostre que, na representação em um *software* de construção de gráficos, como o sugerido na **atividade 43**, é possível perceber visualmente a mudança de sentido do sinal da inequação para o sinal do conjunto solução.

Para finalizar o capítulo 6

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma forma diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões dadas. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que fizerem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 7 Função logarítmica

Objetivos

- Calcular logaritmo.
- Identificar uma função logarítmica.
- Analisar e construir o gráfico de uma função logarítmica.
- Resolver situações-problema que envolvam logaritmos.
- Resolver equações, sistemas e inequações logarítmicas.

Justificativa dos objetivos

A função logarítmica é a função inversa da exponencial e pode ser usada para modelar situações que envolvem pH, abalos sísmicos, radioatividade, cálculos financeiros, entre outras. Assim como a função exponencial, tem importância pelas aplicações em diversas áreas e diferentes aspectos da vida social e da pesquisa científica.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 1** e **5**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias**:

  Competência específica 3: **EM13MAT305**.

  Competência específica 4: **EM13MAT403** e **EM13MAT404**.

  Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Ciência e Tecnologia
- Trabalho

Orientações didáticas

A abertura deste capítulo favorece uma discussão a respeito dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender a realidade. Se julgar pertinente, peça aos estudantes que aprofundem a pesquisa relacionada aos estudos sobre a luz das estrelas por meio do *link* http://www.if.ufrgs.br/~fatima/fis2010/Aula15-132.pdf (acesso em: 25 set. 2024). Essa abordagem favorece o desenvolvimento da **competência geral 1**.

A apresentação do contexto histórico da análise da magnitude do brilho das estrelas permite uma abordagem do **TCT Ciência e Tecnologia**.

A **competência específica 3** e a habilidade **EM13MAT305** são favorecidas em vários momentos do capítulo, uma vez que os estudantes constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas envolvendo funções logarítmicas. Além disso, diversas atividades do capítulo são contextualizadas com conceitos da área de Química, possibilitando um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Para esse trabalho, divida a turma em grupos a fim de que pesquisem diferentes assuntos que utilizam logaritmo, como o pH e a meia-vida de substâncias radioativas.

Logaritmo

Neste tópico, são abordadas a definição de logaritmo e as propriedades que são consequências dessa definição. Apresente a situação da evolução do número de bactérias para evidenciar aos estudantes que o logaritmo corresponde à relação inversa da exponencial de mesma base. Depois, na lousa, resolva os exemplos numéricos que aparecem na sequência.

Em seguida, oriente os estudantes a solucionar as **atividades resolvidas R1** a **R5**, que são resolvidas com base na aplicação da definição de logaritmo. Depois que eles terminarem, faça-as na lousa a partir das indicações da turma. A **atividade resolvida R3** relaciona logaritmo a equações e inequações exponenciais. Na **atividade resolvida R5**, é necessária a resolução de inequações de 1º e 2º graus, estudadas em capítulos anteriores. Por isso, se necessário, retome esse assunto antes da resolução da atividade. Em seguida, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

Nas **atividades 1** a **8**, os estudantes devem aplicar a definição de logaritmo. As **atividades 2** e **3** são similares à **atividade resolvida R3**; as **atividades 6** e **7**, por sua vez, são similares à **atividade resolvida R4**. Assim, se houver dificuldades, oriente-os a rever essas atividades resolvidas. Depois, resolva as atividades na lousa e elucide eventuais dúvidas.

No subtópico *Propriedades que são consequências da definição de logaritmo*, apresente cada propriedade na lousa seguida de um exemplo numérico para facilitar o entendimento da turma. Depois, resolva os exemplos apresentados, resgatando cada uma dessas propriedades. Por fim, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

As **atividades 9** a **11** estão relacionadas à definição de logaritmo e às propriedades que são consequências dessa definição. Para auxilar no entendimento dos estudantes, peça a eles que indiquem qual propriedade foi utilizada para a resolução de cada atividade. Organize a turma em duplas para que resolvam as **atividades 12** a **14**. Nessas atividades, os estudantes deverão aplicar as propriedades

Propriedades operatórias dos logaritmos

Neste tópico, serão estudadas as propriedades operatórias dos logaritmos e como se realiza a mudança de base de um logaritmo. Esses assuntos serão muito úteis na resolução de problemas envolvendo logaritmos.

Apresente as propriedades relacionadas ao logaritmo de um produto, de um quociente e de uma potência. É importante que, após a apresentação de cada propriedade, sejam resolvidos exemplos numéricos relacionados à respectiva propriedade para ajudar no entendimento dos estudantes. Se achar necessário, apresente mais exemplos. Em seguida, oriente-os a fazer as **atividades resolvidas R6** a **R8** e, depois, resolva-as na lousa. Nessas atividades, os estudantes aplicam diretamente as propriedades operatórias. Na **atividade resolvida R7**, comente sobre a possibilidade de se trocar os logaritmandos por um produto, um quociente ou uma potência, de modo que seja possível utilizar a informação fornecida. Por fim, instrua-os a resolver as atividades propostas.

Nas **atividades 15** a **17**, similares às **atividades resolvidas R6** e **R8**, os estudantes devem aplicar as propriedades estudadas. Chame a atenção deles para o fato de que, na **atividade 16**, as propriedades operatórias podem ser usadas para transformar uma adição/subtração de logaritmos, respectivamente, em logaritmo de um produto/quociente.

As **atividades 18** e **19** são similares à **atividade resolvida R7**. Se houver necessidade, essa atividade pode ser retomada. Já as **atividades 20** e **21** podem ser feitas em duplas. Nelas, é preciso aplicar as propriedades operatórias de logaritmo em um contexto da Química.

No subtópico *Mudança de base*, comente que essa propriedade dos logaritmos é muito utilizada na resolução de problemas e no uso de calculadoras científicas, pois a maioria trabalha apenas com logaritmos de base 10.

O texto apresenta o procedimento para calcular log 100 utilizando uma calculadora similar à reproduzida na imagem do livro. Se forem utilizadas calculadoras científicas de outros modelos, esse procedimento pode variar.

Se julgar conveniente, mostre aos estudantes como calcular logaritmos usando uma planilha eletrônica. Nesse caso, para calcular $\log_2 10$, por exemplo, basta digitar a seguinte fórmula em uma célula qualquer da planilha:

= LOG(10; 2)
base
logaritmando

Apresente a propriedade utilizada para a mudança de base e resolva os exemplos apresentados. Se possível, oriente os estudantes a resolver os exemplos usando uma calculadora científica, ou algum programa ou aplicativo que simulem uma calculadora científica. Depois, instrua-os a fazer a **atividade resolvida R9**, que apresenta situações que requerem a mudança de base dos logaritmos. Com uma calculadora científica, peça-lhes que solucionem a **atividade resolvida R10**. Em seguida, solucione a **atividade resolvida R11**, relacionada à Matemática financeira. Por fim, oriente-os a resolver as atividades propostas.

Na **atividade 22**, similar à **atividade resolvida R10**, os estudantes devem utilizar uma calculadora científica. Caso não seja possível o uso da calculadora, oriente-os a utilizar os dados da **atividade 23** na resolução. As **atividades 23** e **24** são aplicações da regra de mudança de base. Se houver dúvidas, retome com a turma os exemplos resolvidos.

Nas **atividades 26** a **30**, os estudantes aplicam a regra de mudança de base para simplificar ou calcular expressões. Essas atividades são similares à **atividade resolvida R9**, a qual pode ser retomada em caso de dúvida. Nessas atividades, pode-se abrir uma conversa com os estudantes sobre as bases adotadas e instigá-los a testar outros valores.

Na **atividade 31**, avalie a conveniência de conversar com os estudantes sobre outros exemplos em que a base do logaritmo e o logaritmando podem ser escritos como potências de mesma base (respeitando as condições de existência). Ressalte que, nesses casos, pode-se calcular o logaritmo efetuando a mudança para qualquer base.

As **atividades 32** e **33** apresentam situações relacionadas à Matemática financeira e são similares à **atividade resolvida R11**, a qual pode ser retomada em caso de dúvida. Na **atividade 33**, para calcular um acréscimo de 20% sobre um valor, espera-se que os estudantes percebam que basta multiplicar o valor por 1,2. Na **atividade 34**, os estudantes devem adotar outros valores para a **atividade 33** e refazê-la. Por isso, organize a turma em duplas para que possam trocar ideias.

Função logarítmica

Este tópico favorece o desenvolvimento das **competências específicas 3** e **4** e das habilidades **EM13MAT305**, **EM13MAT403** e **EM13MAT404**, pois os estudantes vão resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas, analisar funções definidas por uma sentença em sua representação algébrica e gráfica, identificando domínio, imagem, crescimento e decrescimento, e estabelecer relações entre as representações de funções exponencial e logarítmica.

Apresente o conceito de função logarítmica, reforçando a condição de existência relacionada ao logaritmando. Mostre exemplos de funções logarítmicas e, em seguida, faça as atividades resolvidas. A **atividade resolvida R12** e as **atividades 35** e **36** trabalham com conceitos de função e a definição de logaritmo. A **atividade resolvida R13** e as **atividades 37** e **38** abordam a análise das condições de existência de funções logarítmicas para determinar seu domínio. Por isso, caso os estudantes tenham dificuldades nas atividades, podem ser retomadas as atividades resolvidas.

No subtópico *Gráfico da função logarítmica*, esboce na lousa o gráfico das funções apresentadas. Mostre que a análise da base permite verificar se a função é crescente ou decrescente. Apresente os exemplos do livro para confirmar esses conceitos. Depois, mostre que a função logarítmica e a exponencial são funções inversas e simétricas em relação à função identidade. Em seguida, faça a **atividade resolvida R14**, que reforça que a função logarítmica e a exponencial são funções inversas. Já a **atividade resolvida R15** utiliza conceitos de função para a resolução de um problema relacionado ao gráfico de uma função logarítmica.

Em seguida, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas, as quais podem ser feitas em duplas. Nas **atividades 39** a **49**, eles devem utilizar os conhecimentos adquiridos previamente observando as bases das funções logarítmicas, bem como seus parâmetros e coeficientes, a fim de esboçar seu gráfico ou determinar seu comportamento. Essas atividades dialogam com o pilar **reconhecimento de padrões** do pensamento computacional.

Na **atividade 45**, se possível, oriente os estudantes a utilizarem um *software* de construção de gráficos para verificar os gráficos esboçados.

Na **atividade 46**, eles vão construir o gráfico de uma função exponencial e uma logarítmica e reconhecer padrões de comportamento das funções e da representação de seus gráficos. Espera-se que eles percebam que as funções são inversas e que os gráficos são simétricos em relação à reta $y = x$. Retome a **atividade resolvida R14**, se achar necessário.

A **atividade 47** pode ser feita usando um *software* de construção de gráficos, a fim de que os estudantes possam testar mais valores a fim de generalizar as conclusões para a obtenção dos gráficos das funções g e h com base no gráfico de f, dados $f(x) = \log x$, $g(x) = \log (x + k)$ e $h(x) = \log x + k$. Sugira-lhes que também atribuam valores negativos para k.

Na **atividade 48**, é importante que os estudantes se atentem ao enunciado para entender o que é pedido a fim de que resolvam a equação polinomial resultante.

A **atividade 49** também pode ser resolvida com um *software* de construção de gráficos, já que nela se obtém o gráfico de uma função por meio da translação do gráfico de outra função.

Equações logarítmicas e sistemas

Neste tópico, serão estudadas as equações logarítmicas. Dê exemplos mostrando que as maneiras mais comuns de resolver as equações logarítmicas são aplicando a definição de logaritmo, usando as propriedades dos logaritmos ou efetuando mudanças de variável. Depois, faça as **atividades resolvidas R16** a **R20**. Cada uma delas traz formas diferentes de resolução de situações que apresentam equações logarítmicas. Em seguida, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

As **atividades 50** e **51** são semelhantes às atividades resolvidas, as quais podem ser retomadas em caso de dúvida.

Se possível, organize a turma em duplas para realizar a **atividade 52**. Nela, é preciso resolver uma equação logarítmica em um contexto da área de Química.

Inequações logarítmicas

Neste tópico, os estudantes associarão os conceitos de equações logarítmicas e de funções logarítmicas crescentes e decrescentes. Mostre à turma as condições para se manter ou inverter o sentido da desigualdade e faça as **atividades resolvidas R21** a **R23**. Depois, peça aos estudantes que resolvam as atividades propostas.

Na **atividade 53**, similar às atividades resolvidas, os estudantes devem verificar o modo de resolução mais adequado. Já a **atividade 54**, havendo possibilidade, pode ser feita com um *software* de construção de gráficos para conferir os resultados obtidos.

Na **atividade 55**, mostre que é visualmente perceptível a mudança de sentido da desigualdade da inequação para a desigualdade do conjunto solução. Organize os estudantes em duplas para a realização da atividade. A troca de ideias contribui para a consolidação dos conhecimentos. Além disso, os estudantes têm a oportunidade de praticar a argumentação e a oralidade. Essa atividade propõe a utilização de um *software* de construção de gráficos na investigação da solução de uma inequação logarítmica. Dessa maneira, é favorecido o desenvolvimento da **competência geral 5** e das **competências específicas 3** e **4**.

Trabalho e juventudes – Geólogo

Objetivos

- Compreender o que faz um geólogo.
- Conhecer a escala Richter.

Orientações didáticas

As atividades desta seção propõem a resolução de problemas com funções logarítmicas, abordando a habilidade **EM13MAT305**. Além disso, o texto trata de algumas atividades executadas por um geólogo e traz outras informações relacionadas a essa profissão, abordando os **TCTs Trabalho** e **Ciência e Tecnologia**. Como os geólogos estudam a quantidade de energia liberada por um terremoto, pode-se abrir uma conversa sobre o desenvolvimento de infraestrutura de qualidade, confiável, sustentável e resiliente em regiões que são atingidas por terremotos para promover o bem-estar humano e também fortalecer esforços para proteger e salvaguardar o patrimônio cultural e natural do mundo.

Geólogo é o especialista que estuda e analisa os processos que ocorrem no interior da crosta terrestre e a composição de sua superfície. Ele determina a concentração de minérios existentes, acompanha a perfuração de poços de petróleo e de água, registra as atividades sísmicas para deduzir riscos de desastres naturais e tem muita importância na construção civil, uma vez que analisa o solo, as rochas e ainda prevê o impacto ambiental.

Peça aos estudantes que respondam à pergunta da **atividade 1**. É possível que alguns deles mencionem como pontos positivos o fato de ser uma profissão que proporciona contato mais próximo com a natureza, além de se inserir em um amplo mercado de trabalho e lidar com conceitos de diferentes áreas do conhecimento. Como pontos negativos, eles podem alegar o desgaste do trabalho de campo e a disponibilidade para viagens.

Antes de pedir aos estudantes que façam as **atividades 2** e **3**, comente que terremoto é um tipo de tremor intenso que ocorre na superfície da Terra relacionado ao movimento das placas tectônicas. Esse fenômeno pode destruir cidades inteiras ou nem ser sentido, dependendo de sua magnitude. Comente também que a magnitude de um terremoto pode ser medida por um equipamento chamado sismógrafo, que, com base em sensores de vibração, monitora a movimentação da superfície terrestre. Proponha que façam a **atividade 2** e, em seguida, proceda à correção coletiva. Espera-se que realizem os seguintes cálculos:

$$f(7 \cdot 10^9) = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{7 \cdot 10^9}{7 \cdot 10^{-3}}\right) = \frac{2}{3} \cdot \log 10^{12} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot \log 10 = \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 1 = 8$$

Portanto, a magnitude do terremoto é 8.

Quanto à **atividade 3**, os estudantes devem resolver uma equação logarítmica. Espera-se que façam estes cálculos:

$$6 = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$$

$$9 = \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$$

$$10^9 = \frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}$$

$$x = 7 \cdot 10^6$$

Portanto, um terremoto de magnitude 6 na escala Richter libera $7 \cdot 10^6$ kWh de energia.

Para finalizar o capítulo 7

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma forma diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões dadas. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que fizerem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 8 Sequências

Objetivos

- Identificar padrões numéricos e sequências.
- Resolver problemas que envolvam sequências.
- Interpretar graficamente progressões aritméticas e progressões geométricas.

Justificativa dos objetivos

Com o estudo deste capítulo, podem-se determinar padrões e elementos de uma sequência numérica, bem como a soma de seus elementos. O trabalho das sequências tem diversas aplicações, pois podem-se associar as progressões aritméticas e geométricas com as funções afim e exponencial, respectivamente.

BNCC

- **Competência geral da BNCC: 1**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 3: **EM13MAT304**.

  Competência específica 4: **EM13MAT401**.

  Competência específica 5: **EM13MAT507** e **EM13MAT508**.

  Os textos na íntegra da competência geral, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Diversidade Cultural
- Saúde

Objetivo de Desenvolvimento Sustentável

ODS 3

Orientações didáticas

Ao tratar do calendário adotado pelos chineses, valoriza-se o conhecimento historicamente construído a respeito desse tema, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 1**.

Diversas situações do capítulo demandam a utilização de estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 3**.

A apresentação da celebração do Ano-novo chinês permite a abordagem do **TCT Diversidade Cultural**.

Promovendo a cultura de paz

Converse com os estudantes sobre o que é xenofobia e como combatê-la. Xenofobia é qualquer manifestação, acompanhada ou não de hostilidade e violência física, relacionada a aversão, ódio, desconfiança, temor ou antipatia contra pessoas estrangeiras ou vistas como estranhas àquele meio. Inúmeros casos de xenofobia ocorrem quando pessoas, fugindo de guerras ou da extrema pobreza, buscam melhor qualidade de vida em outros países. Nos últimos anos, tem-se visto um aumento de casos de xenofobia contra povos de países africanos e do Oriente Médio, e também contra povos de origem asiática na Europa, nos Estados Unidos e até no Brasil, especialmente após a crise de covid-19, quando, sem provas, se atribuiu à China a origem do vírus.

Sequências e padrões

Neste tópico, os estudantes serão confrontados com situações em que deverão observar padrões e realizar experimentações para estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, o que favorece o desenvolvimento da **competência específica 5**. Eles também deverão determinar a lei de formação e os termos de uma sequência numérica, utilizando ou não planilhas eletrônicas.

Apresente os exemplos com as sequências dos anos representados pelo dragão, pelo rato e pelo cavalo. Depois, mostre exemplos de sequências numéricas infinitas, como a dos números naturais primos apresentada no livro. Para ampliar as discussões, peça-lhes que escrevam, por exemplo, a sequência dos números naturais múltiplos de 3 e 5. Em seguida, apresente a sequência dos anos bissextos, a começar pelo ano de 1996. Relembre que os anos bissextos ocorrem de 4 em 4 anos. Oriente-os a refletir, em duplas, se os anos múltiplos de 100 e múltiplos de 400 são bissextos, e a estabelecer uma regra para verificar se um ano é ou não bissexto, criando argumentos. Conclua com eles que os anos bissextos são múltiplos de 4, exceto se forem múltiplos de 100 e não forem múltiplos de 400.

Em seguida, apresente a definição de sequência numérica infinita e finita dada no livro. Depois, explore os exemplos e as atividades **resolvidas R1** a **R3** na lousa. Para ampliar, forneça outras leis de formação e auxilie-os a determinar alguns termos das sequências correspondentes.

Em *Usando planilhas eletrônicas para determinar os termos de uma sequência*, se houver disponibilidade na escola, leve os estudantes ao laboratório de informática para reproduzir os procedimentos apresentados no livro utilizando uma planilha eletrônica. Depois, é possível propor que determinem o 86º e o 104º termo da sequência (Resposta: $a_{86} = 94$ e $a_{104} = 112$). Outra possibilidade é solicitar que determinem os termos de outras sequências usando uma planilha. O uso de planilhas eletrônicas pode ser feito em diversos outros momentos deste capítulo, como ao determinar os termos de progressões aritméticas e progressões geométricas, ao calcular a soma desses termos etc.

Em seguida, oriente-os a resolver as atividades propostas.

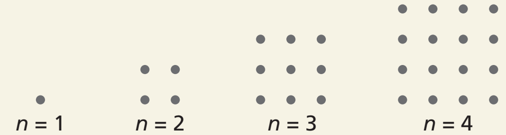
Peça aos estudantes que calculem outros termos das sequências cujas leis de formação foram dadas nas **atividades 1** e **2** ou da sequência de Fibonacci, apresentada na **atividade 12**.

Nas **atividades 3** e **9**, os estudantes devem determinar a lei de formação a partir de uma sequência. Na **atividade 9**, eles devem identificar o padrão de formação da sequência dos números triangulares com base em seu padrão de representação, observando e identificando quais caraterísticas são relevantes à resolução. Dessa maneira, contribui-se para o desenvolvimento dos pilares **abstração** e **reconhecimento de padrões** do pensamento computacional. À medida que se determina a lei de formação da sequência no **item b**, trabalha-se, também, o pilar **algoritmo**. Nessa atividade, os estudantes identificam, em função do termo n da sequência de números triangulares, o padrão de formação da sequência determinada pela quantidade de pontos que compõem cada figura associada ao respectivo n.

Aproveite para apresentar outros casos de figuras compostas de pontos, em que a quantidade de pontos determina uma sequência. É importante analisar a sequência para encontrar um padrão que permita escrever uma lei de formação para cada sequência.

Confira alguns exemplos a seguir.

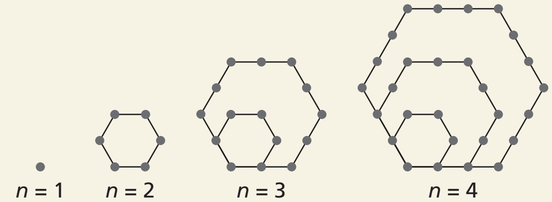
- Números quadrados



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Lei de formação: $f(n) = n^2$

- Números hexagonais



Lei de formação: $f(n) = 2n^2 - n$

Na **atividade 12**, solicite aos estudantes que busquem outras informações relacionadas à sequência de Fibonacci. Uma fonte de pesquisa pode ser o livro *O diabo dos números*, de Hans Magnus Enzensberger.

Progressões aritméticas

Neste tópico, os estudantes terão contato com as progressões aritméticas realizando a classificação, determinando o termo geral e a soma dos n primeiros termos, e fazendo a representação gráfica. Esse estudo favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT507** ao identificar e associar progressões aritméticas a funções afins de domínio discreto aplicando propriedades e deduzindo fórmulas. O trabalho com PA permite utilizar diferentes registros matemáticos (algébricos e gráficos), favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 4**.

Resolva a situação inicial apresentada no livro e defina uma PA. Usando os exemplos apresentados, mostre como se determina a razão de uma PA e classifique-a. Depois, explique como se determina o termo geral de uma PA.

Metodologias ativas

Para ajudar os estudantes a consolidar os conhecimentos, proponha uma atividade que utilize a **Aprendizagem Baseada em Problemas** (**ABP**). As metodologias ativas colocam os estudantes no centro do processo de ensino-aprendizagem, expondo suas experiências e valores na construção coletiva do conhecimento. Nesse caso, a estratégia será elaborar e resolver problemas do dia a dia relacionados às progressões aritméticas. Para isso, organize a turma em grupos e oriente-os a criar um problema relacionado a qualquer conceito de PA aprendido até o momento. Eles podem escolher dois temas para a elaboração dos problemas, podendo ser:

- economizar em um investimento a juro simples;
- planejar para pagar uma dívida;
- distribuir brindes em uma campanha publicitária;
- prever gastos com combustível em uma viagem;
- planejar medidas de distância percorridas em treinos.

Depois, eles devem trocar os problemas com outros grupos e resolvê-los. Caso haja algum equívoco que impeça a resolução, oriente-os a elaborar hipóteses que permitam prosseguir com a resolução. Ao final, chame-os para que comentem a atividade.

Faça as **atividades resolvidas R4** a **R9**, as quais aplicam estratégias de resolução que envolvem o uso da fórmula do termo geral.

Se julgar oportuno, ao trabalhar a **atividade resolvida R7**, apresente as Leis nº 12.619/2012 e nº 13.103/2015, conhecidas como Leis dos Caminhoneiros, que tratam do exercício da profissão de motorista de transporte de cargas e de passageiros. Uma discussão a respeito dessas leis envolve o **TCT Trabalho**.

Depois, peça aos estudantes que resolvam as atividades propostas.

Na **atividade 13**, eles devem verificar quais sequências representam uma PA. Se necessário, oriente-os a calcular a diferença entre dois termos consecutivos.

Na **atividade 14**, eles podem aplicar a fórmula do termo geral ou calcular de maneira recursiva para determinar os cinco primeiros termos de cada PA.

Na **atividade 15**, os estudantes devem elaborar um passo a passo para escrever um algoritmo que classifique uma PA como crescente, decrescente ou constante com base na razão r.

Na **atividade 22**, que deve ser realizada em duplas, oriente os estudantes na elaboração de hipóteses, caso encontrem problemas que impeçam a resolução.

Na **atividade 24**, eles podem utilizar a conclusão obtida na **atividade resolvida R6** para simplificar a resolução.

Na **atividade 30**, para explorar o **item b**, mostre que a soma da primeira parcela com a última é 990, que é igual à soma da segunda com a penúltima, que é igual à soma da terceira com a antepenúltima, e assim por diante. Logo, a soma das 12 parcelas é igual a $6 \cdot 990$, ou seja, 5.940. Portanto, o valor final da moto a prazo foi R$ 5.940,00 + + R$ 3.500,00 de entrada, totalizando R$ 9.440,00.

Na **atividade 31**, similar à **atividade resolvida R9**, oriente os estudantes a representar os termos por $x - r$, x e $x + r$.

O subtópico *Representação gráfica de uma PA* contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT401**, uma vez que se interpreta o termo geral a_n como uma função polinomial do 1º grau de variável n.

Apresente a situação do livro e construa o gráfico correspondente. Reforce que, como n pertence ao conjunto dos números naturais, a reta é representada de forma tracejada. Depois, faça a **atividade resolvida R10**, em que são calculados o termo a_0 e a razão r para escrever a lei de formação da PA dada e, depois, construir o gráfico dessa PA.

Também pode ser aprofundado o estudo da representação gráfica de uma PA, apresentando aos estudantes gráficos similares aos propostos a seguir, para que discutam se eles podem ou não ser representações de uma PA, justificando suas decisões.

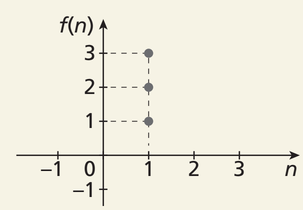


gráfico 1

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

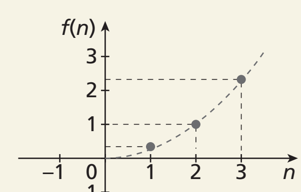


gráfico 2

Espera-se que eles percebam que o gráfico 1 não pode ser a representação de uma PA, pois o termo a_1 é o único da sequência e ele está assumindo diversos valores. Já a curva que representa o gráfico 2 não é semelhante à representação gráfica de uma função afim, ou seja, o gráfico apresentado também não está associado a uma PA.

Na **atividade 34**, reforce que n pertence ao conjunto dos números naturais, e que os pontos conhecidos referem-se a $n = 0$ e $n = 3$. Assim, eles precisam determinar os pares ordenados correspondentes a $n = 1$, $n = 2$ e $n = 4$.

No subtópico *Soma dos n primeiros termos de uma PA*, apresente o raciocínio utilizado por Gauss para determinar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA. Mostre que a soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma PA é igual à soma dos extremos. Dê exemplos numéricos para ilustrar essa relação. Depois, faça a **atividade resolvida R11**. Comente que, na maioria das atividades, serão fornecidas informações para determinar n, a_1 e a_n de uma PA e utilizar a fórmula obtida.

Na **atividade 35**, similar à **atividade resolvida R11**, os estudantes devem determinar n, a_1 e a_n antes de utilizar a fórmula.

Nas **atividades 36**, **37**, **40** e **43**, eles devem resolver problemas relacionados à soma de n termos de uma PA. Oriente-os a determinar n, a_1 e a_n antes de utilizar a fórmula.

Nas **atividades 38**, **39**, **41** e **42**, é fornecido o valor da soma dos termos de uma PA, e os estudantes devem determinar n ou a_1 ou a_n.

Na **atividade 44**, comente que uma das estratégias de resolução possível é transformar as informações dadas em função de a_1 e r.

Progressões geométricas

Neste tópico, os estudantes trabalham com as progressões geométricas, realizando a classificação, determinando o termo geral e a soma dos n primeiros termos e dos infinitos termos de uma PG, e fazendo a representação gráfica. Esse estudo favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT304**, pois os estudantes vão se deparar com situações e problemas que envolvem funções exponenciais analisadas com base em um domínio discreto. Essas situações favorecem, por sua vez, o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT508**, pois nelas eles deverão identificar e associar progressões geométricas a funções exponenciais, aplicando propriedades e deduzindo fórmulas. Além disso, deverão compreender e utilizar diferentes registros matemáticos no trabalho com as progressões geométricas, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 4**.

Metodologias ativas

Para contribuir na consolidação dos conhecimentos, proponha tarefas que agreguem as metodologias ativas **sala de aula invertida** e **discussões e seminários**. Elas colocam os estudantes no centro do processo de ensino-aprendizagem, promovendo autonomia, reflexão e trabalho em equipe. A atividade consiste em uma apresentação em grupo, em todas as aulas, de uma parte do conteúdo. Organize a turma em cinco grupos, que podem trabalhar com os seguintes conteúdos.

- Grupo 1: definição de PG e classificação.
- Grupo 2: termo geral de uma PG.
- Grupo 3: representação gráfica de uma PG.
- Grupo 4: soma dos n primeiros termos de uma PG.
- Grupo 5: soma dos infinitos termos de uma PG.

Sugere-se que os grupos tenham, no mínimo, uma semana de preparo. As apresentações podem ser feitas na lousa, de forma digital ou, ainda, por meio de cartazes. Oriente-os para que todos participem da apresentação, tanto na elaboração quanto na apresentação do conteúdo.

Depois de apresentar a situação proposta, trabalhe a definição de progressão geométrica e mostre, usando os exemplos do livro, como se determina a razão de uma PG e como se classifica cada uma delas com base em suas características. Em seguida, mostre o raciocínio utilizado para determinar a fórmula do termo geral de uma PG e faça as **atividades resolvidas R12** a **R15**. Na **atividade resolvida R15**, enfatize o modo conveniente de representar três termos consecutivos de uma PG. Depois, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

Nas **atividades 55** a **57**, é preciso utilizar a fórmula do termo geral para determinar o 1º termo, a razão ou a quantidade de termos. Nas **atividades 54**, **58** e **63**, os estudantes resolvem problemas que utilizam os conceitos de PG. Nas **atividades 59** e **60**, eles utilizam a definição de PG para resolver o que se pede. A **atividade 61** é semelhante à **atividade resolvida R14**. Já a **atividade 62** é semelhante à **atividade resolvida R15**.

Na **atividade 64**, os estudantes associam a fórmula do termo geral à fórmula de cálculo de juro composto. Se julgar oportuno, comente que a fórmula obtida no **item c** é a do juro composto, que será retomada no próximo capítulo.

A introdução do subtópico *Representação gráfica de uma PG*, em que se modela a meia-vida do isótopo radioativo do iodo por meio de uma função exponencial de domínio discreto, favorece o desenvolvimento da **competência específica 3**.

Apresente a situação proposta para construir o gráfico correspondente. Discussões sobre diagnósticos precoces e precisos e disponibilização de equipamentos em todo o sistema de saúde, assegurando uma vida saudável e o bem-estar a todos, permitem abordar o **ODS 3: Saúde e Bem-Estar** e o **TCT Saúde**. Em seguida, faça a **atividade resolvida R16**. Reforce que, como n pertence ao conjunto dos números naturais, a curva do gráfico é representada de forma tracejada. Depois, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

Na **atividade 65**, similar à **atividade resolvida R16**, eles devem construir os gráficos correspondentes às progressões geométricas dadas. Na **atividade 66**, é apresentado o gráfico de uma PG para ser determinada sua lei de formação e um de seus termos.

Como aprofundamento, pode-se verificar como os valores que n pode assumir influenciam o gráfico e a lei de formação de uma sequência. Para isso, os estudantes podem refletir sobre as questões a seguir.

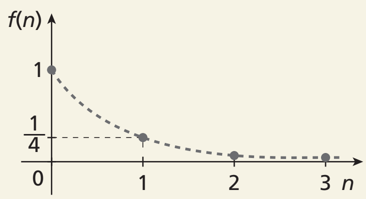
- Quais são os quatro primeiros termos da PG cuja lei de formação é $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$?
- Considerando $n \in \mathbb{N}^*$, como a lei de formação anterior poderia ser reescrita de modo que os termos da PG continuem os mesmos?
- Como será a representação gráfica para essa nova lei de formação da PG?
- Considerando as respostas dos itens anteriores, pode-se afirmar que essa PG tem mais de uma lei de formação e mais de uma representação gráfica?

Espera-se que os estudantes percebam que, para a PG apresentada, cujos quatro primeiros termos são $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots\right)$, a lei de formação dependerá dos valores de n considerados:

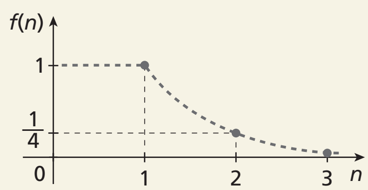
- para $n \in \mathbb{N}$, a lei de formação é $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$;
- para $n \in \mathbb{N}^*$, a lei de formação é $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

A representação gráfica dessa PG também varia de acordo com os valores de n considerados:

- para $n \in \mathbb{N}$:



- para $n \in \mathbb{N}^*$:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

No subtópico *Soma dos n primeiros termos de uma PG*, apresente a demonstração da expressão que calcula essa soma, enfatizando que a razão deve ser diferente de 1. Depois, faça as **atividades resolvidas R17** e **R18**. Na **atividade resolvida R18**, é necessário determinar as variáveis antes de aplicar a fórmula demonstrada. Em seguida, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

O objetivo do **item c** da **atividade 74** é propor a reflexão sobre o comportamento da soma dos termos de uma PG infinita. Para esse item ser aprofundado, os estudantes podem observar o comportamento do valor de q^n quando o valor de n aumenta e o valor de q está entre -1 e 1. Espera-se que os estudantes concluam que esse valor tende a zero; logo, o valor da soma dos termos dessa PG dependerá apenas dos valores de a_1 e q. Eles podem tentar elaborar um texto que justifique a resposta encontrada. Esse tipo de reflexão antecipa o estudo do próximo tópico.

No subtópico *Soma dos infinitos termos de uma PG*, escreva na lousa as duas potências apresentadas e mostre que, em ambas, quanto maior for o valor de n, mais próximo de zero será o resultado obtido. Em seguida, relacione essas situações com a linguagem simbólica de limite.

Depois, utilize as conclusões obtidas anteriormente para determinar a fórmula de cálculo da soma dos infinitos termos de uma PG. Em seguida, faça as **atividades resolvidas R19** e **R20**, nas quais é necessário determinar o primeiro termo e a razão para utilizar a fórmula.

Nas **atividades 76** e **77**, similares às atividades resolvidas, os estudantes aplicam a fórmula de cálculo da soma dos infinitos termos de uma PG.

Nas **atividades 79** a **81**, é necessário identificar o primeiro termo e a razão para aplicar a fórmula de cálculo da soma dos infinitos termos de uma PG.

Problemas que envolvem PA e PG

Neste tópico, são propostos problemas envolvendo grandezas que podem ser relacionadas por funções afins ou exponenciais de domínios discretos, favorecendo o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT507** e **EM13MAT508**. Nele, são propostas situações em que uma PA e uma PG podem ser trabalhadas simultaneamente.

Resolva os exemplos apresentados no livro. Comente que, em algumas situações, é explicitado se determinada sequência é uma PA ou uma PG. Em outras situações, como no exemplo dos lucros das duas empresas, é necessária uma análise das informações fornecidas para chegar a essas conclusões.

As **atividades 82** e **83** são exemplos de situações em que se sabe o tipo de cada sequência. Já nas **atividades 84** a **87** os estudantes devem desenvolver estratégias para relacionar os termos com uma PA ou uma PG.

Para finalizar o capítulo 8

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma forma diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões dadas. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que fizerem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 9 Matemática Financeira

Objetivos

- Resolver problemas que envolvam taxa percentual.
- Analisar e aplicar os regimes de juro simples e de juro composto.

Justificativa dos objetivos

O estudo da Matemática financeira é importante por seu uso no cotidiano. Saber fazer cálculos de empréstimos, financiamentos, descontos, taxas de juro e rendimento de investimentos é importante para ter uma vida financeira saudável.

BNCC

- **Competência geral da BNCC: 5**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 1: **EM13MAT101** e **EM13MAT104**.

  Competência específica 2: **EM13MAT203**.

  Competência específica 3: **EM13MAT303, EM13MAT304** e **EM13MAT305**.

  Competência específica 4.

  Competência específica 5: **EM13MAT507** e **EM13MAT508**.

  Os textos na íntegra da competência geral, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Diversidade Cultural
- Educação Financeira
- Educação para o Consumo
- Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras
- Trabalho

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

Orientações didáticas

Este capítulo favorece o desenvolvimento da **competência específica 1** e da habilidade **EM13MAT101**, uma vez que os estudantes vão utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar questões socioeconômicas.

A abertura deste capítulo apresenta informações que podem ser exploradas para favorecer os **TCTs Diversidade Cultural** e **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras**. Inicie a leitura do primeiro parágrafo e questione os estudantes sobre a função do censo demográfico. Explique a eles que o primeiro censo demográfico no Brasil ocorreu em 1872, mas o IBGE é responsável pela realização periódica do censo desde 1940. Destaque a importância do censo para dimensionar a população brasileira no território nacional, possibilitando analisar diversos aspectos socioeconômicos ao longo do tempo, imprescindíveis para a elaboração de políticas públicas. Em seguida, verifique se os estudantes compreendem a importância das pessoas e das comunidades quilombolas histórica e culturalmente. Podem ser obtidas mais informações sobre a população quilombola no Censo Demográfico de 2022, disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/mapas.html?recorte=N3&tema=taxa_de_alfabetizacao_quilombolas&localidade=; https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/indicadores.html?localidade=BR&tema=3 (acesso em: 11 set. 2024).

O Pronaf, mencionado no texto, funciona como uma política de crédito com baixas taxas de juros, de acordo com o enquadramento às linhas de crédito disponíveis. O financiamento do Pronaf favorece o desenvolvimento econômico, social e ambiental do Brasil rural, contribuindo para a agricultura sustentável, o crescimento econômico, a redução das desigualdades e da pobreza e garantindo o consumo e a produção responsáveis. Assim, esta abertura pode ser relacionada aos **ODS 1: Erradicação da pobreza**, **ODS 2: Fome zero e agricultura sustentável**, **ODS 8: Trabalho decente e crescimento econômico**, **ODS 10: Redução das desigualdades**, **ODS 11: Cidades e comunidades sustentáveis** e **ODS 12: Consumo e produção responsáveis**.

Aproveite as perguntas da abertura para avaliar os conhecimentos previamente adquiridos pela turma sobre juro composto. Dê um tempo para os estudantes responderem à segunda questão e incentive-os a usar estratégias pessoais. As resoluções podem ser analisadas agora ou mais adiante, durante o estudo de juro composto.

Introdução

Aproveite a situação problematizada neste tópico para incentivar os estudantes a escolher uma das opções, justificando a tomada de decisão. Em seguida, explique a eles que, ao longo do capítulo, estudarão conceitos matemáticos e estratégias que os auxiliarão a enfrentar esse tipo de problema encontrado frequentemente no cotidiano. Nesse sentido, os objetos de estudo presentes neste capítulo corroboram o desenvolvimento do **TCT Educação Financeira**, uma vez que permitem a efetiva educação para a vida em sociedade, preparando os estudantes para lidarem de modo crítico e responsável com questões financeiras.

Taxa percentual

As situações econômicas apresentadas neste tópico envolvendo taxas percentuais, ou porcentagens, favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT101**.

Aproveitando o exemplo de promoção explorado no início deste tópico, proponha a realização da **atividade 2**. No **item a**, caso os estudantes não encontrem divulgações de promoções na razão 5 para 3, convém orientá-los para que trabalhem com outras razões encontradas, por exemplo, "leve 3 e pague 2". No **item b**, ao incentivar a pesquisa dos direitos do consumidor no *Código de defesa do consumidor*, a atividade contribui para o desenvolvimento do **TCT Educação para o Consumo**.

Para aproximar o contexto apresentado na **atividade 5** à realidade dos estudantes e complementar o estudo de porcentagens, peça a eles que, se possível, tragam faturas do consumo de energia elétrica mais recentes e façam o cálculo, em porcentagem, do acréscimo ou do decréscimo do consumo de dois meses consecutivos.

As **atividades resolvidas R1** e **R2**, assim como a **atividade 10**, exploram os aumentos e os descontos sucessivos em situações contextualizadas.

Há mais de um modo para resolver a **atividade 8**; por isso, é interessante pedir aos estudantes que a realizem em dupla. Assim, as diferentes resoluções podem se complementar ou apresentar uma nova maneira de pensar a situação.

A **atividade 9** não explora numericamente a situação. Assim, espera-se que os estudantes mobilizem a capacidade de generalização para construir os argumentos da resposta.

A **atividade 11** desenvolve a habilidade **EM13MAT104** ao apresentar o que é a inflação para que os estudantes interpretem esse índice econômico. Se julgar conveniente, explique o cálculo da inflação, feito pelo IBGE, que implica a diminuição do poder de compra da moeda por causa do aumento de preços de bens e serviços.

Juro simples e juro composto

O tópico favorece o desenvolvimento das **competências específicas 1** e **3**, uma vez que os estudantes vão utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos envolvendo juro simples e juro composto para analisar situações socioeconômicas, de modo que se construa uma argumentação consistente para validar os resultados obtidos.

As **atividades 20** e **21** favorecem o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT507**, pois os estudantes devem interpretar a representação gráfica da função que expressa o montante da situação, além de identificar e associar uma PA à função afim de domínio discreto.

As **atividades 22** a **25** exploram diversas situações envolvendo o cálculo de juro simples.

A **atividade resolvida R8** e a **atividade 31** exploram a mesma situação-problema de pagamento de uma mercadoria em pix ou no cartão de crédito. Aproveite este momento para verificar os conhecimentos dos estudantes em relação a essas formas de pagamento, identificando se sabem que o pix é uma forma de pagamento à vista e o cartão de crédito é a prazo. Esse tipo de atividade leva os estudantes a refletirem sobre a própria vida financeira, contribuindo para o desenvolvimento dos **TCTs Educação Financeira** e **Educação para o Consumo**.

A **atividade 28** favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT508**, pois os estudantes devem interpretar a situação pela representação gráfica da função correspondente ao montante, bem como identificar e associar uma progressão geométrica a uma função exponencial de domínio discreto.

A **atividade resolvida R9** e a **atividade 35** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT305**, visto que envolvem a elaboração e a resolução de problemas com funções logarítmicas no contexto da Matemática financeira.

A **atividade 36** contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT104**, pois sugere a comparação da taxa obtida à taxa de inflação dos últimos doze meses. A inflação pode ser consultada em: https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php (acesso em: 11 set. 2024).

O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros

Este tópico favorece o desenvolvimento da **competência geral 5**, das **competências específicas 2**, **3** e **4** e das habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT203** e **EM13MAT304**, pois os estudantes vão compreender e utilizar tecnologias digitais de informação, como planilhas eletrônicas, de forma crítica, significativa e reflexiva para resolver problemas envolvendo juro simples e juro composto.

Ao explicar os exemplos, comente com os estudantes que, na planilha, os resultados aparecem arredondados para a segunda casa decimal por representarem valores em reais. Se julgar oportuno, discuta com eles sobre as dificuldades e o quão trabalhoso seria resolver ambos os problemas fazendo os cálculos um a um, sem o auxílio da planilha eletrônica. Se possível, leve-os à sala de informática da escola ou peça que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.

A **atividade 45** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT303**, pois os estudantes são incentivados a elaborar um problema envolvendo montantes de dois tipos de investimento, em que a análise da representação gráfica exponencial e da linear sejam comparadas.

Trabalho e juventudes – *Fintechs*

Objetivo

Compreender o que é uma *fintech*.

Orientações didáticas

O assunto tratado nesta seção contribui para o desenvolvimento do **TCT Trabalho**, uma vez que os estudantes são levados a refletir sobre questões do mundo do trabalho. Além disso, o tema também favorece a promoção dos **ODS 8: Trabalho decente e crescimento econômico** e **ODS 9: Indústria, inovação e infraestrutura**, pois as *fintechs* incentivam a expansão do acesso aos serviços bancários e financeiros para todos, apoiando a inovação e o desenvolvimento tecnológico.

Para explorar a seção, forme uma roda de conversa com os estudantes e pergunte se já ouviram o termo "*fintech*" e se sabem o que significa. Dê algum tempo para que se manifestem e discuta com eles a definição apresentada no início do texto. É importante deixar evidente que a principal diferença entre *fintechs* e bancos tradicionais é que, nos bancos tradicionais, a principal forma de contato com os clientes são as agências físicas, enquanto as operações das *fintechs* são realizadas em ambientes 100% *on-line*. Comente que, assim como qualquer banco, as *fintechs* precisam seguir as regras do Banco Central para atuar em nosso país.

Se julgar conveniente, explique a eles como funcionam alguns tipos de *fintechs* existentes.

- as de pagamento oferecem dispositivos (comumente chamados de "maquininhas") e cartões de crédito com vantagens para auxiliar as operações de compra e venda de pessoas físicas e de empresas;
- as de investimento negociam ações, títulos e outros ativos do mercado financeiro;
- as de empréstimo buscam tornar o processo de empréstimo mais fácil, rápido e acessível aos clientes;
- as de seguro oferecem ferramentas que comparam valores e serviços de diferentes corretoras de seguros com rapidez.

Como existem outros tipos de *fintechs*, para aprofundar o tema é possível pedir aos estudantes que façam uma pesquisa sobre o assunto.

Na **atividade 3**, para calcular o percentual aproximado do aumento do número de *fintechs* de 2017 para 2023, espera-se que os estudantes façam: $\frac{1.450 - 763}{763} = \frac{687}{763} \simeq 0{,}9004 =$ $= 90{,}04\,\%$.

Para finalizar o capítulo 9

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma forma diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, preencher lacunas de compreensão, desenvolver habilidades de pesquisa e extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões dadas. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que fizerem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 10 Algoritmos e introdução à programação

Objetivos

- Compreender o conceito de algoritmo.
- Interpretar e construir fluxogramas que representam algoritmos.
- Compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas.
- Resolver problemas usando uma linguagem de programação.

Justificativa dos objetivos

Algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para se realizar uma tarefa e, por isso, é um conceito que possibilita resolver problemas cotidianos e da própria Matemática.

Os algoritmos podem ser representados graficamente por fluxogramas, permitindo que sejam mais bem compreendidos e que possíveis falhas sejam identificadas mais facilmente. Por essa razão, é importante que os estudantes consigam interpretar fluxogramas que representem algoritmos. Além disso, o ato de construir um fluxograma se assemelha ao de resolver um problema, pois é preciso compreender o algoritmo a ser representado, testá-lo, construir um plano de ação, executar o plano e revisar a solução.

Compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas ajuda os estudantes a se comunicar com os computadores e ter noções de como *softwares*, aplicativos e jogos utilizados no dia a dia foram desenvolvidos.

Empregar uma linguagem de programação, como o Scratch, para resolver problemas mobiliza as capacidades de pensar computacionalmente e generalizar. Além disso, contribui para que os estudantes se familiarizem com uma linguagem de programação específica, o que pode fazê-los se interessar por essa linguagem e aprofundar os estudos futuramente.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 1**, **2**, **4** e **5**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  Competência específica 3: **EM13MAT315**.
  Competência específica 4: **EM13MAT405**.
  Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Ciência e Tecnologia
- Educação Alimentar e Nutricional
- Educação para o Consumo
- Trabalho

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

ODS 3 ODS 12

Orientações didáticas

O tema da abertura aborda o desenvolvimento dos computadores, ilustrando o impacto transformador da ciência e tecnologia na sociedade contemporânea – o que se relaciona com o **TCT Ciência e Tecnologia**. Ao conversar com os estudantes sobre o assunto, ressalte que o desenvolvimento dos computadores facilitou a automação de processos, a análise de grandes volumes de dados e a interconexão global, promovendo uma era de informação e conhecimento acessível. Além disso, chame atenção da turma para o fato de que o trabalho de diversas pessoas foi necessário para que os computadores fossem desenvolvidos até os atuais.

Em diversos momentos do capítulo, os estudantes terão a oportunidade de colocar em prática as **competências gerais 2**, **4** e **5**, enquanto desenvolvem algoritmos para a resolução de diversos problemas, representando-os em linguagem materna ou por meio de fluxogramas e linguagens de programação.

Algoritmos

Neste tópico, os estudantes terão contato com o pilar **algoritmo** do pensamento computacional. A ideia de algoritmo está presente em diferentes situações cotidianas, como no exemplo do preparo da receita dada.

Ao apresentar essa receita de lanche saudável, pode ser desenvolvido o **TCT Educação Alimentar e Nutricional** e o **ODS 3: Saúde e Bem-Estar**. Comente sobre os benefícios de adotar uma alimentação saudável: prevenção de doenças, aumento da disposição, melhora do funcionamento do sistema nervoso e do sono, aumento da expectativa de vida, auxílio no controle do peso etc.

Na **atividade 3**, os estudantes devem analisar por que o algoritmo dado desperdiça água e identificar como alterar o processo de lavar louça para evitar esse desperdício, o que desenvolve o **TCT Educação para o Consumo** e o **ODS 12: Consumo e produção responsáveis**. Se possível, converse com a turma sobre estratégias que utilizam no cotidiano para reduzir o uso de água.

Fluxogramas

Um fluxograma é um tipo de representação que possibilita que o algoritmo seja mais bem compreendido e que possíveis falhas sejam identificadas mais facilmente.

Os estudantes lidam com fluxogramas desde os anos finais do Ensino Fundamental e, por isso, convém fazer um levantamento dos conhecimentos prévios deles. Apresente exemplos de fluxogramas na lousa e peça que indiquem a finalidade de cada um deles. Esse também é o momento oportuno para verificar se sabem o significado de cada símbolo. Depois, explore o conteúdo do tópico.

Discuta o tema do fluxograma *Fato ou fake?*. Enfatize a importância de checar as informações antes de compartilhá-las. Momentos como esse contribuem para a abordagem do **TCT Vida Familiar e Social**.

As **atividades** de **5** a **9** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315** e da **competência específica 3**. Para ajudar os estudantes a realizar a simulação do algoritmo da **atividade 5**, retome o **item b** da **atividade resolvida 1**. Na **atividade 6**, eles vão completar um fluxograma. Verifique se ordenam os passos corretamente e se reconhecem, mesmo que intuitivamente, o laço de repetição. Esse reconhecimento por meio do fluxograma pode ser usado como referência na **atividade 9** caso os estudantes tenham dúvidas se é mais fácil identificar o laço de repetição em linguagem materna ou em fluxograma.

Linguagem de programação

As linguagens de programação possibilitam que os seres humanos se comuniquem com os computadores. A abordagem da história da Computação tem o papel de levar os estudantes a perceber que as tecnologias atuais não foram desenvolvidas de maneira linear, mas são fruto de trabalhos e pesquisas de diferentes pessoas em distintos períodos, desenvolvendo a **competência geral 1** ao valorizar a construção histórica dos conhecimentos e tecnologias. Solicite-lhes que, em grupos, pesquisem mais sobre algumas das figuras históricas mencionadas no texto. Depois, promova um momento para o compartilhamento dos achados na forma de seminário.

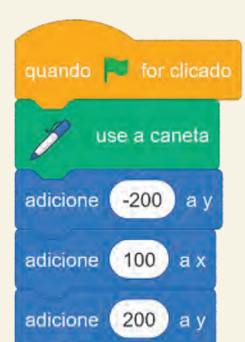
Neste tópico, o estudo feito com algoritmos em linguagem materna e em fluxogramas será direcionado para a análise e a elaboração de algoritmos no Scratch. Os exemplos e parte das atividades propostas contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT405** e da **competência específica 4**.

O Scratch é uma linguagem de programação desenvolvida com blocos que correspondem a comandos básicos para movimentar um personagem em um palco. É uma linguagem intuitiva e visual, o que favorece seu uso em sala de aula. Por meio de manipulações simples das estruturas, os estudantes terão condições de elaborar diferentes algoritmos. Esse recurso apoia o desenvolvimento do pensamento computacional, pois é preciso antever a ação do personagem antes de encaixar os blocos para criar o algoritmo. O uso dessa linguagem também ajuda a desenvolver o espírito investigativo, uma vez que os resultados podem ser testados e observados imediatamente na tela, permitindo a análise e a correção de eventuais erros.

No subtópico *Conhecendo o Scratch*, se possível, na sala de informática, incentive os estudantes a explorar livremente o menu e os comandos do Scratch, que pode ser usado *on-line* pelo *link* https://scratch.mit.edu/ (acesso em: 12 set. 2024) ou pode ser baixado para o uso *off-line*.

Na sequência, são apresentados comandos das categorias **Eventos** e **Movimento**. Se possível, mostre o funcionamento deles na prática.

Após explorar o exemplo de algoritmo que movimenta o personagem deixando um rastro parecido com a letra L, pergunte aos estudantes como o algoritmo poderia ser modificado para que o rastro deixado pelo personagem parecesse a letra U. Depois, reproduza na lousa os movimentos do personagem em função do algoritmo elaborado por alguns dos estudantes. Dessa forma, eles poderão validar ou ajustar o algoritmo que conceberam. O algoritmo pode ser como o mostrado a seguir.



SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE, EUA.

Após abordar o exemplo de algoritmo que movimenta o personagem e deixa um rastro semelhante a um quadrado, pergunte que alterações devem ser feitas no algoritmo para que o rastro se pareça com um retângulo, ou seja, que não tenha todos os lados com a mesma medida de comprimento. Nesse caso, basta modificar a quantidade de passos do primeiro e terceiro blocos (ou do segundo e quarto blocos) do comando **mova**. A quantidade de passos desses dois blocos (primeiro/terceiro ou segundo/quarto) deve ser igual.

A questão proposta ao final desse exemplo estimula a argumentação e o levantamento de hipóteses. Incentive o diálogo e discuta a questão coletivamente.

Em seguida, são apresentados comandos das categorias **Aparência** e **Operadores**. Se achar necessário, apresente outros comandos dessas categorias para a turma.

O exemplo dado é de um algoritmo que faz o personagem dizer o valor da expressão numérica $(5 + 10) : 3$ após movimentar 100 passos. Proponha que expliquem como ficaria o algoritmo se a expressão numérica fosse $5 \cdot 10 : 3$.

Verifique se os estudantes compreenderam o exemplo de algoritmo presente no estudo de comandos da categoria **Sensores**. É importante que comparem o algoritmo na linguagem materna e no Scratch. Ao final, em grupos, eles devem analisar o algoritmo e propor uma mudança que possibilite ao personagem terminar com a mesma fantasia que iniciou. Uma das respostas possíveis é inserir um comando para troca de fantasia antes do comando para dizer a resposta.

Ao explorar os comandos da categoria **Variáveis**, convém explicar o conceito de variável em Computação comparando com o conceito de variável em Álgebra. Nesta, variáveis são letras que podem assumir diferentes valores. Já em Computação, variáveis são espaços reservados na memória do computador para armazenamento de dados permitindo que eles sejam alterados.

Explore o algoritmo que gera os números da sequência (10, 20, 30, 40).

Na **atividade 10**, oriente os estudantes a reproduzir o rastro do personagem no caderno após cada comando, para ajudá-los a concluir que o rastro se parece com a letra P.

Para responderem ao **item a** da **atividade 11**, eles podem utilizar o mesmo procedimento sugerido para a **atividade 10**. Comente que devem considerar o modo como o personagem está posicionado para entender as medidas de abertura dos ângulos de giro. No **item b**, eles devem escrever o algoritmo correspondente em linguagem materna, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT405**.

Na **atividade 12**, espera-se que os estudantes percebam que o algoritmo I fornece o valor de $(40 + 100) \times 5$ e o algoritmo II fornece o valor de $40 + 100 \times 5$, pois adiciona 40 ao resultado de 100×5.

Para ampliar a **atividade 13**, proponha aos estudantes que expliquem como seria o algoritmo para calcular a medida da área de um triângulo ou de um círculo. Se possível, leve-os para a sala de informática para que testem os algoritmos. Espera-se que obtenham algoritmos similares aos apresentados a seguir.

- Algoritmo para calcular a medida da área de um triângulo cujas medidas de comprimento da base e da altura foram dadas pelo usuário:

SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE, EUA.

- Algoritmo para calcular a medida da área de um círculo cuja medida do comprimento do raio foi dada pelo usuário:

No subtópico *Estrutura de condição*, analise o fluxograma dado e simule o algoritmo representado por ele. É importante que os estudantes identifiquem quais seriam as saídas para diferentes valores de entrada, interpretando cada um dos passos. Dessa forma, você pode verificar se todos compreenderam o funcionamento dos desvios condicionais.

Analise com a turma os exemplos de algoritmos, no Scratch, que utilizam o comando **se... então... senão** da categoria **Variáveis**.

A partir do algoritmo em linguagem materna, a **atividade 15** auxilia os estudantes a construírem um algoritmo no Scratch que verifica se um número dado pelo usuário é par ou ímpar. Se possível, leve-os à sala de informática para a realização da atividade. Por separar o problema em partes menores, a atividade favorece o desenvolvimento do pilar **decomposição** do pensamento computacional.

No subtópico *Estrutura de repetição*, analise o fluxograma dado com a turma e simule o algoritmo representado por ele. Dessa forma, você pode verificar se todos compreenderam o funcionamento do laço de repetição. Vale salientar que os laços exigem o cuidado de verificar se o valor que determina a parada (ou saída) do laço será atingido em algum momento. Caso contrário, o algoritmo repetirá indefinidamente os passos de dentro do laço.

Apresente os algoritmos a seguir para que os estudantes comparem os algoritmos I e II e, depois, os algoritmos III e IV e percebam como o comando **repita** pode tornar um algoritmo mais compacto e eficiente. Esse tipo de análise contribui para o desenvolvimento da **competência específica 1**[1] **de Computação** e da habilidade **EM13CO01**[2], uma vez que mostra a possibilidade de construir um algoritmo reutilizando partes de outro.

1 **(Competência específica 1)** Compreender as possibilidades e os limites da Computação para resolver problemas, tanto em termos de viabilidade quanto de eficiência, propondo e analisando soluções computacionais para diversos domínios do conhecimento, considerando diferentes aspectos.

2 **(EM13CO01)** Explorar e construir a solução de problemas por meio da reutilização de partes de soluções existentes.

Algoritmo I

Algoritmo II

Algoritmo III

SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CANBRIDGE, EUA.

Algoritmo IV

Na **atividade 16**, oriente os estudantes a reproduzirem o rastro do personagem no caderno após cada comando caso tenham dificuldades.

Na **atividade 18**, é dado um fluxograma com um algoritmo para produzir uma sequência numérica. No **item b**, os estudantes devem escrever esse algoritmo no Scratch. Caso não seja possível realizar a atividade em um computador, peça que planejem como seria o algoritmo e expliquem por escrito ou verbalmente. Essa atividade favorece o desenvolvimento do pilar **algoritmo** do pensamento computacional.

Trabalho e juventudes – O programador e o desenvolvimento de jogos digitais

Objetivos

- Entender o papel do programador no desenvolvimento de jogos digitais.
- Perceber as oportunidades de trabalho relacionadas ao mercado de programação de jogos.
- Ajustar um algoritmo escrito em linguagem materna.

Orientações didáticas

A seção aborda os profissionais que atuam no desenvolvimento de jogos digitais, sobretudo os programadores, e nisso permite uma abordagem ao **TCT Trabalho**.

Leia o texto da seção com a turma e comente que a criação de um jogo passa por diferentes etapas: idealização, prototipação, desenvolvimento, testes e publicação. Enfatize a importância de os desenvolvedores de jogos terem formação em Ciência da Computação.

Na **atividade 3**, os estudantes vão reordenar os passos de um algoritmo escrito em linguagem materna.

Amplie a proposta desta atividade e convide um ou mais estudantes para que representem esse algoritmo na lousa por meio de um fluxograma. Propostas como essa contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315** e da **competência específica 3**.

Metodologias ativas

Organize os estudantes em grupos e peça que elaborem o algoritmo de um jogo simples, representado-o em linguagem materna, por meio de um fluxograma ou no Scratch. Depois, peça que compartilhem os algoritmos com o restante da turma. Dessa forma, metodologias ativas como **aprendizagem baseada em problemas** e **aprendizagem em equipe** serão colocadas em prática.

Sugestão de atividade para a promoção da saúde mental dos estudantes

Forme uma roda de conversa com a turma e proponha os seguintes questionamentos: "Vocês acham que o uso excessivo de computadores, *smartphones*, *videogames* ou *tablets* para jogar pode trazer prejuízos para a saúde mental?"; "Que medidas vocês tomariam para contornar essa situação? Por quê?". Deixe os estudantes à vontade para expor opiniões. Comente que passar muitas horas em frente a telas pode levar ao isolamento social, a distúrbios do sono e ao aumento da ansiedade e da depressão. Por isso, deve-se equilibrar o uso de telas com atividades físicas, sociais e de lazer *off-line*.

Trabalhando com as culturas juvenis

Jogos digitais têm se tornado um elemento central nas culturas juvenis. Eles não são apenas uma forma de entretenimento, mas também um espaço em que os jovens exploram a criatividade, colaboram e competem. Por meio dos jogos, eles se conectam globalmente, compartilhando experiências e criando grupos que tenham interesses comuns. Essas interações digitais influenciam linguagens, estilos de vida e valores, refletindo a importância dos jogos na construção das dinâmicas sociais e culturais das novas gerações.

Aproveite a oportunidade para propor um pequeno projeto que envolva uma pesquisa de jogos digitais ou aplicativos que possam contribuir para o aprendizado de conceitos de diferentes unidades temáticas da Matemática: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. Organize a turma em cinco grupos. Cada grupo deve pesquisar um jogo digital ou aplicativo educativo que aborde assuntos da unidade temática da qual ficou responsável. A busca pode ser feita em plataformas educacionais, lojas de aplicativos ou, ainda, com professores e especialistas. Incentive os grupos a explorar os jogos e aplicativos selecionados, avaliando-os com base em critérios como: precisão dos conceitos, interatividade, acessibilidade, segurança etc. Depois reserve uma aula para o compartilhamento das descobertas. Propostas como essa favorecem o desenvolvimento das **competências específicas 1** e **4**[1] **de Computação** e das habilidades **EM13CO06**[2] e **EM13CO15**[3].

Para finalizar o capítulo 10

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma forma diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, preencher lacunas de compreensão, desenvolver habilidades de pesquisa e extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões dadas. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que fizerem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA – O que há por trás dos dados?

Objetivos

- Reconhecer informações que induzam a uma interpretação equivocada.
- Reconhecer que publicações envolvendo dados estatísticos podem esconder informações.
- Analisar criticamente informações.

BNCC

Competências gerais da BNCC: 2 e **7**.

Os textos na íntegra das competências gerais da BNCC citadas encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Saúde
- Vida Familiar e Social

1 **(Competência específica 4)** Construir conhecimento usando técnicas e tecnologias computacionais, produzindo conteúdos e artefatos de forma criativa, com respeito às questões éticas e legais, que proporcionem experiencias para si e os demais.

2 **(EM13CO06)** Avaliar *software* levando em consideração diferentes características e métricas associadas.

3 **(EM13CO15)** Analisar a interação entre usuários e artefatos computacionais, abordando aspectos da experiencia do usuário e promovendo reflexão sobre a qualidade do uso dos artefatos nas esferas do trabalho, do lazer e do estudo.

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

ODS 3 ODS 16

Orientações didáticas

O tema desta seção contribui para o desenvolvimento do **TCT Vida Familiar e Social** e do **ODS 16: Paz, Justiça e Instituições Eficazes**. Isso porque a disseminação desenfreada de informações enganosas e descontextualizadas pode gerar conflitos e divisões nas famílias e nas comunidades, prejudicando o diálogo construtivo. No contexto social, a propagação dessas informações pode alimentar a polarização e a desinformação, comprometendo a tomada de decisões. Nesta seção, são abordadas ainda as **competências gerais 2** e **7**, pois são exercitadas a análise crítica e a argumentação embasada em dados confiáveis para compreender problemas e agir de forma ética.

Inicie o trabalho perguntando aos estudantes se já tiveram de lidar com publicações envolvendo dados estatísticos que induziam a uma interpretação ou que escondiam informações importantes. Deixe-os à vontade para contar as experiências vivenciadas. Em seguida, analise coletivamente a cena e discuta os textos com a turma.

Ao abordar a fala da apresentadora do telejornal, resgate o conceito de média aritmética e apresente este exemplo de conjunto de dados relacionados à renda de algumas pessoas:

R$ 1.000,00 R$ 2.000,00 R$ 70.500,00

R$ 0,00 R$ 1.500,00

Nesse exemplo, a renda média das pessoas é R$ 15.000,00, mas nenhuma delas tem renda próxima da renda média.

A **atividade 1** propõe a análise de informações publicadas em diferentes mídias e a reflexão sobre possíveis informações escondidas ou que induzem a determinada interpretação. A seguir, estão alguns exemplos de resposta da atividade.

- "75% dos domicílios do município já podem receber sinal de internet" – Está subentendido o fato de que 25% dos domicílios ainda não podem receber sinal de internet. Além disso, "poder" receber o sinal não significa já "ter" o sinal de internet.
- "No ano passado, o município recebeu em média 5.000 turistas" – A informação induz as pessoas a acharem que o município recebeu aproximadamente 5.000 turistas no ano passado sem considerar a disparidade da quantidade de turistas ao longo do ano. É comum alguns municípios receberem mais turistas em meses com datas festivas e feriados e um número de turistas bem inferior em meses em que não há essas datas.
- "Venha morar na cidade onde mais de 10.000 pessoas se sentem seguras e felizes" – Na publicação, foi usado o número absoluto de pessoas que se sentem seguras e felizes na cidade para que os clientes se sintam mais confiantes em adquirir um imóvel no local. No entanto, em uma cidade com 80.000 habitantes, por exemplo, 10.000 pessoas correspondem a apenas 12,5% da população total, o que demonstra que poucas pessoas se sentem felizes e seguras na cidade.
- "Taxa de desemprego no Brasil cai e termina 2024 com apenas 11%" – A leitura imediata é positiva, porém os 11% de desempregados correspondem a aproximadamente 12 milhões de pessoas, o que é um dado negativo.

O tema da **atividade 2**, a covid-19, relaciona-se com o **TCT Saúde** e com o **ODS 3: Saúde e Bem-Estar**. Antes de propor a atividade, converse com os estudantes sobre o que é a covid-19 e como ela afetou a saúde de milhares de pessoas no mundo a partir de 2019. Para mais informações, acesse https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/covid-19 (acesso em: 12 set. 2024). No **item a**, a estratégia da propaganda é gerar preocupação nas pessoas e, com isso, fazer com que elas adquiram máscaras que supostamente protegem 100% contra a doença. No **item b**, o dado 100% foi utilizado para evidenciar a eficácia do uso da máscara. No **item c**, a informação é falsa, pois, segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS), as máscaras não garantem 100% de proteção contra a doença. O tema dessa atividade pode ser ampliado, propondo um trabalho com as *fake news* relacionadas ao assunto.

Nos **itens a** e **b** da **atividade 3**, é esperado que os estudantes percebam que a cobrança da taxa de cadastro no banco são os juros, já que no final o montante pago será maior que o preço à vista do carro. Além disso, a discussão sobre o motivo de essa informação estar menor é central nesta atividade, pois é algo que o anunciante não tem interesse que o consumidor saiba de antemão, mas é um fato que ele deve apresentar para que sua propaganda não seja falsa. No **item c**, os estudantes devem verificar que, com a taxa de 0,99% ao mês anunciada, em um período de 48 meses, o valor total pago no financiamento seria, aproximadamente, 160,46% do preço do automóvel, totalizando, aproximadamente, R$ 144.251,91.

PESQUISA E AÇÃO – Telejornal

Objetivos

- Pesquisar sobre os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) relacionados ao meio ambiente.
- Pesquisar informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal.
- Divulgar a pesquisa realizada à comunidade escolar.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 2**, **3**, **4**, **5**, **7**, **9** e **10**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  Competência específica 1: **EM13MAT102** e **EM13MAT103**.
  Competência específica 2.
  Competência específica 4: **EM13MAT407**.
- **Competência específica e habilidade da área de Linguagens e suas Tecnologias:**

Competência específica 3[1]: **EM13LGG301**[2].

- **Competências específicas e habilidades da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  Competência específica 2[3]: **EM13CNT206**[4].
  Competência específica 3[5]: **EM13CNT302**[6].
  Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Educação Ambiental
- Educação para o Consumo

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

Orientações didáticas

As atividades da seção são propostas em etapas, com a finalidade de organizar o trabalho, e podem ser realizadas no decorrer do período escolar. Mesmo que algumas etapas, como a de pesquisa, possam ser realizadas extraclasse, verifique o perfil dos estudantes e oriente-os com relação ao planejamento, ao prazo, aos materiais e a outros aspectos necessários à realização do trabalho, reservando algumas aulas (momentos presenciais) para o acompanhamento do progresso das tarefas.

Como esta seção busca desenvolver a preservação do meio ambiente, está intrinsecamente ligada aos **TCTs Educação Ambiental** e **Educação para o Consumo**.

A discussão sobre a importância da preservação e conservação do meio ambiente, bem como a divulgação das pesquisas e de ações por meio da produção coletiva de um telejornal, favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG301**, **EM13CNT206** e **EM13CNT302**, das **competências gerais 2**, **3**, **4**, **5** e **7**, das **competências específicas 1**, **2** e **4 da área de Matemática e suas Tecnologias**, da **competência específica 3 da área de Linguagens e suas Tecnologias**, da **competência específica 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

ETAPA 1

Nesta etapa, os estudantes iniciam a reflexão sobre a preservação do meio ambiente a partir da pesquisa sobre os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS), que representam ações a serem efetivadas até 2030. Após as pesquisas, solicite que exponham as informações obtidas em uma roda de conversa, além de analisarem as ações propostas pelos ODS relacionados diretamente à preservação do meio ambiente.

Confira um exemplo de resposta para o **item a** da **atividade 1**.

A ONU é uma organização internacional composta de países que trabalham juntos pelo alcance da paz e do desenvolvimento mundiais. Atualmente, há 193 países-membros da ONU, entre eles o Brasil. A organização foi fundada em 24 de outubro de 1945, após o fim da Segunda Guerra Mundial, com o propósito de evitar novos sofrimentos causados pelas guerras. Assim, a ONU trabalha para garantir condições de vida justas e dignas a todos os seres humanos. A ONU também busca formas de identificar ameaças ao meio ambiente, alertar os países sobre essas ameaças e manter o planeta saudável.

---

1 **(Competência específica 3)** Utilizar diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais) para exercer, com autonomia e colaboração, protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva, de forma crítica, criativa, ética e solidária, defendendo pontos de vista que respeitem o outro e promovam os Direitos Humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável, em âmbito local, regional e global.

2 **(EM13LGG301)** Participar de processos de produção individual e colaborativa em diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais), levando em conta suas formas e seus funcionamentos, para produzir sentidos em diferentes contextos.

3 **(Competência específica 2)** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

4 **(EM13CNT206)** Discutir a importância da preservação e conservação da biodiversidade, considerando parâmetros qualitativos e quantitativos, e avaliar os efeitos da ação humana e das políticas ambientais para a garantia da sustentabilidade do planeta.

5 **(Competência específica 10)** Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

6 **(EM13CNT302)** Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental.

Verifique um exemplo de resposta para o **item b** da **atividade 1**.

Os ODS são ações a serem realizadas por todos os países a fim de acabar com a pobreza, proteger o planeta e garantir prosperidade e paz a todos. Até 2030, essas ações devem guiar o trabalho do Brasil e dos demais países que fazem parte desse acordo. São 17 objetivos integrados e que equilibram as três dimensões do desenvolvimento sustentável: econômica, social e ambiental. Além disso, buscam concretizar os direitos humanos de todos e alcançar a igualdade de gênero e o empoderamento feminino. Os ODS estão listados no *site* da ONU. Disponível em: https://nacoesunidas.org/pos2015/ (acesso em: 12 set. 2024).

Observe um exemplo de resposta para o **item c** da **atividade 1**.

Estão relacionados diretamente com a preservação do meio ambiente os **ODS 6: Água potável e saneamento**, **ODS 7: Energia limpa e acessível**, **ODS 12: Consumo e produção responsáveis**, **ODS 13: Ação contra a mudança global do clima**, **ODS 14: Vida na água** e **ODS 15: Vida terrestre**. As ações propostas para esses objetivos podem ser consultadas no *site* da ONU. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs (acesso em: 2 out. 2024).

ETAPA 2

Os conteúdos pesquisados nesta etapa, em conjunto com os da etapa anterior, serão organizados e interpretados pelos estudantes com sua ajuda e, posteriormente, utilizados na criação do telejornal a ser apresentado para a comunidade escolar, com o objetivo de conscientizá-la sobre a situação ambiental atual e futura.

Como a etapa de pesquisa para a criação do telejornal envolve dados referentes à região em que o estudante reside, esta atividade fornece subsídios para discussões e favorecimento do desenvolvimento da **competência específica 2**, uma vez que ele proporá ou participará de ações adequadas às demandas de sua comunidade.

Na **atividade 2**, durante a formação dos grupos e a escolha dos temas, ajude os estudantes. Caso julgue necessário, oriente os grupos que escolherem o mesmo tema, fazendo a divisão da busca de informações. Os temas são densos e os estudantes precisam se organizar a fim de que consigam realizar toda a atividade, sem se perderem com a quantidade de informações disponíveis.

Na **atividade 3**, leve os estudantes para realizar as pesquisas no laboratório de informática ou na biblioteca, a fim de que tenham auxílio e acesso a fontes confiáveis. Durante as pesquisas, eles devem acessar e interpretar textos científicos e divulgados por diferentes meios de comunicação, com tabelas, gráficos e relatórios de pesquisas estatísticas, inclusive com o uso de unidades de medida de diferentes grandezas, desenvolvendo as habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT103** e **EM13MAT407**.

No **item a** da **atividade 4**, para auxiliá-los na verificação das fontes, proponha as seguintes questões: “De quem é a autoria do texto?”. Peça-lhes que pesquisem um trecho do texto para verificar se é original ou se foi copiado de outro *site*. “Existem erros gramaticais ou ortográficos no texto?"; "O conteúdo está simplificado?"; "O autor ou a instituição que fornece a informação tem acesso a dados confiáveis?”.

Discuta com eles como devemos proceder para descobrir se um *site* é confiável ou não. Se achar oportuno, apresente a terminologia dos *sites*: “.org” para *sites* de organizações não governamentais; “.com” para endereços comerciais e “.gov” referente a *sites* do governo.

No **item b** da **atividade 4** e na **atividade 5**, oriente os estudantes durante o processo de organização e interpretação dos dados coletados. Instigue-os a encontrar a melhor maneira de apresentar esses dados, podendo ser por meio de um gráfico ou de analogias – por exemplo, a área devastada é do tamanho de oito campos de futebol –, entre outras.

ETAPA 3

Antes da criação do telejornal, promova momentos de partilha das informações, de modo que fique evidente o objetivo do telejornal. Leve os estudantes a perceber que é preciso que todos tomem consciência da importância de preservar o meio ambiente, não apenas para seu bem-estar, mas também para o bem das futuras gerações. Ao tratar de sustentabilidade, eles precisam ter consciência de que, assim como atitudes tomadas no passado se refletem no cenário ambiental atual, ações tomadas agora se refletirão no futuro. Por isso, o telejornal deve estimular ações visando à preservação e à conservação do meio ambiente.

Na **atividade 6**, para auxiliar no trabalho dos estudantes, apresente o trecho de um telejornal e peça-lhes que observem a postura corporal dos âncoras e dos repórteres, o tom de voz e a linguagem utilizada, a vinheta de abertura e o fechamento, a entrada das notícias e das reportagens, o enquadramento dos âncoras na câmera, entre outros elementos.

Para a criação do telejornal, é importante que os estudantes conheçam as etapas do processo de elaboração desse produto e as funções que podem desempenhar nesse processo. É imprescindível que a turma trabalhe de forma colaborativa, e você, professor, deve atuar como mediador no decorrer do trabalho.

Conteúdos sobre como organizar um telejornal na escola podem ser acessados nos *links* a seguir.

- Telejornal da galera. Disponível em: https://saberesepraticas.cenpec.org.br/oficinas/telejornal-da-galera. Acesso em: 12 set. 2024.
- Telejornal da escola. Disponível em: http://premioprofessoresdobrasil.mec.gov.br/images/pdf/relatos_2009/2009_ppb_tatiana_basso.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

Esclareça que o cenário precisa ser um lugar silencioso e com boa iluminação. Os responsáveis pela criação do cenário devem pensar em um fundo e em uma bancada. Os responsáveis pela vinheta podem buscar imagens e sons que identifiquem o telejornal na abertura e no encerramento.

Na **atividade 7**, embora os estudantes possam ampliar a abordagem do telejornal para mais de um tema, o interessante é que aprofundem um único tema proposto. Caso haja a impossibilidade de realizar a gravação e a transmissão do telejornal, a apresentação à comunidade poderá ser feita ao vivo. Oriente-os quanto aos efeitos visuais que poderão ser incluídos nesse caso. É interessante que essa apresentação seja gravada, se possível, para que os estudantes possam avaliá-la. Sugira uma votação para a escolha do nome do telejornal.

Na **atividade 8**, promova momentos em que todos possam compartilhar ideias, sugestões e propostas, trabalhando de maneira coordenada e colaborativa. Por exemplo, em algum momento os responsáveis pelos roteiros precisam saber quais reportagens farão parte do telejornal; os criadores da vinheta precisam saber o título definido para o telejornal; e assim por diante.

O ensaio proposto na **atividade 9** é importante para que a turma observe pontos a serem melhorados ou alterados. Promova quantos ensaios forem necessários, considerando a disponibilidade de tempo. Oriente os âncoras e os repórteres sobre a possibilidade de uso de um roteiro escrito para apoiar suas falas nos ensaios e na apresentação. A edição do material poderá ser orientada com o auxílio do professor de informática.

ETAPAS 4 E 5

Durante a apresentação e a análise do telejornal, oriente os estudantes quanto ao exercício de empatia, diálogo e resolução de conflitos, fazendo com que acolham e valorizem a diversidade de opiniões. Verifique a opinião dos estudantes quanto à clareza do tema abordado no telejornal.

No momento de autoavaliação, oriente-os a utilizar as perguntas propostas e a experiência que tiveram durante a atividade como base para a elaboração do relatório. Espera-se que eles avaliem se alcançaram os objetivos propostos, se sentiram dificuldades no decorrer do processo e de que modo a atividade contribuiu para sua formação.

Nesta seção, a maioria das atividades é realizada em grupos, o que requer competências como empatia, diálogo, resolução de conflitos, cooperação, respeito, disposição para acolher e valorizar a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza; capacidade de agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários. Assim, é favorecido o desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10**.

PREPARE-SE PARA O ENEM E VESTIBULARES

Objetivos

- Mobilizar conceitos e procedimentos estudados no volume.
- Avaliar a aprendizagem dos estudantes.
- Ajudar os estudantes a se prepararem para os exames de larga escala que tenham a intenção de participar.

Orientações didáticas

Após todos terem respondido às questões, reserve um momento para discutir cada uma delas coletivamente. É importante compreender o que levou alguns estudantes a assinalar uma alternativa diferente da esperada e que, na medida do possível, esses pontos sejam discutidos.

Se achar necessário, enriqueça a seção e proponha questões mais atuais do Enem e de vestibulares que contemplem os temas estudados.

RESOLUÇÕES DAS ATIVIDADES

Avaliação diagnóstica 1

1. A $= 500 \text{ m} \cdot 300 \text{ m} = 150.000 \text{ m}^2 =$
$= 0{,}15 \text{ km}^2$
Alternativa **a**.

2. $50 \text{ cm} = 0{,}5 \text{ m}$
$V = 0{,}5 \text{ m} \cdot 0{,}5 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 0{,}5 \text{ m}^3$
Alternativa **a**.

3. 4,5 dias = 108 horas
$108 - 2 = 106$
$106 \cdot 60 = 6.360$
De barco, a viagem de Aline levará 6.360 minutos a mais.
Alternativa **d**.

4. $\dfrac{10 + 9 + 10 + 9 + 5}{5} = \dfrac{43}{5} = 8{,}6$
Alternativa **b**.

5. Alternativa **a**: falsa, pois $35 = (-7) \cdot (-5)$, ou seja, -7 e -5 são divisores de 35, não múltiplos dele.

Alternativa **b**: falsa, pois $-3 = 1 \cdot (-3)$ e $6 = 1 \cdot 6$, ou seja, -3 e 6 são múltiplos de 1, não divisores dele.

Alternativa **c**: falsa, pois 4 tem três divisores naturais distintos (1, 2 e 4) em vez de dois, ou seja, 4 não é número primo.

Alternativa **d**: falsa, pois 23 tem exatamente dois divisores naturais distintos (1 e 23), ou seja, 23 é número primo.

Alternativa **e**: verdadeira, pois $45 = (-9) \cdot (-5)$, ou seja, 45 é múltiplo de -9.
Alternativa **e**.

6. Uma equação é qualquer sentença matemática que expressa uma **igualdade** em que um ou mais números desconhecidos podem ser representados por letras (geralmente do alfabeto da língua portuguesa), chamadas de **incógnitas**. As sentenças nas alternativas **a** e **b** não apresentam incógnitas, enquanto as sentenças nas alternativas **c** e **e** não são igualdades, restando, portanto, a alternativa **d**.
Alternativa **d**

7. $8x + 2 = 4x + 18 \Rightarrow 8x - 4x = 18 - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = \dfrac{16}{4} \Rightarrow x = 4$
Alternativa **c**.

8. Tomando um par de medidas para a e b, podemos calcular k tal que $a = b \cdot k$.
$100 = 5 \cdot k \Rightarrow k = 20$
$a = 20b \Rightarrow b = \dfrac{a}{20}$
Alternativa **c**.

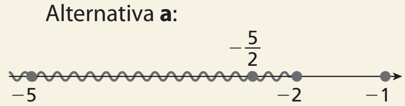
9. $1{,}25 \text{ L} \cdot 4 = 5 \text{ L}$
Alternativa **d**.

10. No plano cartesiano apresentado, temos os pontos $A(3, 2)$, $B(2, 3)$, $C(2, 0)$, $D(0, 1)$ e $O(0, 0)$. Portanto, as coordenadas do ponto B estavam corretas.
Alternativa **b**.

11. Analisando cada alternativa:
Alternativa **a**: falsa, pois na reta numérica o -5 está representado à esquerda do -1.
Alternativa **b**: verdadeira, pois na reta numérica o -9 está representado à esquerda do -7. Quando comparamos dois números em uma reta numérica, o menor deles é o número que está representado à esquerda do outro.
Alternativa **c**: falsa. Comparando frações com mesmo numerador, a maior será a que tem o menor denominador.
Alternativa **d**: falsa. $\dfrac{11}{3}$ é maior que 3 e $\dfrac{12}{5}$ é menor que 3; logo, $\dfrac{11}{3} < \dfrac{12}{5}$.
Alternativa **e**: falsa. A metade de 5 é maior que 2.
Alternativa **b**.

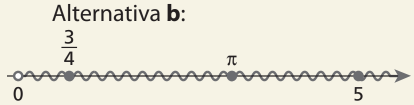
12. Fazendo a representação na reta numérica do conjunto A e dos elementos de B, em cada alternativa, é possível identificar a alternativa correta.

Alternativa **a**:



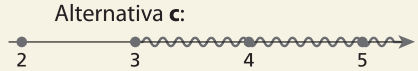
Podemos observar que $-1 \notin A$.

Alternativa **b**:



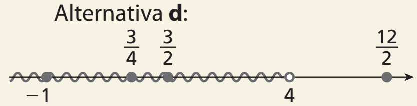
Podemos observar que $0 \notin A$.

Alternativa **c**:



Podemos observar que $2 \notin A$.

Alternativa **d**:



Podemos observar que $\dfrac{12}{2} \notin A$.

Alternativa **e**:

Podemos observar que todos os elementos de B pertencem a A.
Alternativa **e**.

13. $x^2 + 10x = 0 \Rightarrow x(x + 10) = 0$
Assim:
$x = 0$ ou $x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10$
Portanto, as raízes são 0 e -10.
Alternativa **a**.

Capítulo 1 Grandezas e medidas

Atividades propostas

1. a. O perímetro não é uma medida, é uma grandeza.

b. A área não é uma medida, é uma grandeza.

c. O volume não é uma medida, é uma grandeza.

2. a. As medidas lineares da piscina são dadas pela unidade 1 u, medida do lado da peça cerâmica quadrada que reveste as paredes e o seu chão. Pelo enunciado, as medidas de comprimento das laterais são 20 u no lado menor e 30 u no lado maior. Logo, as medidas são 20 u, 30 u, 20 u, 30 u.

b. Do enunciado, entende-se que a altura da piscina mede 5 u. Logo, duas das paredes retangulares têm medidas 20 u por 5 u, com perímetro $(20 + 5 + 20 + 5) \text{ u} = 50 \text{ u}$. As outras paredes têm medidas 30 u por 5 u, com perímetro $(30 + 5 + 30 + 5) \text{ u} = 70 \text{ u}$. O chão tem medidas 20 u por 30 u, com perímetro $(20 + 30 + 20 + 30) \text{ u} = 100 \text{ u}$.

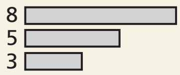
c. Como a medida da área de cada peça é 1 u^2, o número de peças da parede ou do chão indica a área dessas superfícies. As paredes menores têm 100 peças $(20 \cdot 5)$ e área medindo 100 u^2; as paredes maiores têm 150 peças $(30 \cdot 5)$ e área medindo 150 u^2; o chão tem 600 peças $(20 \cdot 30)$ e área medindo 600 u^2.

d. Basta adicionar os números de peças das paredes e das medidas das áreas: $100 + 100 + 150 + 150 + 600 = 1.100$; $100 \text{ u}^2 + 100 \text{ u}^2 + 150 \text{ u}^2 + 150 \text{ u}^2 + 600 \text{ u}^2 = 1.100 \text{ u}^2$

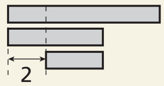
e. Podemos imaginar a piscina sendo preenchida por cubos com faces iguais às peças dos revestimentos. Seriam 5 camadas (altura) retangulares de 20 cubos (lado menor) por 30 cubos (lado maior), isto é, $5 \cdot 20 \cdot 30 = 3.000$, ou seja, 3.000 cubos, que correspondem a 3.000 u^3.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

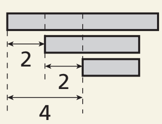
3. Resposta possível:



Passo 1: Começamos posicionando as tábuas como na ilustração acima. Depois, alinhamos a tábua menor à direita da tábua de 5 metros e marcamos a medida de 2 metros na tábua de 8 metros, como ilustrado a seguir:



Passo 2: Alinhamos a tábua de 5 metros à marcação na tábua maior e mantemos a tábua de 3 metros alinhada à direita da tábua de 5 metros, como estava. Assim, podemos marcar a medida de 4 metros na tábua de 8 metros, obtendo sua metade, como na última ilustração:



4. a. Respostas possíveis: fita métrica, milímetro; balança, grama; termômetro, grau Celsius; esfigmomanômetro, milímetro de mercúrio (mmHg).

b. Respostas possíveis: trena, milímetro; recipiente graduado em litro ou dm^3, litro ou dm^3.

c. Respostas possíveis: calendário, semana; relógio, minuto; cronômetro, segundo.

5. a. São 2 algarismos significativos.

b. São 4 algarismos significativos.

c. São 5 algarismos significativos.

d. São 4 algarismos significativos.

e. São 2 algarismos significativos, pois os zeros estão à esquerda.

f. São 5 algarismos significativos.

6. Para arredondar para centena de milhar, observamos o algarismo da dezena de milhar. Se for igual ou maior do que 5, acrescentamos 1 ao algarismo da centena de milhar; caso contrário, mantemos o algarismo da centena de milhar e substituímos por zero os algarismos à direita. Respectivamente de 2018 a 2022, total de matrículas: 7.700.000, 7.500.000, 7.600.000, 7.800.000, 7.900.000; matrículas referentes ao ensino integrado: 600.000, 600.000, 700.000, 700.000, 800.000.

7. Loja Já: $12 + 12 + 6 + 3 + 3 + 11 = 47$; Papelaria Esquina: $13 + 11 + 6 + 3 + 3 + 11 = 47$; Lojinha Escolar: $12 + 12 + 7 + 3 + 3 + 14 = 51$.
Andréa pode comprar nas duas primeiras lojas (aproximadamente 47 reais), mas na última (aproximadamente 51 reais), não.

8. Respostas possíveis: Arredondar para centena simples: 12.345.678; 81.234.567; 78.123.456; 67.812.345; 56.781.234; 45.678,123; 3.456,7812; 23.456,781; 4.444,4444; 5.555,5555.
Arredondando: 12.345.700; 81.234.600; 78.123.500; 67.812.300; 56.781.200; 45.700,000; 3.500,0000; 23.500,000; 4.400,0000; 5.600,000.

9. Resposta possível: Sejam os números 12.345.000; 81.234.000; 78.000.000; 67,812345; 5,6781234; 45.678,000; 3.456,7812; 0,0012345; 4.444,4444; 0,0000055.
Em notação científica: $1{,}2345 \cdot 10^7$; $8{,}1234 \cdot 10^7$; $7{,}8 \cdot 10^7$; $6{,}7812345 \cdot 10^1$; $5{,}6781234 \cdot 10^0$; $4{,}5678 \cdot 10^4$; $3{,}4567812 \cdot 10^3$; $1{,}2345 \cdot 10^{-3}$; $4{,}4444444 \cdot 10^3$; $5{,}5 \cdot 10^{-6}$.

10. Para que seja feita a transformação para notação científica, é necessário que:
$0{,}00000092 = 9{,}2 \cdot 0{,}0000001 = 9{,}2 \cdot 10^{-7}$
Alternativa **b**.

11. $43.252.003.274.489.856.000 \simeq$
$\simeq 43.300.000.000.000.000.000$;
$4{,}33 \cdot 10^{19}$

12. Como visto na tabela, sabemos que o prefixo nano equivale a 10^{-9}, enquanto o prefixo micro equivale a 10^{-6}. Sabendo disso, podemos calcular:
$200.000 \text{ nm} = 200.000 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 200 \text{ µm}$

13. a. $(6{,}5 \cdot 10^9) \cdot (2 \cdot 10^{30}) = 13 \cdot 10^{9+30} = 1{,}3 \cdot 10^{40}$
Medida da massa do buraco negro: $1{,}3 \cdot 10^{40}$ kg

b. O prefixo yotta corresponde a 10^{24}.
$1{,}3 \cdot 10^{40} \text{ kg} = 1{,}3 \cdot 10^{43} \text{ g} = 1{,}3 \cdot 10^{19} \cdot 10^{24} \text{ g} = 1{,}3 \cdot 10^{19} \text{ Yg}$

14. a. É comum a confusão de "peso" com massa de um objeto e com a massa específica da matéria. A medida de massa específica do chumbo é muito maior do que a medida de massa específica do algodão. Por isso, ao responder rapidamente, muitas pessoas dizem que a massa de 1 kg de chumbo pesa mais do que 1 kg de algodão, mas as medidas das massas são iguais; logo, os pesos são iguais.

b. Chumbo tem maior medida de massa específica, 11,3 g/cm^3. O peso é o mesmo em ambas as mãos.

15. A medida da massa específica é dada pela razão entre a medida da massa em kg e a medida do volume em m^3.
Volume: $V = (16 \cdot 25 \cdot 75) \text{ cm}^3 = 30.000 \text{ cm}^3 = 0{,}030 \text{ m}^3$
$\rho = 2{,}5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 2{,}5 \cdot 10^3 = \frac{m}{0{,}030} \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 0{,}03 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3 \Rightarrow m = 75$
A medida da massa do bloco é 75 kg.

16. Medida da distância: $d = 1.500$ m
Medida do tempo: $t = 3$ min 29 s $= (3 \cdot 60 + 29)$ s $= 209$ s
$v = \frac{d}{t} = \frac{1.500}{209} \simeq 7{,}2$
$v = 7{,}2 \cdot 3{,}6 = 25{,}92$
Portanto, a velocidade média do atleta era, aproximadamente, 7,2 m/s, ou 25,92 km/h.

17. a. Testando diferentes valores, os estudantes podem perceber que um quadrado de lados medindo 1,5 m de comprimento é o que resultaria na maior medida de área, com 2,25 m^2.

b. Não, ele fará uma grade com área igual ao quádruplo da área anterior:
$(12 : 4)^2 = 9 = 4 \cdot 2{,}25$

c. Não, ele fará uma grade com área igual ao nônuplo da área anterior:
$(18 : 4)^2 = 20{,}25 = 9 \cdot 2{,}25$

18. Resposta pessoal.

19. a. Sim, pois 1 m/s = 3,6 km/h;

b. Sim, o fator de conversão é o inverso de 3,6, ou seja, basta dividir a velocidade medida em km/h por 3,6 para obter a respectiva velocidade em m/s.

20. a. $T_K = T_C + 273{,}15$
$T_C = 0 \Rightarrow T_K = 0 + 273{,}15$
$\therefore T_K = 273{,}15$ K

b. $T_K = T_C + 273{,}15$
$T_C = 100 \Rightarrow T_K = 100 + 273{,}15$
$\therefore T_K = 373{,}15$ K

21. 1 *terabyte* $= 2^{40}$ *bytes* $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 2 *terabytes* $= 2 \cdot 2^{40}$ *bytes* $=$
$= 2^{41}$ *bytes*
Alternativa **b**.

22. Basta dividir 10 GB, ou seja, $10 \cdot 2^{10}$ MB por 8 MB.
$\frac{10 \cdot 2^{10}}{2^3} = 10 \cdot 2^7 = 1.280$. Ou seja, cabem 1.280 arquivos.
A atividade não fornece dados suficientes para respondermos quantos arquivos podem ser transmitidos por minuto.

23. Não, o erro aumenta para cerca de 21%.
Ao arredondar 1 *YB* por fatores 10^3, obtemos:
$1\ YB = 10^{24}\ B = 1.000.000.000.000.000.000.000.000\ B$;
e, por fatores 2^{10}, obtemos:
$1\ YB = 2^{80}\ B = 1.208.925.819.614.629.174.706.176\ B$
ou seja:
$$\frac{1.208.925.819.614.629.174.706.176 - 1.000.000.000.000.000.000.000.000}{1.000.000.000.000.000.000.000.000} \simeq 0{,}21 = 21\%$$

As resoluções/comentários das atividades da seção *Trabalho e juventudes – Chef de cozinha* estão nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo

Para finalizar o capítulo 1

Autoavaliação

Q1. Para encher a cisterna ainda faltam $(240 - 104 = 136)$ litros.
$136 : 8 = 17$
Usando 17 vezes o balde de 8 L, enchemos a cisterna.
Alternativa **c**.

Q2. Na questão anterior, a grandeza é a capacidade e a unidade considerada é o balde.
Alternativa **b**.

Q3. Como a régua está graduada em milímetros, o algarismo significativo duvidoso é o 7.
Alternativa **d**.

Q4. Arredondando as medidas anotadas para décimo de quilograma, temos: 3,1; 3,1; 4,0 e 3,9.
Alternativa **a**.

Q5. $1\ \text{UA} \simeq 150.000.000{,}000\ \text{km} = 150.000.000.000\ \text{m} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}$
$1{,}5\ \text{UA} \simeq 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m} = 2{,}25 \cdot 10^{11}\ \text{m}$
Alternativa **a**.

Q6. $0{,}32\ \text{d} = 0{,}32 \cdot 24\ \text{h} = 7{,}68\ \text{h} = 7\ \text{h} + 0{,}68\ \text{h}$
$0{,}68\ \text{h} = 0{,}68 \cdot 60\ \text{min} = 40{,}8\ \text{min} = 40\ \text{min} + 0{,}8\ \text{min}$
$0{,}8\ \text{min} = 0{,}8 \cdot 60\ \text{s} = 48\ \text{s}$
$0{,}32\ \text{d} = 7\ \text{h}\ 40\ \text{min}\ 48\ \text{s}$
$27{,}32\ \text{d} = 27\ \text{d}\ 7\ \text{h}\ 40\ \text{min}\ 48\ \text{s}$
Alternativa **d**.

Q7. $2\ \text{TB} = 2 \cdot 2^{10}\ \text{GB} = 2^{11}\ \text{GB}$
$2^{11}\ \text{GB} : 64 = (2^{11} : 2^6)\ \text{GB} = 2^5$
Alternativa **d**.

Capítulo 2 Conjuntos

Atividades propostas

1. a. $A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$
b. $B = \{\text{A, E, I, O}\}$
c. $C = \left\{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\right\}$

2. Respostas possíveis:
a. D: x, tal que x é um número natural múltiplo de 12 e menor que 40.
b. E: fases da Lua.
c. F: x, tal que x é um número ímpar maior que 3 e menor que 21.

3. $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$
$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$
$C = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$
a. Falsa.
b. Verdadeira.
c. Verdadeira.
d. Falsa.
e. Verdadeira.
f. Verdadeira.

4. a. Não. Essa relação não é válida, pois nem todo número ímpar é múltiplo de 3. O elemento 5, por exemplo, pertence ao conjunto A, mas não pertence ao conjunto C.
b. Não. Essa relação não é verdadeira, pois há números ímpares que não são primos. Por exemplo, o número 49 pertence ao conjunto A, mas não pertence ao conjunto B.
c. Não. Há um número primo que é par: o número 2.

5. $A = \{1\}$; $B = \varnothing$; $C = \{1\}$
Logo, $A = C$.

6. a. $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b. $Y = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

7. a. Falsa, pois há elementos de D (os elementos 2 e 3) que não pertencem a C.
b. Verdadeira.
c. Falsa, pois 1 não é primo.
d. Verdadeira.
e. Falsa, pois existem números ímpares que não são primos, como o número 9.
f. Verdadeira.
g. Falsa, pois os conjuntos E e F não têm os mesmos elementos.
h. Verdadeira.
i. Verdadeira.

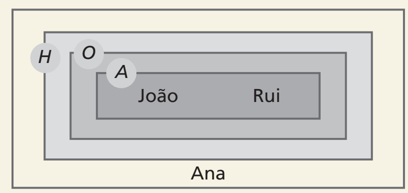
8. a. $J = \{2, 9\}$
b. $K = \{3, 9\}$
c. $L = \{8, 4\}$
d. $M = \{5, 7, 9\}$

9. Sabendo que $M \subset A$, há oito possibilidades:
- $M = \{a\}$
- $M = \{b\}$
- $M = \{c\}$
- $M = \{a, b\}$
- $M = \{a, c\}$
- $M = \{b, c\}$
- $M = \{a, b, c\}$
- $M = \varnothing$

Porém, sabemos que $M \supset B$. Logo, há somente quatro possibilidades: $M = \{b\}$ ou $M = \{a, b\}$ ou $M = \{b, c\}$ ou $M = \{a, b, c\}$

10. Respostas possíveis: $A \supset B$; $A \supset C$; $A \supset D$; $B \supset C$; $D \subset B$; $D \subset C$; $B \not\subset C$; $C \not\subset D$

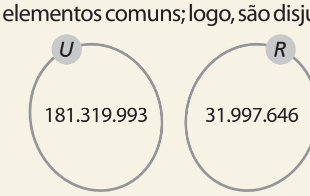
11. $H = \{\text{Jonas, Carlos, João, Rui}\}$
$A \subset O$ e $O \subset H \Rightarrow A \subset H$
João $\in A$ e Rui $\in A$
Temos, então, o seguinte diagrama:



Logo, há quatro possibilidades para o conjunto O:
$O = \{\text{João, Rui}\}$ ou $O = \{\text{João, Rui, Jonas}\}$ ou $O = \{\text{João, Rui, Carlos}\}$ ou $O = \{\text{João, Rui, Carlos, Jonas}\}$

12. a. $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4\}$
b. $Y \cup Z = \{1, 3, 5\}$
c. $Z \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
d. $X \cup Y \cup Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

13. Como uma pessoa não pode morar simultaneamente na área urbana e na área rural, os conjuntos U e R não têm elementos comuns; logo, são disjuntos.



Portanto, o conjunto $P = U \cup R$ tem 213.317.639 elementos, que é a soma das quantidades de elementos de U e de R.

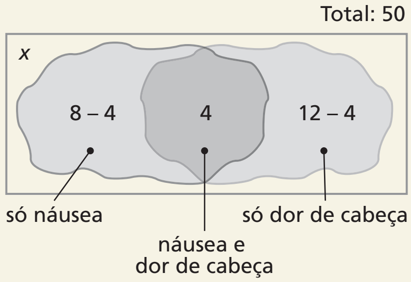
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

14. $P = \{x \mid x \text{ é um peixe}\}$
$B = \{x \mid x \text{ é um peixe-boi}\}$
$M = \{x \mid x \text{ é um mamífero}\}$
a. $B \cap M = B$
b. $P \cap B = \varnothing$
c. $P \cap M = \varnothing$
d. $(P \cup B) \cap M = B$

15. Temos $Y = \{2, 3, 5\}$. Então:
a. $X - Z = \{n \mid n \in X \text{ e } n \notin Z\} = \{\ \} = \varnothing$
b. $Y - X = \{n \mid n \in Y \text{ e } n \notin X\} = \{5\}$
c. $Z - X = \{n \mid n \in Z \text{ e } n \notin X\} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

16. a. Resposta possível:
$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
b. Respostas possíveis:
$(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(B \cap C) - A$

17. Vamos considerar o seguinte diagrama:



$12 - 4 = 8$

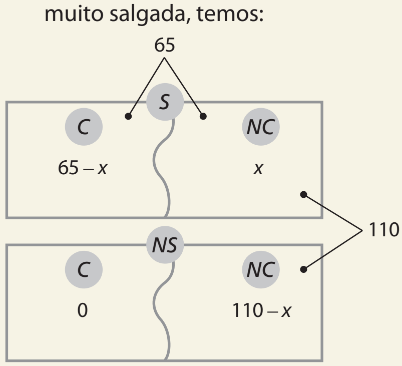
Logo, 8 voluntários sentiram dor de cabeça, mas não náusea.

$x = 50 - [(8 - 4) + 4 + (12 - 4)] =$
$= 50 - 16 = 34$

Logo, 34 voluntários não sentiram dor de cabeça nem náusea.

18. Vamos construir um diagrama separando os entrevistados em dois conjuntos: os que acharam a margarina muito salgada (*S*) e os que não acharam (*NS*); e subdividir cada um desses conjuntos nos conjuntos dos que acharam a margarina cremosa (*C*) e dos que a acharam não muito cremosa (*NC*).

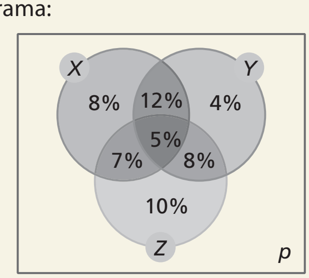
Sendo *x* o número de pessoas que achou a margarina não cremosa e muito salgada, temos:



Como foram entrevistadas 150 pessoas, 40 acharam a margarina cremosa. Então: $40 = 65 - x + 0 \Rightarrow x = 25$

Logo, 25 pessoas acharam que a margarina não é cremosa e é muito salgada.

19. Podemos construir o seguinte diagrama:



a. A porcentagem do público que gostou de algum dos três filmes é dada por:

$8\% + 12\% + 5\% + 7\% + 4\% +$
$+ 8\% + 10\% = 54\%$

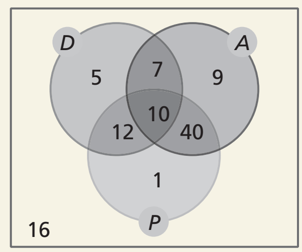
Então: $p = 100\% - 54\% = 46\%$

Logo, 46% do público não gostou de nenhum dos três filmes.

b. $n(X \cup Y) = 44\%$
$n(X \cup Z) = 50\%$
$n(Y \cup Z) = 46\%$

Os filmes escolhidos seriam *X* e *Z*, pois $n(X \cup Z) > n(Y \cup Z) > n(X \cup Y)$.

20. Podemos construir o seguinte diagrama:



I. O número total de pessoas pesquisadas é igual a:

$5 + 7 + 10 + 12 + 9 + 40 + 1 + 16 =$
$= 100$

O número de pessoas que achou o preço mais elevado é igual a: $n(P) = 63$

Logo, essa afirmação está de acordo com os dados apresentados.

II. De fato, a quantidade de pessoas que não apontaram problemas (16) é maior do que a das que apontaram os três problemas (10). Porém, essa conclusão não é suficiente para saber se a maioria dos entrevistados gostou do modelo.

III. Como $n(A) > n(P) > n(D)$, é melhor para a empresa investir em melhorias no acabamento que criar vantagens na forma de pagamento.

21. a. $A^C = \{6, 8, 10\}$

b. $B^C = \{0, 2, 10\}$

c. $C^C = \{0, 2, 6, 8, 10\}$

d. $C_B^C = B - C = \{6, 8\}$

22. Vamos considerar o diagrama a seguir, que representa a situação descrita.

Seja *A* o conjunto que representa a região hachurada no diagrama anterior, então: $U = A \cup C$

$A = C^C = U - C \Rightarrow A^C = U - A = C$

Logo, o complementar do complementar de *C* é o próprio conjunto *C*.

23. a. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$n(A \cup B) = 10 + 5 - 0$
$n(A \cup B) = 15$

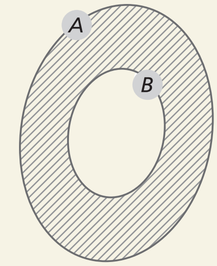
b. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$n(A \cup B) = 15 + 15 - 3$
$n(A \cup B) = 27$

c. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

Se $n(A) = 0$, então $n(A \cap B) = 0$.

Logo, $n(A - B) = 0$.

d. $A \cap C_A^B = A \cap (A - B) = A - B$



Logo: $n(A - B) = n\left(A \cap C_A^B\right) = 5$

24. a. Falsa, pois -2 é um número negativo e, portanto, não é natural.

b. Verdadeira.

c. Verdadeira.

d. Falsa, pois o zero é natural e não pertence ao conjunto $\mathbb{Z}^*$.

e. Verdadeira.

f. Falsa, pois $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+ = \{0\}$.

25. Não, essa seria uma generalização indevida, pois o resultado de 3 dividido por 2, por exemplo, não está definido no conjunto dos números inteiros.

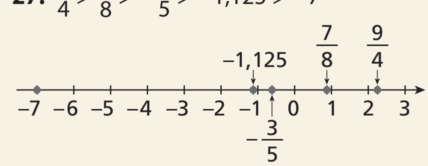
26. a. O conjunto $\mathbb{N}$.

b. O conjunto $\mathbb{Q}$, pois existem valores não inteiros.

c. O conjunto $\mathbb{Z}$, pois em alguns casos indicam-se os andares abaixo do térreo com valores negativos.

d. O conjunto $\mathbb{Q}$.

27. $\frac{9}{4} > \frac{7}{8} > -\frac{3}{5} > -1{,}125 > -7$



28. a. • Seja *x* a fração geratriz:

$x = -10{,}111...$ (I)
$10x = -101{,}111...$ (II)

Subtraindo (I) de (II), obtemos:

$9x = -91$
$x = -\frac{91}{9}$

• Seja *y* a fração geratriz:

$y = -10{,}010101...$ (I)
$100y = -1001{,}0101...$ (II)

Subtraindo (I) de (II), obtemos:

$99y = -991$
$y = -\frac{991}{99}$

b. • Seja *x* a fração geratriz:

$x = 1{,}333...$ (I)
$10x = 13{,}333...$ (II)

Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$9x = 12$
$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

- Seja y a fração geratriz:
$y = 1{,}5333...$ (I)
$10y = 15{,}333...$ (II)
$100y = 153{,}333....$ (III)
Subtraindo (II) de (III), obtemos:
$90y = 138$
$y = \frac{138}{90} = \frac{23}{15}$

29. Vamos considerar os números racionais $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, com a, b, c e d números inteiros e b e d não nulos.

a. A diferença entre x e y é dada por:

$$x - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{bd}$$

Temos: $(a \cdot d) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot c) \in \mathbb{Z}$, $(a \cdot d - b \cdot c) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot d) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo. Portanto, a diferença entre dois números racionais é um número racional.

b. O quociente de x e y, com $y \neq 0$, é dado por:

$$x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Temos: $(a \cdot d) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot c) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo. Portanto, o quociente de dois números racionais é um número racional.

30. A média aritmética de dois números racionais x e y é dada por:
$\frac{x + y}{2} = \frac{1}{2} \cdot (x + y)$

Usando as conclusões da **atividade resolvida R6**, temos:

- x e y são números racionais; logo, $(x + y)$ é um número racional;
- $(x + y)$ e $\frac{1}{2}$ são números racionais, logo $\frac{1}{2} \cdot (x + y)$ é um número racional.

Portanto, a média aritmética de dois números racionais é sempre um número racional.

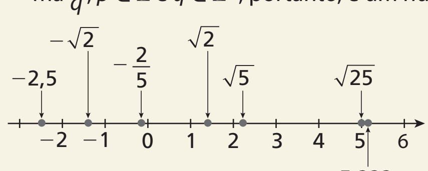
31. a. Não, por exemplo:
$(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1$ e $1 \in \mathbb{Q}$.

b. Não, por exemplo:

$$\left(\frac{1}{2} + \pi\right) + (1 - \pi) = \frac{3}{2} \text{ e } \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}.$$

32. a. Verdadeira.
b. Verdadeira.
c. Falsa, pois, por exemplo, $1 \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e $1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
d. Verdadeira.
e. Verdadeira.
f. Falsa, pois toda dízima periódica pode ser escrita na forma $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$; portanto, é um número racional.

33.



Ordem crescente: $-2{,}5$; $-\sqrt{2}$; $-\frac{2}{5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{25}$; 5,222...

34. a. Existem dois números naturais: 0 e 1.

b. Existem três números inteiros: -1, 0 e 1.

c. Existem infinitos números racionais, pois, por exemplo, podemos obter a média aritmética entre 0 e 1, que é um número racional; depois, obter a média aritmética entre 0 e a média obtida anteriormente; e assim sucessivamente.

d. Existem infinitos números reais, pois, por exemplo, existem infinitos números racionais.

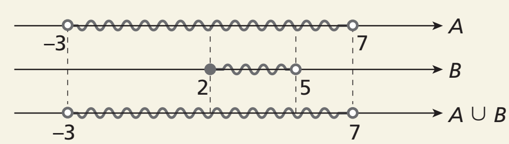
35.

a. $-13 \notin \mathbb{N}$	**d.** $\frac{6}{16} \in \mathbb{Q}$	**g.** $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$
b. $0 \notin \mathbb{Z}^*$	**e.** $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}^*$	**h.** $\mathbb{R}^* \not\subset \mathbb{R}_+$
c. $-2{,}25 \notin \mathbb{Q}_+$	**f.** $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{R}_-$	**i.** $\mathbb{Q}_+ \not\subset \mathbb{R}_-$

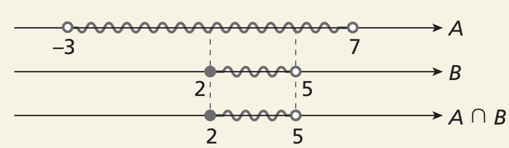
36. a. Verdadeira. Seja $x \in \mathbb{Q}$, então $x \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$; logo, $x \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q}$, isto é, $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \varnothing$.
b. Falsa, pois: $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$
c. Falsa, pois, por exemplo: $-1 \in \mathbb{Z}$ e $-1 \notin \mathbb{N}$
d. Falsa, pois: $0 \in \mathbb{N}$ e $0 \notin \mathbb{Z}^*$

37. a. $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ ou $]1, 5[$
b. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leqslant x < 7\}$ ou $[\sqrt{2}, 7[$
c. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ou $]-\infty, 0[$
d. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0{,}33...\}$ ou $[0{,}33...; +\infty[$

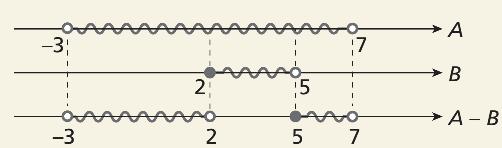
38. a.



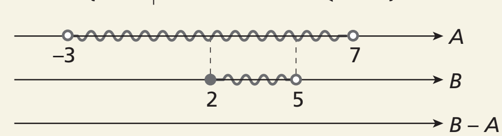
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 7\} = A$



$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 5\} = B$

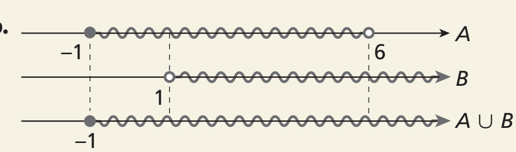


$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 5 \leqslant x < 7\}$

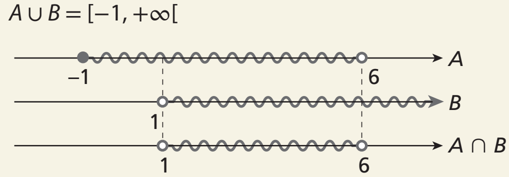


$B - A = \varnothing$

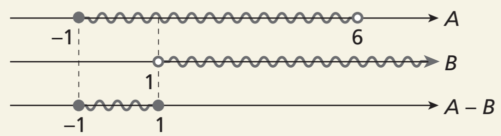
b.



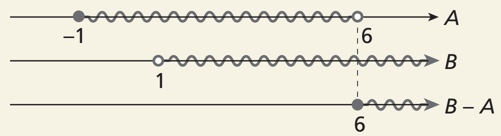
$A \cup B = [-1, +\infty[$



$A \cap B =]1, 6[$

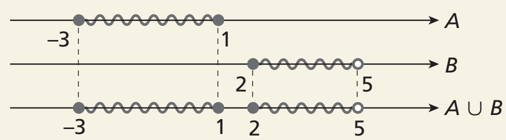


$A - B = [-1, 1]$

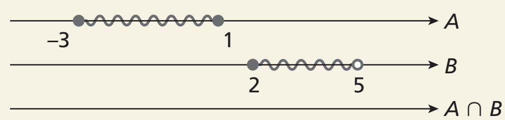


$B - A = [6, +\infty[$

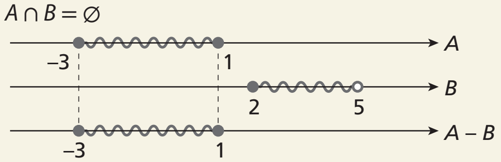
c.



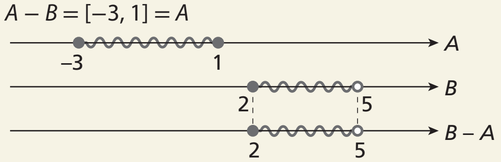
$A \cup B = [-3, 1] \cup [2, 5[$



$A \cap B = \varnothing$



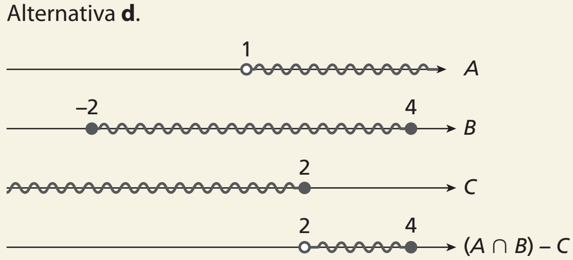
$A - B = [-3, 1] = A$



$B - A = [2, 5[= B$

39. Comprimento da circunferência: $C = 2\pi r$
Para $r = 0{,}5$, temos: $C = 2\pi(0{,}5) \simeq 3{,}14$
Área do círculo: $A = \pi r^2$
Para $r = 0{,}5$, temos: $A = \pi(0{,}5)^2 = 0{,}25\pi \simeq 0{,}79$
Alternativa **d**.

40.



Alternativa **c**.

Para finalizar o capítulo 2

Autoavaliação

Q1. A única situação que não é resolvida com conceitos referentes a conjuntos é a da alternativa **c**. Para resolvê-la, usamos conceitos de medidas (cálculo do perímetro de uma figura geométrica plana). O perímetro do quadrado descrito é 8 cm.
Alternativa **c**.

Q2. Para representar o conjunto dos números primos usando a notação de conjunto, fazemos:
$P = \{x \mid x$ é um número natural que tem exatamente dois divisores distintos$\}$
Alternativa **c**.

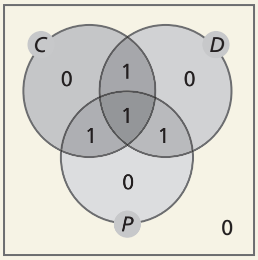
Q3. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\} = U$
Alternativa **d**.

Q4. $A - B = \{0, 2, 4, 6, ...\} = A$
Alternativa **b**.

Q5. $A \cap B = \varnothing$
Alternativa **a**.

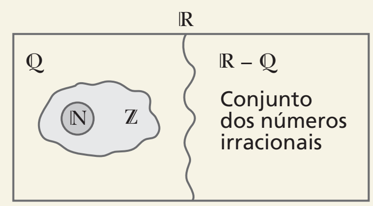
Q6. $A^C = \{1, 3, 5, 7, ...\} = B$
Alternativa **c**.

Q7. Podemos construir o seguinte diagrama:



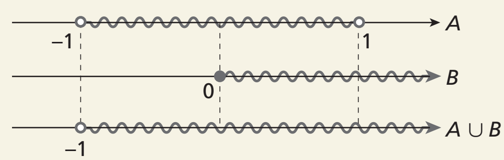
Portanto, há quatro membros na família.
Alternativa **a**.

Q8.

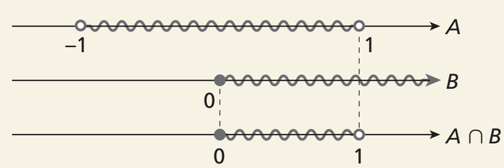


$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Alternativa **b**.

Q9.



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\} =]-1, +\infty[$



$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\} = [0, 1[$
Alternativa **b**.

Capítulo 3 Funções

Atividades propostas

1. a. Para consumo de até 10 m^3, o valor a pagar é o mesmo. Assim, $f(9) = f(7)$. Logo, quem consome 9 m^3 de água não paga mais do que quem consome 7 m^3.

b. $f(19) = 2 \cdot (15{,}10 + 2{,}35 \cdot 9) \Rightarrow f(19) = 72{,}50$
Portanto, o valor da conta para um consumo mensal de 19 m^3 é de R\$ 72,50.
$f(27) = 2 \cdot (15{,}10 + 2{,}35 \cdot 10 + 5{,}50 \cdot 7) \Rightarrow f(27) = 154{,}20$
Portanto, o valor da conta para um consumo mensal de 27 m^3 é de R\$ 154,20.

c. O valor a pagar inclui o consumo de água e as despesas referentes a esgoto. Dividindo por 2, encontra-se o valor do consumo de água: $748{,}80 : 2 = 374{,}40$

Por um consumo de água de 50 m^3, o valor a pagar referente à água seria de R$ 203,60, conforme mostrado a seguir.

Cálculo do valor a ser pago

Faixa de consumo (m^3)	Consumo total (m^3)	Valor total a pagar (R$)
Até 10	10	15,10
De 11 a 20	20	$15{,}10 + 2{,}35 \cdot 10 = 38{,}60$
De 21 a 50	50	$15{,}10 + 23{,}5 + 5{,}50 \cdot 30 = 203{,}60$

Percebe-se, assim, que o consumo da casa de Flávia foi acima de 50 m^3. Dessa maneira, o cálculo pode ser:

$203{,}60 + 6{,}1(x - 50) = 374{,}40 \Rightarrow 6{,}1x = 475{,}8 \Rightarrow x = 78$

Portanto, o consumo de água na casa de Flávia foi de 78 m^3.

2. O diagrama não representa uma função de A em B porque nem todo elemento de A tem um correspondente em B. Além disso, existe um elemento de A com mais de um correspondente em B.

3. a. É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.

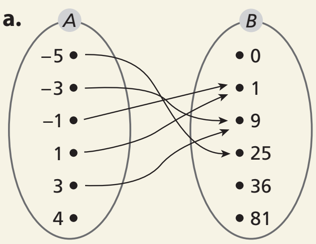
b. Não é função, pois existe um elemento de A (o elemento 3) que tem dois correspondentes em B (os elementos 2 e 3).

c. Não é função, pois existe um elemento de A (o elemento 5) que não tem correspondente em B.

d. É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.

---

4. a.



b. Não, pois existe um elemento de A (o elemento 4) que não tem correspondente em B.

5. $f(8{,}1) = 6 + 3{,}20 \cdot 8 = 31{,}60$

$f(8{,}9) = 6 + 3{,}20 \cdot 8 = 31{,}60$

Logo, as viagens têm tarifas iguais, pois $f(8{,}1) = f(8{,}9)$. Os estudantes podem observar que a função tem valores constantes no intervalo $[n, n + 1[$.

6. a. Variável independente: medida do diâmetro da base; variável dependente: preço de custo.

b. $p(3) = 0{,}01 \cdot 3 + 0{,}06 = 0{,}09$

Portanto, o preço de custo de um parafuso com base medindo 3 milímetros de diâmetro é R$ 0,09.

c. Devemos determinar x para $p(x) = 0{,}11$:

$0{,}11 = 0{,}01x + 0{,}06 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}01x = 0{,}05 \Rightarrow x = \dfrac{0{,}05}{0{,}01} = 5$

Logo, a medida do diâmetro da base de um parafuso cujo preço de custo é R$ 0,11 é 5 mm.

d. De acordo com o cálculo do **item b**, o preço de custo de 1 parafuso com base medindo 3 mm é R$ 0,09. Então, o preço para 500 desses parafusos é:

$p = 500 \cdot 0{,}09 = 45$

Logo, o preço é R$ 45,00.

e. $p(4) = 0{,}01 \cdot 4 + 0{,}06 \Rightarrow p(4) = 0{,}1$

Assim, o preço de custo de 100 parafusos é igual a:

$p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

Logo, o preço de custo é R$ 10,00.

Como o preço de venda foi R$ 20,00, houve um percentual de 100% de lucro nessa venda.

f. Não há dados suficientes para que seja dada uma resposta a este item.

7. Não, pois em uma função podem existir elementos de B sem correspondentes em A.

8. a. $D(f) = \{5, 6, 7, 8\} = A$

$CD(f) = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = B$

$Im(f) = \{6, 7, 8, 9\}$

b. Não existe x tal que $f(x) = 4$.

c. Para $x = 5$, temos $f(5) = 6$.

9. a. $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

b. $g(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2x}{3} = 0 \Rightarrow x = 0$

c. $h(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -4$

d. $j(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{7}{x} = 0$, não tem valor de zero, pois não existe valor de x que anule a função $j(x)$.

10. a. $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

b. $4^x - 2 = 0 \Rightarrow 4^x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{2x} = 2^1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

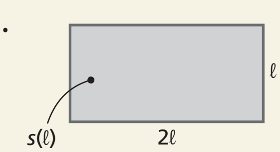
c. $f(x) = 0 \Rightarrow (2^x - 4) \cdot (4^x - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x - 4 = 0$ ou $4^x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

Os zeros da função f são 2 e $\dfrac{1}{2}$.

11.



$s(\ell) = 2\ell \cdot \ell \Rightarrow s(\ell) = 2\ell^2$

$D(s) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(s) = \mathbb{R}_+^*$

12. a. $f(4) = 4 \cdot 4 + 1 = 17 \Rightarrow f(4) = 17$

b. $f(-2) = 4 \cdot (-2) + 1 = -7 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(-2) = -7$

c. $f(-1) = 4 \cdot (-1) + 1 = -3$

$f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$

$f(11) = 4 \cdot 11 + 1 = 45$

Logo: $f(-1) + f(0) - f(11) =$

$= -3 + 1 - 45 = -47$

d. $f(3) = 4 \cdot 3 + 1 = 13$

$f(-3) = 4 \cdot (-3) + 1 = -11$

Logo: $2f(3) - f(-3) =$

$= 2 \cdot 13 - (-11) = 37$

13. a. $f(1) = 41$, $f(2) = 43$, $f(5) = 61$, $f(10) = 131$, $f(11) = 151$ e $f(41) = 41^2 = 1.681$.

b. Exemplo de resposta: porque, para $n = 41$, a função gera o quadrado de 41, que não é um número primo.

14. a. $D(f) = \mathbb{R}$

b. Condição de existência para $g(x)$:

$x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$.

c. Condição de existência para $i(x)$:

$x - 8 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 8$

Assim, $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 8\}$.

d. Condição de existência para $j(x)$:

$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Logo, $D(j) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1 \text{ e } x \neq 3\}$.

15. a. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

- $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$
- $f(4) = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$
- $f(9) = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$
- $f(16) = \dfrac{1}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{4}$
- $f(25) = \dfrac{1}{\sqrt{25}} = \dfrac{1}{5}$

Logo, $Im(f) = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}\right\}$.

b. $w(x) = \dfrac{1}{x-1}$

- $w(2) = \dfrac{1}{2-1} = 1$
- $w(3) = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$
- $w(4) = \dfrac{1}{4-1} = \dfrac{1}{3}$
- $w(5) = \dfrac{1}{5-1} = \dfrac{1}{4}$
- $w(6) = \dfrac{1}{6-1} = \dfrac{1}{5}$

Continuando o cálculo das imagens de w para sucessivos valores de seu domínio, pode-se concluir que:

$\text{Im}(w) = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, ...\right\}$

16. a. $h(x) = 0 \Rightarrow 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$

b. $s(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = 1$

c. $m(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ (Não há zero real.)

d. $p(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1} = 0$ (Não há zero real.)

17. Procura-se x tal que $f(x) = -6$.

$x^2 - 2x - 6 = -6 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

18. $f(3) = 11 \Rightarrow 11 = a \cdot 3 - 4 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$

Logo, f é dada por $f(x) = 5x - 4$.

Queremos determinar $f(-5)$:

$f(-5) = 5 \cdot (-5) - 4 \Rightarrow f(-5) = -29$

19. a. $g(2) = 8 \Rightarrow 8 = a \cdot 2 + b \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a + b = 8 \quad \text{(I)}$

$g(-2) = -4 \Rightarrow -4 = a \cdot (-2) + b \Rightarrow$

$\Rightarrow -2a + b = -4 \quad \text{(II)}$

Somando as equações (I) e (II), membro a membro, obtemos:

$2b = 4 \Rightarrow b = 2$

Substituindo b por 2 em (I), obtemos:

$2a + 2 = 8 \Rightarrow a = 3$

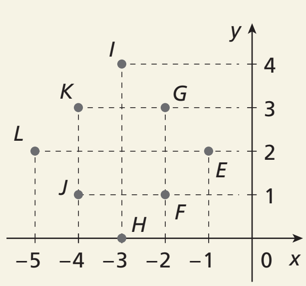
Assim, $a = 3$ e $b = 2$.

b. g é dada pela lei $g(x) = 3x + 2$.

$g(x) = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

20. $A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(-6, 0)$; $D(-1, -3)$; $E(2, -1)$; $F(-5, 3)$; $G(0, 2)$; $H(0, -2)$; $I(4, 0)$

21.



22. Sim, porque o ponto $R(1, -2)$ tem abscissa 1, ordenada -2 e está localizado no 4º quadrante; o ponto $S(-2, 1)$ tem abscissa -2, ordenada 1 e está localizado no 2º quadrante.

23. No eixo das abscissas, a ordenada é igual a zero, então:

$5y + 10 = 0 \Rightarrow y = -2$

24. No 2º quadrante, a ordenada do ponto é positiva e a abscissa é negativa.

$2x \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0$ e $y + 3 \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant -3$

Logo, $x \leqslant 0$ e $y \geqslant -3$.

25. a.
- $f(3) = 1$
- $f(-2) = -1$
- $f(4) = 3$
- $f(2) = 5$

b. Exemplos de respostas:
- $f(x) = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$
- $f(x) = 0 \Rightarrow x = -0{,}5$
- $f(x) = 3 \Rightarrow x = 0{,}9$, $x = 2{,}5$ ou $x = 4$
- $f(x) = 4 \Rightarrow x = 1{,}3$ ou $x = 2{,}4$

c. $\text{Im}(f) = [-1, 5]$

d.
- (0, 6): nenhum, pois 6 não pertence à imagem de f.
- (0, 2): três pontos
- (0, 4): dois pontos
- (0, 0): um ponto

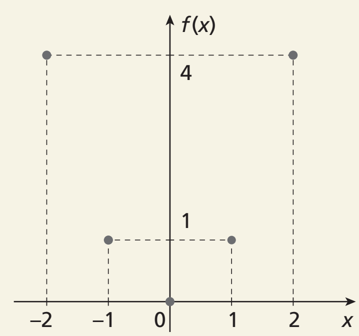
e. Não, todas as retas perpendiculares ao eixo x passando por abscissas no domínio de f interceptam o gráfico em exatamente um ponto.

26. a. Para obter as coordenadas dos pontos do gráfico a ser construído, vamos primeiro construir um quadro.

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $f(x) = x^2$

x	$f(x) = x^2$	$(x, f(x))$
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	$(-1, 1)$
0	$f(0) = 0^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = 1^2 = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$

A representação gráfica de f é:

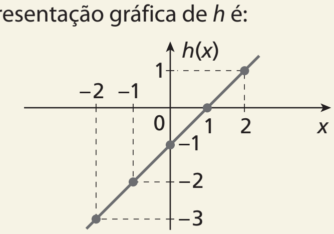


b. Podemos construir um quadro tomando alguns valores pertencentes ao domínio da função h.

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $h(x) = x - 1$

x	$h(x) = x - 1$	$(x, h(x))$
-2	$h(-2) = -2 - 1 = -3$	$(-2, -3)$
-1	$h(-1) = -1 - 1 = -2$	$(-1, -2)$
0	$h(0) = 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$h(1) = 1 - 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$h(2) = 2 - 1 = 1$	$(2, 1)$

A representação gráfica de h é:

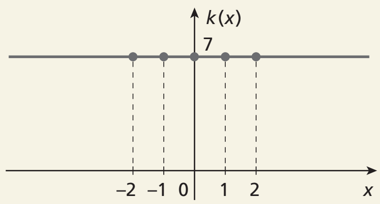


c. Primeiro construímos um quadro.

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $k(x) = 7$

x	$k(x) = 7$	$(x, h(x))$
-2	$k(-2) = 7$	$(-2, 7)$
-1	$k(-1) = 7$	$(-1, 7)$
0	$k(0) = 7$	$(0, 7)$
1	$k(1) = 7$	$(1, 7)$
2	$k(2) = 7$	$(2, 7)$

A representação gráfica de k é:



27. a. Para $x = 8$, temos: $f(8) = 5 \cdot 8 - 9 = 31$.
Portanto, o par ordenado $(8, -1)$ não pertence ao gráfico de f, já que $f(8) = 31 \neq -1$.

b. Para $x = -2$, temos: $f(-2) = 1$
Logo: $1 = a \cdot (-2) + 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$

c. Não, pois $3 \notin D(f)$.

28. a. Variável independente: tempo.
Variável dependente: número de litros.

b. Para cada ponto pertencente ao gráfico, observamos que o número de litros é sempre igual a 8 vezes o correspondente tempo. Logo, a lei que relaciona as duas variáveis é $y = 8x$, em que y é o número de litros e x é o tempo em hora.

c. O par ordenado (1,5; 12) indica que, em 1 hora e meia, a máquina produz 12 litros.

d. Para $x = 6$, temos: $y = 8 \cdot 6 \Rightarrow y = 48$
Para $x = 10$, temos: $y = 8 \cdot 10 \Rightarrow y = 80$
Logo, em 6 horas a máquina produziria 48 litros da substância e, em 10 horas, 80 litros, em regime ininterrupto.

e. Para $y = 4$, temos: $4 = 8x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
Logo, é necessária meia hora para a máquina produzir 4 litros da substância.

29. a. A lei que relaciona o preço (y) com o número de litros (x) é dada por: $y = 5{,}82x$

b. Para $x = 1{,}5$, temos: $y = 5{,}82 \cdot 1{,}5 \Rightarrow y = 8{,}73$
Portanto, 1,5 litro de gasolina custa, nesse posto, R$ 8,73.

c. Para $y = 17{,}46$, temos:
$$17{,}46 = 5{,}82x \Rightarrow x = \frac{17{,}46}{5{,}82} \Rightarrow x = 3$$
Portanto, se pagar R$ 17,46, o consumidor comprará 3 litros de gasolina.
Para $y = 58{,}20$, temos:
$$58{,}20 = 5{,}82x \Rightarrow x = \frac{58{,}20}{5{,}82} \Rightarrow x = 10$$
Portanto, se pagar R$ 58,20, o consumidor comprará 10 litros de gasolina.

d. Para $y = 291{,}00$, temos:
$$291{,}00 = 5{,}82x \Rightarrow x = \frac{291{,}00}{5{,}82} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 50$$
Portanto, com R$ 291,00 poderão ser comprados, nesse posto, 50 litros de gasolina, no máximo.

30. Vamos determinar os zeros das funções f e g:
$f(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
$g(x) = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
Observe que essas funções têm o mesmo zero.
Podemos construir dois quadros, um para cada função, com alguns valores pertencentes ao domínio, incluindo o zero das funções ($x = 2$).

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $f(x) = x - 2$

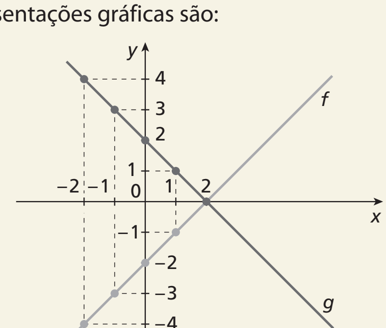
x	$f(x) = x - 2$	(x, y)
-2	$f(-2) = -2 - 2 = -4$	$(-2, -4)$
-1	$f(-1) = -1 - 2 = -3$	$(-1, -3)$
0	$f(0) = 0 - 2 = -2$	$(0, -2)$
1	$f(1) = 1 - 2 = -1$	$(1, -1)$
2	$f(2) = 2 - 2 = 0$	$(2, 0)$

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $g(x) = -x + 2$

x	$g(x) = -x + 2$	(x, y)
-2	$g(-2) = -(-2) + 2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$g(-1) = -(-1) + 2 = 3$	$(-1, 3)$
0	$g(0) = 0 + 2 = 2$	$(0, 2)$
1	$g(1) = -1 + 2 = 1$	$(1, 1)$
2	$g(2) = -2 + 2 = 0$	$(2, 0)$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

As representações gráficas são:



Analisando os gráficos, observamos que:

- $y = f(x)$ é positivo para $x \geqslant 2$;
- $y = g(x)$ é positivo para $x \leqslant 2$.

31. a. $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}$
zero da função: 2

b. $D(h) = [-2, 2]$
$Im(h) = [-3, 3]$
zeros da função: -2, 0 e 2

32. a. Sim, pois todos os elementos do conjunto A tem uma imagem no conjunto B.

b. Não, pois o 0, elemento do conjunto A, não está representado no gráfico.

33. a. A função f é crescente para $x \in \mathbb{R}$; a função g é crescente para $x \in [0, +\infty[$ e decrescente para $x \in]-\infty, 0]$; a função h é crescente para $x \in]-\infty, -1]$ e para $x \in [1, +\infty[$ e decrescente para $x \in [-1, 1]$.

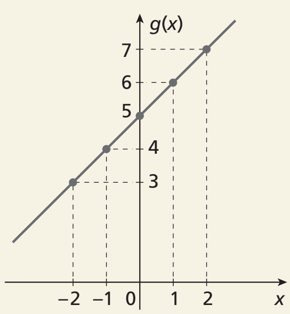
b. A função f não possui valor máximo ou valor mínimo.
A função g apresenta um valor mínimo igual a 1.
A função h não possui valor máximo ou valor mínimo.

34. a. Podemos construir um quadro para alguns valores pertencentes ao domínio de g. Veja:

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $g(x) = x + 5$

x	$g(x) = x + 5$	$(x, g(x))$
-2	$g(-2) = -2 + 5 = 3$	$(-2, 3)$
-1	$g(-1) = -1 + 5 = 4$	$(-1, 4)$
0	$g(0) = 0 + 5 = 5$	$(0, 5)$
1	$g(1) = 1 + 5 = 6$	$(1, 6)$
2	$g(2) = 2 + 5 = 7$	$(2, 7)$

Obtemos, então, a representação gráfica de g.
Observe que a função g, tal que $g(x) = x + 5$, é crescente para $x \in \mathbb{R}$.

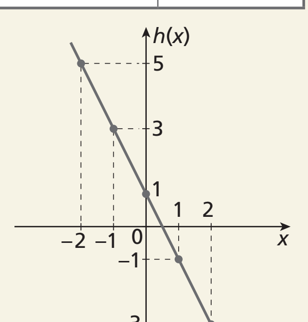


b. Podemos construir uma tabela para alguns valores pertencentes ao domínio de h. Veja:

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $h(x) = -2x + 1$

x	$h(x) = -2x + 1$	$(x, h(x))$
-2	$h(-2) = -2 \cdot (-2) + 1 = 5$	$(-2, 5)$
-1	$h(-1) = -2 \cdot (-1) + 1 = 3$	$(-1, 3)$
0	$h(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$h(1) = -2 \cdot 1 + 1 = -1$	$(1, -1)$
2	$h(2) = -2 \cdot 2 + 1 = -3$	$(2, -3)$

Obtemos, então, a representação gráfica de h.
Observe que a função h, dada por $h(x) = -2x + 1$, é decrescente para $x \in \mathbb{R}$.



35. a. De acordo com o gráfico, temos que a imagem de 2 pela função f é $y = 2$.

b. A imagem é -2 para $x = 4$.

c. No intervalo $[-1, 2]$, a função é positiva, pois encontra-se acima do eixo x.

d. Não, ela é constante igual a 2.

e. $D(f) = [-3, 4]$

f. $Im(f) = [-2, 4]$

g. O valor máximo da função é 4.

h. O valor mínimo da função é -2.

36. a. $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$
O valor máximo é 4.

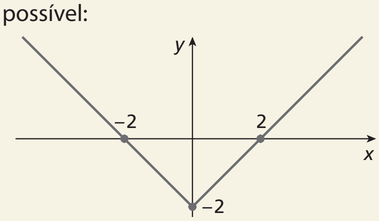
b. $Im(g) = \mathbb{R}$
Não possui valor máximo nem valor mínimo.

c. $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$
Não possui valor máximo nem valor mínimo.

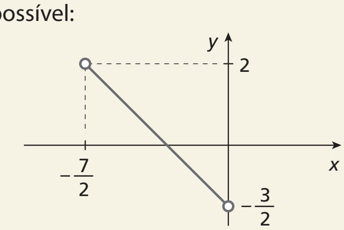
d. $Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$
O valor mínimo é zero.

e. $Im(j) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$
O valor mínimo é -3 e o valor máximo é 3.

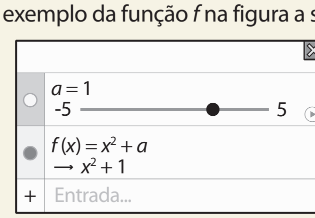
37. Resposta possível:



38. Resposta possível:



39. Espera-se que o estudante perceba que a variação do parâmetro a em $x^2 + a$ vai transladar a curva na direção vertical e, na expressão $(x + a)^2$, vai transladar o gráfico na direção horizontal. Em alguns *softwares* de Geometria dinâmica, basta inserir a expressão algébrica com o parâmetro para que o *software* disponibilize um controle deslizante do parâmetro e, ao deslizar o controle, o gráfico é automaticamente transladado no plano. Observe o exemplo da função f na figura a seguir.



40. a. Verdadeira.

b. Falsa, pois no intervalo $[0, 1]$ a função é decrescente.

c. Falsa, pois no intervalo $[0, 2]$ a função é negativa ou nula.

d. Verdadeira.

e. Verdadeira.

41. a. Os zeros da função são -2 e 2, pois são os valores nos quais a função intercepta o eixo x.

b. A função é crescente no intervalo $[0, +\infty[$ e decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$.

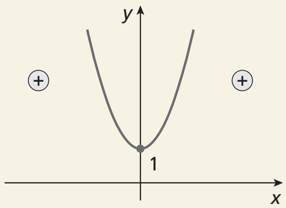
c. A função é positiva para $x < -2$ ou $x > 2$ e negativa para $-2 < x < 2$.

d. $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-4, +\infty[$

e. O valor mínimo que essa função pode assumir é -4, que é a imagem de zero.

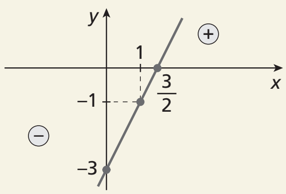
42. Fazendo um esboço dos gráficos das funções, temos:

a.



Para todo x, temos: $y > 0$

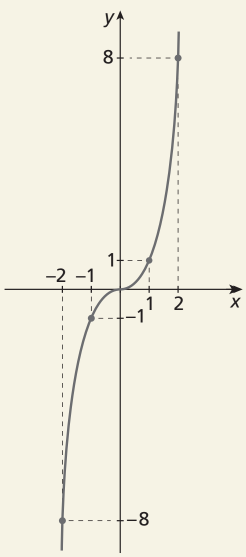
b.



Para $x < \frac{3}{2}$, temos: $y < 0$

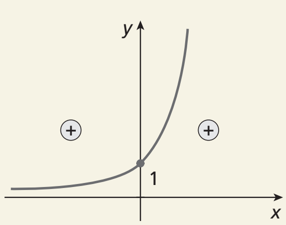
Para $x > \frac{3}{2}$, temos: $y > 0$

c.



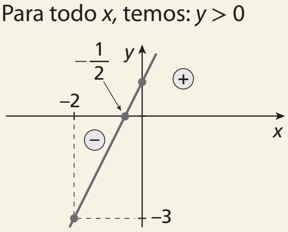
Para todo $x < 0$, temos: $y < 0$
Para todo $x > 0$, temos: $y > 0$

d.



Para todo x, temos: $y > 0$

e.



Para $x < -\frac{1}{2}$, temos: $y < 0$

Para $x > -\frac{1}{2}$, temos: $y > 0$

Assim, pelos gráficos e pelas análises feitas a partir deles, as funções dos **itens a** e **d** são positivas em todo o seu domínio: $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$

43. Se o gráfico da função é uma reta paralela ao eixo x, todos os valores do domínio da função têm a mesma imagem. Como o par ordenado $(0, -5)$ pertence ao gráfico da função, a lei que a define é dada por: $f(x) = -5$ ou $y = -5$

44. **a.** $D(m) = \mathbb{R}$ e $Im(m) =]-\infty, 3]$

b. A função é constante para $x > 2$; nesse caso, a função é dada por $m(x) = 3$.

c. Como o gráfico intercepta o eixo x uma só vez, essa função tem apenas um zero.

d. Para definir o intervalo em que a função é positiva ou negativa, devemos inicialmente encontrar o zero dessa função, que está localizado no intervalo $]-\infty, -2]$. Assim, temos:

$-\frac{x^2}{2} + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\sqrt{6}$ ou $x = \sqrt{6}$ (não serve)

Logo, a função é positiva no intervalo $\left]-\sqrt{6}, +\infty\right[$ e é negativa no intervalo $\left]-\infty, -\sqrt{6}\right[$.

45. **a.** Se $0 \leqslant x < 30$, então: $y = 3\% \cdot 350x = 10{,}5x$
Se $30 \leqslant x \leqslant 100$, então: $y = 5\% \cdot 350x = 17{,}5x$
Se $x > 100$, então: $y = 8\% \cdot 350x = 28x$
Logo, temos a seguinte função:

$$y = f(x) = \begin{cases} 10{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leqslant x < 30 \\ 17{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leqslant x \leqslant 100 \\ 28x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100 \end{cases}$$

b. Se vender 80 bicicletas:
$x = 80 \Rightarrow f(80) = 17{,}5 \cdot 80 = 1.400$
Portanto, a comissão será de R$ 1.400,00.
Se vender 101 unidades:
$x = 101 \Rightarrow f(101) = 28 \cdot 101 = 2.828$
Então, a comissão será de R$ 2.828,00.

46. **a.** $p(-6) = \frac{(-6)^2}{4} = \frac{36}{4} \Rightarrow p(-6) = 9$

b. $p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{20}{7} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{7}$

c. Não é possível calcular o valor de $p(x)$ para esse item porque a função não está definida para valores maiores que 3.

d. $p(-4) = \frac{(-4)^2}{4} = \frac{16}{4} \Rightarrow p(-4) = 4$

e. $p(3) = -\frac{2}{7} \cdot (3) + \frac{20}{7} \Rightarrow p(3) = 2$

f. $p(0) = -\frac{2}{7} \cdot 0 + \frac{20}{7} \Rightarrow p(0) = \frac{20}{7}$

47. Não é sobrejetora porque $CD(g) \neq Im(g)$. Não é injetora porque dois elementos de A têm a mesma imagem: $g(-1) = g(1) = 1$

48. Sim, pois uma função bijetora é sobrejetora e injetora.

49. **a.** Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{2x + 1}{x + 9}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{2y + 1}{y + 9}$

Expressando y em função de x, temos:

$\frac{2y + 1}{y + 9} = x \Rightarrow 2y + 1 = x(y + 9) \Rightarrow 2y + 1 = xy + 9x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2y - xy = 9x - 1 \Rightarrow y(2 - x) = 9x - 1 \Rightarrow y = \frac{9x - 1}{2 - x}$

Portanto: $f^{-1}(x) = \frac{9x - 1}{2 - x}$

b. Para que $f(x)$ exista:
$x + 9 \neq 0 \Rightarrow x \neq -9$
Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$.

c. Condição de existência de $f^{-1}(x)$:
$2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$
Assim, $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$.

d. A imagem da função f será igual ao domínio de sua inversa; logo, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$.

e. A imagem de f^{-1} será igual ao domínio de f; logo, $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$.

50. a. Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = 4x + 9$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = 4y + 9$
Expressando y em função de x, temos:
$4y + 9 = x \Rightarrow 4y = x - 9 \Rightarrow y = \dfrac{x-9}{4}$
Portanto: $f^{-1}(x) = \dfrac{x-9}{4}$

b. Substituindo $g(x)$ por y, obtemos: $y = -2x + 3$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = -2y + 3$
Expressando y em função de x, temos:
$-2y + 3 = x \Rightarrow -2y = x - 3 \Rightarrow y = \dfrac{3-x}{2}$
Portanto: $g^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{2}$

c. Substituindo $h(x)$ por y, obtemos: $y = -7x - \dfrac{1}{2}$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = -7y - \dfrac{1}{2}$
Expressando y em função de x, temos:
$-7y - \dfrac{1}{2} = x \Rightarrow -7y = x + \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{-2x-1}{14}$
Portanto: $h^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{14}$

d. Substituindo $m(x)$ por y, obtemos: $y = \dfrac{x+5}{3}$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \dfrac{y+5}{3}$
Expressando y em função de x, temos:
$\dfrac{y+5}{3} = x \Rightarrow y + 5 = 3x \Rightarrow y = 3x - 5$
Portanto: $m^{-1}(x) = 3x - 5$

e. Substituindo $n(x)$ por y, obtemos: $y = x^3 + 1$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = y^3 + 1$
Expressando y em função de x, temos:
$y^3 + 1 = x \Rightarrow y^3 = x - 1 \Rightarrow \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-1}$
Portanto: $n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

f. A função p não é bijetora. Assim, não tem inversa.

51. a. O **item f** não admite função inversa, pois a função p não é bijetora.

b.
- $f(x) = 4x + 9 \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-9}{4}$ ou $y = \dfrac{x-9}{4}$
Substituindo y por x e x por y, obtemos:
$x = \dfrac{y-9}{4} \Rightarrow 4x = y - 9 \Rightarrow y = 4x + 9$
Portanto:
$[f^{-1}]^{-1}(x) = 4x + 9 = f(x)$

- $g(x) = -2x + 3 \Rightarrow g^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{2}$ ou $y = \dfrac{3-x}{2}$
Substituindo y por x e x por y, obtemos:
$x = \dfrac{3-y}{2} \Rightarrow 2x = 3 - y \Rightarrow y = -2x + 3$
Portanto:
$[g^{-1}]^{-1}(x) = -2x + 3 = g(x)$

- $h(x) = -7x - \dfrac{1}{2} \Rightarrow h^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{14}$ ou $y = \dfrac{-2x-1}{14}$
Substituindo y por x e x por y, obtemos:
$x = \dfrac{-2y-1}{14} \Rightarrow 14x = -2y - 1 \Rightarrow y = -7x - \dfrac{1}{2}$
Portanto:
$[h^{-1}]^{-1}(x) = -7x - \dfrac{1}{2} = h(x)$

- $m(x) = \dfrac{x+5}{3} \Rightarrow m^{-1}(x) = 3x - 5$ ou $y = 3x - 5$
Substituindo y por x e x por y, obtemos:
$x = 3y - 5 \Rightarrow y = \dfrac{x+5}{3}$
Portanto:
$[m^{-1}]^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{3} = m(x)$

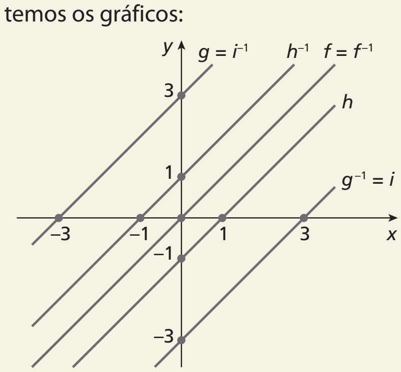
- $n(x) = x^3 + 1 \Rightarrow n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ou $y = \sqrt[3]{x-1}$
Substituindo y por x e x por y, obtemos:
$x = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x^3 = y - 1 \Rightarrow y = x^3 + 1$
Portanto: $[n^{-1}]^{-1}(x) = x^3 + 1 = n(x)$

- A função p não é bijetora. Assim, não tem inversa.

Logo, com exceção do **item f**, que não tem inversa, as leis obtidas devem ser iguais às dadas.

c. Os estudantes devem perceber que a função inversa de sua inversa coincide com a própria função.

52. a. Obtendo as leis das funções inversas, temos:
$f^{-1}(x) = x$, $g^{-1}(x) = x - 3$, $h^{-1}(x) = x + 1$ e $i^{-1}(x) = x + 3$
Assim, temos os gráficos:

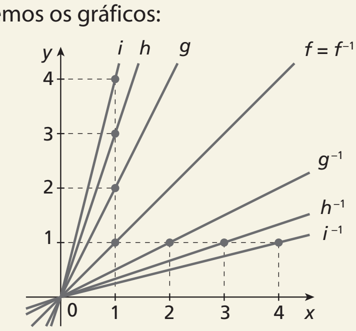


b. Exemplo de resposta:
Os gráficos de cada uma dessas funções e de suas respectivas inversas são retas paralelas e simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

53. Sim, pois, com as restrições de domínio e contradomínio colocadas, a função é injetora e sobrejetora, ou seja, bijetora.

54. Resposta possível:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, pois f não é bijetora.

55. a. Obtendo as leis das funções inversas, temos:
$f^{-1}(x) = x$, $g^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$, $h^{-1}(x) = \dfrac{x}{3}$ e $i^{-1}(x) = \dfrac{x}{4}$
Assim, temos os gráficos:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

b. Respostas possíveis:
- Os gráficos de cada uma dessas funções e de suas respectivas inversas são retas que concorrem com a bissetriz dos quadrantes ímpares na origem do plano cartesiano.
- Os gráficos são retas simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

56. Desde que exista f^{-1}, pela própria definição de função inversa.

57. a. Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = -x + 3$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = -y + 3$
Expressando y em função de x, temos:
$-y + 3 = x \Rightarrow -y = x - 3 \Rightarrow y = 3 - x$
Portanto, f^{-1} é dada por: $f^{-1}(x) = 3 - x$

b. Substituindo $g(x)$ por y, obtemos: $y = 2x$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = 2y$
Expressando y em função de x, temos: $2y = x \Rightarrow y = \frac{x}{2}$
Portanto, g^{-1} é dada por: $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

c. Substituindo $h(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{x}{3} - 2$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{y}{3} - 2$
Expressando y em função de x, temos: $\frac{y}{3} - 2 = x \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{y}{3} = x + 2 \Rightarrow y = 3(x + 2) \Rightarrow y = 3x + 6$

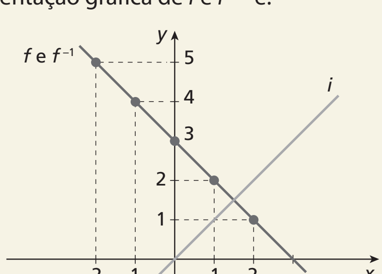
d. Substituindo $k(x)$ por y, obtemos: $y = 2x + 1$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = 2y + 1$
Expressando y em função de x, temos:
$2y + 1 = x \Rightarrow 2y = x - 1 \Rightarrow y = \frac{x - 1}{2}$
Portanto, k^{-1} é dada por: $k^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

58. a. Vamos construir um quadro que contenha alguns valores dos domínios de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$. Veja:

Valores numéricos das funções f e f^{-1} para alguns valores de x

x	$f(x) = -x + 3$	$f^{-1}(x) = 3 - x$
-2	$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$	$f^{-1}(-2) = 3 - (-2) = 5$
-1	$f(-1) = -(-1) + 3 = 4$	$f^{-1}(-1) = 3 - (-1) = 4$
0	$f(0) = -(0) + 3 = 3$	$f^{-1}(0) = 3 - 0 = 3$
1	$f(1) = -(1) + 3 = 2$	$f^{-1}(1) = 3 - 1 = 2$
2	$f(2) = -(2) + 3 = 1$	$f^{-1}(2) = 3 - 2 = 1$

A representação gráfica de f e f^{-1} é:



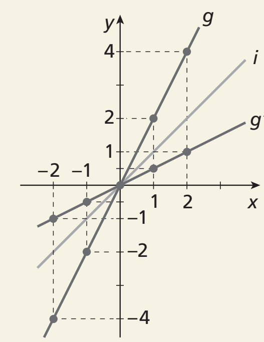
Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação ao gráfico da função identidade $i(x) = x$.

b. Vamos construir um quadro que contenha alguns valores dos domínios de g e g^{-1}. Veja:

Valores numéricos das funções g e g^{-1} para alguns valores de x

x	$g(x) = 2x$	$g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$
-2	$g(-2) = 2(-2) = -4$	$g^{-1}(-2) = \frac{-2}{2} = -1$
-1	$g(-1) = 2(-1) = -2$	$g^{-1}(-1) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$
0	$g(0) = 2(0) = 0$	$g^{-1}(0) = 0$
1	$g(1) = 2(1) = 2$	$g^{-1}(1) = \frac{1}{2}$
2	$g(2) = 2(2) = 4$	$g^{-1}(2) = \frac{2}{2} = 1$

A representação gráfica de g e g^{-1} é:



Os gráficos de g e g^{-1} são simétricos em relação ao gráfico da função identidade $i(x) = x$.

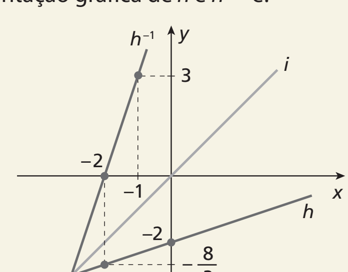
c. Portanto, h^{-1} é dada por: $h^{-1}(x) = 3x + 6$
Vamos construir um quadro que contenha alguns valores dos domínios de h e h^{-1}. Veja:

Valores numéricos das funções h e h^{-1} para alguns valores de x

x	$h(x) = \frac{x}{3} - 2$	$h^{-1}(x) = 3x + 6$
-2	$h(-2) = \frac{-2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$	$h^{-1}(-2) = 3(-2) + 6 = 0$
-1	$h(-1) = \frac{-1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}$	$h^{-1}(-1) = 3(-1) + 6 = 3$
0	$h(0) = 0 - 2 = -2$	$h^{-1}(0) = 3(0) + 6 = 6$
1	$h(1) = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$	$h^{-1}(1) = 3(1) + 6 = 9$
2	$h(2) = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$	$h^{-1}(2) = 3(2) + 6 = 12$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A representação gráfica de h e h^{-1} é:



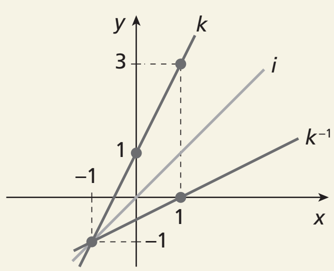
Os gráficos de h e h^{-1} são simétricos em relação ao gráfico de $i(x) = x$.

d. Vamos construir um quadro que contenha alguns valores dos domínios de k e k^{-1}. Veja:

Valores numéricos das funções k e k^{-1} para alguns valores de x

x	$k(x) = 2x + 1$	$k^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$
-2	$k(-2) = 2(-2) + 1 = -3$	$k^{-1}(-2) = \frac{-2-1}{2} = -\frac{3}{2}$
-1	$k(-1) = 2(-1) + 1 = -1$	$k^{-1}(-1) = \frac{-1-1}{2} = -1$
0	$k(0) = 2(0) + 1 = 1$	$k^{-1}(0) = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$
1	$k(1) = 2(1) + 1 = 3$	$k^{-1}(1) = \frac{1-1}{2} = 0$
2	$k(2) = 2(2) + 1 = 5$	$k^{-1}(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

A representação gráfica de k e k^{-1} é:



Os gráficos de k e k^{-1} são simétricos em relação ao gráfico de $i(x) = x$.

59. A função f é inversa da função g nos **itens a**, **c** e **d**, pois, em cada um desses casos, os gráficos de f e de g são simétricos em relação ao gráfico da função identidade.

As resoluções/comentários da seção *Trabalho e juventudes – Como calcular a contribuição previdenciária?* estão nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

Para finalizar o capítulo 3

Autoavaliação

Q1. De acordo com o consumo:

- $9\ m^2 \rightarrow V = 10$
  valor da conta: R$ 20,00
- $18\ m^2 \rightarrow V = 10 + (18 - 10) \cdot 1{,}20 = 19{,}60$
  valor da conta: R$ 39,20
- $36\ m^2 \rightarrow V_1 = 10 + (20 - 10) \cdot 1{,}20 = 22{,}00$
  $V_2 = V_1 + (30 - 20) \cdot 1{,}50 = 22 + 15 = 37{,}00$
  $V = 37 + (36 - 30) \cdot 2 = 37 + 12 = 49{,}00$
  valor da conta: R$ 98,00

Alternativa **a**.

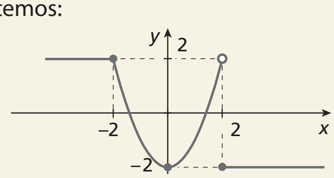
Q2. $D(f)$ é o domínio da função f, que é A.
$CD(f)$ é o contradomínio da função f, que é B.
O conjunto imagem de f é formado pelas ordenadas dos pontos determinados pelos pares ordenados (x, y) que obedecem à lei $y = f(x)$.
Alternativa **b**.

Q3. Os zeros de uma função são as abscissas dos pontos em que essa função intercepta o eixo x.
Alternativa **c**.

Q4. Na construção de um gráfico, x é a referência horizontal e y é a referência vertical.
Alternativa **b**.

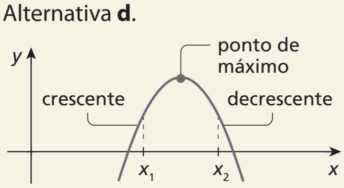
Q5. $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x < -2 \\ x^2 - 2, \text{ se } -2 \leqslant x < 2 \\ -2, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$

Construindo o gráfico da função f, temos:



Alternativa **d**.

Q6.



Se, em um intervalo $I = [x_1, x_2]$, a função passa de crescente para decrescente, ela apresenta um ponto de máximo em x_0 e tem y_0 como o valor máximo.
Alternativa **c**.

Q7. Para admitir inversa, uma função deve ser injetora e sobrejetora, ou seja, deve ser bijetora.
Alternativa **c**.

Capítulo 4 Função afim

Atividades propostas

1. a. g é função afim, em que $a = 2$ e $b = 4$.
b. i não é função afim, pois não é da forma $f(x) = ax + b$.
c. f é função afim, em que $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$.
d. k é função afim, em que $a = -13$ e $b = 0$.

2. a. $f(-2) = -3 \cdot (-2) + 1 = 6 + 1 = 7$
b. $f(x) = 0 \Rightarrow -3x + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
c. $f\left(\sqrt{2}\right) = -3 \cdot \sqrt{2} + 1 = -3\sqrt{2} + 1$
d. $f(x) = 19 \Rightarrow -3x + 1 = 19 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x = 18 \Rightarrow x = -6$

3. a. $f(x) > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$; $f(x) < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$
b. Espera-se que os estudantes respondam que sim, por meio de um gráfico.

4. $f(x) = ax + \frac{1}{2}$
$f(3) = 8$
$a \cdot 3 + \frac{1}{2} = 8 \Rightarrow 3a = 8 - \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3a = \frac{15}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

5. A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ é chamada de função identidade, com $a = 1$ e $b = 0$.
Então, para que $j(x) =$
$= (p^2 - 1)x + (2q - 6)$
seja uma função identidade, devemos ter:

- $p^2 - 1 = 1 \Rightarrow p^2 = 2 \Rightarrow p = \sqrt{2}$ ou $p = -\sqrt{2}$
- $2q - 6 = 0 \Rightarrow 2q = 6 \Rightarrow q = 3$

6. a. Se o consumidor utilizasse 82 minutos em um mês, pagaria R$ 34,50, pois não teria excedido os 100 minutos a que tinha direito.
Se o consumidor utilizasse 300 minutos no mês, pagaria R$ 34,50 pelos primeiros 100 minutos mais R$ 0,08 para cada um dos 200 outros minutos; então: $34{,}50 + 200 \cdot 0{,}08 = 50{,}50$
Logo, ele pagaria R$ 50,50.
b. Dos R$ 52,90, foram pagos R$ 34,50 pelos primeiros 100 minutos, e os R$ 18,40 restantes, por 230 minutos $\left(\frac{18{,}40}{0{,}08}\right)$. Como $100 + 230 = 330$, esse consumidor usou 330 minutos.

c. Chamando de x o número de minutos utilizados pelo consumidor, a função f representará o valor que esse consumidor pagaria (em real).

Para $0 < x \leqslant 100$ minutos, temos:
$f(x) = 34{,}50$

Para $x > 100$ minutos, temos:
$f(x) = 34{,}50 + 0{,}08(x - 100)$

Logo, a lei de formação dessa função é:

$$f(x) = \begin{cases} 34{,}50, \text{ se } 0 < x \leqslant 100 \\ 34{,}50 + 0{,}08(x - 100), \text{ se } x > 100 \end{cases}$$

d. O gasto mínimo com telefone, em um mês, era:
$3 \cdot 34{,}50 = 103{,}50$, ou seja, R$ 103,50.

7. a. $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$
$f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1$
$f(1) - f(0) = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

b. $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$
$f(2) - f(1) = 5 - 2 = 3$

c. $f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8$
$f(3) - f(2) = 8 - 5 = 3$

d. $f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$
$f(4) - f(3) = 11 - 8 = 3$

8. a. $f(1) - f(0) = f(2) - f(1) = f(3) - f(2) =$
$= f(4) - f(3) = 3$

Em relação à função f, observa-se que o acréscimo de uma unidade nos valores de x corresponde a acréscimos de três unidades nos valores de $f(x)$.

b. Pelo item anterior, sabe-se que o acréscimo de uma unidade nos valores de x acarreta o acréscimo de três unidades nos valores de $f(x)$.
Logo: $f(28) - f(27) = 3$

c. $g(x) = -3x - 1$

a. $g(1) = -3 \cdot 1 - 1 = -4$
$g(0) = -3 \cdot 0 - 1 = -1$
$g(1) - g(0) = -4 - (-1) = -3$

b. $g(2) = -3 \cdot 2 - 1 = -7$
$g(2) - g(1) = -7 - (-4) = -3$

c. $g(3) = -3 \cdot 3 - 1 = -10$
$g(3) - g(2) = -10 - (-7) = -3$

d. $g(4) = -3 \cdot 4 - 1 = -13$
$g(4) - g(3) = -13 - (-10) = -3$

d. Sim. Os valores encontrados são iguais ao coeficiente a das respectivas funções.

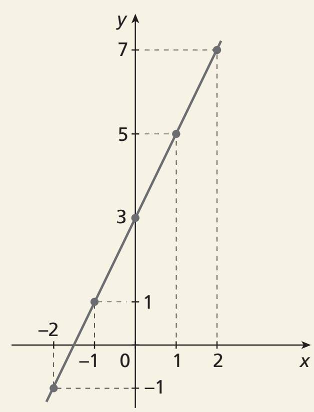
e. Espera-se que os estudantes percebam que o coeficiente a, também conhecido como taxa de variação da função, é o valor acrescido à ordenada da função quando é acrescentado 1 ao valor da abcissa.

9. a. Vamos considerar as funções f e g dadas por:
$f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$

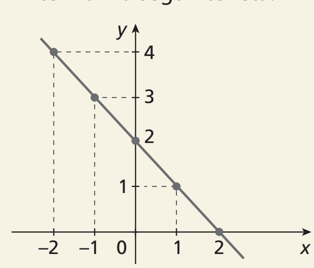
Com base no quadro, é possível fazer a seguinte leitura:

- função f: $f(-2) = -1$; $f(-1) = 1$; $f(0) = 3$; $f(1) = 5$; $f(2) = 7$
  Basta aplicar à lei de f duas dessas igualdades, por exemplo:
  $f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 3$ (I)
  $f(1) = 5 \Rightarrow a \cdot 1 + b = 5$ (II)
  Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), obtemos:
  $a = 2$ e $b = 3$
  Logo: $f(x) = 2x + 3$
- função g: $g(-2) = 4$; $g(-1) = 3$; $g(0) = 2$; $g(1) = 1$; $g(2) = 0$
  Basta aplicar à lei de g duas dessas igualdades, por exemplo:
  $g(0) = 2 \Rightarrow c \cdot 0 + d = 2$ (III)
  $g(1) = 1 \Rightarrow c \cdot 1 + d = 1$ (IV)
  Resolvendo o sistema formado por (III) e (IV), obtemos:
  $c = -1$ e $d = 2$
  Logo: $g(x) = -x + 2$

b. Espera-se que os estudantes obtenham a seguinte reta:



c. Espera-se que os estudantes obtenham a seguinte reta:



d. Espera-se que os estudantes percebam que uma função afim é representada graficamente por uma reta.

10. Passo 1. Seja T_K uma medida de temperatura qualquer, em Kelvin.
Passo 2. Seja T_C a medida de temperatura em grau Celsius. Faça $T_C = T_K - 273$.
Passo 3. T_C é a medida de temperatura convertida, em grau Celsius. Encerra-se o algoritmo.

11. a. Como $f(x) = 3x - 2$, então para $3x - 2 = 0$, temos $x = \frac{2}{3}$.

E como $g(x) = -2x + 1$, então $-2x + 1 = 0$, temos $x = \frac{1}{2}$.

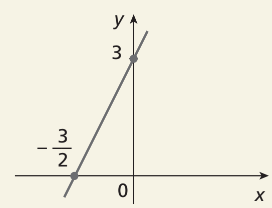
Logo, $\frac{2}{3}$ é zero da função f e $\frac{1}{2}$ é zero da função g.

b. Como $f(x) = b$ e $b \neq 0$, então essa função não tem zeros.
Como $f(x) = 0$, então os zeros dessa função são todos os números reais.

12. a. $f(x) = 2x + 3$

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $f(x) = 2x + 3$

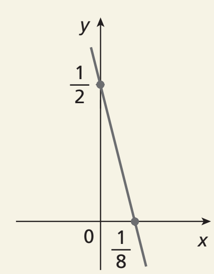
x	$f(x)$
0	3
$-\frac{3}{2}$	0



b. $g(x) = -4x + \frac{1}{2}$

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $g(x) = -4x + \frac{1}{2}$

x	$g(x)$
0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{8}$	0

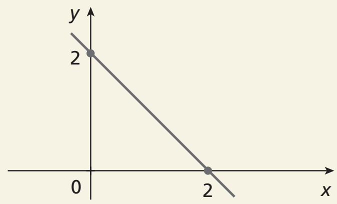


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

c. $h(x) = -x + 2$

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $h(x) = -x + 2$

x	$h(x)$
0	2
2	0

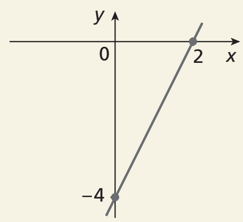


d. $i(x) = -4 + \frac{6}{3}x$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $i(x) = -4 + \frac{6}{3}x$

x	$i(x)$
0	–4
2	0



13. a. Os gráficos das funções f e i têm em comum o fato de serem retas representativas de funções crescentes.

b. Os gráficos das funções g e h têm em comum o fato de serem retas representativas de funções decrescentes.

c. Não há ponto de intersecção entre os gráficos das funções f e i. As funções têm a mesma taxa de variação. Portanto, os gráficos são retas paralelas.

14. a. O gráfico da função f passa pelos pontos (0, 3) e (−3, 0). Então:
$f(x) = ax + b$
$3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$
$0 = a(-3) + b \Rightarrow b = 3a$
Como $b = 3$, temos: $a = 1$
Portanto: $f(x) = x + 3$
O gráfico da função g passa pelos pontos (0, 1) e (1, 0). Então:
$g(x) = cx + d$
$1 = c \cdot 0 + d \Rightarrow d = 1$
$0 = c \cdot 1 + d \Rightarrow d = -c$
Como $d = 1$, temos: $c = -1$
Portanto: $g(x) = -x + 1$

b. Para determinar as coordenadas do ponto P, devemos obter x tal que:
$g(x) = f(x)$
$-x + 1 = x + 3$
$2x = -2$
$x = -1$
Para $x = -1$, temos:
$f(-1) = g(-1) = 2$
Logo, as coordenadas do ponto P são (−1, 2).

15. Observando o gráfico, percebemos que os vértices A e C têm coordenadas (−2, 0) e (0, 3), respectivamente. O vértice B está sobre a reta de equação $y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2}$ e sobre a reta que passa pelos pontos C e (2, 0). Devemos determinar a equação desta última. Seja $y = ax + b$ a equação dessa reta.
Como essa reta passa pelo ponto $C(0, 3)$, temos:
$3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$
Como essa reta também passa pelo ponto (2, 0), temos:
$0 = a \cdot 2 + b \Rightarrow 2a + b = 0$
Substituindo o valor de b por 3:
$2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$
Então, a equação da reta que passa pelos pontos C e B é: $y = -\frac{3}{2}x + 3$
Para obter as coordenadas do ponto B resolvemos o sistema:
$$\begin{cases} y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2}x + 3 \end{cases}$$
$$-\frac{x}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow \frac{5}{4}x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{14}{5}$$
Substituindo o valor de x em qualquer uma das equações do sistema, obtemos: $y = -\frac{6}{5}$
Logo, os vértices do triângulo são:
$A(-2, 0)$, $B\left(\frac{14}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ e $C(0, 3)$

16. a. Ao observar os gráficos, percebemos que a inclinação que representa o enchimento da caixa A é maior do que a representação do enchimento de B. Portanto, a torneira A tem a maior vazão.

b. Com os pontos (3, 480) e (0, 360), calculamos a taxa de variação de A:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{480 - 360}{3 - 0} = \frac{120}{3} = 40$$
Com os pontos (3, 480) e (0, 420), calculamos a taxa de variação de B:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{480 - 420}{3 - 0} = \frac{60}{3} = 20$$
Portanto, a taxa de variação que representa a torneira A é 40 e a da torneira B é 20.

c. Sendo A a função da caixa A e B a função da caixa B, temos:
$A(x) = ax + b$, para $x = 0$, temos $y = 360$; assim:
$360 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 360$
$B(x) = ax + b$, para $x = 0$, temos $y = 420$; assim:
$420 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 420$
Logo, os coeficientes lineares de A e B são 360 e 420, respectivamente.

d. Significam as quantidades de litros que há em cada caixa antes da abertura das torneiras.

e. Determinamos a taxa de variação e os coeficientes lineares das funções nos **itens b** e **c**. Sendo A a função da caixa A e B a função da caixa B, temos:
$A(x) = 360 + 40x$ e $B(x) = 420 + 20x$

f. Para determinar o tempo para o enchimento de cada caixa-d'água, basta determinar o valor de x em cada função para $A(x) = 1.000$ e $B(x) = 1.000$.
$A(x) = 360 + 40x \Rightarrow$
$\Rightarrow 1.000 = 360 + 40x \Rightarrow$
$\Rightarrow 40x = 640 \Rightarrow x = 16$
$B(x) = 420 + 20x \Rightarrow$
$\Rightarrow 1.000 = 420 + 20x \Rightarrow$
$\Rightarrow 20x = 580 \Rightarrow x = 29$
Portanto, a caixa A será enchida após 16 minutos e a caixa B, após 29 minutos.

g. A caixa A deverá ser enchida em 16 minutos; portanto, o domínio da função A é $D(A) = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x \leqslant 16\}$.
A caixa B deverá ser enchida em 29 minutos; portanto, o domínio da função B é $D(B) = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x \leqslant 29\}$.

h. A imagem da função A tem extremidades 360 (quantidade de água inicial) e 1.000 (capacidade total de água). Portanto,
$Im(A) = \{y \in \mathbb{R} | 360 \leqslant y \leqslant 1.000\}$.
A imagem da função B tem extremidades 420 (quantidade de água inicial) e 1.000 (capacidade total de água). Portanto,
$Im(B) = \{y \in \mathbb{R} | 420 \leqslant y \leqslant 1.000\}$.

17. a. Com os pontos (300,0; 262) e (0, 100), temos:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{262 - 100}{300 - 0} = \frac{162}{300} = 0{,}54$$
Portanto, a taxa de variação da função é 0,54.

b. A taxa de variação dá a medida da velocidade constante com que o NO_2 se decompõe.

c. A medida da concentração inicial pode ser calculada pelo coeficiente linear da função, que é igual a 100. Dado que:
$$\frac{1}{[NO_2]} = 100 \Rightarrow [NO_2] = \frac{1}{100}$$
$\therefore [NO_2] = 0{,}01$ mol/L

d. Sendo $y = ax + b$ a lei de formação da função representada pela reta, temos do **item a** que o coeficiente angular é $a = 0{,}54$ e pela observação do gráfico temos que o coeficiente linear é $b = 100$. Portanto, a lei de formação da função é $y = 0{,}54x + 100$ com $0 \leqslant x \leqslant 300$

18. Como a função que modela o problema é linear, podemos determinar a altura no trigésimo dia pela regra de três a seguir. Seja x a medida da altura a ser determinada.

$\frac{10}{2} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 2}{10} \Rightarrow x = 6$

Portanto, a planta estará medindo 6 cm no trigésimo dia.

Alternativa **e**.

19. Para verificar se há proporcionalidade direta, podemos fazer a seguinte tabela que relaciona a medida do lado com a medida da área do quadrado:

Cálculo da medida da área de um quadrado de medida de lado ℓ

ℓ	$A = \ell^2$
1	$1 \cdot 1 = 1$
2	$2 \cdot 2 = 4$
3	$3 \cdot 3 = 9$
4	$4 \cdot 4 = 16$

Como $\frac{1}{1} \neq \frac{4}{2} \neq \frac{9}{3} \neq \frac{16}{4}$, não há uma constante de proporcionalidade. Portanto, a medida do lado do quadrado e a medida da área do quadrado não são proporcionais.

20. Não. Na função que relaciona as grandezas inversamente proporcionais, a variável independente encontra-se no denominador de uma fração, diferente de uma função linear que é do tipo $f(x) = ax$.

21. a. $f(x) = -5x + 2$

f é função decrescente, pois $a = -5$ e $-5 < 0$.

b. $h(x) = -3 + \frac{x}{2}$

h é função crescente, pois $a = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} > 0$.

c. $g(x) = x - \frac{3}{4}$

g é função crescente, pois $a = 1$ e $1 > 0$.

d. $f(x) = 1 - 2x$

f é função decrescente, pois $a = -2$ e $-2 < 0$.

22. a. função identidade: $f(x) = x$

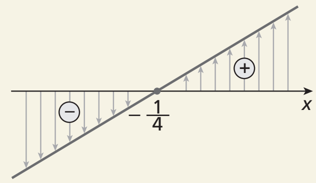
zero de f: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

b. O valor b, do termo constante da lei da função f, é zero. Assim, o ponto em que o gráfico da função identidade intercepta o eixo y é $(0, 0)$, que é também o ponto em que o gráfico intercepta o eixo x.

23. a. $f(x) = 3x + \frac{3}{4}$

Zero de f: $3x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

Como $a = 3$ e $3 > 0$, temos o seguinte esboço do gráfico:



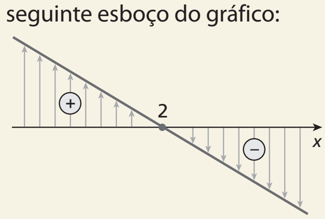
Então:

$$\begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x = -\frac{1}{4} \\ f(x) > 0, \text{ para } x > -\frac{1}{4} \\ f(x) < 0, \text{ para } x < -\frac{1}{4} \end{cases}$$

b. $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

Zero de g: $-\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2$

Como $a = -\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2} < 0$, temos o seguinte esboço do gráfico:



Então:

$$\begin{cases} g(x) = 0, \text{ para } x = 2 \\ g(x) > 0, \text{ para } x < 2 \\ g(x) < 0, \text{ para } x > 2 \end{cases}$$

24. O coeficiente de x na função $f(x) = \left(m - \frac{1}{2}\right)x + 7$ é $\left(m - \frac{1}{2}\right)$.

A função é crescente se:

$m - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2}$

A função é decrescente se:

$m - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$

25. a. Como a função g passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, -1)$, temos:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 0}{0 - 1} = 1$

Portanto, o coeficiente angular de g é 1.

Como a função h passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(-3, 0)$, temos:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 1}{-3 - 0} = \frac{1}{3}$

Portanto, o coeficiente angular de h é $\frac{1}{3}$.

b. A função g possui coeficiente angular igual a 1; então, $y = x + b$. Como ela passa pelo ponto $(0, -1)$, temos: $b = -1$ e $y = x - 1$

Portanto, o coeficiente linear de g é -1.

A função h possui coeficiente angular igual a $\frac{1}{3}$; então, $y = \frac{1}{3}x + b$.

Como ela passa pelo ponto $(0, 1)$, temos: $b = 1$ e $y = \frac{1}{3}x + 1$

Portanto, o coeficiente linear de h é 1.

c. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{3}x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3$

Substituindo o valor de x na primeira equação, obtemos:

$y = x - 1 \Rightarrow y = 3 - 1 \Rightarrow y = 2$

Portanto, o ponto de intersecção é $(3, 2)$.

d. $h(x) < g(x)$

$\frac{1}{3}x + 1 < x - 1 \Rightarrow 2 < \frac{2x}{3} \Rightarrow x > 3$

Portanto, $h(x)$ é menor que $g(x)$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

26. a. O salário (s_A) na loja A, em real, é:

$s_A = 2.000 + 0{,}02 \cdot 13.000 = 2.260$

O salário (s_B) na loja B, em real, é:

$s_B = 0{,}15 \cdot 13.000 = 1.950$

b. Na loja A: $s_A(x) = 2.000 + 0{,}02x$

Na loja B: $s_B(x) = 0{,}15x$

c. Loja A:

$2.000 + 0{,}02 \cdot x = 3.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1.000}{0{,}02} = 50.000$

Loja B:

$0{,}15 \cdot x = 3.000 \Rightarrow x = 20.000$

Logo, para um funcionário ganhar R$ 3.000, o total de vendas na loja A deverá ser R$ 50.000,00 e na loja B, R$ 20.000,00.

d. Vamos encontrar o valor total de vendas x para o qual os valores recebidos nas lojas A e B se igualam.

$s_A = s_B \Rightarrow 2.000 + 0{,}02x = 0{,}15x \Rightarrow$

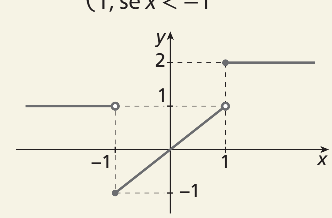
$\Rightarrow x \simeq 15.384{,}62$

Logo, a partir de um total de vendas acima de R$ 15.384,62, é mais vantajoso trabalhar na loja B.

27. É esperado que o estudante perceba que a variação do parâmetro a em $y = ax + b$ vai modificar a inclinação da reta.

Mantendo o coeficiente a e variando o coeficiente b, a reta será transladada paralelamente à reta original.

28. $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geqslant 1 \\ x, \text{ se } -1 \leqslant x < 1 \\ 1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$



Observando o gráfico, temos:

$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1 \text{ ou } y = 2\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

29. Para $x \leqslant -1$, o gráfico obedece à lei de formação $y = ax + b$ e passa pelos pontos $(-5, -3)$ e $(-1, 1)$. Então:

- para $x = -5$, temos $y = -3$
  Logo: $-3 = a \cdot (-5) + b$ (I)
- para $x = -1$, temos $y = 1$
  Logo: $1 = a \cdot (-1) + b$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), encontramos $a = 1$ e $b = 2$. Assim, para $x \leqslant -1$, o gráfico obedece à lei $y = x + 2$.

Para o intervalo $-1 < x < 1$, a função é constante e igual a 1.

Para $x \geqslant 1$, a função passa pelos pontos $(1, 1)$ e $(3, 3)$ e obedece à lei $y = ax + b$. Então:

- para $x = 1$, temos $y = 1$
  Logo: $1 = a \cdot 1 + b$ (III)
- para $x = 3$, temos $y = 3$
  Logo: $3 = a \cdot 3 + b$ (IV)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (III) e (IV), encontramos $a = 1$ e $b = 0$. Assim, para $x \geqslant 1$, o gráfico obedece à lei $y = x$.

Portanto, a lei de formação da função correspondente é:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leqslant -1 \\ 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

30. a. Podemos determinar a medida da velocidade por meio da expressão: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} = \frac{90 - 10}{1 - 0} = 80$

Portanto, a medida da velocidade do automóvel é 80 km/h.

b. O gráfico é uma reta; então, a função horária do movimento é do tipo: $s(t) = s_0 + vt$

Observando o gráfico, percebemos que $s_0 = 10$ e do item anterior, $v = 80$.

Logo, a função horária do movimento é: $s(t) = 10 + 80t$

c. Observando o gráfico, temos:

$D(s) = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geqslant 0\} = \mathbb{R}_+$

$Im(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geqslant 10\}$

d. Para $t = 4$, temos: $s(4) = 10 + 80 \cdot 4 = 330$

Após 4 horas, a posição será 330 quilômetros.

e. $s(t) = 250 \Rightarrow 10 + 80t = 250 \Rightarrow 80t = 240 \Rightarrow t = 3$

A posição será 250 quilômetros após 3 horas.

31. a. Para o movimento retilíneo uniforme (MRU), em que a medida da velocidade do móvel é constante, vamos usar a função afim $s(t) = s + vt$.

Para o domínio $0 \leqslant t < 10$, temos:

$s = 0$ e $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} \Rightarrow v = \frac{50 - 0}{10 - 0} = 5$

Logo, a lei de formação para esse domínio é $s(t) = 5t$, com $s(t)$ em metro e t em segundo.

Para o domínio $10 \leqslant t < 20$, temos $s = 50$ e $v = 0$.

Logo, a lei de formação para esse domínio é $s(t) = 50$, com $s(t)$ em metro.

Para o domínio $20 \leqslant t \leqslant 40$, temos:

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} \Rightarrow v = \frac{0 - 50}{40 - 20} = -2{,}5$

Com $v = -2{,}5$ e o ponto $(40, 0)$, por exemplo, podemos determinar $s(t)$:

$s(t) = s + vt \Rightarrow 0 = s - 2{,}5 \cdot 40 \Rightarrow s = 100$

Logo, a sentença para esse domínio é $s(t) = 100 - 2{,}5t$, com $s(t)$ em metro e t em segundo.

Portanto, a lei de formação da função é:

$$s(t) = \begin{cases} 5t, \text{ se } 0 \leqslant t < 10 \\ 50, \text{ se } 10 \leqslant t < 20 \\ 100 - 2{,}5t, \text{ se } 20 \leqslant t \leqslant 40 \end{cases}$$

b. Para 5 segundos devemos usar a primeira sentença da função.

$s(t) = 5 \cdot 5 = 25$

Para 35 segundos, devemos usar a terceira sentença da função.

$s(t) = 100 - 2{,}5 \cdot 35 = 12{,}5$

Portanto, o corpo em 5 segundos estará na posição 25 m e em 35 segundos estará na posição 12,5 m.

c. No intervalo de 0 a 10 segundos, a taxa de variação significa que o corpo se movimenta a uma medida de velocidade constante de 5 m/s.

De 10 a 20 segundos, a taxa de variação é zero; isso significa que o corpo permanece em repouso nesse intervalo.

De 20 a 40 segundos, a taxa de variação é negativa, pois o gráfico é decrescente nesse intervalo; isso quer dizer que o corpo está se deslocando no sentido contrário ao da trajetória com velocidade medindo 2,5 m/s.

O módulo da taxa de variação é a medida da velocidade em metros por segundo: $|-2{,}5| = 2{,}5$

d. **Posição de um corpo em função do tempo**

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s(t)$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

No intervalo de 1 a 10 segundos, o comportamento entre as variáveis é diretamente proporcional, pois a função é linear. Assim, existe uma constante k, tal que $k \cdot t = s(t)$.

32. a. $3x - 12 \leqslant 0 \Rightarrow 3x \leqslant 12 \Rightarrow x \leqslant 4$

Logo, o conjunto solução da inequação é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

b. $5(-x + 1) + 2(3x - 4) > -1 \Rightarrow -5x + 5 + 6x - 8 > -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 3 > -1 \Rightarrow x > 2$

Logo, o conjunto solução da inequação é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c. $\frac{-x + 3}{2} < \frac{2x + 5}{3} \Rightarrow$

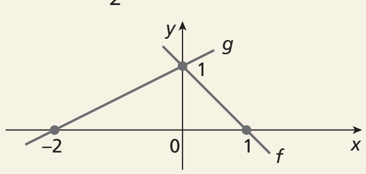
$\Rightarrow \frac{3(-x + 3)}{6} < \frac{2(2x + 5)}{6} \Rightarrow -3x + 9 < 4x + 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x - 4x < 10 - 9 \Rightarrow -7x < 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{7}$

Assim, o conjunto solução da inequação é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{7}\right\}$

33. $f(x) = -x + 1$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$

x	$g(x)$
0	1
−2	0

Determinação de alguns pares ordenados correspondentes a pontos do gráfico de $f(x) = -x + 1$

x	$f(x)$
0	1
1	0

a. Pelo gráfico, podemos observar que, para $x > 0$, temos $f(x) < g(x)$.

b. Vamos resolver a inequação $f(x) < g(x)$:

$-x + 1 < \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x + x > 1 - 1 \Rightarrow \frac{3}{2}x > 0 \Rightarrow x > 0$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Portanto, o intervalo encontrado como solução da inequação $f(x) < g(x)$ é o mesmo intervalo encontrado pela análise do gráfico.

34. a. Observando o gráfico, verifica-se que: $f(x) = g(x)$ para $x = -5$

b. O conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$ é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

c. O conjunto solução da inequação $g(x) \geqslant f(x)$ é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

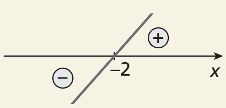
35. a. $(x + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 3x\right) > 0$

Vamos considerar $f(x) = x + 2$ e $g(x) = -\frac{1}{2} + 3x$.

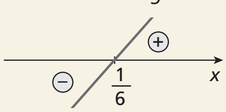
Zero de f: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Zero de g: $-\frac{1}{2} + 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

		-2		$\frac{1}{6}$	
f	−		+		+
g	−		−		+
$f \cdot g$	+		−		+

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{6}\right\}$.

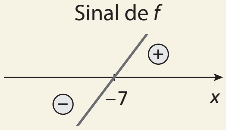
b. $\frac{x + 7}{2 - x} < 0$

Vamos considerar $f(x) = x + 7$ e $g(x) = 2 - x$.

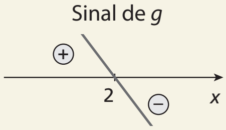
Zero de f: $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

Zero de g: $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

		-7		2	
f	−		+		+
g	+		+		−
$\frac{f}{g}$	−		+		−

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 2\}$.

c. $\frac{-1}{x + 2} + \frac{2x}{x + 2} \geqslant -2 \Rightarrow \frac{-1}{x + 2} + \frac{2x}{x + 2} + 2 \geqslant 0 \Rightarrow$

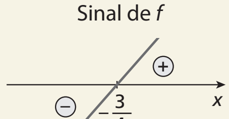
$\Rightarrow \frac{-1 + 2x + 2(x + 2)}{x + 2} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{4x + 3}{x + 2} \geqslant 0$

Vamos considerar $f(x) = 4x + 3$ e $g(x) = x + 2$.

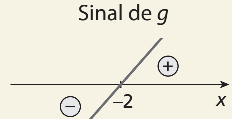
Zero de f: $4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

Zero de g: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Sinal de f



Sinal de g



Note que -2 não é solução da inequação, pois $g(x) \neq 0$, ou seja: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

Quadro de sinais

		-2		$-\frac{3}{4}$	
f	−		−		+
g	−		+		+
$\frac{f}{g}$	+		−		+

Logo,

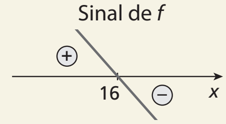
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geqslant -\frac{3}{4}\right\}$.

36. $\frac{10}{x - 20} \leqslant \frac{10}{12 - x} \Rightarrow \frac{10}{x - 20} - \frac{10}{12 - x} \leqslant 0 \Rightarrow$

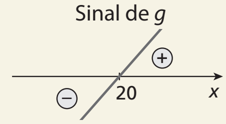
$\Rightarrow \frac{10(12 - x) - 10(x - 20)}{(x - 20)(12 - x)} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{-20x + 320}{(x - 20)(12 - x)} \leqslant 0$

Vamos considerar $f(x) = -20x + 320$, $g(x) = x - 20$ e $h(x) = 12 - x$.

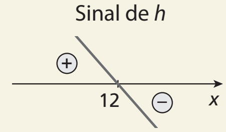
Sinal de f



Sinal de g



Sinal de h



Quadro de sinais

		12		16		20	
f	+		+		−		−
g	−		−		−		+
h	+		−		−		−
$\frac{f}{g \cdot h}$	−		+		−		+

Note que 20 e 12 não são soluções da inequação, pois $g(x) \neq 0$ e $h(x) \neq 0$, ou seja:

$x - 20 \neq 0 \Rightarrow x \neq 20$

$12 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 12$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 12 \text{ ou } 16 \leqslant x < 20\}$.

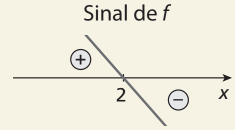
Portanto, temos 15 números inteiros e estritamente positivos que satisfazem a sentença dada.

Alternativa **b**.

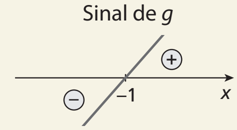
37. $f(x) = -x + 2$ e $g(x) = x + 1$

$f(x) \cdot g(x) \geqslant 0 \Rightarrow (-x + 2)(x + 1) \geqslant 0$

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

		-1		2	
f	+		+		−
g	−		+		+
$f \cdot g$	−		+		−

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

Os números inteiros que satisfazem a sentença são -1, 0, 1 e 2; e a soma deles é dada por: $-1 + 0 + 1 + 2 = 2$

Alternativa **e**.

38. a. Pelo quadro de sinais, observamos que o zero da função f é -1 e que o zero da função g é $-\frac{1}{3}$, pois são os pontos que determinam a mudança de sinal de cada função.

b. A função f passa de valores negativos para positivos; portanto, é crescente. A função g passa de valores positivos para negativos; portanto, é decrescente.

c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$

d. Espera-se que os estudantes percebam que as possíveis inequações são encontradas a partir das raízes dadas. Além disso, o intervalo da solução é aberto em $-\frac{1}{3}$ e fechado em -1. Isso nos leva a concluir que a equação de raiz $-\frac{1}{3}$ deve ficar no denominador. Assim, uma resposta possível é $\frac{x+1}{-3x-1} \leqslant 0$.

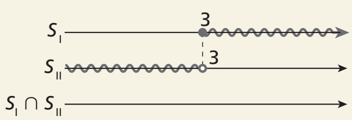
39. a. $5 \leqslant 3x - 4 < x + 2$

(I) $3x - 4 \geqslant 5 \Rightarrow 3x \geqslant 9 \Rightarrow x \geqslant 3$

Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

(II) $3x - 4 < x + 2 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.



Logo, $S = \varnothing$.

b. $\frac{3x}{5} \leqslant \frac{5x+2}{4} \leqslant \frac{-x+1}{2}$

(I) $\frac{3x}{5} \leqslant \frac{5x+2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3x}{5} - \frac{5x+2}{4} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{12x - 25x - 10}{20} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -13x - 10 \leqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\frac{10}{13}$

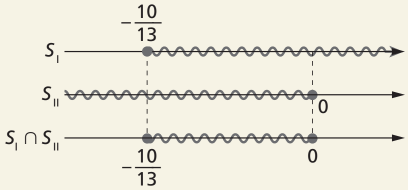
Portanto, $S_I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{10}{13}\right\}$.

(II) $\frac{5x+2}{4} - \frac{-x+1}{2} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5x + 2 + 2x - 2}{4} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{7x}{4} \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$.



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{10}{13} \leqslant x \leqslant 0\right\}$.

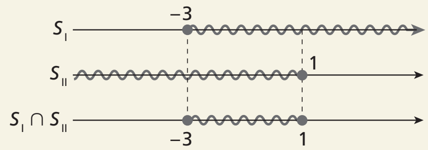
c. $\begin{cases} x + 3 \geqslant 0 \\ 4x - 7 \leqslant x - 4 \end{cases}$

(I) $x + 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -3$

Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$.

(II) $4x - 7 \leqslant x - 4 \Rightarrow 3x \leqslant 3 \Rightarrow x \leqslant 1$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$.



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$.

d. $\begin{cases} 5x - 2 > 4 - x \\ 2(7 - x) \leqslant 5(2x + 4) \\ 2 - 3(4 + 2x) < 6 + 2(1 - 2x) \end{cases}$

(I) $5x - 2 > 4 - x \Rightarrow x > 1$

Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

(II) $14 - 2x \leqslant 10x + 20 \Rightarrow$

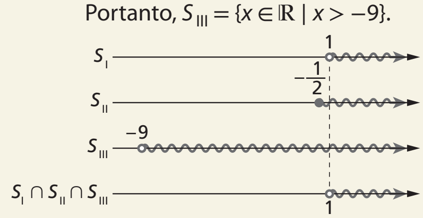
$\Rightarrow -12x \leqslant 6 \Rightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$

Portanto, $S_{II} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{2}\right\}$.

(III) $2 - 12 - 6x < 6 + 2 - 4x \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x < 18 \Rightarrow x > -9$

Portanto, $S_{III} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -9\}$.



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

40. a. Plano Azul: $p_A(x) = 140 + 50x$, em que $x \leqslant 20$.

b. Plano Laranja: $p_L(x) = 220 + 40x$, em que $x \leqslant 60$.

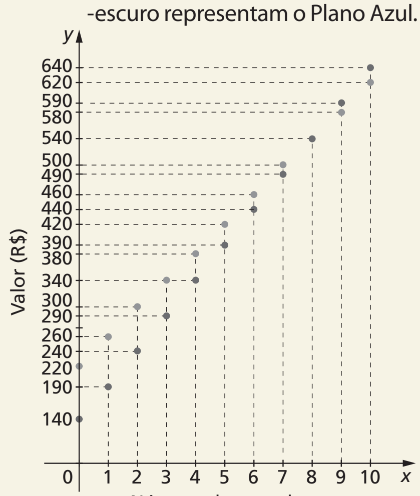
c. $p_A(x) = p_L(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 140 + 50x = 220 + 40x \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x = 80 \Rightarrow x = 8$

Assim, para 8 consultas, o valor total a ser pago no decorrer de um ano é igual para ambos os planos.

d. Observe abaixo o esboço dos gráficos de $p_A(x)$ e de $p_L(x)$ em um mesmo plano cartesiano, em que os pontos cinza-claro representam o Plano Laranja e os pontos cinza-escuro representam o Plano Azul.



No gráfico, observamos que, para qualquer quantidade de consultas maior que 8, o Plano Laranja é mais vantajoso para o cliente, em particular para um número de consultas x tal que $8 < x < 18$.

e. Da mesma forma, observando o gráfico percebemos que, para um número de consultas x tal que $4 < x < 7$, o Plano Azul é o mais vantajoso para o cliente.

41. Sabemos que o valor é dado pela diferença entre o valor das vendas e o dos gastos. Assim, pelo enunciado:

a. $V_s(x) = 2x - 10.000$

b. $V_f(x) = 3x - 12.000$

c. $V_s(x) = V_f(x) \Rightarrow 2x - 10.000 =$

$= 3x - 12.000 \Rightarrow x = 2.000$

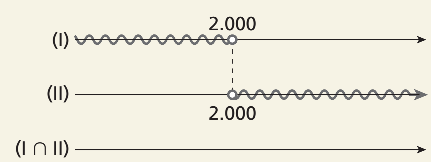
Portanto, $V_s(x) = V_f(x)$ para 2.000 quilogramas.

d. $\begin{cases} V_s(x) > V_f(x) \\ V_s(x) < V_f(x) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 10.000 > 3x - 12.000 \\ 2x - 10.000 < 3x - 12.000 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x > -2.000 \\ -x < -2.000 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x < 2.000 \text{ (I)} \\ x > 2.000 \text{ (II)} \end{cases}$



Logo, $S = \varnothing$.

e. Supondo uma produção de 10.000 quilogramas, temos:

$V_s(x) = 2 \cdot 10.000 - 10.000 =$

$= 10.000,00$

$V_f(x) = 3 \cdot 10.000 - 12.000 =$

$= 18.000,00$

Portanto, o agricultor terá mais lucro na cultura de feijão.

f. Analisando o esquema do **item d**, verificamos que $V_f(x) > V_s(x)$ para $x > 2.000$. Logo, a quantidade mínima de feijão é de 2.001 quilogramas.

42. Espera-se que os estudantes percebam que $x - 7$ tem que ser diferente de zero, mas que $2x - 2$ pode ser zero.

Dessa maneira, $\frac{2x-2}{x-7}$ pode ser zero.

Então, devemos considerar $\frac{2x-2}{x-7} \geqslant 0$ e $x - 7 \neq 0$.

43. a. $j(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5}$

Como o índice da raiz é ímpar, não há restrições para o radicando.

Logo, $D(j) = \mathbb{R}$.

b. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

Devemos ter: $2x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{2}\right\}$.

c. $h(x) = \dfrac{-2x + 3}{\sqrt{1 - x}}$

Devemos ter: $1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$

Logo, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

d. $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

Devemos ter: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Logo, $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

e. $i(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x + 1}}$

Devemos ter: $\sqrt[3]{x + 1} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Logo, $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$.

Para finalizar o capítulo 4

Autoavaliação

Q1. Como uma função afim é aquela cuja lei de formação obedece à forma $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, a sentença correta é $f(x) = -5 + x$.

Alternativa **b**.

Q2. $f(m) = m - 0{,}15m$

$f(m) = 0{,}85m$

Alternativa **b**.

Q3. Como $y = ax + b$ e passa por (0, 0) e (−1, −1), temos:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ -1 = a \cdot (-1) + b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Assim, $y = x$.

Portanto, é uma função linear, polinomial do 1º grau e identidade. Não é uma função constante.

Alternativa **a**.

Q4. As retas correspondentes a essas funções são concorrentes, pois:

$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = g(0) = -1$

Os gráficos de f e de g interceptam-se no ponto (0, −1).

Alternativa **c**.

Q5. Vaptvupt: $v(x) = 10 + 1 \cdot x$

Ligeirinho: $l(x) = 15 + 0{,}75x$

$v(x) < l(x) \Rightarrow 10 + x < 15 + 0{,}75x \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}25x < 5 \Rightarrow x < 20$

Alternativa **d**.

Q6. $f(x)$ intercepta o eixo x quando $f(x) = 0$; então:

$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

$f(x)$ intercepta o eixo y quando $x = 0$; então:

$f(0) = ax + b = a \cdot 0 + b = b$

Portanto, no ponto (0, b) o gráfico da função intercepta o eixo y.

Alternativa **a**.

Q7. Observando o gráfico, percebemos que a função é decrescente e que $y > 0$ para $x < 2$ e $y < 0$ para $x > 2$.

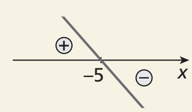
Alternativa **b**.

Q8. $\dfrac{x - 1}{x + 2} \leqslant 2 \Rightarrow \dfrac{x - 1}{x + 2} - 2 \leqslant 0 \Rightarrow$

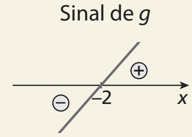
$\Rightarrow \dfrac{x - 1 - 2(x + 2)}{x + 2} \leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{-x - 5}{x + 2} \leqslant 0$

Vamos considerar $f(x) = -x - 5$ e $g(x) = x + 2$.

Sinal de f

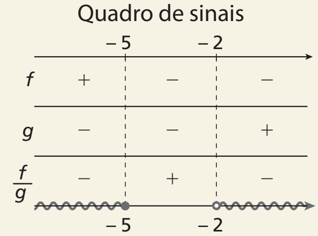


Sinal de g



Note que −2 não é solução da inequação, pois $g(x) \neq 0$, ou seja: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

Quadro de sinais



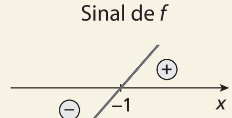
Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5 \text{ ou } x > -2\}$.

Alternativa **c**.

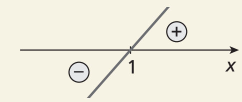
Q9. Nessa atividade, precisamos resolver cada alternativa.

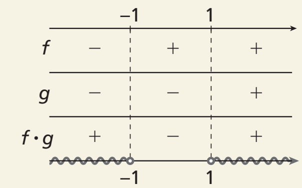
Para resolver as alternativas **a** e **b**, vamos considerar $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$.

a. Sinal de f



Sinal de g

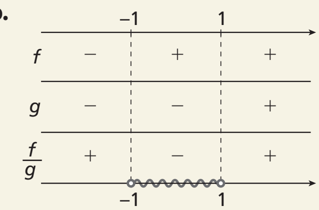




Portanto,

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

b.



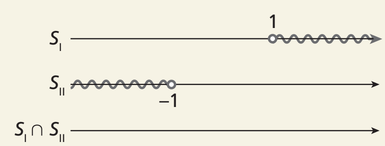
Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$.

c. $x + 2 > x + 1 > x$

$x + 2 > x + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$

$x + 1 > x$, para todo $x \in \mathbb{R}$

d. $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$



$S = S_I \cap S_{II} = \varnothing$

Alternativa **d**.

Q10. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

Domínio de f: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$g(x) = \sqrt{x - 3}$

Domínio de g: $x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 3$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$ e $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

Alternativa **a**.

Capítulo 5 Função quadrática

Atividades propostas

1. a. g é função quadrática, com $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$.

b. h é função quadrática, com $a = 1$, $b = 0$ e $c = \sqrt{7}$.

c. i não é função quadrática.

d. m não é função quadrática.

2. a. $f(-1) = -(-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 6$

$f(-1) = -1 - 5 + 6$

$f(-1) = 0$

b. $f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^2 + 5 \cdot \sqrt{2} + 6$

$f(\sqrt{2}) = -2 + 5\sqrt{2} + 6$

$f(\sqrt{2}) = 4 + 5\sqrt{2}$

c. $f\left(-\frac{4}{5}\right) = -\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 6$

$f\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{16}{25} - 4 + 6 = \frac{34}{25}$

d. $-x^2 + 5x + 6 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1$ ou $x = 6$

e. $-x^2 + 5x + 6 = \frac{49}{4} \Rightarrow -4x^2 + 20x - 25 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{8} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

f. $-x^2 + 5x + 6 = 20 \Rightarrow -x^2 + 5x - 14 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-14) = -31$

Como $\Delta < 0$, não existe x real que satisfaça a equação $f(x) = 20$.

3. a. Apenas analisando esses valores, não podemos determinar em quais intervalos a função é crescente ou decrescente.

b. Espera-se que os estudantes respondam que a construção do gráfico dessa função facilitaria sua análise.

4. $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = c = -4 \Rightarrow c = -4$

$f(3) = 9a + 3b - 4 = 8 \Rightarrow 9a + 3b = 12$

$f(-2) = 4a - 2b - 4 = 4 \Rightarrow 4a - 2b = 8$

$$\begin{cases} 9a + 3b = 12 \\ 4a - 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18a + 6b = 24 \\ 12a - 6b = 24 \end{cases}$$

$$30a + 0b = 48 \Rightarrow a = \frac{48}{30} = \frac{8}{5}$$

$4 \cdot \frac{8}{5} - 2b = 8 \Rightarrow 2b = -\frac{8}{5} \Rightarrow b = -\frac{4}{5}$

$f(x) = \frac{8}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - 4$

$f(-3) = \frac{8}{5}(-3)^2 - \frac{4}{5}(-3) - 4 = \frac{64}{5}$

---

5. $x^2 - 8x + 16 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$

$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{8}{2} = 4$

6. Para que equação apresente duas raízes reais iguais, devemos ter $\Delta = 0$. Então, fazemos:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 1) =$

$= 4 - 4m - 4 = -4m$

Como $\Delta = 0$, $-4m = 0 \Rightarrow m = 0$.

7. Espera-se que os estudantes percebam que, se o coeficiente do termo x^2 for igual a zero, ou seja, se $f(x) = 0x^2 + bx + c$, então f será uma função afim, cuja lei pode ser representada por $f(x) = bx + c$.

8. a. A lei da função quadrática ficaria indeterminada, pois teríamos um sistema, em qualquer das três situações, de três incógnitas e apenas duas equações.

b. A lei da função quadrática ficaria a mesma, $f(x) = 3x^2 - x + 2$, pois $f(1) = 4$.

c. Não existiria a função, pois para $x = 1$ haveria mais de uma imagem.

9. a. $f(x) = (2p - 3)x^2 + 7xp + 2$

Para f ser uma função quadrática, devemos ter:

$2p - 3 \neq 0 \Rightarrow p \neq \frac{3}{2}$

b. $g(x) = [(3p + 5)(p + 7)]x^2 + 3x + 11$

Para g ser uma função quadrática, devemos ter:

$(3p + 5)(p + 7) \neq 0 \Rightarrow 3p + 5 \neq 0$ e $p + 7 \neq 0 \Rightarrow p \neq -\frac{5}{3}$ e $p \neq -7$

10. a. Grupo de 2 pessoas: 2 *e-mails*

Grupo de 3 pessoas: 6 *e-mails* $(3 \cdot 2)$

Grupo de 4 pessoas: 12 *e-mails* $(4 \cdot 3)$

Grupo de 10 pessoas: 90 *e-mails* $(10 \cdot 9)$

b. **Número de *e-mails* enviados em função do número de integrantes do grupo**

Número de pessoas do grupo	*E-mails* enviados
2	$2 \cdot (2 - 1)$
3	$3 \cdot (3 - 1)$
4	$4 \cdot (4 - 1)$
10	$10 \cdot (10 - 1)$

c. Cada integrante do grupo envia um *e-mail* para todos os integrantes desse grupo, menos para ele próprio, ou seja, sendo n o número de pessoas do grupo, o número de *e-mails* enviados será: $n \cdot (n - 1)$

d. $n \cdot (n - 1) = 132$

$n^2 - n = 132$

$n^2 - n - 132 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$n = \frac{1 \pm \sqrt{529}}{2 \cdot 1} \Rightarrow n = 12$ ou

$n = -11$ (não serve)

Portanto, no grupo há 12 integrantes.

11. a. A área de medida A do piso compreende a área de quatro quadrados de medida de comprimento do lado x, de dois retângulos de medida da largura x e medida do comprimento 12 m e de dois retângulos de medida da largura x e medida do comprimento 20 m. Então, a lei de formação é:

$A(x) = 4 \cdot x^2 + 2 \cdot 12 \cdot x + 2 \cdot 20 \cdot x$

$A(x) = 4x^2 + 64x$

b. Para $x = 3$, temos:

$A(3) = 4 \cdot 3^2 + 64 \cdot 3 \Rightarrow A(3) = 228$

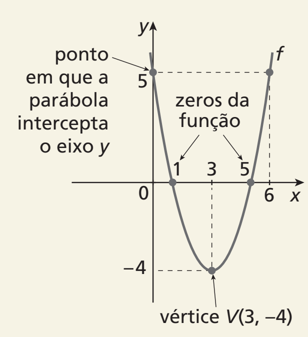
Portanto, a medida da área será $228\ m^2$.

12. a. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$).

$f(x) = x^2 - 6x + 5$

x	$y = f(x)$
0	5
1	0
3	−4
5	0
6	5

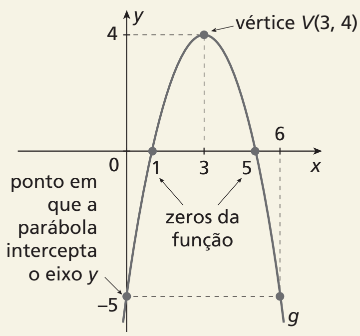


ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

b. $g(x) = -x^2 + 6x - 5$
Concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$).

$g(x) = -x^2 + 6x - 5$

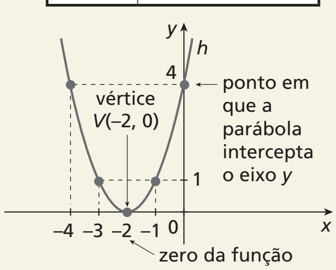
x	$y = g(x)$
0	−5
1	0
3	4
5	0
6	−5



c. $h(x) = x^2 + 4x + 4$
Concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$).

$h(x) = x^2 + 4x + 4$

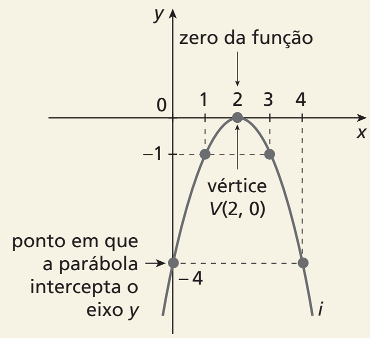
x	$y = h(x)$
0	4
−1	1
−2	0
−3	1
−4	4



d. $i(x) = -x^2 + 4x - 4$
Concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$).

$i(x) = -x^2 + 4x - 4$

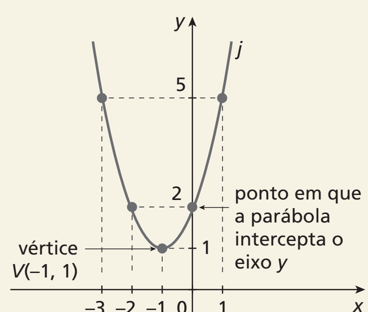
x	$y = i(x)$
0	−4
1	−1
2	0
3	−1
4	−4



e. $j(x) = x^2 + 2x + 2$
Concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$).

$j(x) = x^2 + 2x + 2$

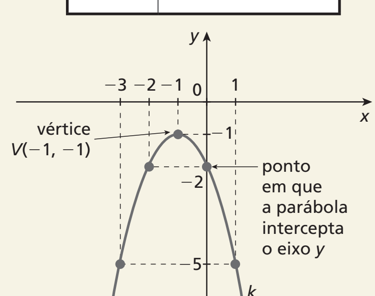
x	$y = j(x)$
−3	5
−2	2
−1	1
0	2
1	5



f. $k(x) = -x^2 - 2x - 2$
Concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$).

$k(x) = -x^2 - 2x - 2$

x	$y = k(x)$
−3	−5
−2	−2
−1	−1
0	−2
1	−5



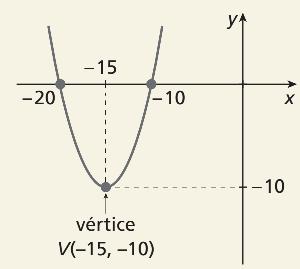
Direção da concavidade das funções

Concavidade voltada para cima ($a > 0$)	Concavidade voltada para baixo ($a < 0$)
f, *h* e *j*	*g*, *i* e *k*

Quantidade de zeros das funções

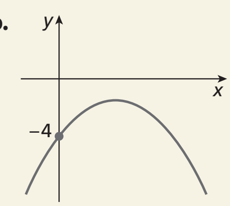
Dois zeros da função	Um zero da função	Nenhum zero da função
f e *g*	*h* e *i*	*j* e *k*

13. a.

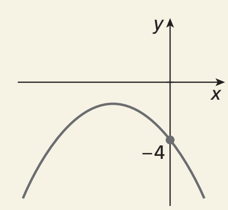


Concavidade voltada para cima.

b.



ou



Concavidade voltada para baixo.
Observe que, como passa por (0, −4), se a concavidade fosse voltada para cima, a função apresentaria dois zeros, o que não é o caso.

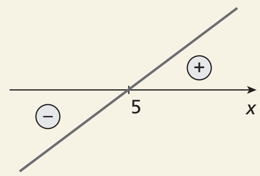
14. a. $f(x) = kx^2 - 2x + 10$
Para o gráfico ter a concavidade voltada para cima, o coeficiente de x^2 deve ser positivo: $k > 0$
Para o gráfico ter a concavidade voltada para baixo, o coeficiente de x^2 deve ser negativo: $k < 0$

b. $f(x) = \left(\dfrac{k-5}{k+1}\right)x^2 - 20$
Concavidade para cima:
$$\frac{k-5}{k+1} > 0$$
Concavidade para baixo:
$$\frac{k-5}{k+1} < 0$$

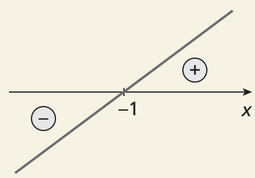
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Sejam $h(k) = k - 5$ e $g(k) = k + 1$.

Sinal de h



Sinal de g



Quadro de sinais

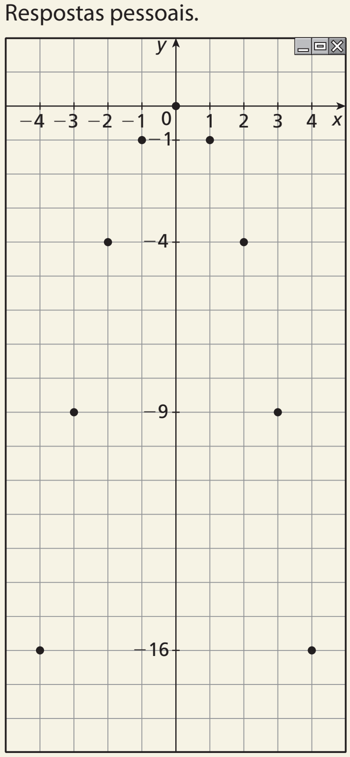
		−1		5	
h	−		−		+
g	−		+		+
$\frac{h}{g}$	+		−		+

Então:

- se $k < -1$ ou $k > 5$, a concavidade é voltada para cima;
- se $-1 < k < 5$, a concavidade é voltada para baixo;
- se $k = 5$, $f(x)$ seria uma função afim e, se $k = -1$, estaria indefinida.

15. a. Respostas pessoais.

b.



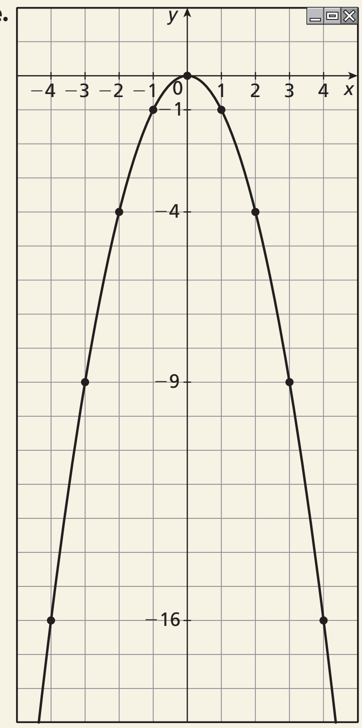
Espera-se que os estudantes percebam que os pontos são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

c. Espera-se que os estudantes percebam que existe uma parábola que passa pelos pontos. O vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para baixo.

d. $g(1) = -1 \Rightarrow a \cdot 1^2 = -1 \Rightarrow a = -1$

Portanto, $g(x) = -x^2$.

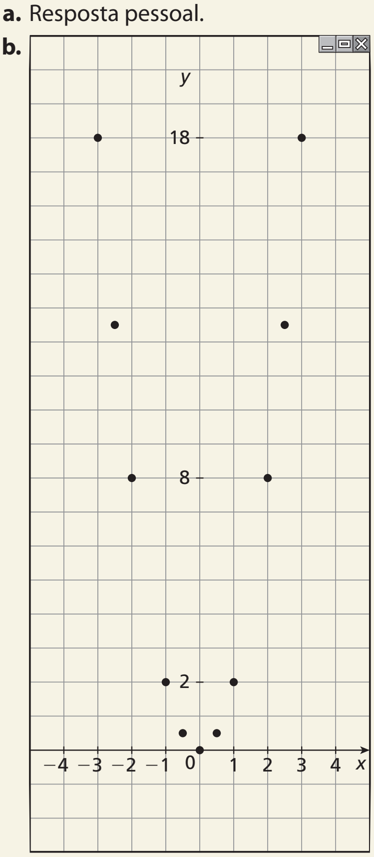
e.



16. I.

a. Resposta pessoal.

b.



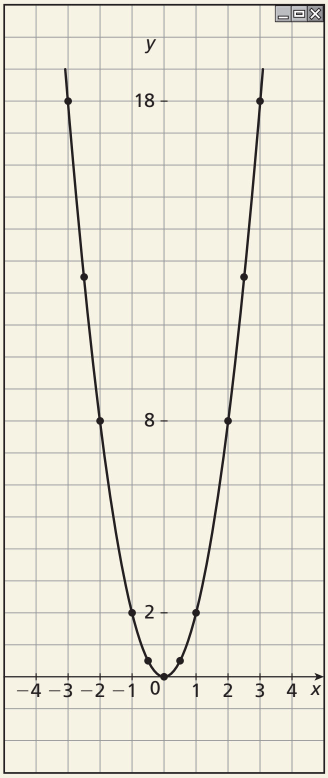
Espera-se que os estudantes percebam que os pontos são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

c. Espera-se que os estudantes percebam que existe uma parábola que passa pelos pontos. O vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para cima.

d. $g(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1^2 = 2 \Rightarrow a = 2$

Portanto, $g(x) = 2x^2$.

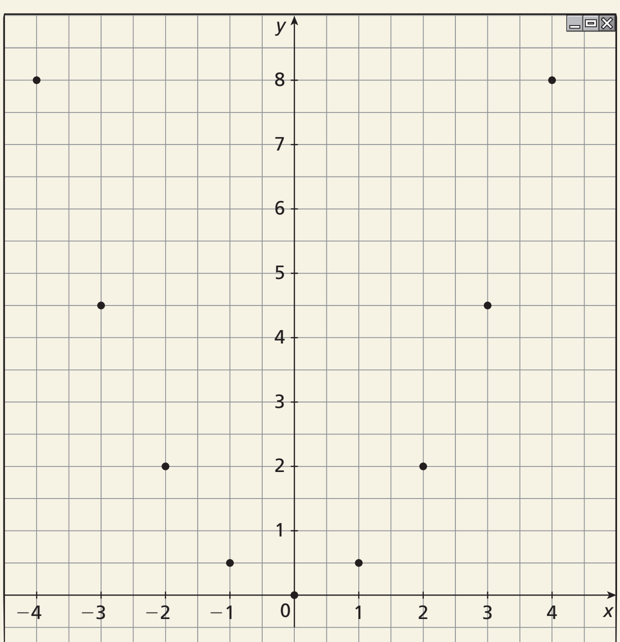
e.



II.

a. Resposta pessoal.

b.



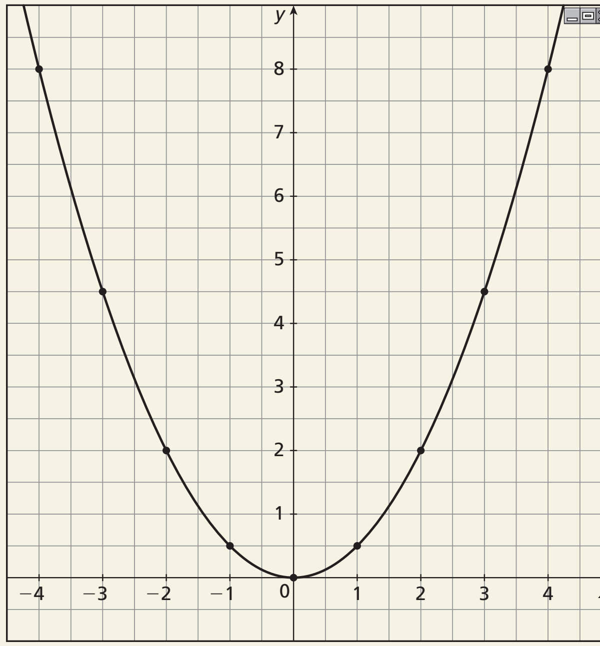
Espera-se que os estudantes percebam que os pontos são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

c. Espera-se que os estudantes percebam que existe uma parábola que passa pelos pontos. O vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para cima.

d. $g(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow a \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Portanto, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

e.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

17. a. $f(x) = -2x^2 + x - 1$

A parábola intercepta o eixo y quando $x = 0$.

$f(0) = -2 \cdot 0^2 + 0 - 1 = -1$

Logo, a parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, -1)$.

b. $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2}{3} - \frac{0}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

As coordenadas do ponto no qual a parábola intercepta o eixo y são $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

c. $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(0) = 0^2 + 0 = 0$

As coordenadas do ponto no qual a parábola intercepta o eixo y são (0, 0).

18. Resposta pessoal.

Espera-se que os estudantes percebam a importância do ponto $(0, c)$, que intercepta o eixo y, pois ele pode ser usado como referência para construir o gráfico.

19. a. $g(x) = x^2 + 3x + 2$

Vamos resolver a equação: $x^2 + 3x + 2 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = -2$ e $x_2 = -1$

Os zeros da função são -2 e -1.

b. $g(x) = 2x^2 + x + 1$

Vamos resolver a equação: $2x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7 < 0$

Como $\Delta < 0$, a função não tem zeros reais.

c. $g(x) = -9x^2 + 6x - 1$

Vamos resolver a equação: $-9x^2 + 6x - 1 = 0$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$

O zero da função é $\frac{1}{3}$.

20. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam a importância dos zeros da função na construção do respectivo gráfico, pois servem como referência para a obtenção do vértice.

21. Para que uma função não tenha zeros, seu discriminante deve ser negativo.

a. $h(x) = kx^2 - x + 25$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot k \cdot 25 = 1 - 100k$

$1 - 100k < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{100}$

b. $h(x) = 2x^2 - 5x + k$
$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 25 - 8k$
$25 - 8k < 0 \Rightarrow k > \dfrac{25}{8}$

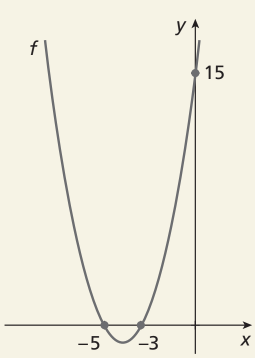
22. Não. Como o domínio de uma função quadrática é $\mathbb{R}$, o gráfico correspondente a essa função sempre intercepta o eixo *y*, pois o elemento 0 (abscissa do ponto em que o gráfico intercepta o eixo *y*) pertence a $\mathbb{R}$.

23. $f(x) = ax^2 + bx + 3$

a. Como 1 e 3 são zeros da função, os pontos em que a parábola intercepta o eixo *x* são (1, 0) e (3, 0). Assim:
$f(1) = 0$ e $f(3) = 0$
$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a + b + 3 = 0 \quad \text{(I)}$
$f(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9a + 3b + 3 = 0 \quad \text{(II)}$
Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:
$$\begin{cases} a + b + 3 = 0 \\ 9a + 3b + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$\Rightarrow a = 1$ e $b = -4$

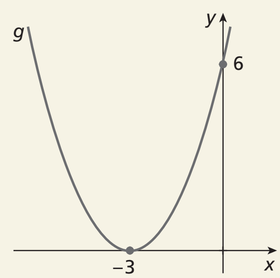
b. Como -1 e -3 são zeros da função, os pontos em que a parábola intercepta o eixo *x* são $(-1, 0)$ e $(-3, 0)$. Assim:
$f(-1) = 0$ e $f(-3) = 0$
$f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a - b + 3 = 0 \quad \text{(I)}$
$f(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9a - 3b + 3 = 0 \quad \text{(II)}$
Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:
$$\begin{cases} a - b + 3 = 0 \\ 9a - 3b + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$\Rightarrow a = 1$ e $b = 4$

24. a.



A parábola intercepta o eixo *y* no ponto (0, 15). Então, a lei da função quadrática associada a ela é do tipo: $f(x) = ax^2 + bx + 15$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$
Notamos também que a parábola intercepta o eixo *x* nos pontos $(-5, 0)$ e $(-3, 0)$. Então:
$f(-5) = a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + 15 \Rightarrow$
$\Rightarrow 25a - 5b + 15 = 0 \quad \text{(I)}$
$f(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 15 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9a - 3b + 15 = 0 \quad \text{(II)}$
Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:
$$\begin{cases} 25a - 5b + 15 = 0 \\ 9a - 3b + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$\Rightarrow a = 1$ e $b = 8$
Portanto, a lei da função é $f(x) = x^2 + 8x + 15$.

b.



A parábola intercepta o eixo *y* no ponto (0, 6). Então, a lei da função quadrática associada a ela é do tipo: $g(x) = ax^2 + bx + 6$, com $a, b \in \mathbb{R}$:
A parábola intercepta o eixo *x* em um único ponto, de coordenadas $(-3, 0)$; então, -3 é o zero da função.
$g(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9a - 3b + 6 = 0 \quad \text{(I)}$
Como a parábola intercepta o eixo *x* em um único ponto, temos $\Delta = 0$. Assim:
$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot 6 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow b^2 = 24a \Rightarrow a = \dfrac{b^2}{24} \quad \text{(II)}$
Substituindo a equação (II) na equação (I), obtemos:
$9 \cdot \left(\dfrac{b^2}{24}\right) - 3b + 6 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{3}{8}b^2 - 3b + 6 = 0$
Resolvendo essa equação, encontramos $b = 4$.
Pela equação (II), temos: $a = \dfrac{4^2}{24} = \dfrac{2}{3}$
Portanto, a lei da função é:
$g(x) = \dfrac{2}{3}x^2 + 4x + 6$

25. Como a parábola tangencia o eixo *x*, a função *f*, tal que $f(x) = 2x^2 - cx + (c - 2)$, tem um zero real duplo; então:
$\Delta = c^2 - 8(c - 2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow c^2 - 8c + 16 = 0 \Rightarrow (c - 4)^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow c = 4$
Logo, $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$. Calculando $f(2)$, temos:
$f(2) = 8 - 8 + 2 = 2$
Portanto, $f(f(2)) = f(2) = 2$.

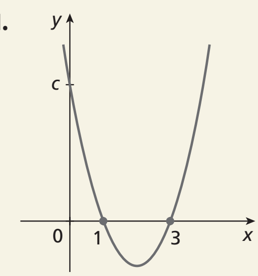
26. $f(x) = -mx^2 + 2m^2$

- Como o gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo, sabemos que o coeficiente de x^2 é negativo, ou seja:
$-m < 0 \Rightarrow m > 0$
- O gráfico de *f* intercepta o eixo *y* em (0, 18); então, o coeficiente $c = 2m^2$ é igual a 18. Logo:
$2m^2 = 18 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 3$ ou $m = -3$
Como $m > 0$, temos $m = 3$.
- Como $m = 3$, $f(x) = -3x^2 + 18$. O gráfico intercepta o eixo *x* quando $y = 0$; então:
$-3x^2 + 18 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

Portanto, os pontos são $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$ e $\left(\sqrt{6}, 0\right)$.

27. É importante os estudantes perceberem que o ponto de intersecção da parábola com o eixo *y* tem não só ordenada igual ao coeficiente *c*, mas abscissa nula, ou seja, $f(0) = c$. Por isso, o procedimento justifica-se.
Respostas possíveis para os itens I, II e III:

I.



$f(x) = x^2 - 4x - c$

II. Observando o gráfico, a parábola intercepta o eixo *y* quando $x = 0$.

III. $f(x) = x^2 - 4x + c$
$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + c \Rightarrow f(0) = c$

28. Respostas pessoais.

29. Como essa atividade é de caráter investigativo, muitas são as relações possíveis para o estabelecimento de conclusões. A seguir, são apresentados exemplos de argumentos.

a. Sabendo que não há zeros da função e a parábola intercepta o eixo *y* no ponto (0, 5), concluímos que toda a parábola está acima do eixo *x*. Ou seja, para qualquer valor real de *x*, temos $f(x)$ positivo.

b. Sabendo que $(-5, 0)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo *x* e a concavidade da parábola é voltada para baixo, concluímos que toda a parábola, com exceção do ponto $(-5, 0)$, está abaixo do eixo *x*. Ou seja, não há valor real de *x* para o qual o valor de $f(x)$ seja positivo.

c. Se $(-3, 0)$ e $(3, 0)$ são os pontos em que a parábola intercepta o eixo *x* e (0, 3) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo *y*, concluímos que a concavidade da parábola é voltada para baixo e que qualquer *x* real que esteja no intervalo $]-3, 3[$ tem o valor de $f(x)$ correspondente positivo.

d. Se $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$ são os pontos em que a parábola intercepta o eixo x e $(0, -2)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo y, concluímos que a concavidade da parábola é voltada para baixo e que $f(x)$ é positivo para $-2 < x < -1$.

e. A função cuja lei é $f(x) = x^2 - 6x + 13$ não tem zeros reais $(\Delta < 0)$ e, como a parábola dessa função intercepta o eixo y no ponto $(0, 13)$, concluímos que a concavidade é voltada para cima. Então, para qualquer x real, o valor de $f(x)$ correspondente é positivo.

30. a. $g(x) = 2x^2 + 3x + 7$

Primeiro, determinamos os zeros da função g:

$2x^2 + 3x + 7 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 9 - 56 = -47 < 0$

Como o discriminante é negativo, a parábola não intercepta o eixo x. Como o coeficiente de x^2 é positivo, a concavidade da parábola é voltada para cima.

Esboço do gráfico

Então, $g(x) > 0$ para qualquer valor de x real.

b. $h(x) = -x^2 + 2x - 1$

Zeros da função h:

$-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$

Como o coeficiente de x^2 é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Esboço do gráfico

Então:

$$\begin{cases} h(x) > 0 \text{ para nenhum valor de } x \\ h(x) = 0 \text{ para } x = 1 \\ h(x) < 0 \text{ para } x \neq 1 \end{cases}$$

c. $i(x) = -x^2 + 9$

Zeros da função i:

$-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

Como o coeficiente de x^2 é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Esboço do gráfico

Então:

$$\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } -3 < x < 3 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 3 \\ i(x) < 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

31. a. $f(x) = -x^2 + 2x$

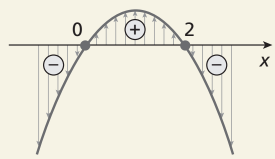
Zeros da função f:

$-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Como o coeficiente de x^2 é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Esboço do gráfico



Então, f é positiva para $0 < x < 2$.

b. $g(x) = x^2 - 2x + 1$

Zeros da função g:

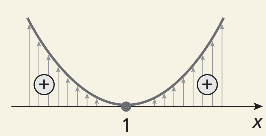
$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1$

Como o coeficiente de x^2 é positivo, a concavidade da parábola é voltada para cima.

Esboço do gráfico



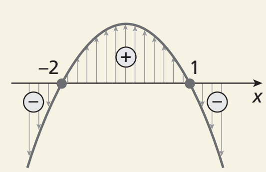
Logo, a função g é positiva para qualquer $x \neq 1$.

32. a. $y > 0$ para $-2 < x < 1$ (gráfico acima do eixo x)

$y = 0$ para $x = -2$ ou $x = 1$ (pontos de intersecção com o eixo x)

$y < 0$ para $x < -2$ ou $x > 1$ (gráfico abaixo do eixo x)

Esboço do gráfico



b. $y > 0$ para $x \neq -2$ (gráfico acima do eixo x)

$y = 0$ para $x = -2$ (ponto de intersecção com o eixo x)

Esboço do gráfico

33. Respostas possíveis:

a. $j_1(x) = x^2 - 3$

$j_2(x) = 2x^2 + 2$

$j_3(x) = -2x^2 - 1$

$j_4(x) = x^2 + 1$

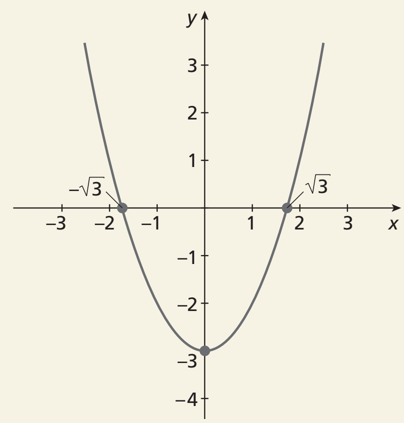
$j_5(x) = x^2 - 1$

$j_6(x) = -x^2 + 1$

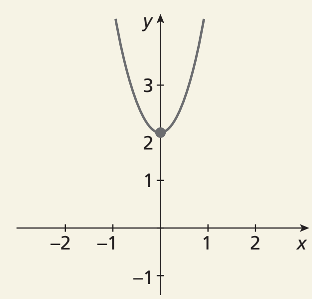
$j_7(x) = -x^2 - 1$

$j_8(x) = -3x^2 + 3$

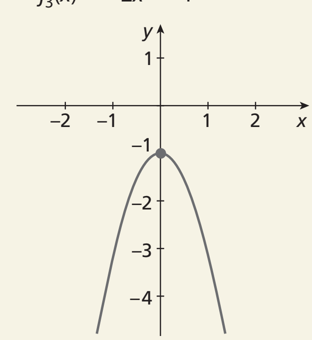
b. $j_1(x) = x^2 - 3$



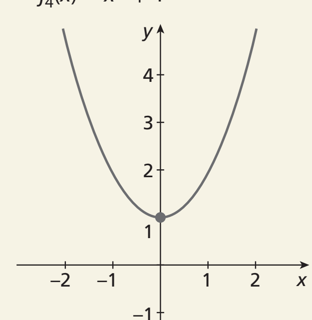
$j_2(x) = 2x^2 + 2$



$j_3(x) = -2x^2 - 1$

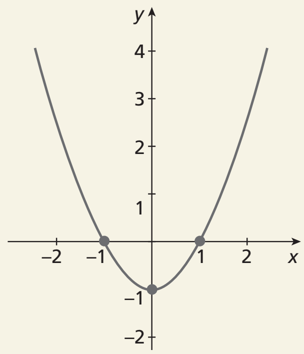


$j_4(x) = x^2 + 1$

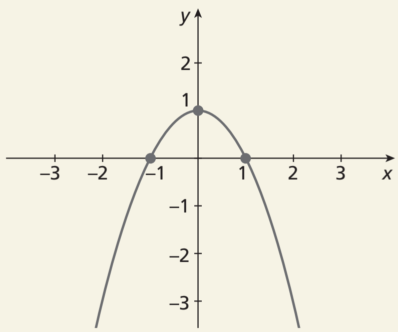


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

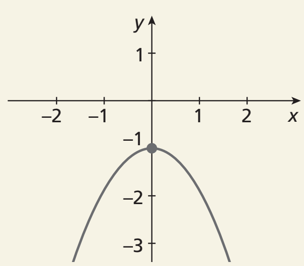
$j_5(x) = x^2 - 1$



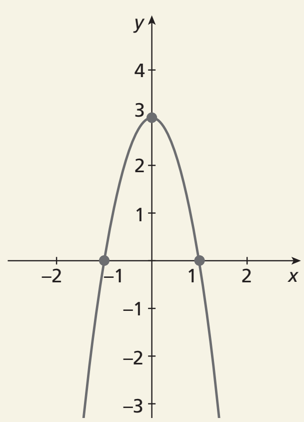
$j_6(x) = -x^2 + 1$



$j_7(x) = -x^2 - 1$



$j_8(x) = -3x^2 + 3$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

c. Comparando cada uma das leis com seu respectivo gráfico, percebe-se que uma função do tipo da função j tem dois zeros reais quando os coeficientes a e c possuem sinais distintos.

d. Da mesma forma, percebe-se que uma função do tipo da função j não tem zeros quando os coeficientes a e c possuem sinais iguais.

e. Espera-se que os estudantes percebam que uma função do tipo $j(x) = ax^2 + c$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, tem o seguinte comportamento:

$a > 0$

$c > 0$	$c < 0$
Nesse caso, a função j é estritamente positiva.	Considerando que x_1 e x_2 são raízes de j, com $x_1 < x_2$, a função j é: • positiva nos intervalos $]-\infty, x_1[$ e $]x_2, +\infty[$; • negativa no intervalo $]x_1, x_2[$. Exemplo: casos $j_1(x)$ e $j_5(x)$ do **item b**.

$a < 0$

$c < 0$	$c > 0$
Nesse caso, a função j é estritamente negativa.	Considerando que x_1 e x_2 são raízes de j, com $x_1 < x_2$, a função j é: • negativa nos intervalos $]-\infty, x_1[$ e $]x_2, +\infty[$; • positiva no intervalo $]x_1, x_2[$. Exemplo: casos $j_6(x)$ e $j_8(x)$ do **item b**.

34. a. $h(x) = -x^2 - 2x + 8$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (8) =$
$= 4 + 32 = 36$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot (-1)} = -1$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot (-1)} = 9$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(-1, 9)$.

b. $i(x) = x^2 - 2x - 8$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot 1} = -9$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(1, -9)$.

c. $j(x) = x^2 + 2x - 3$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4 \cdot 1} = -4$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(-1, -4)$.

d. $k(x) = x^2 - 4x + 4$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-0}{4} = 0$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(2, 0)$.

35. a. Como a função h tem concavidade voltada para baixo, seu valor máximo é o $y_V = 9$. Como as funções i, j e k têm concavidade voltada para cima, não possuem valor máximo.

b. Como as funções i, j e k têm concavidade voltada para cima, seus valores mínimos são seus y do vértice, que são, respectivamente, -9, -4 e 0. A função h não tem valor mínimo, pois sua concavidade está voltada para baixo.

c. Para que a função tenha valor máximo, o coeficiente de x^2 deve ser negativo ($a < 0$).

Para que a função tenha valor mínimo, o coeficiente de x^2 deve ser positivo ($a > 0$).

36. a. Um dos zeros é $x_1 = 0$.

Sabe-se que x_V é equidistante dos zeros da função e, nesse caso, $x_V = 4$.

Assim: $x_V - x_1 = x_2 - x_V \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 - 0 = x_2 - 4 \Rightarrow x_2 = 8$

Os zeros da função são $x_1 = 0$ e $x_2 = 8$.

b. Seja $h(x) = ax^2 + bx + c$.

$h(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (I)
$h(8) = 0 \Rightarrow 64a + 8b + c = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 64a + 8b = 0$ (II)
$h(4) = 5 \Rightarrow 16a + 4b + c = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16a + 4b = 5$ (III)

Dividindo a equação (II) por 8, obtemos:

$8a + b = 0 \Rightarrow b = -8a$

Substituindo b por $-8a$ na equação (III), obtemos:

$16a + 4 \cdot (-8a) = 5 \Rightarrow -16a = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = -\frac{5}{16}$

Como $b = -8a$, então:

$b = -8 \cdot \left(-\frac{5}{16}\right) \Rightarrow b = \frac{5}{2}$

Assim, a lei dessa função é

$h(x) = -\frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x$.

37. $f(x) = -(m - 1)x^2 + 2x + n$

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = (2, 5)$$

$$x_V = \frac{-2}{-2(m-1)} = 2 \Rightarrow 2(m - 1) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

Então, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + n$.

Agora:

$$y_V = \frac{-\left(4+4\cdot\frac{1}{2}\cdot n\right)}{4\left(-\frac{1}{2}\right)} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4+2n}{2} = 5 \Rightarrow n = 3$$

Logo, devemos ter $m = \frac{3}{2}$ e $n = 3$.

38. **a.** Uma característica comum entre as coordenadas do vértice das duas funções é que $x_V = 0$.

b. Temos: $h(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ e $b = 0$.

Assim: $x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = 0$

Para encontrar y_V, basta calcular $f(x_V)$. Nesse caso:

$h(0) = a \cdot 0^2 + c \Rightarrow h(0) = c$

Portanto, o vértice tem coordenadas $(0, c)$.

39. **a.** $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$

Como $a > 0$, o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima. Portanto, a função tem valor mínimo.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[7^2 - 4\cdot 2\cdot(-4)]}{4\cdot 2} =$$

$$= -\frac{81}{8}$$

Assim, $-\frac{81}{8}$ é o mínimo da função f.

b. $h(x) = -\sqrt{5}\,x^2 - 5x + 1$

Como $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo. Portanto, a função tem valor máximo.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} =$$

$$= \frac{-\left[(-5)^2 - 4\cdot\left(-\sqrt{5}\right)\cdot 1\right]}{4\cdot\left(-\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{5\sqrt{5}+4}{4}$$

Assim, $\frac{5\sqrt{5}+4}{4}$ é o valor máximo da função h.

c. $n(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4}$

Como $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima. Portanto, a função tem valor mínimo.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} =$$

$$= \frac{-\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right]}{4\cdot\frac{1}{4}} = \frac{7}{18}$$

Assim, $\frac{7}{18}$ é o valor mínimo da função n.

40. **a.** $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(25-4)}{4\cdot 1} = -\frac{21}{4}$

A concavidade está voltada para cima; portanto, y_V é ponto de mínimo. Então:

$\mathrm{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geqslant -\frac{21}{4}\right\}$

b. $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(9+56)}{4\cdot(-2)} = \frac{65}{8}$

A concavidade está voltada para baixo; portanto, y_V é ponto de máximo. Então:

$\mathrm{Im}(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \leqslant \frac{65}{8}\right\}$

c. $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(0+96)}{4\cdot(-3)} = 8$

A concavidade está voltada para baixo; portanto, y_V é ponto de máximo. Então:

$\mathrm{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 8\}$

41. **a.** A imagem indica que $y \leqslant 16$; então, concluímos que a função tem valor máximo.

b. Se a função tem valor máximo, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

c. $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = 16$

$-\Delta = 64a$

$-(64 - 48a) = 64a$

$a = -4$

d. $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

$g(x) = -4x^2 + 8x + 12$

$x_V = \frac{-8}{-8} = 1$ e $y_V = 16$

Logo, $V(1, 16)$.

42. $f(x) = 3x^2 + 2mx + m$

Se $\frac{4}{3}$ é o valor mínimo da função, então a parábola tem concavidade voltada para cima e $y_V = \frac{4}{3}$. Assim:

$\frac{4}{3} = \frac{-\Delta}{4a}$

$\frac{4}{3} = \frac{-[(2m)^2 - 4\cdot 3\cdot m]}{4\cdot 3}$

$\frac{4}{3} = \frac{-4m^2 + 12m}{12}$

$m^2 - 3m + 4 = 0$

O discriminante dessa equação é -7, ou seja, é negativo. Logo, não existe m real tal que $\frac{4}{3}$ seja o valor mínimo de f.

43. Como os vértices das parábolas são simétricos em relação aos eixos, temos:

$V_g = \left(2, \frac{3}{2}\right)$; $V_f = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$;

$V_h = \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ e $V_i = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$

Medida da distância entre V_g e V_i:

$\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

Medida da distância entre V_g e V_f:

$2 + 2 = 4$

Portanto: $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h = 3 \cdot 4 = 12$

44. **a.** $y_V = 5$ (valor máximo atingido)

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

Mas, como $c = 0$, temos:

$y_V = \frac{-b^2}{4a} = 5 \Rightarrow -b^2 = 20a \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = -20a \quad$ (I)

$x_V = 1$ (medida do tempo para atingir a medida da altura máxima)

$x_V = \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a \quad$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$(-2a)^2 = -20a \Rightarrow 4a^2 + 20a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a \cdot (a + 5) = 0 \Rightarrow$

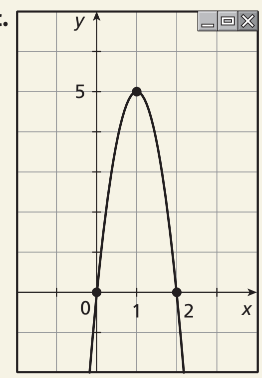
$\Rightarrow a = -5$ ou $a = 0$ (não serve)

Portanto, $a = -5$ e $b = 10$, e a lei dessa função é $h(t) = -5t^2 + 10t$.

b. $h(2) = -5 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 = 0$

A medida da altura é 0 m.

c.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

d. Pelo gráfico, percebemos que a medida de tempo de subida é igual à medida de tempo de descida.

45. **a.** O custo de produção de 100 t de balas é dado por:

$c(100) = \frac{100^2}{10.000} - \frac{100}{10} + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow c(100) = 21$

Logo, o custo é igual a R$ 21,00 por quilograma.

b. Da mesma forma:

$c(200) = \frac{200^2}{10.000} - \frac{200}{10} + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow c(200) = 14$

Logo, o custo é igual a R$ 14,00 por quilograma.

c. Espera-se que os estudantes percebam que essa afirmação é falsa, pois o custo da produção de pacotes de um quilograma de balas está relacionado com o número de toneladas de balas produzidas por meio de uma função quadrática.

d. Como a função que determina o custo é quadrática, com $a > 0$, o custo mínimo é dado por x_V.

Assim:

$$x_V = \frac{-\left(-\frac{1}{10}\right)}{2 \cdot \frac{1}{10.000}} \Rightarrow x_V = 500$$

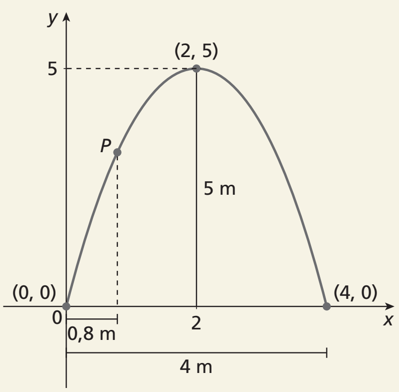
Logo, o custo mínimo, por quilograma, é obtido quando se produzem 500 toneladas de balas.

e. O valor do custo mínimo é dado por:

$$c(500) = \frac{500^2}{10.000} - \frac{500}{10} + 30 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c(500) = 5$$

Logo, o custo mínimo é igual a R$ 5,00.

46. De acordo com os dados apresentados, podemos estabelecer um sistema de eixos para o gráfico com as seguintes informações:



Tendo as coordenadas do vértice, podemos escrever as igualdades

$$x_V = 2 = \frac{-b}{2a} \text{ e } y_V = 5 = \frac{-\Delta}{4a},$$

e delas obtemos:
$b = -4a$ (I) e $-(b^2 - 4ac) = 20a$.
Como $c = 0$, já que essa é a ordenada quando o gráfico intercepta o eixo y, a segunda igualdade passa a ser $-b^2 =$ $= 20a$ (II).

Substituindo a equação (I) na equação (II), obtemos: $-(-4a)^2 = 20a \Rightarrow$ $\Rightarrow 16a^2 + 20a = 0 \Rightarrow 4a(4a + 5) =$ $= 0 \Rightarrow a = 0$ (não convém) ou $a = -\frac{5}{4}$

Assim, encontramos também $b = 5$ e temos a função $f(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 5x$.
Calculamos, então:

$$f(0{,}8) = -\frac{5}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 5 \cdot \frac{4}{5} =$$
$$= -\frac{4}{5} + 4 = 3{,}2$$

Alternativa **d**.

47. Se f é quadrática, assume valor máximo igual a 16, e é simétrica em relação ao eixo das ordenadas, representando-a por $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos afirmar que $y_V = c = 16$ e $b = 0$.
Dada a simetria do gráfico, e como a medida da distância entre os pontos de cruzamento do gráfico de f com o eixo das abscissas é igual a 8, então as raízes são $x_1 = -4$ e $x_2 = 4$.
Como $f(4) = 0$, temos
$(4^2) \cdot a + 4 \cdot 0 + 16 = 0 \Rightarrow 16a = -16$
$\Rightarrow a = -1$
Portanto, $f(x) = -x^2 + 16$
Alternativa **c**.

48. A arrecadação diária, em real, a cada x reais que ela reduzir no preço, é:

$f(x) = (200 + 100 \cdot x) \cdot (10 - x)$
$f(x) = 2.000 - 200x + 1.000x - 100x^2$
$f(x) = -100x^2 + 800x + 2.000$

Assim, a representação gráfica da arrecadação é uma parábola com concavidade voltada para baixo. Logo, a arrecadação máxima corresponde à ordenada do vértice da parábola.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} =$$
$$= \frac{-[800^2 - 4 \cdot (-100) \cdot 2.000]}{4 \cdot (-100)}$$
$$y_V = \frac{-1.440.000}{-400} = 3.600$$

A arrecadação máxima é R$ 3.600,00.
Alternativa **c**.

49. A arrecadação é máxima para $x = x_V$.

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-800}{2 \cdot (-100)} = 4$$

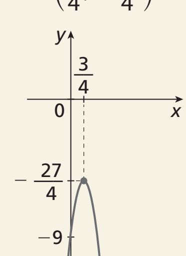
Portanto, a arrecadação é máxima quando a dona da lanchonete reduzir 4 reais no preço, ou seja, vender o combo por R$ 6,00.

50. Resposta pessoal.

51. a. $f(x) = -4x^2 + 6x - 9$
Zeros da função: não há, pois $\Delta = -108 < 0$.
Coeficiente c: -9

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-4)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$
$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-108)}{4 \cdot (-4)} =$$
$$= -\frac{108}{16} = -\frac{27}{4}$$

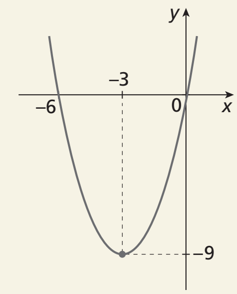
Vértice: $\left(\frac{3}{4}, -\frac{27}{4}\right)$



b. $g(x) = x^2 + 6x$
Zeros da função: -6 e 0
Coeficiente c: 0

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 1} = -3$$
$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot 1} = -9$$

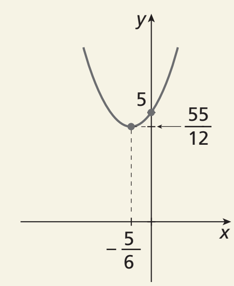
Vértice: $(-3, -9)$



c. $h(x) = \frac{3x^2}{5} + x + 5$
Zeros da função: não há, pois $\Delta = -11 < 0$.
Coeficiente c: 5

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{3}{5}} = -\frac{5}{6}$$
$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-11)}{4 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{55}{12}$$

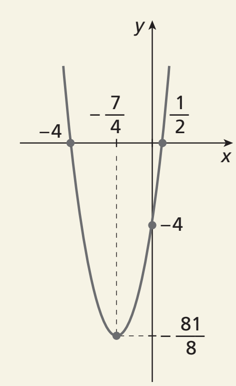
Vértice: $\left(-\frac{5}{6}, \frac{55}{12}\right)$



d. $i(x) = 2x^2 + 7x - 4$
Zeros da função: -4 e $\frac{1}{2}$
Coeficiente c: -4

$$x_V = \frac{-b}{2a} = -\frac{7}{4}$$
$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{81}{8}$$

Vértice: $\left(-\frac{7}{4}, -\frac{81}{8}\right)$



e. $j(x) = x^2 + 3$
Zeros da função: não há, pois $\Delta = -12 < 0$.

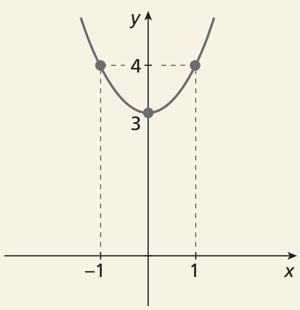
Coeficiente c: 3

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2} = 0$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-12)}{4} = 3$

Até agora temos apenas o vértice $V(0, 3)$.

Nesse caso, vamos determinar as coordenadas de mais dois pontos, $j(1)$ e de seu simétrico $j(-1)$: $j(1) = j(-1) = 4$. Logo, a parábola passa pelos pontos $(1, 4)$ e $(-1, 4)$.



f. $l(x) = -2x^2 - 2$

Zeros da função: não há, pois $\Delta = -16 < 0$.

Coeficiente c: -2

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(-2)} = 0$

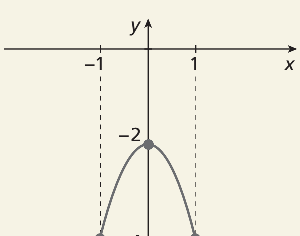
$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-16)}{4(-2)} = -2$

Até agora temos apenas o vértice $V(0, -2)$.

Vamos determinar as coordenadas de mais dois pontos, $l(1)$ e de seu simétrico $l(-1)$:

$l(1) = l(-1) = -4$

Logo, a parábola passa pelos pontos $(1, -4)$ e $(-1, -4)$.



52. a. A trajetória é um arco de parábola com a concavidade voltada para baixo; logo, tem um ponto de máximo que é a ordenada do vértice.

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} =$

$= \frac{-\left[7^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot 1\right]}{4 \cdot (-0{,}5)} = 25{,}5$

A medida de altura máxima é 25,5 metros.

b. Quando a bola está no chão a sua medida de altura h é zero.

$h = 0 \Rightarrow -0{,}5x^2 + 7x + 1 = 0$

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot 1}}{2 \cdot (-0{,}5)} \simeq$

$\simeq \frac{-7 \pm 7{,}14}{-1}$

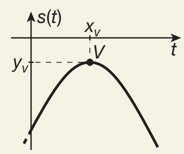
$x_1 \simeq -0{,}14$ (não serve)

$x_2 \simeq 14{,}14$

c. A bola cairia no chão a, aproximadamente, 14,14 m da linha de fundo do sacador. Logo, a bola cairia no lado da quadra adversária, pois 9 m < 14,14 m < 18 m.

53. O vértice da parábola coincide com a intersecção dos eixos x e y; portanto, as coordenadas do vértice são $x = 0$ e $y = 0$, ou seja, $V(0, 0)$.

54. a. Resposta possível:



b. Neste gráfico, a abscissa e a ordenada do vértice indicam, respectivamente, o instante e o local em que o móvel parou e alterou o sentido do movimento.

55. a. Seja x o valor do aumento, em real. Então, a sentença que apresenta o número de usuários em função da quantidade de reais que se aumenta na mensalidade é $60.000 - 400x$.

b. Sendo x o valor do aumento, então a sentença que determina o valor de uma mensalidade, em real, em função do aumento é $75 + x$.

c. Indicando por x o aumento (em real) na mensalidade, sabemos que a empresa perderá $400x$ assinantes. Assim, a função que determina o faturamento mensal (em real) é dada por:

$y = (60.000 - 400x) \cdot (75 + x)$

$y = 4.500.000 + 30.000x - 400x^2$

d. Para determinar o aumento do faturamento máximo, devemos calcular o valor x_V dessa função:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-30.000}{2 \cdot (-400)} = 37{,}5$

Portanto, o aumento deve ser de R$ 37,50 para que a arrecadação mensal seja máxima.

e. Arrecadação máxima: $y_V = f(37{,}50)$

$f(37{,}50) = 4.500.000 + 30.000 \cdot$
$\cdot\, 37{,}50 - 400(37{,}50)^2 = 5.062.500$

A arrecadação máxima, em um mês, será R$ 5.062.500,00.

f. Valor da mensalidade com o aumento:

$p = 75{,}00 + 37{,}50 = 112{,}50$

Número de assinantes para arrecadação máxima:

$\frac{5.062.500}{112{,}50} = 45.000$

Logo, a empresa deverá ter 45.000 assinantes.

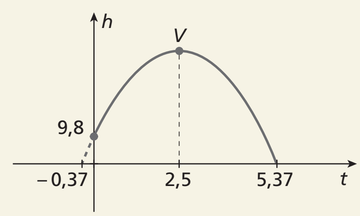
56. Vamos construir o gráfico correspondente à função

$h(t) = -4{,}9t^2 + 24{,}5t + 9{,}8$

Zeros da função: $-0{,}37$ e $5{,}37$ (aproximadamente)

Coeficiente c: 9,8

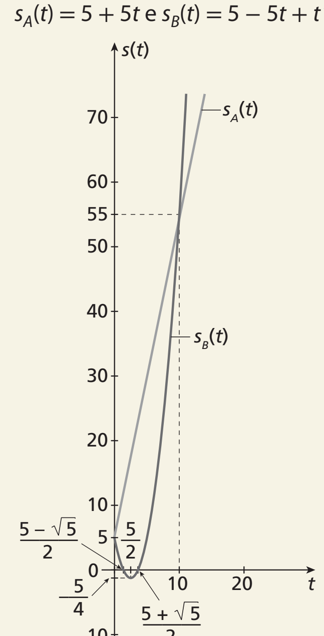
$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-24{,}5}{2 \cdot (-4{,}9)} = 2{,}5$



Portanto, o projétil está subindo no intervalo de 0 s a 2,5 s e descendo no intervalo de 2,5 s a 5,37 s, aproximadamente.

57. Esboçando os gráficos de $s_A(t)$ e $s_B(t)$, para $t \geqslant 0$, em um mesmo plano cartesiano é possível visualizar algumas informações importantes.

$s_A(t) = 5 + 5t$ e $s_B(t) = 5 - 5t + t^2$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

$s_A(t)$ intercepta $s_B(t)$ em dois pontos, correspondentes a $s_A(t) = s_B(t)$. Vamos determiná-los:

$s_A(t) = s_B(t) \Rightarrow 5 + 5t = 5 - 5t + t^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow t^2 - 10t = 0$

Resolvendo essa última equação, encontramos $t = 0$ e $t = 10$, ou seja, os móveis estão no mesmo ponto no instante de partida e 10 s após ela, quando o móvel B passa à frente do móvel A. Logo, para $0 < t < 10$, temos $s_A(t) > s_B(t)$; portanto, o móvel A fica à frente do móvel B no intervalo $]0, 10[$.

58. Considerando a função quadrática $T(x) = ax^2 + bx + c$.

Sabemos que a abscissa do vértice é igual a 8 e como $x_V = -\frac{b}{2a}$, temos:

$8 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -16a$

Sabemos também que $T(1) = 72$ e $T(12) = 105$.

Portanto, podemos escrever:

$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 72 \\ a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + c = 105 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 143a + 11b = 33$

Usando $b = -16a$, temos:

$143a + 11 \cdot (-16a) = 33 \Rightarrow a = -1$

Logo, $b = -16 \cdot (-1) \Rightarrow b = 16$

Usando $T(1) = 72$, $a = -1$ e $b = 16$, temos:

$72 = -1 \cdot (1)^2 + 16 \cdot (1) + c \Rightarrow c = 57$

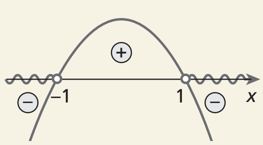
Conclusão: $T(x) = -x^2 + 16x + 57$

Alternativa **a**.

59. a. $\underbrace{-x^2 + 1}_{f(x)} < 0$

Zeros de f:

$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

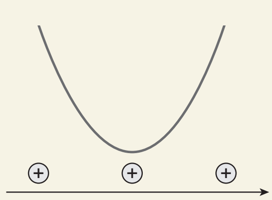


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

b. $\underbrace{2x^2 + 3x + 7}_{f(x)} \leqslant 0$

Zeros de f:

$2x^2 + 3x + 7 = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$, pois $\Delta = -47 < 0$

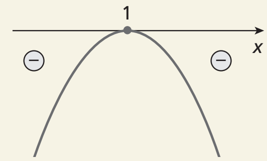


$S = \varnothing$

c. $\underbrace{-x^2 + 2x - 1}_{f(x)} \geqslant 0$

Zeros de f:

$-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$



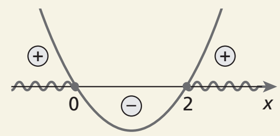
$S = \{1\}$

d. $x^2 + 2(x - 4) - 1 \leqslant 2x^2 - 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x^2 - 2x}_{f(x)} \geqslant 0$

Zeros de f:

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

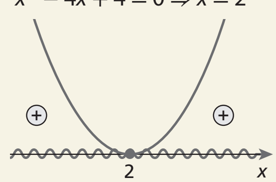


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

e. $x^2 - 4x \geqslant -4 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{f(x)} \geqslant 0$

Zeros de f:

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$



$S = \mathbb{R}$

f. $(-2x + 1)^2 > 0 \Rightarrow -2x + 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

60. $f(x) = 2x^2 + 1$

Zeros de f: não há

Coeficiente c de f: 1

Vértice de f: (0, 1)

$g(x) = x^2 + 2x + 1$

Zero de g: -1

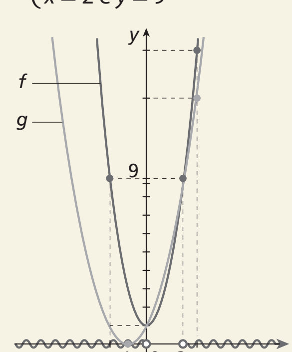
Coeficiente c de g: 1

Vértice de g: $(-1, 0)$

Ponto de encontro entre f e g: $f(x) = g(x)$

$2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ e } y = 1 \\ \text{ou} \\ x = 2 \text{ e } y = 9 \end{cases}$



Do gráfico, temos:

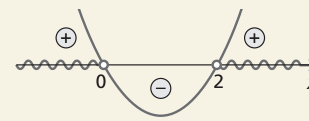
$f(x) > g(x)$, quando $x < 0$ ou $x > 2$, com $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, temos:

$f(x) > g(x) \Rightarrow 2x^2 + 1 > x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x > 0$

$h(x) = x^2 - 2x$ (zeros de h: 0 e 2)



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

Dessa forma, percebemos que as soluções são iguais.

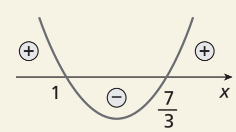
61. Nessa questão, é importante relembrar a necessidade do quadro de sinais para a resolução das inequações-produto e inequações-quociente, assim como a importância de estabelecer o domínio da função para a inequação-quociente.

a. $\overbrace{(3x^2 - 10x + 7)}^{f(x)}\overbrace{(-x^2 + 4x)}^{g(x)} \geqslant 0$

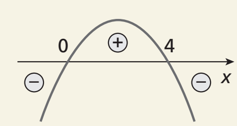
Zeros de f: 1 e $\frac{7}{3}$

Zeros de g: 0 e 4

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

	$x<0$	$0<x<1$	$1<x<\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}<x<4$	$x>4$
f	+	+	−	+	+
g	−	+	+	+	−
$f \cdot g$	−	+	−	+	−

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } \frac{7}{3} \leqslant x \leqslant 4\right\}$

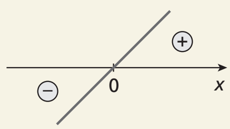
b. $2x^3 + 9x^2 - 35x \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overbrace{x}^{f(x)}\overbrace{(2x^2 + 9x - 35)}^{g(x)} \leqslant 0$

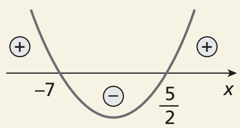
Zero de f: 0

Zeros de g: $\frac{5}{2}$ e -7

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

		-7		0		$\frac{5}{2}$	
f	−		−		+		+
g	+		−		−		+
$f \cdot g$	−		+		−		+

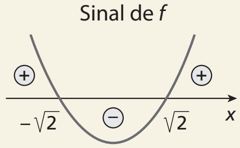
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -7 \text{ ou } 0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$$

c. $x^4 - 4 < 0 \Rightarrow \overbrace{(x^2 - 2)}^{f(x)} \cdot \overbrace{(x^2 + 2)}^{g(x)} < 0$

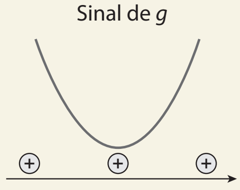
Zeros de f: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

g não tem zeros

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
f	+		−		+
g	+		+		+
$f \cdot g$	+		−		+

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$$

d. $\dfrac{\overbrace{3x + 5}^{f(x)}}{\underbrace{2x^2 - 7x - 4}_{g(x)}} \leqslant 0$

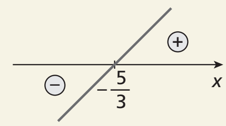
Zero de f: $-\dfrac{5}{3}$

Zeros de g: $-\dfrac{1}{2}$ e 4

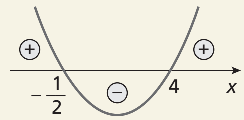
Condição de existência:

$g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq -\dfrac{1}{2}$ e $x \neq 4$

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

		$-\frac{5}{3}$		$-\frac{1}{2}$		4	
f	−		+		+		+
g	+		+		−		+
$\frac{f}{g}$	−		+		−		+

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{5}{3} \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 4\right\}$$

e. $\dfrac{\overbrace{-x^2 + 5x - 4}^{f(x)}}{\underbrace{x^2 - 14x + 48}_{g(x)}} \geqslant 0$

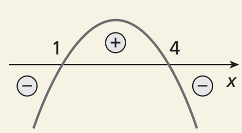
Zeros de f: 1 e 4

Zeros de g: 6 e 8

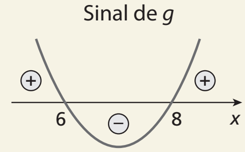
Condição de existência:

$g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 6$ e $x \neq 8$

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

		1		4		6		8	
f	−		+		−		−		−
g	+		+		+		−		+
$\frac{f}{g}$	−		+		−		+		−

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ ou } 6 < x < 8\}$$

f. $-\dfrac{(x - 5)^2}{(-x + 5)^2} > 0 \Rightarrow \dfrac{\overbrace{(x - 5)^2}^{f(x)}}{\underbrace{(-x + 5)^2}_{g(x)}} < 0$

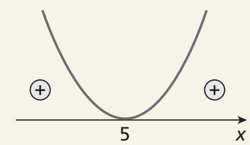
Zero de f: 5

Zero de g: 5

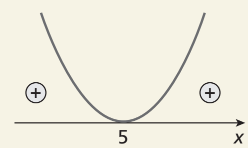
Condição de existência:

$g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

		5	
f	+		+
g	+		+
$\frac{f}{g}$	+		+

$S = \varnothing$

62. a. $-\dfrac{6}{x^2 - 4} \leqslant 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{6}{x^2 - 4} - 2 \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-6 - 2(x^2 - 4)}{x^2 - 4} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-6 - 2x^2 + 8}{x^2 - 4} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\overbrace{2 - 2x^2}^{f(x)}}{\underbrace{x^2 - 4}_{g(x)}} \leqslant 0$

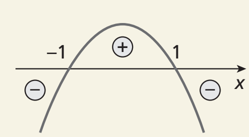
Zeros de f: -1 e 1

Zeros de g: -2 e 2

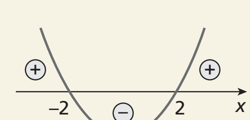
Condição de existência:

$g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ e $x \neq 2$

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

	$x<-2$	$-2<x<-1$	$-1<x<1$	$1<x<2$	$x>2$
f	−	−	+	−	−
g	+	−	−	−	+
$\frac{f}{g}$	−	+	−	+	−

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x > 2\}$

b. $\frac{1}{-x} < \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2 + 2 + 2x}{2x} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\overbrace{x^2 + 2x + 2}^{f(x)}}{\underbrace{2x}_{g(x)}} > 0$

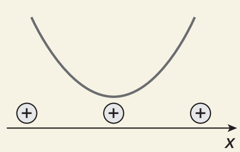
f não tem zeros

Zero de g: 0

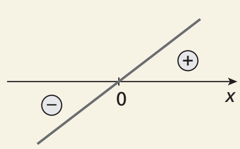
Condição de existência:

$g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

	$x<0$	$x>0$
f	+	+
g	−	+
$\frac{f}{g}$	−	+

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

63. $\frac{\overbrace{(2x+8)}^{f(x)}\overbrace{(-x+3)}^{g(x)}}{\underbrace{-x^2+1}_{h(x)}} \leqslant 0$

Zero de f: −4

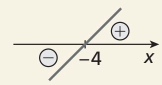
Zero de g: 3

Zeros de h: −1 e 1

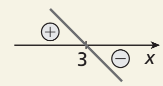
Condição de existência:

$h(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1$

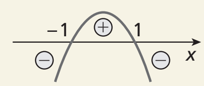
Sinal de f



Sinal de g



Sinal de h



Quadro de sinais

	$x<-4$	$-4<x<-1$	$-1<x<1$	$1<x<3$	$x>3$
f	−	+	+	+	+
g	+	+	+	+	−
h	−	−	+	−	−
$\frac{f \cdot g}{h}$	+	−	+	−	+

Assim, temos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x < -1$ ou $1 < x \leqslant 3\}$; portanto, o menor número natural que satisfaz a inequação é 2.

64. a. $f(x) = ax + b$ e o gráfico mostra que $f(2) = 0$ e $f(0) = 1$. Então:

$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Portanto, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

$g(x) = ax^2 + bx + c$ e o gráfico mostra que $g(2) = 0$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$ e $g(0) = 4$, ou seja, $c = 4$. Então:

$g(x) = ax^2 + bx + 4$

$g(2) = 4a + 2b + 4 = 0$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 4 = \frac{9}{2}$

$\begin{cases} 4a + 2b = -4 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = \frac{9}{2} - 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -2 \\ a + 2b = 2 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$a = -2$ e $b = 2$

Portanto, $g(x) = -2x^2 + 2x + 4$.

b. Os gráficos interceptam-se em $f(x) = g(x)$. Então:

$-\frac{1}{2}x + 1 = -2x^2 + 2x + 4$

$4x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$

Se $x = 2$, temos: $y = 0$

Se $x = -\frac{3}{4}$, temos: $y = \frac{11}{8}$

Portanto, os gráficos interceptam-se em (2, 0) e $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{8}\right)$.

c. Sabemos que $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ para $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ ou $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) \leqslant 0$.

Observando o gráfico, temos $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ em $[-1, 2]$ e $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) \leqslant 0$ em $[2, +\infty[$.

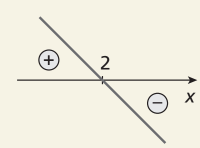
Logo, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ se $x \in \mathbb{R}$ e $x \geqslant -1$.

d. $\overbrace{\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)}^{f(x)}\overbrace{(-2x^2 + 2x + 4)}^{g(x)} \geqslant 0$

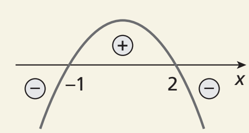
Zero de f: 2

Zeros de g: −1 e 2

Sinal de f



Sinal de g



Quadro de sinais

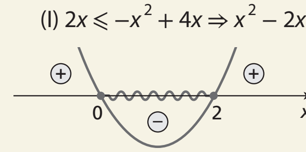
	$x<-1$	$-1<x<2$	$x>2$
f	+	+	−
g	−	+	−
$f \cdot g$	−	+	+

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$

Como previsto no **item c**, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ para valores reais de $x \geqslant -1$.

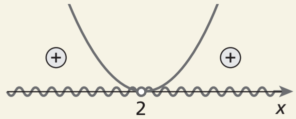
65. a. $\underbrace{2x \leqslant \overbrace{-x^2 + 4x}^{}}_{(\text{I})}\overbrace{< 4}^{(\text{II})}$

(I) $2x \leqslant -x^2 + 4x \Rightarrow x^2 - 2x \leqslant 0$

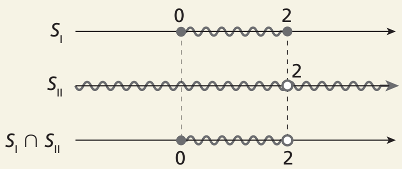


$S_{\text{I}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

(II) $-x^2 + 4x < 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 0$



$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$



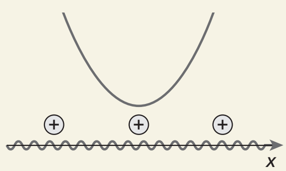
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\}$

b. $\underbrace{-4 < \overbrace{\dfrac{x^2 + 8x + 16}{2}}^{\text{(II)}}}_{\text{(I)}} < 8$

(I) $\dfrac{x^2 + 8x + 16}{2} > -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 8x + 24 > 0$

$f(x) = x^2 + 8x + 24$ (f não tem zeros)

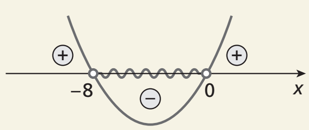


$S_I = \mathbb{R}$

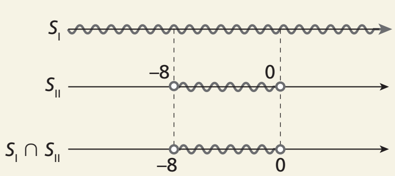
(II) $\dfrac{x^2 + 8x + 16}{2} < 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 8x < 0$

$g(x) = x^2 + 8x$ (zeros de g: -8 e 0)



$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$

c. $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geqslant 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 2x + 8 < 0 & \text{(II)} \end{cases}$

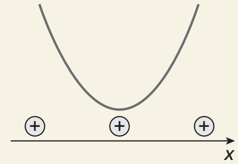
$f(x) = x^2 - 2x - 8$ (zeros de f: -2 e 4)

$g(x) = x^2 - 2x + 8$ (g não tem zeros)

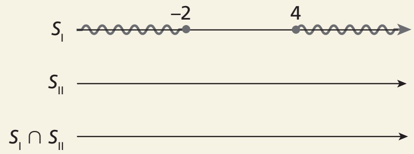
Sinal de f

$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

Sinal de g



$S_{II} = \varnothing$



$S = \varnothing$

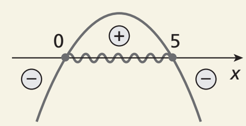
d. $\begin{cases} -x^2 + 5x \geqslant 0 \\ x^2 - 4x \geqslant x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 5x \geqslant 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 5x \geqslant 0 & \text{(II)} \end{cases}$

$f(x) = -x^2 + 5x$ (zeros de f: 0 e 5)

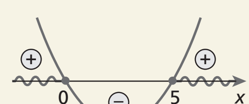
$g(x) = x^2 - 5x$ (zeros de g: 0 e 5)

Sinal de f

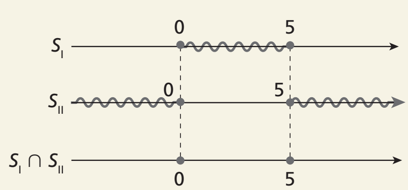


$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 5\}$

Sinal de g

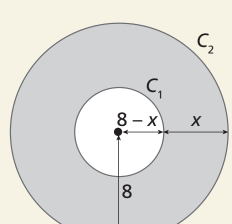


$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 5\}$



$S = \{0, 5\}$

66. A medida da área de um círculo com raio de medida de comprimento r é πr^2.
Pela figura, temos:
C_1: círculo de raio de medida $8 - x$
C_2: círculo de raio de medida 8



a. A área $A(x)$ é $A_{C_2} - A_{C_1}$.

$A(x) = \pi \cdot 8^2 - \pi \cdot (8 - x)^2$

$A(x) = 64\pi - \pi \cdot (64 - 16x + x^2)$

$A(x) = 64\pi - 64\pi + 16\pi x - \pi x^2$

$A(x) = 16\pi x - \pi x^2$

b. Devemos resolver a inequação:

$28\pi < 16\pi x - \pi x^2 < 65\pi \Rightarrow$

$\underbrace{28 < \overbrace{16x - x^2}^{\text{(II)}}}_{\text{(I)}} < 65$

Além disso, devemos ter:

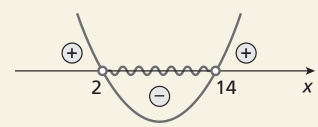
$0 < x < 8$ (III)

(I) $28 < 16x - x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 16x + 28 < 0$

$f(x) = x^2 - 16x + 28$ (zeros de f: 14 e 2)

Sinal de f



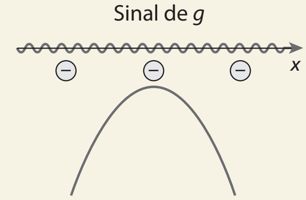
$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 14\}$

(II) $16x - x^2 < 65 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2 + 16x - 65 < 0$

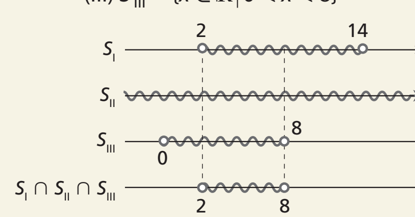
$g(x) = -x^2 + 16x - 65$ (g não tem zeros)

Sinal de g



$S_{II} = \mathbb{R}$

(III) $S_{III} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 8\}$



$S = S_I \cap S_{II} \cap S_{III} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 8\}$

Logo, x deve estar entre 2 e 8 para que a medida da área $A(x)$ esteja entre 28π e 65π.

67. a. Observando os gráficos, percebemos que:

- $f(x) > 0$ para $x > 4$
- $g(x) > 0$ para $-2 < x < 1$ ou $x > 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b. Observando os gráficos, percebemos que:

- $f(x) < 0$ para $x < 4$ e $x \neq 2$
- $g(x) < 0$ para $x < -2$ ou $1 < x < 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

c. Observando os gráficos, percebemos que:

- $f(x) < 0$ para $x < 4$ e $x \neq 2$
- $g(x) > 0$ para $-2 < x < 1$ ou $x > 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

d. Observando os gráficos, percebemos que:

- $f(x) > 0$ para $x > 4$
- $g(x) < 0$ para $x < -2$ ou $1 < x < 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos $S = \varnothing$.

68. a. $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$

Devemos ter: $\underbrace{x^2 - 4x}_{f(x)} \neq 0$

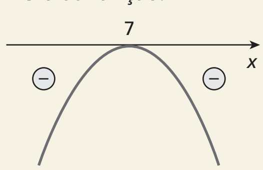
Zeros da função: $x = 4$ ou $x = 0$

Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 4\}$.

b. $y = \sqrt{-x^2 + 14x - 49}$

Devemos ter: $\underbrace{-x^2 + 14x - 49}_{f(x)} \geqslant 0$

Zero da função: $x = 7$

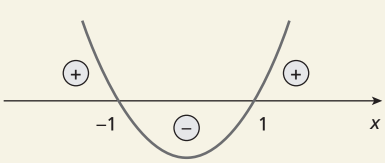


Portanto, $D = \{7\}$.

c. $y = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Devemos ter: $\underbrace{x^2 - 1}_{f(x)} > 0$

Zeros da função: $x = \pm 1$

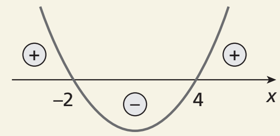


Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

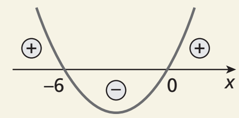
d. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 6x}}$

Devemos ter: $\dfrac{\overbrace{x^2 - 2x - 8}^{f(x)}}{\underbrace{x^2 + 6x}_{g(x)}} \geqslant 0$

(I) $f(x) = x^2 - 2x - 8$ (-2 e 4 são os zeros de f):

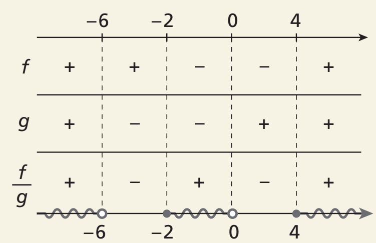


(II) $g(x) = x^2 + 6x$ (0 e -6 são os zeros de g):



Note que 0 e -6 não fazem parte do domínio da função, pois $g(x) \neq 0$.

Quadro de sinais



Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } -2 \leqslant x < 0 \text{ ou } x \geqslant 4\}$.

69. Como a função de lei $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ tem índice ímpar, temos como única restrição que o denominador de $\dfrac{1}{x}$ não pode ser igual a zero.

Logo, $x \neq 0$.

Portanto, a função cuja lei é $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ não está definida para $x = 0$.

70. a. $f(x) = \dfrac{-3}{(x^2 - 2x)(x - 5)}$

Devemos ter:

$(x^2 - 2x)(x - 5) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \neq 0 \\ x - 5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ e } x \neq 2 \\ x \neq 5 \end{cases}$

A função f não está definida para $x = 0$, $x = 2$ e $x = 5$, ou seja, seu domínio é $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 2, 5\}$.

b. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{(x - 3) \cdot (x^2 - x)}$

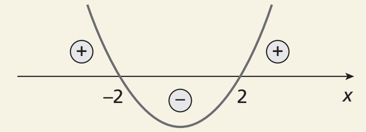
Devemos ter:

$x^2 - 4 \geqslant 0$ (I) e

$(x - 3) \cdot (x^2 - x) \neq 0$ (II)

(I) $\underbrace{x^2 - 4}_{f(x)} \geqslant 0$

Zeros de f: -2 e 2

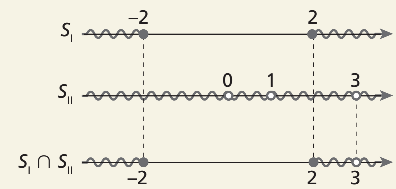


$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

(II) $(x - 3) \cdot (x^2 - x) \neq 0$

$\begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ x^2 - x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases}$

$S_{II} = \mathbb{R} - \{0, 1, 3\}$



Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2 \text{ e } x \neq 3\}$.

c. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x^2}$

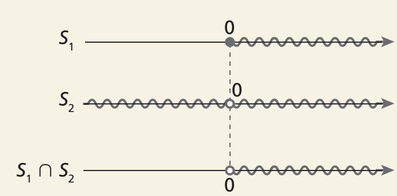
Devemos ter $x^2 \geqslant 0$ (numerador) e $x^2 \neq 0$ (denominador). A primeira condição é verdadeira para qualquer x real, enquanto a segunda condição é satisfeita para $x \neq 0$.

Logo, o domínio da função g é $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$.

d. $i(x) = \dfrac{\frac{\sqrt{x}}{x}}{\frac{2}{3}}$

Devemos ter:

- $x \geqslant 0$ (numerador); então: $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
- $x \neq 0$ (denominador); então: $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$



Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

71. a. Analogamente ao que foi feito na **atividade 67**, vamos observar o gráfico para encontrar as soluções das inequações.

(I) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} \geqslant 0$

Pelo gráfico, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 2 \text{ ou } x > 4\}$

(II) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} < 0$

Pelo gráfico, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

b. Percebemos que no gráfico a função f não está definida para a abscissa $x = 4$; assim, $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$.

72. Condição de existência:

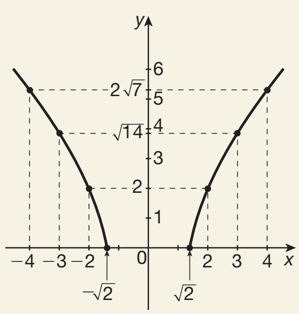
$2x^2 - 4 \geqslant 0 \Rightarrow 2x^2 \geqslant 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \geqslant 2 \Rightarrow x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $x \geqslant \sqrt{2}$

Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\sqrt{2} \text{ ou } x \geqslant \sqrt{2}\right\}$.

$$y = \sqrt{2x^2 - 4}$$

x	$y = f(x)$
$-\sqrt{2}$	0
$\sqrt{2}$	0
2	2
-2	2
3	$\sqrt{14}$
-3	$\sqrt{14}$
4	$2\sqrt{7}$
-4	$2\sqrt{7}$



Para finalizar o capítulo 5

Autoavaliação

Q1. Dada uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, se o coeficiente a de x^2 for nulo, então a lei da função será equivalente a $y = bx + c$, que não representa uma função quadrática. Logo, devemos ter o coeficiente de x^2 não nulo.
Alternativa **c**.

Q2. Para a concavidade da parábola estar voltada para cima, devemos ter:
$-m + 1 > 0 \Rightarrow m < 1$
Alternativa **b**.

Q3. Os zeros da função $y = -x^2 + 9$ são as raízes da equação $-x^2 + 9 = 0$. Logo:
$-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = +3$ ou $x = -3$
Portanto, os zeros da função são 3 e -3.
Alternativa **c**.

Q4. A função dada por $y = x^2 + \sqrt{3}$ tem $a = 1 > 0$; logo, seu gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima.
Além disso, temos:
$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = -4\sqrt{3} < 0$
Como $\Delta < 0$, a parábola não corta o eixo x; então, todos os pontos dela estão acima desse eixo. Portanto, os valores de y são sempre positivos.
Alternativa **d**.

Q5. Analisando o gráfico, temos:

a. Falsa, pois $f(x_1) = f(x_2)$.

b. Falsa, pois $f(x_1) = f(x_2)$.

c. Verdadeira, pois $f(x_V) = y_V > f(x_2)$.

d. Falsa, pois $f(x_V) > f(x_1)$.

Alternativa **c**.

Q6. A função dada por $y = x^2 - 4x + 3$ tem $a = 1 > 0$; logo, tem um valor mínimo que é a ordenada -1 do vértice.
Logo, o conjunto imagem da função é $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$.
Alternativa **b**.

Q7. $s(t) = 4t - 2t^2$. Observa-se que a concavidade da parábola está voltada para baixo.
O instante em que o carro para e altera o sentido do movimento é a abscissa (t) do vértice da parábola.
$t_V = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-4}{2(-2)} = 1$
Alternativa **d**.

Q8. Considerando um retângulo de dimensões x e y, então:
$2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 50 - x$
Cálculo da área:
$x \cdot y = x(50 - x) = 50x - x^2$
Logo, $S(x) = 50x - x^2$.
A medida da área é máxima para x_V:
$x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{50}{2(-1)} = 25$
$y_V = S(x_V) = 50 \cdot 25 - 25^2 = 625$
Alternativa **a**.

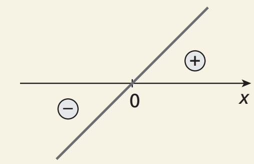
Q9. $\dfrac{x^2 - 1}{x} \leqslant 0$

- $f(x) = x^2 - 1$
  Zeros de f: 1 e -1

Sinal de f

- $g(x) = x$
  Zero de g: 0

Sinal de g



Condição de existência: $x \neq 0$

Quadro de sinais

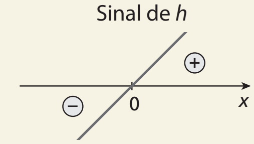
	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
f	+	−	−	+
g	−	−	+	+
$\dfrac{f}{g}$	−	+	−	+

Portanto,
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } 0 < x \leqslant 1\}$.
Alternativa **a**.

Q10. $\dfrac{x}{x^2 + 2x - 15} \geqslant 0$

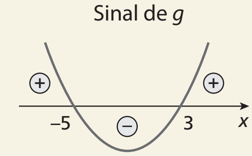
- $h(x) = x$
  Zero de h: 0

Sinal de h



- $g(x) = x^2 + 2x - 15$
  Zeros de g: 3 e -5

Sinal de g



Condição de existência: $x \neq -5$ e $x \neq 3$

Quadro de sinais

	$x < -5$	$-5 < x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
h	−	−	+	+
g	+	−	−	+
$\dfrac{h}{g}$	−	+	−	+

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant 0 \text{ ou } x > 3\}$.
Alternativa **b**.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

As resoluções/orientações das atividades das seções *Educação midiática – Fato ou fake?* e *Pesquisa e ação – Vídeodocumentário* encontram-se nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

Avaliação diagnóstica 2

1. $(2^{-2})^3 \cdot (3^0 \cdot 2)^5 = 2^{-2\cdot 3} \cdot (1 \cdot 2)^5 =$
$= 2^{-6} \cdot 2^5 = 2^{-6+5} = 2^{-1}$
Alternativa **d**.

2. Esse sistema pode ser resolvido pelo método da substituição:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11 \quad \text{(I)} \\ x - 2y = 6 \Rightarrow x = 6 + 2y \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo a equação II em I, tem-se:
$2 \cdot (6 + 2y) - 3y = 11 \Rightarrow 12 + y = 11 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 11 - 12 \Rightarrow y = -1$
Substituindo o valor de y na equação II:
$x = 6 + 2y \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 6 - 2 \Rightarrow x = 4$
Portanto, o par ordenado $(4, -1)$ é solução do sistema.
Alternativa **c**.

3. Para $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, ao calcular $a_n = 2n - 1$, temos:

- $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1;$
- $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3;$
- $a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5.$

Portanto, a lei de formação $a_n = 2n - 1$ produz a sequência $(1, 3, 5, 7, \ldots)$.
Alternativa **d**.

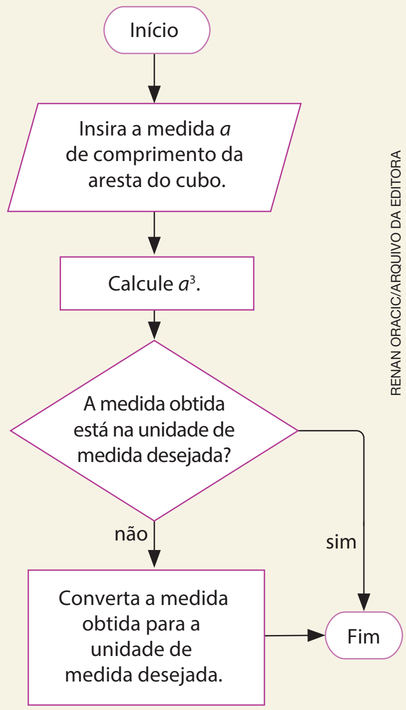
4. A sequência de Fibonacci é uma sequência numérica em que os dois primeiros termos são 1 e os demais, a partir do terceiro, são obtidos por meio da soma dos dois termos anteriores. Assim:

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = 1 + 1 = 2$
$a_4 = 2 + 1 = 3$
$a_5 = 3 + 2 = 5$
$a_6 = 5 + 3 = 8$
$a_7 = 8 + 5 = 13$
$a_8 = 13 + 8 = 21$
Alternativa **c**.

5. A figura foi dividida em 10 partes iguais, sendo que 6 dessas partes foram pintadas. Assim, a porcentagem das partes pintadas é $\frac{6}{10} \times \frac{10}{10} =$
$= \frac{60}{100} = 60\%$.
Alternativa **b**.

6. Após o 1º mês o montante da aplicação será de R\$ 200,00 · 1,05 = = R\$ 210,00. Após o 2º mês, R\$ 210,00 · 1,05 = R\$ 220,50. Após o 3º mês, R\$ 220,50 · 1,05 ≃ R\$ 231,53.
Alternativa **d**.

7. Este é o fluxograma feito por Rebeca:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, fizemos a correspondência A4, B1, C6, D3, E5, F2 entre as figuras e os passos para obter esse fluxograma.
Alternativa **c**.

Capítulo 6 Função exponencial

Atividades propostas

1. a. $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

b. $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) =$
$= -\frac{1}{125}$

c. $0^{10} = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

d. $\left(\frac{8}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{9}{8}\right) \cdot \left(\frac{9}{8}\right) = \frac{81}{64}$

e. $3^0 = 1$

f. $\pi^1 = \pi$

2. a. $10^9 \cdot 10^{-4} = 10^{9+(-4)} = 10^5 =$
$= 100.000$

b. $\frac{13^{19}}{13^{17}} = 13^{19-17} = 13^2 = 169$

c. $(-5)^{15} : (-5)^{12} = (-5)^{15-12} =$
$= (-5)^3 = -125$

d. $2^{-1} \cdot 2^{-2} = 2^{-1+(-2)} =$
$= 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

e. $(10 \cdot 7)^2 = 10^2 \cdot 7^2 = 100 \cdot 49 = 4.900$

f. $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{5^3} = -\frac{27}{125}$

g. $(2^3)^2 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64$

h. $\left((\sqrt{7})^5\right)^0 = (\sqrt{7})^{5\cdot 0} = (\sqrt{7})^0 = 1$

3. A diferença de tempo, em ano, entre o surgimento do *Homo habilis* e o do *Homo erectus* é de aproximadamente:
$2.200.000 - 2.000.000 = 200.000 =$
$= 2 \cdot 10^5$
Alternativa **b**.

4. Não foram utilizadas: início da vida na Terra (4,6 bi de anos); primeiros ancestrais (4 bi de anos) e aparecimento do *Homo sapiens* (entre 400 e 100 mil anos). Resposta pessoal.

5. a. $\sqrt{1{,}69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \sqrt{\frac{13^2}{10^2}} = \frac{13}{10} = 1{,}3$

b. $\sqrt[3]{-1{,}728} = \sqrt[3]{\frac{-1.728}{1.000}} =$
$= \sqrt[3]{\frac{(-12)^3}{10^3}} = \frac{-12}{10} = -1{,}2$

c. $81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$

d. $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{4 \cdot 4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} =$
$= 2\sqrt[3]{2}$

6. a. $121^{0{,}9} : 121^{0{,}4} = 121^{0{,}9-0{,}4} =$
$= 121^{0{,}5} = 121^{\frac{1}{2}} = \sqrt{121} = 11$

b. $(0{,}3)^8 \cdot (0{,}3)^{-7} : (0{,}3)^{-2} =$
$= (0{,}3)^{8+(-7)-(-2)} = (0{,}3)^{8-7+2} =$
$= (0{,}3)^3 = 0{,}027$

c. $\frac{3^{\frac{1}{3}}}{(-3)^2 \cdot 3^{-2}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{9 \cdot \frac{1}{9}} = \sqrt[3]{3}$

d. $\left[(32)^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{2}{25}} = (32)^{\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{25}} = 32^{\frac{1}{5}} =$
$= \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

7. a. $\sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2^2 \cdot 2} =$
$= 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

b. $\sqrt{80} + \sqrt{180} =$
$= \sqrt{2^4 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} =$
$= 2 \cdot 2\sqrt{5} + 2 \cdot 3\sqrt{5} =$
$= 4\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

8. a. $\frac{2}{\sqrt{3} - 3} =$
$= \left(\frac{2}{\sqrt{3} - 3}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 3}\right) =$
$= \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{(\sqrt{3})^2 - 3^2} = \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{3 - 9} =$
$= \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{-6} = \frac{2}{-6}(\sqrt{3} + 3) =$
$= \frac{-\sqrt{3} - 3}{3}$

b. $\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$

$= \left(\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right) =$

$= \dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} - \sqrt{6}\cdot\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} =$

$= \dfrac{\sqrt{12} - \sqrt{18} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2-3} =$

$= \dfrac{\sqrt{2^2\cdot 3} - \sqrt{2\cdot 3^2} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} =$

$= \dfrac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} =$

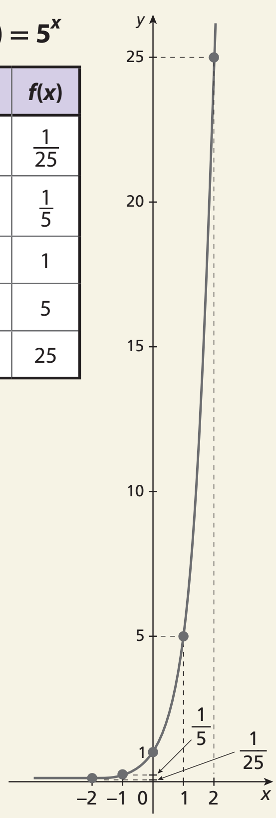
$= \dfrac{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

9. Com o uso de calculadora, sabemos que $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$, ou seja, $5^{\sqrt{2}} \simeq 5^{1{,}4}$. Esse número está no intervalo entre 5^1 e 5^2, ou seja, entre 5 e 25.

10. a. $f(x) = 5^x$

f*(*x*) = 5*ˣ

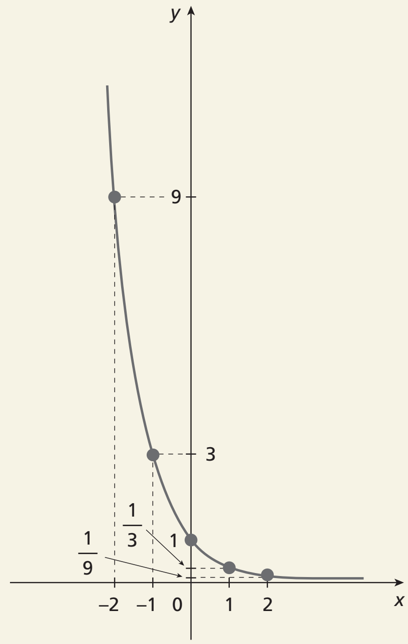
x	*f*(*x*)
−2	$\frac{1}{25}$
−1	$\frac{1}{5}$
0	1
1	5
2	25



b. $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

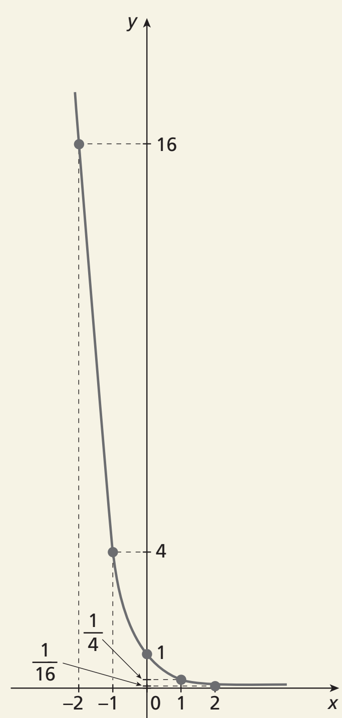
x	*g*(*x*)
−2	9
−1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$



c. $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$$h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

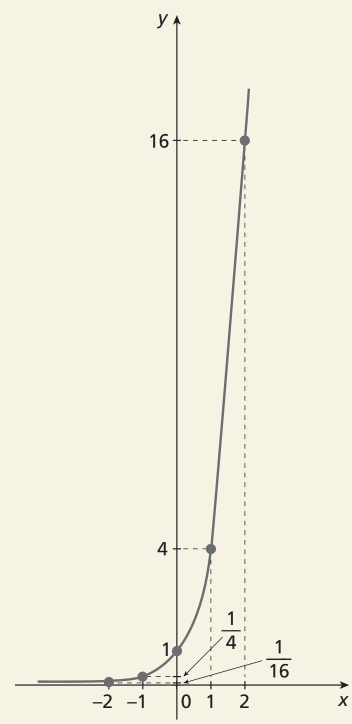
x	*h*(*x*)
−2	16
−1	4
0	1
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$



d. $i(x) = 4^x$

i*(*x*) = 4*ˣ

x	*i*(*x*)
−2	$\frac{1}{16}$
−1	$\frac{1}{4}$
0	1
1	4
2	16



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

11. Analisando as quatro leis, podemos concluir que apenas uma das funções é decrescente, com base entre 0 e 1.

Essa função é a *h*, cuja lei é $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$. Observando os gráficos, apenas o IV é decrescente; logo, no **item c**, a função *h* corresponde ao gráfico IV.

Também poderíamos verificar que:

$h(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 - 1 = 0$

$h(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 1 = 3$

Para analisar as funções *f*, *g* e *i* dadas nos **itens a**, **b** e **d**, respectivamente, podemos encontrar alguns pontos:

a. $f(x) = 3^{x+1}$

$f(-1) = 3^{-1+1} = 1$

$f(0) = 3^{0+1} = 3$

Ou seja, *f* é crescente e passa pelos pontos (−1, 1) e (0, 3). O gráfico correspondente é o III.

b. $g(x) = 2^x + 1$

$g(0) = 2^0 + 1 = 2$

$g(1) = 2^1 + 1 = 3$

Ou seja, g é crescente e passa pelos pontos (0, 2) e (1, 3). O gráfico correspondente é o I.

d. $i(x) = 4^{x-1}$

$i(1) = 4^{1-1} = 1$

$i(0) = 4^{0-1} = \frac{1}{4}$

Ou seja, i é crescente e passa pelos pontos (1, 1) e $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. O gráfico correspondente é o II.

12. O domínio da função não tem nenhuma restrição, então $D(i) = \mathbb{R}$; já a imagem da função é $Im(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$, pois 2^x sempre dará um resultado maior que 0, e somando 1 garantimos que o valor seja maior que 1. Assim, também temos que sua reta assíntota é $y = 1$.

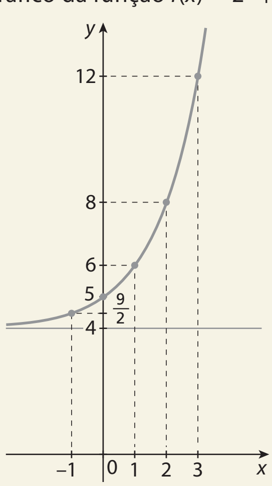
O ponto de intersecção com o eixo y é dado por $i(0) = 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$; assim, temos o ponto (0, 2).

13. Para $f(x) \leqslant -2$, teríamos:

$\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 \leqslant -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 0$

Isso é absurdo, pois $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ é sempre maior que zero.

14. A figura abaixo mostra parte do gráfico da função $f(x) = 2^x + 4$.



Logo, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$.

15. a. $g(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

A base a é $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ $(a > 1)$; então, a função é crescente.

b. $h(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$

A base a é $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}7$ $(0 < a < 1)$; então, a função é decrescente.

c. $i(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$

A base a é $\frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$ $(a > 1)$; então, a função é crescente.

16. Como $a = -b$, temos:

$f(x) = 2^{x+a} + b \Rightarrow f(x) = 2^{x-b} + b$

Pelo gráfico, $f(1) = 2$ e $f(2) = 3$; então:

$f(x) = 2^{x-b} + b \Rightarrow f(1) = 2^{1-b} + b = 2$

$f(2) = 2^{2-b} + b = 3$

Assim:

$$\begin{cases} 2^1 \cdot 2^{-b} + b = 2 \\ 2^2 \cdot 2^{-b} + b = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 \cdot 2^{-b} - b = -2 \\ 4 \cdot 2^{-b} + b = 3 \end{cases}$$

Adicionando as equações do sistema, membro a membro, obtemos:

$2 \cdot 2^{-b} = 1 \Rightarrow 2^{-b} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{-b} = 2^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow -b = -1 \Rightarrow b = 1$

Como $a = -b$, temos $a = -1$. Assim, $a = -1$ e $b = 1$.

17. $f(x) = 5^x$

a. $\frac{f(4)}{f(3)} = \frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5$

b. $\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5$

c. $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{5^2}{5^1} = 5^{2-1} = 5$

d. $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{5^1}{5^0} = 5^{1-0} = 5$

18. Os resultados são todos iguais.

19. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

- $\frac{f(4)}{f(3)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{4-3} = \frac{1}{4}$
- $\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3-2} = \frac{1}{4}$
- $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-1} = \frac{1}{4}$
- $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^1}{\left(\frac{1}{4}\right)^0} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-0} = \frac{1}{4}$

a. Sim, os resultados são sempre iguais à base a da função.

b. Para $f(x) = a^x$, concluímos que: $\frac{f(x)}{f(x-1)} = a$

20. a. $f(n) = 2^{(2^n)} + 1$

$f(1) = 2^{(2^1)} + 1 = 2^2 + 1 = 5$

$f(2) = 2^{(2^2)} + 1 = 2^4 + 1 = 17$

$f(3) = 2^{(2^3)} + 1 = 2^8 + 1 = 257$

Os números 5, 17 e 257 são primos.

b. Espera-se que os estudantes respondam que não, porque não é uma função do tipo $f(x) = a^x$, em que a é um número real maior que zero e $x \in \mathbb{R}$.

21. Resposta pessoal.

22. a. Pelo gráfico, a radioatividade está diminuindo, pois tomando x_1 e x_2 verificamos que:

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

b. O minério não deixará de ser radioativo, porque a curva não intercepta o eixo x.

c. Pelo gráfico, a função é decrescente; então, os possíveis valores de a são elementos do conjunto: $\{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$

23. $M = C \cdot (1 + i)^t$

$M = 20.000{,}00 \cdot (1 + 0{,}12)^3$

$M = 20.000{,}00 \cdot 1{,}12^3$

$M = 20.000{,}00 \cdot 1{,}404928$

$M = 28.098{,}56$

O montante será R$ 28.098,56.

24. a. As batatas saíram do forno em $t = 0$. Logo, a temperatura T era dada por:

$T = 20 + 160 \cdot e^{-6 \cdot 0} =$

$= 20 + 160 \cdot e^0 = 20 + 160 \cdot 1 = 180$

Portanto, $T = 180$ °C.

b. Sabemos que 30 minutos é igual a meia hora. Logo, a temperatura será dada para $t = 0{,}5$.

$T = 20 + 160 \cdot e^{-6 \cdot 0{,}5} =$

$= 20 + 160 \cdot e^{-3} = 20 + 160 \cdot \frac{1}{e^3}$

Com o auxílio de uma calculadora, fazendo $e = 2{,}7$, obtemos aproximadamente 28.

Portanto, $T \simeq 28$ °C.

25. a. Pelo gráfico, $f(0) = 5.000$. Assim, a pesquisa iniciou-se com 5.000 bactérias.

b. Pelo gráfico, $f(6) = 15.000$. Assim, a quantidade após 6 meses foi de 15.000 bactérias.

c. $f(0) = 5.000 \Rightarrow k \cdot a^0 = 5.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 5.000$

$f(6) = 15.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5.000 \cdot a^6 = 15.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^6 = 3 \Rightarrow a = \sqrt[6]{3}$

d. $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant 6\}$;

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 5.000 \leqslant y \leqslant 15.000\}$

e. $f(3) = 5.000 \cdot \left(\sqrt[6]{3}\right)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(3) = 5.000 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(3) \simeq 5.000 \cdot 1{,}73 \Rightarrow f(3) \simeq 8.650$

Logo, após 3 meses, o número de bactérias é, aproximadamente, 8.650.

26. a. $10^x = 1.000 \Rightarrow 10^x = 10^3 \Rightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

b. $(0{,}1)^{2x} = 10 \Rightarrow (10^{-1})^{2x} = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{-2x} = 10^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

c. $(0{,}001)^x = 1.000 \Rightarrow (10^{-3})^x = 10^3 \Rightarrow 10^{-3x} = 10^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$
$S = \{-1\}$

d. $\left(\frac{1}{100}\right)^{2x} = 0{,}0001 \Rightarrow (10^{-2})^{2x} = 10^{-4} \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^{-4x} = 10^{-4} \Rightarrow -4x = -4 \Rightarrow x = 1$
$S = \{1\}$

27. a. $2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$
$S = \{6\}$

b. $(0{,}5)^x = 4^{1-3x} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^2)^{1-3x} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{-x} = 2^{2-6x} \Rightarrow -x = 2 - 6x \Rightarrow x = \frac{2}{5}$
$S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

c. $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x = \frac{1}{128} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 7 \Rightarrow x = 14$
$S = \{14\}$

d. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-10} = \frac{1}{729} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-10} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 10 = 6 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$
$S = \{-4, 4\}$

e. $3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x = -1 \Rightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$
Fazendo $3^x = y$, temos:
$3y^2 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = \frac{1}{3}$
Como $y = 3^x$, vem:
$y = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$
$y = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$
$S = \{-1, 0\}$

f. $11^{2x} + 2 \cdot 11^x = 3 \Rightarrow (11^x)^2 + 2 \cdot 11^x - 3 = 0$
Fazendo $11^x = y$, temos:
$y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -3$
Como $y = 11^x$, vem:
$y = 1 \Rightarrow 11^x = 11^0 \Rightarrow x = 0$
$y = -3 \Rightarrow 11^x = -3 \Rightarrow \nexists\, x$
$S = \{0\}$

28. Como $2^4 < 20 < 2^5$, temos $4 < x < 5$.

29. Porque, para todo $a > 0$ e todo x real, temos $a^x > 0$.

30. a. $2^x = 14$
$8 < 14 < 16 \Rightarrow 2^3 < 2^x < 2^4 \Rightarrow 3 < x < 4$

b. $3^x = 29$
$27 < 29 < 81 \Rightarrow 3^3 < 3^x < 3^4 \Rightarrow 3 < x < 4$

c. $3^{x+1} = 10$
$9 < 10 < 27 \Rightarrow 3^2 < 3^{x+1} < 3^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 < x + 1 < 3 \Rightarrow 1 < x < 2$

d. $2^{x-1} = 100$
$64 < 100 < 128 \Rightarrow 2^6 < 2^{x-1} < 2^7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 < x - 1 < 7 \Rightarrow 7 < x < 8$

31. Em abril, consideramos $x = 4$, logo, calculamos $f(4)$:
$f(4) = 3.000 \cdot (1{,}2)^{4-2} = 3.000 \cdot (1{,}2)^2 = 4.320$
Serão servidas 4.320 refeições.
Alternativa **c**.

32. a. $\begin{cases} 2^{2x+y} = 2^2 \\ 2^{x-y} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 & \text{(I)} \\ x - y = -\frac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Adicionando as equações (I) e (II) membro a membro, temos:
$3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
Substituindo o valor de x em (II), obtemos:
$\frac{1}{2} - y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 1$
Portanto, $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$.

b. $\begin{cases} 3^{x+y} = 3^{-2} \\ 7^{2x} : 7^y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{x+y} = 3^{-2} \\ 7^{2x-y} = 7^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -2 & \text{(I)} \\ 2x - y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Adicionando as equações (I) e (II) membro a membro, temos:
$3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$
Substituindo o valor de x em (I), obtemos:
$y = -2 + \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}$
Portanto, $S = \left\{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$.

33. a. No instante inicial: $t = 0 \Rightarrow m(0) = 2.048$
Assim: $k \cdot 2^{-0{,}5 \cdot 0} = 2.048 \Rightarrow k = 2.048$

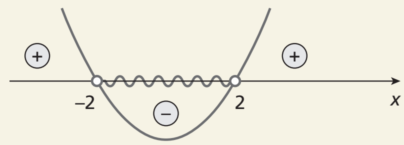
b. Pelo item anterior, temos: $m(t) = 2.048 \cdot 2^{-0{,}5t}$
Logo, para descobrir em quantos minutos a medida da massa decai para 512 gramas, basta resolver a equação a seguir.
$2.048 \cdot 2^{-0{,}5t} = 512 \Rightarrow 2^{-0{,}5t} = \frac{512}{2.048} \Rightarrow 2^{-0{,}5t} = \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{-0{,}5t} = 2^{-2} \Rightarrow -0{,}5t = -2 \Rightarrow t = \frac{2}{0{,}5} \Rightarrow t = 4$
Logo, a medida da massa decai para 512 g em 4 minutos.

34. Dada a equação $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$, tratando $y = 3^x$, podemos reescrevê-la como $y^2 - 12y + 27 = 0$, cujas soluções são $y_1 = 3$ e $y_2 = 9$.
Como $y = 3^x$, temos $3^{x_1} = 3 \Rightarrow x_1 = 1$ e $3^{x_2} = 9 = 3^2 \Rightarrow x_2 = 2$.
A raiz $x = 1$ já havia sido dada no enunciado, então, a outra raiz procurada é $x = 2$.
Alternativa **c**.

35. Para começar, calculamos a quantidade de líquido no início do experimento, ou seja, o valor de $Q(0)$:
$Q(0) = K \cdot 2^{-0{,}1 \cdot 0} = K \cdot 2^0 \Rightarrow Q(0) = K$
Para descobrir em quanto tempo esse volume se reduzirá à metade, devemos encontrar o valor de x para o qual $Q(x) = \frac{K}{2}$.
Assim, fazemos:
$K \cdot 2^{-0{,}1x} = \frac{K}{2} \Rightarrow K \cdot 2^{-0{,}1x} = K \cdot 2^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{-0{,}1x} = 2^{-1} \Rightarrow -0{,}1x = -1 \Rightarrow x = 10$
Levará 10 meses.
Alternativa **d**.

36. Para encontrar o ponto de intersecção dos gráficos, procuramos x tal que $f(x) = g(x)$. Assim:
$\frac{1}{9^{x-1}} = 3^{x+1} \Rightarrow 3^{-2x+2} = 3^{x+1} \Rightarrow -2x + 2 = x + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
Para $x = \frac{1}{3}$, temos:
$f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{1}{3}\right) = 3^{\frac{1}{3}+1} = 3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$
Portanto, o ponto de intersecção dos gráficos é $\left(\frac{1}{3}, 3\sqrt[3]{3}\right)$.

37. a. $6^{x^2+1} < 6^5 \Rightarrow x^2 + 1 < 5 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$

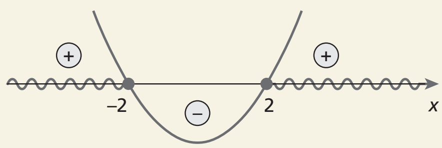


Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$.

b. $\frac{1}{9} \geqslant 3^{x+3} \Rightarrow 3^{-2} \geqslant 3^{x+3} \Rightarrow -2 \geqslant x + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \leqslant -3 - 2 \Rightarrow x \leqslant -5$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$.

c. $(0{,}44)^{x^2-4} \leqslant 1 \Rightarrow (0{,}44)^{x^2-4} \leqslant (0{,}44)^0 \Rightarrow x^2 - 4 \geqslant 0$



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

d. $\sqrt[3]{3^x} > 3^x \cdot 3^8 \Rightarrow 3^{\frac{x}{3}} > 3^{x+8} \Rightarrow \frac{x}{3} > x + 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x > 3x + 24 \Rightarrow -2x > 24 \Rightarrow x < -12$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -12\}$.

38. a. $f(x) = \sqrt{3^x - 243}$

Para existir $f(x)$, devemos ter:
$3^x - 243 \geqslant 0 \Rightarrow 3^x \geqslant 243 \Rightarrow 3^x \geqslant 3^5 \Rightarrow x \geqslant 5$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$.

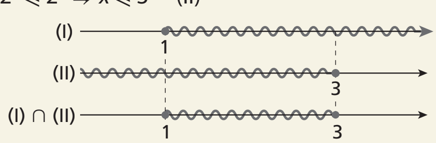
b. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2^x}}$

Para $g(x)$ existir, devemos ter $2^x > 0$, o que é verdade para qualquer x real.

Portanto, $D(g) = \mathbb{R}$.

39. a. $2 \leqslant 2^x \leqslant 2^3$

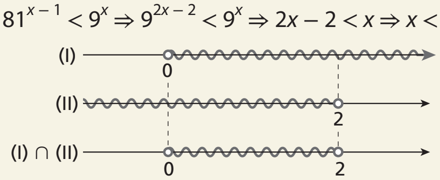
- $2 \leqslant 2^x \Rightarrow 1 \leqslant x \Rightarrow x \geqslant 1$ (I)
- $2^x \leqslant 2^3 \Rightarrow x \leqslant 3$ (II)



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$.

b. $\frac{1}{81} < 81^{x-1} < 9x$

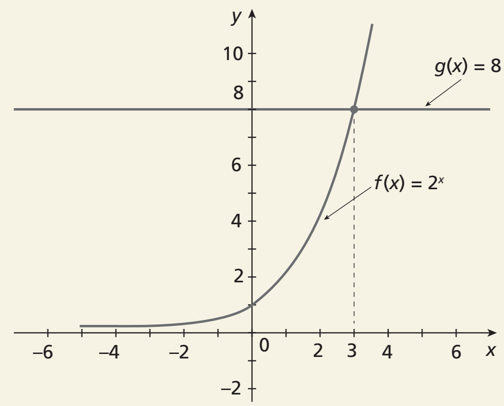
- $\frac{1}{81} < 81^{x-1} \Rightarrow 81^{-1} < 81^{x-1} \Rightarrow -1 < x - 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x > 0$ (I)
- $81^{x-1} < 9^x \Rightarrow 9^{2x-2} < 9^x \Rightarrow 2x - 2 < x \Rightarrow x < 2$ (II)



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$.

40. Espera-se que os estudantes percebam que a inequação estudada tem o sinal invertido em relação à **atividade resolvida R12**, e portanto seu conjunto solução será o complementar do encontrado na atividade resolvida, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$.

41.



a. Para obter a abscissa em que $f(x) = g(x)$, fazemos:
$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$
Logo, $S = \{3\}$.
Podemos observar o ponto de intersecção (3, 8) no gráfico.

b. O gráfico mostra que $f(x) > g(x)$ para $x > 3$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c. O gráfico mostra que $f(x) \leqslant g(x)$ para $x \leqslant 3$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

42. a. Sabemos que g é da forma $g(x) = b^x$. Pelo gráfico, temos:
$g(1) = 3 \Rightarrow b^1 = 3 \Rightarrow b = 3$
Logo, $g(x) = 3^x$.
Sabemos que f é da forma $f(x) = a^{x+k}$. Pelo gráfico, temos:

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{9} \\ f(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{0+k} = \frac{1}{9} \\ a^{-3+k} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^k = \frac{1}{9} & \text{(I)} \\ a^{-3} \cdot a^k = 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$a^{-3} \cdot \frac{1}{9} = 3 \Rightarrow a^{-3} = 27 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^3 = 3^3 \Rightarrow \frac{1}{a} = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Substituindo a por $\frac{1}{3}$ em (I), obtemos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow k = 2$$

Logo: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

b. Sabemos que: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ e $g(x) = 3^x$.

Os gráficos interceptam-se em $f(x) = g(x)$. Então:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 3^x \Rightarrow 3^{-x-2} = 3^x \Rightarrow -x - 2 = x \Rightarrow x = -1$$

Logo, os gráficos interceptam-se em um ponto de abscissa -1. Calculando o valor da ordenada, temos:

$$f(-1) = g(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Portanto, o ponto de intersecção é $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

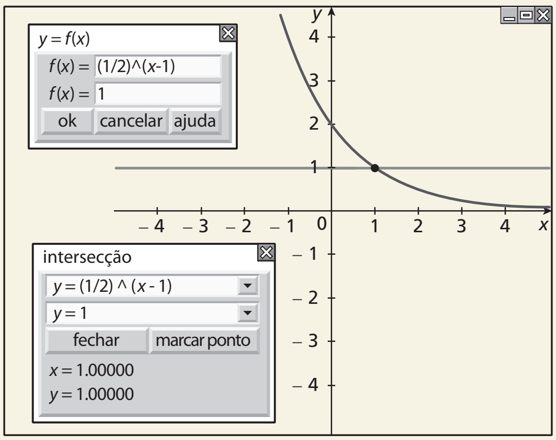
c. O intervalo representado na figura é $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$, que tem início no valor de x do ponto de intersecção dos gráficos: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ e $g(x) = 3^x$

Observando o gráfico, notamos que o intervalo destacado corresponde à parte do gráfico em que a curva azul (função f) está abaixo da curva verde (função g), ou seja, $f(x) < g(x)$.

Logo, temos a inequação: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$

d. Se $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$ tem como solução $x > -1$, a solução complementar ($x \leqslant -1$) pode ser obtida da inequação: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geqslant 3x$

43. Em um *software* de construção de gráficos, escrever a expressão "$\left(\frac{1}{2}\right)$^(x −1)" na janela de equação explícita e clicar em "ok". Depois, escrever "1" na janela de equação explícita e clicar em "ok".
Clicar na função "intersecção" e no botão "marcar o ponto".
A partir da coordenada x do ponto de intersecção, determinar o conjunto solução da inequação.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Na janela de intersecção, vê-se que o ponto de intersecção entre as funções é determinado pelo par ordenado (1, 1). Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

Para finalizar o capítulo 6

Autoavaliação

Q1. $\dfrac{(\sqrt{7})^8}{(\sqrt{7})^6} = (\sqrt{7})^{8-6} = (\sqrt{7})^2 = 7$

Alternativa **a**.

Q2. $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow$ seu inverso é $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Alternativa **c**.

Q3. $\dfrac{2}{\sqrt{8}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Alternativa **c**.

Q4. A sentença $h(x) = \dfrac{1^x}{5}$ não é lei de formação de uma função exponencial, porque, para $h(x) = a^x$, devemos ter $a > 1$ ou $0 < a < 1$ e, nessa função, temos $a = 1$.

Alternativa **c**.

Q5. $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$
Se $x = 0 \Rightarrow f(x) = a^0 = 1$.
Logo, o gráfico passa por (0, 1).

Alternativa **d**.

Q6. A função exponencial $f(x) = \left(\sqrt{11}\right)^x$ é crescente, pois $\sqrt{11} > 1$.

Alternativa **d**.

Q7. $\pi > 1$; portanto, $f(x) = \pi^x$ é uma função exponencial crescente.

Alternativa **b**.

Q8. $P(x) = 1{,}029 \cdot (1 + 0{,}20)^n$
$P(x) = 1{,}029 \cdot (1{,}20)^n$

Como a população cresce 20% em cada década e em 2031 terão passado três décadas desde o início deste século, a população nesse ano será:
$P(2) = 1{,}029 \cdot (1{,}2)^3 = 1{,}778112$

Alternativa **d**.

Q9. $5^{-x} = 125 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^3 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \Rightarrow x = -3$

Alternativa **b**.

Q10. $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x+5} \geqslant \left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}$

Como a base está entre 0 e 1, temos:
$2x + 5 \leqslant x - 1 \Rightarrow 2x - x \leqslant -1 - 5 \Rightarrow x \leqslant -6$

Alternativa **a**.

Capítulo 7 Função logarítmica

Atividades propostas

1. a. $\log_5 125 = 3$, pois $5^3 = 125$.

b. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16} = 4$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$.

c. $\log_2 \dfrac{1}{16} = -4$, pois $2^{-4} = \dfrac{1}{16}$.

d. $\log 1.000 = 3$, pois $10^3 = 1.000$.

2. a. $\log 560 = x \Rightarrow 10^x = 560$

Como $100 < 560 < 1.000$, ou seja, $10^2 < 10^x < 10^3$, concluímos que $2 < x < 3$.

Portanto, log 560 está entre 2 e 3.

b. $\log_5 3 = x \Rightarrow 5^x = 3$

Como $1 < 3 < 5$, ou seja, $5^0 < 5^x < 5^1$, concluímos que $0 < x < 1$.

Portanto, $\log_5 3$ está entre 0 e 1.

3. Como $3^2 = 9$ e $3^3 = 27$, conclui-se que: $3^2 < 3^x < 3^3$, ou seja, $2 < x < 3$.

Portanto, $\log_3 10$ está entre 2 e 3.

4. a. $\log_{\sqrt{2}} 2 = x \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x = 2 \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow x = 2$

Assim, $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$.

b. $\log 0{,}1 = y \Rightarrow 10^y = 0{,}1 \Rightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$

Assim, $\log 0{,}1 = -1$.

c. $\log_{\frac{1}{4}} 16 = w \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^w = 16 \Rightarrow 4^{-w} = 4^2 \Rightarrow w = -2$

Assim, $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2$.

d. $\log_2 \sqrt{128} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{128} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = \sqrt{2^7} \Rightarrow 2^x = 2^{\frac{7}{2}} \Rightarrow x = \dfrac{7}{2}$

Assim, $\log_2 \sqrt{128} = \dfrac{7}{2}$

5. $A = \log_7 7 \Rightarrow 7^A = 7^1 \Rightarrow A = 1$

$B = \log_{76} 1 \Rightarrow 76^B = 1 \Rightarrow B = 0$

$C = \log_{0,5} 8 \Rightarrow (0{,}5)^C = 8 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^C = 2^3 \Rightarrow C = -3$

$D = \log_8 8^{-2} \Rightarrow 8^D = 8^{-2} \Rightarrow D = -2$

Logo: $B^A + C \cdot D = 0^1 + (-3) \cdot (-2) = 6$

6. a. $\log(2m - 5) = 3 \Rightarrow 2m - 5 = 10^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2m = 1.005 \Rightarrow m = 502{,}5$

b. $\log(m-9) = -2 \Rightarrow m - 9 = 10^{-2} \Rightarrow m = 9{,}01$

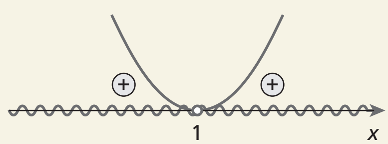
c. $\log_2(5-m) = 0 \Rightarrow 5 - m = 2^0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5 - m = 1 \Rightarrow m = 4$

d. $\log_m 0{,}1 = -1 \Rightarrow m^{-1} = 0{,}1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{0{,}1}{1} \Rightarrow m = \frac{1}{0{,}1} \Rightarrow m = 10$

7. a. $\log_x 5$
Pela definição, temos: $x > 0$ e $x \neq 1$
Logo, $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$.

b. Para existir $\log_2(3x+5)$, devemos ter:
$3x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{3}$
Portanto, $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{3}\right\}$.

c. $\log_5(x^2 - 2x + 1)$
Condição de existência:
$x^2 - 2x + 1 > 0$
$f(x) = x^2 - 2x + 1$



Logo, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.

8. a. $\log_5(-25) = x \Rightarrow 5^x = -25$
Como uma potência de base positiva sempre terá como resultado um número positivo, concluímos que, nesse caso, não existe x real que satisfaça a igualdade.
$\log_2 0 = x \Rightarrow 2^x = 0$
O resultado de uma potência será nulo apenas quando sua base for igual a zero; então, não existe x real que satisfaça a igualdade.

b. $\log_1 10 = x \Rightarrow 1^x = 10$
Como uma potência cuja base é igual a 1 sempre terá 1 como resultado, concluímos que não existe x real que satisfaça a igualdade.

c. $\log_0 2 = x \Rightarrow 0^x = 2$
Como uma potência cuja base é zero terá, necessariamente, resultado igual a zero, concluímos que não existe x real que satisfaça a igualdade.
$\log_{-1} 6 = x \Rightarrow (-1)^x = 6$
Uma potência cuja base é igual a -1 pode ter dois resultados possíveis: 1, se o expoente for um número par, ou -1, se o expoente for um número ímpar; então, concluímos que não existe x real que satisfaça a igualdade.

9. a. $\log_{11} 11 = 1$, pois $11^1 = 11$.

b. $\log_{32} 1 = 0$, pois $32^0 = 1$.

c. $\log_6 6^7 = 7$, pois $6^7 = 6^7$.

d. $\log 100 = \log 10^2 = 2$, pois $10^2 = 10^2$.

e. $15^{\log_{15} 16} = 16$, pois $\log_{15} 16 = m \Rightarrow$
$\Rightarrow 15^m = 16 \Rightarrow 15^{\log_{15} 16} = 16$

f. $\log_3 \sqrt{81} = \log_3 \sqrt{3^4} = \log_3 3^2 = 2$, pois $3^2 = 3^2$.

10. a. $\log_7 b = 1 \Rightarrow b = 7^1 \Rightarrow b = 7$

b. $\log_8 x = \log_8\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 8^{\log_8\left(\frac{2}{3}\right)} = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

c. $3^{\log_3 2} = n \Rightarrow n = 2$

d. $\log x^2 = \log 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$

e. $y = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{81} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = \sqrt{81} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{-y} = 3^2 \Rightarrow -y = 2 \Rightarrow y = -2$

f. $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[6]{5} = k \Rightarrow (\sqrt{5})^k = \sqrt[6]{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^{\frac{k}{2}} = 5^{\frac{1}{6}} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

11. a. $(\log_5 10)^{\log_3 1} = (\log_5 10)^0 = 1$

b. $(\log_{64} 64)^{\log_3 2} = 1^{\log_3 2} = 1$

c. $\log(\log 10^{10}) = \log 10 = 1$

d. $(\log 0{,}01) \cdot (\log 100) = (\log 10^{-2}) \cdot (\log 10^2) =$
$= (-2) \cdot (2) = -4$

e. $(\log_3 1) \cdot (\log_5 20) = 0 \cdot \log_5 20 = 0$

f. $(\log_{11} 121) \cdot (\log_{13} 169) =$
$= (\log_{11} 11^2) \cdot (\log_{13} 13^2) = (2) \cdot (2) = 4$

12. $\text{pH} = -\log[H^+] = -\log 10^{-3} = -(-3) = 3$
Como $\text{pH} < 7$, concluímos que a solução é ácida.

13. $\text{pH} = -\log[H^+] = 9 \Rightarrow \log[H^+] = -9$
Pela definição de logaritmo: $10^{-9} = [H^+]$
Portanto, a concentração de H^+ é 10^{-9} mol/L.

14. Resposta pessoal. Os estudantes podem substituir o valor para qualquer potência de 10 menor do que -7, como 10^{-10}, por exemplo.

15. a. $\log_2(64 \cdot 13) = \log_2 64 + \log_2 13 = 6 + \log_2 13$

b. $\log_{\sqrt{2}}(2 \cdot 3) = \log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}} 3 = 2 + \log_{\sqrt{2}} 3$

c. $\log_3(13 \cdot 3) = \log_3 13 + \log_3 3 = \log_3 13 + 1$

d. $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{16}\right)^9 = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{18} = 18$

e. $\log\left(\frac{1}{10}\right)^{19} = -\log 10^{19} = -19$

f. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{26}{32}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{13}{16}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(13 \cdot \frac{1}{16}\right) =$
$= \log_{\frac{1}{2}} 13 + \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right) = \log_{\frac{1}{2}} 13 + \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$
$= \log_{\frac{1}{2}} 13 + 4$

16. a. $A = \log 30 + \log 7 - \log 21 =$
$= \log(3 \cdot 10) + \log 7 - \log(3 \cdot 7) =$
$= \cancel{\log 3} + \log 10 + \cancel{\log 7} - \cancel{\log 3} - \cancel{\log 7} =$
$= \log 10 = 1$
Portanto, $A = 1$.

b. $A = \log_2 100 - \log_2 25 = \log_2\left(\frac{100}{25}\right) = \log_2 4 = 2$
Portanto, $A = 2$.

17. a. $\log_a (b \cdot c \cdot d) =$
$= \log_a b + \log_a c + \log_a d$

b. $\log_a \left(\frac{2 \cdot k}{d}\right) = \log_a (2 \cdot k) - \log_a d =$
$= \log_a 2 + \log_a k - \log_a d$

c. $\log_a a^{-n} = -n \cdot \log_a a =$
$= -n \cdot 1 = -n$

d. $\log_a \left(\frac{1}{y}\right) = \log_a 1 - \log_a y =$
$= 0 - \log_a y = -\log_a y$

18. a. $\log_{12} \left(\frac{3}{4}\right) = \log_{12} 3 - \log_{12} 4 =$
$= \log_{12} 3 - 2 \log_{12} 2 \simeq -0{,}116$

b. $\log_{12} 6 = \log_{12} 2 \cdot 3 =$
$= \log_{12} 2 + \log_{12} 3 \simeq 0{,}721$

19. a. $\log 15 = \log (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 =$
$= 0{,}477 + 0{,}699 = 1{,}176$

b. $\log 45 = \log (3 \cdot 3 \cdot 5) = \log 3 + \log 3 + \log 5 =$
$= 0{,}477 + 0{,}477 + 0{,}699 = 1{,}653$

c. $\log \left(\frac{5}{3}\right) = \log 5 - \log 3 =$
$= 0{,}699 - 0{,}477 = 0{,}222$

d. $\log 0{,}6 = \log \left(\frac{6}{10}\right) = \log \left(\frac{3}{5}\right) =$
$= \log 3 - \log 5 = 0{,}477 - 0{,}699 = -0{,}222$

e. $\log_2 20 = \log_2 (2^2 \cdot 5) =$
$= \log_2 2^2 + \log_2 5 = 2 + 2{,}322 = 4{,}322$

f. $\log_2 25 = \log_2 5^2 = 2 \cdot \log_2 5 =$
$= 2 \cdot 2{,}322 = 4{,}644$

20. $\text{pH} = -\log (3{,}8 \cdot 10^{-5}) =$
$= -(\log 3{,}8 + \log 10^{-5}) =$
$= -\log 3{,}8 - (-5) \simeq -0{,}58 + 5 \simeq 4{,}42$

21. $\text{pH} = 6{,}1 + \log \left(\frac{B}{C}\right) = 6{,}1 + \log \left(\frac{25}{2}\right) =$
$= 6{,}1 + \log 25 - \log 2 = 6{,}1 + \log 5^2 - \log 2 =$
$= 6{,}1 + 2 \cdot \log 5 - \log 2 \simeq 6{,}1 + 2 \cdot (0{,}699) - 0{,}301 = 7{,}197$
Logo, o pH do sangue dessa pessoa é, aproximadamente, 7,197.

22. a. $\log 32 \simeq 1{,}5051$

b. $\log_6 40 = \frac{\log 40}{\log 6} \simeq \frac{1{,}6021}{0{,}7782} \simeq 2{,}0587$

23. a. $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0{,}30 + 0{,}48 = 0{,}78$

b. $\log 30 = \log (3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 = 0{,}48 + 1 = 1{,}48$

c. $\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0{,}30}{0{,}48} = 0{,}625$

d. $\log 5 = \log \left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$

e. $\log 144 = \log 12^2 = 2 \cdot \log 12 = 2 \cdot \log (2^2 \cdot 3) =$
$= 2 \cdot (\log 2^2 + \log 3) = 2 \cdot (2 \cdot \log 2 + \log 3) =$
$= 2 \cdot (2 \cdot 0{,}30 + 0{,}48) = 2{,}16$

f. $\log \sqrt[3]{30} = \log 30^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log (3 \cdot 10) =$
$= \frac{1}{3} \cdot (\log 3 + \log 10) = \frac{1}{3} \cdot (0{,}48 + 1) = 0{,}4933...$

24. a. $\log_3 10 = \frac{\log 10}{\log 3} = \frac{1}{\log 3}$

b. $\log_2 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 2} = \frac{1}{\log_5 2}$

c. $\log 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 10} = \frac{1}{\log_3 10}$

d. $\log_7 121 = \frac{\log_{11} 121}{\log_{11} 7} = \frac{2}{\log_{11} 7}$

25. a. $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$

b. O logaritmo de b na base a é igual ao inverso do logaritmo de a na base b.

c. $\log_a b \cdot \log_b a = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b a = 1$

26. $9 - (\log_{15} 8) \cdot (\log_2 15) = 9 - (\log_{15} 2^3) \cdot (\log_2 15) =$
$= 9 - 3(\log_{15} 2) \cdot (\log_2 15) =$
$= 9 - 3 \cdot \frac{1}{\log_2 15} \cdot \log_2 15 = 9 - 3 = 6$

27. $A = \log_{\frac{1}{5}} 16 \cdot \log_{16} \left(\frac{1}{5}\right) = 1$

$B = \frac{1}{\log_{25} 5} = \log_5 25 = 2$

28. $\log_3 5 \cdot \log_7 2 \cdot \log_5 7 \cdot \log_2 3$
Escrevendo todos os logaritmos na base 10, temos:
$\frac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 3}} \cdot \frac{\cancel{\log 2}}{\cancel{\log 7}} \cdot \frac{\cancel{\log 7}}{\cancel{\log 5}} \cdot \frac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 2}} = 1$

29. a. $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c$
Escrevendo todos os logaritmos na base a, temos:
$\frac{\log_a a}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a b}{\log_a c} \cdot \log_a c = \log_a a = 1$

b. $\frac{\log_c a}{\log_c b} - \log_b a = \log_b a - \log_b a = 0$

c. $\log_b a^2 \cdot \log_a b^2 = 2 \log_b a \cdot 2 \log_a b =$
$= 2 \cdot \frac{\log_a a}{\log_a b} \cdot 2 \cdot \log_a b = 4$

d. $a \cdot \log_c b \cdot \log_{b^a} c^5 = \log_c b^a \cdot 5 \cdot \log_{b^a} c =$
$= \frac{\log b^a}{\log c} \cdot 5 \cdot \frac{\log c}{\log b^a} = 5$

30. $\log_{a^n} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^n} = \frac{\log_a b}{n} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$

31. Sim, pois, para $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:
$\log_8 16 = \frac{\log_a 2^4}{\log_a 2^3} = \frac{4 \cdot \log_a 2}{3 \cdot \log_a 2} = \frac{4}{3}$

32. a. Em 1 ano, ou seja, em 12 meses, teremos:
$M = 1.400 \cdot (1{,}009)^{12} \Rightarrow M \simeq 1.400 \cdot 1{,}11351 \Rightarrow$
$\Rightarrow M \simeq 1.558{,}91$
Logo, o montante será de aproximadamente R$ 1.558,91.

b. Substituindo M por R$ 2.100,00, temos:
$1.400 \cdot (1{,}009)^t = 2.100 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1{,}009)^t = \frac{2.100}{1.400} \Rightarrow (1{,}009)^t = 1{,}5$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$t = \log_{1{,}009} 1{,}5 = \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}009}$

Em uma calculadora científica, obtemos:
$\log 1{,}5 \simeq 0{,}1761$ e $\log 1{,}009 \simeq 0{,}0039$

Assim: $t \simeq \dfrac{0{,}1761}{0{,}0039} \simeq 45{,}1$

Logo, são necessários 46 meses de aplicação para que o montante chegue a R$ 2.100,00.

33. **a.** Após um trimestre:
$1.500 + 1.500 \cdot 0{,}2 = 1.500 \cdot (1 + 0{,}2) = 1.500 \cdot (1{,}2) = 1.800$
Logo, após um trimestre essa empresa deverá R$ 1.800,00.
Após dois trimestres:
$1.800 + 1.800 \cdot 0{,}2 = 1.800 \cdot (1 + 0{,}2) = 1.800 \cdot (1{,}2) = 2.160$
Assim, após dois trimestres essa empresa deverá R$ 2.160,00.

b. Organizando os cálculos realizados no item anterior, temos:

Cálculo do valor da dívida

Tempo	Cálculos
Após 1 trimestre	$d = 1.500 \cdot (1{,}2)$
Após 2 trimestres	$d = 1.500 \cdot (1{,}2) \cdot (1{,}2)$ $d = 1.500 \cdot (1{,}2)^2$

Analisando esses resultados, conclui-se que, para calcular o valor da dívida d após n trimestres, pode ser utilizada a fórmula: $d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n$

c. Usando a fórmula obtida, temos:

$3.110{,}40 = 1.500 \cdot (1{,}2)^n \Rightarrow (1{,}2)^n = \dfrac{3.110{,}40}{1.500} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1{,}2)^n = 2{,}0736$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:
$n = \log_{1{,}2} 2{,}0736 \Rightarrow n = \log_{1{,}2} (1{,}2)^4 \Rightarrow n = 4$
Para chegar a R$ 3.110,40 serão necessários 4 trimestres, ou seja, 1 ano.

d. Mais uma vez, podemos usar a fórmula do **item b**:

$d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n \Rightarrow (1{,}2)^n = \dfrac{d}{1.500} \Rightarrow n = \log_{1{,}2} \left(\dfrac{d}{1.500}\right)$

34. Resposta pessoal.

35. **a.** $f(7) = \log_2 (7 + 1) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

b. $f(0) = \log_2 (0 + 1) = \log_2 1 = 0$

c. $f(-0{,}5) = \log_2 (-0{,}5 + 1) = \log_2 \left(\dfrac{1}{2}\right) = \log_2 2^{-1} = -1$

d. $f\left(\sqrt{2} - 1\right) = \log_2 \left(\sqrt{2} - 1 + 1\right) = \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

36. **a.** $g(x) = \log_3 (x - 4) = 3 \Rightarrow x - 4 = 3^3 \Rightarrow x = 27 + 4 \Rightarrow x = 31$

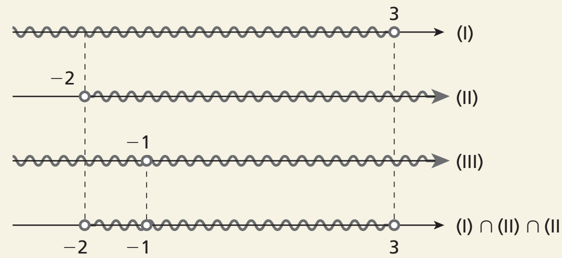
b. $g(x) = \log_3 (x - 4) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x - 4 = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{3} + 4$

37. **a.** $f(x) = \log (2x + 5)$
Condição de existência:

$2x + 5 > 0 \Rightarrow 2x > -5 \Rightarrow x > -\dfrac{5}{2}$

Portanto:
$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{5}{2}\right\}$

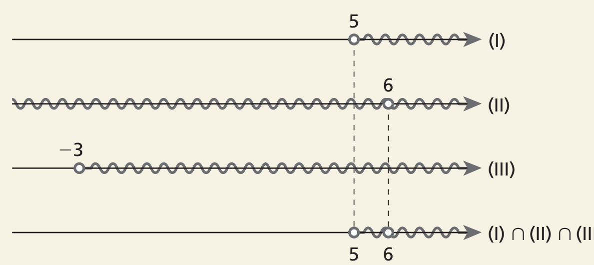
b. $f(x) = \log_{x+2} (3 - x)$
Condição de existência do logaritmando:
$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$ (I)
Condição de existência da base:
$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$ (II)
$x + 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq -1$ (III)



Então, pelas desigualdades (I), (II) e (III), temos:
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq -1\}$

c. $g(x) = \log_{18} 2^x$
Condição de existência: $2^x > 0$
Como, para todo x, $2^x > 0$, vem: $D(g) = \mathbb{R}$

38. Para existir $\log_a b$, deve-se ter $a > 0$; $a \neq 1$ e $b > 0$.
Logo, no caso de $\log_{(x-5)} (x + 3)$, temos:
$x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$ (I)
$x - 5 \neq 1 \Rightarrow x \neq 6$ (II)
$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$ (III)

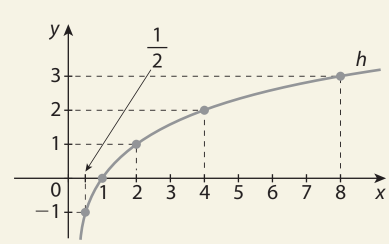


Portanto, podemos concluir que:
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \text{ e } x \neq 6\}$
Alternativa **b**.

39. **a.** $h(x) = \log_2 x$

$h(x) = \log_2 x$

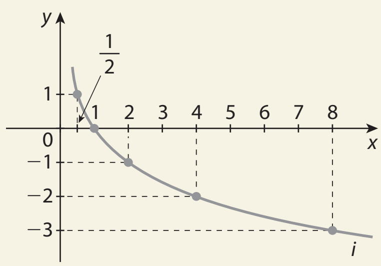
x	$h(x)$
$\frac{1}{2}$	−1
1	0
2	1
4	2
8	3



b. $i(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

$i(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$i(x)$
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2
8	−3



40. a. A função h é crescente e a função i é decrescente.

b. Resposta possível:
Para verificar se uma função é crescente ou decrescente, podemos observar o valor da base a de $\log_a x$:

$$\begin{cases} \text{se } a > 1, \text{ a função será crescente;} \\ \text{se } 0 < a < 1, \text{ a função será decrescente.} \end{cases}$$

41. a. Como a base $\left(\frac{1}{10}\right)$ é um número entre 0 e 1, concluímos que a função é decrescente.

b. Como a base (10) é maior que 1, concluímos que a função é crescente.

42. a. Como $\log_a x$ é crescente, dado $a > 1$, e $\log_a 1 = 0$, então o valor de $\log_a x$ para $x > 1$ é positivo.

b. Como $\log_a x$ é crescente, dado $a > 1$, e $\log_a 1 = 0$, então o valor de $\log_a x$ para $0 < x < 1$ é negativo.

c. Como $\log_a x$ é decrescente, dado $0 < a < 1$, e $\log_a 1 = 0$, então o valor de $\log_a x$ para $x > 1$ é negativo.

d. Como $\log_a x$ é decrescente, dado $0 < a < 1$, e $\log_a 1 = 0$, então o valor de $\log_a x$ para $0 < x < 1$ é positivo.

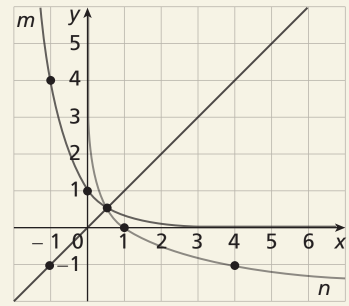
43. a. $f(x) = \log_{k-3} x$
Para f ser crescente: $k - 3 > 1 \Rightarrow k > 4$
Logo, $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$.

b. $f(x) = \log_{3k-1} x$
Para f ser decrescente:
$0 < 3k - 1 < 1 \Rightarrow 1 < 3k < 2 \Rightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}$
Logo, $\left\{k \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}\right\}$.

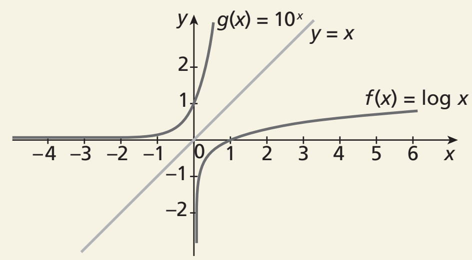
44. a. $f(x) = \log_a x$
$f(9) = 2 \Rightarrow \log_a 9 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$
$a = -3$ não serve devido à condição de existência.
Então: $f(x) = \log_3 x$

b. $g(x) = \log_a x$
$g(4) = -1 \Rightarrow \log_a 4 = -1 \Rightarrow a^{-1} = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$
Então: $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

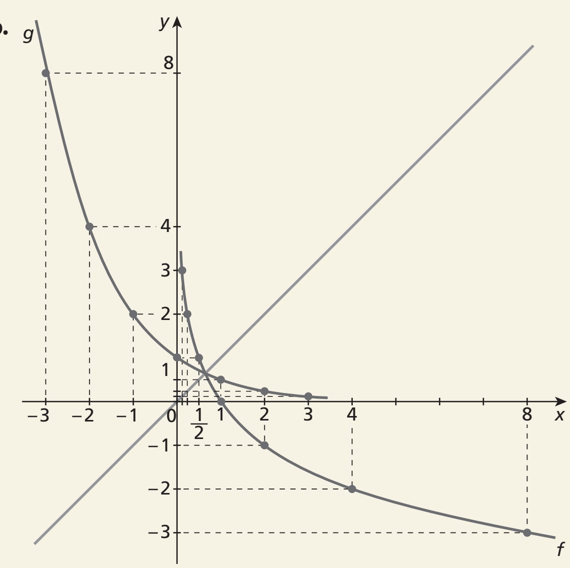
45. Resposta possível: Tomando os pontos simétricos (1, 0), (0, 1), (4, −1) e (−1, 4), e o ponto de intersecção $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, temos o seguinte gráfico



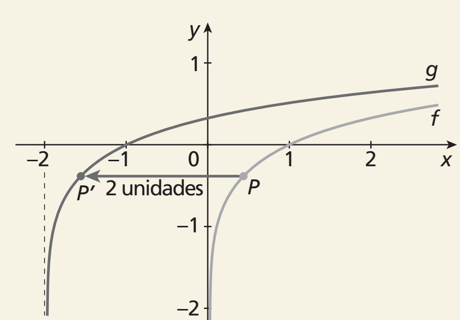
46. a.



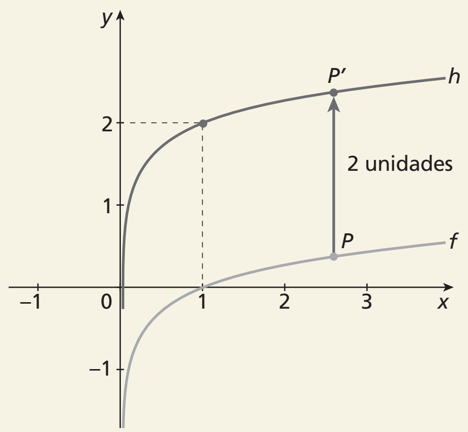
b.



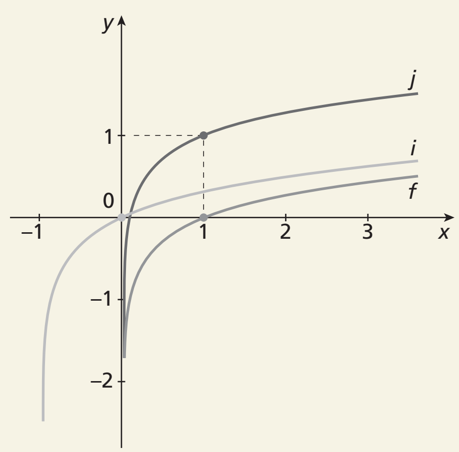
47. a. Uma estratégia para a obtenção dos gráficos pedidos é fazer a translação adequada do gráfico da função f tal que $f(x) = \log x$.
No caso de $g(x) = \log(x + 2)$, temos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em duas unidades no sentido negativo do eixo x. Observe os pontos de intersecção com o eixo horizontal e os pontos P e P', por exemplo.



No caso de $h(x) = \log x + 2$, temos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em duas unidades no sentido positivo do eixo y. Observe, por exemplo, os pontos P e P'.



b. Para $i(x) = \log(x + 1)$, teremos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em uma unidade no sentido negativo do eixo x. No caso de $j(x) = \log x + 1$, teremos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em uma unidade no sentido positivo do eixo y.



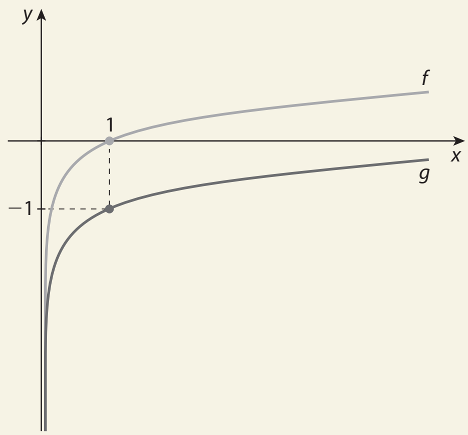
48. Para encontrar o valor de x tal que $f(x) = 4$, calculamos:

$4 = \log_4 x \Rightarrow 4^4 = x \Rightarrow x = 256$

Alternativa **e**.

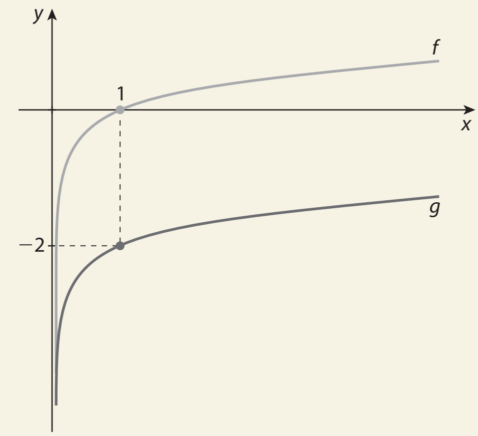
49. a. $g(x) = \log\left(\dfrac{x}{10}\right) = \log x - \log 10 = \log x - 1$

Basta transladar o gráfico de $f(x) = \log x$ uma unidade no sentido negativo do eixo y.



b. $g(x) = \log\left(\dfrac{x}{100}\right) = \log x - \log 100 = \log x - 2$

Basta transladar o gráfico de $f(x) = \log x$ duas unidades no sentido negativo do eixo y.



50. a. $\log_x 64 = 2$

Condições de existência: $x > 0$ e $x \neq 1$

$\log_x 64 = 2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm\sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8$

Portanto, $S = \{8\}$.

b. $\log_4 (x + 1) = 2$

Condição de existência: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$\log_4 (x + 1) = 2 \Rightarrow x + 1 = 4^2 \Rightarrow x = 16 - 1 \Rightarrow x = 15$

Portanto, $S = \{15\}$.

c. $\log (x - 1)^2 = \log 1$

Condição de existência:

$(x - 1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 1$

$\log (x - 1)^2 = \log 1 \Rightarrow (x - 1)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Portanto, $S = \{0, 2\}$.

d. $\log_{21} (x + 2) + \log_{21} (x + 6) = 1$

Condição de existência:

$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -6 \end{cases} \Rightarrow x > -2$

$\log_{21} (x + 2) + \log_{21} (x + 6) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{21} (x + 2)(x + 6) = 1 \Rightarrow (x + 2)(x + 6) = 21^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -9$ (não serve)

Logo, $S = \{1\}$.

e. $\log_2 (x - 2) - \log_2 (2x - 7) = 1$

Condição de existência:

$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 2x - 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow x > \dfrac{7}{2}$

$\log_2 (x - 2) - \log_2 (2x - 7) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 \dfrac{x - 2}{2x - 7} = 1 \Rightarrow \dfrac{x - 2}{2x - 7} = 2^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2 = 2(2x - 7) \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2 = 4x - 14 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$

Logo, $S = \{4\}$.

f. $\log x + 2 \cdot \log^2 x - 1 = 0$

Condição de existência: $x > 0$

Fazendo $y = \log x$, temos:

$y + 2y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$ ou $y = -1$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Como $y = \log x$, temos:

$\log x = \frac{1}{2} \Rightarrow 10^{\frac{1}{2}} = x \Rightarrow x = \sqrt{10}$ ou

$\log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{10}$

Portanto, $S = \left\{\frac{1}{10}, \sqrt{10}\right\}$.

51. $\begin{cases} \log_2 (x-2) - \log_2 (y+1) = 1 \text{ (I)} \\ x - 3y = 2 \text{ (II)} \end{cases}$

Condições de existência: $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ y + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ y > -1 \end{cases}$

(I) $\log_2 (x-2) = \log_2 2 + \log_2 (y+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x-2) = \log_2 (2y+2) \Rightarrow x - 2 = 2y + 2 \Rightarrow x - 2y = 4$

$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 8$ e $y = 2$

Ambos satisfazem as condições de existência; logo, $S = \{(8, 2)\}$.

52. $\log 0{,}5 = \log 10^{-0{,}012t} \Rightarrow \log 0{,}5 = -0{,}012t \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 0{,}5}{-0{,}012} \Rightarrow t = \frac{-0{,}30}{-0{,}012} \Rightarrow t = 25$

Logo, a meia-vida dessa substância é de 25 horas.

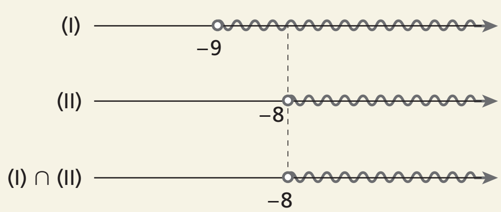
53. a. $\log_{12} (x+9) > \log_{12} 1$

Condição de existência: $x + 9 > 0 \Rightarrow x > -9$ (I)

Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_{12} (x+9) > \log_{12} 1 \Rightarrow x + 9 > 1 \Rightarrow x > -8$ (II)

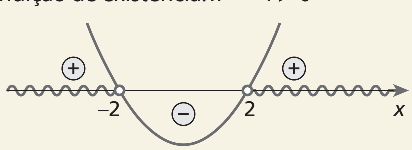
As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$.

b. $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) < \log_{\frac{1}{5}} 5$

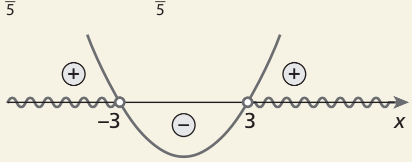
Condição de existência: $x^2 - 4 > 0$



Logo: $x < -2$ ou $x > 2$ (I)

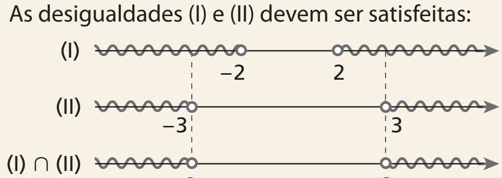
Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) < \log_{\frac{1}{5}} 5 \Rightarrow x^2 - 4 > 5 \Rightarrow x^2 - 9 > 0$



Logo: $x < -3$ ou $x > 3$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3$ ou $x > 3\}$.

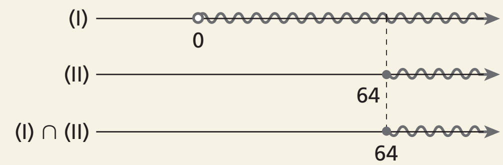
c. $\log_8 x \geqslant 2$

Condição de existência: $x > 0$ (I)

Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_8 x \geqslant 2 \Rightarrow \log_8 x \geqslant \log_8 64 \Rightarrow x \geqslant 64$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 64\}$.

d. $\log_{0,2} (x+3) > 0$

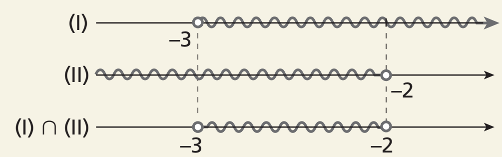
Condição de existência: $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$ (I)

Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_{0,2} (x+3) > 0 \Rightarrow \log_{0,2} (x+3) > \log_{0,2} 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 3 < 1 \Rightarrow x < -2$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$.

e. $\log_{0,3} (2x-2) + \log_{0,3} 2 > 1$

Condição de existência:

$2x - 2 > 0 \Rightarrow x > 1$ (I)

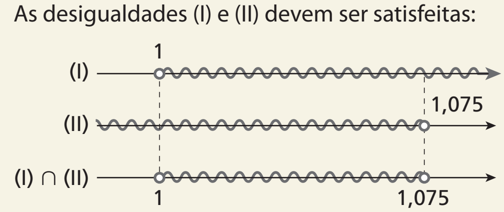
Substituindo 1 por $\log_{0,3} 0{,}3$, resolvemos a inequação:

$\log_{0,3} (2x-2) + \log_{0,3} 2 > \log_{0,3} 0{,}3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{0,3} [(2x-2) \cdot 2] > \log_{0,3} 0{,}3 \Rightarrow (2x-2) \cdot 2 < 0{,}3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x - 4 < 0{,}3 \Rightarrow 4x < 4{,}3 \Rightarrow x < \frac{4{,}3}{4} \Rightarrow x < 1{,}075$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1{,}075\}$.

f. $0 < \log_3 (x-2) < 2$

Condição de existência:

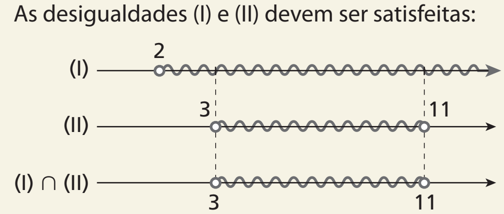
$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ (I)

Substituindo 0 por $\log_3 1$ e 2 por $\log_3 9$, resolvemos a inequação: $\log_3 1 < \log_3 (x-2) < \log_3 9$

Como a base é maior que 1, o sinal da desigualdade deve ser mantido para os logaritmandos:

$1 < x - 2 < 9 \Rightarrow 3 < x < 11$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:

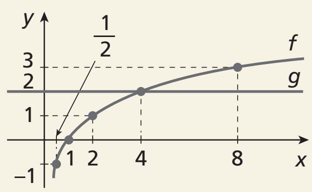


Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 11\}$.

54. $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2$

$f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2$

x	$f(x)$	$g(x)$
$\frac{1}{2}$	-1	2
1	0	2
2	1	2
4	2	2
8	3	2



a. Analisando os gráficos, concluímos que $f(x) \geqslant g(x)$ para $x \geqslant 4$.

b. Resolvendo a inequação $f(x) \geqslant g(x)$:

$\log_2 x \geqslant 2 \Rightarrow \log_2 x \geqslant \log_2 4 \Rightarrow x \geqslant 4$

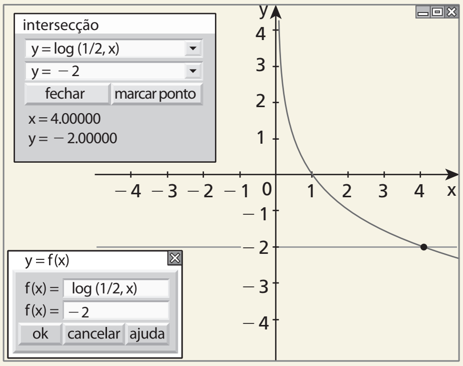
Condição de existência: $x > 0$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$.

c. Espera-se que os estudantes concluam que, resolvendo a inequação logarítmica formada pelas leis de formação das funções f e g ou comparando os gráficos das funções encontra-se o mesmo intervalo.

55. Em geral, nos *softwares* de construção de gráficos, a expressão log (b, x) significa logaritmo de x na base b.

- Escrever a expressão "log $\left(\frac{1}{2}, x\right)$" na janela de equação explícita e clicar em "ok".
- Escrever "−2" na janela de equação explícita e clicar em "ok".
- Clicar na função "intersecção" e, depois, em "marcar ponto".
- A partir da coordenada x do ponto de intersecção, determinar o conjunto solução da inequação.



Conforme a janela de intersecção, vê-se que o ponto de intersecção entre as funções é o ponto $(4, -2)$. Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$.

As resoluções/comentários das atividades da seção *Trabalho e juventudes – Geólogo* estão nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

Para finalizar o capítulo 7

Autoavaliação

Q1. $\log_g h = i \Leftrightarrow g^i = h$

Alternativa **a**.

Q2. Condições de existência para $\log_g h = i$:
- $h > 0$
- $g > 0$ e $g \neq 1$

Alternativa **c**.

Q3. $\log_4 \frac{2}{3} = \log_4 2 - \log_4 3$

Alternativa **c**.

Q4. $\log_{39} 42 = \frac{\log 42}{\log 39}$

Alternativa **b**.

Q5. $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0{,}30 + 0{,}47 = 0{,}77$

Alternativa **b**.

Q6. $\text{pH} = -\log [H^+] \Rightarrow 10 = -\log_{10} [H^+] \Rightarrow$

$\Rightarrow -10 = \log_{10} [H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-10}$

Alternativa **a**.

Q7. Em $\log_{\frac{2}{7}} x$, a base é $\frac{2}{7}$.

Como $0 < \frac{2}{7} < 1$, a função é decrescente.

Alternativa **d**.

Q8. As funções logarítmica e exponencial são funções inversas.

Alternativa **c**.

Q9. A função dada por $f(x) = \log_3 x$ é uma função logarítmica cuja representação gráfica é crescente, pois a base do logaritmo é maior que 1.

Alternativa **b**.

Q10. $\log_x 8 = 2 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$

Alternativa **d**.

Q11. Condição de existência para $\log (x^2 + 6)$:

$x^2 + 6 > 0 \Rightarrow x^2 > -6$ (sempre)

Então:

$\log (x^2 + 6) < 1 \Rightarrow x^2 + 6 < 10^1 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$

Alternativa **d**.

Capítulo 8 Sequências

Atividades propostas

1. a. $f(n) = 4n - 8$

Determinação dos primeiros termos da sequência $f(n) = 4n - 8$

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	-4	0	4	8	12

Os cinco primeiros termos da sequência são -4, 0, 4, 8 e 12.

b. $f(n) = -3$

Determinação dos primeiros termos da sequência $f(n) = -3$

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	-3	-3	-3	-3	-3

Os cinco primeiros termos da sequência são -3, -3, -3, -3 e -3.

c. $f(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2$

Determinação dos primeiros termos da sequência $f(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2$

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$

Os cinco primeiros termos da sequência são $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{9}{2}$, 8 e $\frac{25}{2}$.

2. a. $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 5n, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

Determinação dos primeiros termos da sequência

n	a_n
2	$a_2 = a_1 \cdot 5 \cdot 2 = 4 \cdot 10 = 40$
3	$a_3 = a_2 \cdot 5 \cdot 3 = 40 \cdot 15 = 600$
4	$a_4 = a_3 \cdot 5 \cdot 4 = 600 \cdot 20 = 12.000$

Os quatro primeiros termos da sequência são 4, 40, 600 e 12.000.

b. $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_n = 3^n \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

Determinação dos primeiros termos da sequência

n	a_n
2	$a_2 = 3^2 \cdot a_1 = 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$
3	$a_3 = 3^3 \cdot a_2 = 27 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{243}{2}$
4	$a_4 = 3^4 \cdot a_3 = 81 \cdot \left(-\frac{243}{2}\right) = -\frac{19.683}{2}$

Os quatro primeiros termos da sequência são $-\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{243}{2}$ e $-\frac{19.683}{2}$.

c. $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = (a_{n-1})^{-2}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

Determinação dos primeiros termos da sequência

n	a_n
2	$a_2 = (a_1)^{-2} = (-2)^{-2} = \frac{1}{4}$
3	$a_3 = (a_2)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$
4	$a_4 = (a_3)^{-2} = 16^{-2} = \frac{1}{256}$

Os quatro primeiros termos da sequência são -2, $\frac{1}{4}$, 16 e $\frac{1}{256}$.

3. Respostas possíveis:

a. Para $n = 1$, temos: $a_1 = 2 \cdot 0 = 2 \cdot (1 - 1)$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot (2 - 1)$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot (3 - 1)$
⋮
Para n qualquer, temos: $a_n = 2(n - 1)$
Logo, uma lei de formação da sequência dos números pares é $a^n = 2(n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

b. A sequência é constante; logo: $a_n = 17$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c. Para $n = 1$, temos: $a_1 = -3$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = -3 + 7 = a_1 + 7 = a_{2-1} + 7$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = 4 + 7 = a_2 + 7 = a_{3-1} + 7$
Para $n = 4$, temos: $a_4 = 11 + 7 = a_3 + 7 = a_{4-1} + 7$
⋮
Para n qualquer, temos:
$a_n = a_{n-1} + 7$
Uma lei de formação da sequência é:
$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = a_{n-1} + 7, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

d. Para $n = 1$, temos: $a_1 = -\frac{1}{4}$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = a_{2-1} + \frac{1}{8}$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = a_{3-1} + \frac{1}{8}$
Para $n = 4$, temos: $a_4 = 0 + \frac{1}{8} = a_{4-1} + \frac{1}{8}$
⋮
Para n qualquer, temos:
$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{8}$
Uma lei de formação da sequência é:
$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{8}, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

e. Para $n = 1$, temos: $a_1 = -5 = 5 \cdot (-1)^1$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = 5 = 5 \cdot (-1)^2$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = -5 = 5 \cdot (-1)^3$
Para $n = 4$, temos: $a_4 = 5 = 5 \cdot (-1)^4$
⋮
Para $n \in \mathbb{N}^*$, temos: $a_n = 5 \cdot (-1)^n$, que é uma lei de formação da sequência.

4. $\begin{cases} a_1 = x - 1 \\ a_n = x \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

Se $a_2 = 12$, temos $12 = x \cdot a_1$, mas $a_1 = x - 1$, então:
$12 = x \cdot (x - 1) \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 4$
Para $x = -3$, a sequência será:
$(-4, 12, -36, 108, ...)$
Para $x = 4$, a sequência será:
$(3, 12, 48, 192, ...)$

5. a. A cada 28 anos, os calendários se repetem, com as datas caindo sempre no mesmo dia da semana.

b. Resposta pessoal.

6. a. É importante notar que o enunciado afirma que a sequência associa cada número natural n a um termo $a_n = f(n)$, sem excluir $n = 0$; assim, o primeiro termo da sequência será a_0.

b. A lei de formação precisa ser alterada porque, ao substituir n por 0, devemos obter 1, que é o primeiro número natural ímpar.

c. Como devemos ter $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ e $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, a nova lei de formação da sequência pode ser escrita como $f(n) = 2n + 1$.

7. Porque a sequência apresentada é finita.

8. Não; pode ser, por exemplo, 6, caso a lei de formação seja:

$$a_n = -\frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{n}{6}$$

9. a. $n = 1 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 1 \cdot 2 = 2$

$n = 2 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 2 \cdot 3 = 6$

$n = 3 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 3 \cdot 4 = 12$

$n = 4 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 4 \cdot 5 = 20$

Os números de pontos nas figuras são: (1, 3, 6, 10)

Então, para cada n, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura.

b. Considerando a conclusão do **item a**, o número de pontos da enésima figura é dado por: $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Logo, a lei de formação que dá o número de pontos da enésima figura é: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Na 13ª figura, temos $n = 13$, então:

$$T_{13} = \frac{13 \cdot (13 + 1)}{2} = 13 \cdot 7 = 91$$

Logo, 91 pontos formarão a 13ª figura.

d. Para que essa sequência tenha uma figura com 110 pontos, deve existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $T_n = 110$:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 110 \Rightarrow n^2 + n - 220 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{881}}{2 \cdot 1} \notin \mathbb{N}^*$$

Portanto, essa sequência não tem uma figura com 110 pontos.

Para que essa sequência tenha uma figura com 120 pontos, deve existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $T_n = 120$:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 120 \Rightarrow n^2 + n - 240 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{-1 \pm 31}{2 \cdot 1} \Rightarrow n = 15 \text{ ou } n = -16 \text{ (não serve)}$$

Portanto, essa sequência tem uma figura com 120 pontos, que é a 15ª figura.

10. a. $a_2 - a_1 = -1 - (-5) = -1 + 5 = 4$

b. $a_3 - a_2 = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$

c. $a_4 - a_3 = 7 - 3 = 4$

d. $a_5 - a_4 = 11 - 7 = 4$

e. $a_6 - a_5 = 15 - 11 = 4$

f. $a_7 - a_6 = 19 - 15 = 4$

11. a. Espera-se que os estudantes percebam que a diferença entre quaisquer dois valores consecutivos dessa sequência é igual a 4.

b. Espera-se que os estudantes percebam que, para obter a_8, basta adicionar 4 ao termo $a_7 = 19$.

$a_8 = 4 + a_7 \Rightarrow a_8 = 4 + 19 = 23$

Logo, o oitavo termo será 23.

c. Como a diferença entre dois termos consecutivos dessa sequência é igual a 4, temos:

$a_{n+1} - a_n = 4 \Rightarrow a_{n+1} = 4 + a_n$

Assim, conhecendo o valor de a_n, para calcular o valor de a_{n+1} adiciona-se 4 ao valor de a_n.

12. a. Considerando os valores apresentados na sequência, verifica-se que, a partir do terceiro termo, cada um dos termos é obtido pela soma dos dois termos anteriores, como pode ser confirmado a seguir.

Formação da sequência de Fibonacci

n	a_n
1	$a_1 = 1$
2	$a_2 = 1$
3	$a_3 = 1 + 1 = 2$
4	$a_4 = 2 + 1 = 3$
5	$a_5 = 3 + 2 = 5$
6	$a_6 = 5 + 3 = 8$
7	$a_7 = 8 + 5 = 13$

b. Pelo padrão observado, podemos dizer que basta adicionar os dois termos anteriores para chegar ao termo procurado. Ou seja, observando a sequência já indicada, temos:

$a_8 = a_7 + a_6 \Rightarrow a_8 = 13 + 8 = 21$

$a_9 = a_8 + a_7 \Rightarrow a_9 = 21 + 13 = 34$

$a_{10} = a_9 + a_8 \Rightarrow a_{10} = 34 + 21 = 55$

c. Pelas respostas dos itens anteriores, verificamos que a lei de formação dessa sequência é:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$$

d. Resposta pessoal. Os estudantes podem encontrar relação com a natureza, a pintura, a arte e a anatomia.

13. a. É PA de razão $r = 7$ e $a_1 = 3$.

b. Não é PA, pois:

$a_2 - a_1 = \frac{1}{500} - \frac{1}{1.000} = \frac{1}{1.000}$

$a_3 - a_2 = \frac{3}{1.000} - \frac{1}{500} = \frac{1}{1.000}$

$a_4 - a_3 = \frac{3}{500} - \frac{3}{1.000} = \frac{3}{1.000}$

Como $\frac{1}{1.000} \neq \frac{3}{1.000}$, a sequência não é uma PA.

c. Não é PA, pois:

$a_2 - a_1 = 1 - (-1) = 2$

$a_3 - a_2 = (-1) - 1 = -2$

Como $2 \neq -2$, a sequência não é uma PA.

d. É PA de razão $r = -1$ e $a_1 = \frac{1}{2}$.

14. a. Se $a_1 = 12$ e $r = 7$, então:

$a_2 = 12 + 7 = 19$

$a_3 = 12 + 2 \cdot 7 = 26$

$a_4 = 12 + 3 \cdot 7 = 33$

$a_5 = 12 + 4 \cdot 7 = 40$

Os cinco primeiros termos da PA são 12, 19, 26, 33 e 40.

b. Se $a_1 = 12$ e $r = -7$, então:

$a_2 = 12 + (-7) = 5$

$a_3 = 12 + 2 \cdot (-7) = -2$

$a_4 = 12 + 3 \cdot (-7) = -9$

$a_5 = 12 + 4 \cdot (-7) = -16$

Os cinco primeiros termos da PA são 12, 5, −2, −9 e −16.

c. Se $a_1 = -2$ e $r = \frac{1}{2}$, então:

$a_2 = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

$a_3 = -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -1$

$a_4 = -2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$a_5 = -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$

Os cinco primeiros termos da PA são $-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$ e 0.

d. Se $a_1 = 12$ e $r = -0{,}25$, então:

$a_2 = 12 + (-0{,}25) = 11{,}75$

$a_3 = 12 + 2 \cdot (-0{,}25) = 11{,}5$

$a_4 = 12 + 3 \cdot (-0{,}25) = 11{,}25$

$a_5 = 12 + 4 \cdot (-0{,}25) = 11$

Os cinco primeiros termos da PA são 12; 11,75; 11,5; 11,25 e 11.

15. **Passo 1.** Seja r a razão de uma PA.

Passo 2. Se $r > 0$, vá para o **passo 3**. Se não, vá para o **passo 4**.

Passo 3. Como $r > 0$, então a PA é crescente. Vá para o **passo 7**.

Passo 4. Se $r = 0$, vá para o **passo 5**. Se não, vá para o **passo 6**.

Passo 5. Como $r = 0$, então a PA é constante. Vá para o **passo 7**.

Passo 6. Como r só pode ser menor que 0, então a PA é decrescente. Vá para o **passo 7**.

Passo 7. Temos a resposta para a razão r. O algoritmo se encerra.

16. a. $r = a_2 - a_1 = -5 - (-2) = -5 + 2 = -3$

Como $r < 0$, a PA é decrescente.

$a_n = a_1 + (n-1)r$, então temos:

$a_n = -2 + (n-1) \cdot (-3) \Rightarrow a_n = 1 - 3n$

Portanto, a lei de formação dessa PA é $f(n) = a_n = 1 - 3n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b. $r = a_2 - a_1 = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$

Como $r = 0$, a PA é constante.

$a_n = a_1 + (n-1)r$, então temos:

$a_n = \sqrt{3} + (n-1) \cdot 0 \Rightarrow a_n = \sqrt{3}$

Portanto, a lei de formação dessa PA é $f(n) = a_n = \sqrt{3}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c. $r = a_2 - a_1 = 0 - (-10) = 10$

Como $r > 0$, a PA é crescente.

$a_n = a_1 + (n-1)r$, então temos:

$a_n = -10 + (n-1) \cdot 10 \Rightarrow a_n = 10n - 20$

Portanto, a lei de formação dessa PA é $f(n) = a_n = 10n - 20$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

d. $r = a_2 - a_1 = \frac{1}{500} - \frac{1}{1.000} = \frac{1}{1.000}$

Como $r > 0$, a PA é crescente.

$a_n = a_1 + (n-1)r$, então temos:

$a_n = \frac{1}{1.000} + (n-1) \cdot \frac{1}{1.000} \Rightarrow a_n = \frac{n}{1.000}$

Portanto, a lei de formação dessa PA é $f(n) = a_n = \frac{n}{1.000}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

17. $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, então:

$r = a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4$

Como $a_n = a_1 + (n-1)r$, então temos:

$a_{12} = a_1 + 11r = 1 + 11 \cdot 4 = 1 + 44 = 45$

Logo, a 12ª figura será formada por 45 bolinhas.

18. Em uma PA, temos:

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_{12} = a_1 + (12-1)r \Rightarrow 247 = 5 + 11r \Rightarrow r = \frac{242}{11} \Rightarrow r = 22$

Logo, a razão dessa PA é 22.

19. $r = 1.400$ e $a_2 = 2.000$

Temos que:

$a_8 = a_1 + (8-1)r = a_1 + 7r$

$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_1 = a_2 - r$

Logo:

$a_8 = a_2 - r + 7r = a_2 + 6r \Rightarrow a_8 = 2.000 + 6 \cdot 1.400 = 10.400$

Portanto, no oitavo dia, o atleta terá percorrido 10.400 m, ou seja, 10,4 km.

20. a. $r = 13{,}60 - 14{,}30 = -0{,}70$

b. $a_{10} = a_1 + 9r = 14{,}30 + 9 \cdot (-0{,}70) = 8$

Se alguém comprar 10 carteiras, pagará R$ 8,00 em cada unidade e, no total, pagará R$ 80,00.

c. Se comprasse 8 carteiras com o valor não promocional, a pessoa pagaria:

$8 \cdot 14{,}30 = 114{,}40$

Na promoção:

$8 \cdot a_8 = 8 \cdot (a_1 + 7r) = 8 \cdot [14{,}30 + 7 \cdot (-0{,}70)] =$

$= 8 \cdot 9{,}40 = 75{,}20$

Então, ao comprar 8 carteiras, uma pessoa pagaria R$ 114,40 pelo preço normal e R$ 75,20 pelo preço promocional. Na promoção, portanto, a economia seria de R$ 39,20.

21. a. $a_{17} = a_1 + 16r$

$-39 = a_1 + 16 \cdot 4 \Rightarrow a_1 = -39 - 64 \Rightarrow a_1 = -103$

Logo, o primeiro termo dessa PA é −103.

b. $a_{10} = a_1 + 9r$

$9 = a_1 + 9 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \Rightarrow a_1 = 9 + 1 \Rightarrow a_1 = 10$

Logo, o primeiro termo dessa PA é 10.

22. Resposta pessoal.

23. $\begin{cases} a_4 = 10 \\ a_7 + a_{13} = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3r = 10 \\ a_1 + 6r + a_1 + 12r = -25 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3r = 10 \\ 2a_1 + 18r = -25 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, encontramos:

$a_1 = \frac{85}{4}$ e $r = -\frac{15}{4}$

24. Para que a sequência $(p + 5, 3p, p^2 - 1)$ seja uma PA, devemos ter:

$3p - (p + 5) = p^2 - 1 - 3p \Rightarrow p^2 - 5p + 4 = 0 \Rightarrow p = 1$ ou $p = 4$

Logo, p pode assumir o valor 1 ou o valor 4.

25. Como $(3, x + 7, x^2 - 4, 6x)$ é uma PA, podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 7 - 3 = x^2 - 4 - (x + 7) \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 4 - (x + 7) = 6x - (x^2 - 4) \Rightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I): $x = 5$ ou $x = -3$

De (II): $x = 5$ ou $x = -\frac{3}{2}$

Assim, para satisfazer ambas as equações, x deve ser igual a 5. Então, substituindo x por 5 nos termos da PA, obtemos: $(3, 12, 21, 30)$

Logo, os lados do quadrilátero medem 3, 12, 21 e 30 unidades de comprimento, e a medida de seu perímetro é 66 unidades de comprimento.

26. Para inserir quatro meios aritméticos entre -12 e 48, vamos determinar a_2, a_3, a_4 e a_5 da PA $(-12, a_2, a_3, a_4, a_5, 48)$.

$a_1 = -12$

$a_6 = 48 \Rightarrow -12 + 5r = 48 \Rightarrow 5r = 60 \Rightarrow r = 12$

Assim:

$a_2 = -12 + 12 = 0$

$a_3 = -12 + 2 \cdot 12 = 12$

$a_4 = -12 + 3 \cdot 12 = 24$

$a_5 = -12 + 4 \cdot 12 = 36$

Logo, a sequência procurada é $(-12, 0, 12, 24, 36, 48)$.

27. A sequência dos múltiplos de 4 é uma PA de razão 4. O primeiro múltiplo de 4 compreendido entre 101 e 3.001 é $a_1 = 104$ e o último é $a_n = 3.000$.

De $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$3.000 = 104 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow 3.000 = 104 + 4n - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4n = 2.900 \Rightarrow n = 725$

Portanto, existem 725 múltiplos de 4 entre 101 e 3.001.

28. A sequência dos números pares é uma PA de razão 2.

O primeiro número par entre 23 e 987 é $a_1 = 24$ e o último é $a_n = 986$.

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 986 = 24 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 986 = 24 + 2n - 2 \Rightarrow 2n = 964 \Rightarrow n = 482$

Há 482 números pares entre 23 e 987.

29. Temos: PA $(\underset{\substack{\uparrow \\ a_1}}{10}, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ a_n}}{184})$ e $r = 6$

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 184 = 10 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 184 = 10 + 6n - 6 \Rightarrow 6n = 180 \Rightarrow n = 30$

Descontando os extremos, temos: $30 - 2 = 28$

Logo, devem ser inseridos 28 meios aritméticos.

30. **a.** $a_1 = 660$, $r = -30$ e $n = 12$, então:

$a_{12} = a_1 + 11r = 660 + 11 \cdot (-30) = 330$

Logo, o valor da última prestação foi R$ 330,00.

O valor da penúltima prestação é dado por a_{11}:

$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow a_{11} = 660 + 10 \cdot (-30) = 360$

Logo, a penúltima prestação foi R$ 360,00.

b. Soma da primeira e da última prestação: $660 + 330 = 990$

Logo, a soma é R$ 990,00.

Soma da segunda e da penúltima prestação: $630 + 360 = 990$

Logo, a soma é R$ 990,00.

c. O valor final da moto a prazo foi:

$V = 3.500 + 660 + 630 + 600 + 570 + 540 + 510 + 480 +$
$+ 450 + 420 + 390 + 360 + 330 \Rightarrow V = 9.440$

Logo, o valor final da moto a prazo foi R$ 9.440,00.

31. Utilizando $x - r$, x e $x + r$ para representar três termos consecutivos de uma PA, temos:

$$\begin{cases} (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 420 \\ (x - r) + x + (x - r) = -12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2 - r^2) \cdot x = 420 \\ 3x = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - xr^2 = 420 \\ x = -4 \end{cases}$$

Substituindo $x = -4$ na primeira equação, obtemos

$-64 + 4r^2 = 420 \Rightarrow 4r^2 = 484 \Rightarrow r^2 = 121 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 11$ ou $r = -11$

Para $r = 11$ e $x = -4$, temos a PA:

$(-15, -4, 7)$

Para $r = -11$ e $x = -4$, temos a PA:

$(7, -4, -15)$

32. $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$

$r = 1 - 3 = -2$

$f(n) = a_n = a_0 + nr = 3 - 2n$

Logo:

$f(0) = a_0 = 3$

$f(1) = a_1 = 1$

$f(2) = a_2 = -1$

$f(3) = a_3 = -3$

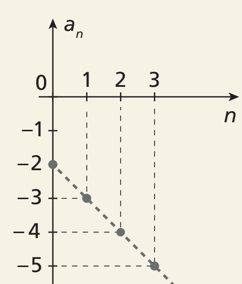
Alternativa **d**.

33. Tomando o termo geral de cada PA, podemos construir o gráfico correspondente.

a. $a_n = -n - 2$, com $n \in \mathbb{N}$

Determinação dos primeiros termos da sequência $a_n = -n - 2$

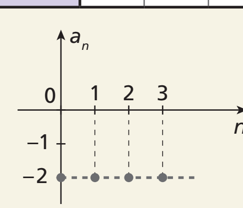
n	0	1	2	3
$a_n = -n - 2$	-2	-3	-4	-5



b. $a_n = -2$, com $n \in \mathbb{N}$

Determinação dos primeiros termos da sequência $a_n = -2$

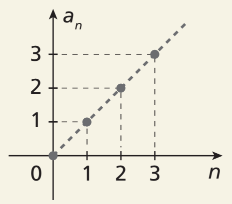
n	0	1	2	3
$a_n = -2$	-2	-2	-2	-2



c. $a_n = n$, com $n \in \mathbb{N}$

Determinação dos primeiros termos da sequência $a_n = n$

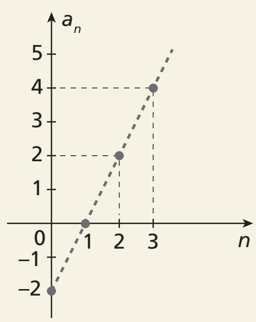
n	0	1	2	3
$a_n = n$	0	1	2	3



d. $a_n = 2n - 2$, com $n \in \mathbb{N}$

Determinação dos primeiros termos da sequência $a_n = 2n - 2$

n	0	1	2	3
$a_n = 2n - 2$	−2	0	2	4



34. $f(n) = a_n \Rightarrow f(n) = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$

Como $f(0) = -2$, então $a_0 = -2$.

Para $n = 3$, temos $f(n) = 3$, então:

$-2 + 3r = 3 \Rightarrow r = \frac{5}{3}$

Logo:

$a_1 = a_0 + r = -2 + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$

$a_2 = a_0 + 2r = -2 + \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$

$a_3 = 3$

$a_4 = a_0 + 4r = -2 + \frac{20}{3} = \frac{14}{3}$

Portanto, a PA é $\left(-2, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}\right)$.

35. a. $r = -27 - (-57) = 30$

$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot 30 = -57 + 23 \cdot 30 = 633$

$S_{24} = \frac{24 \cdot (-57 + 633)}{2} = 6.912$

b. $r = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2$

$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot 2 = \frac{2}{3} + 23 \cdot 2 = \frac{140}{3}$

$S_{24} = \frac{24 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{140}{3}\right)}{2} = 568$

c. Como a PA é constante, a soma de seus 24 primeiros termos será:

$S_{24} = 24 \cdot 7 \Rightarrow S_{24} = 168$

d. $r = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{23}{4} = \frac{21}{4}$

$S_{24} = \frac{24 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{21}{4}\right)}{2} = 57$

36. Em 12 anos temos $12 \cdot 12 = 144$ parcelas. Então, temos a seguinte PA: $(600, 605, 610, ..., a_{144})$

O valor total é a soma de todas as parcelas.

Inicialmente, devemos calcular o 144º termo dessa sequência.

$a_{144} = a_1 + 143r = 600 + 143 \cdot 5 \Rightarrow a_{144} = 1.315$

$S_{144} = \frac{144 \cdot (600 + 1.315)}{2} = 137.880$

Logo, o valor do terreno é R$ 137.880,00.

37. a. $a_8 = a_1 + 7 \cdot (-8)$

$a_8 = 140 + (-56) = 84$

Logo, no oitavo mês do plano o aluno pagará R$ 84,00.

b. $a_{12} = a_1 + 11 \cdot (-8) = 140 - 88 = 52$

$S_{12} = \frac{12 \cdot (140 + 52)}{2} = 1.152$

Então, o valor total anual será R$ 1.152,00.

c. $\frac{1.152}{12} = 96$

Logo, o valor pago por mês, em média, será R$ 96,00.

38. Sabemos que:

$a_1 = 3$, $r = 19 - 3 = 16$ e $S_n = 472$

Assim:

$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow 472 = \frac{n(3 + a_n)}{2} \Rightarrow 3n + na_n = 944 \quad \text{(I)}$

Temos também:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 3 + (n - 1) \cdot 16 = 16n - 13$

Substituindo a_n por $16n - 13$ em (I), obtemos:

$3n + n \cdot (16n - 13) = 944 \Rightarrow 16n^2 - 10n - 944 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 8$ ou $n = -\frac{59}{8}$ (não serve)

Logo, devem ser somados 8 termos dessa PA para que $S_n = 472$.

39. Como a razão r é 6, temos:

$a_{30} = a_1 + 29r \Rightarrow a_{30} = a_1 + 29 \cdot 6 \Rightarrow a_{30} = a_1 + 174$

$S_{30} = \frac{30 \cdot (a_1 + a_1 + 174)}{2} \Rightarrow 1.430 = 15(2a_1 + 174) \Rightarrow$

$\Rightarrow 30a_1 = 1.430 - 2.610 \Rightarrow 30a_1 = -1.180 \Rightarrow a_1 = -\frac{118}{3}$

Assim: $a_8 = a_1 + 7 \cdot r = -\frac{118}{3} + 42 = \frac{8}{3}$

Logo, o oitavo termo dessa PA é $\frac{8}{3}$.

40. A sequência dos múltiplos de 6 é uma PA de razão 6.

O primeiro múltiplo de 6 no intervalo]230, 650[é 234, e o último múltiplo de 6 nesse intervalo é 648.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 648 = 234 + 6n - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6n = 420 \Rightarrow n = 70$

Logo, existem 70 múltiplos de 6 entre 230 e 650.

$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{70} = \frac{70 \cdot (234 + 648)}{2} = 30.870$

Portanto, a soma dos múltiplos de 6 compreendidos entre 230 e 650 é 30.870.

41. $\frac{x}{2} + \frac{7x}{10} + \frac{9x}{10} + ... + \frac{17x}{10} = 462$

Podemos perceber que essa equação representa a soma dos termos de uma PA em que:

$r = \frac{x}{5}$, $a_1 = \frac{x}{2}$ e $a_n = \frac{17x}{10}$

Primeiro, vamos determinar o valor de n:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow \frac{17x}{10} = \frac{x}{2} + (n - 1) \cdot \frac{x}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{12x}{10} \cdot \frac{5}{x} \Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7$

Agora, vamos determinar o valor de x:

$S_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$

$462 = \frac{7\left(\frac{x}{2} + \frac{17x}{10}\right)}{2} \Rightarrow \frac{22x}{10} = \frac{462 \cdot 2}{7} \Rightarrow 22x = 132 \cdot 10 \Rightarrow x = 60$

Logo, $S = \{60\}$.

42. Representando a situação, temos:

$S_n = 448$, $a_1 = 13$, $a_2 = 15$ e $r = 2$

Assim:

$a_n = 13 + (n - 1) \cdot 2 = 11 + 2n$

$S_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow 448 = \frac{n \cdot (13 + 11 + 2n)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 448 = 12n + n^2 \Rightarrow n^2 + 12n - 448 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 16$ ou $n = -28$ (não serve)

Portanto, o número total de filas desse teatro é 16.

43. Essa PA tem $a_1 = 20$ e $r = 2{,}5$.

Então, podemos escrever a seguinte lei de formação:

$a_n = 20 + (n - 1) \cdot 2{,}5$

Calculamos então o valor de a_{40}:

$a_{40} = 20 + (40 - 1) \cdot 2{,}5 = 117{,}5$

Para encontrar a soma das medidas de comprimento dos tubos calculamos:

$S_{40} = \frac{(20 + 117{,}5) \cdot 40}{2} = 2.750$

Ou seja, teremos um total de 2.750 cm, o que corresponde a 27,50 m.

Alternativa **d**.

44. Como a PA é crescente, $r > 0$.

$(a_4)^2 = 144 \Rightarrow a_4 = 12$ (I) ou $a_4 = -12$ (II)

(I) Para $a_4 = 12$, vamos ter:

$\begin{cases} a_2 + a_3 = -26 \\ a_4 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + r + a_1 + 2r = -26 \\ a_1 + 3r = 12 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3r = -26 \\ a_1 + 3r = 12 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -38$ e $r = \frac{50}{3}$

(II) Para $a_4 = -12$, vamos ter:

$\begin{cases} a_2 + a_3 = -26 \\ a_4 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3r = -26 \\ a_1 + 3r = -12 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -14$ e $r = \frac{2}{3}$

Logo, $a_1 = -38$ e $r = \frac{50}{3}$ ou

$a_1 = -14$ e $r = \frac{2}{3}$.

- Se $a_1 = -38$ e $r = \frac{50}{3}$, temos:

  $a_5 = a_1 + 4r = -38 + \frac{200}{3} = \frac{86}{3}$

  $S_5 = \frac{5 \cdot (a_1 + a_5)}{2} = \frac{5 \cdot \left(-38 + \frac{86}{3}\right)}{2} = -\frac{70}{3}$

- Se $a_1 = -14$ e $r = \frac{2}{3}$, temos:

  $a_5 = a_1 + 4r = -14 + 4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{34}{3}$

  $S_5 = \frac{5 \cdot (a_1 + a_5)}{2} = \frac{5 \cdot \left(-14 - \frac{34}{3}\right)}{2} = -\frac{190}{3}$

Portanto, se $r = \frac{50}{3}$, então $S_5 = -\frac{70}{3}$ e, se $r = \frac{2}{3}$, então $S_5 = -\frac{190}{3}$.

45. **a.** É uma PG, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o anterior por uma constante $q = \frac{1}{4}$.

b. É uma PA, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido somando o anterior a uma constante $r = 10$.

c. É uma PG, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o anterior por uma constante $q = 2$.

d. É uma PA, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido somando o anterior a uma constante $r = 1$.

46. **a.** $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi > 1$

$a_1 = \pi > 0$

Como $q > 1$ e $a_1 > 0$, a PG é crescente.

b. Como $q < 0$ e $a_1 \neq 0$, a PG é oscilante.

c. Como $q > 1$ e $a_1 < 0$, a PG é decrescente.

d. $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = 1$

Como $q = 1$ e $a_1 \neq 0$, a PG é constante.

47. **a.** $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{12}{5}}{-3} = -\frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{5}$

- $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

  $a_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

b. $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

- $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

  $a_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3})^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c. $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{10}{\pi}}{5} = \frac{10}{\pi} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{\pi}$

- $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

  $a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

d. $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-10}{5} = -2$

- $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

  $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

48. Para representar essas progressões graficamente, para cada valor n, marcamos o valor a_n correspondente, obtendo os pontos (n, a_n) no plano cartesiano.

49. Espera-se que os estudantes percebam que os valores obtidos são estimativas, não valores exatos, assim sua parte não inteira contém a incerteza dos resultados.

50. Sim, se invertermos a ordem, a razão também será invertida, afinal calcularíamos $\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{-1} = q^{-1} = \frac{1}{q}$.

51. Como $n = 0$ passou a pertencer ao domínio, o expoente de q na lei de formação pode ser apenas n, assim temos $a_n = a_0 \cdot q^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

52. **a.** $a_1 = 4$

$a_2 = 4 \cdot 6 = 24$

$a_3 = 4 \cdot 6^2 = 144$

$a_4 = 4 \cdot 6^3 = 864$

$a_5 = 4 \cdot 6^4 = 5.184$

Logo, os cinco primeiros termos da PG são 4, 24, 144, 864 e 5.184.

b. $a_1 = x^2$

$a_2 = x^2 \cdot \frac{y}{x^3} = \frac{y}{x}$

$a_3 = x^2 \cdot \left(\frac{y}{x^3}\right)^2 = x^2 \cdot \frac{y^2}{x^6} = \frac{y^2}{x^4}$

$a_4 = x^2 \cdot \left(\frac{y}{x^3}\right)^3 = x^2 \cdot \frac{y^3}{x^9} = \frac{y^3}{x^7}$

$a_5 = x^2 \cdot \left(\frac{y}{x^3}\right)^4 = x^2 \cdot \frac{y^4}{x^{12}} = \frac{y^4}{x^{10}}$

$a_6 = x^2 \cdot \left(\frac{y}{x^3}\right)^5 = x^2 \cdot \frac{y^5}{x^{15}} = \frac{y^5}{x^{13}}$

Logo, os seis primeiros termos da PG são $x^2, \frac{y}{x}, \frac{y^2}{x^4}, \frac{y^3}{x^7}, \frac{y^4}{x^{10}}$ e $\frac{y^5}{x^{13}}$.

53. Resposta pessoal.

54. Podemos representar a situação por uma PG de $a_0 = 1$, $q = 2$ e $n = 9$ ($9 \cdot 30$ min $= 4$ h 30 min).

$a_9 = a_0 \cdot q^9 = 1 \cdot 2^9 = 512$

Logo, após 4 horas e 30 minutos, existirão 512 bactérias.

55. $\begin{cases} a_4 = a_1 \cdot q^3 = 27 \\ a_7 = a_1 \cdot q^6 = 125 \end{cases} \Rightarrow q^3 = \frac{125}{27} \Rightarrow q^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{5}{3}$

$a_4 = a_1 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 = 27 \Rightarrow a_1 = \frac{27 \cdot 27}{125} \Rightarrow a_1 = \frac{729}{125}$

Logo, o primeiro termo dessa PG é $\frac{729}{125}$.

56. $a_2 = 1$ e $a_5 = \frac{1}{343}$

Como $a_2 = a_1 \cdot q$ e $a_5 = a_1 \cdot q^4$, temos:

$a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow 1 = a_1 \cdot q \Rightarrow a_1 = \frac{1}{q}$

$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow \frac{1}{343} = \frac{1}{q} \cdot q^4 \Rightarrow q^3 = \frac{1}{343} \Rightarrow q^3 = \left(\frac{1}{7}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{1}{7}$

Logo, a razão dessa PG é $\frac{1}{7}$.

57. Na PG apresentada, temos:

$a_1 = 3$, $a_n = \frac{1}{19.683}$ e $q = \frac{1}{9}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Então:

$\frac{1}{19.683} = 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{59.049} = \left(\frac{1}{9}\right)^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$

Logo, essa PG tem 6 termos.

58. a. Nessa situação, temos uma PG e as seguintes informações:

$a_4 = 6.600$ e $q = 2$

Logo:

$a_4 = a_1 \cdot q^3$ e $a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow a_6 = a_4 \cdot q^2$

$a_6 = a_4 \cdot q^2 = 6.600 \cdot 2^2 = 26.400$

Assim, o atleta correrá 26.400 m no sexto dia de treinamento.

b. $a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow 6.600 = a_1 \cdot 2^3 \Rightarrow a_1 = 825$

Portanto, o atleta correu 825 m no primeiro dia.

59. PG $(x, 2x, x^2)$

$q = \frac{2x}{x} = 2$

Como a razão é 2, temos:

$x^2 = 2 \cdot 2x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ (não serve, pois a PG é crescente) ou $x = 4$

Logo, $x = 4$.

60. Usando x para o número a ser adicionado, $(2 + x, 6 + x, 15 + x)$ representará a PG que queremos determinar. Então:

$q = \frac{6 + x}{2 + x} = \frac{15 + x}{6 + x}$, com $x \neq -2$ e $x \neq -6$

$(6 + x)^2 = (2 + x) \cdot (15 + x) \Rightarrow 36 + 12x + x^2 = 30 + 17x + x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 17x - 12x = 36 - 30 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$

Logo, o número a ser adicionado é $\frac{6}{5}$.

61. Temos a PG $(6, a_2, a_3, a_4, a_5, 192)$

$192 = 6 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q^5 = 2^5 \Rightarrow q = 2$

Logo, a PG é (6, 12, 24, 48, 96, 192).

62. Sendo x o termo intermediário e $q \neq 0$ a razão da PG, podemos denotar os três termos consecutivos da seguinte maneira: $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$

Assim, temos:

$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + x \cdot q = 105 & \text{(I)} \\ \frac{x}{q} \cdot x \cdot x \cdot q = 27.000 & \text{(II)} \end{cases}$

De (II): $x^3 = 27.000 \Rightarrow x = 30$

Multiplicando a equação (I) por q, e substituindo x por 30 nela, temos:

$30 + 30q + 30q^2 = 105q \Rightarrow 30q^2 - 75q + 30 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow q = 2$ ou $q = \frac{1}{2}$

Então:

- para $q = 2$, os números procurados são 15, 30 e 60;
- para $q = \frac{1}{2}$, os números procurados são 60, 30 e 15.

63. Dado um quadrado cujo comprimento do lado mede a, sua área mede a^2 e o comprimento de sua diagonal mede $a\sqrt{2}$. Assim, temos a PG: $(a, a\sqrt{2}, a^2)$

$q = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$\frac{a\sqrt{2}}{a} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} \Rightarrow a = 2$

Perímetro: $4a = 4 \cdot (2) = 8$

Logo, a razão da PG é $\sqrt{2}$, e as medidas dos comprimentos do lado e do perímetro do quadrado são, respectivamente, 2 e 8.

64. a.
- Após o segundo mês:
  $C_2 = C_1 + C_1 \cdot i = C_1(1 + i) = C_0(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^2$
- Após o terceiro mês:
  $C_3 = C_2 + C_2 \cdot i = C_2(1 + i) = C_0(1 + i)^2(1 + i) = C_0(1 + i)^3$

  Logo, após o segundo mês o montante aplicado será $C_2 = C_0(1 + i)^2$ e após o terceiro mês será $C_3 = C_0(1 + i)^3$.

b. $q = \frac{C_1}{C_0} = \frac{C_0(1 + i)}{C_0} = 1 + i$

Logo, a razão é $1 + i$.

c. $C_0 = C_0(1 + i)^0$

$C_1 = C_0(1 + i)^1$

$C_2 = C_0(1 + i)^2$

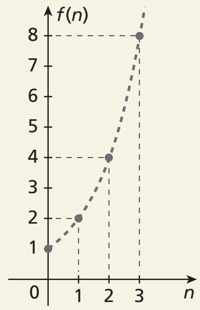
$C_3 = C_0(1 + i)^3$

$\vdots$

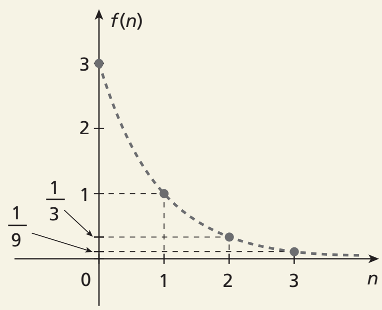
$C_n = C_0(1 + i)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

65. Considerando como domínio o conjunto dos números naturais, teremos os gráficos a seguir.

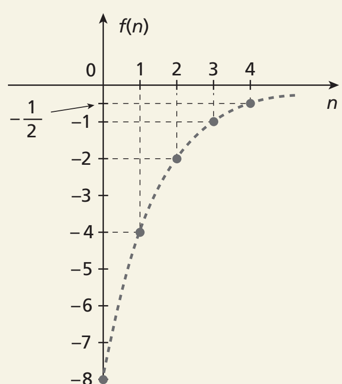
a. (1, 2, 4, 8, ...)



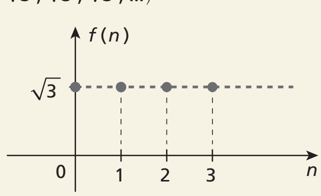
b. $\left(3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...\right)$



c. PG $\left(-8, -4, -2, -1, -\frac{1}{2}, ...\right)$



d. PG$(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, ...)$



66. a. Como o gráfico é a representação de uma PG, temos:

$f(n) = a_n = a_0 \cdot q^n$

$f(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$

$f(1) = a_0 \cdot q^1 \Rightarrow 1 \cdot q = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{4}$

Substituindo a_0 por 1 e q por $\frac{1}{4}$ na lei de formação da PG, obtemos:

$f(n) = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

b. Como a_0 é o primeiro termo, a_9 é o décimo termo.

Assim: $a_9 = f(9) = \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{1}{4^9}$

67. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 256 = a_1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_1 = \frac{256}{2^{n-1}}$ (I)

$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 504 = \frac{a_1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = a_1 \cdot (2^n - 1)$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$504 = \frac{256}{2^{n-1}} \cdot (2^n - 1) \Rightarrow 504 \cdot 2^{n-1} = 256 \cdot 2^n - 256 \Rightarrow$

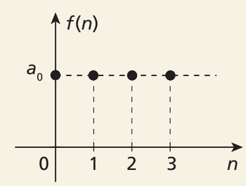
$\Rightarrow 504 \cdot \frac{2^n}{2} = 256 \cdot 2^n - 256 \Rightarrow 252 \cdot 2^n = 256 \cdot 2^n - 256 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow n = 6$

Substituindo $n = 6$ em (I), obtemos:

$a_1 = \frac{256}{2^{6-1}} \Rightarrow a_1 = 8$

68. Espera-se que os estudantes percebam que, se $q = 1$, a PG assemelha-se a uma função constante, com restrição do domínio aos números naturais. Nesse caso, a lei de formação é $f(n) = a_0$, com $n \in \mathbb{N}$.



69. Espera-se que os estudantes percebam que $S_n = a_1$ para $q = 0$. Pode-se verificar isso por meio da fórmula

$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{0 - 1} = \frac{a_1 \cdot (-1)}{-1} = a_1$.

70. Como os termos do primeiro membro formam uma PG, temos:

$a_1 = 7x$; $a_n = 189x$; $q = 3$; $S_n = 560$

Assim:

$560 = \frac{7x \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \Rightarrow 1.120 = 7x \cdot (3^n - 1)$ (I)

Sabemos também que:

$189x = 7x \cdot 3^{n-1} \Rightarrow 3^{n-1} = 27 \Rightarrow 3^{n-1} = 3^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 1 = 3 \Rightarrow n = 4$

Substituindo $n = 4$ em (I), obtemos:

$1.120 = 7x \cdot (3^4 - 1) \Rightarrow 1.120 = 560x \Rightarrow x = 2$

71. Podemos escrever a sequência do número de passageiros transportados a cada ano como uma PG.

- Para o ano de 2014, temos:
  $a_1 = 500.000$
- Para o ano de 2015, temos:
  $a_2 = 500.000 + 500.000 \cdot 0{,}04 = 500.000 \cdot (1 + 0{,}04) =$
  $= 500.000 \cdot 1{,}04 = 520.000$

A partir de 2015, o número de passageiros é igual ao número do ano anterior multiplicado por 1,04. Portanto, a razão da PG é $q = 1{,}04$.

Como devemos calcular o total de passageiros em sete anos (de 2014 a 2020), o número de elementos da PG é $n = 7$.

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG, obtemos:

$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{500.000 \cdot \left[(1{,}04)^7 - 1\right]}{1{,}04 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_7 \simeq 3.949.147$

Logo, de 2014 a 2020, foram transportados aproximadamente 3.949.147 passageiros por essa empresa de ônibus.

72. $a_1 = 25.000$; $q = 1{,}15$

$$S_{12} = \frac{a_1 \cdot (q^{12} - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{12} = \frac{25.000 \cdot (1{,}15^{12} - 1)}{1{,}15 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{12} \simeq 725.042$$

Logo, nesse ano a empresa produziu aproximadamente 725.042 unidades desse produto.

73. **Número de pessoas que receberam a mensagem por dia da semana**

Dia da semana	Número de pessoas que receberam a mensagem
Sábado	3
Domingo	$3 \cdot 3 = 9$
Segunda-feira	$9 \cdot 3 = 27$
Terça-feira	$27 \cdot 3 = 81$
⋮	⋮

O número de pessoas que receberam a mensagem a cada dia forma uma PG de $a_1 = 3$ e $q = 3$.

Para descobrir quantas pessoas receberam a mensagem até o sábado seguinte, é necessário calcular a soma dos oito primeiros termos dessa PG:

$$S_8 = \frac{a_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{3 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} = 9.840$$

Logo, até o sábado seguinte, 9.840 pessoas receberam a mensagem.

74. **a.** Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG, temos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_4 = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{16} - 1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_4 = \frac{15}{8} = 1{,}875$$

b. $S_{10} = \dfrac{1.023}{512} \simeq 1{,}998$

$S_{20} = \dfrac{1.048.575}{524.288} \simeq 1{,}999$

c. Espera-se que os estudantes percebam que, quanto maior o valor de n, mais o valor da soma se aproximará de 2.

75. Considerando que as duas sequências dadas são uma PG de mesma razão (q) e a fórmula para a soma de n termos de uma PG, temos:

$$31 = \frac{a_1 \cdot \left(q^4 - 1\right)}{q - 1} \Rightarrow \frac{31}{a_1} = \frac{q^4 - 1}{q - 1}$$

$$992 = \frac{a_6 \cdot \left(q^4 - 1\right)}{q - 1} \Rightarrow \frac{992}{a_6} = \frac{q^4 - 1}{q - 1}$$

Logo, podemos afirmar que:

$$\frac{31}{a_1} = \frac{992}{a_6} \Rightarrow a_6 = 32 a_1$$

Pela lei de formação de uma PG de razão q, sabemos que $a_6 = a_1 \cdot q^5$.

Assim, temos:

$$32 a_1 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow q = \sqrt[5]{32} \Rightarrow q = 2$$

Substituindo q por 2 na primeira igualdade, teremos:

$$31 = \frac{a_1 \cdot \left(2^4 - 1\right)}{2 - 1} \Rightarrow 31 = 31 a_1 \Rightarrow a_1 = 1$$

Assim, dados $a_1 = 1$ e $q = 2$, a sequência será (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, …) e, para encontrar $a_4 + a_5 + a_6 + a_7$, fazemos:

$8 + 16 + 32 + 64 = 120$

Alternativa **d**.

76. **a.** As parcelas formam uma PG infinita, com $a_1 = 15$ e $q = \frac{2}{3}$.

Portanto, a soma dos infinitos termos será:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{15}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{15}{\frac{1}{3}} = 15 \cdot 3 = 45$$

b. As parcelas formam uma PG infinita, com $a_1 = -\pi$ e $q = \frac{1}{2}$.

Portanto, a soma dos infinitos termos será:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{-\pi}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-\pi}{\frac{1}{2}} = -2\pi$$

77. **a.** $2 - 1 + \frac{1}{2} - \ldots$ é dada pela soma dos infinitos termos de uma PG, com $q = -\frac{1}{2}$ e $a_1 = 2$.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{2}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

b. $12 - 4 + \frac{4}{3} - \ldots$ é dada pela soma dos infinitos termos de uma PG, com $q = -\frac{1}{3}$ e $a_1 = 12$.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{12}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{12}{1 + \frac{1}{3}} = 9$$

78. Quanto maior ou quanto menor o valor de x, mais o gráfico de f se aproxima do eixo x. Portanto, quando x tende a infinito, $f(x)$ tende a zero.

79. Temos a PG (20, 10, 5, ...).

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{20}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 40$$

Para percorrer 40 km, o atleta teria que prolongar indefinidamente o seu treinamento. Logo, ele não conseguiria totalizar 40 km de corrida.

80. Sem contar a primeira queda, as medidas das distâncias percorridas pela bola formam a PG (100, 50, 25, ...), em que cada termo é a soma da medida de altura da subida com a medida da altura da subsequente queda, logo $a_1 = 100$ e $q = \frac{1}{2}$. A soma dos infinitos termos dessa PG é igual a:

$$\frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200$$

Somando a medida da distância da primeira queda: $200 + 100 = 300$.

Portanto, a medida da distância total percorrida pela bola é 300 m.

81. Os lados dos quadrados formam a PG $\left(a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{4}, ...\right)$

Então, suas áreas formam a

PG $\left(a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{8}, ...\right)$

e, assim, sucessivamente.

Temos, então, uma PG de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo a^2.

O limite da soma das áreas dos quadrados é dado por:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2$$

82. PA $\left(10, x, \frac{19}{2}\right)$

$$x - 10 = \frac{19}{2} - x \Rightarrow x = \frac{39}{4}$$

Então, temos: PG $\left(1, \frac{39}{4} - 8, y\right) \Rightarrow$ PG $\left(1, \frac{7}{4}, y\right)$

Nessa PG: $q = \frac{\frac{7}{4}}{1} = \frac{7}{4}$ e $q = \frac{y}{\frac{7}{4}} = \frac{4y}{7}$

Logo: $\frac{4y}{7} = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \frac{49}{16}$

Portanto, $x = \frac{39}{4}$ e $y = \frac{49}{16}$.

83. Da PG $\left(20, a, 5, \frac{5}{2}\right)$, podemos calcular a razão:

$$q = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$$

Assim: $a = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

A sequência $(5q, 3, b, c)$ tem:

$a_1 = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ e $a_2 = 3$.

Portanto, podemos calcular a razão:

$$r = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

Assim: $b = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$$c = b + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

Portanto, $a = 10$, $b = \frac{7}{2}$, $c = 4$, $q = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$.

84. Sendo a e x o primeiro termo e a razão da primeira sequência, respectivamente, podemos representar cada uma das sequências descritas no enunciado:

PG $\left(a, ax, ax^2, ax^3\right)$

PA $\left(a - 2, ax, ax^2, ax^3 - k\right)$

$\left(2a - 2, 2ax, 2ax^2, 2ax^3 - k\right)$

PA $\left(2a - 2, 2ax, 2ax^2 - 2, 2ax^3 - k - 7\right)$

Pela segunda sequência, considerando que se trata de uma PA, temos:

$$ax^2 - ax = ax - (a - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax^2 - 2ax + a = 2 \Rightarrow a(x - 1)^2 = 2$$

Considerando essa mesma PA, temos:

$$ax^3 - k - ax^2 = ax^2 - ax \Rightarrow ax^3 - 2ax^2 + ax = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax\left(x^2 - 2x + 1\right) = k \Rightarrow x \cdot a(x - 1)^2 = k$$

Dado que $a(x - 1)^2 = 2$, temos:

$$x \cdot 2 = k \Rightarrow 2x = k$$

Analisando a quarta sequência, que também é uma PA, temos:

$$2ax^3 - k - 7 - (2ax^2 - 2) = 2ax^2 - 2 - 2ax \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ax^3 - 4ax^2 + 2ax = k + 7 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ax\left(x^2 - 2x + 1\right) = k + 3 \Rightarrow 2ax(x - 1)^2 = k + 3$$

Como sabemos que $a(x - 1)^2 = 2$ e $2x = k$, temos:

$$2x \cdot 2 = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Dessa maneira, poderemos calcular todos os valores procurados:

$$a\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 = 2 \Rightarrow a \cdot \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow a = 8$$

Conhecidos os valores de a e de x, obtemos a PG original (8, 12, 18, 27). Para chegar à resposta, basta somar esses valores:

$8 + 12 + 18 + 27 = 65$

Alternativa **c**.

85. Como os três números estão em PA, podemos indicá-los por $x - r$, x e $x + r$. Assim:

$x - r + x + x + r = 90 \Rightarrow 3x = 90 \Rightarrow x = 30$

Logo, temos a PA $(30 - r, 30, 30 + r)$.

Acrescentando 10 ao segundo termo e 40 ao último termo, temos a PG $(30 - r, 40, 70 + r)$. Nessa PG:

$$\frac{40}{30 - r} = \frac{70 + r}{40} \Rightarrow 1.600 = 2.100 + 30r - 70r - r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 + 40r - 500 = 0 \Rightarrow r = -50 \text{ ou } r = 10$$

- Se $r = -50$, os três números serão 80, 30 e -20 (não serve, pois os três números devem ser positivos).
- Se $r = 10$, os três números serão 20, 30 e 40.

Portanto, os números são 20, 30 e 40.

86. Representando a PA e a PG, temos:

- PA $(2, a_2 + 1, a_3)$, com $a_3 > 0$
- PG $(2, a_2, a_3)$, com $a_3 > 0$

Então, podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a_2 + 1 - 2 = a_3 - (a_2 + 1) \\ \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{a_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{a_3}{2} & \text{(I)} \\ (a_2)^2 = 2a_3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo o valor de a_2 por $\frac{a_3}{2}$ na equação (II), obtemos:

$$\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 = 2a_3 \Rightarrow a_3 \cdot \left(\frac{a_3}{4} - 2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3 = 8 \text{ ou } a_3 = 0 \text{ (não serve)}$$

Logo, o terceiro termo das progressões é 8.

87. a. PA $(a_1, a_2, a_3, ...)$ e PG $(d_1, d_2, d_3, ...)$

Sabemos que:

- PA de razão $r = 4 \Rightarrow (a - 4, a, a + 4, ...)$ (I)
- PG de razão $q = r - 1 \Rightarrow q = 3$
- $d_1 = a_1 + 3 = a - 1$
- $d_2 = a_2 + 5 = a + 5$
- $d_3 = a_3 + 19 = a + 23$

Podemos, então, escrever:

PG $(a - 1, a + 5, a + 23, ...)$

Sendo $q = 3$, temos:

$$\frac{a + 5}{a - 1} = 3 \Rightarrow a + 5 = 3a - 3 \Rightarrow a = 4$$

Substituindo o valor de a em (I), obtemos: PA (0, 4, 8, ...)

Portanto: $a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $d_1 = 3$; $d_2 = 9$; $d_3 = 27$

b. O décimo termo da PA é:

$a_{10} = 0 + 9 \cdot 4 \Rightarrow a_{10} = 36$

A soma dos 10 primeiros termos da PA é:

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (0 + 36)}{2} \Rightarrow S_{10} = 180$$

c. Temos a PG (3, 9, 27, ...), com $q = 3$.

$$S_5 = \frac{3 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{3 \cdot 242}{2} = 363$$

Para finalizar o capítulo 8

Autoavaliação

Q1. (2, 5, 8, 11, ...) é uma PA e (3, 12, 48, 192, ...) é uma PG. Ambas são sequências.

Alternativa **b.**

Q2. A sequência (2, 4, 8, 16, ...) é uma PG, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o antecedente por 2.

Alternativa **c.**

Q3. $a_1 = 7$, $r = -2$ e o termo geral a_n é determinado por:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 7 + (n - 1) \cdot (-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = 9 - 2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Alternativa **d.**

Q4. Como a lei de formação de uma PA representa uma função do 1º grau com domínio $\mathbb{N}$, o gráfico de uma PA é formado por pontos que pertencem ao gráfico de uma função afim.

Alternativa **a.**

Q5. $S_{20} = \frac{20 \cdot (1 + 20)}{2} \Rightarrow S_{20} = 210$

Alternativa **c.**

Q6. $q = \frac{-6}{-2} = \frac{-18}{-6} = 3$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = (-2) \cdot 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Alternativa **b.**

Q7. Temos uma PG na qual $a_1 = 20.000$ e $q = 1{,}02$. Queremos obter o valor de a_{11}. Então: $a_{11} = 20.000 \cdot 1{,}02^{10} \simeq$ $\simeq 24.380$

Alternativa **b.**

Q8. Como a lei de formação de uma PG representa uma função exponencial com domínio $\mathbb{N}$, os pontos do gráfico da PG pertencem ao gráfico de uma função exponencial.

Alternativa **c.**

Q9. $q = \frac{24}{3} = \frac{192}{24} = 8$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_4 = \frac{3 \cdot (8^4 - 1)}{8 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_4 = \frac{3 \cdot 4.095}{7} \Rightarrow S_4 = 1.755$$

Alternativa **d.**

Q10. $q = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Alternativa **a.**

Q11. Seja a PA $(x - r, x, x + r)$.

Temos:

$x - r + x + x + r = 30 \Rightarrow x = 10$

Então, temos a PA $(10 - r, 10, 10 + r)$.

Sabemos que, adicionando 1, 2 e 9, respectivamente, a esses termos, obtemos a PG $(11 - r, 12, 19 + r)$.

Então:

$$\frac{12}{11 - r} = \frac{19 + r}{12} \Rightarrow 209 + 11r - 19r - r^2 = 144 \Rightarrow$$

$\Rightarrow r^2 + 8r - 65 = 0 \Rightarrow r = 5$ ou $r = -13$

- Se $r = 5$, temos a PA (5, 10, 15).
- Se $r = -13$, temos a PA (23, 10, −3).

Como os três números devem ser positivos, temos a PA (5, 10, 15) e, portanto, o menor deles é 5.

Alternativa **b.**

Capítulo 9 Matemática Financeira

Atividades propostas

1. De 40 lugares, 24 estão ocupados, então:

Lugares vazios: $40 - 24 = 16$

$$\frac{16}{40} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\%$$

2. a. Respostas pessoais. Caso os estudantes não encontrem no comércio promoções na razão 5 para 3, eles podem trabalhar com outras razões encontradas.

b. Resposta pessoal.

3. a. 500% de $x = \frac{500}{100} \cdot x = 5x$

Portanto, devemos multiplicar um número por 5 se quisermos 500% dele.

b. 0,15% de $x = \frac{0{,}15}{100} \cdot x = 0{,}0015x$

Devemos multiplicar um número por 0,0015 se quisermos 0,15% dele.

4. $\frac{10}{100} \cdot \frac{50}{100} = \frac{500}{10.000} = \frac{5}{100} = 5\%$

Logo, 5% dos produtos da farmácia são de uso contínuo e exigem a apresentação de receita médica.

5. De 120 kWh para 156 kWh, ocorreu um aumento de 36 kWh. A taxa percentual de aumento foi:

$$\frac{36}{120} = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$$

6. Sendo x a quantidade inicial do produto no estoque, temos:

1º dia: $x - 0{,}4x = 0{,}6x$

2º dia: $0{,}6x - 0{,}25 \cdot 0{,}6x = 0{,}45x$

Após o segundo dia, restou $0{,}45x$ do produto no estoque, ou seja, 45% do estoque do produto não foi vendido.

7. Representando a quantidade disponível do composto A por a e a quantidade disponível do composto B por b, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1.150 = 0{,}1a + 0{,}5b & \text{(I)} \\ 1.400 = 0{,}8a + 0{,}1b & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), teremos: $b = \frac{(1.400 - 0{,}8a)}{0{,}1} \Rightarrow b = 14.000 - 8a$

Substituindo em (I):

$1.150 = 0{,}1a + 0{,}5 \cdot (14.000 - 8a) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3{,}9a = 5.850 \Rightarrow a = 1.500$

Substituindo esse valor na expressão já encontrada, teremos:

$b = 14.000 - 8 \cdot 1.500 \Rightarrow b = 2.000$

A quantidade, em litros, do composto B necessária para atender ao pedido pedido pode ser calculada fazendo $(0{,}5 + 0{,}1) \cdot b$. Como $b = 2.000$, então:

$(0{,}5 + 0{,}1) \cdot 2.000 = 1.200$.

Alternativa **a**.

8. Sendo n_0 o número de casos em janeiro e n_f o número de casos após o mês de março, temos:
$n_f = n_0 \cdot (1 + 0{,}10) \cdot (1 - 0{,}10) = n_0 \cdot 0{,}99$
Ou seja, $n_f = 99\%$ de n_0; então, houve diminuição de 1% dos casos positivos da doença.

9. Chamando de V_0 o valor inicial da mercadoria e de V_f o valor final, após o aumento e um desconto percentual, ambos à mesma taxa percentual i, temos:
$V_f = V_0 \cdot (1 + i) \cdot (1 - i) = V_0 \cdot (1 - i)^2$
Como $0 < i^2$, temos: $1 - i^2 < 1$
Se multiplicarmos o valor V_0 por um número menor que 1, o novo valor será menor que V_0. Portanto, o valor final da mercadoria será menor que o valor inicial.

10. $(1 + i_{acumulada}) = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow (1 + 0{,}38) = (1 + 0{,}15) \cdot (1 + i_2) \Rightarrow 1 + i_2 = \dfrac{1{,}38}{1{,}15} \Rightarrow$
$\Rightarrow i_2 = 0{,}2 = 20\%$
Logo, a taxa de valorização no 2º mês foi de 20%.

11. **a.** Sendo i_m a taxa de inflação mensal e i_T a taxa de inflação trimestral, temos: $i_m = 5\% = 0{,}05$
$1 + i_T = (1 + 0{,}05)^3 = (1{,}05)^3 \Rightarrow 1 + i_T \simeq 1{,}158 \Rightarrow$
$\Rightarrow i_T \simeq 0{,}158 = 15{,}8\%$
Logo, a taxa de inflação trimestral é de aproximadamente 15,8%.

b. $1 + i_A = (1 + i_a)^2$, em que i_A é a inflação acumulada em 2 anos e i_a, a inflação anual.
$1 + 0{,}44 = (1 + i_a)^2 \Rightarrow 1 + i_a = 1{,}2 \Rightarrow i_a = 0{,}2 = 20\%$
Logo, a taxa de inflação média ao ano é 20%.

12. $211{,}60 = 250 \cdot \left(1 - \dfrac{p}{100}\right)^2 \Rightarrow \left(1 - \dfrac{p}{100}\right)^2 = \dfrac{211{,}60}{250}$

Usando uma calculadora, obtemos:

$\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)^2 = 0{,}8464 \Rightarrow 1 - \dfrac{p}{100} = 0{,}92 \Rightarrow \dfrac{p}{100} = 0{,}08 \Rightarrow$
$\Rightarrow p = 8$
O valor de p é 8.

13. Com os dados representados no gráfico podemos montar um quadro:

Cálculo do lucro da empresa em cada mês

Mês	Lucro = Receita – Despesa (em milhões de reais)
Janeiro	10 – 5 = 5
Fevereiro	20 – 10 = 10
Março	15 – 10 = 5
Abril	20 – 15 = 5
Maio	28 – 25 = 3

Logo, o mês com maior lucro foi fevereiro.

Alternativa **b**.

14. $P_V = P_C + P_C \cdot 0{,}06 \Rightarrow P_V = 20.000 \cdot (1{,}06) = 21.200$
O automóvel deve ser vendido por R$ 21.200,00.

15. Sabemos que $L = P_V - P_C$, então:
$L = 38.640 - 34.500 = 4.140$
Assim:
$\dfrac{L}{P_C} = \dfrac{4.140}{34.500} = 0{,}12 = 12\%$
Portanto, o lucro foi de 12% em relação ao valor de compra do terreno.

16. Preço pago por Débora: P_C
Preço que Ana pagou: $(1 - 0{,}15) \cdot P_C$
Preço que Fernando pagou: $(1 + 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}15) \cdot P_C$
$(1 + 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}15) \cdot P_C = 1.955{,}00 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1 - 0{,}0225) \cdot P_C = 1.955{,}00 \Rightarrow$
$\Rightarrow P_C = \dfrac{1.955{,}00}{0{,}9775} = 2.000{,}00$
Diferença entre os preços pagos por Débora e Fernando:
$2.000{,}00 - 1.955{,}00 = 45{,}00$
Portanto, Fernando pagaria R$ 45,00 a mais se tivesse comprado na mesma loja em que Débora comprou.

17. **a.** Da resolução da **atividade 16**, temos $P_C = 2.000{,}00$.
As informações "Débora a vendeu para Ana Paula com prejuízo de 15% em relação ao preço pago na loja" e "Ana Paula pagou R$ 1.700,00 a Débora" são equivalentes, pois
$(1 - 0{,}15) \cdot 2.000{,}00 = 1.700{,}00$.
Portanto, a inclusão da informação não traria nenhuma consequência para a resolução.

b. A inclusão "Ana Paula pagou R$ 1.600,00 a Débora" conflita com o dado "Débora a vendeu para Ana Paula com prejuízo de 15% em relação ao preço pago na loja". Consequentemente, o problema não teria solução.

c. Neste caso, trocaríamos um dado por outro equivalente e teríamos:
$(1 + 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}15) \cdot P_C = P_C - 45{,}00 \Rightarrow$
$\Rightarrow P_C = \dfrac{45{,}00}{(1 - 0{,}9775)} = 2.000{,}00$

d. Não seria possível determinar o valor da esteira.

18.
- Do enunciado, temos:
$\dfrac{L}{P_V} = 0{,}2 \Rightarrow L = 0{,}2 \cdot P_V$
Sabemos que $L = P_V - P_C$, então:
$0{,}2 \cdot P_V = P_V - P_C \Rightarrow 0{,}8 \cdot P_V = P_C$
Como $P_C = 28$, então:
$0{,}8 \cdot P_V = 28 \Rightarrow P_V = 35$
O preço de venda é R$ 35,00.
- Se o lucro fosse 20% do preço de custo, teríamos:
$\dfrac{L}{P_C} = 0{,}2 \Rightarrow L = 0{,}2 \cdot P_C$
Sabemos que $L = P_V - P_C$, então:
$0{,}2 \cdot P_C = P_V - P_C \Rightarrow 1{,}2 \cdot P_C = P_V \Rightarrow$
$\Rightarrow 1{,}2 \cdot 28 = P_V \Rightarrow P_V = 33{,}6$
O preço de venda seria R$ 33,60.

19. $\dfrac{L}{P_V} = 0{,}6 \Rightarrow L = 0{,}6 \cdot P_V$
Sabemos que $P_C = P_V - L$, então:
$P_C = P_V - 0{,}6 \cdot P_V \Rightarrow P_C = 0{,}4 \cdot P_V$

Para saber a taxa de lucro em relação ao preço de custo, devemos fazer:

$$\frac{L}{P_C} = \frac{0{,}6 \cdot P_V}{0{,}4 \cdot P_V} = \frac{0{,}6}{0{,}4} = 1{,}5 = 150\%$$

Logo, a taxa de lucro em relação ao preço de custo é de 150%.

20. a. $M = C(1 + i \cdot t)$

$M = 2.000 \cdot (1 + 0{,}24 \cdot 3) = 3.440$

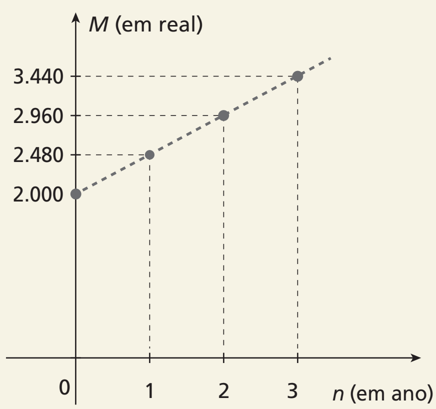
Logo, após 3 anos de aplicação, o montante será R$ 3.440,00.

b. $M = 2.000 \cdot (1 + 0{,}24n)$

$M = 2.000 + 480n$, em que M é o montante após n anos de aplicação.

c. **Montante após *n* anos da aplicação**

n (em ano)	*M* (em real)
0	2.000
1	2.480
2	2.960
3	3.440



21. A progressão aritmética formada é $(C, C + i, C + 2i, C + 3i, ...)$, em que C é o capital aplicado inicialmente e j é o juro ao fim de um período.

A razão é dada por: $(C + i) - C = i$

Portanto, a razão dessa PA é o valor do juro ao fim de um período.

22. $J = 50\% \cdot C = 0{,}5 \cdot C$

Sabemos que $J = C \cdot i \cdot t$, então:

$0{,}5 \cdot C = C \cdot 0{,}15 \cdot t \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \cancel{C} = \cancel{C} \cdot \frac{15}{100} \cdot t \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{100}{30} = t \Rightarrow t = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$

Logo, o tempo de aplicação deve ser de 3 anos e 4 meses.

23. Sabemos que $J = C \cdot i \cdot t$, então:

$J_1 = 110.000 \cdot 0{,}06 \cdot 3 = 19.800$

$J_2 = 80.000 \cdot i \cdot 3 = 240.000i$

Mas $J_1 = J_2 + 10.200$; assim:

$19.800 = 240.000\, i + 10.200 \Rightarrow$

$\Rightarrow i = \frac{19.800 - 10.200}{240.000} = 0{,}04 = 4\%$

A taxa de juro da aplicação do menor capital foi 4% ao mês.

24. a. Sabendo que $M = C(1 + i \cdot t)$, temos:

$29.000 = C_{FI}(1 + 0{,}16 \cdot 1) \Rightarrow C_{FI} = \frac{29.000}{1{,}16} \Rightarrow C_{FI} = 25.000$

Logo, o valor aplicado no FI foi R$ 25.000,00.

b. 25% ——— R$ 25.000,00

75% ——— C_F

$C_F = \frac{75 \cdot 25.000}{25} \Rightarrow C_F = 75.000$

$M_F = C_F \cdot (1 + 0{,}26 \cdot 1) \Rightarrow M_F = 75.000 \cdot 1{,}26 = 94.500$

Então, após um ano de aplicação dos R$ 75.000,00 no fundo de ações, Carina tinha um montante de R$ 94.500,00.

Assim, ao final de um ano, o montante global era de R$ 123.500,00.

Portanto, a rentabilidade global das aplicações de Carina foi de:

$\frac{123.500 - 100.000}{100.000} = 0{,}235 = 23{,}5\%$

25. a. Como Carlos pagou uma entrada de R$ 3.000,00 do valor total de R$ 11.000,00, o valor do juro será de R$ 1.000,00, pois:

$J = 9.000 - 8.000 = 1.000$

Sabendo que $J = C \cdot i \cdot t$, temos:

$1.000 = 8.000 \cdot i \cdot 2$

$i = \frac{1.000}{16.000} = 0{,}0625 = 6{,}25\%$

Logo, a taxa mensal é 6,25%.

b. Vamos determinar t para que i seja 2,5% ao mês.

$1.000 = 8.000 \cdot 0{,}025 \cdot t \Rightarrow t = \frac{1.000}{200} \Rightarrow t = 5$

Logo, a parcela deveria vencer após 5 meses.

26. Para calcular o montante que Marisa terá após um trimestre de aplicação com juros compostos, podemos usar a fórmula $M = C \cdot (1 + i)^t$.

Substituindo C por 25.000, o valor inicialmente aplicado, i por 0,02, a taxa de juros da aplicação, e t por 3, a medida do tempo, em meses, que o dinheiro ficou aplicado, obtemos:

$M = 25.000 \cdot (1 + 0{,}02)^3 \Rightarrow M = 25.000 \cdot 1{,}061208 = 26.530{,}20$

Após um trimestre de aplicação, Marisa terá R$ 26.530,20.

Alternativa **c**.

27. Do enunciado, temos $C = 500$, $i = 0{,}01$ e $t = 24$ meses. Assim, o montante ao final do período será dado por:

$M = 500 \cdot (1 + 0{,}01)^{24} \simeq 500 \cdot 1{,}26973 \simeq 634{,}87$

Portanto, após 2 anos, Celso terá, aproximadamente, R$ 634,87.

28. A progressão geométrica formada é $(C, C(1 + i), C(1 + i)^2, C(1 + i)^3, \ldots)$, em que C é o capital aplicado inicialmente e i é a taxa de juro ao fim de cada período.

A razão é dada por: $\frac{C(1 + i)}{C} = 1 + i$

Portanto, a razão dessa PG é $1 + i$.

29. Primeira aplicação:

$M_1 = C(1 + i_1)^{t_1} \Rightarrow M_1 = 1.500 \cdot (1 + 0{,}02)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_1 = 1.500 \cdot 1{,}0404 = 1.560{,}6$

Segunda aplicação:

$M_2 = M_1(1 + i_2 \cdot t_2) \Rightarrow 1.950{,}75 = 1.560{,}6 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot t_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 0{,}05 \cdot t_2 = \dfrac{1.950{,}75}{1.560{,}6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}05 \cdot t_2 = 1{,}25 - 1 \Rightarrow t_2 = \dfrac{0{,}25}{0{,}05} = 5$

Logo, o prazo da segunda aplicação foi de 5 meses.

30. Sabemos que $M = C(1 + i)^t$, então:

$13.310 = C(1 + 0{,}1)^3 \Rightarrow C = \dfrac{13.310}{(1{,}1)^3} = \dfrac{13.310}{1{,}331} = 10.000$

Logo, Mariana deve aplicar hoje um capital de R$ 10.000,00.

31. Vamos representar por i o valor da taxa de juro da aplicação e por P_t o preço de tabela da mercadoria, como na resolução da **atividade resolvida R8**. Do enunciado, sabemos que o valor à vista da mercadoria é $0{,}97 \cdot P_t$. Aplicando esse valor, o montante após 1 mês seria de:

$M = 0{,}97 \cdot P_t\,(1 + i)$

Para que o consumidor não tenha desvantagem em aplicar o valor à vista, devemos ter:

$0{,}97 \cdot P_t \cdot (1 + i) \geqslant P_t \Rightarrow 1 + i \geqslant \dfrac{1}{0{,}97} \Rightarrow i \geqslant \dfrac{0{,}03}{0{,}97} \simeq 3{,}1\%$

Portanto, a taxa procurada deve ser de, no mínimo, 3,1%.

32. Se o capital duplica em 2 meses de aplicação, então, após 2 meses, o montante será $2C$; assim:

$2C = C(1 + i)^2 \Rightarrow (1 + i)^2 = 2 \Rightarrow 1 + i = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow i = \sqrt{2} - 1 \simeq 0{,}41 = 41\%$

Logo, a taxa mensal de juro é, aproximadamente, 41%.

33. Para obter a taxa de crescimento média por ano, chamamos essa taxa de i_a e calculamos:

$1 + 700\% = (1 + i_a)^3 \Rightarrow (1 + i_a)^3 = 8 \Rightarrow 1 + i_a = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow i_a = 1 = 100\%$

Portanto, a taxa de crescimento médio por ano foi de 100%.

Por outro lado, considerando uma taxa de crescimento de 25% no primeiro ano e de 100% no segundo, temos:

$1 + 700\% = (1 + 0{,}25) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + i_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + i_3 = \dfrac{8}{1{,}25 \cdot 2} = 3{,}2 \Rightarrow i_3 = 2{,}2 = 220\%$

Portanto, a taxa de crescimento no terceiro ano foi de 220%.

34. Primeira aplicação:

$M_1 = 4.000 \cdot (1 - 0{,}40) \Rightarrow M_1 = 4.000 \cdot 0{,}6 = 2.400$

Segunda aplicação:

$M_2 = M_1 \cdot (1 + 0{,}20)^2 \Rightarrow M_2 = 2.400 \cdot 1{,}44 = 3.456$

Calculando a taxa percentual, temos:

$\dfrac{3.456}{4.000} = 0{,}864 = 86{,}4\%$

Logo, o investidor não conseguiu recuperar o dinheiro aplicado, e a taxa percentual foi de 86,4%.

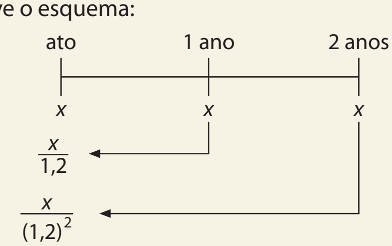
35. Resposta pessoal.

36. Fazemos:

$(1 + 0{,}06)^{12} \simeq 2{,}012 = 100\% + 101{,}2\%$

A taxa de juro anual é de, aproximadamente, 101,2%. A comparação depende da taxa de inflação da época.

37. Observe o esquema:



$x + \dfrac{x}{1{,}2} + \dfrac{x}{(1{,}2)^2} = 364.000$

$(1{,}2)^2x + 1{,}2x + x = 364.000 \cdot (1{,}2)^2$

$\Rightarrow 1{,}44x + 1{,}2x + x = 364.000 \cdot 1{,}44 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3{,}64x = 524.160 \Rightarrow x = \dfrac{524.160}{3{,}64} = 144.000$

Portanto, o valor de cada parcela é R$ 144.000,00.

38. Observe o esquema:

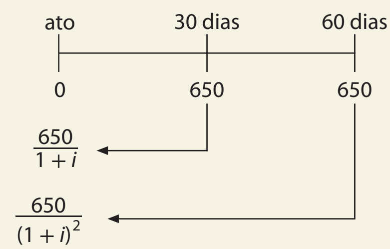
$120 + \dfrac{120}{1 + i} = 200$

$120 \cdot (1 + i) + 120 = 200 \cdot (1 + i) \Rightarrow 1 + i = \dfrac{120}{80} \Rightarrow$

$\Rightarrow i = \dfrac{3}{2} - 1 = 0{,}5 = 50\%$

Logo, a taxa mensal de juro é 50%.

39. Observe o esquema:



$0 + \dfrac{650}{1 + i} + \dfrac{650}{(1 + i)^2} = 1.200 \Rightarrow$

$\Rightarrow 650 \cdot (1 + i) + 650 = 1.200 \cdot (1 + i)^2$

Considerando $x = 1 + i$, temos:

$1.200x^2 - 650x - 650 = 0 \Rightarrow 24x^2 - 13x - 13 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{13 \pm \sqrt{1.417}}{48} \Rightarrow x \simeq 1{,}0625$ ou $x \simeq -0{,}52$ (não convém)

Então: $1 + i \simeq 1{,}0625 \Rightarrow i \simeq 0{,}0625$

Logo, a taxa mensal é de, aproximadamente, 6,25%.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

40. Vamos retirar o juro de 2 meses do valor final da dívida, que é R$ 208.080,00.

$\dfrac{208.080}{(1 + 0{,}02)^2} = \dfrac{208.080}{(1{,}02)^2} = 200.000$

Portanto, João terá de pagar R$ 200.000,00.

41. O valor do refrigerador à vista é x, tal que:

$x = 600 + \dfrac{900}{(1{,}05)^2} \simeq 600 + 816{,}33 \simeq 1.416{,}33$

Segundo o plano do consumidor, ele quer pagar R$ 600,00 de entrada e mais duas prestações mensais e iguais. Sendo y o valor de cada prestação mensal, para que o plano do consumidor seja equivalente ao plano anunciado, devemos ter:

$600 + \dfrac{y}{1{,}05} + \dfrac{y}{(1{,}05)^2} \simeq 1.416{,}33$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$y \simeq \dfrac{1.561{,}50 - 661{,}50}{2{,}05} \simeq 439{,}02$

Logo, o valor de cada parcela seria, aproximadamente, R$ 439,02.

42. Para resolver esse problema, basta montar uma planilha como esta:

B3	*Fórmula*	=B2*(1+0,006)+200

	A	B	C
1	**Período (mês)**	**Valor na poupança (R$)**	
2	0	1.000,00	
3	1	1.206,00	
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
		⋮	

Para calcular o valor que haverá na poupança ao fim de cada mês, digitamos, na célula B3, a fórmula: =B2*(1+0,006)+200 (valor do mês anterior acrescido do juro correspondente ao mês, mais o depósito de R$ 200,00). Depois, arrastamos a seleção dessa célula para baixo, até onde for necessário.

	A	B
1	**Período (mês)**	**Valor na poupança (R$)**
2	0	1.000,00
3	1	1.206,00
4	2	1.413,24
5	3	1.621,72
6	4	1.831,45
7	5	2.042,43
		⋮
15	13	3.776,56
16	14	3.999,22
17	15	4.223,22
18	16	4.448,56

Portanto, Luana conseguirá juntar R$ 4.200,00 na poupança depois de, no mínimo, 15 meses.

43. Inserindo as informações em uma planilha, temos:

B3	*Fórmula*	=B2*(1+0,08)−3000

	A	B	C
1	**Período (mês)**	**Valor da dívida (R$)**	
2	0	50.000,00	
3	1	51.000,00	
4	2		
5	3		
		⋮	
39	37		
40	38		

Para calcular o valor da dívida ao fim de cada mês, digitamos, na célula B3, a fórmula: =B2*(1+0,08)−3000 (valor da dívida no mês anterior acrescido do juro correspondente ao mês, menos o pagamento mensal de R$ 3.000,00). Depois, arrastamos a seleção dessa célula para baixo, até a célula correspondente ao mês 38.

	A	B
1	**Período (mês)**	**Valor da dívida (R$)**
2	0	50.000,00
3	1	51.000,00
4	2	52.080,00
5	3	53.246,40
		⋮
38	36	237.102,15
39	37	253.070,32
40	38	270.315,95

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, observando os dados da planilha, concluímos que o valor da dívida de Everton após 38 meses era R$ 270.315,95.

44. a. Na planilha eletrônica, compomos uma coluna com o período da aplicação em anos e outras duas com os montantes para juro simples e juro composto.

C3	*Fórmula*	=150000*(1,15)^A3

	A	B	C	D	E
1	**Período (ano)**	**Montante (juro simples) 20%**	**Montante (juro composto) 15%**		
2	0	R$ 150.000,00	R$ 150.000,00		
3	1	R$ 180.000,00	R$ 172.500,00		
4	2	R$ 210.000,00	R$ 198.375,00		
5	3	R$ 240.000,00	R$ 228.131,25		
6	4	R$ 270.000,00	R$ 262.350,94		
7	5	R$ 300.000,00	R$ 301.703,58		
8	6	R$ 330.000,00	R$ 346.959,11		
9	7	R$ 360.000,00	R$ 399.002,98		
10	8	R$ 390.000,00	R$ 458.853,43		
11	9	R$ 420.000,00	R$ 527.681,44		
12	10	R$ 450.000,00	R$ 606.833,66		
13					
14					
15					
16					

b. Sim, o rendimento do investimento no regime de juro composto supera o rendimento do investimento no regime de juro simples ao final do quinto ano.

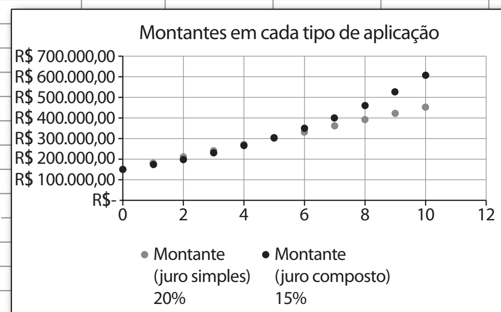
c. Montante ao final do 10º ano:
Juro simples: R$ 450.000,00
Juro composto: R$ 606.833,66
Assim, a diferença será de R$ 156.833,66 (606.833,66 − 450.000,00).

d. A melhor aplicação a ser feita no período de 10 anos é a do regime de juro composto.

e. Selecionamos as células com os dados e clicamos em "Inserir gráficos". O gráfico que melhor representa a situação é o de dispersão.

A1 | *Fórmula* | Período (ano)

	A	B	C
1	Período (ano)	Montante (juro simples) 20%	Montante (juro composto) 15%
2	0	R$ 150.000,00	R$ 150.000,00
3	1	R$ 180.000,00	R$ 172.500,00
4	2	R$ 210.000,00	R$ 198.375,00
5	3	R$ 240.000,00	R$ 228.131,25
6	4	R$ 270.000,00	R$ 262.350,94
7	5	R$ 300.000,00	R$ 301.703,58
8	6	R$ 330.000,00	R$ 346.959,11
9	7	R$ 360.000,00	R$ 399.002,98
10	8	R$ 390.000,00	R$ 458.853,43
11	9	R$ 420.000,00	R$ 527.681,44
12	10	R$ 450.000,00	R$ 606.833,66



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

45. Resposta pessoal.

As resoluções/comentários das atividades da seção *Trabalho e juventudes* – Fintechs estão nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

Para finalizar o capítulo 9

Autoavaliação

Q1. A cada 3 meninos, há 5 meninas. Então, a porcentagem de meninas da classe é:

$\frac{5}{8} = 62{,}5\%$

Alternativa **c**.

Q2. $\frac{22}{100} \cdot 300 = 66$

Alternativa **a**.

Q3. $950 \cdot 0{,}18 = 171$
O desconto será de R$ 171,00. Portanto, o cliente pagará R$ 779,00, pois $950 - 171 = 779$.
Alternativa **c**.

Q4. $x \cdot 1{,}15 = 48{,}30 \Rightarrow x = 42$
O produto custava R$ 42,00.
Alternativa **b**.

Q5. $1.000{,}00 - 885{,}00 = 115{,}00$
O aparelho teve um desconto de R$ 115,00. Calculando a porcentagem em relação ao preço original, temos:

$\frac{115}{1.000} = 0{,}115 = 11{,}5\%$

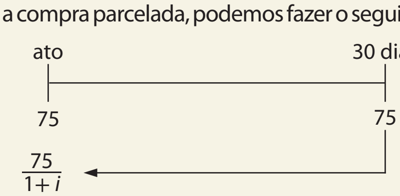
Isso significa um desconto de 11,5% do valor inicial.
Alternativa **d**.

Q6. $M = C \cdot (1 + 0{,}04) \cdot (1 - 0{,}04) \Rightarrow M = C \cdot (1{,}04) \cdot (0{,}96) = 0{,}9984C$
Como $0{,}9984C < C$, então, houve prejuízo.
Alternativa **b**.

Q7. No regime de juro simples, o juro incide apenas sobre o capital investido, e o montante resgatado nesse regime depende do capital, do tempo de aplicação e da taxa de juro.
Alternativa **c**.

Q8. No regime de juro composto, o rendimento obtido ao final de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem a um novo montante. A partir daí, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior.
Alternativa **a**.

Q9. Valor à vista: $150 \cdot (1 - 0{,}1) = 135$
Para a compra parcelada, podemos fazer o seguinte esquema:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim:

$75 + \frac{75}{1+i} = 135 \Rightarrow \frac{75}{1+i} = 60 \Rightarrow 1 + i = \frac{75}{60} \Rightarrow i = 25\%$

Alternativa **d**.

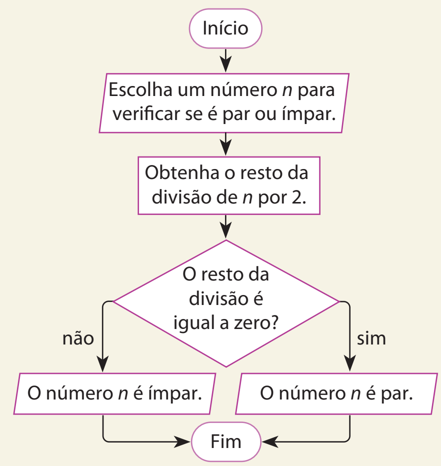
Q10.
- Saldo no começo da aplicação (após o 1º depósito): 300
- Saldo no final do 1º mês (após o 2º depósito):
$300 \cdot (1 + 0{,}02) + 300 = 306 + 300 = 606$
- Saldo no final do 2º mês (após o 3º depósito):
$606 \cdot (1{,}02) + 300 = 618{,}12 + 300 = 918{,}12$

Portanto, o saldo da aplicação após o 3º depósito era de R$ 918,12.
Alternativa **a**.

Capítulo 10 Algoritmos e introdução à programação

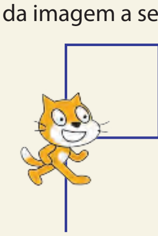
Atividades propostas

1. Resposta pessoal. Com base nos exemplos apresentados no capítulo, os estudantes podem responder que já utilizaram algoritmos enquanto cozinhavam, treinavam algum esporte, ou jogavam algum jogo eletrônico.
2. Resposta possível:
   Passo 1. Considere uma medida de temperatura *c* em grau Celsius.
   Passo 2. Adicione 273 a *c*.
   Passo 3. Obtenha a medida de temperatura *k* em Kelvin.
3. Resposta possível: Adotando os mesmos oito passos, pode-se produzir um algoritmo que utilize menos água, ensaboando todos os utensílios antes de abrir a torneira para enxaguá-los, obtendo a sequência:
   Passo 1. Ensaboe os copos.
   Passo 2. Ensaboe os talheres.
   Passo 3. Ensaboe os pratos.
   Passo 4. Abra a torneira.
   Passo 5. Enxágue os copos.
   Passo 6. Enxágue os talheres.
   Passo 7. Enxágue os pratos.
   Passo 8. Feche a torneira.
4. Resposta pessoal. O algoritmo estabelecido pelos estudantes pode envolver o deslocamento pela reta que liga os pontos *A* e *B*, mas nesse caso é importante que eles esclareçam qual é essa reta. Outra possibilidade é descrever apenas movimentos paralelos aos eixos das abscissas e das ordenadas.
5. Seguindo o fluxograma da **atividade resolvida R2** para determinar a_5, escolhemos $n = 5$ no **passo 1** e, em seguida, estabelecemos $a_1 = 3$. Como $1 \neq 5$, passamos para o cálculo do próximo termo da sequência, somando 7 a a_1 e obtendo $a_2 = 10$. Novamente, o termo atual ainda não corresponde ao *n* escolhido, então calculamos o próximo termo da sequência, $a_3 = 10 + 7 = 17$, que novamente não é o termo que queremos descobrir. Calculamos ainda $a_4 = 17 + 7 = 24$, antes de enfim calcular $a_5 = 24 + 7 = 31$, e, como $5 = 5$, encontramos o termo da sequência que procurávamos e encerramos o algoritmo.
   Para encontrar a_7, escolhemos $n = 7$ no **passo 1** do fluxograma, e executamos os mesmos passos do caso anterior, até calcular $a_5 = 31$. Como temos $5 \neq 7$, calculamos ainda $a_6 = 31 + 7 = 38$, verificamos que esse ainda não é o termo correspondente ao *n* desejado, e enfim calculamos $a_7 = 38 + 7 = 45$, que é o termo desejado e podemos encerrar o algoritmo.
6. No fluxograma apresentado, podemos incluir as etapas III, "ensaboe as mãos", e V, "esfregue bem todas as partes da mão até o pulso", nos **passos 1** e **2**, respectivamente. Assim, a etapa II, que contém uma questão, fica como **passo 3**, no qual se deve tomar uma decisão. Em seguida, as etapas I, "abra a torneira", IV, "enxague as mãos", e VI, "feche a torneira", podem representar os **passos 4**, **5** e **6**. A etapa VII, "seque as mãos", seria o último passo para finalizar o algoritmo. Assim, temos:
   Passo 1. Ensaboe as mãos.
   Passo 2. Esfregue bem todas as partes da mão até o pulso.
   Passo 3. As mãos estão limpas?
   Passo 4. Abra a torneira.
   Passo 5. Enxágue as mãos.
   Passo 6. Feche a torneira.
   Passo 7. Seque as mãos.
7. Espera-se que os estudantes percebam que os passos após a escolha estão trocados. Caso a alternativa escolhida na pergunta "A quantidade *n* de bananas é menor do que uma dúzia?", do **passo 2**, fosse "Sim", o passo seguinte deveria ser "O valor a ser pago pelas bananas é 0,8*n*.", não 0,5*n*.
8. Resposta possível:

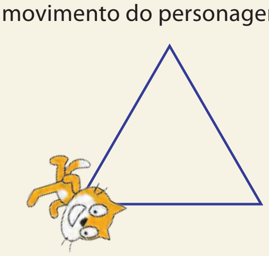


RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

9. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que o fluxograma é mais adequado, pois é possível verificar visualmente qual é o conjunto de instruções que se repete.
10. Os estudantes podem simular a execução do algoritmo no papel, movendo certa distância na vertical para cima, metade dessa distância na horizontal para a esquerda, metade da distância na vertical para baixo e metade da distância na horizontal para a direita, formando assim algo parecido com a letra P.
    Eles podem também executar o algoritmo no Scratch, obtendo o resultado da imagem a seguir:



11. **a.** Analisando o algoritmo, pode-se notar que o personagem se movimentará três vezes, além de girar duas vezes no sentido anti-horário em 120°. Como a medida da abertura do ângulo complementar a 120° é 60°, e os três segmentos de movimento têm a mesma medida, percebe-se a finalidade de desenhar um triângulo equilátero com o movimento do personagem.



ILUSTRAÇÕES: SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE, EUA

b. Resposta possível:
Passo 1. Iniciar quando a tecla "espaço" for pressionada.
Passo 2. Usar a caneta.
Passo 3. Mover 100 passos para frente.
Passo 4. Girar 120° no sentido anti-horário.
Passo 5. Mover 100 passos para frente.
Passo 6. Girar 120° no sentido anti-horário.
Passo 7. Mover 100 passos para frente.

12. No algoritmo I, a soma vai ser realizada antes da multiplicação, enquanto no algoritmo II a multiplicação será realizada antes. Como na expressão apresentada pelo enunciado não há parênteses, a multiplicação deve ser realizada primeiro, assim o algoritmo II fará o personagem dizer o valor da expressão.

13. a. No algoritmo apresentado, são utilizadas duas variáveis, nomeadas COMPRIMENTO e ALTURA.

b. Como o algoritmo pede as medidas do comprimento e da altura de um retângulo, e depois retorna o produto das duas, pode-se deduzir que o objetivo dele é calcular a medida da área de um retângulo descrito pelo usuário.

14. Como a condição a ser preenchida é a que responderá se o número é divisível por 7, então ela deve ser "resto de *resposta* por 7 = 0", assim os valores a serem escritos nos espaços são 7 e 0.

15. a. Dados os passos do algoritmo apresentado, o primeiro bloco deve ser o bloco C, e nele deve ser escrito "Qual é o número natural?".

b. Os blocos F, E, B e G são os utilizados para indicar a condição.

I. O bloco G deve ser arrastado para o espaço da esquerda do bloco B, e o espaço da direita do bloco B deve ser preenchido com o número 2.

II. O bloco obtido em I deve ser arrastado para o espaço da esquerda do bloco E, e o espaço da direita do bloco E deve ser preenchido com o número 0.

III. O bloco obtido em II deve ser arrastado para o espaço do bloco F.

c. Os blocos A e D devem ser inseridos na estrutura de condição. O bloco A primeiro, como resposta positiva à condição, e o bloco D depois, como resposta negativa.

16. Os estudantes podem simular a execução desse algoritmo no papel, atentando-se ao fato de que a direção dada pelo programa parte da direção para cima, indicada pelo 0, e segue no sentido horário, sendo dada pela medida de abertura do ângulo formado com a vertical. Assim, o rastro deixado seria duas repetições de um movimento de subida em 30° e uma descida em 150°, formando algo parecido com a letra M.
Eles podem também executar o algoritmo no Scratch, obtendo o resultado da imagem a seguir:

17. A sequência gerada é dada pelos valores alcançados pela variável, que são acrescidos de 2 em 2 até chegar ao 10, e "ditos" pelo personagem. Assim, encontra-se (2, 4, 6, 8, 10).

18. a. A sequência gerada pelo fluxograma apresentado se inicia no 0; cada termo seguinte é incrementado em 5 em relação ao anterior, e para quando um termo for maior ou igual a 45. Assim, a sequência é (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45).

b. Resposta possível:

ILUSTRAÇÕES: SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE, EUA

As resoluções/comentários das atividades da seção *Trabalho e juventudes – O programador e o desenvolvimento de jogos digitais* estão nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

Para finalizar o capítulo 10

Autoavaliação

Q1. No decorrer do capítulo vimos que um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para realizar uma tarefa, podendo executar mais que contas, ser representado graficamente e não é exclusivamente relacionado a computadores.
Alternativa **c**.

Q2. Como vimos no capítulo, um símbolo de decisão em fluxogramas é representado por um losango e não por uma seta. Ele tampouco representa uma ação realizada, uma saída de dados, ou seu início ou fim.
Alternativa **b**.

Q3. Um laço de repetição repete um conjunto de passos, podendo incluir entrada de dados e realizar operações, e, quando preparado corretamente, não impede o fim do algoritmo. Para isso, ele precisa de uma condição de parada bem definida e que deve ser atingida.
Alternativa **c**.

Q4. No contexto dos algoritmos, uma variável armazena valores que podem até ser diferentes de números, não se restringindo a valores numéricos ou cadeias de caracteres. Também pode ter seus valores alterados e ser utilizada em operações matemáticas.
Alternativa **a**.

Q5. O algoritmo apresentado verificará, na sua estrutura de condição, se o número natural digitado pelo usuário é maior que 99, com a intenção de responder se ele tem mais de dois algarismos.
Alternativa **d**.

As resoluções/orientações das atividades das seções *Educação midiática – O que há por trás dos dados?* e *Pesquisa e ação – Telejornal* encontram-se nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

Prepare-se para o Enem e vestibulares

1. Para determinar a medida de volume de inseticida liberada a cada acionamento, é necessário primeiro determinar a quantidade de acionamentos dele. Como ele é acionado a cada 48 minutos e funciona 24 horas por dia durante 60 dias, calcula-se:

$$\frac{24 \cdot 60}{\frac{48}{60}} = \frac{1.440}{0,8} = 1.800$$

Dados a medida de capacidade total do recipiente de 360 mL e o total de acionamentos, basta realizar a divisão $\frac{360}{1.800} = 0,2$ para encontrar a medida de volume de 0,200 mL por acionamento do borrifador.
Alternativa **b**.

2. Da proposição de Drucker, verifica-se que o conjunto **A** deve estar todo dentro do conjunto **B**, afinal toda inovação eficaz é "surpreendentemente simples". Assim, o único diagrama que corretamente representa as duas afirmações é o da alternativa **a**.
Alternativa **a**.

3. Pelo descrito no enunciado, a cada processo completo de retirada de alimento e entrega realizada, o entregador recebe R$ 3,20 + R$ 1,40 = R$ 4,60, além do valor de R$ 1,10 por quilômetro rodado. Assim, dados x quilômetros rodados, o valor em reais que o entregador deve receber do aplicativo por processo completo é dado por $y = 4,60 + 1,10x$.
Alternativa **b**.

4. Os pontos que têm coordenadas inteiras na função apresentada são aqueles com x inteiro e múltiplo de 6 para que $\frac{5}{6}x$ seja inteiro. Para que que a ordenada seja um número divisível por 6, é necessário que x seja múltiplo de 36 para garantir que $\frac{5}{6}x$ seja um número inteiro e múltiplo de 6. Os únicos múltiplos de 36 no intervalo [0, 50] são 0 e 36, então os pontos de coordenadas inteiras com ordenada divisível por 6 são (0, 0) e (36, 30).
Alternativa **c**.

5. Pela função dada no enunciado, pode-se perceber que ela intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 6), pois o eixo das ordenadas é dado pelos pontos com $x = 0$ e $f(0) = 6$. Além disso, ela apresenta duas raízes, – 2 e 3 (pontos de intersecção com o eixo das abscissas), e tem vértice no ponto (0,5; 6,25). Como o coeficiente a da função é igual a -1, sua parábola tem concavidade voltada para baixo, logo ela é crescente para todo valor de abscissa menor que o x do vértice, ou seja, para $x < \frac{1}{2}$.
Alternativa **a**.

6. Como o balde está com 50% da medida de sua capacidade ocupada, ainda são necessários 50% • 18 L = 9 L para enchê-lo completamente. A cada segundo são acrescentados $5 \cdot 5 \cdot 10^{-2}$ mL de água ao balde, e uma hora tem 3.600 segundos, então $3.600 \cdot 25 \cdot 10^{-2}$ mL = $= 9 \times 10^{-1}$ L são acrescentados por hora ao balde. Realizando a divisão $\frac{9}{9 \cdot 10^{-1}} = 1 \cdot 10^1$, encontra-se a medida de tempo, em hora, necessária para encher o balde.
Alternativa **b**.

7. Pelas propriedades de logaritmo estudadas, calculamos:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(100x) = \log_{10}\frac{1}{x} + \log_{10} 100x =$$
$$= \log_{10} 1 - \log_{10} x + \log_{10} 100 + \log_{10} x =$$
$$= \log_{10} 1 + \log_{10} 100 = 0 + 2 = 2$$

Alternativa **b**.

8. Do enunciado, pode-se calcular a razão da PA por $r = 126 - 120 = 6$. Como o pagamento seria realizado em 24 parcelas, calculamos o valor da última parcela: $a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot r = 120 + 23 \cdot 6 = 120 + 138 = 258$. Então, calcula-se a soma das parcelas:

$$S_{24} = \frac{24 \cdot (a_1 + a_{24})}{2} = 12 \cdot (120 + 258) = 12 \cdot 378 = 4.536$$

Como a 19ª parcela não foi paga, devemos subtrair o valor de a_{19} desse total. Assim, calculamos:
$a_{19} = a_1 + (19 - 1) \cdot r = 120 + 18 \cdot 6 = 228$
Portanto, o valor total pago em reais por Joana foi de $4.536 - 228 = 4.308$.
Alternativa **d**.

9. Primeiro, para encontrar a razão da PG apresentada, calculamos:

$$q = \frac{\frac{x}{3}}{x} = \frac{1}{3}$$

Utilizando a fórmula para a soma dos infinitos termos de uma PG, encontramos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3x}{2}$$

Igualando esse valor ao segundo termo da soma apresentada no enunciado, temos: $\frac{3x}{2} = 18 \Rightarrow x = 12$
Alternativa **d**.

10. Chamando o PIB de 2021 do país X de x e sua população no mesmo ano de p, temos que seu PIB *per capita* era de $\frac{x}{p}$. Em 2022, os dados desse país apontaram que o PIB cresceu 18%, passando a valer $x + 0,18x = 1,18x$. No mesmo período, sua população cresceu 10%, equivalendo a $p + 0,1p = 1,1p$. Assim, seu PIB *per capita* em 2022 foi de $\frac{1,18x}{1,1p} \simeq 1,07\frac{x}{p}$, representando um crescimento de, aproximadamente, 7% no período.
Alternativa **a**.

ISBN 978-85-16-13968-1