MODERNA EM AÇÃO

MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

VOLUME
III

ENSINO MÉDIO
3º ANO

Organizadora:
Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Mara Regina Garcia Gay

Área de conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Componente curricular:
Matemática

MODERNA

MODERNA EM AÇÃO

MATEMÁTICA

VOLUME III

ENSINO MÉDIO – 3º ANO

Área de conhecimento: Matemática e suas Tecnologias
Componente curricular: Matemática

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Mara Regina Garcia Gay
Bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Especialista em Educação Matemática: Fundamentos Teóricos e Metodológicos pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Licenciada em Pedagogia pela Universidade Iguaçu (RJ). Professora. Editora.

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição
São Paulo, 2024

MODERNA

Elaboração dos originais:

Mara Regina Garcia Gay
Bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Especialista em Educação Matemática: Fundamentos Teóricos e Metodológicos pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Licenciada em Pedagogia pela Universidade Iguaçu (RJ). Professora. Editora.

Carlos Eduardo Marques
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Mateus Coqueiro Daniel de Souza
Mestre em Ciências no Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Paulo César Rodrigues dos Santos
Bacharel em Sistemas de Informação pela Universidade de São Paulo. Editor.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Selene Coletti
Licenciada em Pedagogia pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras "Prof. José Augusto Vieira" (MG). Professora.

Tatiana Aleixo Bologna
Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR). Editora e professora.

Organização dos objetos digitais: Mara Regina Garcia Gay
Elaboração dos objetos digitais: Mara Regina Garcia Gay, Mateus Coqueiro Daniel de Souza

Edição de texto: Carlos Eduardo Marques, Mateus Coqueiro Daniel de Souza, Paulo César Rodrigues dos Santos
Assistência editorial: Ivan Kuvasney Lima, Cintia Alessandra Valle Burkert Machado
Preparação de texto: Magna Reimberg Teobaldo, Mariane de Mello Genaro Feitosa
Gerência de planejamento editorial e revisão: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de revisão: Elaine C. del Nero, Mônica Rodrigues de Lima
Revisão: Alessandra A. Felix, Ana Cortazzo, Érika Kurihara, ReCriar Editorial, Renato da Rocha, Rita de Cássia Sam, Roseli Simões, Sirlene Prignolato, Tatiana Malheiro
Gerência de *design*, produção gráfica e digital: Patricia Costa
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Bruno Tonel, Vinicius Rossignol
Capa: Everson de Paula, Paula Miranda Santos
Foto: Parsadanov/Shutterstock
Ilustrações de vinhetas: Bruno Tonel, Vinicius Rossignol
Coordenação de produção gráfica: Aderson Oliveira
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Marcel Hideki Yonamine, Rafael Migliatti de Oliveira
Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica LTDA
Coordenação de pesquisa iconográfica: Flávia Aline de Morais
Pesquisa iconográfica: Pamela Rosa
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moderna em ação matemática / organização Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Mara Regina Garcia Gay. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2024.

3º ano : ensino médio : volume III.
Componente curricular: Matemática.
Área de conhecimento: Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-16-13975-9 (aluno)
ISBN 978-85-16-13976-6 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Gay, Mara Regina Garcia.

24-225593 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Canal de atendimento: 0303 663 3762
www.moderna.com.br
2024
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Esta obra foi criada especialmente para você, estudante, que deseja entender e dominar conceitos matemáticos, envolvidos em diferentes contextos, de forma clara e acessível. Este projeto foi pensado para oferecer uma coleção de Matemática que a relacione com aspectos da realidade social, econômica e cultural do país, priorizando a compreensão, o incentivo à leitura e a atribuição de significado aos temas e conceitos abordados.

Em cada volume, estão presentes avaliações diagnósticas (uma no início e outra no meio do volume) que permitem a você identificar o que já sabe sobre determinados temas. No início de cada capítulo, há uma situação contextualizada, que, por meio de imagens e textos, busca despertar seu interesse para o que será estudado. Em seguida, a teoria é explorada com exemplos, atividades resolvidas e atividades propostas. Ao final de cada capítulo, a seção *Para finalizar* oferece recursos de verificação do aprendizado.

As seções *Trabalho e juventudes*, *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares* complementam e enriquecem a obra.

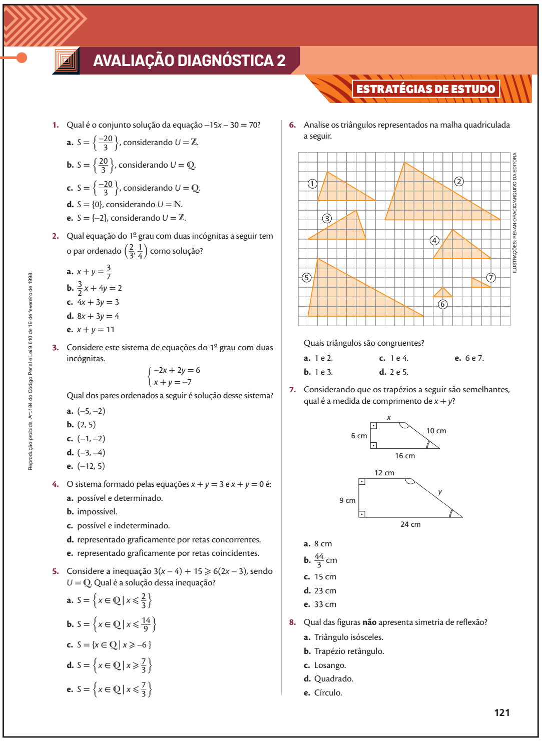
Esperamos que tanto você, estudante, quanto o professor encontrem nesta obra os recursos para o bom desenvolvimento da aprendizagem. Nosso objetivo é tornar o aprendizado de Matemática envolvente e significativo. Que este livro seja uma ferramenta valiosa tanto em sala de aula quanto para o estudo em casa, ajudando a despertar a curiosidade e o interesse pelos conceitos matemáticos e pela presença da ciência Matemática na vida. Desejamos que cada página contribua para o sucesso e o desenvolvimento de todos os envolvidos.

Os editores

ORGANIZAÇÃO DA OBRA

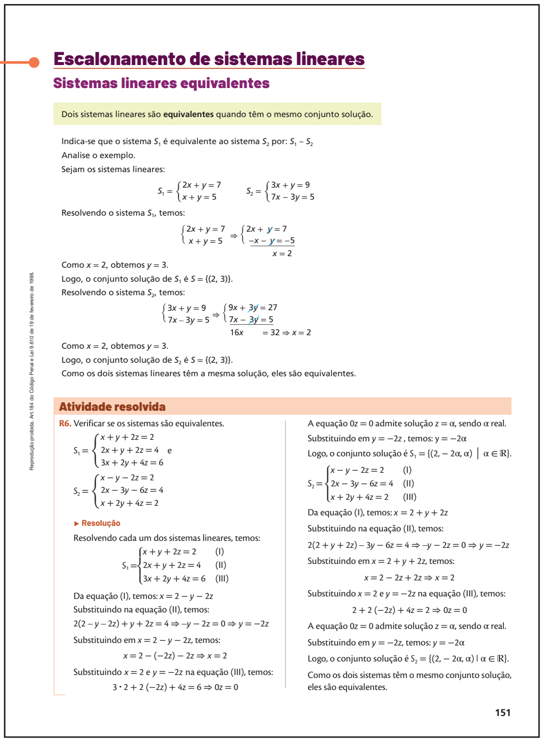
Avaliação diagnóstica

Nesta seção, que aparece em dois momentos no volume, você vai verificar seus conhecimentos sobre os conteúdos estudados anteriormente.



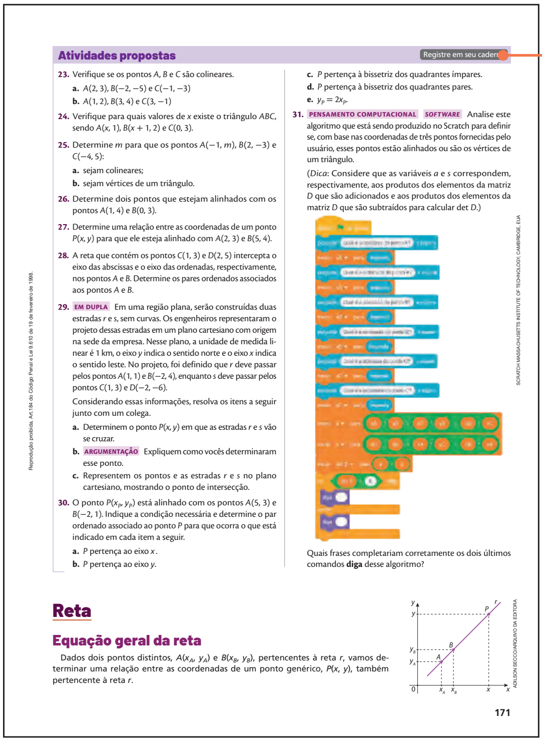
Abertura de capítulo

O tema do capítulo é introduzido por meio de uma imagem motivadora e um breve texto.



Apresentação de conteúdos

Os conteúdos são apresentados com linguagem clara e objetiva, acompanhados de exemplos e atividades resolvidas.



Atividades propostas

São propostas atividades em ordem crescente de dificuldade. Algumas delas recebem *tags* especiais, conforme a legenda a seguir:

EM DUPLA
Você fará a atividade com um colega.

EM GRUPO
Mais de um colega resolverá a atividade com você.

ARGUMENTAÇÃO
Ao resolver a atividade, você desenvolverá sua capacidade de pensar criticamente e articular ideias de maneira clara e convincente.

SOFTWARE
Você terá oportunidade de utilizar determinados *softwares* educativos.

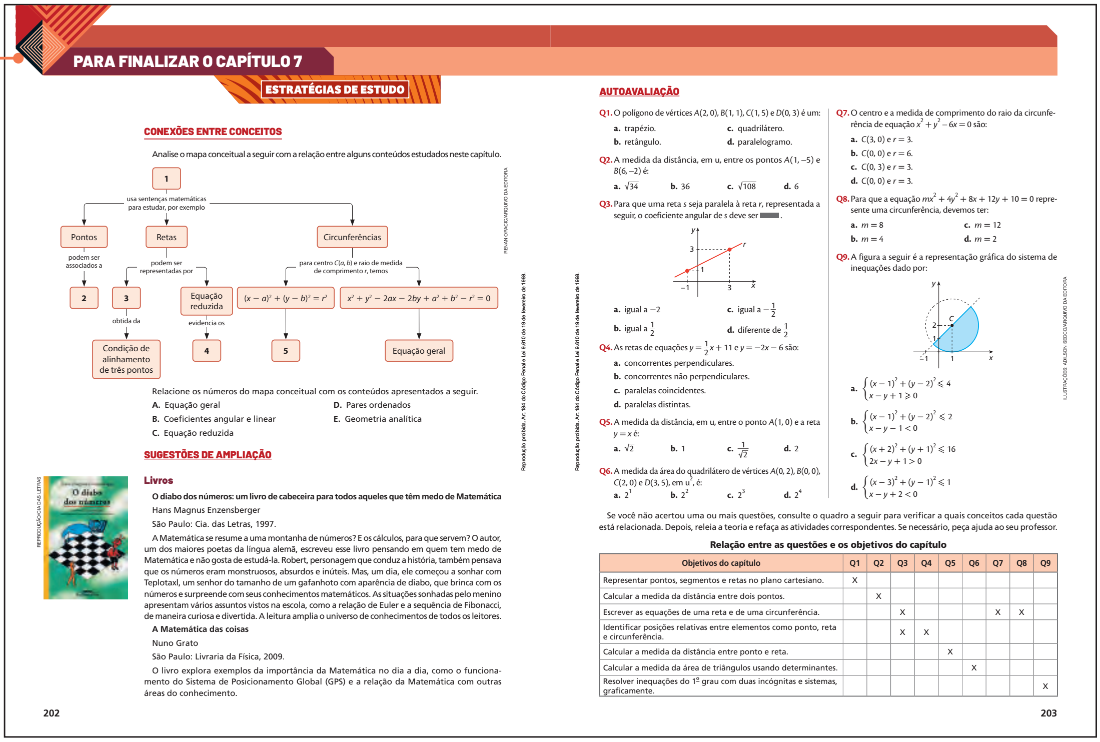
PENSAMENTO COMPUTACIONAL
Você resolverá problemas que envolvem a criação ou a análise de um algoritmo, passo a passo, que leva à solução.

ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS
Você criará questões ou enunciados de problemas.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA
Ao resolver a atividade, você conhecerá fatos históricos ligados à Matemática.

Trabalho e juventudes

Nesta seção, você vai explorar temas como profissões, tributos, igualdade de condições, inclusão, segurança no trabalho, entre outros.



PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 7

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.

1
usa sentenças matemáticas para estudar, por exemplo
Pontos
Retas
Circunferências
podem ser associados a
podem ser representadas por
para centro $C(a, b)$ e raio de medida de comprimento r, temos
2
3
Equação reduzida
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$
obtida da
evidencia os
Condição de alinhamento de três pontos
4
5
Equação geral

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Equação geral
B. Coeficientes angular e linear
C. Equação reduzida
D. Pares ordenados
E. Geometria analítica

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livros

O diabo dos números: um livro de cabeceira para todos aqueles que têm medo de Matemática
Hans Magnus Enzensberger
São Paulo: Cia. das Letras, 1997.

A Matemática se resume a uma montanha de números? E os cálculos, para que servem? O autor, um dos maiores poetas da língua alemã, escreveu esse livro pensando em quem tem medo de Matemática e não gosta de estudá-la. Robert, personagem que conduz a história, também pensava que os números eram monstruosos, absurdos e inúteis. Mas, um dia, ele começou a sonhar com Teplotaxl, um senhor do tamanho de um gafanhoto com aparência de diabo, que brinca com os números e surpreende com seus conhecimentos matemáticos. As situações sonhadas pelo menino apresentam vários assuntos vistos na escola, como a relação de Euler e a sequência de Fibonacci, de maneira curiosa e divertida. A leitura amplia o universo de conhecimentos de todos os leitores.

A Matemática das coisas
Nuno Grato
São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro explora exemplos da importância da Matemática no dia a dia, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento.

REPRODUÇÃO/CIA DAS LETRAS

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

202

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. O polígono de vértices $A(2, 0)$, $B(1, 1)$, $C(1, 5)$ e $D(0, 3)$ é um:
a. trapézio.
b. retângulo.
c. quadrilátero.
d. paralelogramo.

Q2. A medida da distância, em u, entre os pontos $A(1, -5)$ e $B(6, -2)$ é:
a. $\sqrt{34}$ **b.** 36 **c.** $\sqrt{108}$ **d.** 6

Q3. Para que uma reta s seja paralela à reta r, representada a seguir, o coeficiente angular de s deve ser ▬.

a. igual a -2
b. igual a $\frac{1}{2}$
c. igual a $-\frac{1}{2}$
d. diferente de $\frac{1}{2}$

Q4. As retas de equações $y = \frac{1}{2}x + 11$ e $y = -2x - 6$ são:
a. concorrentes perpendiculares.
b. concorrentes não perpendiculares.
c. paralelas coincidentes.
d. paralelas distintas.

Q5. A medida da distância, em u, entre o ponto $A(1, 0)$ e a reta $y = x$ é:
a. $\sqrt{2}$ **b.** 1 **c.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d.** 2

Q6. A medida da área do quadrilátero de vértices $A(0, 2)$, $B(0, 0)$, $C(2, 0)$ e $D(3, 5)$, em u^2, é:
a. 2^1 **b.** 2^2 **c.** 2^3 **d.** 2^4

Q7. O centro e a medida de comprimento do raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x = 0$ são:
a. $C(3, 0)$ e $r = 3$.
b. $C(0, 0)$ e $r = 6$.
c. $C(0, 3)$ e $r = 3$.
d. $C(0, 0)$ e $r = 3$.

Q8. Para que a equação $mx^2 + 4y^2 + 8x + 12y + 10 = 0$ represente uma circunferência, devemos ter:
a. $m = 8$
b. $m = 4$
c. $m = 12$
d. $m = 2$

Q9. A figura a seguir é a representação gráfica do sistema de inequações dado por:

a. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 2 \\ x - y - 1 < 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 16 \\ 2x - y + 1 > 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1 \\ x - y + 2 < 0 \end{cases}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9
Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.	X								
Calcular a medida da distância entre dois pontos.		X							
Escrever as equações de uma reta e de uma circunferência.			X				X	X	
Identificar posições relativas entre elementos como ponto, reta e circunferência.			X	X					
Calcular a medida da distância entre ponto e reta.					X				
Calcular a medida da área de triângulos usando determinantes.						X			
Resolver inequações do 1º grau com duas incógnitas e sistemas, graficamente.									X

203

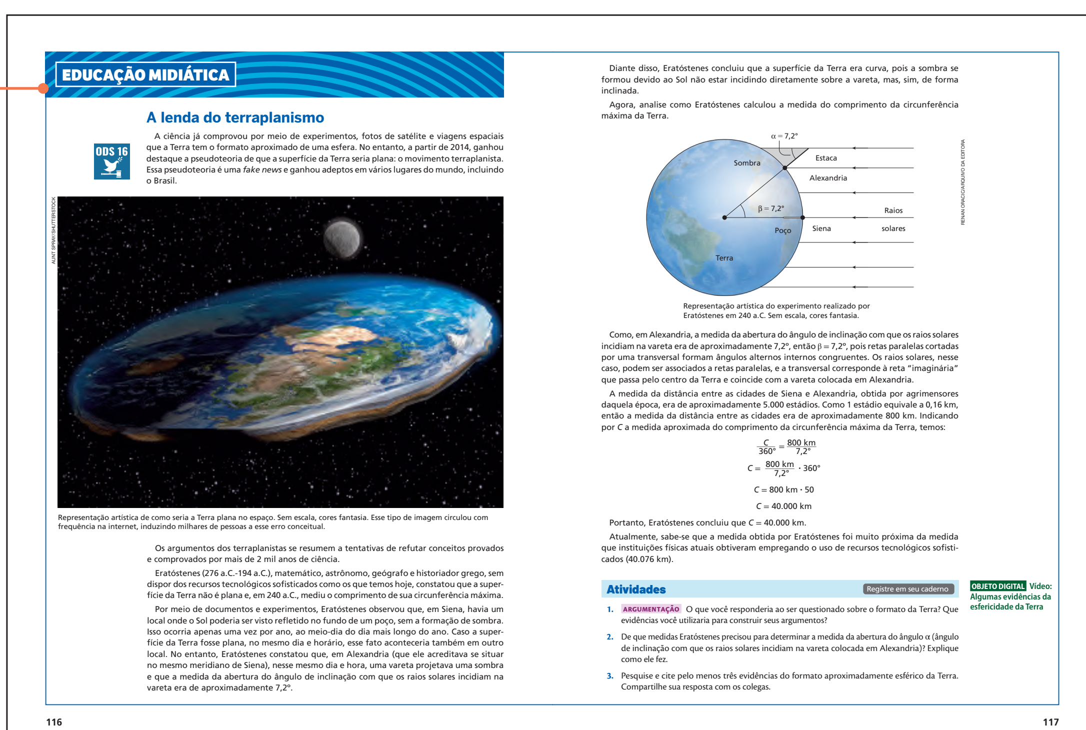
Para finalizar o capítulo

Esta seção se subdivide nas subseções *Conexões entre conceitos*, *Sugestões de ampliação* e *Autoavaliação*.

- *Conexões entre conceitos*: para você identificar palavras/termos que completam corretamente um mapa conceitual.
- *Sugestões de ampliação*: são indicados recursos complementares, como livros, *sites*, jogos, *softwares* e videoaulas, para enriquecer o que foi estudado.
- *Autoavaliação*: apresenta questões que possibilitarão identificar suas dificuldades e facilidades no estudo.

Educação midiática

Nesta seção, você vai explorar temas importantes para navegar no mundo digital de forma crítica e consciente.



EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

A lenda do terraplanismo

ODS 16

A ciência já comprovou por meio de experimentos, fotos de satélite e viagens espaciais que a Terra tem o formato aproximado de uma esfera. No entanto, a partir de 2014, ganhou destaque a pseudoteoria de que a superfície da Terra seria plana: o movimento terraplanista. Essa pseudoteoria é uma *fake news* e ganhou adeptos em vários lugares do mundo, incluindo o Brasil.

AUNT SPRAY/SHUTTERSTOCK

Representação artística de como seria a Terra plana no espaço. Sem escala, cores fantasia. Esse tipo de imagem circulou com frequência na internet, induzindo milhares de pessoas a esse erro conceitual.

Os argumentos dos terraplanistas se resumem a tentativas de refutar conceitos provados e comprovados por mais de 2 mil anos de ciência.

Eratóstenes (276 a.C.-194 a.C.), matemático, astrônomo, geógrafo e historiador grego, sem dispor dos recursos tecnológicos sofisticados como os que temos hoje, constatou que a superfície da Terra não é plana e, em 240 a.C., mediu o comprimento de sua circunferência máxima.

Por meio de documentos e experimentos, Eratóstenes observou que, em Siena, havia um local onde o Sol poderia ser visto refletido no fundo de um poço, sem a formação de sombra. Isso ocorria apenas uma vez por ano, ao meio-dia do dia mais longo do ano. Caso a superfície da Terra fosse plana, no mesmo dia e horário, esse fato aconteceria também em outro local. No entanto, Eratóstenes constatou que, em Alexandria (que ele acreditava se situar no mesmo meridiano de Siena), nesse mesmo dia e hora, uma vareta projetava uma sombra e que a medida da abertura do ângulo de inclinação com que os raios solares incidiam na vareta era de aproximadamente 7,2°.

116

Diante disso, Eratóstenes concluiu que a superfície da Terra era curva, pois a sombra se formou devido ao Sol não estar incidindo diretamente sobre a vareta, mas, sim, de forma inclinada.

Agora, analise como Eratóstenes calculou a medida do comprimento da circunferência máxima da Terra.

$\alpha = 7,2°$
Estaca
Sombra
Alexandria
$\beta = 7,2°$
Raios solares
Poço
Siena
Terra

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Representação artística do experimento realizado por Eratóstenes em 240 a.C. Sem escala, cores fantasia.

Como, em Alexandria, a medida da abertura do ângulo de inclinação com que os raios solares incidiam na vareta era de aproximadamente 7,2°, então $\beta = 7,2°$, pois retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes. Os raios solares, nesse caso, podem ser associados a retas paralelas, e a transversal corresponde à reta "imaginária" que passa pelo centro da Terra e coincide com a vareta colocada em Alexandria.

A medida da distância entre as cidades de Siena e Alexandria, obtida por agrimensores daquela época, era de aproximadamente 5.000 estádios. Como 1 estádio equivale a 0,16 km, então a medida da distância entre as cidades era de aproximadamente 800 km. Indicando por C a medida aproximada do comprimento da circunferência máxima da Terra, temos:

$$\frac{C}{360°} = \frac{800 \text{ km}}{7,2°}$$
$$C = \frac{800 \text{ km}}{7,2°} \cdot 360°$$
$$C = 800 \text{ km} \cdot 50$$
$$C = 40.000 \text{ km}$$

Portanto, Eratóstenes concluiu que $C = 40.000$ km.

Atualmente, sabe-se que a medida obtida por Eratóstenes foi muito próxima da medida que instituições físicas atuais obtiveram empregando o uso de recursos tecnológicos sofisticados (40.076 km).

Atividades Registre em seu caderno

OBJETO DIGITAL Vídeo: Algumas evidências da esfericidade da Terra

1. ARGUMENTAÇÃO O que você responderia ao ser questionado sobre o formato da Terra? Que evidências você utilizaria para construir seus argumentos?
2. De que medidas Eratóstenes precisou para determinar a medida da abertura do ângulo α (ângulo de inclinação com que os raios solares incidiam na vareta colocada em Alexandria)? Explique como ele fez.
3. Pesquise e cite pelo menos três evidências do formato aproximadamente esférico da Terra. Compartilhe sua resposta com os colegas.

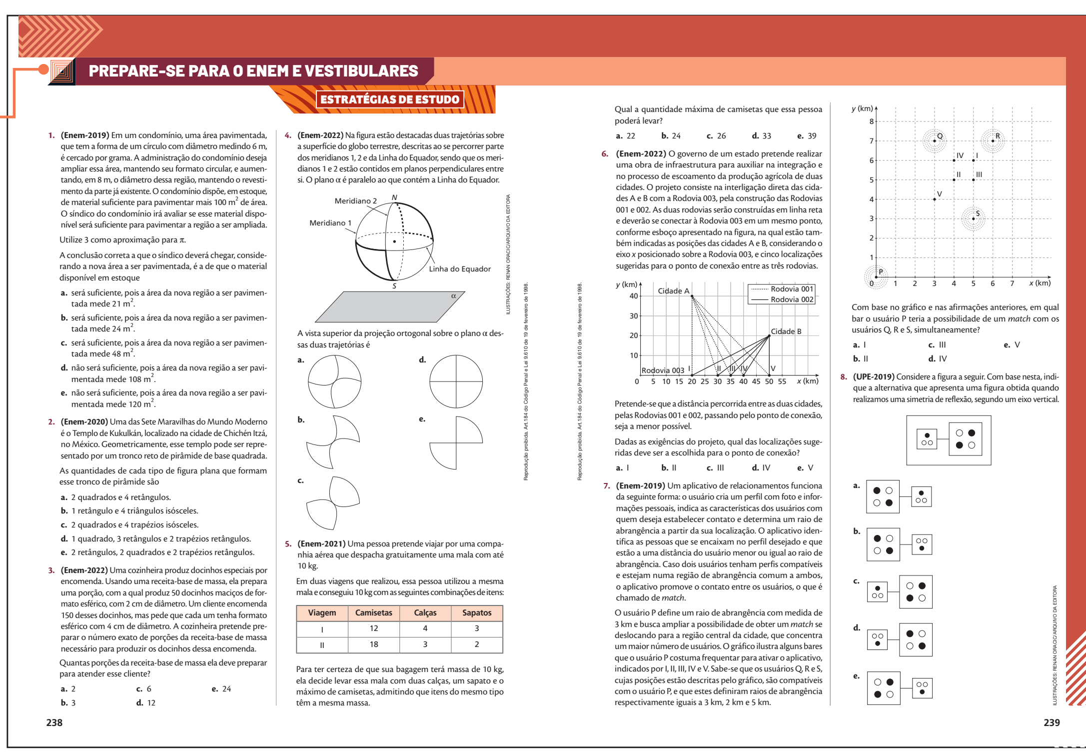
117

Pesquisa e ação

Nesta seção, você vai se reunir com os colegas para elaborar um projeto e apresentar um produto em diferentes meios, usando linguagens diversas, como vídeos, jornais e outros recursos.

Prepare-se para o Enem e vestibulares

Nesta seção, você resolverá questões que o prepararão para prestar o Enem e vestibulares.



OBJETO DIGITAL **Título do Objeto Digital**

Identifica os Objetos Educacionais Digitais.

OBJETIVOS DE DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Vamos conhecer os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável**?

Em 2015, na sede da Organização das Nações Unidas (ONU), em Nova York, nos Estados Unidos, foi assinada a **Agenda 2030**, que estabeleceu 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) que visam orientar metas globais a serem alcançadas até 2030, com a finalidade de enfrentar os desafios ambientais, políticos e econômicos do presente e assegurar dignidade a todas as pessoas.

Os 193 Estados-membros da ONU, incluindo o Brasil, comprometeram-se a implementar esse plano de ação global em colaboração com governos, empresas, instituições e sociedade civil. O monitoramento e a avaliação dessas ações exigem cooperação e engajamento de todos os setores da sociedade.

ODS 1

ERRADICAÇÃO DA POBREZA

Eliminar a pobreza em todas as formas e em todos os lugares.

ODS 2

FOME ZERO E AGRICULTURA SUSTENTÁVEL

Erradicar a fome, garantir a segurança alimentar, melhorar a nutrição e promover práticas de agricultura sustentável.

ODS 3

SAÚDE E BEM-ESTAR

Assegurar o acesso a serviços de saúde de qualidade e promover o bem-estar para pessoas de todas as idades.

ODS 4

EDUCAÇÃO DE QUALIDADE

Garantir educação inclusiva, de qualidade e equitativa, promovendo oportunidades de aprendizado ao longo da vida para todos.

ODS 5

IGUALDADE DE GÊNERO

Alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas.

ODS 6

ÁGUA POTÁVEL E SANEAMENTO

Assegurar a disponibilidade e a gestão sustentável de água potável e saneamento para todos.

ODS 7

ENERGIA LIMPA E ACESSÍVEL

Garantir o acesso a fontes de energia confiáveis, sustentáveis e modernas para todos.

ODS 8

TRABALHO DECENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO

Fomentar o crescimento econômico inclusivo e sustentável, promovendo emprego pleno, produtivo e digno para todos.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

ODS 9

INDÚSTRIA, INOVAÇÃO E INFRAESTRUTURA

Construir infraestruturas resilientes, promover a industrialização inclusiva e sustentável e incentivar a inovação.

ODS 10

REDUÇÃO DAS DESIGUALDADES

Reduzir as desigualdades no interior dos países e entre países.

ODS 11

CIDADES E COMUNIDADES SUSTENTÁVEIS

Tornar as cidades e comunidades mais inclusivas, seguras, resilientes e sustentáveis.

ODS 12

CONSUMO E PRODUÇÃO RESPONSÁVEIS

Garantir padrões de consumo e de produção sustentáveis.

ODS 13

AÇÃO CONTRA A MUDANÇA GLOBAL DO CLIMA

Adotar medidas urgentes para combater as alterações climáticas e os seus impactos.

ODS 14

VIDA NA ÁGUA

Conservar e usar de forma responsável os oceanos, os mares e os recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável.

ODS 15

VIDA TERRESTRE

Proteger e restaurar ecossistemas terrestres, gerenciar florestas, combater a desertificação, reverter a degradação do solo e preservar a biodiversidade.

ODS 16

PAZ, JUSTIÇA E INSTITUIÇÕES EFICAZES

Fomentar sociedades pacíficas e inclusivas, garantir o acesso à justiça e construir instituições eficazes e responsáveis em todos os níveis.

ODS 17

PARCERIAS E MEIOS DE IMPLEMENTAÇÃO

Reforçar os meios de implementação e revitalizar a parceria global para o desenvolvimento sustentável.

Fonte: ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil**. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 22 set. 2024.

Neste livro, indicaremos os ODS sempre que houver propostas, temas ou conceitos que possam ser conectados a eles.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

SUMÁRIO

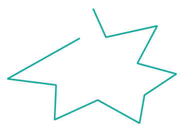
SUMÁRIO DOS OBJETOS EDUCACIONAIS DIGITAIS

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 1

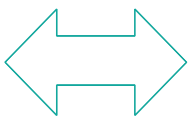
ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

1. Qual das figuras a seguir representa um polígono? **1. Alternativa b.**

a.



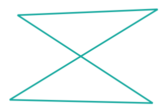
b.



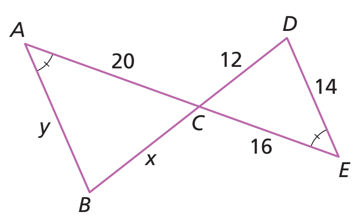
c.

d.

e.



2. Observe a figura.

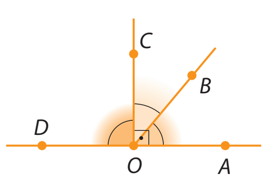


Qual é o valor de $x + y$? **2. Alternativa c.**

a. 15 **b.** $\frac{35}{2}$ **c.** $\frac{65}{2}$ **d.** 40 **e.** 50

3. Observe a figura a seguir e descubra a alternativa correta.

3. Alternativa e.



a. Os ângulos $A\widehat{O}C$ e $B\widehat{O}D$ são consecutivos, mas não adjacentes.

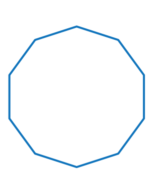
b. Os ângulos $A\widehat{O}D$ e $A\widehat{O}B$ não são consecutivos.

c. Os ângulos $A\widehat{O}D$ e $A\widehat{O}B$ são consecutivos e adjacentes.

d. Os ângulos $B\widehat{O}D$ e $A\widehat{O}B$ são consecutivos, mas não adjacentes.

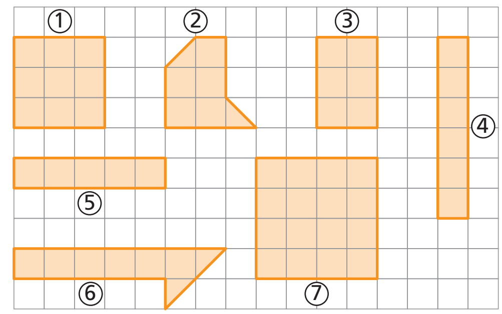
e. Os ângulos $B\widehat{O}D$ e $A\widehat{O}B$ são consecutivos e adjacentes.

4. Calcule a medida da abertura de cada ângulo interno do polígono regular representado a seguir. **4. Alternativa c.**



a. 126° **b.** 140° **c.** 144° **d.** 147,27° **e.** 225°

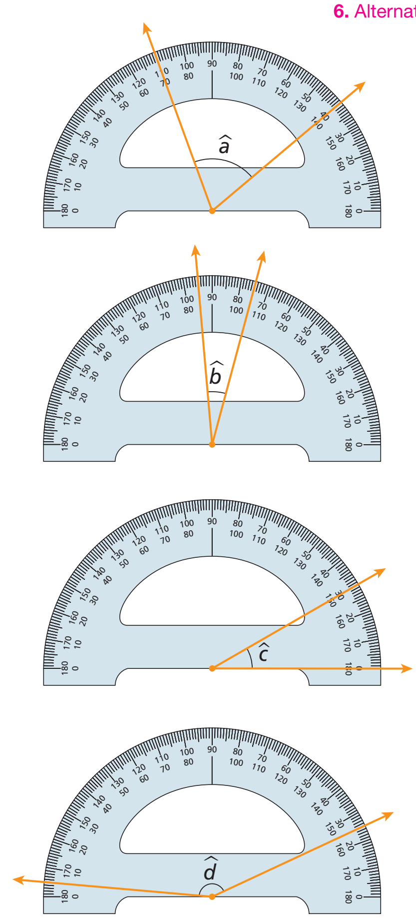
5. Na malha quadriculada a seguir, foram representadas sete superfícies poligonais planas.



Qual é o par de superfícies poligonais equivalentes? **5. Alternativa e.**

a. 1 e 7 **b.** 4 e 5 **c.** 2 e 6 **d.** 1 e 5 **e.** 2 e 3

6. Analise os ângulos representados sobre os transferidores. **6. Alternativa a.**



São, respectivamente, ângulos complementares e ângulos suplementares:

a. $\hat{a}$ e $\hat{b}$; $\hat{c}$ e $\hat{d}$.

b. $\hat{b}$ e $\hat{c}$; $\hat{d}$ e $\hat{a}$.

c. $\hat{a}$ e $\hat{b}$; $\hat{b}$ e $\hat{d}$.

d. $\hat{c}$ e $\hat{d}$; $\hat{a}$ e $\hat{b}$.

e. $\hat{c}$ e $\hat{a}$; $\hat{b}$ e $\hat{d}$.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Capítulo 1

SUPERFÍCIES POLIGONAIS, CÍRCULO E ÁREAS

CHRISTIE'S IMAGES/BRIDGEMAN IMAGES/EASY MEDIABANK

Detalhe de uma mesa do rei francês Luís XVI (1754-1793) feita por Pierre Roussel (1723-1782) com a técnica da marchetaria.

Criada na Mesopotâmia por volta de 3000 a.C., a marchetaria é a arte de ornamentar superfícies planas por meio da técnica de embutir ou incrustar materiais diversos, principalmente pedaços de madeira de diferentes cores e texturas. Esses materiais justapostos formam um desenho.

A técnica difundiu-se pelo mundo e chegou à Europa. Após a queda do Império Romano do Ocidente, essa arte quase se extinguiu, mas ressurgiu nos séculos XIV e XV com as escolas de marchetaria na cidade italiana de Florença, região da Toscana.

As imagens obtidas na marchetaria podem ser geométricas, figurativas ou abstratas.

OBJETO DIGITAL **Vídeo: Marchetaria**

Enriquecendo a abertura deste capítulo, este vídeo apresenta a entrevista com um artista plástico que conta como é feito o processo de construir um tabuleiro do jogo de xadrez pelo processo da marchetaria.

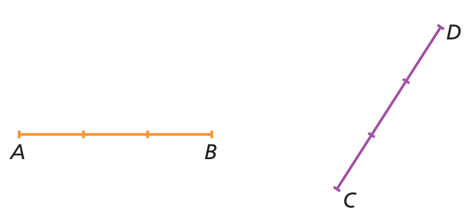
Polígonos regulares

Inicialmente, vamos estudar alguns conceitos importantes relacionados aos polígonos regulares.

Segmentos de reta congruentes e ângulos congruentes

Dois segmentos de reta são congruentes quando têm a mesma medida de comprimento.

Observe o exemplo.

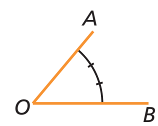


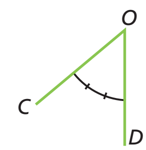
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Indicamos a congruência dos segmentos de reta por: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida de abertura.

Observe o exemplo a seguir.



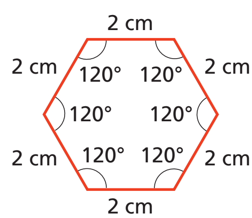


Indicamos a congruência dos ângulos por: $A\widehat{O}B \cong C\widehat{O}D$

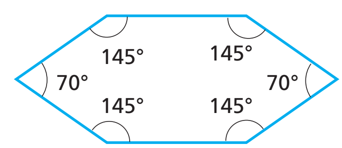
Definição de polígono regular

Um polígono é **regular** se, e somente se, tem todos os lados congruentes entre si e todos os ângulos internos congruentes entre si.

Observe os polígonos representados a seguir.



polígono regular

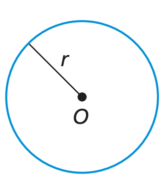


polígono não regular

Polígono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência

Observação

Raio de uma circunferência é qualquer segmento de reta cujas extremidades são o centro *O* e um ponto da circunferência.

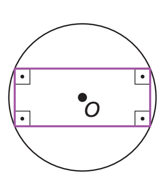


Antes de tratarmos dos polígonos regulares inscritos em uma circunferência e circunscritos a ela, é preciso definir circunferência.

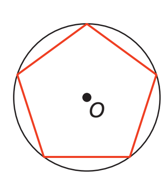
Circunferência é a figura formada por todos os pontos de um plano que distam *r* de um ponto *O* fixo desse plano. A medida de distância *r* é a medida do **raio** da circunferência, e o ponto *O* é o **centro** da circunferência.

Quando todos os vértices de um polígono pertencem a uma circunferência, dizemos que ele é um **polígono inscrito** nessa circunferência ou que a circunferência é **circunscrita** ao polígono.

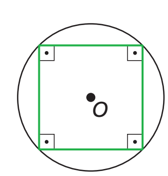
Observe os exemplos.



retângulo inscrito



pentágono regular inscrito



quadrado inscrito

Observação

Para representar um polígono regular inscrito em uma circunferência, como nas atividades resolvidas a seguir, pode-se raciocinar partindo do final para o início da construção, ou seja, fazendo um esboço gráfico da resposta, imaginando o problema já resolvido.

Nesse esboço, podem ser verificadas informações tais como a medida da abertura de cada ângulo central que contém um dos lados do polígono.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

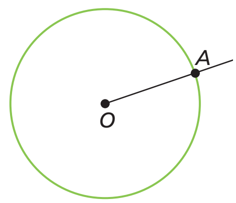
Atividades resolvidas

R1. Usando uma régua e um transferidor, construir um pentágono regular inscrito em uma circunferência.

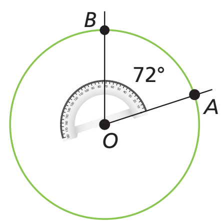
▶ **Resolução**

Realizamos os passos a seguir para a construção do pentágono regular inscrito em uma circunferência.

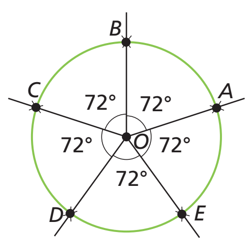
1. Traçamos uma circunferência de centro *O* e uma semirreta qualquer com origem *O* que intercepta a circunferência em um ponto *A*.



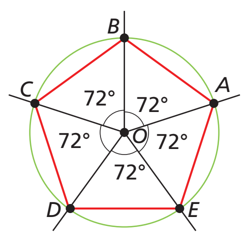
2. Com o transferidor centrado em *O* e com 0° na semirreta $\overrightarrow{OA}$, marcamos 72° (360° : 5 = 72°) e traçamos $\overrightarrow{OB}$.



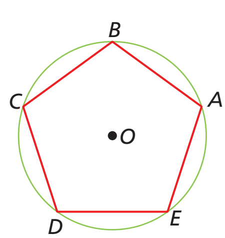
3. Repetimos o passo 2 três vezes, colocando o 0° do transferidor na última semirreta construída a cada realização do passo 2, para obter os vértices *C*, *D* e *E*.



4. Traçamos os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$.



5. Apagamos as construções auxiliares, obtendo o pentágono *ABCDE* inscrito em uma circunferência.



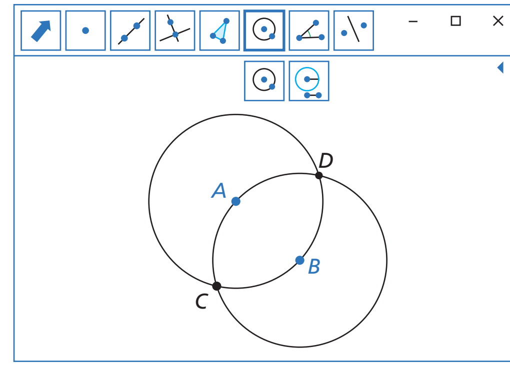
R2. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construir um triângulo equilátero e um quadrado inscritos em uma circunferência.

▶ **Resolução**

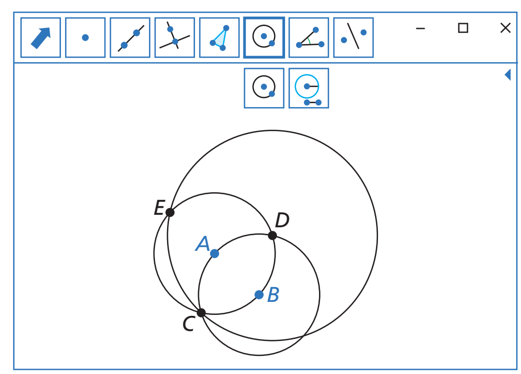
Realizamos os passos a seguir para a construção do triângulo equilátero inscrito em uma circunferência.

1. Traçamos uma circunferência de centro em *A* e raio $\overline{AB}$ qualquer, em que *B* pertence à circunferência, para inscrever o triângulo. Nessa circunferência, marcamos um arco de 120° (360° : 3 = 120°). Para isso, traçamos outra circunferência com centro em *B* e raio $\overline{BA}$, ou seja, *A* pertence à 2ª circunferência.

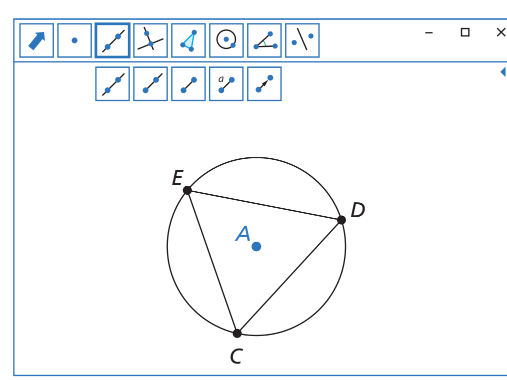
Marcamos os pontos *C* e *D*, intersecções das duas circunferências, obtendo o arco $\overset{\frown}{CBD}$, que mede 120°.



2. Construímos uma circunferência de centro em *D* e raio $\overline{DC}$. Marcamos o ponto *E*, uma das intersecções entre a circunferência de centro *D* e a de centro *A* (a outra intersecção é o ponto *C*). Dessa forma, dividimos a circunferência de centro *A* em três arcos de medida igual a 120°.



3. Escondemos as construções auxiliares e, com os segmentos de reta $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EC}$, construímos um triângulo equilátero inscrito na circunferência de centro *A* e raio $\overline{AB}$.

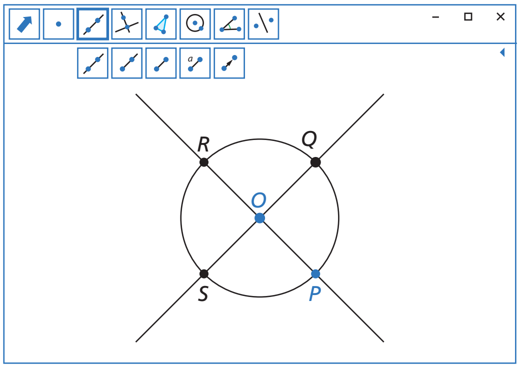


Agora, para construir o quadrado inscrito na circunferência, realizamos os passos a seguir.

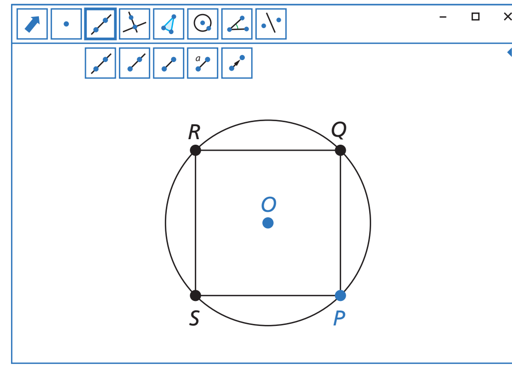
1. Traçamos uma circunferência de centro em *O* e raio $\overline{OP}$ qualquer para inscrever o quadrado e construímos, nessa circunferência, quatro ângulos centrais com medida de abertura de 90° cada um. Para isso, traçamos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e uma perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$ passando

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

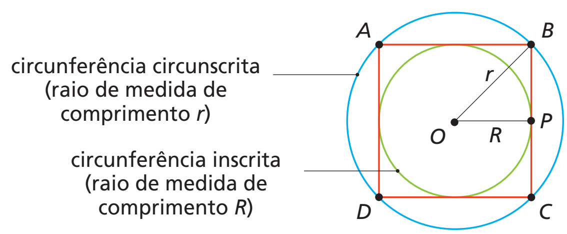
por O. Marcamos os pontos Q, R e S, intersecções das retas com a circunferência, determinando, assim, os ângulos centrais $P\hat{O}Q$, $Q\hat{O}R$, $R\hat{O}S$ e $S\hat{O}P$.



2. Escondemos as construções auxiliares e, com os segmentos de reta $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SP}$, determinamos um quadrado inscrito na circunferência de centro O e raio $\overline{OP}$.



Quando um polígono regular é inscrito em uma circunferência de centro O e raio de medida de comprimento r, todo segmento de reta cujas extremidades são o centro da circunferência e o ponto médio de um lado do polígono é chamado de **apótema** do polígono. A medida do apótema de um polígono regular é igual à medida de comprimento R do raio da circunferência inscrita no polígono.



Observe que $\overline{OP}$ é o apótema de cada polígono inscrito em uma circunferência.

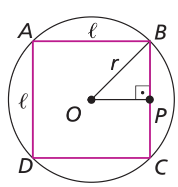


figura I

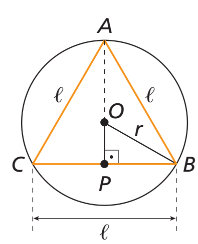


figura II

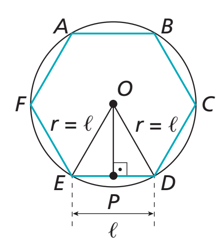


figura III

Na figura I, a medida de comprimento do apótema do quadrado é a metade da medida de comprimento do lado do quadrado.

Na figura II, a medida de comprimento do apótema do triângulo equilátero é uma parte da medida de comprimento da altura desse triângulo.

Na figura III, a medida de comprimento do apótema do hexágono regular é a medida de comprimento da altura do triângulo equilátero cujo comprimento do lado mede r, em que r é a medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita ao polígono e também a medida de comprimento do lado do hexágono.

Quantos apótemas tem um polígono regular de n lados? **Questão.** *n* apótemas.

Observação

O quadrado $ABCD$ da figura é inscrito na circunferência de raio de medida de comprimento r e é circunscrito à circunferência de raio de medida de comprimento R.

Quando todos os lados de um polígono tangenciam uma circunferência, dizemos que ele é um **polígono circunscrito** a essa circunferência ou que a circunferência é **inscrita** no polígono.

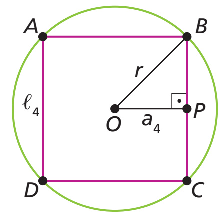
Relações métricas

As medidas de comprimento do lado e do apótema de um polígono regular podem ser escritas em função da medida de comprimento do raio da circunferência em que esse polígono está inscrito. Acompanhe como podemos escrever essas relações métricas para um quadrado e para um triângulo equilátero.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

- **Quadrado inscrito em uma circunferência**

Observe o quadrado *ABCD* de medidas de comprimento do lado ℓ_4 e do apótema a_4, que está inscrito na circunferência de centro *O* e medida de comprimento do raio *r*.



O triângulo *OBP* é retângulo; os comprimentos dos catetos medem a_4 e $\frac{\ell_4}{2}$, e o da hipotenusa, *r*.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OBP*, temos:

$(a_4)^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2$

Note que $\overline{OB}$ está contido na diagonal do quadrado; logo, a abertura de $O\hat{B}P$ mede 45° e a de $B\hat{O}P$ também. Como o triângulo *BOP* é isósceles: $a_4 = BP = \frac{\ell_4}{2}$

Como $a_4 = \frac{\ell_4}{2}$, temos: $\left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow \frac{(\ell_4)^2}{2} = r^2$

Logo, a medida de comprimento do lado do quadrado é dada por: $\boxed{\ell_4 = r\sqrt{2}}$

Assim, a medida de comprimento do apótema do quadrado é dada por: $\boxed{a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$

Considerando o triângulo retângulo *ABD*, de que outra maneira ℓ_4 poderia ser obtida em função de *r*?

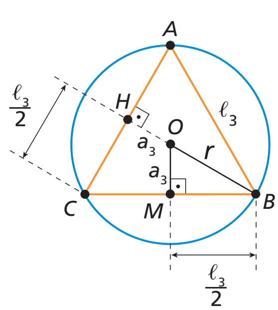
Questão. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABD*, temos:
$(\ell_4)^2 + (\ell_4)^2 = (2r)^2$
$2(\ell_4)^2 = 4r^2$
$\ell_4 = r\sqrt{2}$

Observação

Usaremos ℓ_n e a_n para indicar, respectivamente, as medidas de comprimento do lado e do apótema do polígono regular de *n* lados inscrito em uma circunferência.

- **Triângulo equilátero inscrito em uma circunferência**

Observe o triângulo *ABC* de medidas de comprimento do lado ℓ_3 e do apótema a_3, que está inscrito na circunferência de centro *O* e medida de comprimento do raio *r*.



O triângulo *OMB* é retângulo; os comprimentos dos catetos medem a_3 e $\frac{\ell_3}{2}$, e o da hipotenusa, *r*.

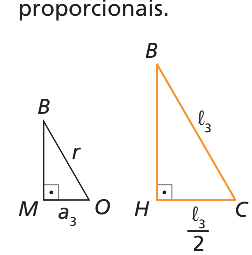
O triângulo *CHB* é retângulo; os comprimentos dos catetos medem $\frac{\ell_3}{2}$ e $a_3 + r$, e o da hipotenusa, ℓ_3.

Os triângulos *OMB* e *CHB* são semelhantes, pois têm um ângulo reto e um ângulo comum.

Portanto: $\frac{a_3}{r} = \frac{\frac{\ell_3}{2}}{\ell_3} \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{r}{2}}$

Observação

Triângulos semelhantes têm lados correspondentes proporcionais.



$\frac{MO}{BO} = \frac{HC}{BC}$

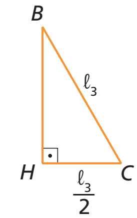
$\frac{a_3}{r} = \frac{\frac{\ell_3}{2}}{\ell_3}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *CHB*, temos:

$$\left(\frac{\ell_3}{2}\right)^2 + (a_3 + r)^2 = (\ell_3)^2 \Rightarrow \left(\frac{\ell_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2} + r\right)^2 = (\ell_3)^2$$

Obtendo ℓ_3 em função de *r*, temos:

$$\frac{(\ell_3)^2}{4} + \frac{9r^2}{4} = \frac{4(\ell_3)^2}{4} \Rightarrow 3(\ell_3)^2 = 9r^2 \Rightarrow (\ell_3)^2 = 3r^2 \Rightarrow \boxed{\ell_3 = r\sqrt{3}}$$



Observe a altura do triângulo *ABC* relativa ao lado $\overline{AC}$ e o segmento de reta $\overline{HO}$, um dos apótemas. Sabendo que $HO = \frac{r}{2}$, o que é possível concluir da relação entre as medidas de comprimento do apótema e dessa altura do triângulo *ABC*?

Questão. A medida de comprimento do apótema é $\frac{1}{3}$ da medida de comprimento dessa altura.

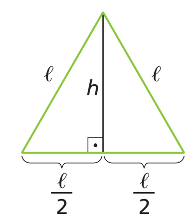
Observação

Seja *h* a medida de comprimento da altura de um triângulo equilátero de medida de comprimento do lado ℓ.
Assim, temos:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$4\ell^2 = 4h^2 + \ell^2$$

$$3\ell^2 = 4h^2 \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$



Atividades resolvidas

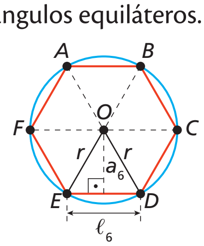
R3. O comprimento do apótema de um hexágono regular mede 3 cm.

a. Determinar a medida do perímetro desse hexágono.

b. Determinar a medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita a ele.

▶ **Resolução**

a. Traçando as diagonais de um hexágono regular, que passam pelo centro da circunferência circunscrita, obtemos 6 triângulos equiláteros.



A medida de comprimento do apótema do hexágono é igual à medida de comprimento da altura do triângulo equilátero. Assim, temos:

$$a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = \frac{2 \cdot a_6}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Portanto, a medida do perímetro do hexágono regular é: $6 \cdot 2\sqrt{3}$ cm $= 12\sqrt{3}$ cm

b. Como $\ell_6 = r$, temos: $r = 2\sqrt{3}$ cm

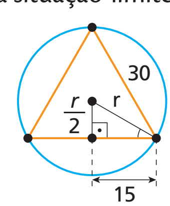
R4. **(Enem-2015)** O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm. Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.
Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetro, é igual a:

a. 18 **b.** 26 **c.** 30 **d.** 35 **e.** 60

▶ **Resolução**

Como o proprietário da mesa deseja adquirir o tampo de menor medida de comprimento do diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa, vamos considerar a situação-limite ilustrada na figura.



Como $\ell_3 = 30$, aplicando a expressão $\ell_3 = r\sqrt{3}$, temos:

$$30 = r\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{30}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = 10\sqrt{3} \Rightarrow r \simeq 10 \cdot 1{,}7 = 17$$

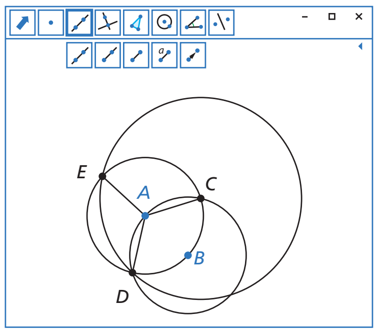
Logo, a menor medida de comprimento do raio do círculo suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa deve ter aproximadamente 17 cm. Assim, entre as alternativas, deve ser escolhida aquela que indica o tampo de vidro com 18 cm de medida de comprimento do raio.
Portanto, alternativa **a**.

R5. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construir um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência.

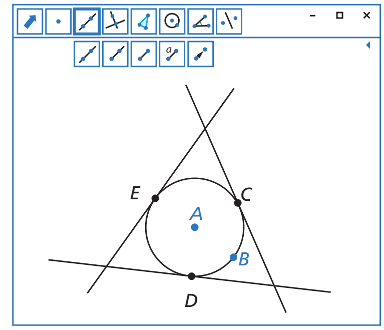
▶ **Resolução**

Como o apótema de um polígono regular tem a mesma medida de comprimento da do raio da circunferência que o inscreve, podemos iniciar a construção traçando os apótemas do triângulo equilátero. Observe os passos a seguir.

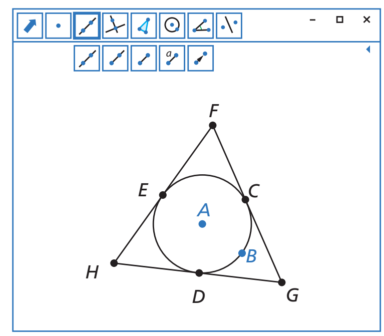
1. Desenhamos uma circunferência de centro em A e raio $\overline{AB}$ à qual circunscreveremos o triângulo equilátero. Depois, dividimos a circunferência em três arcos de 120° (360° : 3 = = 120°) como feito na **atividade resolvida R2** e marcamos os pontos C, D e E. Os apótemas do triângulo circunscrito à circunferência têm medidas de comprimento iguais à medida de comprimento do raio da circunferência que o inscreve. Em seguida, construímos os apótemas $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ do triângulo em construção.



2. Escondemos as construções auxiliares e construímos uma reta perpendicular a cada apótema passando pelos pontos C, D e E, respectivamente. Essas perpendiculares são tangentes à circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$ nos pontos C, D e E.



3. Marcamos os pontos F, G e H, que são intersecções entre as perpendiculares, e traçamos os segmentos de reta $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{HF}$, determinando um triângulo equilátero circunscrito à circunferência de centro em A e raio $\overline{AB}$.



1. Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*. **2.** Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Faça uma pesquisa na internet para verificar se é possível construir um pentágono regular utilizando somente régua não graduada e compasso. Se for possível, escreva a sequência de passos para essa construção.

2. ***SOFTWARE*** Utilizando um *software* de Geometria dinâmica ou instrumentos de desenho (régua e compasso), construa um hexágono regular inscrito em uma circunferência. Atenção! Cuidado ao usar o compasso.

3. Determine a medida de comprimento do apótema e a medida de comprimento do lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência cujo comprimento do raio mede 2 cm. **3.** 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm **4.** Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

4. Construa um hexágono regular circunscrito a uma circunferência e, em função da medida de comprimento do raio R da circunferência, escreva: **4 a.** $\ell_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ **4 b.** $D = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$

a. a medida de comprimento do lado ℓ_6 do hexágono;

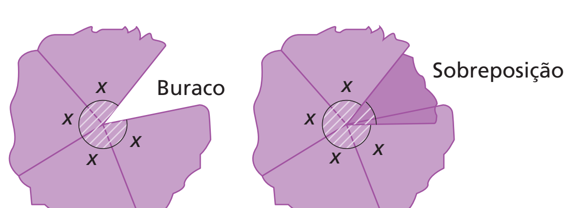
b. a medida de comprimento de uma diagonal D do hexágono, que passa pelo centro da circunferência;

c. a medida do perímetro P do hexágono. **4 c.** $P = 4\sqrt{3}R$

Ladrilhamento

Para reformar o piso do quintal de sua casa, Elis quer usar um único tipo de revestimento cerâmico com o formato de um polígono regular. Então, ela se perguntou quantas e quais seriam as possibilidades de escolha.

Para obter ajuda, Elis consultou um azulejista. Ele lhe explicou que, para cobrir a superfície plana com peças cerâmicas com formato de polígono, justapondo-as em torno de um vértice comum em que os ângulos têm a mesma medida de abertura x, não pode haver buraco nem sobreposição. Observe a representação que ele fez.



Para não haver buraco nem sobreposição, a medida da abertura *x* dos ângulos deve ser um divisor de 360°.

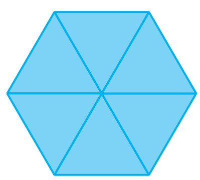
O azulejista organizou este quadro considerando as peças cerâmicas com formato de polígonos regulares.

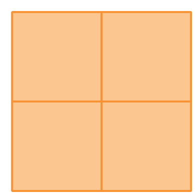
Formato da peça, medida da abertura do ângulo interno e número de peças em torno de um mesmo ponto

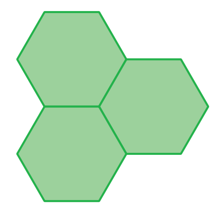
Formato da peça	Triângulo equilátero	Quadrado	Pentágono regular	Hexágono regular	Heptágono regular
Medida da abertura do ângulo interno	60°	90°	108°	120°	Aproximadamente 128,6°
Número de peças em torno de um mesmo ponto	6 (360° : 60°)	4 (360° : 90°)	3 (buraco) 4 (sobreposição)	3 (360° : 120°)	2 (buraco) 3 (sobreposição)

Com base no quadro, Elis percebeu que as peças cerâmicas que recobrem o plano em torno de um vértice comum têm formato de:

- triângulos equiláteros;
- quadrados;
- hexágonos regulares.







ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

5 a. Buraco, pois a abertura de cada ângulo interno mede menos que 180°; então, dois desses ângulos, justapostos, têm medida de abertura menor que 360°.

5 b. Sobreposição, pois a abertura de cada ângulo interno mede mais que 120°; então, três desses ângulos, justapostos, têm medida de abertura maior que 360°.

6. Exemplos de resposta: peças de marchetaria, forros de madeira, papéis de parede, estampas de tecido, vitrais, malharias e crochês.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

5. ARGUMENTAÇÃO Responda a cada pergunta e justifique suas respostas. Se, em torno de um vértice comum, justapusermos:

a. duas peças com formato de polígonos regulares com mais de seis ângulos internos congruentes, teremos um buraco ou uma sobreposição?

b. três peças com formato de polígonos regulares com mais de seis ângulos internos congruentes, teremos um buraco ou uma sobreposição?

6. A técnica do ladrilhamento consiste no preenchimento do plano com peças com formato de polígonos, sem buracos ou sobreposições. Além de ser usada em pisos cerâmicos, onde mais ela pode ser aplicada?

7. EM DUPLA Com um colega, construam peças com formato de polígonos regulares congruentes e de polígonos não regulares congruentes em cartolinas ou EVA de cores diversas e recorte-as. Depois, construam um painel, sem buracos nem sobreposição, usando: **7.** Respostas pessoais.

a. peças com formato de polígonos regulares;

b. peças com formato de polígonos não regulares;

c. peças com formato de polígonos não regulares e de polígonos regulares.

8. EM GRUPO Os azulejos decorados com mosaicos fazem parte da cultura de muitos países, como Portugal, por causa da influência árabe no território português. No Marrocos e na Espanha, também há azulejos de influência árabe. No Brasil, em decorrência da colonização portuguesa, é possível encontrar azulejos similares aos de Portugal.

Os mosaicos podem ser constituídos de figuras geométricas que se repetem, formando determinado padrão. Analise os dois exemplos a seguir.

JAOUAD.K/ISTOCK/GETTY IMAGES

Mosaico com azulejos em Marrocos. Foto de 2023.

GEORGECLERK/ISTOCK/GETTY IMAGES

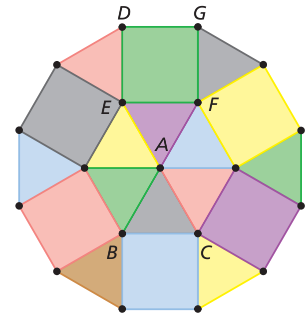
Mosaico com azulejos em Portugal. Foto de 2022.

8 a. Resposta pessoal. 8 b. Resposta pessoal.

a. Reúna-se com quatro colegas e pesquisem informações sobre azulejos em Portugal, no Brasil e no Marrocos. Redijam um texto relatando a história e as características geométricas de alguns azulejos pesquisados.

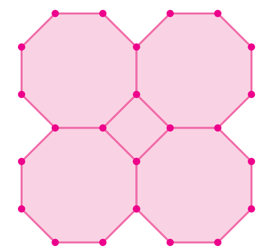
b. Usando tintas, lápis ou papéis coloridos, construam um mosaico de 6 × 8 azulejos, definindo, antes, os formatos de polígonos dos azulejos e a imagem geral do mosaico.

9. **SOFTWARE** O mosaico reproduzido a seguir foi construído com o auxílio de ferramentas de transformação no plano, de um *software* de Geometria dinâmica, a partir do triângulo *ABC* e do quadrado *DEFG*, ambos com lados de mesma medida de comprimento. Foram realizadas diversas rotações, gerando outros triângulos e quadrados, mas poderíamos utilizar outras transformações ou mesmo uma combinação de transformações para obter o mesmo resultado. Nessa construção, por exemplo, para gerar o triângulo marrom, usamos o triângulo *ABC* para fazer uma rotação de 210° no sentido anti-horário em torno do ponto *B*.



Com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica e a ferramenta de transformações no plano, construa um mosaico utilizando dois tipos de polígonos regulares diferentes.

9. Exemplo de resposta: octógonos regulares e quadrados.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Medida da área de algumas superfícies poligonais planas

Um polígono divide o plano que o contém em duas regiões distintas, uma interna e outra externa. A figura formada pela união do polígono com sua região interna é denominada **superfície poligonal** ou **região poligonal**.

O cálculo da medida da área de superfícies poligonais é importante tanto para a agricultura quanto para a indústria e algumas profissões, como a de engenheiro, por exemplo. A seguir, vamos aprender a calcular a medida da área de superfícies e de figuras presentes em nosso cotidiano a partir do cálculo da medida da área de algumas superfícies poligonais planas.

Medida da área de uma superfície quadrada

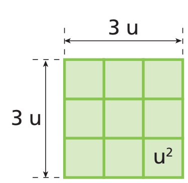
A porção do plano ocupada por uma superfície poligonal corresponde a um único número *A* real positivo chamado de **medida de área**, obtido pela comparação da porção ocupada pela superfície poligonal com a porção ocupada por uma unidade de medida de área.

A unidade de medida de área que geralmente consideramos é a medida da área delimitada por um quadrado unitário, isto é, um quadrado cuja medida de comprimento do lado é 1 u, sendo u uma unidade de medida de comprimento. Dizemos que a medida da área desse quadrado unitário é 1 u^2.

A medida da área de uma superfície quadrada cujo comprimento do lado mede ℓ é dada por:

$$A_{\text{quadrado}} = \ell^2$$

Considere uma superfície quadrada *Q*, cujo comprimento do lado mede 3 u. A medida da área de *Q* pode ser determinada por $\ell^2 = (3)^2 = 9$, resultando em 9 u^2. Acompanhe.



Medida da área de *Q* é 9 u^2.

Note que a superfície *Q* pode ser decomposta em 3^2 superfícies quadradas justapostas com medida de área unitária.

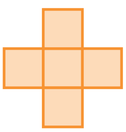
Nesse exemplo, indicamos a medida de comprimento do lado de *Q* por um número natural. No entanto, a relação é válida para qualquer valor real de ℓ (racional ou irracional).

Observação

Se uma região poligonal é composta de *n* regiões poligonais justapostas, então sua medida de área é igual à soma das medidas de área das *n* regiões.

Considere a unidade de medida de área u^2.

Assim, a medida da área da região poligonal a seguir é igual a 5 u^2.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade resolvida

R6. Construir os gráficos que representam a medida do perímetro e a medida da área delimitada por um quadrado em função da medida de comprimento do lado.

▶ Resolução

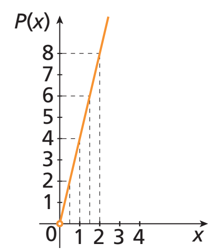
Vamos considerar todos os quadrados com lados de medida de comprimento x, medida de perímetro P e medida de área A.

P e A são funções de x, com x real e positivo, dadas por $P(x) = 4x$ e $A(x) = x^2$.

Atribuindo valores a x, calculando os respectivos valores de $P(x)$ e de $A(x)$ e representando no plano cartesiano o par $(x, P(x))$ e o par $(x, A(x))$, temos:

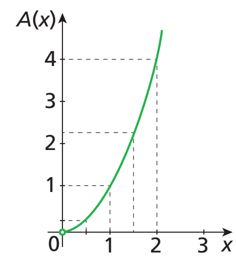
$P(x) = 4x$

x	$P(x)$
0,5	2
1	4
1,5	6
2	8



$A(x) = x^2$

x	$A(x)$
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4



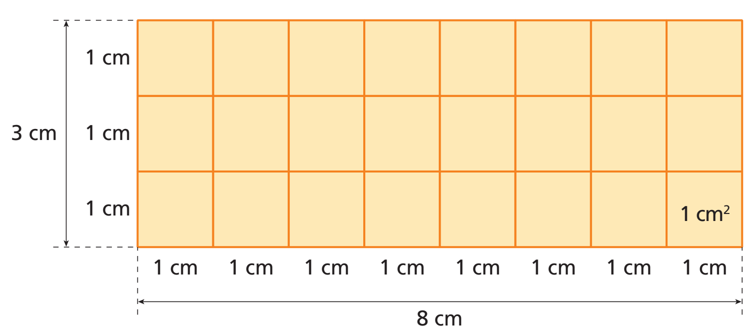
Medida da área de uma superfície retangular

Observação

Para simplificar a notação em contextos que envolvem medidas de área, ao nos referirmos a uma superfície poligonal, geralmente usaremos o nome do polígono que a determina. Por exemplo, em vez de dizer "a medida da área da superfície retangular", diremos "a medida da área do retângulo".

Muitas vezes, há situações em que é preciso determinar a medida da área de uma superfície retangular, como para estimar o gasto com a pintura das paredes de uma casa, já que a mão de obra a ser cobrada para esse trabalho e o material utilizado são proporcionais à medida de área da obra.

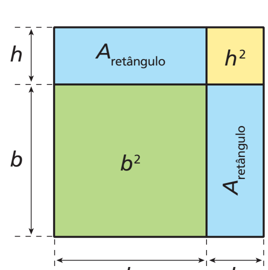
Vamos calcular a medida da área delimitada pelo retângulo a seguir, considerando um quadrado de medida de comprimento do lado de 1 cm como unidade de medida de área.



Nesse caso, multiplicamos a quantidade de quadrados de uma coluna pela quantidade de quadrados de uma linha $(3 \cdot 8)$. Como o comprimento do lado do quadrado mede 1 cm, a medida da área do retângulo é 24 cm².

Agora, vamos calcular a medida da área de um retângulo qualquer cujo comprimento da base mede b e o comprimento da altura mede h, com b e h não necessariamente naturais.

Para isso, consideremos um quadrado cujo comprimento do lado mede $(b + h)$. A medida da área desse quadrado é $(b + h)^2$, e ele pode ser decomposto em dois retângulos e dois quadrados menores, conforme a figura a seguir.



b^2 é a medida da área do quadrado verde.

h^2 é a medida da área do quadrado amarelo.

$A_{retângulo}$ é a medida da área desconhecida de cada retângulo cujo comprimento da base mede b e o comprimento da altura mede h.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, a medida da área do quadrado cujo comprimento do lado mede $(b + h)$ pode ser expressa também por: $b^2 + 2 \cdot A_{\text{retângulo}} + h^2$

Igualando as expressões que representam a medida da área do quadrado, temos:

$(b + h)^2 = b^2 + 2 \cdot A_{\text{retângulo}} + h^2 \Rightarrow b^2 + 2 \cdot b \cdot h + h^2 = b^2 + 2 \cdot A_{\text{retângulo}} + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot b \cdot h = 2 \cdot A_{\text{retângulo}}$

Portanto, a medida da área do retângulo é dada por:

$$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$$

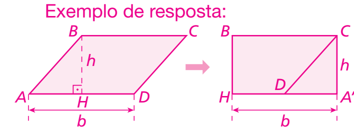
Acompanhe o exemplo a seguir.

Para determinar a medida de comprimento da altura do retângulo cuja medida da área é $\pi\sqrt{3}$ cm² e a medida de comprimento da base é π cm, fazemos:

$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h \Rightarrow \pi\sqrt{3} = \pi \cdot h \Rightarrow h = \sqrt{3}$

Portanto, a medida de comprimento da altura do retângulo é $\sqrt{3}$ cm.

Exemplo de resposta:



Como $ABCD$ é paralelogramo, $\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$ e $\overline{BC} /\!/ \overline{AD}$; então, os ângulos $B\hat{A}H$ e $C\hat{D}A'$ são congruentes.
Como os ângulos $B\hat{H}A$ e $C\hat{A}'D$ são retos, concluímos que os triângulos ABH e DCA' são semelhantes, e sua razão de semelhança é:

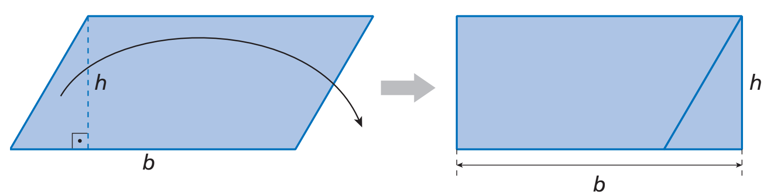
$\frac{AB}{DC} = \frac{AH}{DA'} = \frac{BH}{CA'} = \frac{h}{h} = 1$

Como a razão de semelhança é 1, os triângulos ABH e DCA' são congruentes e, por isso, eles se justapõem.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Medida da área de uma superfície limitada por um paralelogramo não retângulo

É possível compor um retângulo valendo-se de um paralelogramo não retangular.



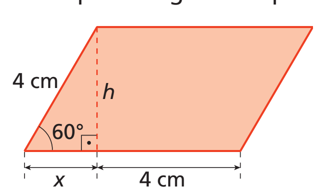
O paralelogramo e o retângulo são **equivalentes**. Dessa maneira, também é possível obter a medida da área do paralelogramo por:

$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$$

Na decomposição do paralelogramo inicial e na composição do retângulo final, o que garante que o triângulo retângulo se justaponha perfeitamente ao outro lado do paralelogramo?

Acompanhe este exemplo.

Vamos calcular a medida de área do paralelogramo representado a seguir.



Calculamos a medida de comprimento da altura h do paralelogramo:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos calcular x:

$$4^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + x^2 \Rightarrow 16 = 12 + x^2 \Rightarrow \text{como } x > 0,\ x = 2$$

Assim, a medida do comprimento da base do paralelogramo é $2 + 4 = 6$.

$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

Portanto, a medida da área do paralelogramo é $12\sqrt{3}$ cm².

O valor de x poderia ser obtido de outra maneira?

Questão. Exemplo de resposta: $\cos 60° = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 2$

Observação

Paralelogramo é um quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos.

Em um polígono convexo, todos os segmentos com extremidades no interior do polígono têm todos os seus pontos situados no interior desse polígono.

Observação

Dado um triângulo ABC, retângulo em A, valem as relações a seguir.

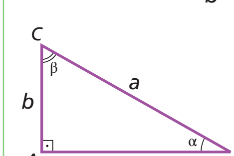
$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$ e

$\cos \alpha = \frac{c}{a}$

$\text{sen } \beta = \frac{c}{a}$ e

$\cos \beta = \frac{b}{a}$

$\text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$ e $\text{tg } \beta = \frac{c}{b}$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Medida da área de uma superfície triangular

Podemos pensar na medida da área do triângulo como metade da medida da área de um retângulo.

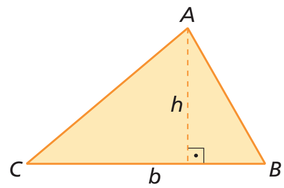


Figura I

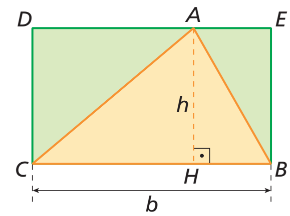


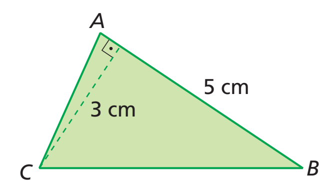
Figura II

Observe, na figura II, que os triângulos *ACD* e *CAH* são congruentes (os lados correspondentes são congruentes), e o mesmo vale para os triângulos *ABE* e *BAH*. Portanto, a medida da área do triângulo *ABC* é metade da medida da área do retângulo *BCDE*. De modo geral, é possível obter a medida da área do triângulo por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Acompanhe o exemplo.

Vamos calcular a medida da área do triângulo *ABC* a seguir.



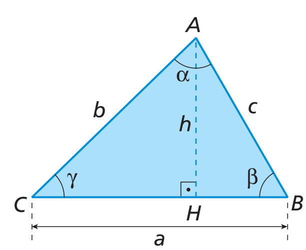
Consideremos como base o lado $\overline{AB}$, cujo comprimento mede 5 cm. A medida de comprimento da altura relativa a esse lado é 3 cm. Assim:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7{,}5$$

Portanto, a medida da área do triângulo é 7,5 cm^2.

Outros modos de obter a medida da área de uma superfície triangular

Observe o triângulo representado a seguir e acompanhe dois modos de calcular sua medida de área.



1. Podemos determinar a medida da área de um triângulo em função das medidas de comprimento de dois lados e da medida da abertura do ângulo formado por eles.

A medida da área do triângulo é:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \quad \text{(I)}$$

Como o $\triangle ABH$ é retângulo, temos:

$$\text{sen}\ \beta = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen}\ \beta \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen}\ \beta$$

2. Podemos determinar a medida da área de um triângulo em função das medidas de comprimento dos três lados.

A medida do perímetro do triângulo é $2p = a + b + c$; então, a medida do semiperímetro é:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

A medida da área do $\triangle ABC$ pode ser dada pela **fórmula de Heron**:

$$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Acompanhe o exemplo a seguir.

Para determinar a medida da área do triângulo retângulo com catetos de medidas de comprimento de 3 cm e 4 cm e hipotenusa de medida de comprimento de 5 cm, podemos empregar três modos diferentes:

- Considerando as medidas de comprimento dos lados $a = 3$ e $c = 4$ e a medida de abertura do ângulo $\beta = 90°$:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \text{sen } 90° = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 6$$

- Considerando $a = 5$, $b = 4$ e $c = 3$ e calculando $p = 6$ $(2p = 3 + 4 + 5 = 12)$, aplicamos a fórmula de Heron:

$$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{6\,(6-3)\,(6-5)\,(6-4)} = \sqrt{36} = 6$$

- Considerando que, em um triângulo retângulo, um cateto é a altura relativa ao outro:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

Portanto, a medida da área do triângulo é 6 cm^2.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

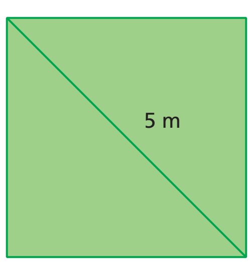
10. Analise as funções e os gráficos apresentados na **atividade resolvida R6** e responda a seguir.

a. O que acontece com as medidas de perímetro e área após dobrar a medida de comprimento do lado do quadrado? **10 a.** A medida de perímetro dobra e a medida de área quadruplica.

b. Qual função é proporcional à medida de comprimento do lado? **10 b.** A função *P*.

c. As medidas de perímetro e de área são iguais em qual ponto dos gráficos? **10 c.** (4, 16)

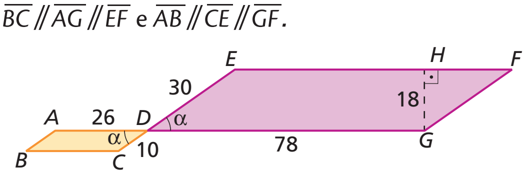
11. Calcule a medida da área do quadrado representado a seguir. **11.** 12,5 m^2



12. **ARGUMENTAÇÃO** A fórmula da medida da área do retângulo também pode ser usada para calcular a medida da área de um quadrado? Justifique. **12.** Sim, pois todo quadrado é retângulo.

13. A medida do perímetro de um retângulo é igual a 12 m. Determine a medida da área desse retângulo sabendo que as medidas de comprimento dos seus lados estão na razão 1 : 2. **13.** 8 m^2

14. Na figura, $CD = 10$, $AD = 26$, $DG = 78$, $DE = 30$, $GH = 18$ e $\overline{BC} /\!/ \overline{AG} /\!/ \overline{EF}$ e $\overline{AB} /\!/ \overline{CE} /\!/ \overline{GF}$.



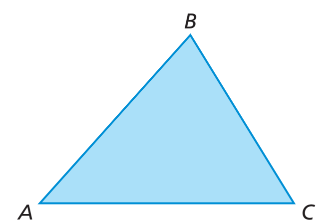
Determine a razão entre:

a. as medidas *DE* e *AB*; **14 a.** 3

b. as medidas de perímetro dos polígonos *DEFG* e *DCBA*; **14 b.** 3

c. as medidas de área dos polígonos *DEFG* e *DCBA*. **14 c.** 9

15. Calcule a medida da área do triângulo *ABC* sabendo que $AB = 8$ cm, $AC = 9$ cm e $BC = 7$ cm. **15.** $12\sqrt{5}$ cm^2



16. $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

16. Obtenha a medida da área de um triângulo equilátero apenas em função da medida de comprimento do lado ℓ.

17. Considere um quadrado com medida de área igual a 150 cm^2 e um triângulo equilátero cuja altura tem a mesma medida de comprimento da diagonal do quadrado. Determine a medida da área desse triângulo. **17.** $100\sqrt{3}$ cm^2

18. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** ***SOFTWARE*** Analise este algoritmo que está sendo produzido no Scratch para o cálculo da medida da área de um polígono a partir da medida de comprimento da base e da medida de comprimento da altura relativa a essa base.

SCRATCH-MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE, EUA

Complete o último comando desse algoritmo considerando que o polígono é um: **18.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. retângulo;

b. paralelogramo;

c. triângulo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

19 a. Aproximadamente 1,714 cm².

19. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA** O francês Gerbert d'Aurillac (950--1003), que no ano de 999 tornou-se o papa Silvestre II, escreveu sobre Aritmética e Geometria. Há indícios de que ele tenha introduzido os numerais indo-arábicos (sem o zero) na Europa cristã, e é atribuída a ele a sentença a seguir, que fornece a medida aproximada da medida da área A de um triângulo equilátero cuja medida do comprimento dos lados é indicada por a:

$$A = \frac{a}{2} \cdot \left(a - \frac{a}{7}\right)$$

Fonte: elaborado com base em EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2011. p. 290 e 315.

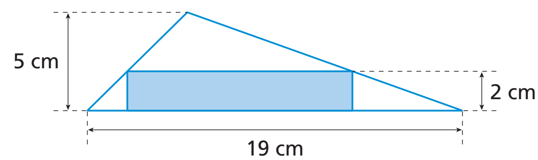
a. Utilize a sentença atribuída a Gerbert para determinar a medida da área de um triângulo equilátero com lados que medem 2 cm de comprimento.

19 c. As medidas de área obtidas pelos dois métodos são próximas.

b. Determine a medida da área do triângulo equilátero do item anterior calculando a metade do produto das medidas de comprimento da base e da altura desse polígono. 19 b. Aproximadamente 1,732 cm².

c. Compare as medidas de área obtidas nos itens **a** e **b**. O que você pode concluir?

20. Obtenha a medida da área do retângulo inscrito no triângulo representado a seguir. 20. 22,8 cm²



Medida da área de uma superfície trapezoidal

Podemos pensar na medida da área do trapézio como a soma das medidas de área de dois triângulos.

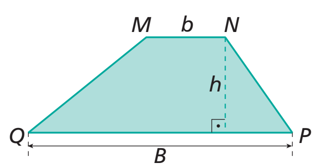


Figura I

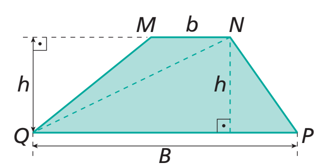


Figura II

Observe, na figura II, que a medida da área do trapézio $MNPQ$ é igual à soma das medidas de área dos triângulos NPQ e MNQ. Assim:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\text{trapézio}} = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} \Rightarrow \boxed{A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}}$$

Observação

Trapézio é um quadrilátero convexo que tem apenas um par de lados paralelos.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe o exemplo a seguir.

A medida de comprimento da base maior de um trapézio é o dobro da medida de comprimento da base menor. Sabendo que a medida da área do trapézio é 3 dm² e que a medida de comprimento da altura é $\sqrt{2}$ dm, vamos calcular a medida de comprimento da base menor.

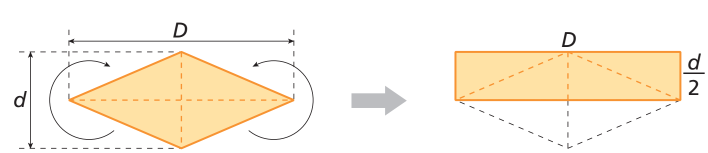
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \Rightarrow 3 = \frac{(2b + b) \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3b = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

Portanto, a medida de comprimento da base menor é $\sqrt{2}$ dm.

Medida da área de uma superfície losangular

Como o losango é um paralelogramo, podemos calcular sua medida de área como o produto da medida de comprimento da base pela medida de comprimento da altura. Outro modo de calcular essa medida de área é por meio das medidas de comprimento das diagonais do losango.

Observe como é possível compor um retângulo a partir de um losango:

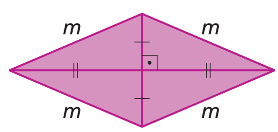


Desse modo, obtemos a medida da área do losango pelo cálculo da medida da área do retângulo que tem como medida de comprimento da base D e como medida de comprimento da altura $\frac{d}{2}$. Assim:

$$A_{\text{losango}} = D \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow \boxed{A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}}$$

Observação

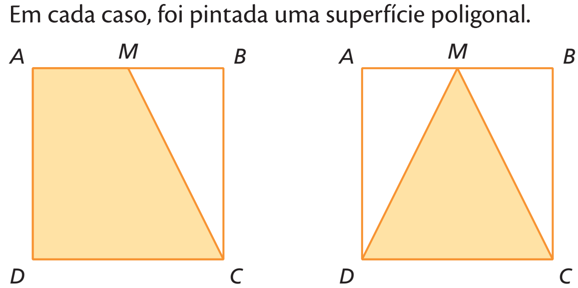
Losango é um paralelogramo cujos quatro lados têm a mesma medida de comprimento m. As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e se cruzam nos seus respectivos pontos médios.



Atividades propostas

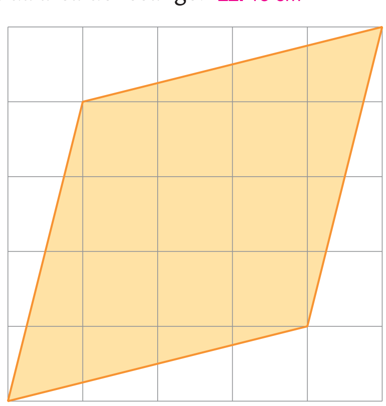
Registre em seu caderno

21. O comprimento do lado do quadrado $ABCD$ mede 10 u. Em cada caso, foi pintada uma superfície poligonal.



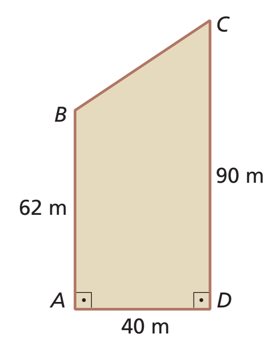
Sabendo que $AM = MB$, calcule a medida da área de cada figura pintada em u^2. **21.** 75 u^2 e 50 u^2, respectivamente.

22. Considere que a malha a seguir é composta de quadrados cujo comprimento do lado mede 1 cm e determine a medida da área do losango. **22.** 15 cm^2



23. Para confeccionar uma bandeira do Brasil, um artista plástico colou, sobre um tecido retangular verde de medidas das dimensões 2 m × 1,4 m, um tecido amarelo com formato de losango. Cada um dos vértices do losango dista 17 cm do lado do retângulo que está mais próximo. Qual é a medida da área do losango, em centímetro quadrado? **23.** 8.798 cm^2

24. Um terreno tem formato de trapézio, conforme esquema a seguir.

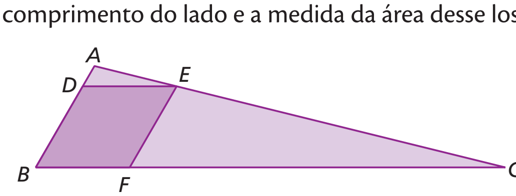


Será construída uma cerca, paralela ao lado $\overline{AD}$, dividindo esse terreno em dois terrenos com a mesma medida de área. Qual deve ser a medida da distância da cerca ao lado $\overline{AD}$? **24.** Alternativa **c**.

a. 24 m
b. 36 m
c. 38 m
d. 44 m
e. 56 m

25. 4 m; $8\sqrt{3}$ m^2

25. Na figura representada a seguir, $DEFB$ é um losango inscrito no triângulo ABC, em que $AB = 5$ m, $BC = 20$ m e a abertura do ângulo $A\hat{B}C$ mede 60°. Determine a medida de comprimento do lado e a medida da área desse losango.



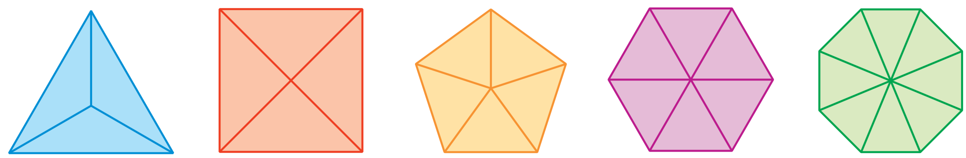
26. PENSAMENTO COMPUTACIONAL · *SOFTWARE* Usando o Scratch, produza um algoritmo que calcule a medida de área de um:

a. trapézio a partir das medidas de comprimento das bases e da altura; **26 a.** Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

b. losango a partir das medidas de comprimento das diagonais. **26 b.** Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

Medida da área de uma superfície poligonal regular

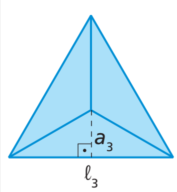
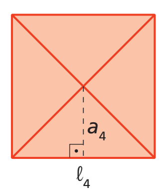
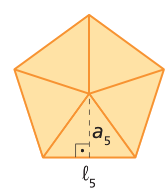
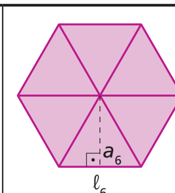
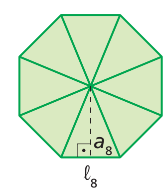
Sempre é possível decompor um polígono regular de n lados em n triângulos isósceles congruentes entre si.



Cada um desses triângulos tem pelo menos dois lados congruentes, correspondentes ao raio da circunferência circunscrita ao polígono.

A medida de comprimento da base e a medida de comprimento da altura de cada um desses triângulos são, respectivamente, a medida de comprimento do lado e a medida de comprimento do apótema do polígono regular. Como a medida da área de cada um desses polígonos regulares é igual à soma das medidas de área dos triângulos que os compõem, podemos chegar às igualdades apresentadas no quadro.

Medida da área de alguns polígonos regulares

Polígono regular					
Cálculo da medida da área	$A_3 = 3 \cdot \frac{\ell_3 \cdot a_3}{2}$	$A_4 = 4 \cdot \frac{\ell_4 \cdot a_4}{2}$	$A_5 = 5 \cdot \frac{\ell_5 \cdot a_5}{2}$	$A_6 = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2}$	$A_8 = 8 \cdot \frac{\ell_8 \cdot a_8}{2}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

A variável p representa a medida do semiperímetro do polígono.

Dessa maneira, concluímos que, se um polígono regular tem n lados de medida de comprimento ℓ_n e apótema de medida de comprimento a_n, sua medida de área pode ser dada por:

$$A_n = n \cdot \frac{\ell_n \cdot a_n}{2} \Rightarrow A_n = \frac{n \cdot \ell_n}{2} \cdot a_n \Rightarrow \boxed{A_n = p \cdot a_n}$$

Atividades resolvidas

R7. Determinar a medida da área de um hexágono regular sabendo que a medida de comprimento do apótema é $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

▶ **Resolução**

Como $a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2}$, então: $\frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = 5$

Sabendo que $p = \frac{6 \cdot \ell_6}{2}$, então: $p = \frac{6 \cdot 5}{2} \Rightarrow p = 15$

Substituindo a medida do semiperímetro na expressão $A_6 = p \cdot a_6$, obtemos: $A_6 = 15 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$

Portanto, a medida da área do hexágono regular é $\frac{75\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

R8. A medida da área de um triângulo equilátero é $\frac{\sqrt{3}}{16}$ m^2 e sua medida de perímetro é $\frac{3}{2}$ m. Calcular a medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

▶ **Resolução**

Se a medida do perímetro do triângulo é $\frac{3}{2}$ m, a medida do semiperímetro é $p = \frac{3}{4}$ m.

Sendo $A_3 = p \cdot a_3$, temos:

$$\frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{3}{4} \cdot a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 16} \Rightarrow a_3 = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Como a medida de comprimento do apótema de um triângulo equilátero é metade da medida de comprimentodo raio da circunferência circunscrita a ele, temos:

$$a_3 = \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{r}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

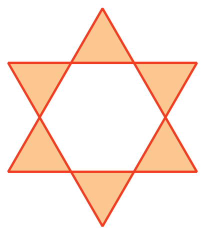
Portanto, a medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita ao triângulo é $\frac{\sqrt{3}}{6}$ m.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

27. Qual é a medida da área de um triângulo equilátero cujo comprimento do apótema mede $\sqrt{3}$ cm? **27.** $9\sqrt{3}$ cm²

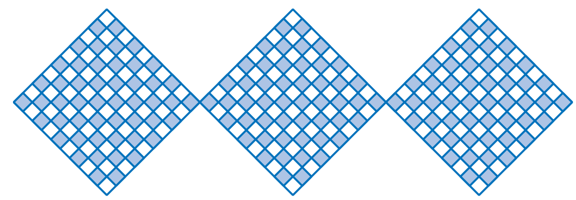
28. Determine a medida da área da região laranja da estrela representada sabendo que os triângulos e o hexágono que a formam são regulares e que o comprimento do apótema do hexágono mede 6 cm. **28.** $72\sqrt{3}$ cm²



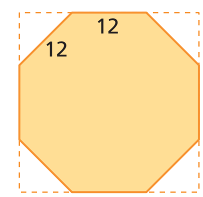
29. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

29. A razão entre a medida de comprimento do apótema de um hexágono regular e a medida de comprimento do apótema de um quadrado é $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Determine a razão entre as medidas de área do hexágono e do quadrado.

30. Um artesão montou o mosaico a seguir composto de três placas quadradas idênticas, cujo comprimento do apótema mede $\frac{\sqrt{2}}{10}$ m. Sabendo que ele cobra R$ 500,00 pelo metro quadrado de mão de obra, quanto ele recebeu por esse trabalho? **30.** R$ 120,00



31. Cortando os cantos de um quadrado, como mostra a figura, obtém-se um octógono regular cujo comprimento dos lados mede 12 cm. Qual é a medida de comprimento do apótema desse octógono? **31.** $6(1 + \sqrt{2})$ cm



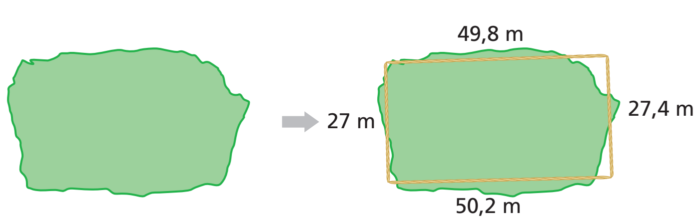
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Medida da área de uma superfície aproximada ou composta de superfícies poligonais

No meio rural, há necessidade de determinar as medidas de área de terrenos com contornos não muito "alinhados" para fins de plantio, aplicação de adubos e previsão de colheita. Para obter a medida da área desses terrenos, podem-se usar modelos matemáticos regionais bastante peculiares, aprendidos por meio de cultura popular e transmitidos entre as famílias dos agricultores através das gerações.

Para medir a área da superfície de um terreno, por exemplo, alguns agricultores empregam o cálculo de medida da área do retângulo. Outros utilizam a medida da área do triângulo. Quando o terreno não tem formato retangular nem triangular, ele é dividido em partes que reproduzem aproximadamente essas figuras.

Observe, nas figuras a seguir, um exemplo de como se calcula, no interior do Rio Grande do Sul, a medida da área de um terreno. As medidas de comprimento são obtidas com cordas esticadas e trena. Nesse tipo de cálculo, procura-se obter um quadrilátero próximo de um retângulo e aplica-se uma compensação com as partes que sobram e com as partes que faltam para cobri-lo.



Assim, calcula-se a medida da área do terreno como se fosse a medida da área de um retângulo. A medida do comprimento da base do retângulo, em metro, será dada pela média aritmética de 49,8 e 50,2. A medida do comprimento da altura, em metro, será dada pela média aritmética de 27 e 27,4. Assim:

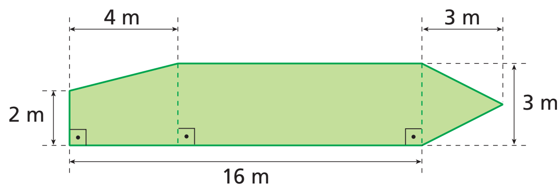
$$\frac{49{,}8 + 50{,}2}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ e } \frac{27 + 27{,}4}{2} = \frac{54{,}4}{2} = 27{,}2$$

A medida da área, em m², é dada pelo produto dessas médias aritméticas: $50 \cdot 27{,}2 = 1.360$.

Portanto, no cálculo da medida da área do terreno, os agricultores chegariam a 1.360 m^2 que, dado o método utilizado para o cálculo da medida da área, é um valor aproximado o suficiente para alguns fins.

Atividade resolvida

R9. Determinar a medida da área da figura a seguir.



▸ Resolução

Podemos decompor a figura em três: um trapézio, um retângulo e um triângulo. Assim:

$$A = A_{\text{trapézio}} + A_{\text{retângulo}} + A_{\text{triângulo}} = \frac{(3+2)\cdot 4}{2} +$$

$$+ 12 \cdot 3 + \frac{3 \cdot 3}{2} = 10 + 36 + 4{,}5 = 50{,}5$$

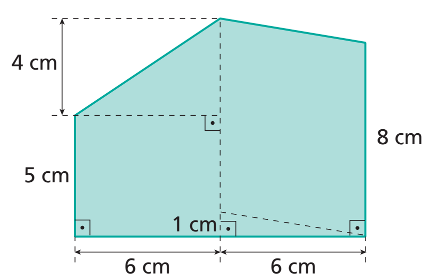
Portanto, a medida da área da figura é 50,5 m^2.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

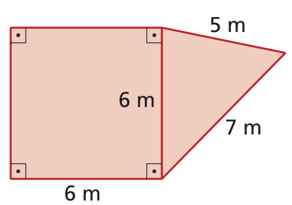
32. Calcule a medida da área das figuras a seguir.

a.



32 a. 93 cm^2

b.

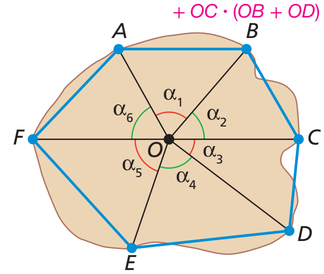


32 b. $6(6+\sqrt{6})$ m^2

33. **EM DUPLA** Com as mãos, rasgue um papel dando-lhe um formato qualquer. Em seguida, troque de papel comum colega para que cada um calcule a medida da área, em cm^2, do papel do outro. Para isso, vocês devem medir, com a régua, o comprimento dos lados de um retângulo, ou de uma composição de retângulos e triângulos, que se aproxime do contorno desse papel, como na situação do cálculo da medida da área de um terreno no Rio Grande do Sul. Depois, destroquem para verificar se o cálculo do colega está correto. **33.** Resposta pessoal.

34. Analise a seguir a representação de um terreno cuja superfície corresponde aproximadamente ao hexágono *ABCDEF*.

34. $\frac{\sqrt{3}}{4}[OA \cdot (OB + OF) + OC \cdot (OB + OD) + OE \cdot (OD + OF)]$



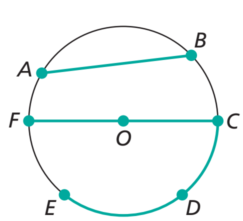
Com um teodolito, obtêm-se, a partir de um ponto *O* do terreno, as medidas α_1, ..., α_6. Medem-se também *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, *OE* e *OF*. Supondo $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_6$, calcule a medida de área aproximada do terreno representado adicionando as medidas de área dos seis triângulos.

Círculo e circunferência

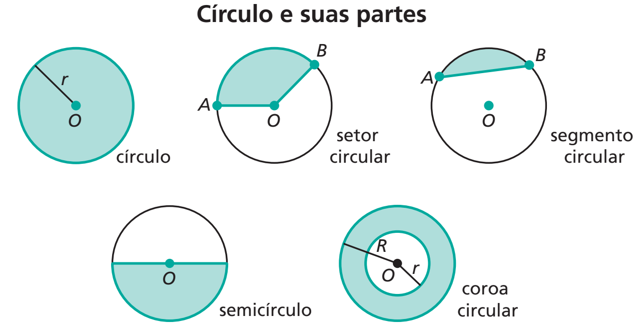
O **círculo** é formado pela união de uma circunferência com sua região interna.

Circunferência e seus elementos

- *O* é o centro da circunferência.
- $\overline{AB}$ é uma corda.
- $\overline{CF}$ é um diâmetro.
- $\overline{OC}$ é um raio.
- $\overset{\frown}{CDE}$ é um arco.



Círculo e suas partes



Medida do comprimento da circunferência

Você conhece algum método para determinar o valor do número irracional π?

Provavelmente, os primeiros valores para π foram obtidos por meio de medidas. Por exemplo, no papiro de Rhind (documento egípcio escrito por volta de 1650 a.C.), a razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida de comprimento do seu diâmetro apresenta o valor 3,1604, que seria uma aproximação do número π.

Mais tarde, o matemático grego Arquimedes (287-212 a.C.) apresentou um cálculo teórico que resultou na aproximação $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Para isso, ele considerou uma circunferência cujo comprimento do raio mede 1. Então, percebeu que a medida do comprimento da circunferência estava entre as medidas dos perímetros de polígonos regulares, com n lados cada um, inscritos em uma circunferência e circunscritos a ela.


BIBLIOTECA NACIONAL DA FRANÇA, PARIS

Arquimedes em gravura do século XVII.

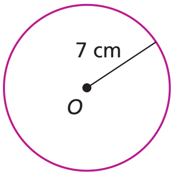
Hoje, com o emprego da tecnologia, é possível determinar uma aproximação tão boa quanto quisermos para o π.

Sabe-se que a razão entre a medida de comprimento C de uma circunferência cujo comprimento do raio mede r e a medida de comprimento do seu diâmetro ($2r$) é constante, ou seja, a razão é sempre a mesma, qualquer que seja a circunferência. Essa constante é denotada por π. Então, a medida do comprimento da circunferência pode ser determinada por:

$$\frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow \boxed{C = 2\pi r}$$

Acompanhe estes exemplos.

a. Vamos calcular a medida do comprimento da circunferência a seguir.



$C = 2\pi r$

$C = 2 \cdot \pi \cdot 7$

$C = 14\pi$

Portanto, a medida do comprimento dessa circunferência é 14π cm.

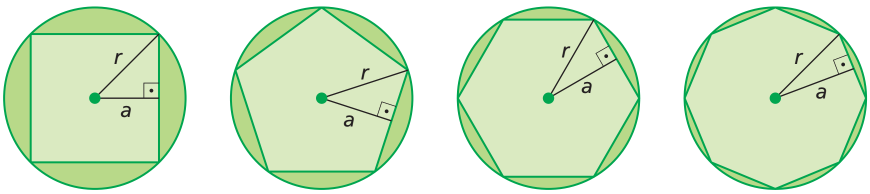
b. Vamos determinar a medida de comprimento do raio da circunferência cuja medida de comprimento é $\pi\sqrt{5}$ m.

$C = 2\pi r \Rightarrow \pi\sqrt{5} = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Portanto, a medida de comprimento do raio da circunferência é $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m.

Medida da área do círculo

Observe cada circunferência a seguir, na qual foi inscrito um polígono regular.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Note que, quanto maior é o número de lados do polígono inscrito, mais a área dele se aproxima da área do círculo, além de a medida de comprimento do apótema a se aproximar cada vez mais da medida de comprimento do raio r do círculo.

Já vimos que a medida da área de um polígono regular é dada pelo produto da medida do seu semiperímetro pela medida de comprimento do apótema ($A = p \cdot a$). Podemos estender essa ideia para medida da área do círculo, ao considerar que, quando o número de lados do polígono tende a infinito, a medida de comprimento do apótema do polígono tende a r.

Assim: $A_{\text{círculo}} = \frac{2\pi r}{2} \cdot r$

Portanto, a medida da área do círculo é dada por: $\boxed{A_{\text{círculo}} = \pi r^2}$

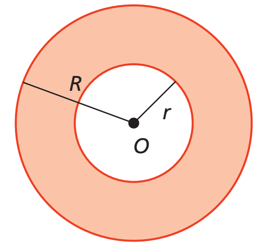
Como podemos expressar a medida da área de um círculo cuja medida de comprimento do raio é r em função da medida de comprimento d do diâmetro da circunferência desse círculo?

Questão. Como $r = \frac{d}{2}$, temos:

$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow A_{\text{círculo}} = \frac{\pi d^2}{4}$

Medida da área da coroa circular

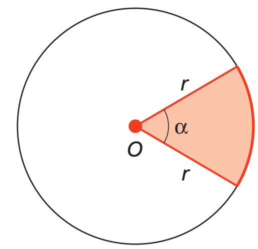
Observe a coroa circular representada a seguir.



A medida da área da coroa circular é a diferença entre a medida da área do círculo de maior raio e a medida da área do círculo de menor raio:

$$A_{\text{coroa}} = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow \boxed{A_{\text{coroa}} = \pi(R^2 - r^2)}$$

Medida da área do setor circular



A medida da área do setor circular é diretamente proporcional à medida de abertura α do ângulo central que o determina, ou seja, quando α é duplicada ou triplicada, a medida da área correspondente também duplica ou triplica.

Sabendo disso e considerando que o círculo com raio de medida de comprimento *r* é um setor circular determinado por um ângulo com medida de abertura de 360°, podemos escrever:

- para α em grau:

$$\frac{A_{\text{setor}}}{A_{\text{círculo}}} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \frac{A_{\text{setor}}}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \boxed{A_{\text{setor}} = \frac{\alpha \pi r^2}{360°}}$$

- para α em radiano:

$$\frac{A_{\text{setor}}}{A_{\text{círculo}}} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \frac{A_{\text{setor}}}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \boxed{A_{\text{setor}} = \frac{\alpha r^2}{2}}$$

Como podemos expressar a medida da área de um setor circular com medida de comprimento do raio *r* em função da medida de comprimento ℓ do arco determinado pelo mesmo ângulo central que determina o setor circular? **Questão.**

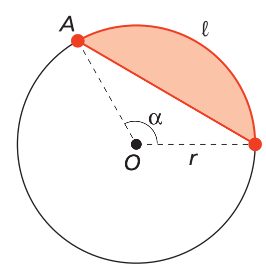
$2\pi r$ —— $360°$
ℓ —— α
$\alpha = \frac{360° \cdot \ell}{2\pi r}$

$A_{\text{setor}} = \frac{\alpha \pi r^2}{360°} = \frac{\frac{360° \cdot \ell}{2\pi r} \cdot \pi r^2}{360°}$

$A_{\text{setor}} = \frac{\ell r}{2}$

Medida da área do segmento circular

Observe o segmento circular representado a seguir, em que α < 180°.

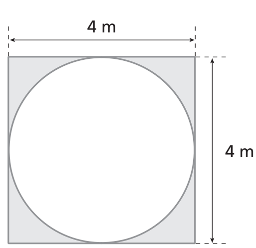


Note que a medida da área do segmento circular é a diferença entre a medida da área do setor circular determinado pelo ângulo de medida de abertura α e a medida da área do triângulo *AOB*:

$$\boxed{A_{\text{segmento}} = A_{\text{setor}} - A_{\text{triângulo}}}$$

Atividades resolvidas

R10. Um serralheiro recortou um disco circular de uma chapa quadrada de metal cujo comprimento do lado mede 4 m, conforme mostra este esquema. Determinar a medida da área da chapa que sobrou. (*Adotar*: π = 3,14)



▶ Resolução

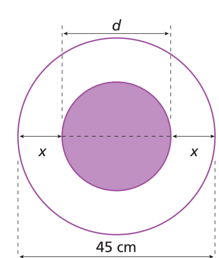
Vamos chamar, respectivamente, de A_1, A_2 e A_3 a medida da área da chapa que sobrou, a medida da área do quadrado e a medida da área do círculo.

Sabendo que a medida de comprimento do raio do círculo é metade da medida de comprimento do lado do quadrado ($r = 2$ m) e que $A_1 = A_2 - A_3$, temos:

$A_1 = 4^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_1 = 16 - 3{,}14 \cdot 2^2 \Rightarrow A_1 = 3{,}44$

Logo, a medida da área da chapa que sobrou é aproximadamente 3,44 m².

R11. Segundo as regras do jogo de basquete, a circunferência máxima da bola deve ter medida de comprimento entre 74,9 cm e 78 cm. Se uma bola de basquete, com circunferência máxima de medida de comprimento de 78 cm, for centralizada no aro de uma cesta com 45 cm de medida de comprimento do diâmetro, de quanto será a medida da distância *x* entre a bola e o aro em toda a volta? (*Adotar*: π = 3,14)



▶ Resolução

Sendo *d* a medida de comprimento do diâmetro da circunferência máxima da bola, temos:

$C = d \cdot \pi \Rightarrow 78 = d \cdot 3{,}14 \Rightarrow d = \frac{78}{3{,}14} \Rightarrow d \simeq 24{,}84$

Observando o esquema da vista superior da bola e do aro, temos:

$2x = 45 - d$

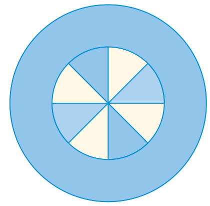
$2x \simeq 45 - 24{,}84$

$x \simeq \frac{20{,}16}{2}$

$x \simeq 10{,}08$

Portanto, a medida da distância entre a bola e o aro é de aproximadamente 10,08 cm.

R12. A figura representada é formada por quatro setores circulares cuja abertura do ângulo central mede 45° e por uma coroa circular. As circunferências que limitam a coroa têm medidas de comprimento do raio iguais a 4 u e 7 u. Determinar a medida da área da região pintada de azul em u^2. (*Adotar*: $\pi = 3{,}14$)



▸ Resolução

Medida da área de um setor circular:

$$\frac{45° \cdot \pi \cdot 4^2}{360°} = \frac{3{,}14 \cdot 16}{8} = 6{,}28$$

Medida da área dos quatro setores:

$$4 \cdot 6{,}28 = 25{,}12$$

Medida da área da coroa circular:

$$\pi \cdot (7^2 - 4^2) = 3{,}14 \cdot (49 - 16) = 103{,}62$$

Portanto, a medida da área da região pintada de azul é:

$$25{,}12 \text{ u}^2 + 103{,}62 \text{ u}^2 = 128{,}74 \text{ u}^2$$

35. $C_1 = 2\pi r$
$C_2 = 2\pi(r \cdot k) = C_1 \cdot k$
Logo, a medida do comprimento também será multiplicada por k.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

35. **ARGUMENTAÇÃO** Se multiplicarmos a medida de comprimento do raio de uma circunferência por k, por quanto será multiplicada a medida do seu comprimento? Justifique sua resposta.

36. Se, em uma circunferência com medida de comprimento C e medida de comprimento do raio r, aumentarmos em uma unidade:

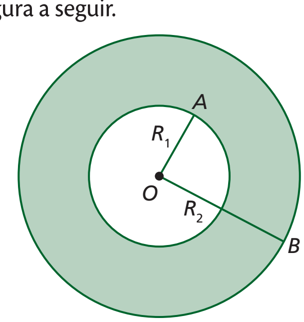
36 a. 2π unidades.

a. a medida de comprimento do raio, em quanto aumentará a medida do comprimento da circunferência?

b. a medida do comprimento da circunferência, em quanto aumentará a medida de comprimento do raio?

36 b. $\frac{1}{2\pi}$ unidade.

37. Observe a figura a seguir.

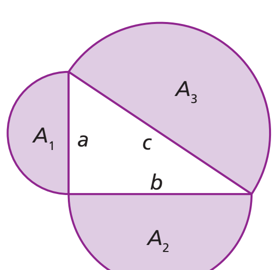


Sabendo que $R_1 = 10$ cm e que a medida da área da coroa circular é 300π cm², qual é a medida de comprimento R_2?

37. Alternativa **e.**

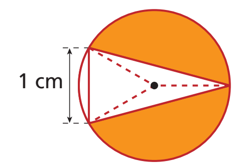
a. 16 cm
b. 17 cm
c. 18 cm
d. 19 cm
e. 20 cm

38. Os comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo medem a e b e o da hipotenusa, c. Sobre esses lados foram construídos os semicírculos de medidas de área A_1, A_2 e A_3.

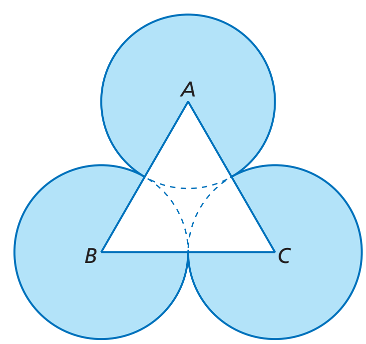


Mostre que $A_1 + A_2 = A_3$. **38.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

39. O triângulo inscrito na circunferência da figura a seguir, cujo comprimento do raio mede 1 cm, é isósceles e o comprimento de sua base mede 1 cm. Calcule a medida da área da região pintada de laranja. **39.** $\frac{5\pi - 3}{6}$ cm²



40. O triângulo ABC representado a seguir é equilátero e tem medida de área igual a $2\sqrt{3}$ cm². As circunferências têm centro em A, B e C.



Calcule a medida da área da região pintada de azul.
40. 5π cm²

41. ***SOFTWARE*** Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, realize os passos indicados a seguir.

1º. Construa cinco circunferências com raios de mesma medida de comprimento.

2º. Em cada circunferência, construa um dos polígonos regulares inscritos com 3, 4, 6, 8 e 16 lados.

3º. Calcule a medida da área de cada polígono construído e compare-as.

4º. Construa um círculo com a mesma medida de comprimento do raio e calcule sua medida de área.

5º. Se possível, construa um polígono regular com 32 lados, inscrito em uma circunferência de mesma medida de comprimento do raio das circunferências anteriores. Calcule sua medida de área e compare essa nova medida com as medidas dos outros polígonos e com a medida da área do círculo.

O que podemos concluir em relação à medida da área dos polígonos inscritos e sua quantidade de lados?

41. A medida da área dos polígonos inscritos aumenta conforme a quantidade de lados aumenta.

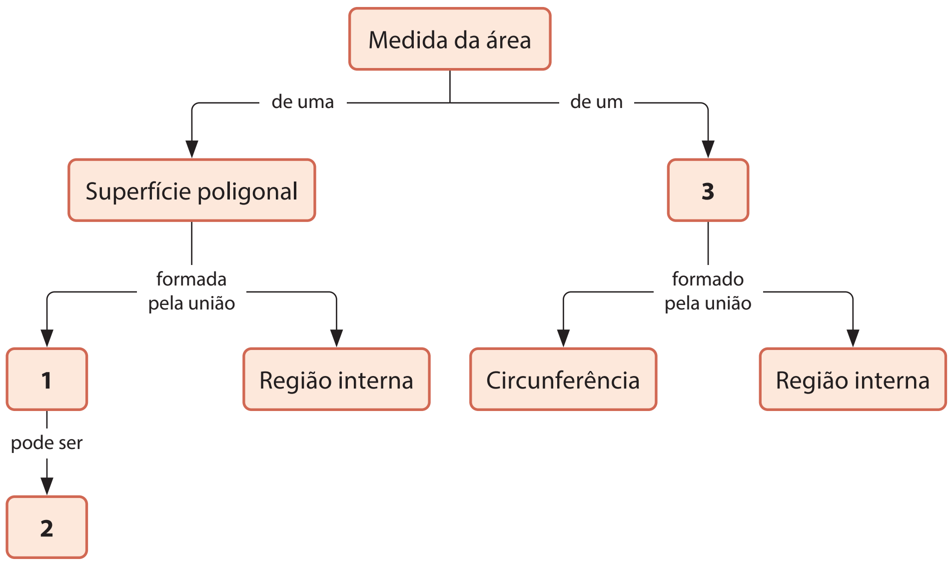
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 1

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

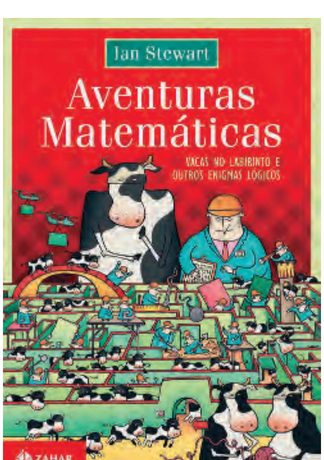
Conexões entre conceitos. A – 3; B – 1; C – 2.

A. Círculo

B. Polígono

C. Regular

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO



REPRODUÇÃO/EDITORA ZAHAR

Livro

Aventuras matemáticas: vacas no labirinto e outros enigmas lógicos

Ian Stewart

Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Com enigmas e jogos, o autor procura mostrar como qualquer pessoa pode entender até os raciocínios mais elaborados de Matemática. Uma leitura curiosa e divertida para todos os leitores.

Site

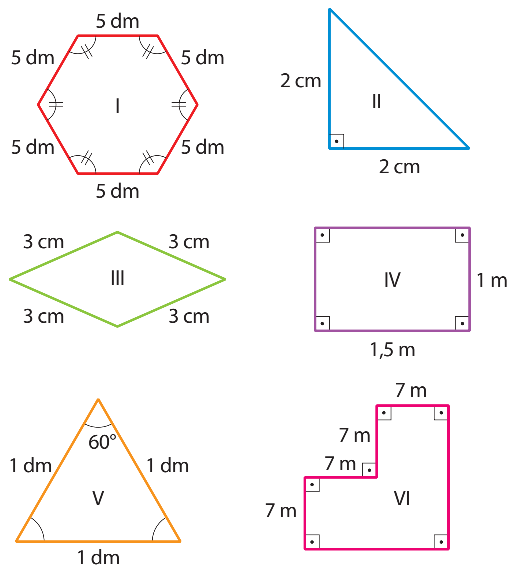
Pavimentação, caleidoscópios, caleidociclos, Escher e, até, ... Matemática!!!

Publicadas no *site* do Clube de Matemática da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), as duas sequências de atividades apresentam explicações, textos extras e vídeos mostrando o uso de transformações geométricas para a pavimentação, de forma lúdica e interessante. Com essas sequências, o leitor aprenderá, inclusive, como construir uma obra de arte usando técnicas e transformações geométricas.

Disponíveis em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-1/; http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-2/. Acessos em: 4 set. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Observe os polígonos representados a seguir.



São regulares os polígonos: **Q1.** Alternativa **d.**

a. III e V. **b.** IV e VI. **c.** I e III. **d.** I e V.

Q2. Em um ▬▬▬ inscrito em uma circunferência, a medida de comprimento do lado é dada pela relação $\ell = 2a\sqrt{3}$, em que a é a medida de comprimento do apótema. **Q2.** Alternativa **b.**

a. quadrado
b. triângulo equilátero
c. hexágono regular
d. triângulo retângulo

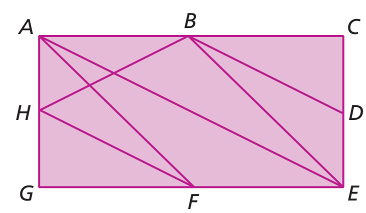
Q3. A medida da área de um paralelogramo é igual à medida da área de um ▬▬▬ de mesmas medidas de comprimento da base e da altura. **Q3.** Alternativa **d.**

a. polígono regular
b. triângulo
c. trapézio
d. retângulo

Q4. Um quadrado e um hexágono regular têm a mesma medida de perímetro e medidas de comprimento dos respectivos apótemas iguais a a_4 e a_6; então, a razão entre as medidas de área do hexágono e do quadrado, nessa ordem, é: **Q4.** Alternativa **a.**

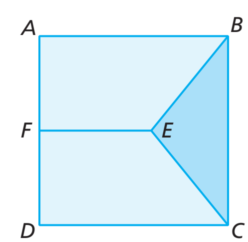
a. $\frac{a_6}{a_4}$ **b.** a_6 **c.** $\frac{a_4}{a_6}$ **d.** $a_4 \cdot a_6$

Q5. Sabendo que *ACEG* é um retângulo e *B*, *D*, *F* e *H* são pontos médios dos lados $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EG}$ e $\overline{GA}$, respectivamente, podemos afirmar que as medidas de área dos triângulos ▬▬▬ **não** são iguais. **Q5.** Alternativa **c.**



a. *BDE* e *BAH*
b. *ABE* e *AGF*
c. *AGF* e *BDE*
d. *GHF* e *DBC*

Q6. Considere um quadrado *ABCD* cujo comprimento do lado mede 10 cm.

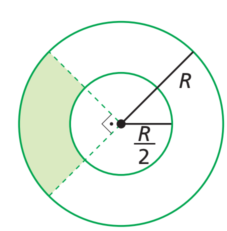


A medida da área de cada trapézio (*ABEF* e *DCEF*) é igual ao dobro da medida da área de *BCE*. Qual é a medida de comprimento de $\overline{FE}$? **Q6.** Alternativa **d.**

a. 3 cm **b.** 4 cm **c.** 5 cm **d.** 6 cm

Q7. Observe a figura.

A área pintada de verde corresponde a ▬▬▬ da medida da área do círculo menor, cujo comprimento do raio mede $\frac{R}{2}$.



a. $\frac{3}{4}$ **c.** $\frac{1}{16}$
b. $\frac{3}{8}$ **d.** $\frac{1}{8}$

Q7. Alternativa **a.**

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7
Identificar polígonos, superfícies poligonais, circunferências e círculos.	X				X	X	X
Estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles.		X		X			
Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de medidas de área de superfícies poligonais e do círculo.			X	X	X	X	X

Capítulo 2

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESPACIAL

LISA MAREE WILLIAMS/GETTY IMAGES

Menina em aula de ioga na Austrália testando uma prótese 3D feita a partir de materiais reciclados. Foto de 2019.

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre estes e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

A busca por próteses que sejam acessíveis e mais baratas é uma necessidade de muitas pessoas, já que elas costumam ter alto custo devido aos processos complexos e materiais caros envolvidos na fabricação.

Hoje, graças às impressoras 3D, é possível produzir próteses personalizadas de maneira econômica e eficiente, democratizando o acesso a essa importante ferramenta. Nesse cenário, a comunidade *on-line* e-NABLE reúne voluntários do mundo todo que usam suas impressoras 3D para produzir próteses de membros superiores gratuitas ou de baixo custo para pessoas necessitadas. Por meio de seu *site*, eles disponibilizam manuais, modelos e *designs* criados pelos próprios voluntários. Atualmente, essa comunidade conta com cerca de 40 mil voluntários em mais de 100 países.

No desenvolvimento de tais próteses, é possível identificar aplicações da Geometria Espacial, tema que será desenvolvido neste capítulo. Com seus conceitos, é possível criar modelos tridimensionais de maneira detalhada e que se ajustam de maneira confortável e precisa ao corpo do paciente, melhorando a funcionalidade e a estética das próteses.

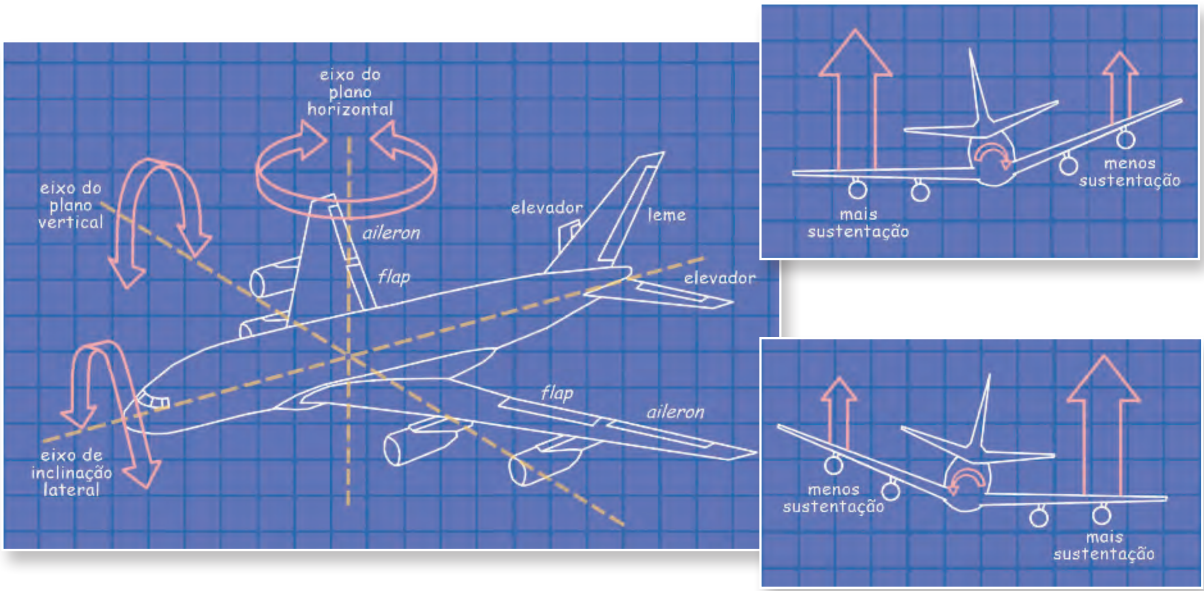
Fonte: elaborado com base em WHAT is e-NABLE? **ENABLING THE FUTURE**. Disponível em: https://enablingthefuture.org/. Acesso em: 27 ago. 2024.

ODS 3 ODS 9 ODS 17

OBJETO DIGITAL
Infográfico clicável: Impressão 3D

Este infográfico apresenta mais informações sobre a técnica de impressão 3D, tecnologia que pode ser aplicada em diferentes áreas, como a da saúde.

A Geometria euclidiana



ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA

A sustentabilidade no ar e o formato aerodinâmico de um avião são frutos do conhecimento humano construído durante milhares de anos. O formato da fuselagem e das asas e a posição relativa do plano do leme e do plano das pequenas asas traseiras exemplificam o uso de conceitos e de relações geométricas na aerodinâmica de um avião. As asas do avião formam um ângulo que, na Geometria, é conhecido por **ângulo diedro**; graças a ele, quando o avião se inclina, a asa na posição inferior adquire maior sustentação, o que o leva de volta à posição horizontal em uma manobra de estabilização durante o voo. Neste capítulo, vamos estudar alguns elementos constitutivos da Geometria no espaço tridimensional.

Euclides de Alexandria, matemático grego que viveu por volta de 300 a.C., teve grande importância no desenvolvimento da Geometria. Euclides é reconhecido, sobretudo, por sua obra *Os elementos*, composta de 13 livros (ou capítulos), na qual está organizado todo o conhecimento geométrico até então acumulado. Neste capítulo, estudaremos alguns tópicos da **Geometria euclidiana**.

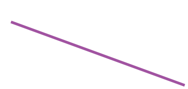
Noções primitivas

Na Geometria, ponto, reta e plano são algumas noções aceitas sem definição e, por isso, são chamadas de **noções primitivas**. Como são produtos da mente humana, elas funcionam como modelos para explicar a realidade.

- Um **ponto** não tem dimensão, nem massa, nem volume.

• A

- Uma **reta** não tem espessura, nem começo, nem fim.



r

- Um **plano** não tem espessura nem fronteiras.

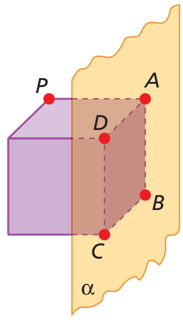
Podemos imaginar um ponto como um pequeno furo em um papel, uma reta como uma linha fina esticada ou um plano comor as águas tranquilas de um lago.

Essas três noções fazem parte do **espaço**, conjunto dos infinitos pontos existentes.

Observação

Nesta obra, representaremos os pontos por letras latinas maiúsculas (A, B, C, ...), as retas por letras latinas minúsculas (r, s, t, ...) e os planos por letras gregas minúsculas (α, β, γ, ...).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



Qualquer conjunto de pontos considerado no espaço, mesmo que unitário, é chamado de **figura**.

Convém lembrar que dois ou mais pontos são denominados **coplanares** se existe um plano que contém todos eles.

- Na figura, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são coplanares, pois pertencem ao plano α. Em linguagem simbólica, indicamos: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$ e $D \in \alpha$
- O ponto *P* não é coplanar com *A*, *B*, *C* e *D*, pois *P* não pertence ao plano α. Em linguagem simbólica, escrevemos: $P \notin \alpha$

Observe, a seguir, alguns exemplos de figura.

Com exceção da figura I, que tem apenas quatro pontos coplanares, as demais têm infinitos pontos. Essas figuras apresentam ainda as seguintes diferenças:

- enquanto as figuras I, II e III são **planas**, pois existe um único plano que as contém, a figura IV é **não plana**, porque, considerando a perspectiva, não existe um plano que contenha todos os pontos da figura;
- a figura II representa uma **linha**; a III, uma **superfície**; a IV, um **sólido**. A figura I, que não representa nenhum desses tipos de figura, não recebe nome especial.

Sistema dedutivo

Em Geometria, além das noções primitivas, são estabelecidas verdades iniciais aceitas sem demonstração: os **postulados**, proposições fundamentais que descrevem relações entre os conceitos primitivos (noções primitivas). Com base nos postulados, demonstramos, por meio de deduções lógicas, outros fatos ou propriedades denominados **teoremas**.

O conjunto de noções primitivas, postulados e teoremas constitui o **sistema dedutivo**.

Postulados: um ponto de partida da Geometria

Iniciamos nossa reflexão a respeito das bases sobre as quais se assenta o desenvolvimento da Geometria com as noções primitivas de ponto, reta e plano. Dando continuidade, foram estabelecidos como propriedades fundamentais desses elementos alguns postulados, os quais são apresentados a seguir.

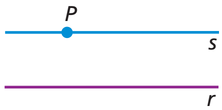
P1. O espaço tem infinitos pontos.

P2. Toda reta e todo plano são conjuntos de infinitos pontos.

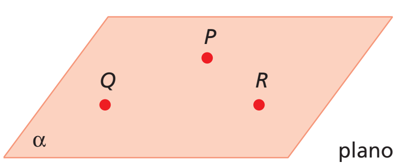
P3. Fora de uma reta, bem como fora de um plano, há infinitos pontos.

P4. Dois pontos distintos determinam uma única reta.

P5. Por um ponto *P* fora de uma reta *r* passa somente uma reta *s* paralela a *r*. (**Postulado de Euclides**.)



P6. Três pontos não colineares determinam um único plano.



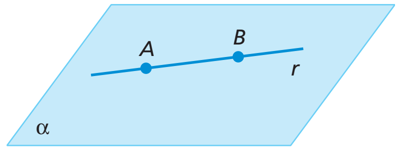
plano α ou plano (*PQR*)

Observação

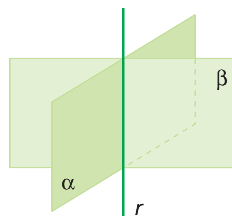
Embora, em Geometria, o termo **determinar** signifique **existir** e **ser único**, há situações em que achamos conveniente enfatizar essas ideias. Nesses casos, usamos, por exemplo: **determinam** uma **única** reta.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

P7. Se dois pontos distintos estão em um plano, a reta que passa por eles está contida nesse plano.



P8. Se dois planos distintos, α e β, interceptam-se, a intersecção é uma reta.

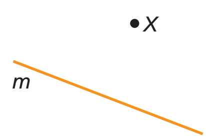


Observações

- Quando uma reta está contida em um plano, significa que todos os pontos que pertencem à reta também pertencem ao plano.
- Uma reta que passa por dois pontos distintos, *A* e *B*, pode ser representada por *r* ou $\overleftrightarrow{AB}$.

Com esses postulados, é possível demonstrar vários teoremas. No decorrer deste capítulo, vamos analisar alguns deles.

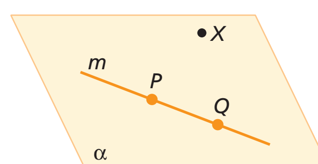
Teorema 1: Dada uma reta *m* e um ponto *X* fora dela, existe um único plano que contém o ponto *X* e a reta *m*.



Demonstração

Pelos postulados **P2** e **P3**, a reta *m* tem dois pontos distintos, *P* e *Q*, que não são colineares com *X*, pois $X \notin m$.

Pelo postulado **P6**, três pontos não colineares determinam um único plano, ou seja, existe um único plano que passa por *P*, *Q* e *X*, sendo α esse plano.

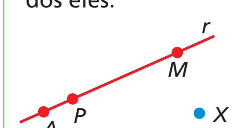


A reta *m* tem dois pontos em α; então, pelo postulado **P7**, ela está contida em α.

Portanto, α é o único plano que contém a reta *m* e o ponto *X*.

Observação

Dois ou mais pontos são ditos **colineares** quando existe uma reta que contém todos eles.



- Na figura, os pontos *A*, *P* e *M* são colineares, pois pertencem à reta *r*. Em linguagem simbólica, indicamos: $A \in r$, $P \in r$ e $M \in r$
- O ponto *X* não é colinear com *A*, *P* e *M*, pois *X* não pertence à reta *r*. Em linguagem simbólica, escrevemos: $X \notin r$

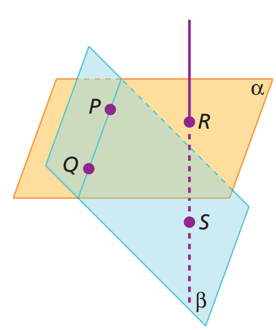
Atividade resolvida

R1. Quantos planos podem passar por um ponto *P* dado?

▸ Resolução

Em um sistema dedutivo, certas resoluções, como a que exemplificaremos aqui, necessitam de um desenvolvimento e de uma linguagem estritamente formal.

Além do ponto *P*, o espaço tem infinitos pontos (postulado **P1**). Portanto, existe um ponto *Q*, distinto de *P*, e uma reta $\overleftrightarrow{PQ}$ (postulado **P4**).



Vamos considerar um ponto *R*, fora da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ (postulado **P3**), que determina com ela um plano α (teorema 1). Logo, o plano α passa por *P*.

Agora, vamos considerar um ponto *S*, fora de α (postulado **P3**). Como $S \notin \alpha$, $S \notin \overleftrightarrow{PQ}$ e, novamente pelo teorema 1, existe um plano β, com $\beta \neq \alpha$, que passa por *P*.

Continuando a fazer construções análogas, podemos construir infinitos planos que passam pelo ponto *P*.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

1. Infinitos; um único; infinitos.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Quantos planos podem passar por dois pontos distintos? E quantos planos podem passar por três pontos distintos não colineares? E se os três pontos forem colineares?

2. Quantos são os planos que contêm quatro pontos distintos?
2. Infinitos planos, um só plano ou nenhum plano.

3. Dados quatro pontos, dos quais três deles nunca são colineares, quantas retas são determinadas por esse conjunto de pontos? **3.** Seis retas.

4. Indique se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

Se *F* é uma figura tal que quatro pontos quaisquer dela são coplanares, então *F* é uma figura plana, isto é, está contida em um plano.

4. Verdadeira. Basta fixar três pontos da figura por onde passa um único plano e variar o outro ponto, que é coplanar.

5. **ARGUMENTAÇÃO** Uma mesa de quatro pernas às vezes pode oscilar, enquanto uma mesa de três pernas está firme. Explique esse fato segundo a teoria estudada.

COSTELETA DE PORCO/SHUTTERSTOCK

CAP/SHUTTERSTOCK

5. Três pontos (três pés da mesa) determinam um único plano (do chão); quatro pontos podem determinar mais de um plano.

Posições relativas

Paralelismo

O paralelismo está muito presente em nosso dia a dia.

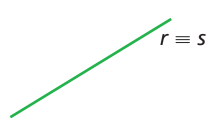
A seguir, estudaremos como as retas e os planos se relacionam por meio dessa ideia.

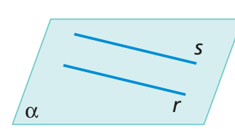
Retas paralelas

Duas **retas**, *r* e *s*, são **paralelas** se têm todos os pontos comuns (coincidem) ou se estão em um mesmo plano α e não têm nenhum ponto comum (intersecção vazia).

Em linguagem simbólica, escrevemos: $r /\!/ s \Leftrightarrow r \equiv s$ ou $r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$ e $r \cap s = \varnothing$

retas coincidentes





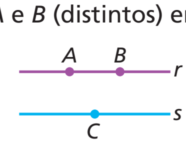
retas paralelas distintas (não coincidentes)

Teorema 2: Duas retas paralelas, não coincidentes, determinam um único plano.

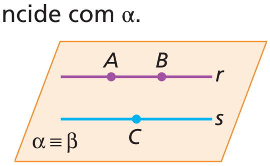
Demonstração

Por definição, existe pelo menos um plano α que contém as retas *r* e *s*, já que elas são paralelas e não coincidentes. Vamos mostrar que α é único.

Pelo postulado **P2**, consideremos *A* e *B* (distintos) em *r* e o ponto *C* em *s*.



Pelo postulado **P6**, os pontos *A*, *B* e *C* determinam um plano β. Logo, $A \in \beta$, $B \in \beta$ e $C \in \beta$. Vamos mostrar que β coincide com α.



Como o plano α contém as retas *r* e *s*, α contém todos os pontos dessas retas, isto é, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ e $C \in \alpha$, que, por não serem colineares, pelo postulado **P6**, determinam um único plano. Logo, os planos α e β coincidem ($\alpha \equiv \beta$).

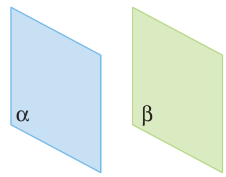
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Planos paralelos

Dois **planos**, α e β, são **paralelos** se coincidem (têm todos os pontos comuns) ou se não têm nenhum ponto comum (intersecção vazia).

Em linguagem simbólica, escrevemos: $\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta$ ou $\alpha \cap \beta = \varnothing$

planos coincidentes

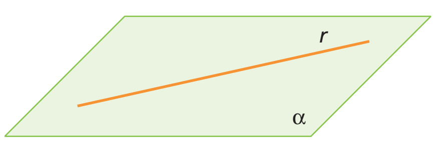


planos paralelos distintos
(não coincidentes)

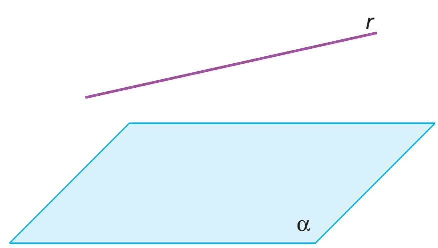
Reta e plano paralelos

Uma **reta** *r* e um **plano** α são **paralelos** se a reta *r* está contida no plano α ou se a reta *r* e o plano α não têm nenhum ponto comum.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $r /\!/ \alpha \Leftrightarrow r \subset \alpha$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$



$r \subset \alpha$

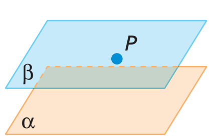
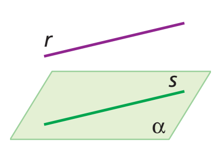
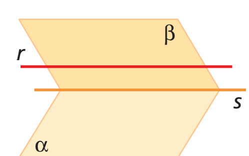
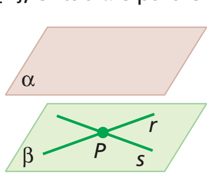
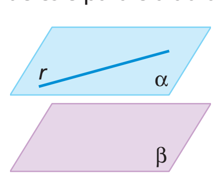
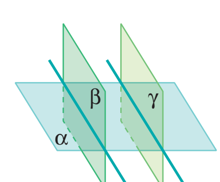


$r \cap \alpha = \varnothing$

Propriedades do paralelismo

Observe a seguir algumas propriedades do paralelismo. Todas podem ser demonstradas.

Algumas propriedades do paralelismo

1. Por *P* não pertencente a α passa um único plano β paralelo a α. 	**2.** Se *r* não está contida em α e *r* é paralela a *s*, com *s* contida em α, então *r* é paralela a α. 	**3.** Se *r* é paralela a α e β, sendo $\alpha \cap \beta = s$, então *r* é paralela a *s*. 
4. Se α é um plano paralelo a duas retas, *r* e *s*, contidas em um plano β, tais que $r \cap s = \{P\}$, então α é paralelo a β. 	**5.** Se dois planos são paralelos e distintos, então qualquer reta contida em um deles é paralela ao outro. 	**6.** Se α intercepta β e γ, com β paralelo a γ, então as intersecções *r* e *s* de α com esses planos são retas paralelas. 

Retas reversas

Observação

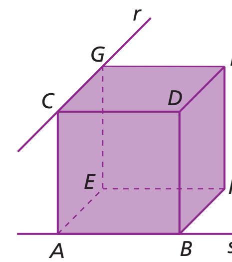
Duas retas distintas, r e s, podem ser coplanares ou reversas. Se forem coplanares, poderão ser paralelas distintas (sem ponto comum) ou concorrentes (com um ponto comum).

Duas **retas**, r e s, são **reversas** quando não existe um mesmo plano que as contenha.

Na figura, considerando a perspectiva, é possível visualizar que não existe um mesmo plano que contenha as retas r e s; portanto, elas são reversas.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $\nexists\ \alpha$ tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$

Observe, ainda, que as retas r e s não têm nenhum ponto comum, ou seja, $r \cap s = \varnothing$.

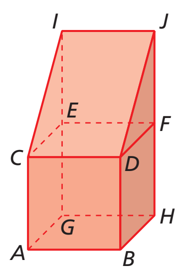


Atividade resolvida

R2. Considerando o cubo $ABCDEFGH$ e o prisma $CDEFIJ$ representados, fazer o que se pede.

a. Identificar um par de retas paralelas, um par de retas reversas e um par de retas que não sejam paralelas nem reversas.

b. Indicar a posição relativa entre a reta $\overleftrightarrow{CJ}$ e o plano que contém a face $CDJI$.



c. Identificar dois planos paralelos por meio de três pontos não colineares.

▶ Resolução

a. Exemplo de resposta: Retas paralelas: $\overleftrightarrow{CI}$ e $\overleftrightarrow{DJ}$; retas reversas: $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{DF}$; retas que não são paralelas nem reversas: $\overleftrightarrow{JH}$ e $\overleftrightarrow{DF}$.

b. A reta $\overleftrightarrow{CJ}$ é paralela ao plano que contém a face $CDJI$, pois está contida nele.

c. Exemplo de resposta: Os planos (ABG) e (EFD).

8 a. Essas linhas são formadas pelos rastros dos pneus na lâmina de água de chuva do chão da rua.

8 b. Essas linhas não se cruzam, pois os sulcos dos pneus de um lado do carro mantém sempre a mesma medida de distância dos sulcos dos pneus do outro lado do carro.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

6. Classifique cada uma das afirmações a seguir em verdadeira ou falsa.

6 a. Verdadeira.

a. Se duas retas não são coplanares, elas são reversas.

b. Duas retas reversas podem ser coplanares. **6 b.** Falsa.

c. Duas retas paralelas podem não ser coplanares. **6 c.** Falsa.

d. Se dois planos, α e β, são coincidentes, então são paralelos.

6 d. Verdadeira.

7. Indique quais das afirmações a seguir são falsas.

7. Afirmações **a** e **c**.

a. Duas retas reversas nunca estão em planos paralelos.

b. Se uma reta r é paralela à reta s e uma reta t é paralela à reta s, então t é paralela a r.

c. Se uma reta r e um plano α têm ponto comum, então r está contida em α.

8. Considere a imagem que o seguinte trecho da letra da música "Paralelas", de Belchior, sugere:

"E as paralelas dos pneus n'água das ruas
São duas estradas nuas
Em que foges do que é teu"

a. Como são formadas as referidas linhas paralelas?

b. Permanecendo retas, essas linhas podem se cruzar, podem ter ponto comum?

Perpendicularismo

Além do paralelismo, podemos identificar ao nosso redor inúmeras situações nas quais é notável o **perpendicularismo**. Acompanhe, a seguir, uma delas.

Para traçar a direção da linha meridiana de um local, fincamos, perpendicularmente ao solo, uma vareta (denominada **gnômon**), marcamos suas sombras no decorrer do dia e traçamos a bissetriz de todos os ângulos formados por sombras de mesma medida de comprimento. A direção da linha meridiana local coincide com a das bissetrizes.

Nessa situação, como podemos garantir que o gnômon fique perpendicular ao solo?

O estudo do perpendicularismo entre retas, entre planos e entre retas e planos nos ajudará a responder a questões como essa.

Retas concorrentes

Duas **retas**, r e s, são **concorrentes** quando têm apenas um ponto P comum.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $r \cap s = \{P\}$

Considere as figuras I e II.

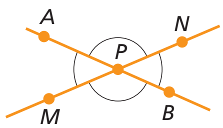


figura I

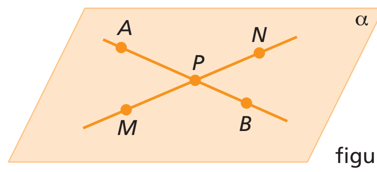


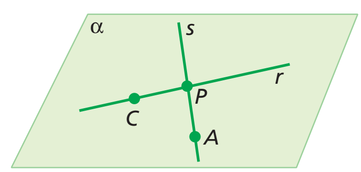
figura II

Na figura I, observamos duas retas concorrentes, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{MN}$, que se interceptam no ponto P. Nelas, identificamos os ângulos $A\hat{P}M$, $M\hat{P}B$, $B\hat{P}N$ e $N\hat{P}A$.

Além de determinar esses ângulos, duas retas concorrentes também determinam um plano (figura II).

Teorema 3: Se duas retas, r e s, são concorrentes em um ponto P, então elas determinam um único plano α.

Demonstração



Pelo postulado **P2**, existem os pontos A em s e C em r, tais que $A \not\equiv P$ e $C \not\equiv P$.

Assim, os pontos A, P e C não são colineares.

Pelo postulado **P6**, concluímos que A, P e C determinam um plano α; logo:

α = plano (APC) (I)

Pelo postulado **P7**, o plano α contém r e s, pois contém dois pontos de cada reta.

Vamos mostrar que α é único.

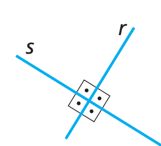
Suponhamos que exista outro plano β que contenha r e s.

Pelo postulado **P7**, os pontos P, A e C pertencem a β; logo: β = plano (APC) (II)

De (I) e (II), concluímos que $\alpha \equiv \beta$ e que, portanto, α é único.

Retas perpendiculares

Duas **retas**, r e s, são **perpendiculares** quando são concorrentes e determinam quatro ângulos retos.



$r \perp s$ (lemos: "a reta r é perpendicular à reta s")

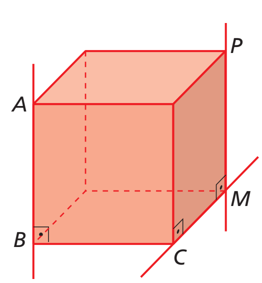
Observação

Duas retas perpendiculares são sempre concorrentes, mas nem sempre duas retas concorrentes são perpendiculares.

Retas ortogonais

Duas **retas** reversas, r e s, são **ortogonais** quando existe uma reta t que é paralela (não coincidente) a s e perpendicular a r.

Na figura, em que os pontos A, B, C, M e P são vértices de um cubo, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CM}$ são ortogonais, pois a reta $\overleftrightarrow{PM}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ e é perpendicular a $\overleftrightarrow{CM}$.

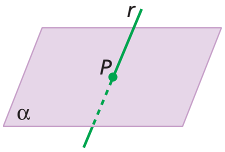


Reta e plano perpendiculares

Quando uma reta r e um plano α têm somente um ponto comum, dizemos que r e α são **secantes** (ou **concorrentes**). Uma situação particular de reta e plano secantes é o caso em que a reta é perpendicular ao plano.

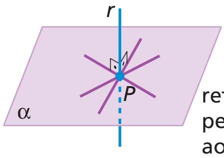
Observação

Quando uma reta r é secante não perpendicular ao plano α, podemos dizer que ela e o plano α são oblíquos.



reta r: secante não perpendicular ao plano α

Dados uma reta r e um plano α, concorrentes no ponto P, dizemos que r é **perpendicular** a α quando r é perpendicular a todas as retas de α que passam por P.



reta r: secante e perpendicular ao plano α

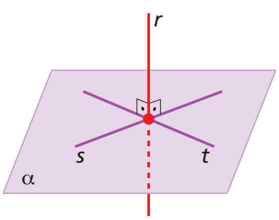
Teorema fundamental do perpendicularismo

O teorema enunciado a seguir, conhecido como **teorema fundamental do perpendicularismo**, é muito importante para a Geometria.

Teorema 4: Se r é uma reta perpendicular a duas retas concorrentes, s e t, então r é perpendicular ao plano α determinado por essas retas.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $s \subset \alpha$, $t \subset \alpha$, $r \perp s$, $r \perp t \Rightarrow r \perp \alpha$

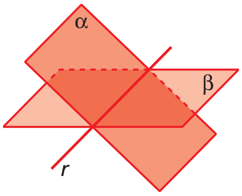
A definição de perpendicularismo entre reta e plano nos remete à questão sobre o gnômon: Como ter certeza de que a vareta fincada no solo é perpendicular a ele? Na verdade, não é preciso verificar se ela é perpendicular a todas as retas contidas no plano do solo, pois isso seria impossível, já que são infinitas retas; basta verificar se é perpendicular a duas retas não coincidentes desse plano que passam pelo ponto em que a vareta foi fincada. O teorema fundamental do perpendicularismo garante isso.



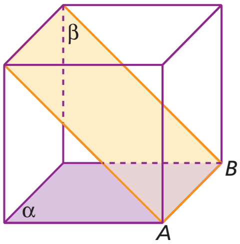
Planos concorrentes

Dois **planos** distintos, α e β, são **concorrentes** (ou **secantes**) quando têm pelo menos um ponto comum (intersecção não vazia).

Como, pelo postulado **P8**, a intersecção de dois planos distintos não paralelos é uma reta, podemos escrever: $\alpha \cap \beta = r$



Considere o cubo representado a seguir.



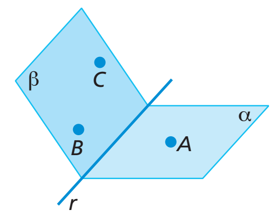
A intersecção dos planos α e β é a reta que contém o segmento $\overline{AB}$, ou seja, a reta $\overleftrightarrow{AB}$, isto é: $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$

Atividade resolvida

R3. Sejam α e β dois planos secantes cuja intersecção é a reta r. Se A é um ponto em α, B e C são dois pontos distintos em β tais que A, B e C não pertencem à reta r:

a. mostrar que A, B e C não são pontos colineares;

b. determinar a intersecção do plano α com o plano dado por A, B e C.



▶ **Resolução**

a. Suponhamos que A, B e C sejam pontos colineares. Mostremos que isso gera uma contradição.

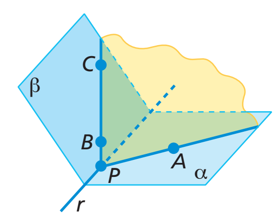
Se o ponto A pertence à reta $\overleftrightarrow{BC}$, então A pertence ao plano β. Como A pertence a α, temos $A \in \alpha \cap \beta$, isto é, $A \in r$, o que gera contradição, pois, pelo enunciado, sabemos que $A \notin r$. Essa contradição veio da suposição da colinearidade dos três pontos.

Logo, A, B e C não são colineares.

b. Existem dois casos para analisar. O primeiro, quando as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e r são concorrentes; o segundo, quando as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e r são paralelas.

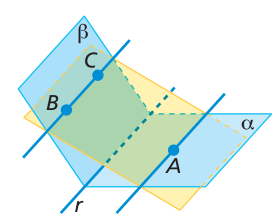
- $\overleftrightarrow{BC}$ e r concorrentes

  Seja P o ponto comum a $\overleftrightarrow{BC}$ e r. Como $P \in \overleftrightarrow{BC}$, sabemos que P pertence ao plano (ABC). Mas $P \in \alpha$, pois $P \in r$ e $r \subset \alpha$. Como os pontos A e P pertencem ao plano α e ao plano (ABC), concluímos que a reta $\overleftrightarrow{AP}$ pertence à intersecção do plano α com o plano (ABC).



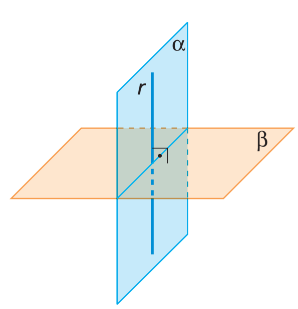
- $\overleftrightarrow{BC}$ e r paralelas

  Se $\overleftrightarrow{BC} /\!/ r$, então $\overleftrightarrow{BC} /\!/ \alpha$. O plano (ABC) intercepta o plano α em uma reta que contém o ponto A e é paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e, portanto, paralela a r.



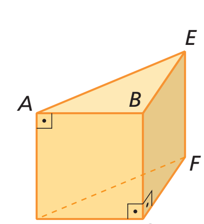
Planos perpendiculares

Dois **planos**, α e β, são **perpendiculares** quando um deles contém uma reta r perpendicular ao outro plano.



Observe o prisma representado. Nele:

- o plano (ABC) é perpendicular ao plano (DCF), pois contém a reta $\overleftrightarrow{BC}$, que é perpendicular ao plano (DCF);
- não se pode afirmar que os planos (ABC) e (BFC) são perpendiculares entre si, pois não há indicação de que algum deles contenha uma reta perpendicular a duas retas do outro.



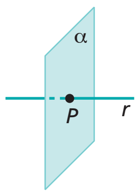
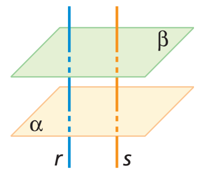
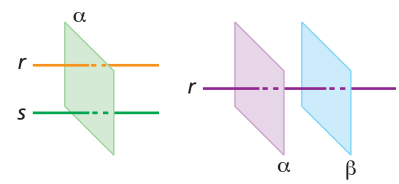
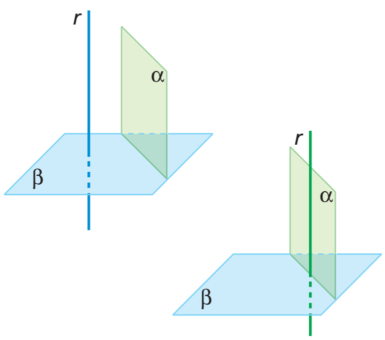
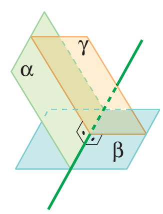
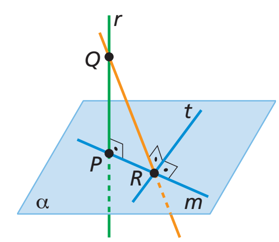
Observação

O plano (ADC) é perpendicular ao plano (ABE), pois contém a reta $\overleftrightarrow{AD}$, que é perpendicular ao plano (ABE).

Propriedades do perpendicularismo

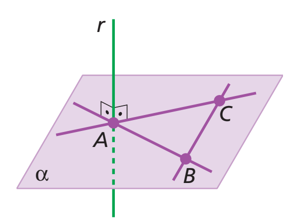
Considere algumas propriedades do perpendicularismo que podem ser demonstradas.

Algumas propriedades do perpendicularismo

1. Por um ponto de uma reta passa somente um plano perpendicular a essa reta. 	**2.** Se uma reta *r* é perpendicular a um plano α, então toda reta paralela a *r* é perpendicular ao plano α e todo plano paralelo a α é perpendicular a *r*. 	**3.** Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas. Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos. 
4. Se uma reta *r* e um plano α são perpendiculares a um plano β, então a reta *r* é paralela a α. 	**5.** Se os planos α e β são concorrentes e γ é um plano perpendicular a α e a β, então γ é perpendicular à reta de intersecção entre α e β. 	**6.** Se uma reta *r* é perpendicular a um plano α em um ponto *P*, uma reta *t* está contida em α e não passa por *P*, uma reta *m* está contida em α, passa por *P* e é perpendicular a *t* no ponto *R*, então a reta $\overleftrightarrow{QR}$, em que *Q* pertence a *r*, é perpendicular a *t*. 

Atividades resolvidas

R4. Dados três pontos não colineares, *A*, *B* e *C*, se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são perpendiculares a uma reta *r*, demonstrar que as retas *r* e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais.

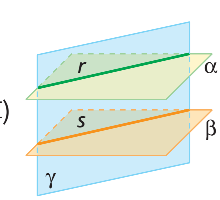


▶ **Resolução**

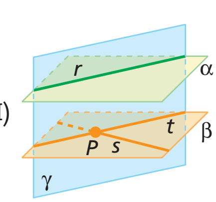
Seja α o plano determinado por *A*, *B* e *C* (postulado **P6**). Assim, pelo postulado **P7**, as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ estão contidas em α. Como *r* é perpendicular às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, que são concorrentes, *r* é perpendicular ao plano que as contém, isto é, $r \perp \alpha$ (teorema 4). Portanto, *r* é ortogonal a qualquer reta de α que não passe pelo ponto *A*. Logo, as retas *r* e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais entre si.

R5. Considerando dois planos paralelos distintos, α e β, e duas retas, *r* e *s*, com $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, indicar todas as possíveis posições entre *r* e *s*.

(I)



(II)



▶ **Resolução**

Existem duas possibilidades.

(I) As retas *r* e *s* estão contidas em um plano γ, sendo $\gamma \neq \alpha$ e $\gamma \neq \beta$. Nesse caso, o plano γ intercepta α e β, respectivamente, em *r* e *s*, que são paralelas distintas.

(II) Não há um plano que contenha as retas *r* e *s*. Nesse caso, vamos considerar uma reta *t* de β que seja paralela a *r*. A reta *t* determina com *r* um plano γ, tal como o do item (I). A reta *t* determina com *s* um plano que coincide com β. Assim, temos: $r /\!/ t$, $t \cap s = \{P\}$, $r \cap s = \varnothing$; logo, *r* e *s* são retas reversas.

Observação

No caso (II), se as retas *t* e *s* forem perpendiculares, então *r* e *s* serão retas ortogonais.

10 a. O fio de prumo serve para verificar a perpendicularidade de superfícies ou estruturas em relação ao solo, assegurando que estejam corretamente alinhadas na vertical.
10 b. O nível de bolha serve para verificar a horizontalidade ou a perpendicularidade de superfícies.

R6. Demonstrar que duas retas reversas têm uma única reta perpendicular comum.

▶ **Resolução**

Sejam r e s duas retas reversas e α e β dois planos paralelos que contêm r e s, respectivamente.

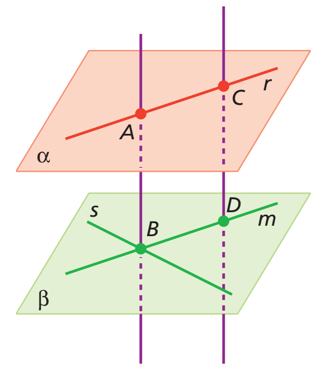
Por um ponto C de r passa uma perpendicular ao plano β. Seja D o ponto de intersecção dessa reta ($\overleftrightarrow{CD}$) com β.

Por D passa uma única paralela (m) à reta r (postulado de Euclides). Essa reta está contida em β. Seja B a intersecção da reta m com a reta s.

Por B passa uma única paralela à reta $\overleftrightarrow{CD}$ (postulado de Euclides), que intercepta a reta r no ponto A. É a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular aos planos α e β, pois é paralela à reta $\overleftrightarrow{CD}$; portanto, $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular a todas as retas de α e de β que passam por suas intersecções com esses planos.

Logo, $\overleftrightarrow{AB}$ é a única perpendicular comum às retas r e s.



11 a. 24 pares. 11 b. 18 pares.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

9. Quais das afirmações a seguir são falsas? Justifique sua resposta. 9. Afirmações **a**, **b** e **c**. Justificativas no *Suplemento para o professor*.

a. Duas retas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas entre si.

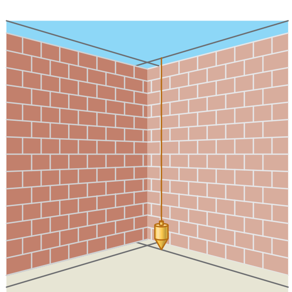
b. Se uma reta r e um plano α são paralelos, então toda reta perpendicular ao plano α é perpendicular à reta r.

c. Se uma reta r está contida em um plano α, então toda perpendicular a r é perpendicular a α.

d. Se uma reta r é perpendicular a um plano α e esse plano é paralelo a outro plano β, então r é perpendicular a β.

10. Na construção civil, qual é a função:

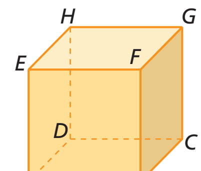
a. do fio de prumo?



b. do nível de bolha?

CRACKERCLIPS/ ISTOCK/GETTY IMAGES

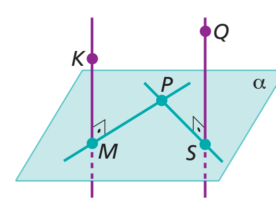
11. Observe os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BC}$, $\overline{BF}$, $\overline{CD}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $\overline{EH}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{HG}$ do cubo representado.



a. Quantos pares desses segmentos são perpendiculares?

b. Quantos pares desses segmentos são paralelos?

12. **EM DUPLA** Sejam P, M e S três pontos não colineares, tais que $\overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{PS}$ estão contidas no plano α. Sejam $\overleftrightarrow{KM} \perp \overleftrightarrow{PM}$, $\overleftrightarrow{QS} \perp \overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{KM} /\!/ \overleftrightarrow{QS}$, como mostra a figura a seguir. 12. Resposta no *Suplemento para o professor*.



Com um colega, mostrem que $\overleftrightarrow{KM} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{QS} \perp \alpha$.

(*Dica*: Construam por P uma paralela à $\overleftrightarrow{KM}$.)

13. **(Espcex-2023)** Sobre os conceitos de Geometria Espacial de Posição, analise as proposições a seguir.

I. Se dois planos são secantes, então qualquer reta de um deles é concorrente ao outro.

II. Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a infinitas retas desse plano.

III. Se dois planos têm uma única reta em comum, eles são secantes.

IV. Duas retas perpendiculares a uma terceira são perpendiculares entre si.

V. Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro. 13. Alternativa **a**.

Sobre essas proposições, é correto afirmar que

a. apenas a II e a III são verdadeiras.

b. apenas a II, a III e a IV são verdadeiras.

c. apenas a I e a IV são falsas.

d. apenas a IV e a V são falsas.

e. todas são verdadeiras.

14 a. Resposta no *Suplemento para o professor*.

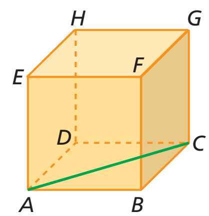
14. Considere que um plano α é perpendicular a um plano β, r é uma reta contida em α e r é perpendicular à reta de intersecção entre os planos α e β.

a. Mostre que r é perpendicular ao plano β.

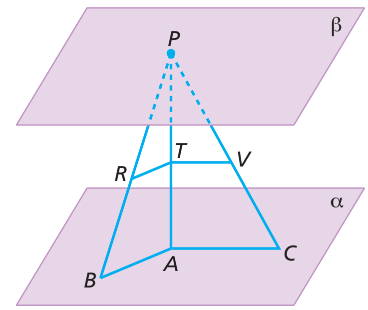
b. **EM DUPLA** Compare a demonstração que você elaborou com a de um colega. **14 b.** Resposta pessoal.

15. Mostre que, no cubo representado a seguir, a diagonal $\overline{AC}$ da face $ABCD$ é perpendicular ao plano $(HFBD)$.

15. Resposta no *Suplemento para o professor*.



16. Sejam α e β planos paralelos distintos, A, B e C pontos não colineares de α e P um ponto de β, tais que $\overline{PA} \perp \beta$. Se R, T e V são pontos médios de $\overline{PB}$, $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$, respectivamente, prove que o plano (RTV) é paralelo a β.



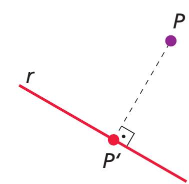
16. Resposta no *Suplemento para o professor*.

Projeções ortogonais e medidas de distância

Projeções ortogonais

Projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta

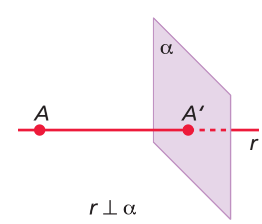
A projeção ortogonal de um ponto P sobre uma reta r é o ponto P', que é a intersecção de r com a reta perpendicular a r que passa por P.



Em particular, se P pertencer a r, sua projeção ortogonal sobre r será o próprio P.

Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano

A projeção ortogonal de um ponto A sobre um plano α é o ponto A', que é a intersecção, com esse plano, da reta que passa por A e é perpendicular a α.

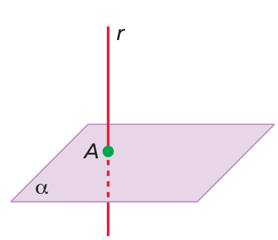


Em particular, se A pertencer a α, sua projeção ortogonal sobre α será o próprio A.

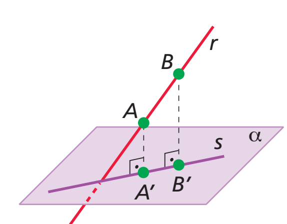
Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano

Consideremos uma reta r e um plano α.

Se $r \perp \alpha$, com $r \cap \alpha = \{A\}$, então a projeção ortogonal de r sobre α é o ponto A.

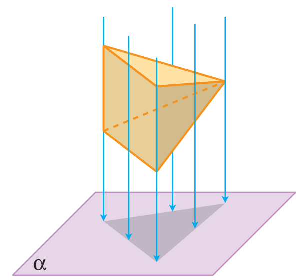


Se a reta r não é perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r sobre α é a reta s determinada pela projeção ortogonal de dois pontos distintos de r sobre α.



Observação

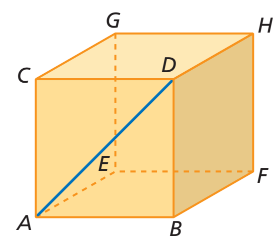
A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano é a figura formada pelas projeções ortogonais dos pontos dessa figura sobre esse plano.



O triângulo é a projeção ortogonal dessa pirâmide, nessa posição, sobre o plano α.

Considere o cubo representado. Nele, temos que a projeção ortogonal do:

- ponto C sobre o plano (ABE) é o ponto A;
- ponto C sobre o plano (ACE) é o próprio ponto C;
- segmento $\overline{CD}$ sobre o plano (ABE) é o segmento $\overline{AB}$;
- segmento $\overline{AD}$ sobre o plano (ABE) é o segmento $\overline{AB}$;
- segmento $\overline{AC}$ sobre o plano (ABE) é o ponto A.



Medidas de distância

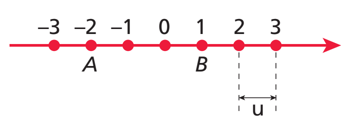
Medida da distância entre dois pontos

Se A e B são dois pontos do espaço, a medida da distância entre eles é a medida do comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$ em certa unidade de medida.

Indicamos a medida da distância de A a B (ou medida da distância de B a A) assim: $d_{A,B}$ (ou $d_{B,A}$)

Considere o exemplo.

Na reta numérica, se o ponto A representa o número real -2 e B, o número real 1, então a medida da distância de A a B é 3, que é a medida do comprimento do segmento $\overline{AB}$, determinada pelo valor absoluto da diferença dos números -2 e 1.



Simbolicamente, temos: $d_{A,B} = AB = |(-2) - (1)| = |-3| = 3$

Observação

O **módulo**, ou **valor absoluto**, de um número real x, indicado por $|x|$, é definido como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Observação

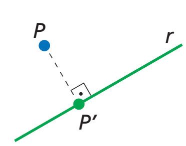
$d_{B,A} = BA = |(1) - (-2)| = |1 + 2| = |3| = 3$

Assim: $d_{B,A} = BA = d_{A,B} = AB = 3$

Nesse caso, a unidade de medida de comprimento utilizada (u) é a medida do comprimento do segmento cujos extremos representam dois números inteiros consecutivos.

Medida da distância entre um ponto e uma reta

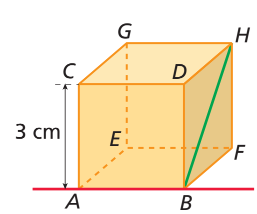
A medida da distância entre um ponto P e uma reta r é a medida da distância entre P e sua projeção ortogonal P' sobre r.



Indicamos a medida da distância de P a r assim: $d_{P,r} = PP'$

Considere o exemplo.

No cubo representado, o comprimento da aresta mede 3 cm, então a medida da distância do ponto C à reta $\overleftrightarrow{AB}$ é 3 cm. A medida da distância HB, do ponto H à reta $\overleftrightarrow{AB}$, é $3\sqrt{2}$ cm, pois o triângulo BHD é retângulo. Portanto, pelo teorema de Pitágoras, temos:

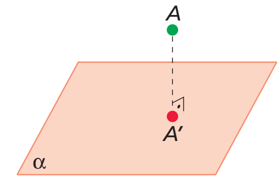


$$(HB)^2 = (DH)^2 + (DB)^2 \Rightarrow (HB)^2 = (3 \text{ cm})^2 + (3 \text{ cm})^2 \Rightarrow HB = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

Medida da distância entre um ponto e um plano

A medida da distância entre um ponto A e um plano α é a medida da distância entre o ponto A e sua projeção ortogonal A' sobre α.

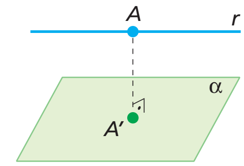
Indicamos a medida da distância de A a α assim: $d_{A,\alpha} = AA'$



Medida da distância entre uma reta e um plano paralelos

Dados um plano α e uma reta r paralelos, a medida da distância entre a reta r e o plano α é a medida da distância entre um ponto A qualquer de r e sua projeção ortogonal A' sobre α.

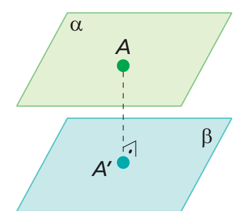
Indicamos a medida da distância de r a α assim: $d_{r,\alpha} = AA'$



Medida da distância entre dois planos paralelos

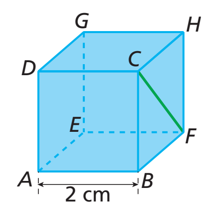
Dados dois planos paralelos, α e β, a medida da distância entre eles é a medida da distância entre um ponto A qualquer do plano α e sua projeção ortogonal A' sobre o plano β, ou vice-versa.

Indicamos a medida da distancia de α a β assim: $d_{\alpha,\beta} = AA'$



No cubo representado, temos:

- a medida da distância entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é igual à medida da distância entre um ponto de uma delas e a outra, por exemplo, entre C e $\overleftrightarrow{EF}$, que é $2\sqrt{2}$ cm;
- a medida da distância entre os planos (CDG) e (ABE) é 2 cm.

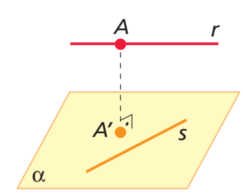


Medida da distância entre duas retas reversas

Dadas duas retas reversas, r e s, a medida da distância entre elas é a medida da distância entre qualquer ponto de r e o plano que contém s e é paralelo a r, ou vice-versa.

A medida da distância entre duas retas reversas pode ser nula? Por quê?

Questão. Não, pois elas não têm ponto comum, ou seja, não se cruzam.



Atividade resolvida

R7. Considerando o cubo representado anteriormente, mostrar que:

a. a medida da distância entre os pontos F e D é $2\sqrt{3}$ cm;

b. a medida da distância entre a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (EBC) é $\sqrt{2}$ cm.

▸ Resolução

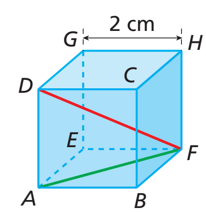
a. O $\triangle ABF$ é retângulo em B, que é ângulo interno do quadrado $ABFE$. Como $AB = BF = 2$ cm, pelo teorema de Pitágoras, temos: $(AF)^2 = (2 \text{ cm})^2 + (2 \text{ cm})^2 \Rightarrow AF = 2\sqrt{2}$ cm

O $\triangle DAF$ é retângulo, pois $\overline{DA} \perp$ plano (ABE). Logo, $\overline{DA}$ é perpendicular a todas as retas desse plano que passam por A e, portanto, $\overline{DA} \perp \overline{AF}$.

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle DAF$, temos:

$$(DF)^2 = (2 \text{ cm})^2 + \left(2\sqrt{2} \text{ cm}\right)^2 \Rightarrow DF = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

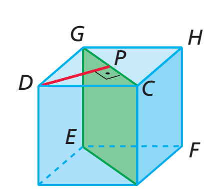
Logo, a medida da distância entre os pontos F e D é $2\sqrt{3}$ cm.



b. A medida da distância entre $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (EBC) é DP, que é metade da medida do comprimento da diagonal de uma face do cubo. Assim:

$DP = \left(2\sqrt{2} \text{ cm}\right) : 2 = \sqrt{2}$ cm

Logo, a medida da distância entre a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (EBC) é $\sqrt{2}$ cm.



17. Podemos afirmar que o ponto *A* pertence ao plano α.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

17. ARGUMENTAÇÃO Se a medida da distância de um ponto *A* a um plano α é nula, o que podemos afirmar sobre a posição de *A* em relação a α?

18. ARGUMENTAÇÃO Se uma reta *r* é paralela a um plano α, a medida da distância de qualquer ponto de *r* ao plano α é sempre a mesma. Nessa situação, o que podemos dizer sobre a medida da distância de qualquer ponto de α em relação à reta *r*?

18. Podemos dizer que a medida da distância de qualquer ponto do plano α à reta *r* é maior ou igual à medida da distância de qualquer ponto da reta *r* ao plano α.

19. Considerando o paralelepípedo representado a seguir, determine a medida da distância entre:

a. $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GC}$; **19 a.** 2 cm

b. $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{HG}$; **19 b.** 2 cm

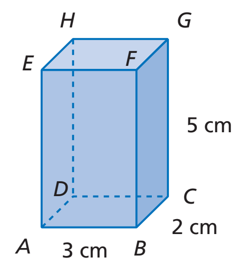
c. $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{DC}$; **19 c.** $\sqrt{29}$ cm

d. $\overleftrightarrow{EF}$ e o plano (*HGF*); **19 d.** Nula.

e. $\overleftrightarrow{EH}$ e o plano (*ABC*); **19 e.** 5 cm

f. o plano (*EHD*) e o plano (*FGC*); **19 f.** 3 cm

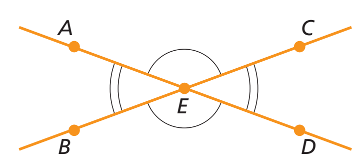
g. o plano (*ABC*) e o plano (*HGF*). **19 g.** 5 cm



Ângulos e diedros

Medida da abertura do ângulo formado por duas retas concorrentes

Duas retas concorrentes determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice (o.p.v.) e, portanto, congruentes dois a dois. Nesta representação das retas concorrentes $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, os pares de ângulos congruentes (e o.p.v.) são: $A\hat{E}B$ e $C\hat{E}D$; $A\hat{E}C$ e $B\hat{E}D$.



A partir de agora, fica estabelecido que, quando nos referimos ao ângulo formado por duas retas concorrentes não perpendiculares, consideramos aquele de menor medida de abertura (se elas forem perpendiculares, a abertura do ângulo formado por elas mede 90°, por definição de retas perpendiculares). Conhecida a medida da abertura do menor dos quatro ângulos, podemos determinar as medidas de abertura dos demais.

Por exemplo, ao nos referirmos ao ângulo formado pelas retas concorrentes $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, representadas, consideramos o ângulo $A\hat{E}B$ ou o ângulo $C\hat{E}D$.

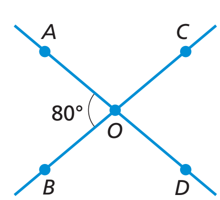
Observação

Observe a figura.

Como os ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ são o.p.v., temos $m(A\widehat{O}B) = m(C\widehat{O}D)$, isto é, $m(C\widehat{O}D) = 80°$.

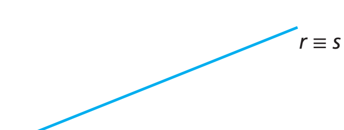
Os ângulos $A\widehat{O}C$ e $A\widehat{O}B$ são suplementares; então $m(A\widehat{O}C) = 100°$.

Portanto, $m(A\widehat{O}C) = m(B\widehat{O}D) = 100°$, pois $A\widehat{O}C$ e $B\widehat{O}D$ são o.p.v.

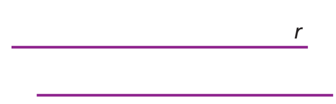


Medida da abertura do ângulo formado por duas retas paralelas

A medida da abertura do ângulo $\hat{a}$ entre duas retas paralelas é igual a 0°.

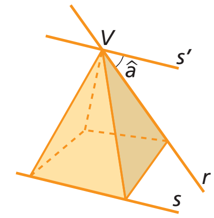


$r /\!/ s$ e $r \equiv s \Rightarrow m(\hat{a}) = 0°$



$r /\!/ s$ e $r \cap s = \varnothing \Rightarrow m(\hat{a}) = 0°$

Medida da abertura do ângulo formado por duas retas reversas



A medida da abertura do ângulo entre duas retas reversas, r e s, é igual à medida da abertura do ângulo $\hat{a}$ formado pelas retas r e s', sendo s' uma reta paralela a s e concorrente com r.

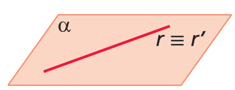
Podemos escrever: se r e s reversas, $s /\!/ s'$, $s' \cap r = \{V\}$, então a medida da abertura do ângulo formado pelas retas reversas r e s é igual à medida da abertura do ângulo $\hat{a}$ formado pelas retas r e s'.

Medida da abertura do ângulo formado por uma reta e um plano

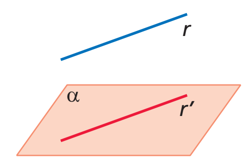
Se uma reta r não é perpendicular a um plano α, a medida de abertura do ângulo formado por r e α é igual à medida da abertura do ângulo $\hat{a}$ formado por r e r', sendo r' a projeção ortogonal de r sobre α.

No caso em que r é perpendicular ao plano α, a abertura do ângulo formado pela reta r e pelo plano α mede 90º.

Reta r não concorrente com o plano α ($r \subset \alpha$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$)

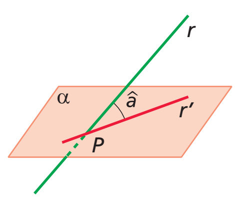


$r \subset \alpha \Rightarrow r \equiv r'$ e $m(\hat{a}) = 0°$

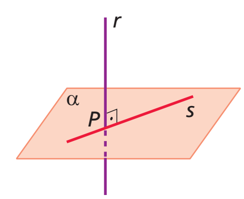


$r /\!/ \alpha$ e $r \not\subset \alpha \Rightarrow r /\!/ r'$ e $m(\hat{a}) = 0°$

Reta r concorrente com o plano α ($r \cap \alpha = \{P\}$)



$r \cap \alpha = \{P\} \Rightarrow r \cap r' = \{P\}$
A medida da abertura do ângulo formado por r e α é igual à medida da abertura do ângulo $\hat{a}$ formado por r e r'.



r e α são perpendiculares; então, r e s são perpendiculares.
As medidas de abertura dos ângulos formados por r e s e por r e α são iguais a 90º.

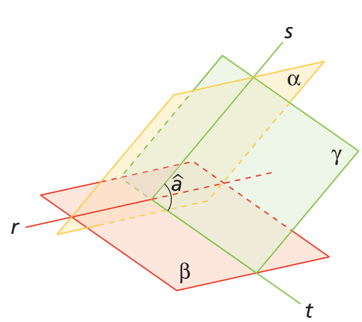
Medida da abertura do ângulo formado por dois planos

Se dois planos, α e β, são concorrentes, r é a reta de intersecção deles, γ é um plano perpendicular à reta r e as retas s e t são, respectivamente, as intersecções de α e β com γ, então a medida da abertura do ângulo formado pelos planos α e β é igual à medida da abertura do ângulo $\hat{a}$ formado pelas retas s e t.

Se dois planos, α e β, são paralelos, então o ângulo formado por eles é nulo (a abertura mede 0º).

Observação

Quando nos referimos ao ângulo formado por dois planos concorrentes não perpendiculares, consideramos aquele de menor medida de abertura, formado pelas retas s e t.

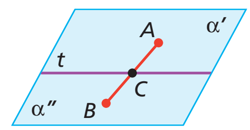


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Diedro

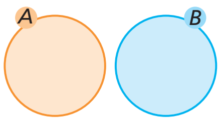
Antes de falarmos sobre diedro, será necessário apresentar um novo postulado, conhecido por **postulado da separação de planos**.

P9. Dada uma reta t contida em um plano α, essa reta divide o plano em dois conjuntos de pontos convexos e disjuntos, α' e α'', de tal modo que o segmento de reta que liga um ponto qualquer pertencente a α' a um ponto qualquer de α'' tem um único ponto em comum com a reta t.



Observação

Quando $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.

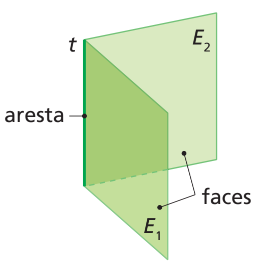


Com base nesse postulado, podemos definir semiplano:

Seja um plano α e uma reta t, contida nesse plano, de tal modo que o plano fique dividido em dois conjuntos de pontos, α' e α'': cada um dos conjuntos $\alpha' \cup t$ e $\alpha'' \cup t$ é chamado de **semiplano**, sendo a reta t a sua origem.

Agora, com base no postulado **P9** e na definição de semiplano, vamos definir diedro.

Sejam E_1 e E_2 dois semiplanos de mesma origem t, não contidos em um mesmo plano. Chama-se **diedro** ou **ângulo diedro** a figura formada pela reunião dos semiplanos E_1 e E_2.

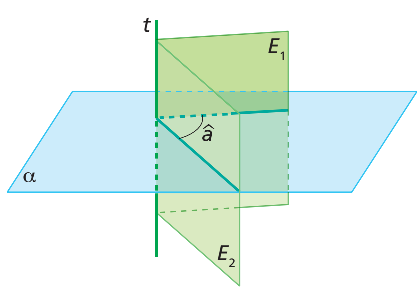


diedro $E_1 \cup E_2$

Dado um diedro e um plano α perpendicular à aresta do diedro, chama-se **ângulo plano** a intersecção do plano α com o diedro. A medida de abertura $\hat{a}$ desse ângulo é considerada a medida do diedro.

Observação

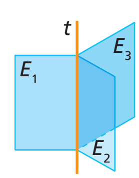
Para medida de diedro, consideraremos $0° < m(\hat{a}) < 180°$.



$m(\hat{a})$ é a medida do diedro $E_1 \cup E_2$

Atividades resolvidas

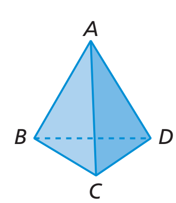
R8. Identificar os diedros representados na figura.



▶ **Resolução**

$E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_1 \cup E_3$.

R9. Nomear os seis diedros do tetraedro representado a seguir.



▶ **Resolução**

Consideremos os semiplanos E_1 contido no plano (ABC), E_2 contido no plano (ACD), E_3 contido no plano (ADB) e E_4 contido no plano (BCD). Assim, temos:

- $E_1 \cup E_4$ $\left(\text{origem } \overleftrightarrow{BC}\right)$;
- $E_2 \cup E_4$ $\left(\text{origem } \overleftrightarrow{CD}\right)$;
- $E_1 \cup E_2$ $\left(\text{origem } \overleftrightarrow{AC}\right)$;
- $E_2 \cup E_3$ $\left(\text{origem } \overleftrightarrow{AD}\right)$;
- $E_1 \cup E_3$ $\left(\text{origem } \overleftrightarrow{AB}\right)$;
- $E_3 \cup E_4$ $\left(\text{origem } \overleftrightarrow{BD}\right)$.

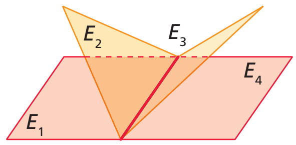
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

22. Justificativas no *Suplemento para o professor*.

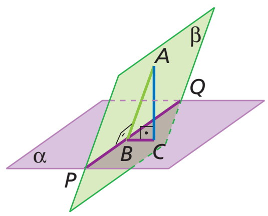
Atividades propostas

Registre em seu caderno

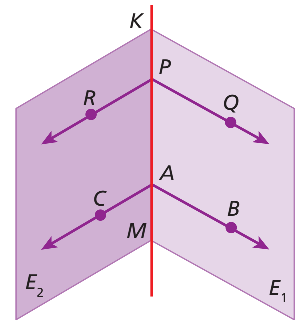
20. Nomeie todos os diedros da figura. (*Dica*: Existem mais de três diedros.) **20.** $E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_3 \cup E_4$; $E_1 \cup E_3$; $E_2 \cup E_4$.



21. Na figura a seguir, a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α é $\overline{BC}$ tal que $AB = 2 \cdot BC$. O segmento $\overline{PQ}$ é perpendicular ao plano β. Determine a medida de abertura do ângulo $A\hat{B}C$. **21.** 60°



22. **ARGUMENTAÇÃO** Seja $E_1 \cup E_2$ um diedro de aresta $\overleftrightarrow{KM}$, tal que as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{PQ}$ estão em E_1 e $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{PR}$ estão em E_2.



a. Se a medida de abertura dos ângulos $M\hat{A}B$ e $K\hat{A}C$ é 90°, podemos afirmar que $B\hat{A}C$ é um ângulo plano do diedro? Justifique sua resposta. **22 a.** Sim.

b. Se a medida de abertura do ângulo $R\hat{P}Q$ é 90°, podemos afirmar que $\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{AB}$? Justifique sua resposta. **22 b.** Não.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

As projeções cartográficas

Atualmente, em grande parte dos livros, atlas e *sites* predominam mapas elaborados com base em determinadas projeções cartográficas. Isso faz com que a maior parte das pessoas tenha memorizado uma representação da superfície terrestre parecida. No entanto, é importante destacar que cada mapa apresenta uma representação com alguma distorção devido à impossibilidade de representar uma superfície curva, como é a da Terra, em uma superfície plana, como um mapa, sem que ocorram extensões e/ou contrações.

Projeção cartográfica é uma forma de representação da superfície terrestre em um plano. Existem diferentes projeções cartográficas e, devido à impossibilidade de realizar perfeitamente a representação de uma superfície esférica em um plano, todas elas apresentam algum tipo de deformação.

Considerando a superfície em que serão projetados os pontos da Terra, podem-se classificar as projeções em **plana**, **cônica** e **cilíndrica**.

Projeção plana (ou azimutal): a projeção é realizada em um plano que tangencia a superfície terrestre. Ela é mais utilizada para a representação de regiões menores do globo, como as polares e até mesmo estados, cidades e bairros.

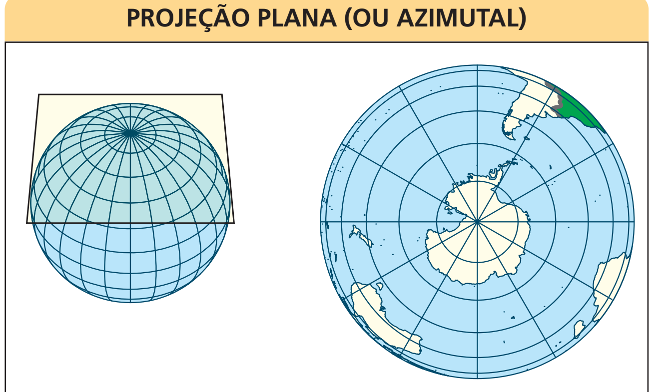
Observação

O planeta Terra tem o formato parecido com o de uma esfera. Por isso, as projeções cartográficas da superfície da Terra utilizam o globo terrestre, que é esférico, como referência.

Observação

A projeção plana aqui exemplificada é polar, pois foi realizada em um plano que tangenciou a superfície terrestre em um dos polos.

PROJEÇÃO PLANA (OU AZIMUTAL)



MAPAS: ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

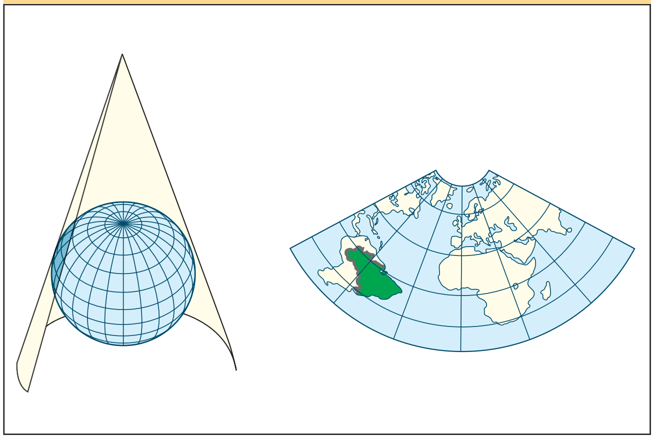
Fonte: elaborado com base em IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. p. 26.

OBJETO DIGITAL
Infográfico clicável: Projeções cartográficas
Este infográfico amplia as informações sobre as projeções cartográficas aqui estudadas.

Projeção cônica: os pontos da superfície terrestre são projetados na superfície lateral de um cone e, em seguida, essa superfície é planificada.

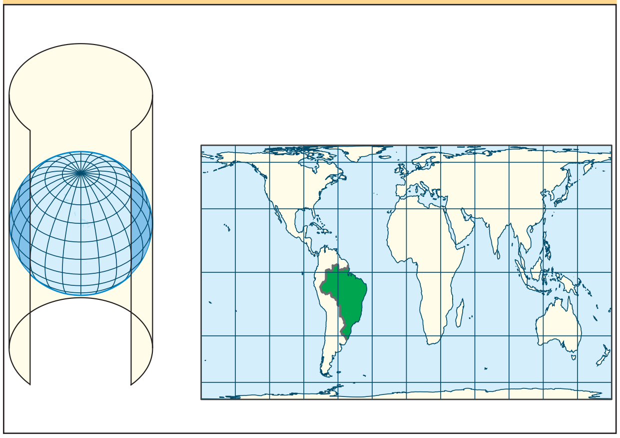
Projeção cilíndrica: os pontos da superfície terrestre são projetados na superfície lateral de um cilindro e, em seguida, essa superfície é planificada.

PROJEÇÃO CÔNICA



Fonte: elaborado com base em IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. p. 26.

PROJEÇÃO CILÍNDRICA



Fonte: elaborado com base em IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. p. 26.

MAPAS: ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ ARQUIVO DA EDITORA

Mercator e Peters

Duas projeções cilíndricas destacam-se na cartografia escolar: a de Mercator e a de Peters. A **projeção de Mercator** não deforma os ângulos; já a **projeção de Peters** mantém as medidas das áreas proporcionais à realidade, mas altera o formato dos países.

A projeção de Mercator difundiu-se pelo mundo porque era muito útil à navegação marítima, já que as medidas de abertura de seus ângulos correspondem às medidas reais. Nessa projeção, porém, pode fazer com que os territórios que apresentam, no globo terrestre, pequenas medidas de área pareçam ser maiores quando planificados. A Groenlândia, por exemplo, que é uma ilha da Dinamarca, aparenta ter medida de área bem maior que a do Brasil (a medida real da área do Brasil é aproximadamente igual a quatro vezes a medida da área da Groenlândia).

Um dos críticos dessa projeção foi Arno Peters. Em seu planisfério, publicado em 1973, estão em destaque as regiões situadas nas latitudes intertropicais, que ocupam a parte central do mapa. Essa projeção contraria a de Mercator, na qual as regiões de altas latitudes sofrem grande deformação.

PLANISFÉRIO DE MERCATOR

Fonte: elaborado com base em IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. p. 28.

PLANISFÉRIO DE PETERS

Fonte: elaborado com base em IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. p. 26.

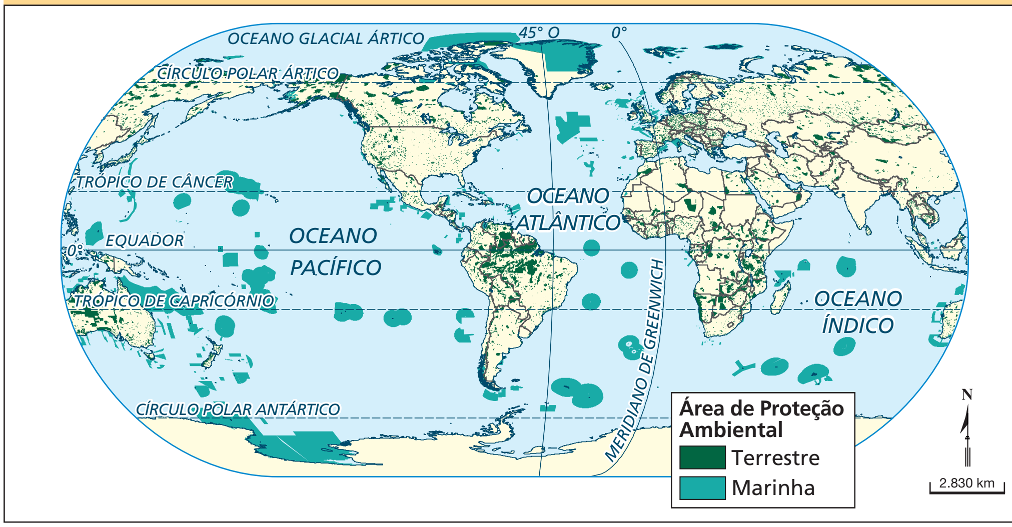
MAPAS: ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Projeção de Eckert III

Outra projeção bastante comum para mapeamentos do mundo é a chamada **projeção de Eckert III**. Essa projeção tenta minimizar as distorções, mantendo a proporcionalidade, mas sem conservar as medidas das aberturas dos ângulos, das áreas e das distâncias.

O atlas geográfico escolar do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), por exemplo, apresenta mapas temáticos do mundo centrados no Brasil obtidos pela projeção de Eckert III.

MUNDO: ÁREAS PROTEGIDAS – 2021



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado com base em IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2024. p. 68.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

23. Na projeção cilíndrica, os **paralelos** e os **meridianos** são representados por segmentos de reta. Dê as posições relativas das retas suportes dos:

a. paralelos; 23 **a.** Paralelas.

b. meridianos; 23 **b.** Paralelas.

c. paralelos em relação aos meridianos. 23 **c.** Perpendiculares.

24. Na projeção cônica, os paralelos são: 24. Alternativa **d**.

a. círculos concêntricos.

b. circunferências concêntricas.

c. raios de circunferências concêntricas.

d. arcos de circunferências concêntricas.

25. Na projeção azimutal polar, os meridianos: 25. Alternativa **c**.

a. não convergem para um polo.

b. são circunferências concêntricas.

c. convergem para um polo.

d. são raios paralelos.

Paralelos: linhas imaginárias que circulam a Terra no sentido leste-oeste.

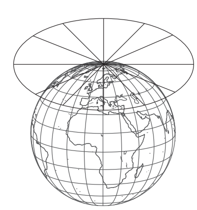
Meridianos: linhas imaginárias que cortam a Terra no sentido norte-sul, ligando um polo ao outro.

26. (Enem-2016) A ONU faz referência a uma projeção cartográfica em seu logotipo. A figura que ilustra o modelo dessa projeção é:

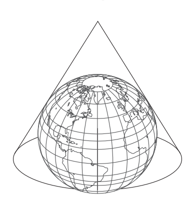
26. Alternativa **a**.

REPRODUÇÃO/ONU

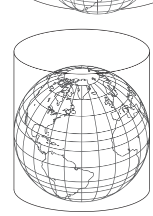
a.



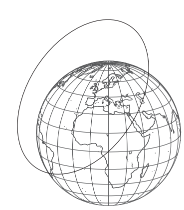
b.



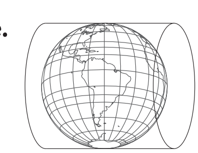
c.



d.



e.



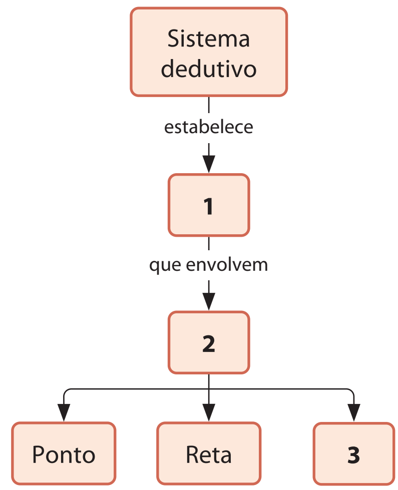
ILUSTRAÇÕES: CATHERINE A. SCOTTON

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 2

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Plano **B.** Postulados **C.** Noções primitivas

Conexões entre conceitos. A – 3; B – 1; C – 2.

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro

REPRODUÇÃO/EDITORA MELHORAMENTOS

Medidas desesperadas: comprimento, área e volume

Kjartan Poskitt

São Paulo: Melhoramentos, 2005. (Coleção Saber horrível).

O autor utiliza uma linguagem bem-humorada para abordar conteúdos matemáticos, explorando-os do ponto de vista atual e de outras épocas. Assim, tem-se uma proposta criativa e instigante que facilita a aprendizagem de assuntos vistos na escola e também fora dela. Com esse jeito especial de explorar as ideias matemáticas, o autor apresenta temas como unidades de medida antigas e atuais, além das grandezas área, perímetro e volume, ângulos e figuras geométricas.

Software

GeoGebra

O GeoGebra é um *software* que combina Geometria e Álgebra e tem uma versão que pode ser usada *on-line*. Entre suas diversas funcionalidades estão a realização de atividades de Geometria dinâmica e a construção de sólidos geométricos.

Disponível em: https://www.geogebra.org/3d?lang=pt. Acesso em: 30 ago. 2024.

Site

The True Size of...

Por meio desse *site*, é possível comparar visualmente a medida da área de diversos países representados na projeção de Mercator.

Disponível em: https://thetruesize.com. Acesso em: 30 ago. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Considere dois pares de retas distintas, (r, s) e (t, m), tais que $r /\!/ s$ e t e m são reversas. O que esses dois pares de retas têm em comum? **Q1.** Alternativa **c.**

a. São coplanares.

b. Não são coplanares.

c. Não têm intersecção.

d. Têm apenas um ponto em comum.

Q2. Considere dois pares de retas distintas, (r, s) e (t, m), tais que $r /\!/ s$ e t e m são reversas. Qual é a alternativa que descreve uma diferença entre esses dois pares de retas? **Q2.** Alternativa **a.**

a. r e s são coplanares, mas m e t não são.

b. r e s não são coplanares, mas m e t são.

c. r e s não têm ponto comum enquanto t e m são concorrentes.

d. Nenhuma das alternativas anteriores.

Q3. Uma reta r é perpendicular a uma reta s, contida em um plano α, e r é ortogonal a uma reta t, contida em α e concorrente com s. Portanto, podemos afirmar que: **Q3.** Alternativa **b.**

a. r não pode ser perpendicular a α.

b. r é necessariamente perpendicular a α.

c. r pode ser paralela a α.

d. r não pode ser secante a α.

Q4. Um plano α é paralelo a duas retas distintas, r e s. Assim, pode-se afirmar que r e s: **Q4.** Alternativa **b.**

a. são paralelas, necessariamente.

b. podem ser perpendiculares.

c. são reversas, necessariamente.

d. r não pode ser secante a α.

Q5. Se a projeção ortogonal de uma reta r sobre um plano α é um ponto P, então: **Q5.** Alternativa **d.**

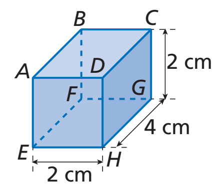
a. $r /\!/ \alpha$

b. $r \cap \alpha = \varnothing$

c. $r \cap \alpha \neq P$

d. $r \perp \alpha$

Considere a figura para responder às **questões 6** a **9**.



Q6. A medida da distância entre os pontos A e C é: **Q6.** Alternativa **d.**

a. 2 cm

b. 4 cm

c. 20 cm

d. $2\sqrt{5}$ cm

Q7. A medida da distância entre o ponto A e o plano (BCF) é: **Q7.** Alternativa **b.**

a. 2 cm

b. 4 cm

c. 20 cm

d. $5\sqrt{2}$ cm

Q8. A medida da distância entre o ponto A e a reta $\overleftrightarrow{GH}$ é: **Q8.** Alternativa **a.**

a. $2\sqrt{2}$ cm

b. 4 cm

c. 20 cm

d. $5\sqrt{2}$ cm

Q9. A medida da distância entre o ponto A e o plano (DHE) é: **Q9.** Alternativa **d.**

a. 2 cm

b. 4 cm

c. 20 cm

d. 0 cm

Q10. O ângulo entre a reta r e o plano α é nulo. Então, podemos afirmar que: **Q10.** Alternativa **d.**

a. existe um ponto P tal que $r \cap \alpha = \{P\}$.

b. existe uma reta $s \subset \alpha$ tal que $r \perp s$.

c. a reta r é perpendicular ao plano α.

d. $r \cap \alpha = r$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$.

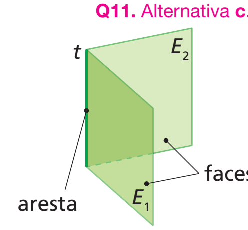
Q11. A figura apresentada, formada pela união dos semiplanos de mesma origem e não coincidentes E_1 e E_2, é denominada: **Q11.** Alternativa **c.**

a. projeção.

b. sólido.

c. diedro.

d. plano.



Q12. O que podemos afirmar sobre a projeção de Mercator? **Q12.** Alternativa **c.**

a. É uma projeção cônica.

b. Mantém as medidas de área proporcionais à realidade.

c. Não deforma ângulos.

d. É utilizada para representar regiões menores do globo terrestre.

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12
Identificar a posição relativa entre retas; planos; retas e planos; e aplicá-las na resolução de problemas.	X	X	X	X	X					X		
Identificar e calcular medidas de distância entre pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.						X	X	X	X			
Identificar um diedro e determinar sua medida.											X	
Reconhecer diferentes projeções cartográficas e investigar deformações provocadas por algumas delas.												X

Capítulo 3

POLIEDROS

EDNEI MARX/ARQUIVO DA EDITORA

Além de desenvolver a criatividade, a Matemática pode ser recreativa.

Nos celulares e em outras plataformas de informática, jogos eletrônicos aplicam conceitos matemáticos não só na estrutura lógica de seus programas, ao gerenciar a animação do enredo e da trama, mas também como objeto principal do entretenimento que oferecem.

Por exemplo, imagine um jogo no qual a construção em perspectiva de cenários e de adereços é feita por meio da composição e da justaposição de elementos que têm formato parecido com o de sólidos geométricos. Essa construção está inserida em um contexto animado com perigos, armadilhas e disputa entre personagens, também compostos de elementos que têm formato parecido com o de sólidos geométricos.

Um jogo como esse, que tem tratamento gráfico inspirado nos sólidos geométricos, além de ampliar a visão espacial do usuário, desenvolve habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Neste capítulo, vamos estudar um pouco mais os sólidos geométricos.

Sólidos geométricos

O estudo dos mais variados formatos geométricos sempre instigou a mente humana. Um destaque nesse campo de interesse são as figuras que hoje denominamos **sólidos geométricos**. Um dos motivos para a importância desse estudo é a constante aplicabilidade das propriedades dos sólidos geométricos a situações do mundo físico tratadas em diversas áreas do conhecimento, como a Arquitetura, a Engenharia e as Artes.

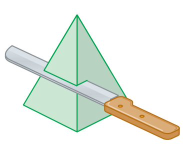
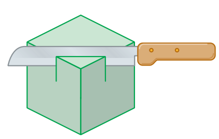
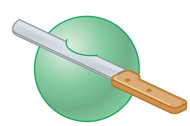
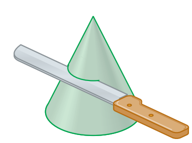
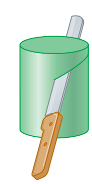
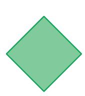
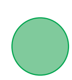
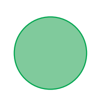
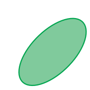
Sólidos geométricos e figuras planas

Ao nosso redor, há diversos objetos que se parecem com figuras geométricas planas e não planas. As superfícies podem ser planas ou não planas, ao passo que os sólidos geométricos são sempre não planos.

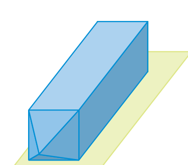
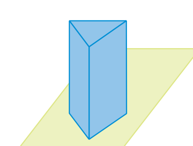
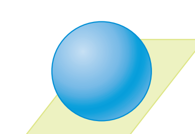
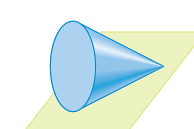
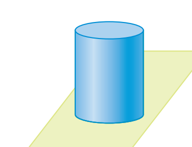
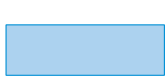
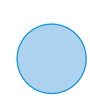
Embora os sólidos geométricos exibam formatos bastante diversos, é possível classificá-los em dois grandes grupos: os **poliedros** e os **corpos redondos**.

Observe nos quadros algumas figuras planas que podem ser obtidas de alguns sólidos geométricos.

Secção dos sólidos geométricos por planos

	Poliedros		Corpos redondos		
Sólidos geométricos					
Região de corte (figuras planas)					

Apoiando os sólidos geométricos em um plano

	Poliedros		Corpos redondos		
Sólidos geométricos					
Região de apoio (figuras planas)	 retângulo	 triângulo	ponto	 segmento de reta	 círculo

Neste capítulo, vamos estudar um dos tipos de sólidos geométricos: os poliedros.

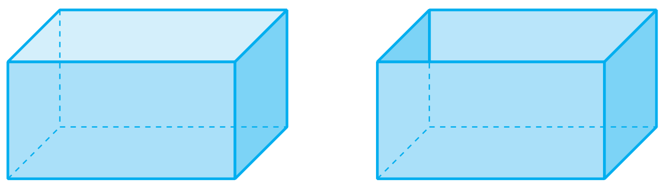
Poliedros

Superfície poliédrica fechada e poliedros

Todo poliedro apresenta uma superfície chamada superfície poliédrica fechada.

Uma **superfície poliédrica fechada** é composta de um número finito (maior ou igual a quatro) de superfícies poligonais planas, de modo que cada lado de uma dessas superfícies coincida com apenas um lado da outra.

Observe as figuras a seguir.



Entre essas duas figuras, apenas a da esquerda representa uma superfície poliédrica fechada.

Considerando que uma superfície poliédrica fechada delimita uma porção do espaço em seu interior, vamos definir poliedro.

Poliedro (do grego *poli*, "muitas, várias", e *edro*, "face") é o sólido geométrico formado pela reunião de uma superfície poliédrica fechada com todos os pontos do espaço delimitados por ela.

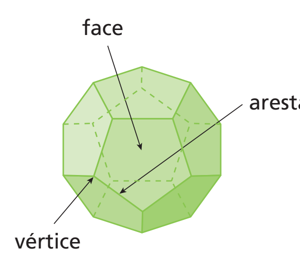
OBJETO DIGITAL **Mapa clicável: Formato de alguns poliedros na arquitetura brasileira**

Este mapa clicável apresenta construções e monumentos em diferentes cidades brasileiras cujo formato se parece com o de alguns poliedros.

Elementos de um poliedro

Em um poliedro, podemos destacar os elementos a seguir.

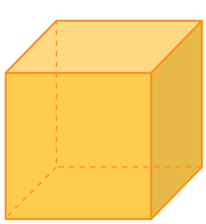
- **Face** – cada uma das superfícies poligonais que compõem a superfície do poliedro.
- **Aresta** – lado comum a duas faces.
- **Vértice** – ponto comum a três ou mais arestas.



Um poliedro costuma ser nomeado de acordo com o número de faces que possui. Para isso, justapõem-se dois elementos: um de origem grega, indicativo do número de faces, e o elemento de composição *edro*. Por exemplo, um poliedro de 4 faces chama-se tetraedro: *tetra* (4) + *edro* (face).

Considere os exemplos.

a.

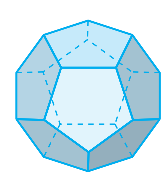


hexaedro: 6 faces, 8 vértices, 12 arestas

b.

tetradecaedro: 14 faces, 16 vértices, 28 arestas

c.



dodecaedro: 12 faces, 20 vértices, 30 arestas

Observação

As arestas do poliedro são os lados dos polígonos que determinam as faces.

Os vértices do poliedro são os vértices desses polígonos.

Observe no quadro a seguir alguns dos nomes de poliedros.

Nomes de alguns poliedros

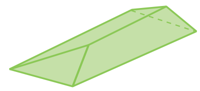
Número de faces	4	5	6	7	8	12	20
Nome do poliedro	tetraedro	pentaedro	hexaedro	heptaedro	octaedro	dodecaedro	icosaedro

Atividades propostas

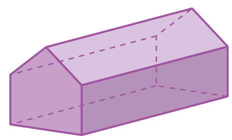
Registre em seu caderno

1. Escreva o nome do poliedro representado a seguir.

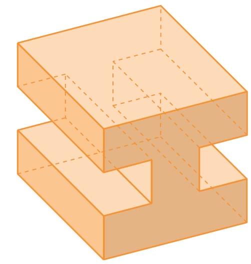
1. Pentaedro.



2. Um galpão tem o formato representado pela figura. Qual é o nome do poliedro correspondente? **2.** Heptaedro.



3. Analise o sólido a seguir para responder à questão.



Quantas faces, arestas e vértices esse sólido tem?

3. 14 faces, 36 arestas e 24 vértices.

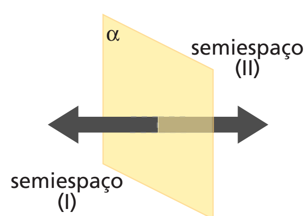
Poliedro convexo e poliedro não convexo

Os poliedros que não apresentam "reentrâncias" em sua superfície são denominados **convexos**; os que têm "reentrâncias" são denominados **não convexos** (ou **côncavos**). De maneira mais precisa:

Se cada plano que contém uma face de um poliedro posiciona as demais faces em um mesmo semiespaço, então o poliedro em questão é **convexo**; caso contrário, é **não convexo** (ou **côncavo**).

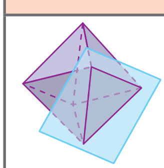
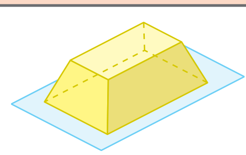
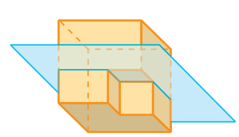
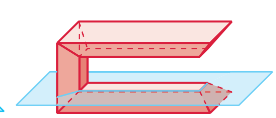
Observação

Um plano α divide o espaço em dois **semiespaços** de mesma origem α.



Em cada figura a seguir, foi destacado um plano que contém uma das faces do poliedro. Observe.

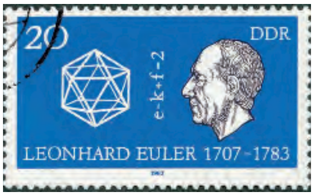
Exemplos de poliedros convexos e não convexos

Poliedros convexos	Poliedros não convexos
 	 

Relação de Euler

Os elementos dos poliedros mantêm entre si muitas relações geométricas, numéricas e métricas. Entre as relações numéricas, uma das mais importantes é denominada **relação de Euler**, que relaciona o número de vértices (V), de arestas (A) e de faces (F) de qualquer poliedro convexo. Essa relação pode ser escrita assim:

$$V + F - A = 2$$



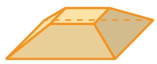
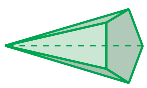
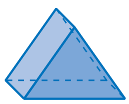
OLGA POPOVA/ SHUTTERSTOCK - COLEÇÃO PARTICULAR

Esse selo comemorativo, de 1983, mostra a importância da descoberta da relação de Euler, que recebe o nome do matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

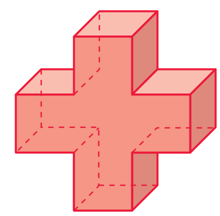
Vamos verificar a validade da relação de Euler para os poliedros convexos representados no quadro a seguir.

Verificação da validade da relação de Euler para alguns poliedros convexos

Poliedro	Vértice (V)	Face (F)	Aresta (A)	$V + F - A$
	8	6	12	2
	6	6	10	2
	6	5	9	2

Observação

Embora todo poliedro convexo satisfaça a relação de Euler, nem sempre um poliedro que satisfaz essa relação é convexo. Observe, como exemplo, o poliedro representado.



Ele tem 24 vértices, 14 faces e 36 arestas. Assim:

$24 + 14 - 36 = 2$

$V + F - A = 2$

Logo, esse poliedro satisfaz a relação de Euler, mas não é convexo.

Atividades resolvidas

R1. Obter o número de arestas de um poliedro convexo que tem 6 faces e 8 vértices.

▶ **Resolução**

Como a relação de Euler é válida para todos os poliedros convexos, temos:

$V + F - A = 2 \Rightarrow A = 8 + 6 - 2 \Rightarrow A = 12$

Portanto, esse poliedro possui 12 arestas.

R2. Quantos vértices tem um poliedro convexo com 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares?

▶ **Resolução**

O número de faces do poliedro é 4 + 5, ou seja, 9.

As 4 faces triangulares têm 12 lados ($4 \cdot 3$), e as 5 faces quadrangulares têm 20 lados ($5 \cdot 4$). Então, o número de arestas é dado por $(12 + 20) : 2 = 16$, pois cada aresta é lado comum de exatamente duas faces (portanto, cada aresta foi contada duas vezes). Assim, o poliedro tem 16 arestas e 9 faces. Logo:

$V + 9 - 16 = 2 \Rightarrow V = 9$

Portanto, esse poliedro tem 9 vértices.

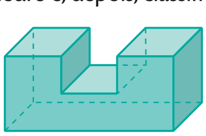
4 a. $V = 16$, $F = 10$ e $A = 24$; não convexo. **4 b.** $V = 9$, $F = 9$ e $A = 16$; convexo.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

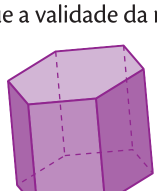
4. Determine o número de vértices, de faces e de arestas de cada poliedro e, depois, classifique-os em convexo ou não convexo.

a.

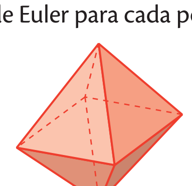


b.

5. Verifique a validade da relação de Euler para cada poliedro.



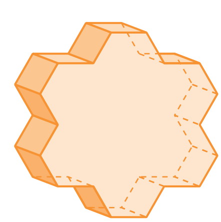
poliedro I



poliedro II

5. A relação de Euler é válida para os dois poliedros.

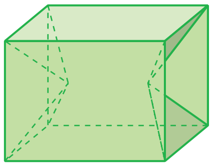
6. Alberto é torneiro mecânico e deve construir uma peça maciça de acordo com o modelo a seguir.



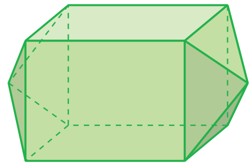
Verifique se o poliedro que se parece com essa peça satisfaz a relação de Euler. **6.** A relação de Euler é satisfeita.

7. Calcule o número de vértices de um poliedro convexo que tem apenas 2 faces pentagonais e 5 faces quadrangulares.
7. 10 vértices.

8. Observe os poliedros e, em seguida, responda às questões.



poliedro I



poliedro II

Qual desses poliedros:

a. é um poliedro côncavo? **8 a.** Poliedro I.

b. têm mais faces? **8 b.** Ambos têm 12 faces.

c. têm menos vértices? **8 c.** Ambos têm 10 vértices.

d. têm mais arestas? **8 d.** Ambos têm 20 arestas.

e. satisfaz a relação de Euler?

8 e. Ambos satisfazem a relação de Euler.

9. Em um poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces desse poliedro. **9.** 8 faces.

10. 11 faces.

10. Um poliedro convexo com 11 vértices tem o número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares e 1 face pentagonal. Calcule o número de faces desse poliedro.

11. Calcule o número de faces triangulares e quadrangulares de um poliedro convexo (que só tem esses dois tipos de face) com 20 arestas e 10 vértices. **11.** 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares.

12. Um poliedro convexo de 9 vértices é formado apenas por faces triangulares e quadrangulares. O número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares são números inteiros consecutivos. Determine o número de faces e de arestas.
12. 9 faces e 16 arestas.

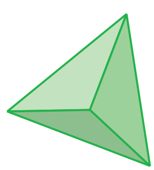
Poliedros regulares

OBJETO DIGITAL
Carrossel de imagens: Poliedros regulares
Este carrossel de imagens apresenta diferentes objetos cujo formato se parece com o de poliedros regulares e pode ser explorado antes de definir o conceito de poliedros regulares com a turma.

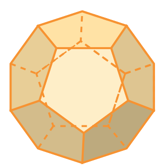
Um poliedro convexo é **regular** quando satisfaz as seguintes condições:

- apresenta todas as faces poligonais regulares e congruentes entre si;
- de todos os vértices parte o mesmo número de arestas.

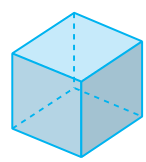
Existem exatamente cinco classes de poliedros regulares. Observe a seguir um exemplo de cada uma dessas classes.



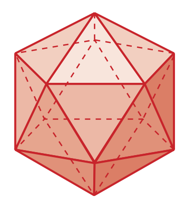
tetraedro regular



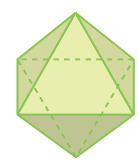
dodecaedro regular



hexaedro regular (ou cubo)



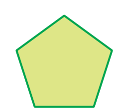
icosaedro regular



octaedro regular

Observações

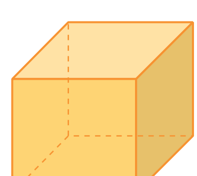
- Uma superfície poligonal plana é regular se o polígono que a determina é regular.
- Um polígono é regular se tem todos os lados com a mesma medida de comprimento e todos os ângulos internos congruentes entre si.



superfície pentagonal regular

Planificação da superfície de um poliedro

Os poliedros podem ser representados de diferentes maneiras; por exemplo, em perspectiva ou pela planificação de sua superfície. Até agora, você tem observado a representação de alguns poliedros em perspectiva, como o cubo representado a seguir.



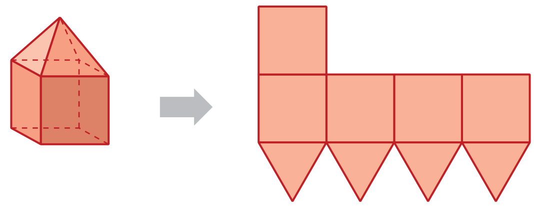
Entretanto, a superfície de um poliedro, que é formada de superfícies poligonais planas, pode ser colocada sobre um plano de tal modo que cada uma das faces do poliedro tenha pelo menos um lado em comum com outra face. Obtemos, assim, uma figura plana, que costuma ser chamada de **molde do poliedro** ou **planificação da superfície do poliedro**.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

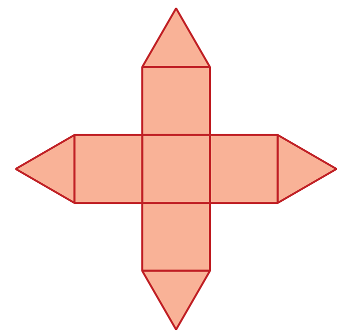
De modo geral, as superfícies poligonais que formam a superfície de um poliedro podem ser arranjadas de vários modos, desde que cada superfície poligonal esteja ligada a outra por pelo menos um de seus lados.

Considere os exemplos.

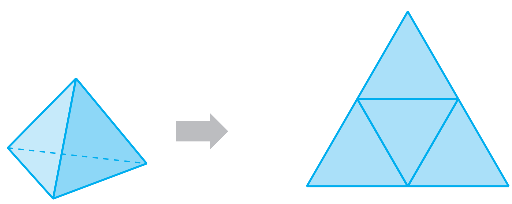
a.



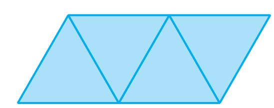
ou



b.

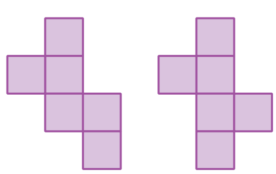


ou



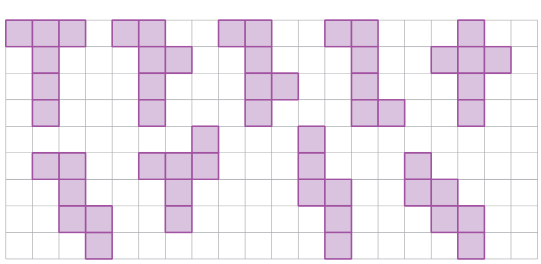
Atividades resolvidas

R3. Existem 11 diferentes planificações de superfície para o cubo. Duas delas estão representadas a seguir. Representar as outras 9 planificações da superfície de um cubo.

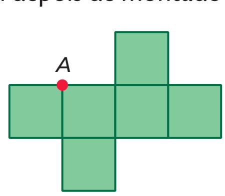


▶ **Resolução**

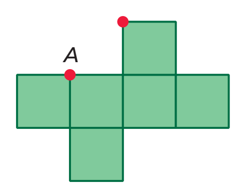
A resolução desta atividade fica facilitada se usarmos uma malha quadriculada. Estas são as outras possibilidades:



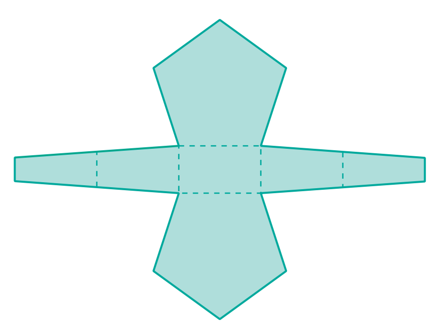
R4. Na planificação da superfície de um cubo foi assinalado um ponto *A*. Marcar nessa planificação o ponto que coincidirá com *A* depois de montado o cubo.



▶ **Resolução**



R5. Qual é o número de vértices (V) do sólido cuja planificação da superfície está representada a seguir?



▶ **Resolução**

O sólido é um heptaedro; logo, o número de faces é 7.

Como há 5 faces quadrangulares e 2 faces pentagonais, o número de arestas (A) é:

$$A = \frac{5 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{2} = 15$$

Uma vez que o sólido é convexo, a relação de Euler é válida. Desse modo, temos:

$V + F - A = 2 \Rightarrow V + 7 - 15 = 2 \Rightarrow V = 10$

13 a. Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor.*

Atividades propostas

Registre em seu caderno

13. EM DUPLA Com uma colega, retomem os exemplos apresentados na página anterior e façam o que se pede.

a. Obtenham pelo menos outras duas planificações da superfície do poliedro apresentado no exemplo **a**.

b. ARGUMENTAÇÃO Respondam: É possível obter outra planificação da superfície do tetraedro apresentado no exemplo **b**? Justifiquem sua resposta.

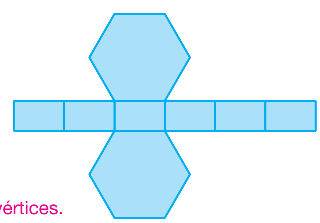
14. Da superfície de um poliedro regular de faces pentagonais foram retiradas as três faces adjacentes a um vértice comum. Calcule o número de arestas, de faces e de vértices da superfície poliédrica que restou. **14.** 27 arestas, 9 faces e 19 vértices.

15. Faça o que se pede. **15 a.** Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor.*

a. Represente a planificação da superfície de um poliedro que tem 3 faces quadradas e 4 faces triangulares.

b. EM DUPLA Compare a planificação que você elaborou com a de um colega. **15 b.** Resposta pessoal.

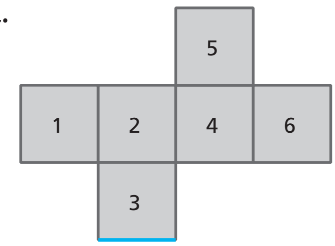
16. Determine o número de arestas e de vértices do poliedro cuja planificação da superfície está representada a seguir.



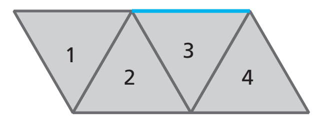
16. 18 arestas e 12 vértices.

17. Em cada um dos moldes a seguir, anote o número da face que terá um dos lados coincidindo com o lado destacado em azul depois que o molde for montado.

a.

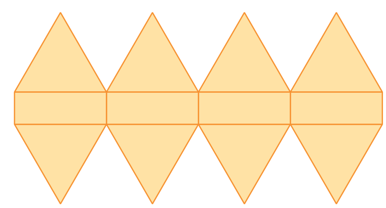


b.



17 a. A face 6.
17 b. A face 1.

18. Considere que a figura a seguir seja a planificação da superfície de um poliedro convexo. Qual é a soma do número de arestas e do número de vértices do poliedro? **18.** 30



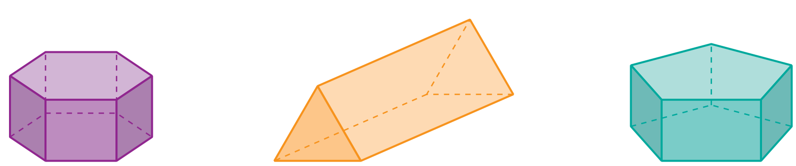
19. Represente a planificação da superfície de um octaedro regular. **19.** Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor.*

13 b. Não é possível, pois qualquer outro posicionamento das quatro faces triangulares resulta em um triângulo equilátero ou em um paralelogramo.

Prismas

Vários objetos do espaço em que vivemos têm o formato de poliedros, entre os quais destacamos os **prismas**.

Observe os prismas representados a seguir.



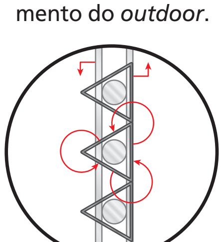
Note que todos eles têm pelo menos um par de faces paralelas congruentes pelo menos três faces com lados paralelos dois a dois. Esse fato, embora não seja exclusivo dos prismas, ocorre em todos eles.

O formato de alguns prismas está presente em diversos elementos do nosso cotidiano, desde as embalagens mais simples até as edificações mais elaboradas.

Um exemplo são os painéis publicitários, conhecidos como *outdoors,* que exibem três propagandas em um mesmo espaço. Eles são compostos por estruturas que têm o formato de prismas que giram 120° de maneira sincronizada, alternando as imagens e permitindo a exibição de diferentes anúncios em um único painel.

Observação

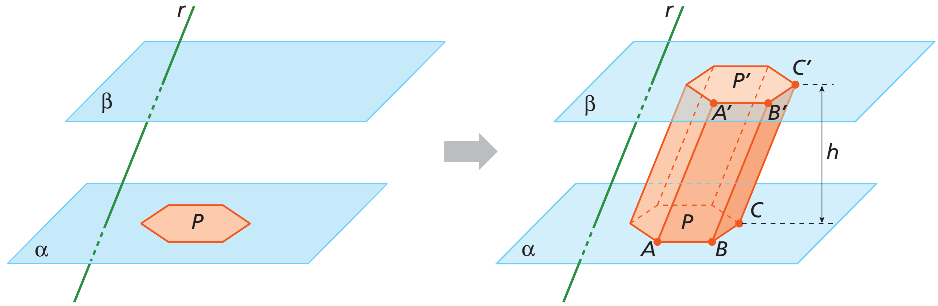
Detalhe de vista de cima do funcionamento do *outdoor*.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Definição de prisma

Consideremos dois planos paralelos distintos, α e β, uma região poligonal convexa P contida em α e uma reta r que intercepta os planos α e β.



Chama-se **prisma** o poliedro formado por todos os segmentos de reta paralelos a r tais que uma de suas extremidades é um ponto da região P e a outra extremidade é um ponto no plano β.

Se a reta r é perpendicular aos planos α e β, dizemos que o prisma é **reto**; caso contrário, ele é **oblíquo**. Observe que o prisma representado anteriormente é oblíquo.

Elementos de um prisma

Considerando o prisma representado anteriormente, podemos destacar os elementos a seguir.

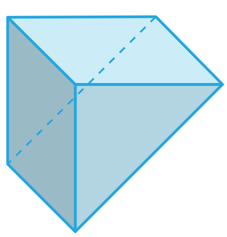
- **Bases** – as regiões poligonais P e P', que são congruentes e estão situadas em planos paralelos (α e β, respectivamente).
- **Faces laterais** – as regiões poligonais $AA'B'B$, $BB'C'C$ etc.
- **Arestas das bases** – os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ etc.
- **Arestas laterais** – os segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ etc.
- **Altura do prisma** – a distância entre os planos das bases (α e β). Indicaremos a medida da altura do prisma por h.

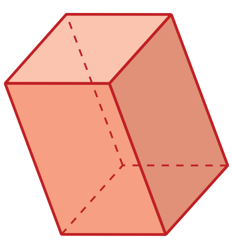
Classificação dos prismas

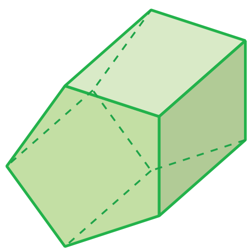
Os prismas podem ser classificados de acordo com alguns critérios. Um deles é a inclinação da reta r em relação aos planos α e β que contêm as bases. É essa reta que define a inclinação das arestas laterais dos prismas em relação às bases. Nos prismas retos, as arestas laterais são perpendiculares às bases; nos oblíquos, não.

Outro critério para classificar os prismas é o que considera o polígono que determina as bases. Se esse polígono é um triângulo, o prisma é **triangular**; se é um quadrilátero, o prisma é **quadrangular**; se é um pentágono, o prisma é **pentagonal**; e assim por diante.

Considere os exemplos.


prisma triangular


prisma quadrangular

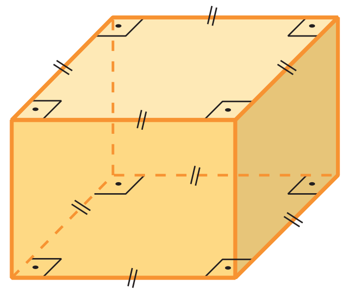

prisma pentagonal

Um prisma reto cujas bases são superfícies poligonais regulares é denominado **prisma regular**.

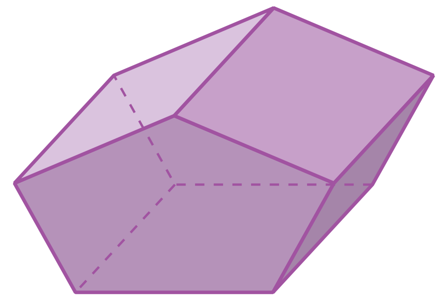
Observação

Nos prismas oblíquos, as faces laterais são paralelogramos e, nos prismas retos, as faces laterais são retângulos.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



Esse prisma é regular, pois as bases são quadradas e ele é reto.

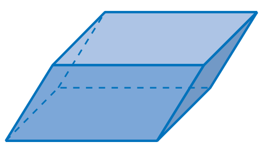


Esse prisma não é regular, pois as bases não são polígonos regulares.

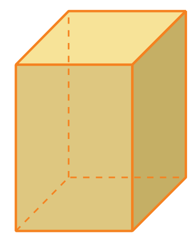
Entre os prismas quadrangulares, aqueles cujas bases têm lados paralelos dois a dois são chamados de **paralelepípedos**; estes, por sua vez, podem ser retos ou oblíquos.

Se um paralelepípedo reto tem bases retangulares, é chamado de **paralelepípedo reto-retângulo** ou **bloco retangular**; se tem todas as faces quadradas, denomina-se **cubo**.

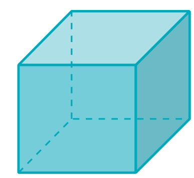
Considere os exemplos.



paralelepípedo oblíquo



paralelepípedo reto-retângulo



cubo

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Medida do comprimento da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

Rafael faz carretos com seu caminhão-baú. Para fechar o contrato de uma encomenda para o transporte de um mastro de bandeira com 5,9 m de medida de comprimento, ele precisa saber antecipadamente se esse mastro caberá dentro da carroceria, cujas dimensões internas medem 2 m, 3 m e 5 m. Rafael poderá aceitar a encomenda?

SUPERTROOPER/SHUTTERSTOCK

Observe que o formato da carroceria se parece com o de um paralelepípedo reto-retângulo. A maior medida linear interna dela é a do comprimento da diagonal desse paralelepípedo.

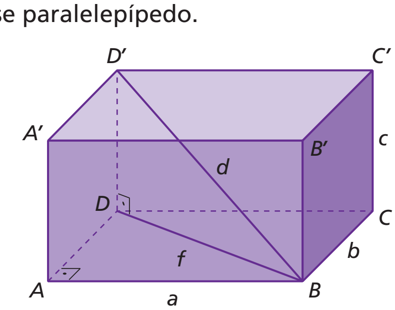
Diagonal de um paralelepípedo é todo segmento cujas extremidades são vértices desse paralelepípedo que não pertencem a uma mesma face.

Para saber se pode aceitar a encomenda, Rafael deve calcular a medida do comprimento da diagonal e comparar com a medida do comprimento do mastro.

Considere um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões medem a, b e c. O segmento $\overline{BD'}$ é uma diagonal desse paralelepípedo.

Observação

O segmento $\overline{DB}$ não é diagonal do paralelepípedo, pois as extremidades D e B pertencem à mesma face.



Para obter a medida do comprimento d da diagonal desse paralelepípedo, podem ser considerados os triângulos retângulos ABD, retângulo em A, e DBD', retângulo em D.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ADB, temos:

$$f^2 = a^2 + b^2 \quad \text{(I)}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo DBD', temos:

$$d^2 = f^2 + c^2 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$d^2 = (a^2 + b^2) + c^2$$

Portanto, a medida do comprimento d da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões medem a, b e c é:

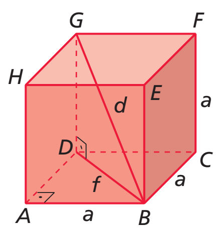
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Questões. Para responder a essas perguntas, podemos observar no cubo:
- o triângulo ABD, isósceles, retângulo, de catetos medindo a de comprimento e hipotenusa medindo f de comprimento; então, $a < f$;
- o triângulo BDG, retângulo, de catetos medindo a e f de comprimento e hipotenusa medindo d de comprimento; então, $a < f < d$.

Portanto, o maior segmento é uma diagonal do cubo; o menor é uma aresta.

Atividade resolvida

R6. Calcular a medida do comprimento da aresta de um cubo cuja medida do comprimento da diagonal excede em $\sqrt{2}$ cm a medida do comprimento da diagonal da base.



▸ Resolução

Sendo d a medida do comprimento da diagonal do cubo e f a medida do comprimento da diagonal da base, temos, pelos dados do problema: $d = f + \sqrt{2} \Rightarrow d - f = \sqrt{2}$ (I)

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABD, temos: $f^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow f = a\sqrt{2}$ (II)

Por se tratar de um cubo, sabemos que: $d = a\sqrt{3}$ (III)

Assim, substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$d - f = \sqrt{2} \Rightarrow a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow a \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{6} + 2}{3 - 2} \Rightarrow a = \sqrt{6} + 2$$

Portanto, a aresta do cubo mede $(2 + \sqrt{6})$ cm de comprimento.

Retome o cubo da **atividade resolvida R6** e responda: Qual é o maior segmento cujas extremidades são vértices de um cubo? E qual é o menor?

Atividades propostas

Registre em seu caderno

20. **ARGUMENTAÇÃO** Que tipo de polígono compõe as faces laterais de um prisma reto? Justifique sua resposta.

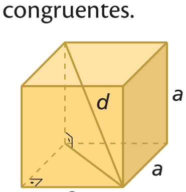
21. Responda o que se pede a seguir.

a. Todo prisma regular é um poliedro regular? Todo poliedro regular é um prisma regular? **21 a.** Não; não.

b. Apresente exemplos para justificar suas respostas do item anterior. **21 b.** Contraexemplos no *Suplemento para o professor*.

22. Quantas diagonais tem um paralelepípedo reto-retângulo? **22.** Quatro diagonais.

23. Se o paralelepípedo reto-retângulo é um cubo, todas as suas arestas são congruentes.



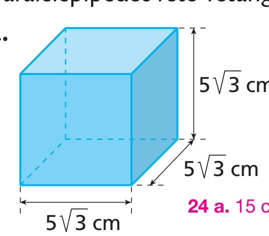
23. Resposta no *Suplemento para o professor*.

Mostre que a medida de comprimento d das diagonais do cubo é igual a $a\sqrt{3}$.

20. O retângulo, pois o fato de a reta r ser perpendicular aos planos garante os quatro ângulos internos retos para as faces laterais.

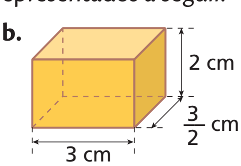
24. Calcule a medida do comprimento das diagonais dos paralelepípedos reto-retângulos representados a seguir.

a.



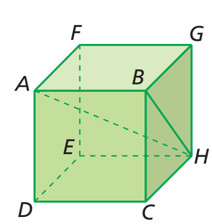
24 a. 15 cm

b.



24 b. $\frac{\sqrt{61}}{2}$ cm

25. O sólido representado é um cubo cujas arestas medem 4 cm de comprimento. Calcule a medida da área do triângulo ABH. **25.** $8\sqrt{2}$ cm²



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

27. Aproximadamente 6,16 m; Rafael pode aceitar a encomenda.

26. Um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões medem a cm, 4 cm e 7 cm tem diagonal medindo $3\sqrt{10}$ cm de comprimento. Calcule o valor de a. **26.** 5

27. Calcule a medida do comprimento da diagonal interna da carroceria do caminhão de Rafael, citado na página **68**, cujas dimensões internas medem 2 m, 3 m e 5 m, e conclua se Rafael pode aceitar a encomenda do carreto do mastro de bandeira que media 5,9 m de comprimento.

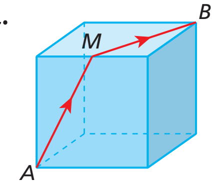
SUPERTROOPER/SHUTTERSTOCK

28. As medidas do comprimento das arestas de um paralelepípedo reto-retângulo são proporcionais a 3, 4 e 12. Se a diagonal mede 130 cm de comprimento, então quais são as medidas de comprimento das arestas?

28. 30 cm, 40 cm e 120 cm.

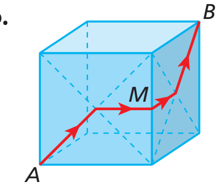
29. Em cada item, calcule a medida do comprimento do caminho de A a B destacado sobre a superfície do cubo de aresta medindo 3 cm de comprimento. O ponto M é o ponto médio de uma aresta.

a.



29 a. $3\sqrt{5}$ cm

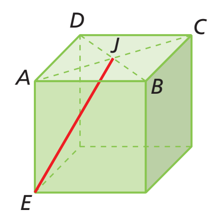
b.



29 b. $3(\sqrt{2} + 1)$ cm

30. A aresta do cubo representado a seguir mede 20 cm de comprimento. Se J é a intersecção dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, então qual é a medida do comprimento do segmento $\overline{EJ}$?

30. $10\sqrt{6}$ cm

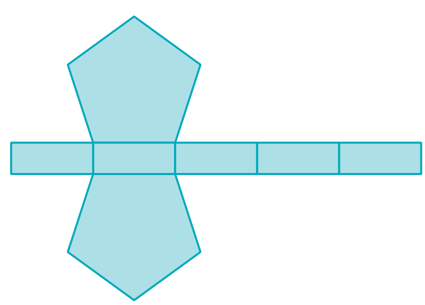


31. Represente um cubo e trace duas de suas diagonais. Mostre que duas diagonais de um cubo não são perpendiculares entre si. **31.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Planificação da superfície de um prisma

Observe a planificação da superfície de um prisma.



Pela planificação da superfície, é possível identificar muitas características desse prisma:

- tem 7 faces, já que a planificação de sua superfície apresenta 7 regiões poligonais;
- tem bases pentagonais, pois faces desse tipo não podem ser faces laterais de um prisma, as quais necessariamente são quadriláteros;
- tem 5 faces laterais retangulares, já que as pentagonais são bases;
- tem 10 vértices, uma vez que cada base contém metade dos vértices do prisma;
- é reto, já que suas faces laterais são retangulares;
- tem medida da altura igual à medida de comprimento de uma aresta lateral, já que é reto.

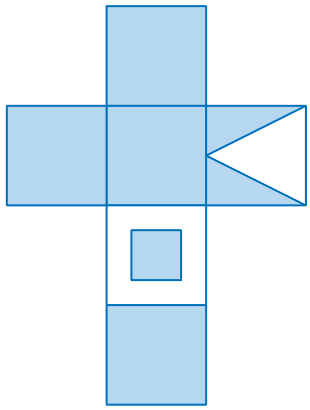
Observação

As faces laterais de um prisma reto são sempre retangulares. Mesmo que o prisma seja um cubo, podemos dizer que sua face lateral é retangular, porque todo quadrado é um retângulo.

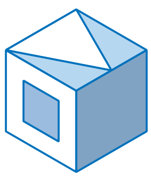
Atividades propostas

Registre em seu caderno

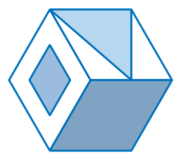
32. Qual alternativa apresenta o cubo cuja superfície está planificada a seguir? **32.** Alternativa **d.**



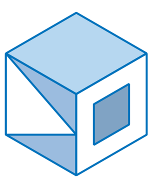
a.



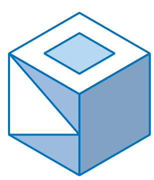
c.



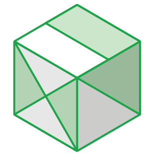
b.



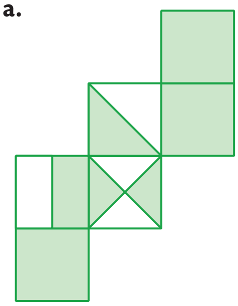
d.



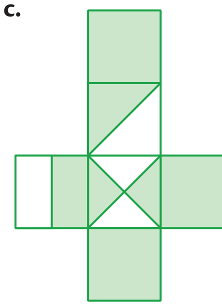
33. Qual alternativa apresenta a planificação da superfície do cubo representado a seguir? **33.** Alternativa **b.**



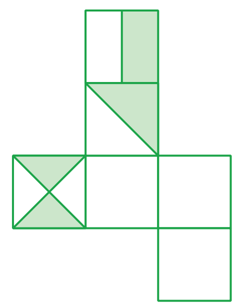
a.



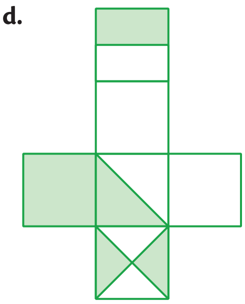
c.



b.



d.



Medida da área da superfície de um prisma

Dado um prisma qualquer, definimos algumas medidas de área a seguir.

- **Medida da área da base** (A_{base}) – medida da área de uma das faces que é base.
- **Medida da área lateral** ($A_{lateral}$) – soma das medidas das áreas das faces laterais.
- **Medida da área total** (A_{total}) – soma da medida da área lateral com as medidas das áreas das duas bases.

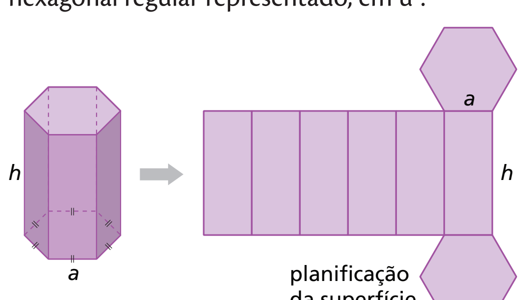
$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

Observação

Para simplificar a notação, sempre que possível, vamos usar "medida da área do polígono" em vez de "medida da área da superfície poligonal".

Atividades resolvidas

R7. Calcular a medida da área total da superfície do prisma hexagonal regular representado, em u².



▶ **Resolução**

Um prisma regular é um prisma reto e, portanto, suas faces laterais são retangulares e congruentes cujas dimensões medem a e h.

Assim, a medida da área lateral é dada por:

$$A_{lateral} = 6 \cdot \overbrace{a \cdot h}^{\text{medida da área da face retangular lateral}}$$

A base do prisma é uma região hexagonal regular de lado de medida de comprimento a.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A medida da área da base é dada por:

$$A_{base} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Logo, a medida da área total da superfície desse prisma hexagonal é:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 6ah + 2 \cdot \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} =$$

$$= 6ah + 3a^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$A_{total} = 3a(2h + a\sqrt{3})$$

Portanto, a medida da área total da superfície desse prisma é $3a(2h + a\sqrt{3})$ u^2.

Observação

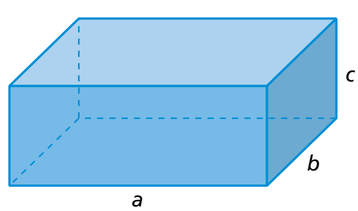
Um hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros.
A medida da área de um triângulo equilátero de lado medindo ℓ de comprimento é dada por:

$$A = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Assim, a medida da área de um hexágono regular de lado medindo ℓ de comprimento é dada por:

$$A = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

R8. Calcular a medida da área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões medem *a*, *b* e *c*, todas em u.



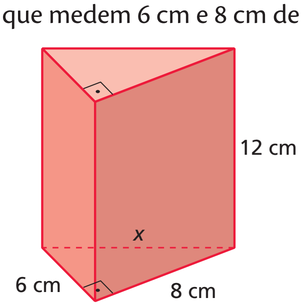
▸ Resolução

Nesse caso, quaisquer pares de faces paralelas podem ser as bases do prisma. Assim, a medida da área total é a soma das medidas das áreas de seis retângulos congruentes dois a dois:

$$A_{total} = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow A_{total} = 2(ab + ac + bc)$$

Portanto, a medida da área total da superfície desse paralelepípedo é $2(ab + ac + bc)$ u^2.

R9. Calcular a medida da área total da superfície de um prisma triangular reto, de altura medindo 12 cm, sabendo que as arestas da base formam um triângulo retângulo de catetos que medem 6 cm e 8 cm de comprimento.



▸ Resolução

Como a base do prisma é um triângulo retângulo, temos:

$$A_{base} = \frac{6 \cdot 8}{2} \Rightarrow A_{base} = 24$$

Para calcular a medida da área lateral, vamos obter a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo da base. Temos, então:

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x = 10$$

A medida da área lateral é dada pela soma das medidas das áreas das faces retangulares que compõem a superfície lateral. Assim:

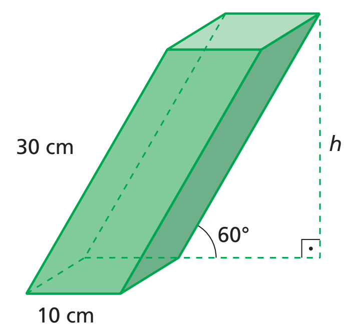
$$A_{lateral} = 6 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 12 = 288$$

Logo, a medida da área total é dada por:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 288 + 2 \cdot 24 = 336$$

Portanto, a medida da área total da superfície do prisma é 336 cm^2.

R10. Calcular a medida da área total da superfície do prisma oblíquo de base quadrada representado a seguir.



▸ Resolução

O prisma tem base quadrada. Assim: $A_{base} = 10^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{base} = 100$

Para calcular a medida da área lateral, vamos obter a medida da altura *h*.

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 15\sqrt{3}$$

A área lateral é formada por dois retângulos, cujas dimensões medem 10 cm e 30 cm, e dois paralelogramos cujo comprimento da base mede 10 cm e a altura mede $15\sqrt{3}$ cm. Assim, temos:

$$A_{lateral} = 2 \cdot (10 \cdot 30) + 2 \cdot (10 \cdot 15\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{lateral} = 600 + 300\sqrt{3}$$

Logo, a medida da área total é dada por:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

$$A_{total} = 600 + 300\sqrt{3} + 2 \cdot 100 = 100(8 + 3\sqrt{3})$$

Portanto, a medida da área total da superfície do prisma é $100(8 + 3\sqrt{3})$ cm^2.

39 a. Consegue, pois a medida da área total do teto é aproximadamente 43 m^2, e duas demãos equivalem a aproximadamente 86 m^2.

39 b. Uma demão Carlos consegue, pois a medida da área total das paredes internas é aproximadamente 142 m^2; adicionando o teto, fica 185 m^2. Duas demãos não são possíveis, pois 370 m^2 é maior que o rendimento máximo.

Atividades propostas

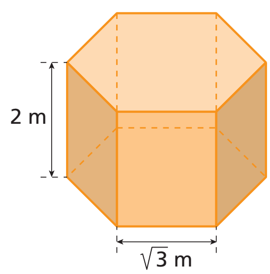
Registre em seu caderno

34. PENSAMENTO COMPUTACIONAL Represente na língua materna o algoritmo para calcular a medida da área total da superfície do prisma de base hexagonal regular representado na **atividade resolvida R7**. 34. Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

35. Uma indústria de embalagens produz caixas de papelão em formato de paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões medem 20 cm, 10 cm e 15 cm. Calcule quantos centímetros quadrados de papelão são necessários para fazer o molde de uma dessas caixas (despreze as abas). 35. 1.300 cm^2

36. Calcule a medida da área total da superfície dos sólidos.

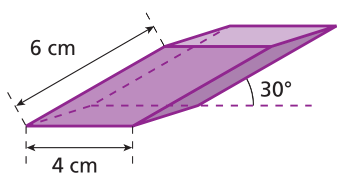
a.



prisma hexagonal regular

36 a. $21\sqrt{3}$ m^2

b.



prisma oblíquo de base quadrada

36 b. 104 cm^2

37. Cubo B.

37. Considere três cubos: cubo A com 12 cm de medida de comprimento de aresta, cubo B com 12 cm de medida de comprimento de diagonal e cubo C com 12 cm de medida de comprimento da diagonal da face quadrada. Qual deles tem a superfície de menor medida de área?

38. Sabendo que quatro cubos têm arestas de medida de comprimento 1 u, 2 u, 3 u e 4 u, respectivamente, faça o que se pede.

a. Determine a medida da área total da superfície de cada cubo. 38 a. 6 u^2, 24 u^2, 54 u^2, 96 u^2.

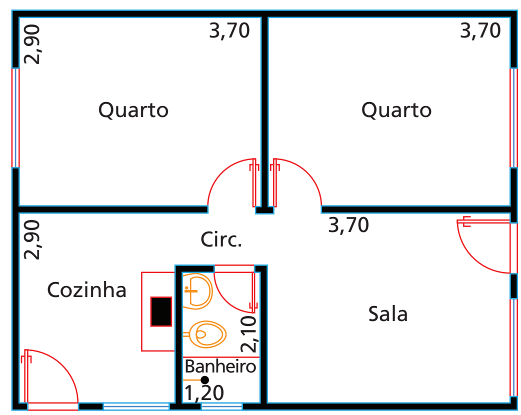
b. O que acontece com a medida da área total se a medida do comprimento da aresta dobra? E se triplica?

c. Quantos cubos de aresta unitária cabem dentro dos cubos com medida de comprimento das arestas iguais a 2 u, 3 u e 4 u, respectivamente?

38 c. 8, 27 e 64, respectivamente.

38 b. Fica multiplicada por 4; fica multiplicada por 9.

39. ARGUMENTAÇÃO Carlos comprou uma lata de 18 litros de tinta para pintar a parede, cujo rendimento previsto pelo fabricante é de 225 m^2 a 325 m^2. Observe a seguir a planta baixa da casa dele cuja distância entre o piso e o teto mede 2,70 m. Considerando o conteúdo dessa lata, responda às questões.



a. Carlos consegue dar duas demãos no teto interno da casa? Justifique sua resposta.

b. Sabendo que deve descontar 14 m^2 das medidas das áreas referentes às portas, às janelas e aos vitrôs, Carlos consegue dar uma demão no teto e nas paredes internas? E duas demãos em tudo? Justifique suas respostas.

c. Carlos consegue dar duas demãos no teto e uma demão nas paredes internas da casa? Justifique sua resposta.

40. EM DUPLA ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS Desenhe uma planta baixa de um apartamento ou de uma casa; para isso, obtenha modelos em *sites* de construtoras ou em propaganda de vendas de apartamento. Depois, elabore um problema, para que um colega da turma resolva, sobre o cálculo da quantidade de tinta necessária para pintar todo o imóvel. Nessa situação-problema, além da quantidade de tinta, podem ser solicitadas a pesquisa de valor real a ser gasto e a quantidade de outros materiais a serem usados, como pincéis, rolos, lixas etc. Mencione que o rendimento de tinta pode ser obtido na embalagem do produto. Se necessário, use no enunciado a dica de medida de altura da parede interna do imóvel a ser considerado (pé-direito) entre 2,5 m e 2,8 m, que é a medida de altura padrão para apartamentos simples.

Depois de elaborar o problema, você deve resolver o de um colega. 40. Resposta pessoal.

39 c. Talvez consiga, pois a medida da área total pintada seria aproximadamente 228 m^2, maior que o rendimento mínimo e menor que o rendimento máximo.

Medida do volume de um prisma

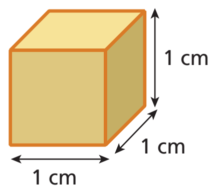
Como todo sólido, um prisma ocupa uma porção do espaço. Adotando uma unidade de medida de volume, podemos medir a porção do espaço ocupada por um prisma.

A medida do **volume** de um prisma corresponde a um único número real *V* positivo obtido pela comparação da porção do espaço ocupado pelo prisma com a porção do espaço ocupado por uma unidade de medida de volume.

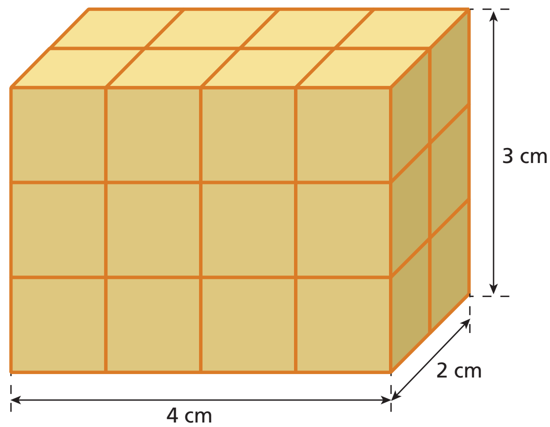
A unidade de medida de volume que usualmente consideramos é a medida do volume de um cubo unitário, isto é, de um cubo cujo comprimento da aresta mede 1 u, sendo u certa unidade de medida de comprimento. Assim, dizemos que a medida do volume desse cubo unitário é 1 u^3.

Se a aresta do cubo unitário mede 1 m de comprimento, sua medida de volume é 1 m^3; se a aresta do cubo unitário mede 1 mm de comprimento, a medida do volume desse cubo é 1 mm^3; e assim por diante.

Considere o exemplo.



Vamos calcular quantas vezes o cubo unitário, cujo comprimento da aresta mede 1 cm, cabe em um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões medem 4 cm, 2 cm e 3 cm.



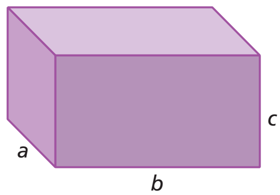
Analisando a figura, observamos que o paralelepípedo é formado por 8 cubos unitários na base e tem 3 camadas iguais à camada da base.

Logo, há 24 cubos unitários no total; portanto, o paralelepípedo é formado por 24 cubos $(4 \cdot 2 \cdot 3)$ de 1 cm^3 de medida de volume. Dizemos, então, que a medida do volume do paralelepípedo dado é 24 cm^3.

Medida do volume de um paralelepípedo reto-retângulo

No exemplo anterior, verificamos que um paralelepípedo reto-retângulo cujas medidas das dimensões são dadas por números inteiros tem medida do volume igual ao produto desses três números. Esse fato pode ser demonstrado, concluindo-se que ele é válido para qualquer paralelepípedo reto-retângulo cujas medidas das dimensões são dadas por números reais.

Desse modo, temos:

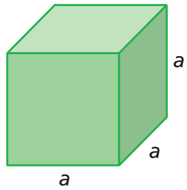


$$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c$$

Observação

Como o cubo é um caso particular de paralelepípedo reto-retângulo com todas as arestas de mesma medida de comprimento, sua medida de volume é:

$$V_{\text{cubo}} = a^3$$



Note que a medida do volume do paralelepípedo também pode ser expressa como o produto entre a medida da área da base (A_{base}) e a medida da altura (h):

$$V = A_{\text{base}} \cdot h$$

Atividade resolvida

R11. Deseja-se cimentar o piso de um quintal quadrado, com lados medindo 8 m de comprimento, com 4 cm de medida da espessura de massa de cimento. Calcular a medida do volume necessário de massa para revestir o piso desse quintal.

▸ Resolução

A camada de cimento terá o formato de um paralelepípedo reto-retângulo de base quadrada, cujos comprimento e largura medem 8 m e a altura mede 4 cm.

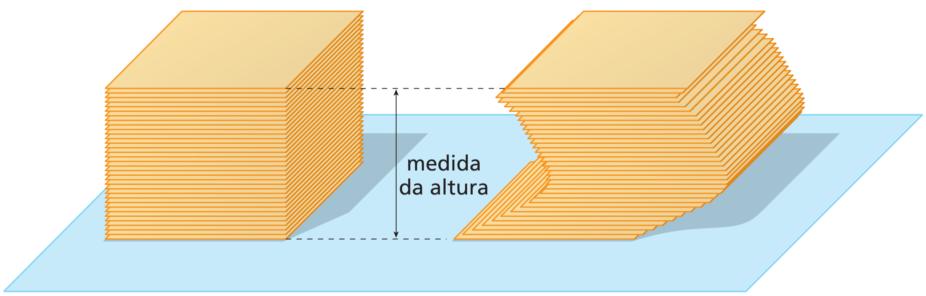
Como a medida da espessura do revestimento é de 4 cm ou 0,04 m, a medida do volume necessário de massa é:

$$V = 8 \cdot 8 \cdot 0{,}04 \Rightarrow V = 64 \cdot 0{,}04 \Rightarrow V = 2{,}56$$

Logo, são necessários 2,56 m^3 de massa para fazer o revestimento.

Princípio de Cavalieri

Sobre uma mesa, formamos duas pilhas com a mesma quantidade de cartões retangulares idênticos. Vamos modificar o formato de uma das pilhas sem retirar nem pôr nenhum cartão. Observe a possível situação das pilhas formadas na ilustração a seguir.

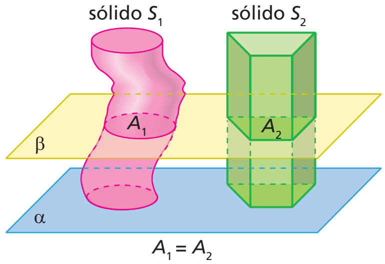


Observando as pilhas, é possível notar que:

- a medida da altura das duas pilhas é a mesma, pois elas têm a mesma quantidade de cartões de mesma medida de espessura;
- os cartões das duas pilhas que ficam à mesma medida de distância da mesa têm a mesma medida da área, pois eles são idênticos;
- a segunda pilha tem a mesma medida do volume que a primeira, já que é formada por cartões idênticos e, portanto, ocupa a mesma porção do espaço.

Essa situação ilustra o **princípio de Cavalieri**, ou **postulado de Cavalieri**, que afirma que:

Dois sólidos, S_1 e S_2, apoiados em um plano α e contidos em um mesmo semiespaço, terão a mesma medida do volume V se todo plano β, paralelo a α, secciona os dois sólidos segundo regiões planas de mesma medida de área (A).



Observação

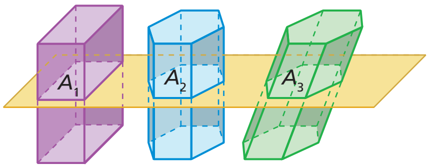
O princípio de Cavalieri pode ser demonstrado, porém vamos considerá-lo verdadeiro sem fazer sua demonstração nesta coleção.

Secção transversal de um prisma

Um plano intercepta um sólido segundo uma superfície chamada de **secção plana**. No caso em que a secção plana é paralela à base do prisma, ela é denominada **secção transversal**.

Considere o exemplo.

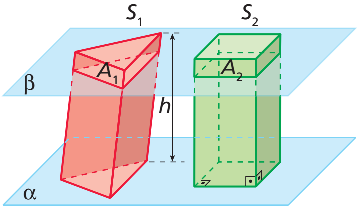
Observe uma secção transversal de cada prisma representado a seguir.



Qualquer secção transversal de um prisma é congruente à base desse prisma e, portanto, tem a mesma medida da área que essa base.

Medida do volume de um prisma qualquer

Considere um prisma S_1 e um paralelepípedo reto-retângulo S_2 de mesma medida de altura h e de bases equivalentes (mesma medida da área), apoiados em um plano α e situados em um mesmo semiespaço.



Como qualquer secção transversal de cada prisma possui a mesma medida da área que a base desse prisma e as medidas das áreas das bases de S_1 e S_2 são iguais, qualquer plano β paralelo a α que intercepte os dois prismas determina secções transversais de mesma medida de área: $A_1 = A_2$

Assim, pelo princípio de Cavalieri, os dois prismas têm medidas de volume iguais, isto é, $V_1 = V_2$, em que V_1 é a medida do volume do prisma S_1 e V_2 é a medida do volume do prisma S_2.

Como S_2 é um paralelepípedo reto-retângulo, sua medida de volume pode ser calculada por:

$$V_2 = A_{\text{base de } S_2} \cdot h$$

Como as medidas das áreas das bases de S_1 e de S_2 são iguais e $V_1 = V_2$, temos:

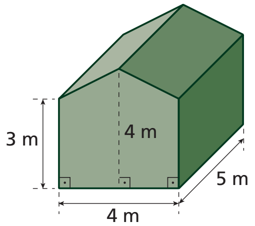
$$V_1 = A_{\text{base de } S_1} \cdot h$$

Assim, a medida do volume de um prisma qualquer pode ser obtida por:

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

Atividades resolvidas

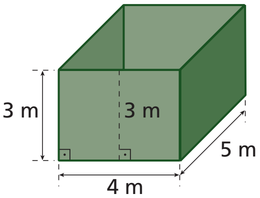
R12. Calcular a medida do volume de ar contido em um galpão que tem o formato do prisma representado a seguir.



▶ **Resolução**

Vamos decompor a figura do galpão em duas partes com formatos de prisma.

Formato de paralelepípedo reto-retângulo

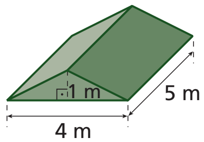


$V_1 = A_{\text{base}} \cdot h$

$V_1 = 4 \cdot 5 \cdot 3$

$V_1 = 60$

Formato de prisma reto de base triangular



$V_2 = A_{\text{base}} \cdot h$

$V_2 = \dfrac{4 \cdot 1}{2} \cdot 5$

$V_2 = 10$

Logo, a medida do volume total de ar contido no galpão é dada por $V_1 + V_2$, ou seja, 70 m^3.

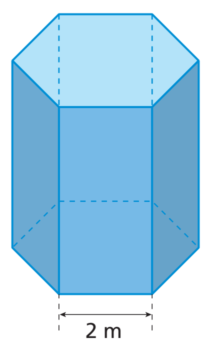
Outra maneira de resolver essa atividade seria, inicialmente, identificar que o formato do galpão corresponde a um prisma pentagonal.

Para calcular a medida do volume de ar contido no galpão sem decompô-lo, podemos determinar a medida da área da base pentagonal (que é dada por um triângulo isósceles e por um retângulo) e, em seguida, calcular a medida do volume (V_{ar}):

$A_{base} = 2\ m^2 + 12\ m^2 = 14\ m^2$

$V_{ar} = 14\ m^2 \cdot 5\ m = 70\ m^3$

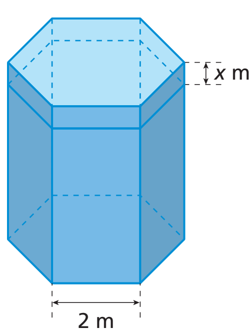
R13. O reservatório cheio de água de um condomínio residencial tem o formato de um prisma hexagonal regular, como representado a seguir. Por causa de um vazamento, foram desperdiçados $3.000\sqrt{3}$ L. Quanto baixou, em metro, o nível de água desse reservatório?



▶ **Resolução**

Vamos indicar por x, em metro, quanto baixou o nível da água no reservatório.

Os $3.000\sqrt{3}$ L perdidos ocupam a medida do volume interno do prisma hexagonal regular de mesma base do prisma da figura e a medida da altura de x metro.



Observação

Lembre que 1 L corresponde a 1 dm^3 e que

$1\ dm = \frac{1}{10}$ m. Então:

$1\ dm^3 = \frac{1}{1.000}\ m^3$

Portanto, 1 L corresponde a $\frac{1}{1.000}\ m^3$.

A base do prisma é uma região hexagonal regular de lado medindo 2 m de comprimento, cuja medida da área, em m^2, é dada por:

$$A_{base} = \frac{6 \cdot \ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{base} = \frac{6 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$A_{base} = 6\sqrt{3}$$

A medida do volume interno (V) do prisma correspondente aos $3.000\sqrt{3}$ L é:

$$V = A_{base} \cdot x = 6\sqrt{3} \cdot x$$

Como $3.000\sqrt{3}$ L corresponde a $3\sqrt{3}\ m^3$, temos:

$$6\sqrt{3} \cdot x = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 0{,}5$$

Portanto, o nível de água baixou 0,5 m.

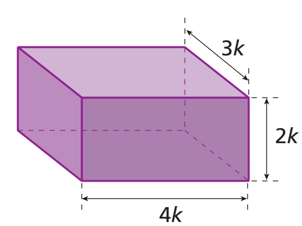
R14. Uma caixa de isopor tem o formato de um paralelepípedo reto-retângulo, com arestas de medidas de comprimento proporcionais a 2, 3 e 4 e com 192 cm^3 de medida do volume. Ela será revestida por uma película protetora de plástico. Quantos centímetros quadrados de plástico serão necessários para revestir essa caixa?

▶ **Resolução**

Vamos considerar que as medidas de comprimento das arestas da caixa, dadas em centímetro, sejam a, b e c.

Se elas são proporcionais a 2, 3 e 4, temos:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \\ c = 4k \end{cases}$$



Se a medida do volume da caixa é 192 cm^3, então:

$2k \cdot 3k \cdot 4k = 192 \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

Logo, $a = 4$, $b = 6$ e $c = 8$.

Como a medida da área total da caixa é dada por $A_{total} = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$, temos:

$A_{total} = 2 \cdot (4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 8) = 208$

Portanto, serão necessários 208 cm^2 de plástico para revestir a caixa.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

41. Uma barra de prata é fundida no formato de um prisma reto de medida da altura 32 cm e base trapezoidal, cuja medida de comprimento da altura é 5 cm e as medidas de comprimento das bases são 7,5 cm e 10 cm. Se a prata tem 10,5 g por cm^3, qual será a medida da massa da barra?
41. 14.700 g

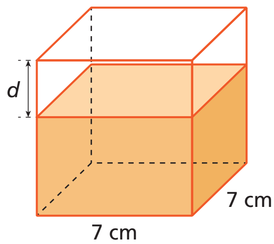
42. Sabe-se que a superfície de um cubo tem 216 m^2 de medida da área total. Calcule a medida do volume desse cubo.
42. 216 m^3

43. Quando uma amostra de metal é mergulhada em um tanque de água com formato de bloco retangular, cujas dimensões da base medem 15 cm por 20 cm, o nível de água se eleva 0,35 cm. Calcule a medida do volume dessa peça. **43.** 105 cm^3

44. Calcule a medida da área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo, cujo volume mede 240 cm^3, sabendo que as medidas das áreas de duas faces são 30 cm^2 e 48 cm^2.
44. 236 cm^2

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

45. **(UEA-2024)** Em uma caneca, no formato de um cubo com arestas internas medindo 7 cm, foram colocados 245 mL de café, que não preencheram totalmente a caneca, restando ainda um espaço entre a superfície do café e a borda superior da caneca, conforme figura. **45.** Alternativa **c**.

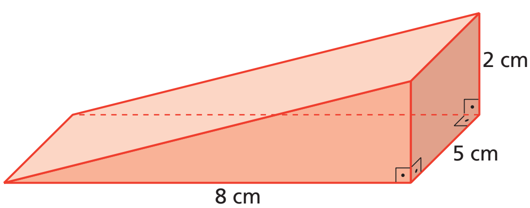


Fora de escala

A distância entre a altura do café, no interior da caneca, e a borda superior da caneca, indicada na figura pela letra *d*, é igual a

a. 3 cm.
b. 4 cm.
c. 2 cm.
d. 5 cm.
e. 1 cm.

46. Uma cunha utilizada para prender uma porta tem o formato de um prisma, conforme mostra a figura. **46.** 40 cm^3



Calcule a medida do volume dessa cunha.
47. 3.150 m^3

47. Um reservatório para armazenar soja tem o formato de um paralelepípedo reto-retângulo com 35 m de medida de altura e base quadrada com 60 m de medida de perímetro. Se o reservatório está com 60% de sua medida da capacidade ocupada, quantos metros cúbicos faltam para enchê-lo?

48. A medida da área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo é igual à medida da área total da superfície de um cubo. Se as medidas de comprimento de três arestas que concorrem em um mesmo vértice do paralelepípedo são 3 u, 5 u e 7 u, respectivamente, quanto mede o comprimento da diagonal do cubo? **48.** $\sqrt{71}$ u

49. Calcule a medida do volume de um prisma regular hexagonal de 8 cm de medida de altura, sabendo que a medida de área total de sua superfície é o triplo da medida da área lateral. **49.** $4.096\sqrt{3}$ cm^3

50. Determine a medida da capacidade, em litro, de um reservatório cúbico, sabendo que a maior vara de pesca que nele cabe inteiramente, sem envergar, tem 2 m de medida de comprimento. **50.** $\frac{8.000\sqrt{3}}{9}$ L

51. 832 cm^2 e 1.536 cm^3.

51. As medidas de comprimento das arestas de um paralelepípedo estão na razão 2 : 3 : 4, e o comprimento de sua diagonal mede $4\sqrt{29}$ cm. Qual é a medida da área total da superfície e a medida do volume desse paralelepípedo?

52. Um cubo cujo comprimento da aresta mede 4 cm é formado de cubinhos cujo comprimento da aresta mede 1 cm. Deseja-se construir com esses cubinhos um paralelepípedo.

Quanto medem as dimensões dos paralelepípedos que se podem formar com a menor e a maior medida de área total da superfície? **52.** Menor: 4 cm, 4 cm e 4 cm; maior: 1 cm, 1 cm e 64 cm.

53. Considerando um cubo cuja aresta mede 2 cm de comprimento, responda às questões a seguir. **53 a.** 8 cm^3

a. Qual é a medida do volume desse cubo? **53 b.** 24 cm^2
b. Qual é a medida da área da superfície desse cubo?
c. O que ocorre com a medida do volume se a medida do comprimento da aresta é dobrada? **53 c.** Fica multiplicado por 8.
d. E com a medida da área da superfície? **53 d.** Fica multiplicada por 4.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Pirâmides

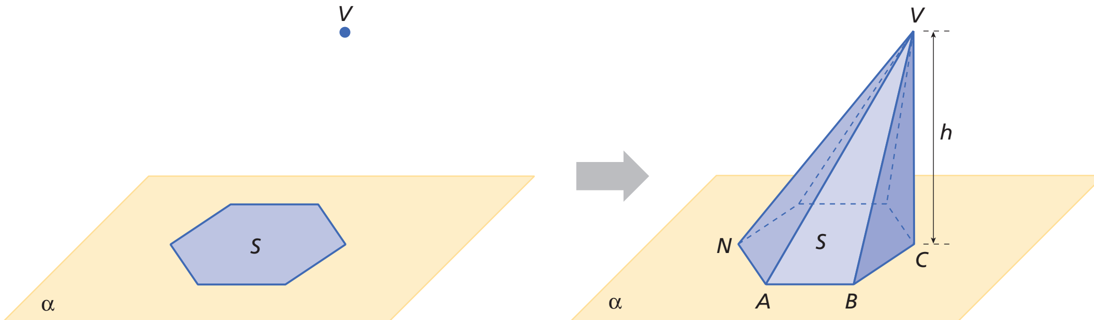
Além dos prismas, as **pirâmides** constituem outro importante tipo de poliedro. Exercendo fascínio sobre o ser humano desde a Antiguidade, o formato piramidal tem ressurgido na arquitetura moderna em edifícios de grande imponência. As pirâmides do Egito e a pirâmide de vidro do Museu do Louvre são belos exemplos de monumentos que têm o formato desse sólido.

DVLCOM - WWW.DVLCOM.CO.UK/SHUTTERSTOCK

Monumento que se parece com uma pirâmide, construído em vidro e metal, e serve de entrada principal para o Museu do Louvre em Paris, França. Foto de 2022.

Definição de pirâmide

Consideremos um plano α, uma região poligonal convexa S contida em α e um ponto V fora de α.



Chama-se **pirâmide** o poliedro convexo formado por todos os segmentos de reta cujas extremidades são o ponto V e um ponto da região S.

Observando a definição de pirâmide, você acredita que a relação de Euler também é válida para as pirâmides? **Questão.** Sim, pois as pirâmides também são poliedros convexos.

Elementos de uma pirâmide

Considerando a pirâmide representada anteriormente, podemos destacar os elementos a seguir.

- **Base** – a região poligonal S.
- **Vértice da pirâmide** – o ponto V.
- **Faces laterais** – as superfícies triangulares AVB, BVC, ..., NVA.
- **Arestas da base** – os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{NA}$.
- **Arestas laterais** – os segmentos de reta $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, ..., $\overline{VN}$.
- **Altura da pirâmide** – a distância entre o vértice V e o plano α. Indicaremos a medida da altura da pirâmide por h.

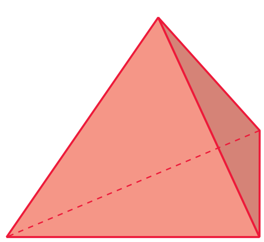
Observação

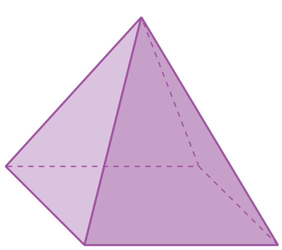
A denominação **vértice da pirâmide** é dada ao único vértice que não pertence à base.

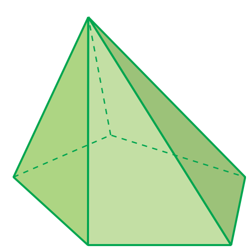
Classificação das pirâmides

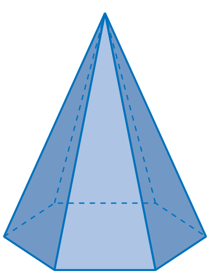
As pirâmides podem ser classificadas de acordo com o polígono que determina a base. Se esse polígono é um triângulo, a pirâmide é **triangular**; se é um quadrilátero, a pirâmide é **quadrangular**; se é um pentágono, a pirâmide é **pentagonal**; e assim por diante.

Considere os exemplos.


pirâmide triangular (tetraedro)


pirâmide quadrangular

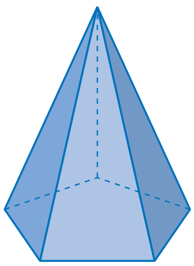

pirâmide pentagonal


pirâmide hexagonal

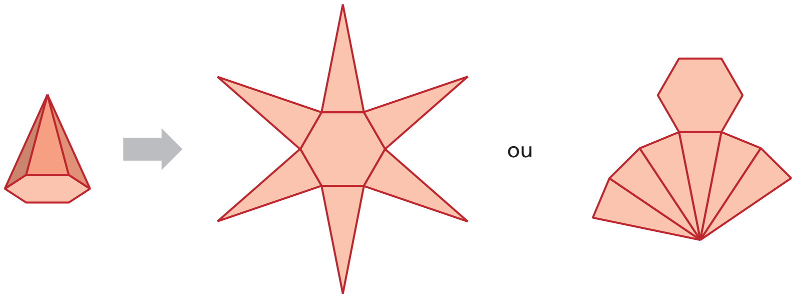
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Planificação da superfície de uma pirâmide

Até aqui, temos representado pirâmides em perspectiva, como esta a seguir. Assim como os demais poliedros, uma pirâmide também pode ser representada por planificações de sua superfície: é possível, em um plano, justapor as faces de uma pirâmide de modos diferentes, desde que cada uma delas tenha pelo menos um lado em comum com outra.



Como exemplo, observe a seguir duas planificações da superfície de uma pirâmide hexagonal.

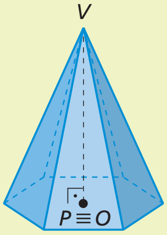


Pirâmides regulares

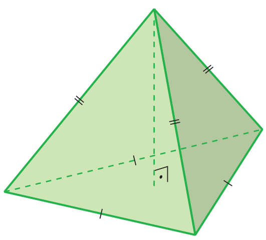
Observação

O centro de um polígono regular é o centro da circunferência circunscrita ao polígono e da circunferência inscrita nele.

Uma pirâmide cuja base é uma superfície poligonal regular e a projeção ortogonal *P* do vértice *V* sobre o plano da base coincide com o centro *O* do polígono da base é chamada de **pirâmide regular**.



As faces laterais de uma pirâmide regular são determinadas por triângulos isósceles congruentes.



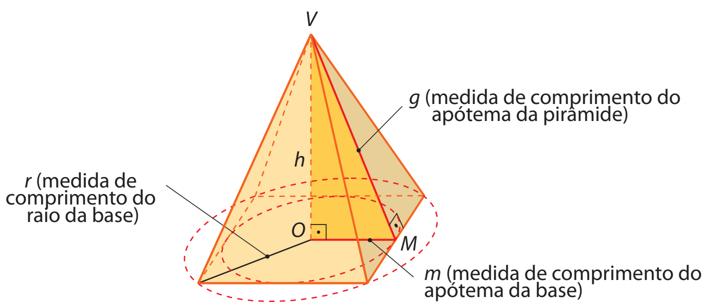
Assim, uma pirâmide triangular regular tem quatro faces: uma é a base (determinada por um triângulo equilátero) e as outras três são as faces laterais (determinadas por triângulos isósceles congruentes).

Um importante exemplo desse tipo de pirâmide regular é o **tetraedro regular**, que tem as quatro faces constituídas por triângulos equiláteros congruentes. No tetraedro regular, qualquer uma das faces pode ser considerada base da pirâmide.

Elementos das pirâmides regulares

Em uma pirâmide regular, podemos destacar os elementos a seguir.

- **Apótema da pirâmide** – altura relativa à base de qualquer face lateral (sua medida de comprimento será identificada por *g*).
- **Apótema da base** – segmento de reta que corresponde ao raio da circunferência inscrita no polígono da base (sua medida de comprimento será identificada por *m*).
- **Raio da base** – raio da circunferência circunscrita ao polígono da base (sua medida de comprimento será identificada por *r*).

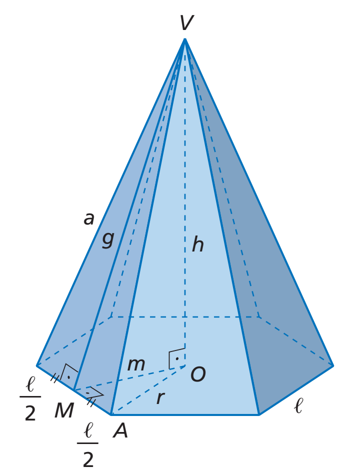


Algumas relações métricas

Podemos destacar algumas relações métricas nas pirâmides regulares. Observe a pirâmide regular com altura de medida *h*, aresta da base de medida de comprimento ℓ, apótema da pirâmide de medida de comprimento *g*, apótema da base de medida de comprimento *m*, raio da base de medida de comprimento *r* e arestas laterais de medida de comprimento *a*.

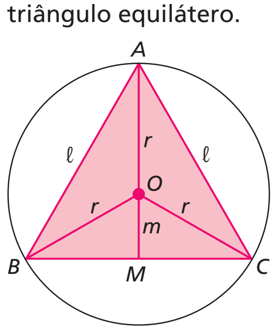
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo:

- *VOA*, temos: $a^2 = h^2 + r^2$
- *MOA*, temos: $r^2 = m^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$
- *VMO*, temos: $g^2 = h^2 + m^2$
- *VMA*, temos: $a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$



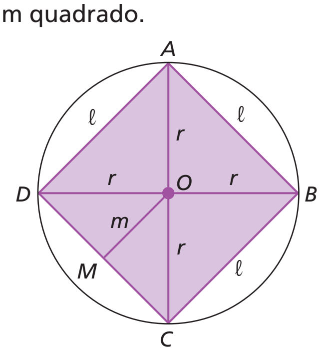
Essas relações métricas são válidas para qualquer pirâmide regular, independentemente do polígono que determina a base. Além disso, há a relação entre as medidas de comprimento da aresta da base e do apótema da base de algumas pirâmides regulares.

- O polígono que determina a base é um triângulo equilátero.



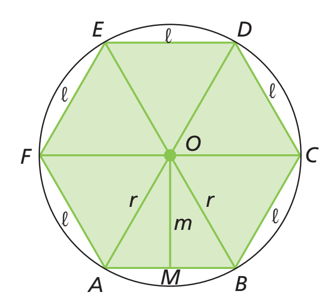
$m = \frac{r}{2}$ ou $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$

- O polígono que determina a base é um quadrado.



$m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ ou $m = \frac{\ell}{2}$

- O polígono que determina a base é um hexágono regular.

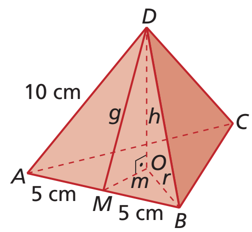


$m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ ou $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades resolvidas

R15. O comprimento das arestas de uma pirâmide triangular mede 10 cm. Calcular a medida de comprimento do apótema da pirâmide (g), a medida de comprimento do apótema da base (m) e a medida da altura da pirâmide (h).



▶ **Resolução**

No $\triangle DMA$, temos:

$10^2 = g^2 + 5^2 \Rightarrow g^2 = 75 \Rightarrow g = 5\sqrt{3}$

Como o polígono que determina a base é um triângulo equilátero, obtemos:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

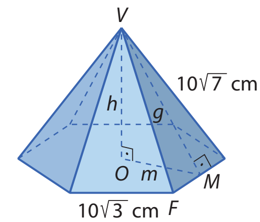
No $\triangle DMO$, temos:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 75 = h^2 + \frac{25}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{200}{3} \Rightarrow h = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

Portanto, o comprimento do apótema da pirâmide mede $5\sqrt{3}$ cm, o comprimento do apótema da base mede $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm e a altura da pirâmide mede $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ cm.

R16. Uma pirâmide regular hexagonal tem arestas da base medindo $10\sqrt{3}$ cm de comprimento e arestas laterais medindo $10\sqrt{7}$ cm de comprimento. Calcular a medida de comprimento do apótema da base (m), a medida de comprimento do apótema da pirâmide (g) e a medida da altura da pirâmide (h).



▶ **Resolução**

Como a base é hexagonal, temos:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 15$$

No triângulo VMF, temos:

$$g^2 + (5\sqrt{3})^2 = (10\sqrt{7})^2 \Rightarrow g^2 + 75 = 700 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^2 = 625 \Rightarrow g = 25$$

No triângulo VMO, temos:

$$m^2 + h^2 = g^2 \Rightarrow 15^2 + h^2 = 25^2 \Rightarrow h^2 = 400 \Rightarrow h = 20$$

Portanto, o comprimento do apótema da base mede 15 cm, o comprimento do apótema da pirâmide mede 25 cm e a altura da pirâmide mede 20 cm.

Atividades propostas

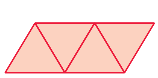
Registre em seu caderno

54. Determine o número de faces de uma pirâmide cuja base tem 8 vértices. **54.** 9 faces.

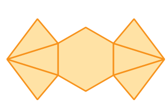
55. Determine o número de vértices, de faces e de arestas de uma pirâmide que tem n faces laterais, sendo n um número natural maior que 2. **55.** $2n$ arestas, $(n + 1)$ faces e $(n + 1)$ vértices.

56. Registre quais das planificações a seguir são de superfícies de pirâmides. **56.** I e II.

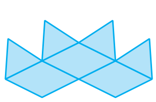
(I)



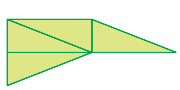
(II)



(III)



(IV)



57. O apótema de uma pirâmide regular mede 12 cm de comprimento e a aresta lateral mede 13 cm de comprimento. Determine a medida de comprimento da aresta da base. **57.** 10 cm

58. A altura de uma pirâmide hexagonal regular mede 4 dm, e o comprimento das arestas da base mede 6 dm. Determine a medida de comprimento do apótema da pirâmide. **58.** $\sqrt{43}$ dm

59. Qual é a medida de comprimento da aresta lateral de uma pirâmide regular de base pentagonal se o apótema da pirâmide mede 12 m de comprimento e a aresta da base mede 10 m de comprimento? **59.** 13 m

60. Calcule a medida de comprimento do raio da base, a medida da altura e a medida de comprimento do apótema de uma pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base mede 8 cm de comprimento e a aresta lateral mede $\sqrt{41}$ cm de comprimento. **60.** Respectivamente, $4\sqrt{2}$ cm, 3 cm e 5 cm.

61. Demonstre a relação entre as medidas de comprimento da aresta da base e do apótema da pirâmide regular com base determinada por: **61.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. um triângulo equilátero.

b. um quadrado.

c. um hexágono regular.

Medida da área da superfície de uma pirâmide

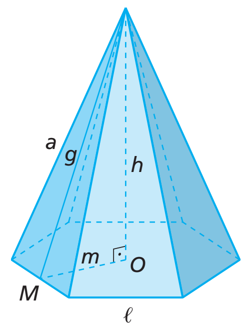
Dada uma pirâmide qualquer, definimos algumas medidas de área a seguir.

- **Medida da área da base** (A_{base}) – medida da área da superfície poligonal que constitui a base.
- **Medida da área lateral** ($A_{lateral}$) – soma das medidas das áreas das faces laterais (superfícies triangulares).
- **Medida da área total** (A_{total}) – soma da medida da área lateral com a medida da área da base.

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

Atividade resolvida

R17. Determinar a medida da área total da superfície de uma pirâmide regular hexagonal sabendo que o comprimento da aresta da base mede ℓ e que o comprimento do apótema da pirâmide mede g.



▶ **Resolução**

A base da pirâmide é uma superfície hexagonal regular cujo comprimento dos lados mede ℓ. Portanto, a medida da área da base é dada por:

$$A_{\text{base}} = 6 \cdot \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{base}} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

Como a pirâmide é regular, as faces laterais são determinadas por triângulos isósceles e congruentes, que, nesse caso, têm base de medida de comprimento ℓ e altura de medida de comprimento g.

Assim, a medida da área lateral é dada por:

$$A_{\text{lateral}} = 6 \cdot A_{\text{triângulo isósceles}}$$

$$A_{\text{lateral}} = 6 \cdot \left(\frac{\ell g}{2}\right)$$

$$A_{\text{lateral}} = 3\ell g$$

Logo, a medida da área total é dada por:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}}$$

$$A_{\text{total}} = 3\ell g + \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{\text{total}} = 3\ell \cdot \left(g + \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)$$

62. $108\left(40 + 3\sqrt{3}\right)$ mm²

Atividades propostas

Registre em seu caderno

62. Calcule a medida da área total da superfície de uma pirâmide triangular regular cujo comprimento da aresta lateral mede 82 mm e a aresta da base mede 36 mm de comprimento.

63. Calcule a medida da área da base, a medida da área lateral e a medida da área total da superfície de uma pirâmide quadrangular regular que tem 3 cm de medida de altura e a aresta da base mede 8 cm de comprimento.
63. Respectivamente, 64 cm², 80 cm² e 144 cm².

64. Sabendo que a medida da área total da superfície de um tetraedro regular é $16\sqrt{3}$ cm², calcule a medida de comprimento da aresta desse tetraedro. **64.** 4 cm

65. A base de uma pirâmide quadrangular regular está inscrita em uma circunferência de $6\sqrt{2}$ cm de medida de comprimento de raio. Sabendo que a pirâmide tem 8 cm de medida de altura, calcule a medida da área total da sua superfície.
65. 384 cm²

Medida do volume de uma pirâmide

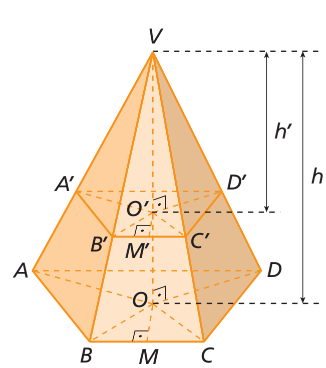
Antes de estudar a medida do volume de uma pirâmide qualquer, vamos conhecer duas propriedades das pirâmides e demonstrá-las.

Propriedade 1: A razão entre a medida da área S' de uma secção transversal de uma pirâmide, feita a uma medida da altura h' em relação ao vértice, e a medida da área S da base dessa pirâmide de medida da altura h é $\frac{S'}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$.

Demonstração

Vamos considerar uma pirâmide de medida da altura VO (igual a h) cuja base tem medida da área S. Seja uma secção transversal dessa pirâmide, de medida da área S', a uma medida de distância VO' do vértice (igual a h').

Vamos decompor a base da pirâmide e a secção transversal nos triângulos OAB, OBC etc. e $O'A'B'$, $O'B'C'$ etc., respectivamente.



$$\overline{O'C'} // \overline{OC} \Rightarrow \triangle VO'C' \sim \triangle VOC \Rightarrow \frac{VC'}{VC} = \frac{VO'}{VO} \Rightarrow \frac{VC'}{VC} = \frac{h'}{h}$$

$$\overline{B'C'} // \overline{BC} \Rightarrow \triangle VB'C' \sim \triangle VBC \Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = \frac{VC'}{VC} = \frac{h'}{h}$$

Com o mesmo raciocínio, chegamos a: $\dfrac{O'M'}{OM} = \dfrac{h'}{h}$

Medida da área do $\triangle OBC$: $S_{OBC} = \dfrac{(BC) \cdot (OM)}{2}$

Medida da área do $\triangle O'B'C'$: $S_{O'B'C'} = \dfrac{(B'C') \cdot (O'M')}{2}$

$$\frac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}} = \frac{\dfrac{(B'C') \cdot (O'M')}{2}}{\dfrac{(BC) \cdot (OM)}{2}} = \frac{B'C'}{BC} \cdot \frac{O'M'}{OM} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h}$$

$$\frac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Analogamente, mostra-se que: $\dfrac{S_{O'C'D'}}{S_{OCD}} = \dfrac{S_{O'D'A'}}{S_{ODA}} = \dfrac{S_{O'A'B'}}{S_{OAB}} = \left(\dfrac{h'}{h}\right)^2$

Temos: $S = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}$ e $S' = S_{O'A'B'} + S_{O'B'C'} + S_{O'C'D'} + S_{O'D'A'}$

Assim: $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{S_{O'A'B'} + S_{O'B'C'} + S_{O'C'D'} + S_{O'D'A'}}{S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}} = \dfrac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}}$

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Observação

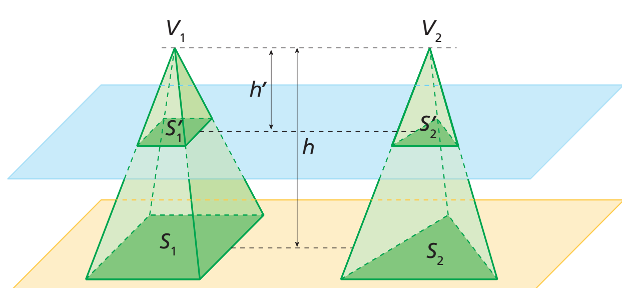
Em uma proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como qualquer antecedente está para seu consequente, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Propriedade 2: Se duas pirâmides têm mesma medida da altura e mesma medida da área de base, então elas têm a mesma medida do volume.

Demonstração

Vamos considerar as pirâmides de vértices V_1 e V_2.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Indicaremos por:

- S_1 e S_2 as medidas das áreas das bases dessas pirâmides, tais que $S_1 = S_2$;
- S'_1 e S'_2 as medidas das áreas das secções transversais;
- h a medida da altura das duas pirâmides e h' a medida da distância das secções transversais aos vértices V_1 e V_2.

Pela propriedade 1, obtemos:

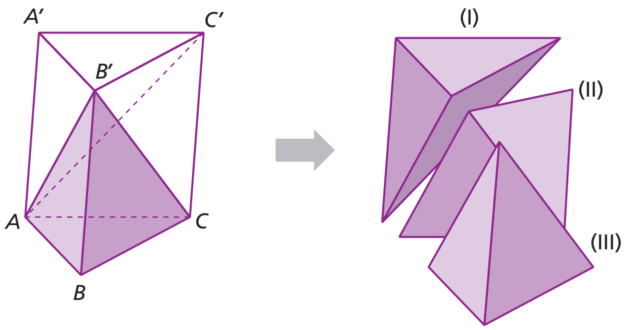
$$\frac{S'_1}{S_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ e } \frac{S'_2}{S_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

$$S'_1 = S_1 \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ e } S'_2 = S_2 \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Como $S_1 = S_2$, temos $S'_1 = S'_2$ e, portanto, pelo princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm mesma medida do volume.

Medida do volume de uma pirâmide de base triangular

Considere um prisma triangular de medida do volume V_{prisma}. Vamos decompô-lo em três pirâmides triangulares.



A pirâmide I tem por base a superfície limitada pelo triângulo $AA'C'$ e por altura a distância de B' ao plano que contém a face $AA'C'C$ do prisma.

A pirâmide II tem por base a superfície limitada pelo triângulo $AC'C$ e por altura a distância de B' ao plano que contém a face $AA'C'C$ do prisma.

$AA'C'C$ é um paralelogramo; logo, os triângulos $AA'C'$ e $AC'C$ têm mesma medida da área. Assim, as pirâmides I e II têm bases de mesma medida da área; como têm também mesma medida da altura, concluímos que elas têm medidas dos volumes iguais.

Entretanto, a pirâmide I é também aquela que tem por base a superfície limitada pelo triângulo $A'B'C'$ e por altura a distância de A ao plano que contém a base $A'B'C'$ do prisma (altura do prisma).

A pirâmide III tem por base a superfície limitada pelo triângulo ABC e por altura a distância de B' ao plano que contém a base ABC do prisma (altura do prisma).

Os triângulos $A'B'C'$ e ABC têm mesma medida da área (determinam as bases do prisma). Assim, as pirâmides I e III têm bases de mesma medida da área (A_{base}); como também têm mesma medida da altura (medida da altura h do prisma), concluímos que elas têm medidas dos volumes iguais.

Se V_1, V_2 e V_3 são, respectivamente, as medidas dos volumes dessas três pirâmides triangulares, temos: $V_1 = V_2 = V_3 = \frac{V_{prisma}}{3}$

Como $V_{prisma} = A_{base} \cdot h$, vem:

$$\boxed{V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{A_{base} \cdot h}{3}}$$

Medida do volume de uma pirâmide qualquer

Para uma pirâmide qualquer, podemos dividir a superfície poligonal de sua base em superfícies triangulares por meio de diagonais. Assim, a pirâmide fica dividida em pirâmides triangulares de medida da altura h.

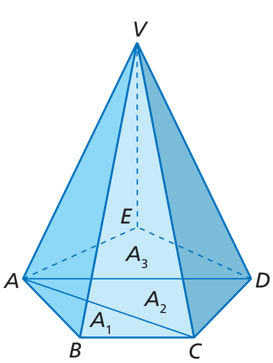
Se a base foi dividida em n superfícies triangulares cujas medidas das áreas são A_1, A_2, ..., A_n, então a medida da área da base é dada por: $A_{base} = A_1 + A_2 + ... + A_n$

Como a medida do volume da pirâmide é a soma das medidas dos volumes das pirâmides triangulares, temos:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h + ... + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot h$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{(A_1 + A_2 + ... + A_n)}_{A_{base}} \cdot h$$

$$\boxed{V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h}$$

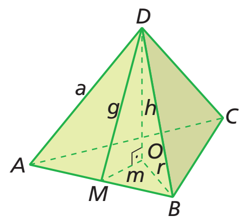


Pirâmide pentagonal dividida em três pirâmides triangulares: *VABC*, *VACD* e *VADE*.

Atividades resolvidas

R18. Calcular a medida do volume do tetraedro regular de aresta de medida de comprimento a.

▶ **Resolução**



A medida da área da base é a medida da área de uma superfície triangular equilátera de lado de medida de comprimento a. Logo:

$$A_{base} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

A medida da altura h é tal que: $h^2 = g^2 - m^2$

Pelo $\triangle ADM$: $g^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow g^2 = \frac{3a^2}{4}$

Como o $\triangle ABC$ é equilátero, temos:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow m^2 = \frac{3a^2}{36} \Rightarrow m^2 = \frac{a^2}{12}$$

Assim: $h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

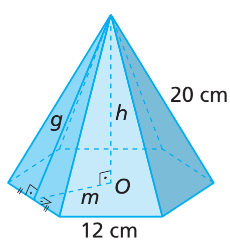
Portanto:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$V_{tetraedro} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

R19. Determinar a medida do volume de uma pirâmide regular hexagonal de 12 cm de medida de comprimento da aresta da base e 20 cm de medida de comprimento da aresta lateral.



▶ **Resolução**

Inicialmente, vamos calcular a medida de comprimento g do apótema da pirâmide.

$$a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow 20^2 = g^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400 = g^2 + 36 \Rightarrow g = \sqrt{364} \Rightarrow g = 2\sqrt{91}$$

Agora, vamos determinar a medida de comprimento m do apótema da base. Como a base é determinada por um hexágono regular, temos:

$$m = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 6\sqrt{3}$$

Cálculo da medida da altura h da pirâmide:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow (2\sqrt{91})^2 = h^2 + (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = 256 \Rightarrow h = 16$$

Cálculo da medida da área da base:

$$A_{base} = 6 \cdot \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{base} = 6 \cdot 36\sqrt{3} = 216\sqrt{3}$$

Cálculo da medida do volume da pirâmide:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 216\sqrt{3} \cdot 16$$

$$V_{pirâmide} = 1.152\sqrt{3}$$

Portanto, a medida do volume da pirâmide é $1.152\sqrt{3}$ cm^3.

66. 48 cm^3

Atividades propostas

Registre em seu caderno

66. Uma pirâmide regular de base quadrada tem medida da altura de 4 cm e medida de comprimento da aresta da base de 6 cm. Calcule a medida do volume dessa pirâmide.

67. Determine a medida do volume de um tetraedro regular cuja aresta mede 2 cm de comprimento. **67.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm^3

68. Calcule a medida da área total da superfície e a medida do volume de um octaedro regular de aresta medindo 3 cm de comprimento. **68.** Respectivamente, $18\sqrt{3}$ cm^2; e $9\sqrt{2}$ cm^3.

69. Determine a medida do volume de uma pirâmide triangular regular de 8 cm de medida de altura e aresta da base medindo 6 cm de comprimento. **69.** $24\sqrt{3}$ cm^3

70. Uma pirâmide regular hexagonal tem medida de comprimento da aresta lateral de $4\sqrt{2}$ dm. Se o perímetro da base mede 24 dm, qual é a medida do volume dessa pirâmide? **70.** $32\sqrt{3}$ dm^3

71. Em uma pirâmide regular, a base é uma superfície quadrada de lado de medida de comprimento $6\sqrt{2}$ cm e as arestas laterais medem 10 cm de comprimento. Determine a medida do volume dessa pirâmide. **71.** 192 cm^3

72. 24 cm^3

72. O comprimento da aresta lateral de uma pirâmide regular quadrangular mede 5 cm e o perímetro da base mede $12\sqrt{2}$ cm. Determine a medida do volume dessa pirâmide.

73. O comprimento do apótema de uma pirâmide regular quadrangular mede 9 cm. Sabendo que a aresta da base mede 4 cm de comprimento, calcule a medida:

a. da área da base; **73 a.** 16 cm^2

b. da área lateral; **73 b.** 72 cm^2

c. da área total da superfície; **73 c.** 88 cm^2

d. da altura; **73 d.** $\sqrt{77}$ cm

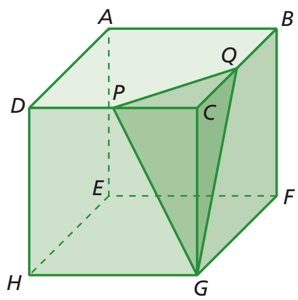
e. do volume. **73 e.** $16\frac{\sqrt{77}}{3}$ cm^3

74. A base de um prisma é uma superfície quadrada de lado de medida de comprimento 2 m, e a base de uma pirâmide é uma superfície quadrada de lado de medida 1 m de comprimento. Se o prisma e a pirâmide têm mesma medida do volume, qual é a razão entre as medidas de suas alturas?

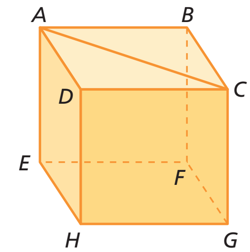
74. 1 para 12.

75. Um prisma e uma pirâmide têm bases com mesma medida da área, e a medida do volume do prisma é o sêxtuplo da medida do volume da pirâmide. Qual é a relação entre as medidas de suas alturas? **75.** A medida da altura do prisma é o dobro da medida da altura da pirâmide.

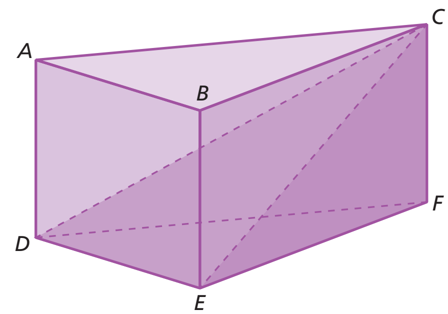
76. Sabendo que P e Q são os pontos médios das arestas $\overline{DC}$ e $\overline{CB}$, respectivamente, de medida 10 cm de comprimento, do cubo $ABCDEFGH$, determine a medida do volume da pirâmide $PQCG$ da figura a seguir. **76.** $\frac{125}{3}$ cm^3



77. No paralelepípedo reto-retângulo representado a seguir, tem-se $AC = \sqrt{13}$ cm, $AD = 2$ cm e $CG = 3$ cm. Determine a medida do volume da pirâmide $ACDG$. **77.** 3 cm^3



78. A figura a seguir representa um prisma de base triangular decomposto em duas pirâmides. Determine a razão entre as medidas dos volumes de $ABCDE$ e de $DEFC$. **78.** 2 para 1.



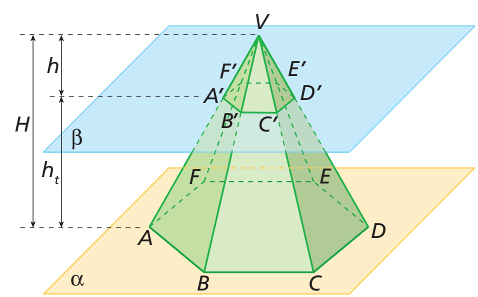
Tronco de pirâmide de bases paralelas

Existem construções que, embora popularmente sejam chamadas de pirâmides, têm na verdade o formato de **troncos de pirâmides**, pois falta-lhes a parte superior para ter formato de pirâmide. A foto a seguir é de um monumento que tem o formato parecido com o de um tronco de pirâmide.

Considere uma pirâmide de vértice V, medida da altura H e base contida em um plano α.

Pirâmide de Kukulcán (987 d.C.) na cidade maia de Chichén Itzá, México. Foto de 2023.

RICHARD MASCHMEYER/DESIGN PICS EDITORIAL/ UNIVERSAL IMAGES GROUP/GETTY IMAGES



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

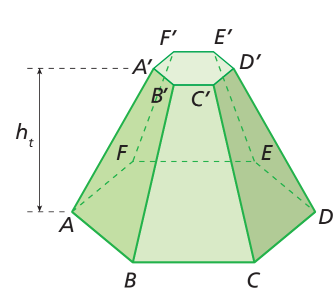
Seccionando-a com um plano β, paralelo a α, separamos essa figura em dois sólidos:

- o que contém o vértice V, que é uma nova pirâmide de medida da altura h e base contida no plano β;
- o que contém a base da pirâmide maior, que é um **tronco de pirâmide de bases paralelas**.

Elementos de um tronco de pirâmide

Em um tronco de pirâmide, como o representado na figura, temos os elementos a seguir.

- **Base maior** – a superfície poligonal $ABCDEF$.
- **Base menor** – a superfície poligonal $A'B'C'D'E'F'$.
- **Faces laterais** – as superfícies trapezoidais $AA'B'B$, $BB'C'C$ etc.
- **Altura do tronco** – a distância entre as bases. Indicaremos a medida da altura do tronco por $h_t (h_t = H - h)$.

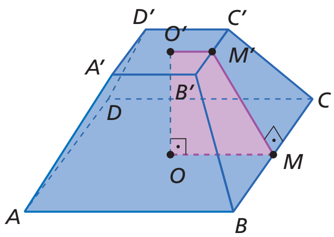


Observação

Para calcular a medida do volume de um tronco de pirâmide, basta subtrair, da medida do volume da pirâmide original, a medida do volume da pirâmide de mesmo vértice, medida da altura h e base congruente à base menor do tronco.

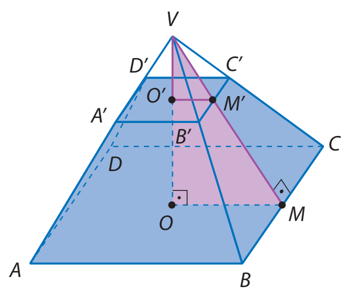
Atividade resolvida

R20. Um tronco de pirâmide regular tem a aresta lateral medindo $\sqrt{34}$ dm de comprimento e bases quadradas cujos lados medem 4 dm e 10 dm de comprimento. Calcular a medida do volume do tronco.

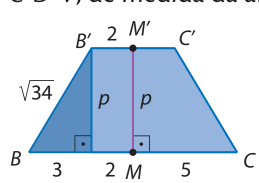


▸ **Resolução**

Inicialmente, vamos imaginar a pirâmide *ABCDV* que deu origem a esse tronco de pirâmide pela secção com o plano que contém a base menor do tronco.



Para calcular a medida do volume do tronco, é necessário obter a medida do volume da pirâmide *ABCDV*, de medida da altura *H*, e a medida do volume da pirâmide *A'B'C'D'V*, de medida da altura *h*.



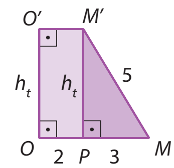
Vamos calcular a medida de comprimento do segmento $\overline{M'M}$, altura da face lateral do tronco.

Pela figura, temos:

$p^2 + 3^2 = (\sqrt{34})^2$

$p = 5$

Agora, vamos calcular a medida da altura h_t do tronco; para isso, consideremos o trapézio *OO'M'M*.

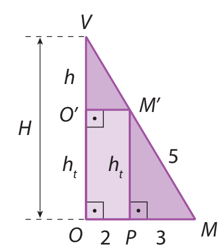


Pela figura, temos:

$h_t^2 + 3^2 = 5^2$

$h_t = 4$

Observando o triângulo *VMO*, podemos destacar os triângulos *M'MP* e *VM'O'*. Note que esses triângulos são semelhantes; logo:



$\dfrac{h}{h_t} = \dfrac{O'M'}{PM}$

$\dfrac{h}{4} = \dfrac{2}{3}$

$h = \dfrac{8}{3}$

Assim:

$H = 4 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{20}{3}$

Então, a medida do volume do tronco de pirâmide é dada por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \dfrac{20}{3} - \dfrac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot \dfrac{8}{3} = 208$

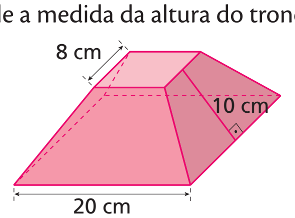
Portanto, a medida do volume do tronco de pirâmide é 208 dm^3.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

79. PENSAMENTO COMPUTACIONAL Escreva um algoritmo, em linguagem materna e em um fluxograma, para calcular a medida do volume do tronco de uma pirâmide regular, conforme a resolução da **atividade resolvida R20**.
79. Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

80. Considerando o tronco de pirâmide regular representado a seguir, calcule a medida da altura do tronco. **80.** 8 cm



81. Um tronco de pirâmide regular tem bases quadradas com arestas de medidas de comprimento 6 cm e 16 cm. Sabendo que o comprimento da altura de uma face lateral do tronco mede 13 cm, calcule a medida da altura do tronco e sua medida do volume. **81.** Respectivamente, 12 cm e 1.552 cm^3.

82. Um tronco de pirâmide regular tem bases hexagonais com arestas de medidas de comprimento 4 m e 6 m. Sabendo que a medida do volume é $342\sqrt{3}$ m^3, calcule a medida da altura do tronco. **82.** 9 m

83. $78\sqrt{3}$ m^3

83. Determine a medida do volume de um tronco de pirâmide regular hexagonal de aresta lateral com 5 m de medida de comprimento e áreas das bases medindo $54\sqrt{3}$ m^2 e $6\sqrt{3}$ m^2.

84. Uma pirâmide tem 12 cm de medida da altura e base com medida da área de 81 cm^2. Seccionando-se a pirâmide por um plano paralelo ao plano da base, exatamente à medida de distância de 8 cm da base, obtemos um tronco de pirâmide. Calcule a medida do volume desse tronco.
84. 312 cm^3

TRABALHO E JUVENTUDES

GORODENKOFF/ISTOCK/GETTY IMAGES

O engenheiro civil gerencia e supervisiona todas as fases de uma obra, garantindo que tudo seja executado conforme o planejado.

Engenheiro civil

OBJETO DIGITAL *Podcast*: Equipamentos de Proteção Individual (EPIs)

A Engenharia Civil é o ramo da Engenharia voltado para o planejamento e a execução de projetos de infraestrutura, bem como para a manutenção de obras já existentes.

O engenheiro civil é o profissional que projeta, executa e gerencia diferentes obras, realizando cálculos, desenhos, medições, análises de materiais, entre outras atividades. Trabalha em parceria com diversos profissionais, como arquitetos, empreiteiros, pedreiros, eletricistas, encanadores e muitos outros.

Para ser engenheiro civil, é preciso fazer um curso superior em Engenharia Civil, em instituição reconhecida pelo Ministério da Educação (MEC), graduação que garante o título de bacharel. Além da formação acadêmica, o profissional precisa ter registro no Conselho Regional de Engenharia e Agronomia (Crea) para poder trabalhar como engenheiro.

2. Exemplo de resposta: Proteger os trabalhadores contra riscos à saúde e à integridade física.

Atividades

Registre em seu caderno

1. Em sua opinião, que competências um engenheiro civil coloca em prática no dia a dia? **1.** Exemplo de resposta: Capacidade de resolver problemas, boa comunicação, liderança, proatividade etc.

2. Capacete, óculos de segurança, luvas e protetor auditivo estão entre os principais Equipamentos de Proteção Individual (EPIs) usados na construção civil. Qual é a importância desses equipamentos para trabalhadores da construção civil?

3. Um engenheiro civil está projetando uma coluna de concreto que vai sustentar uma ponte. A coluna apresenta o formato de um prisma hexagonal cujas arestas da base medem 1,5 m de comprimento e cuja medida de altura é igual a 9 m.

a. Qual é a medida da área lateral da estrutura da coluna? **3 a.** $81\ m^2$

b. Calcule a medida do volume de concreto necessário para preencher totalmente a coluna. **3 b.** $30{,}375\sqrt{3}\ m^3$

FOTOS: DASHADIMA/ISTOCK/GETTY IMAGES

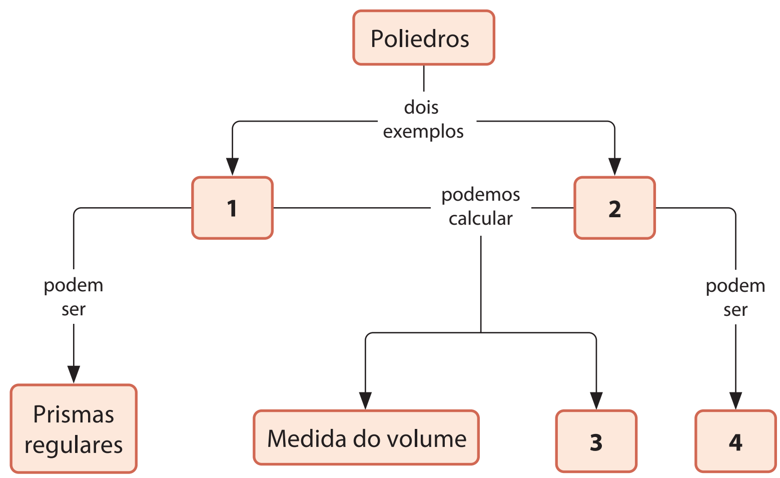
O *podcast* enriquece o contexto da **atividade 2** da seção, abordando a importância do uso de Equipamentos de Proteção Individual (EPIs) em diversas profissões. Ele destaca como esses equipamentos são essenciais para prevenir e reduzir acidentes de trabalho, seguindo as regulamentações do Ministério do Trabalho e Emprego.

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 3

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

Conexões entre conceitos. A – 3; B – 2; C – 4; D – 1.

A. Medida da área da superfície

B. Pirâmides

C. Pirâmides regulares

D. Prismas

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro

REPRODUÇÃO/EDITORA RECORD

O universo e a xícara de chá: a Matemática da verdade e da beleza

K. C. Cole

Rio de Janeiro: Record, 2006.

Nesse livro, a autora, jornalista especializada em Ciências, percorre uma vasta gama de áreas do conhecimento e de situações (científicas ou cotidianas) para mostrar como a ideia geral de que a Matemática é incompreensível à maioria dos mortais pode ser desmistificada quando nos propomos examinar criticamente o significado dos números com que convivemos no dia a dia. Com uma linguagem objetiva e simples e uma abordagem perspicaz e bem-humorada, ela consegue esclarecer fatos numéricos aparentemente obscuros ou muito complexos.

Museu

Museu da Matemática da UFMG

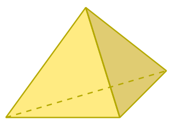
O Museu da Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) oferece aos visitantes a oportunidade de interagir com sólidos geométricos, jogos, mágicas, enigmas aritméticos, quebra-cabeças geométricos, dobradura de papel, desafios, exposição de Arte e diversas oficinas.

Mais informações podem ser obtidas em: http://www.mat.ufmg.br/museu/. Acesso em: 11 out. 2024.

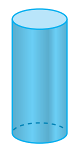
AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Indique qual (is) das figuras a seguir representa(m) um poliedro. **Q1.** Alternativas **a** e **d**.

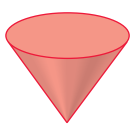
a.



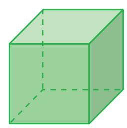
c.



b.



d.



Q2. Alternativa **b**.

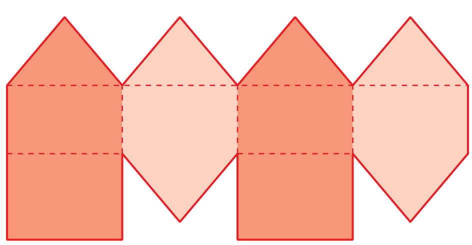
Q2. O número de vértices de um poliedro convexo formado por 80 faces triangulares e 12 faces pentagonais é:

a. 80 **b.** 60 **c.** 50 **d.** 48

Q3. Um poliedro com 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares que não satisfaz a relação de Euler tem o número de vértices diferente de: **Q3.** Alternativa **d**.

a. 15 **b.** 13 **c.** 11 **d.** 9

Q4. Marilu quer construir uma caixa com o formato de um poliedro convexo usando um molde como o da figura a seguir.



O número de vértices dessa caixa é: **Q4.** Alternativa **d**.

a. 15 **c.** 9

b. 13 **d.** 11

Q5. Alternativa **c**.

Q5. As arestas de um paralelepípedo retângulo medem 3 cm, 4 cm e 5 cm de comprimento. As medidas do comprimento da sua diagonal e de seu volume são, respectivamente:

a. $5\sqrt{5}$cm e 60 cm^3. **c.** $5\sqrt{2}$cm e 60 cm^3.

b. $5\sqrt{2}$cm e 47 cm^3. **d.** $\sqrt{2}$cm e 47 cm^3.

Q6. Um prisma oblíquo de base quadrada tem todas as arestas medindo 10 cm de comprimento. As arestas laterais formam um ângulo com medida de abertura de 60° com o plano da base. A medida do volume do prisma é, em centímetro cúbico, igual a: **Q6.** Alternativa **c**.

a. $150\sqrt{3}$ **c.** $500\sqrt{3}$

b. $240\sqrt{3}$ **d.** 900

Q7. Uma caixa de isopor, com formato de um paralelepípedo reto-retângulo, tem paredes e tampa medindo 5 cm de espessura e medidas das dimensões externas iguais a 0,85 m, 1,10 m e 0,80 m. Lembrando que 1 L equivale a 1 dm^3, a medida da capacidade, em litro, dessa caixa é de: **Q7.** Alternativa **c**.

a. 748 **c.** 525

b. 330,75 **d.** 1.206

Q8. As medidas da área total da superfície e do volume de um prisma triangular regular de aresta da base medindo 2 cm de comprimento e de altura medindo $\sqrt{3}$ cm são, respectivamente:

a. $7\sqrt{3}$ cm^2 e $\sqrt{3}$ cm^3. **c.** $8\sqrt{3}$ cm^2 e 1 cm^3.

b. $4\sqrt{3}$ cm^2 e 3 cm^3. **d.** $8\sqrt{3}$ cm^2 e 3 cm^3.

Q8. Alternativa **d**.

Q9. Para fazer uma vela com o formato de uma pirâmide regular quadrangular em que as laterais são determinadas por triângulos equiláteros cujo comprimento dos lados mede 4 cm, Fábio usa ____ cm^3 de parafina. **Q9.** Alternativa **b**.

a. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ **b.** $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ **c.** $16\sqrt{2}$ **d.** $9\sqrt{2}$

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9
Identificar poliedros (incluindo prismas, pirâmides, troncos de pirâmides) e seus elementos.	X	X	X	X					
Reconhecer propriedades dos poliedros e aplicar relações entre seus elementos.		X	X	X	X	X	X	X	X
Calcular medidas de áreas, de volumes e de comprimento de elementos de poliedros.					X	X	X	X	X
Resolver situações-problema que envolvam poliedros (do ponto de vista métrico e geométrico).				X			X		X

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Capítulo 4

CORPOS REDONDOS

GUALTIERO BOFFI/SHUTTERSTOCK

No boliche, o jogador lança uma bola deslizando sobre a pista para derrubar os pinos dispostos em um formato triangular.

O boliche é um esporte muito simples e democrático. Ainda que a bola de boliche seja pesada (com medida de massa mínima de aproximadamente 2 kg), o jogo pode ser praticado por pessoas de todas as idades e tipos físicos. Por isso, o boliche é um dos esportes mais praticados no mundo.

No boliche, o objetivo é derrubar a maior quantidade de pinos ao lançar a bola. Cada jogador pode realizar dois arremessos por jogada e dez jogadas por partida. Cada pino derrubado vale 1 ponto. Há bônus para quem derruba todos os dez pinos, o que pode acontecer de dois modos: no primeiro arremesso (a jogada é chamada *strike*) ou usando os dois arremessos de uma mesma jogada, que recebe o nome de *spare*.

Observe o formato arredondado da bola e dos pinos de boliche. Agora, vamos estudar alguns sólidos geométricos que também têm formato arredondado.

Corpos redondos

No capítulo anterior, verificamos que diversos objetos que nos cercam têm o formato parecido com o de **sólidos geométricos**. Além disso, classificamos esses sólidos em dois grandes grupos, os **poliedros** e os **corpos redondos** e demos destaque aos poliedros.

Corpos redondos são os sólidos geométricos que têm pelo menos uma parte de sua superfície arredondada, ou seja, não plana.

Neste capítulo, estudaremos as propriedades geométricas e métricas dos corpos redondos: cilindro, cone, esfera e os que são obtidos a partir deles.

Cilindro

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 9

Algumas construções e artefatos, como fibras ópticas, seringas de injeção e diversos tipos de tubos, têm formato cilíndrico. Cilindros hidráulicos, por exemplo, são componentes responsáveis pela geração de força mecânica em máquinas e equipamentos de distintos ramos da indústria: metalúrgico, automobilístico, siderúrgico, plástico, celulose etc. Para projetar peças como essas, é preciso realizar o cálculo exato de suas medidas lineares, de área e de volume.

EMMANUELE CONTINI/NURPHOTO/GETTY IMAGES

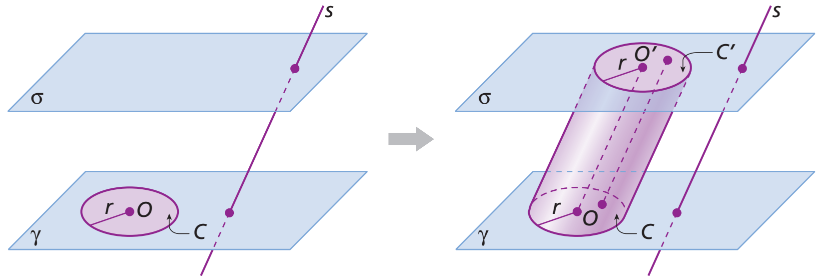
Prédio com formato cilíndrico no centro histórico de Recife (PE). Foto de 2024.

ASHARKYU/SHUTTERSTOCK

Fibra óptica é um filamento flexível e transparente fabricado a partir de vidro ou de plástico moldado cujo comprimento do diâmetro mede alguns micrometros. É um excelente condutor de luz, de imagens ou de impulsos codificados.

No capítulo anterior, definimos prisma indicando um procedimento de construção. Neste capítulo, vamos apresentar o cilindro por meio de uma definição análoga à do prisma.

Consideremos dois planos paralelos distintos, γ e σ, um círculo C cujo comprimento do raio mede r contido em γ e uma reta s secante aos planos γ e σ.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

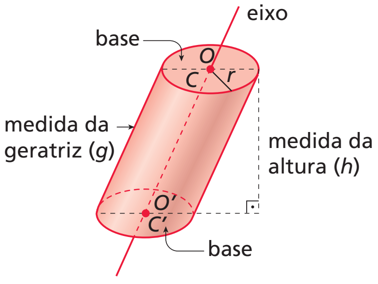
Chama-se **cilindro circular**, ou apenas **cilindro**, a figura geométrica formada por todos os segmentos de reta paralelos à reta s, com uma extremidade no círculo C e a outra no plano σ.

Observe que as extremidades que pertencem ao plano σ formam um círculo C', congruente a C.

Elementos de um cilindro

Considerando o cilindro representado, podemos destacar os elementos a seguir.

- **Bases** – os círculos C e C', de raio com medida de comprimento r e centros O e O', respectivamente.
- **Eixo** – a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.
- **Geratrizes** – os segmentos de reta paralelos ao eixo do cilindro cujas extremidades são os pontos correspondentes das circunferências das bases do cilindro.
- **Altura do cilindro** – a distância h entre os planos que contêm as bases.



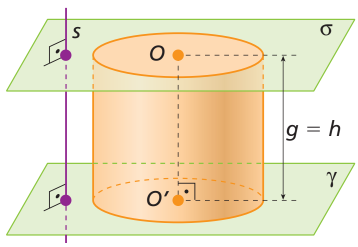
Observação

Indicaremos a medida do comprimento da geratriz por g e a medida da altura do cilindro por h.

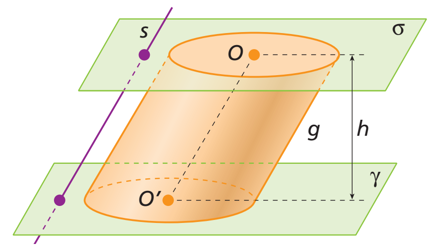
Classificação dos cilindros

Podemos classificar um cilindro de acordo com a inclinação da reta s em relação aos planos γ e σ que contêm as bases.

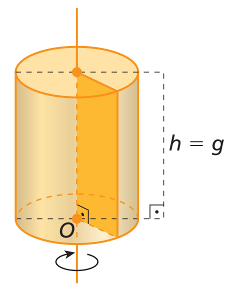
Se a reta s é perpendicular aos planos γ e σ, então o cilindro é **reto**. Nesse caso, tanto o eixo $\overleftrightarrow{OO'}$ quanto as geratrizes do cilindro são perpendiculares aos planos das bases. Dessa maneira, à medida do comprimento da geratriz é igual à medida da altura do cilindro ($g = h$).



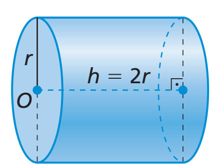
Se a reta s não é perpendicular aos planos γ e σ, então o cilindro é **oblíquo**. Nesse caso, nem o eixo $\overleftrightarrow{OO'}$ nem as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases. Assim, a medida do comprimento da geratriz é maior que a medida da altura do cilindro ($g > h$).



Um cilindro circular reto também é denominado **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido pela rotação de uma superfície retangular em torno da reta que contém um dos lados dessa superfície. A medida de comprimento desse lado é igual à medida da altura h do cilindro, e a medida de comprimento do lado perpendicular a esse é igual à medida do comprimento do raio r da base do cilindro.



Se um cilindro reto tem medida de altura igual ao dobro da medida de comprimento do raio da base ($h = 2r$), ele é chamado de **cilindro equilátero**.



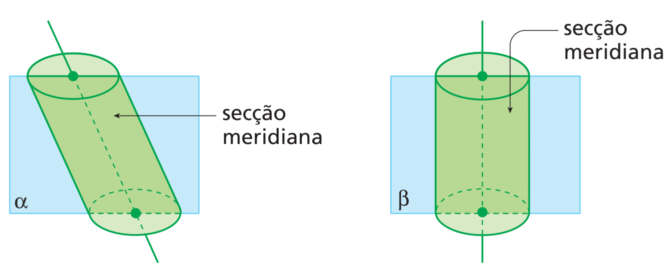
Em um cilindro equilátero, qual é a razão entre as medidas de comprimento da geratriz e do raio?

Questão 1. Como $g = h$ em um cilindro reto e $h = 2r$ em um cilindro equilátero, temos $\frac{g}{r} = 2$.

Secções de um cilindro

Secção meridiana de um cilindro

Uma **secção meridiana** de um cilindro é determinada pela intersecção do cilindro com um plano que contém seu eixo.



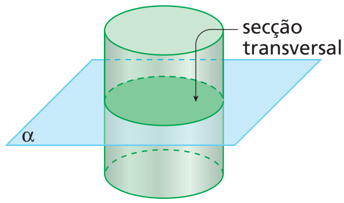
Que quadrilátero limita a secção meridiana de um cilindro qualquer?

Questão 2. Um paralelogramo. Em particular, se o cilindro for reto, o quadrilátero será um retângulo. Se o cilindro for equilátero, o quadrilátero será um quadrado.

Secção transversal de um cilindro

Uma **secção transversal** de um cilindro é determinada pela intersecção do cilindro com um plano paralelo ao plano da base.

Propriedade: As secções transversais de um cilindro são círculos congruentes à base.

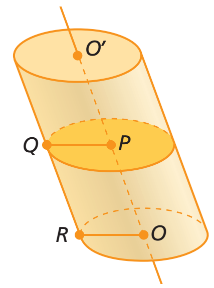


Demonstração

Considere uma secção transversal qualquer de um cilindro.

Como o eixo do cilindro é paralelo a qualquer geratriz, concluímos que $\overline{PO}$ é paralelo a $\overline{QR}$. A secção transversal é paralela ao plano da base; então, o plano ($PQRO$) corta essa secção e a base, determinando as retas paralelas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{OR}$. Logo, o segmento de reta $\overline{PQ}$ é paralelo ao segmento de reta $\overline{OR}$.

Como o quadrilátero $PQRO$ é um paralelogramo, seus lados opostos têm medidas de comprimento iguais. Então, temos $PQ = OR$. Então, a secção transversal e a base são círculos com raios de mesma medida de comprimento e, portanto, são congruentes.

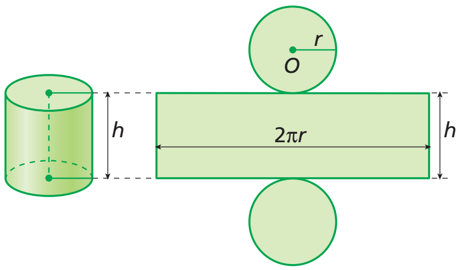


Imagine um cilindro cortado por um plano α não paralelo às suas bases e sem um ponto comum com elas. A intersecção do plano α com o cilindro seria um círculo? **Questão.** Não.

Medida da área da superfície de um cilindro reto

Imagine que a superfície de um modelo de cilindro reto seja revestida de papel. Recortando o papel nas circunferências das bases e ao longo de uma geratriz, obtemos um molde do modelo de cilindro.

A **planificação da superfície de um cilindro reto** é composta de dois círculos e de uma superfície retangular, em que a medida de comprimento de um dos lados é igual à medida do comprimento da circunferência que determina a base ($2\pi r$), e a medida de comprimento do outro lado é igual à medida da altura do cilindro (h).



Dado um cilindro reto de medida da altura h e medida de comprimento r do raio da base, definimos:

- **Medida da área da base** (A_{base}) é a medida da área de um círculo de centro O cujo comprimento do raio mede r.

$$A_{base} = \pi r^2$$

- **Medida da área lateral** ($A_{lateral}$) é a medida da área da superfície retangular cujos lados têm medidas de comprimento $2\pi r$ e h.

$$A_{lateral} = 2\pi rh$$

- **Medida da área total** (A_{total}) da superfície do cilindro é a soma das medidas das áreas das bases com a medida da área lateral.

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow$ $\boxed{A_{total} = 2\pi r(r + h)}$

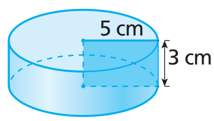
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades resolvidas

R1. Dada uma superfície retangular com medidas das dimensões 3 cm e 5 cm, comparar a medida da área lateral e a medida da área total da superfície dos cilindros de revolução obtidos desse retângulo.

▶ Resolução

Fazendo a rotação da superfície retangular em torno do lado cujo comprimento mede 3 cm, obtemos um cilindro reto cujo comprimento do raio mede 5 cm e a altura mede 3 cm. Então:

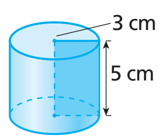


$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 3 = 30\pi$

$A_{total} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot (5 + 3) = 80\pi$

Logo, esse cilindro tem medida da área lateral igual a 30π cm^2 e medida da área total igual a 80π cm^2.

Agora, fazendo a rotação da superfície retangular em torno do lado cujo comprimento mede 5 cm, obtemos um cilindro reto cujo comprimento do raio mede 3 cm e a altura mede 5 cm. Então:



$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi$

$A_{total} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot (3 + 5) = 48\pi$

Logo, esse cilindro tem medida da área lateral igual a 30π cm^2 e medida da área total igual a 48π cm^2.

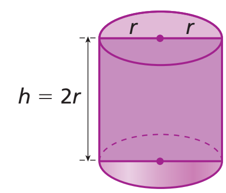
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, as medidas das áreas laterais dos cilindros obtidos são iguais. No entanto, quando fazemos a rotação da superfície retangular em torno do lado de menor medida de comprimento, a medida da área total da superfície do cilindro é maior.

R2. Calcular a razão entre a medida da área da base e a medida da área da secção meridiana de um cilindro equilátero.

▶ Resolução

Vamos considerar um cilindro equilátero cuja medida da altura é h e a base é um círculo cujo comprimento do raio mede r.



A medida da área da base é: $A_{base} = \pi \cdot r^2$

Como um cilindro equilátero tem medida da altura igual ao dobro da medida do comprimento do raio ($h = 2r$), a secção meridiana é uma superfície quadrada cujo comprimento do lado mede $2r$.

A medida da área da secção meridiana é:

$A_{secção\ meridiana} = 2r \cdot 2r = 4r^2$

Assim, temos: $\frac{\pi \cdot r^2}{4 \cdot r^2} = \frac{\pi}{4}$

Portanto, a razão entre a medida da área da base e a medida da área da secção meridiana é $\frac{\pi}{4}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Uma indústria farmacêutica quer produzir comprimidos efervescentes de vitamina C em formato cilíndrico com altura medindo 0,5 cm e comprimento do raio da base medindo 1 cm. Determine a medida da área total da superfície desse comprimido. **1.** 3π cm^2

FABIO YOSHIHITO MATSUURA

2. Qual é a razão entre a medida da área lateral e a medida da área da secção meridiana de um cilindro circular reto? **2.** π

3. O comprimento do raio da base de um cilindro de revolução mede 5 cm. A medida da altura desse cilindro é igual à medida do comprimento da circunferência que determina a base. Calcule a medida da área total da superfície do cilindro. **3.** $(100\pi^2 + 50\pi)$ cm^2

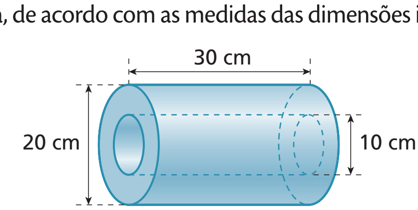
4. Sabendo que o comprimento do raio da base de um cilindro reto mede 2 cm e que a medida da área da secção meridiana é 20 cm^2, calcule a medida da área total da superfície do cilindro. **4.** 28π cm^2

5. Se a medida da altura de um cilindro reto é igual a $\frac{3}{2}$ da medida do comprimento do raio da base, calcule a medida da altura e a medida do comprimento do raio, sabendo que a área lateral do cilindro mede 108π cm^2.

5. Medida da altura: 9 cm; medida do comprimento do raio: 6 cm.

6. **EM DUPLA** **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** Elabore um problema que envolva a medida da área total da superfície de um cilindro equilátero. Em seguida, peça a um colega que resolva o problema elaborado por você. Feita a resolução, discutam os resultados obtidos. **6.** Resposta pessoal.

7. Um empresário recebeu um pedido para fabricar a peça representada a seguir, que tem o formato de um cilindro circular reto com um furo cilíndrico no sentido longitudinal. Para cobrar pelo serviço, o dono da indústria precisa calcular a quantidade de matéria-prima necessária para a fabricação de cada unidade. Calcule a medida da área total da superfície da peça, de acordo com as medidas das dimensões indicadas.

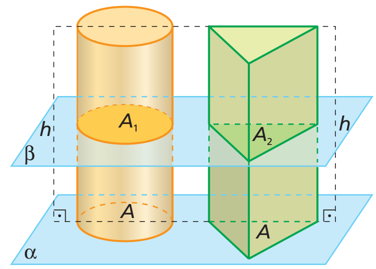


7. 1.050π cm^2

Medida do volume de um cilindro

Em um mesmo semiespaço, considere um cilindro e um prisma, de mesma medida da altura h e cujas bases estejam contidas no mesmo plano α, sendo a medida da área da base do cilindro e a medida da área da base do prisma iguais a A.

Observe que cada plano β, paralelo a α, secciona o cilindro e também o prisma, determinando as secções do cilindro e do prisma, ambas de mesma medida de área, já que $A_1 = A$ e $A_2 = A$.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, pelo princípio de Cavalieri, a medida do volume do cilindro é igual à medida do volume do prisma: $V_{\text{cilindro}} = V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$

Portanto, a medida do volume de um cilindro cuja medida do comprimento do raio é r e medida de altura h é dado por:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h$$

Atividade resolvida

R3. Considerar três cilindros retos: C, de altura medindo h e comprimento do raio da base medindo r; C', de altura medindo h e comprimento do raio da base medindo $2r$; e C'', de altura medindo $2h$ e comprimento do raio da base medindo r.

a. Comparar a medida do volume de C' com a de C.

b. Comparar a medida do volume de C'' com a de C.

c. Comparar a medida do volume de C' com a de C''.

▶ **Resolução**

Primeiro, calculamos a medida do volume de C: $V = \pi r^2 h$

a. Cálculo da medida do volume de C':

$V' = \pi \cdot (2r)^2 \cdot h = 4(\pi r^2 h)$, ou seja: $V' = 4V$

Portanto, a medida do volume de C' é o quádruplo da medida do volume de C.

b. Cálculo da medida do volume de C'':

$V'' = \pi \cdot r^2 \cdot (2h) = 2(\pi r^2 h)$, ou seja: $V'' = 2V$

Portanto, a medida do volume de C'' é o dobro da medida do volume de C.

c. Dos itens anteriores, temos:

$V' = 4\pi r^2 h = 2(2\pi r^2 h)$, ou seja: $V' = 2V''$

Portanto, a medida do volume de C' é o dobro da medida do volume de C''.

Observação

É amplamente aceita a percepção de que a Matemática está presente em diferentes contextos culturais. Fala-se na "matemática do pedreiro", na "matemática do marceneiro", na "matemática dos camponeses", e assim por diante. Decorre, portanto, que há saberes e fazeres matemáticos (sim, no plural!) para além daqueles que circulam na academia e na escola.

Este entendimento levou pesquisadores em Educação Matemática a constituírem um programa de pesquisa, iniciado em meados dos anos 70 e 80, chamado de **Etnomatemática**, do qual o brasileiro Ubiratan D'Ambrósio foi um dos mais destacados pioneiros. [...]

Um possível exemplo é discutir [...] como um marceneiro realiza a cubagem da madeira. [...] marceneiros no sul do país usam o seguinte procedimento: passam uma linha de cordel contornando o tronco na metade da altura estimada; dobram a linha em quatro partes iguais, elevando ao quadrado a medida do $\frac{1}{4}$ da linha do contorno; e finalmente, multiplicam pela medida da altura do tronco.

Fonte: BARBOSA, Jonei Cerqueira. Etnomatemática na sala de aula. **Portal Iede**. 3 maio 2019. Disponível em: https://www.portaliede.com.br/3551-2/. Acesso em: 12 out. 2024.

A cubagem da madeira é o cálculo da medida do volume de uma tora de madeira.
Considerando que as toras tenham formato cilíndrico, com a altura da tora medindo h e o comprimento do raio da base medindo r, segundo o método apresentado no texto, temos:

$$V_{\text{tora}} = \left(\frac{2\pi r}{4}\right)^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{tora}} = \frac{\pi^2 r^2 h}{4} \Rightarrow V_{\text{tora}} = \left(\frac{\pi^2}{4}\right) r^2 h$$

8. $(2 + 2\sqrt{3})$cm

16 a. Sim. A única diferença entre os métodos são os fatores $\frac{\pi^2}{4}$ e π, que valem cerca de 2,47 e 3,14, respectivamente, com uma diferença de apenas 0,67 entre eles, o que pode ser considerado insignificante se comparar à facilidade com que os marceneiros podem realizar o processo da cubagem da madeira.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

8. Se aumentarmos a medida do comprimento do raio da base ou a medida da altura de um cilindro reto em 4 cm, as medidas dos volumes dos novos cilindros coincidirão. Calcule a medida do comprimento do raio da base do cilindro inicial sabendo que sua medida de altura é 2 cm.

9. Determine a medida do volume de um cilindro equilátero cuja medida de área total é igual a 24π dm^2. **9.** 16π dm^3

10. Quantos mililitros (mL) de tinta cabem no reservatório cilíndrico de uma caneta cujo comprimento do diâmetro mede 2 mm e a altura mede 10 cm? (*Adote*: $\pi = 3{,}14$)
10. 0,314 mL

11. Um cilindro de revolução, cujo comprimento do raio da base mede 10 cm, foi cortado por um plano paralelo a seu eixo e distante 6 cm dele. Sabendo que a medida da área da secção determinada pelo plano é 80 cm^2, calcule a medida do volume do cilindro. **11.** 500π cm^3

12. A parte interna de um botijão de gás de cozinha tem formato cilíndrico com 40 cm de medida de comprimento do diâmetro e 60 cm de medida de altura. Quantos dias o gás de um botijão cheio durará se forem consumidos diariamente 3,1 L? (*Considere*: $\pi = 3{,}1$) **12.** 24 dias

13. O líquido que ocupa completamente um cilindro com 20 cm de medida de comprimento do diâmetro e 40 cm de medida de altura será transferido para outro cilindro com 12 cm de medida de comprimento do diâmetro e 125 cm de medida de altura. Que fração da medida da altura do novo cilindro será ocupada pelo líquido transferido?
13. $\frac{8}{9}$

14. Para atender consumidores não profissionais em vendas a varejo, uma indústria de tintas encomendou estudos para a produção de novas embalagens. O objetivo é que um produto que ocupa completamente um recipiente cilíndrico seja dividido em recipientes menores, também cilíndricos. Na nova embalagem, a medida do comprimento do diâmetro se reduz a $\frac{1}{4}$ e a medida da altura se reduz a $\frac{1}{3}$ da medida da embalagem original. Qual é a quantidade de recipientes menores necessários?
14. 48 recipientes menores.

15. Uma cisterna cilíndrica para armazenar água tem 1 m de medida de comprimento do diâmetro. Se forem consumidos 310 L, quantos centímetros o nível de água baixará? (*Considere*: $\pi = 3{,}1$) **15.** 40 cm

16. EM GRUPO Reúnam-se em grupos de quatro ou cinco estudantes:

a. ARGUMENTAÇÃO Considerando que toras de madeira têm formato cilíndrico, o método usado pelos marceneiros no Sul do país para realizar a cubagem da madeira é uma aproximação razoável para o cálculo da medida do volume das toras? Justifiquem sua resposta.

b. Pesquisem mais informações sobre a Etnomatemática e realizem entrevistas com profissionais em geral: construção civil, campo, indústria, administração etc. Questionem que saberes matemáticos eles empregam na sua prática profissional.
Registrem tudo em texto, áudio ou vídeo, editem e apresentem ao professor e aos colegas.
16 b. Resposta pessoal.

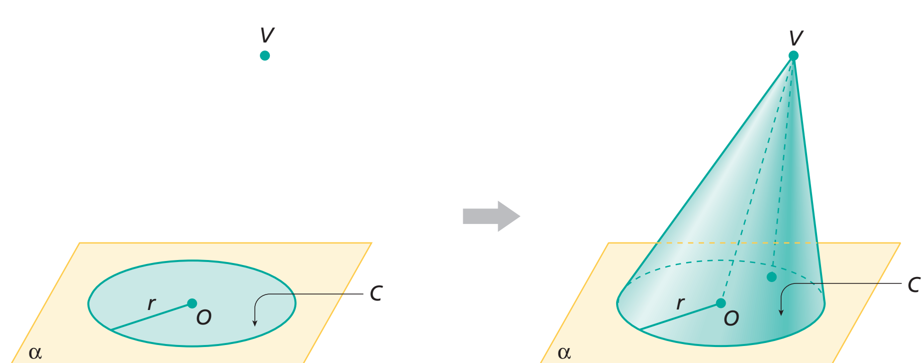
Cone


SAKARIN SAWASDINAKA/SHUTTERSTOCK

Cones de sinalização de trânsito tem formato parecido com o de um cone.

O formato cônico aparece em muitos objetos do dia a dia, como a casquinha de sorvete ou o cone de sinalização de trânsito.

Consideremos um círculo *C*, de centro *O* e cujo comprimento do raio mede *r*, em um plano α, e um ponto *V* não pertencente ao plano α.



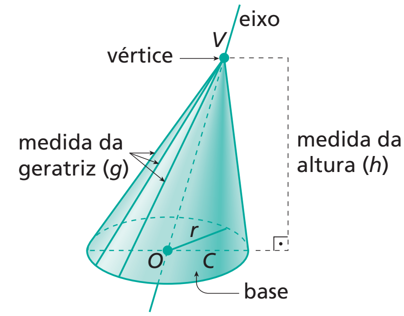
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Chama-se **cone circular**, ou apenas **cone**, a figura geométrica formada por todos os segmentos de reta com uma extremidade no ponto *V* e outra extremidade no círculo *C*.

Elementos de um cone

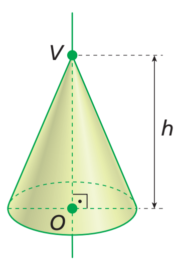
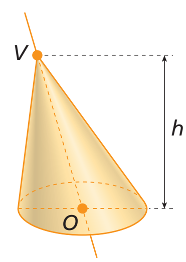
Considerando o cone representado, podemos destacar os elementos a seguir.

- **Base** – o círculo C de raio com medida de comprimento r e centro O.
- **Vértice** – o ponto V.
- **Eixo** – a reta $\overleftrightarrow{VO}$.
- **Geratrizes** – os segmentos com extremidades em V e na circunferência da base do cone.
- **Altura do cone** – a distância do vértice V ao plano que contém a base.



Classificação dos cones

Podemos classificar um cone de acordo com a inclinação do eixo $\overleftrightarrow{VO}$ em relação ao plano que contém a base.

Se o eixo $\overleftrightarrow{VO}$ é perpendicular ao plano que contém a base, então o cone é **reto**. Nesse caso, a medida da altura é igual a VO. 	Se o eixo $\overleftrightarrow{VO}$ não é perpendicular ao plano que contém a base, então o cone é **oblíquo**. Nesse caso, a medida da altura é menor que VO. 

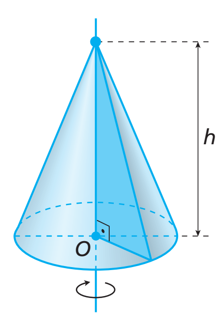
Observação

Indicaremos a medida do comprimento da geratriz por g e a medida da altura do cone por h.

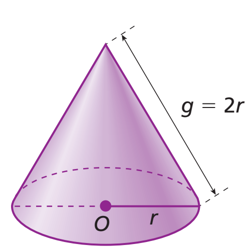
Como podemos provar que, em um cone oblíquo, a medida da altura é menor que a medida da distância do vértice ao centro da base?

Questão. Exemplo de resposta: Considerando o triângulo VOP, retângulo em P, tal que P pertence ao plano que contém a base e $VP = h$.
Como $\overline{VO}$ é a hipotenusa, $\overline{OP}$ e $\overline{VP}$ são catetos; então, $VP < VO$.

Um cone circular reto também é denominado **cone de revolução**, pois pode ser obtido pela rotação de uma superfície triangular, determinada por um triângulo retângulo, em torno de uma reta que contém um de seus catetos. A medida do comprimento do outro cateto é igual à medida do comprimento do raio da base do cone.



Se um cone reto tem a medida de comprimento da geratriz igual ao dobro da medida do comprimento do raio da base ($g = 2r$), ele é chamado de **cone equilátero**.

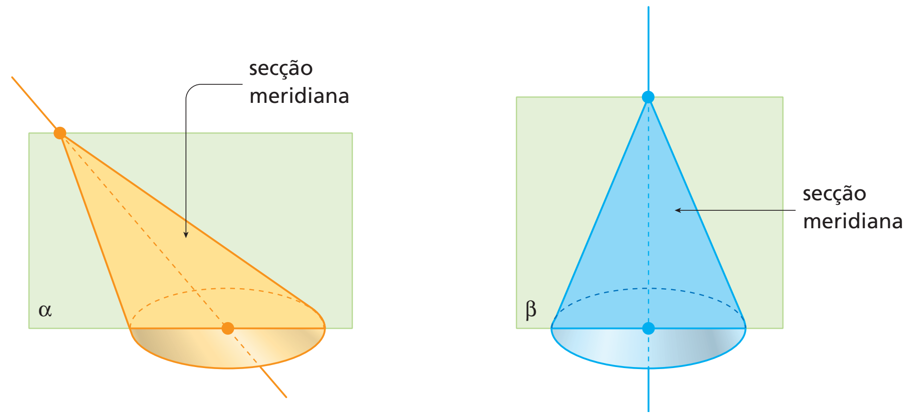


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Secções de um cone

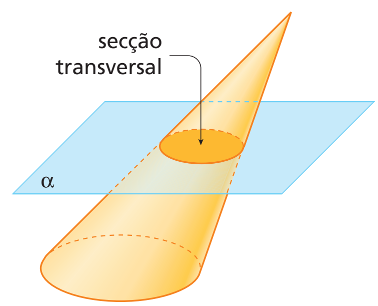
Secção meridiana de um cone

Uma **secção meridiana** de um cone é determinada pela intersecção do cone com um plano que contém seu eixo.



Secção transversal de um cone

Uma **secção transversal** de um cone é a intersecção do cone com um plano paralelo ao plano da base.



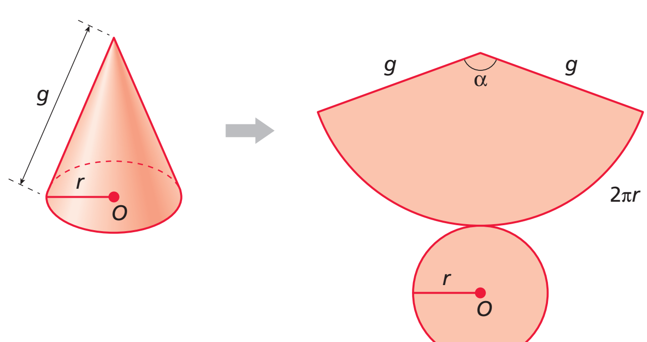
Observação

A intersecção de um cone com um plano α não paralelo à sua base e sem ponto comum com essa base não é um círculo.

Planificação da superfície de um cone reto

Assim como fizemos com o cilindro, vamos supor que a superfície de um modelo de cone reto seja revestida de papel. Para obter um molde deste modelo, vamos imaginar um recorte do papel na circunferência da base e, em seguida, um recorte ao longo de uma de suas geratrizes.

A **planificação da superfície de um cone reto** é composta de: um círculo de centro O cujo comprimento do raio mede r; e um setor circular cujo comprimento do raio mede g, medida de abertura α do ângulo central e arco de medida de comprimento $2\pi r$.



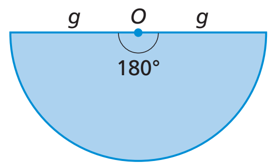
Atividade resolvida

R4. Se a planificação da superfície lateral de um cone reto for um semicírculo, como classificamos esse cone?

▸ Resolução

Vamos considerar um cone reto com medida do comprimento do raio da base r, medida do comprimento da geratriz g e medida da altura h.

O semicírculo com comprimento do raio de medida g e o setor circular da planificação da superfície lateral desse cone reto.



Logo, a medida do comprimento do arco do setor deve ser igual à medida do comprimento da circunferência do círculo da base do cone.

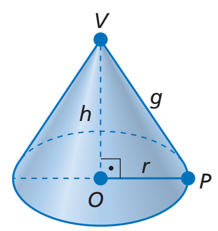
Assim: $\pi \cdot g = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow g = 2r$

Portanto, o cone em questão é um cone equilátero.

A secção meridiana desse cone é um triângulo equilátero cujo comprimento dos lados mede g.

Relações métricas entre os elementos de um cone reto

Considere um cone reto com medida de comprimento do raio da base r, medida do comprimento da geratriz g e medida da altura h.



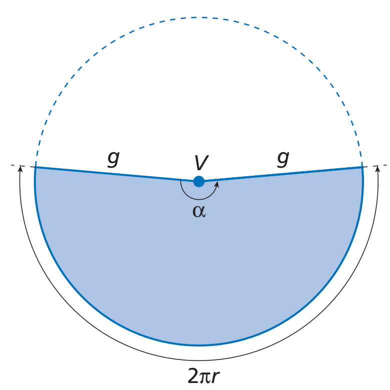
O triângulo VOP é retângulo em O.

Então, temos: $VO^2 + OP^2 = VP^2$

Portanto:

$$h^2 + r^2 = g^2$$

O setor circular a seguir representa a planificação da superfície lateral de um cone.



Então, podemos estabelecer a seguinte relação:

medida do comprimento do arco		medida da abertura do ângulo central (em grau)
$2\pi g$	————	360°
$2\pi r$	————	α

Logo: $2\pi g \cdot \alpha = 2\pi r \cdot 360°$

Portanto, α, em grau, é dado por:

$$\alpha = \frac{360° \cdot r}{g}$$

Como podemos escrever h em função de r quando $\alpha = 180°$?

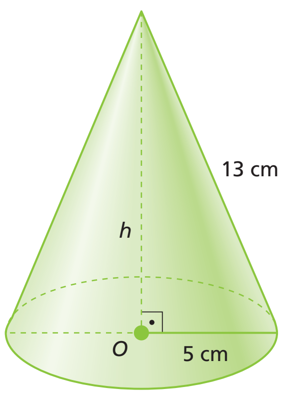
Questão. Quando $\alpha = 180°$, temos $g = 2r$; portanto, o cone é equilátero. Então, nesse caso, $h = r\sqrt{3}$.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades resolvidas

R5. Calcular a medida do comprimento da circunferência da base e a medida da altura de um cone reto cujas medidas de comprimento da geratriz e do raio da base são, respectivamente, 13 cm e 5 cm.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

▸ **Resolução**

A medida do comprimento da circunferência da base é dada por $C = 2\pi r$. Sabemos que o cone tem a medida do comprimento do raio $r = 5$ cm. Assim:

$C = 2 \cdot \pi \cdot 5 \Rightarrow C = 10\pi \Rightarrow C \simeq 31{,}4$

Portanto, a medida do comprimento da circunferência da base é aproximadamente 31,4 cm.

Sabendo que o cone é reto, podemos obter a medida da altura por meio de um triângulo retângulo, no qual a hipotenusa é a geratriz, e as medidas de comprimento dos catetos são a medida da altura do cone e a medida do comprimento do raio da base do cone. Assim:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$

Portanto, o cone mede 12 cm de altura.

R6. Um cone reto que mede 10 cm de altura tem por planificação da superfície lateral um setor circular cuja abertura do ângulo mede 150°. Determinar a medida do comprimento do raio da base e a medida do comprimento da geratriz.

▸ **Resolução**

Como $r^2 + h^2 = g^2$, temos:

$r^2 + 10^2 = g^2 \Rightarrow g^2 - r^2 = 100 \quad \text{(I)}$

Como $\alpha = \dfrac{360° \cdot r}{g}$, temos:

$150° = \dfrac{360° \cdot r}{g} \Rightarrow g = \dfrac{12r}{5} \quad \text{(II)}$

De (I) e (II), concluímos que:

$\left(\dfrac{12r}{5}\right)^2 - r^2 = 100 \Rightarrow \dfrac{144r^2}{25} - r^2 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow 144r^2 - 25r^2 = 2.500 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = \dfrac{2.500}{119} \Rightarrow r \simeq 4{,}58$

Portanto, a medida do comprimento do raio da base do cone é aproximadamente 4,58 cm.

Como $g = \dfrac{12r}{5}$, a medida do comprimento da geratriz é aproximadamente 11 cm.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

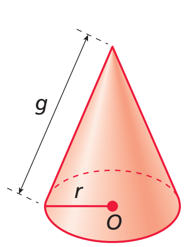
17. Determine a medida de abertura do ângulo central de um setor circular obtido pela planificação da superfície lateral de um cone reto cuja geratriz mede 60 cm de comprimento e o raio da base mede 10 cm de comprimento. **17.** 60°

18. A planificação da superfície lateral de um cone reto é um setor circular com abertura do ângulo central medindo 60°. Calcule a razão k entre a medida do comprimento da circunferência da base e a medida do comprimento da geratriz do cone. **18.** $\frac{\pi}{3}$

19. Determine a medida da altura de um cone reto, sabendo que a planificação da superfície lateral é um setor circular com abertura do ângulo central medindo 120° e o raio da base medindo 10 cm de comprimento. **19.** $20\sqrt{2}$ cm

20. Considere que um semicírculo cujo raio mede 20 cm de comprimento é a planificação da superfície lateral de um cone reto. Ao construir o cone, qual será a medida da distância do vértice à base? **20.** $10\sqrt{3}$ cm

Medida da área da superfície de um cone reto



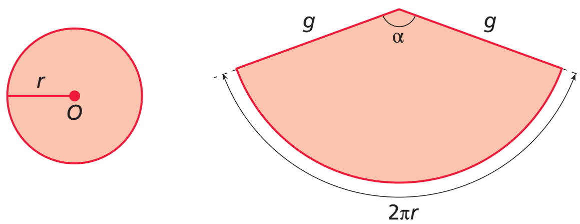
RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Pela planificação da superfície de um cone, podemos obter a medida da área total dessa superfície. Para isso, vamos considerar um cone reto de medida de comprimento do raio da base r e medida do comprimento da geratriz g.

A **medida da área da base** (A_{base}) é a medida da área de um círculo de centro O cujo comprimento do raio mede r.

$$A_{base} = \pi r^2$$

A **medida da área lateral** ($A_{lateral}$) é a medida da área de um setor circular tal que a medida do comprimento do raio é a medida do comprimento g da geratriz e a medida do comprimento do arco é $2\pi r$ (a medida do comprimento da circunferência da base do cone).



Como a medida da área desse setor é diretamente proporcional à medida do comprimento $2\pi r$ do arco e considerando que a circunferência e o círculo têm raio com medida de comprimento g, temos:

$$\frac{\text{medida do comprimento do arco do setor}}{\text{medida do comprimento da circunferência}} = \frac{\text{medida da área do setor}}{\text{medida da área do círculo}}$$

$$\frac{2\pi r}{2\pi g} = \frac{A_{lateral}}{\pi g^2} \Rightarrow A_{lateral} = \frac{(2\pi r) \cdot (\pi g^2)}{2\pi g} \Rightarrow \boxed{A_{lateral} = \pi r g}$$

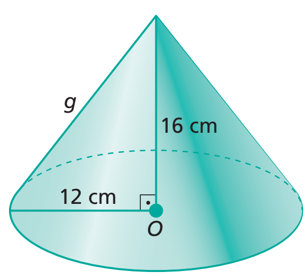
A **medida da área total** (A_{total}) da superfície do cone reto é a soma da medida da área da base com a medida da área lateral.

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = \pi r^2 + \pi r g \Rightarrow \boxed{A_{total} = \pi r(r + g)}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade resolvida

R7. Determinar a medida da área lateral de um cone reto com altura medindo 16 cm e raio da base medindo 12 cm de comprimento.



▶ **Resolução**

Temos:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow g^2 = 400 \Rightarrow g = 20$

Portanto, a medida do comprimento da geratriz do cone é 20 cm.

A medida da área lateral do cone é:

$A_{lateral} = \pi r g \Rightarrow A_{lateral} = \pi \cdot 12 \cdot 20 \Rightarrow A_{lateral} = 240\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{lateral} \simeq 753{,}6$

Logo, a medida da área lateral do cone é 240π cm^2 ou, aproximadamente, 753,6 cm^2.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

21. Determine as medidas da área lateral e da área total da superfície de um cone reto conforme os dados a seguir.

a. A medida da altura é 12 cm, e a medida do comprimento do raio da base é 9 cm. **21 a.** 135π cm^2; 216π cm^2

b. A medida do comprimento da geratriz é 26 cm, e a medida da altura é 24 cm. **21 b.** 260π cm^2; 360π cm^2

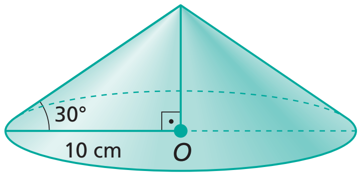
22. Uma escola infantil realizará a Festa do Circo. Uma professora ficou de confeccionar 34 chapéus de palhaço com formato parecido com um cone reto. Sabendo que cada chapéu terá 12 cm de medida de altura e 8 cm de medida de comprimento do raio da base, calcule a quantidade total de papel necessário para fazer todos os chapéus. **22.** $1.088\pi\sqrt{13}$ cm^2

23. Calcule a medida da área total da superfície de um cone reto inscrito em um cilindro reto cuja altura mede 5 cm e o raio da base mede 2 cm de comprimento. **23.** $2\pi(2 + \sqrt{29})$ cm^2

24. Calcule a medida da área total da superfície de um cone circular reto cuja secção meridiana é um triângulo equilátero com lados medindo 10 cm de comprimento. **24.** 75π cm^2

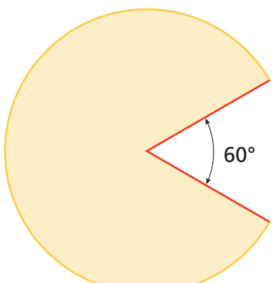
25. A medida da área lateral da superfície de um cone reto é 600π cm^2. Sabendo que o comprimento da geratriz mede 30 cm, calcule a medida da área total da superfície.
25. 1.000π cm^2

26. Determine a medida da área lateral do cone representado a seguir. **26.** $\frac{200\sqrt{3}}{3}\pi$ cm²



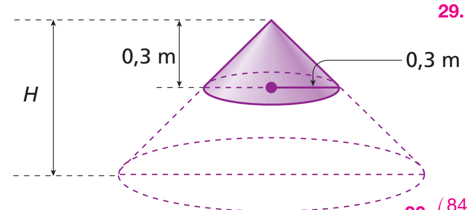
27. EM DUPLA ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS Elabore um problema que envolva a medida da área total de um cone equilátero. Em seguida, peça a um colega que resolva o problema elaborado por você. Após a resolução, conversem sobre os resultados obtidos. **27.** Resposta pessoal.

28. Considere que o setor circular representado a seguir é a planificação da superfície lateral de um cone reto e que o comprimento do raio do setor circular mede 6 cm.



Determine a medida do comprimento do raio da base do cone. **28.** 5 cm

29. Uma lâmpada pontual é colocada em um lustre com formato de cone reto com medida da altura e medida de comprimento do raio da base iguais a 0,3 m. A que medida de altura *H* do chão esse lustre deve ser pendurado para obter um formato circular iluminado com a medida da área de 6,25π m²? **29.** 2,5 m



30. $\left(\frac{84}{5}\right)\pi$ dm²

30. Um triângulo retângulo tem catetos medindo 3 dm e 4 dm de comprimento. Determine a medida da área da superfície do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada por esse triângulo em torno de sua hipotenusa.

31. ARGUMENTAÇÃO Em uma cartolina, recorte pedaços circulares de raio medindo 12 cm de comprimento. Neles, recorte setores circulares com ângulos centrais de medida de abertura de 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 320° e 340°. Usando fita adesiva, obtenha a superfície lateral dos respectivos modelos de cones. Como seria uma dessas superfícies quando a medida da abertura do ângulo tendesse a 360°? Para qual valor tenderia a medida da área dessa superfície lateral?

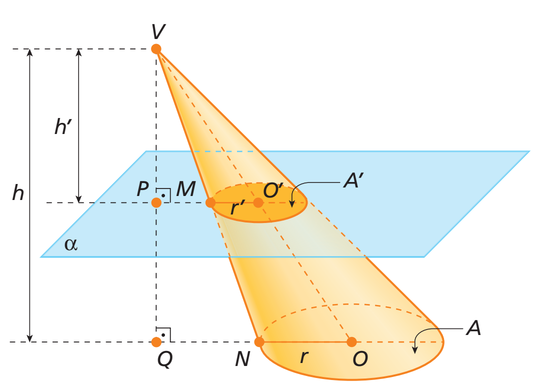
31. A superfície lateral tenderia a coincidir com a base do modelo de cone; a medida da área dessa superfície tenderia a ser igual à medida da área da base do modelo de cone.

Medida do volume de um cone

Antes de tratar da medida do volume de um cone qualquer, vamos estudar duas propriedades dos cones.

Para isso, considere um plano α que secciona um cone a uma medida de distância *h'* do vértice, paralelamente à base, determinando uma secção de medida de área *A'*.

Sejam *h* a medida da altura do cone, *r* a medida do comprimento do raio da base e *A* a medida da área da base do cone.



Propriedade 1: A razão entre a medida da distância *h'* de uma secção transversal ao vértice do cone e a medida da altura *h* do cone é igual à razão entre a medida do comprimento do raio *r'* da secção transversal e a medida do comprimento do raio *r* da base, isto é:

$$\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$$

Demonstração

Os triângulos *VMO'* e *VNO* são semelhantes (têm ângulos correspondentes congruentes).

Assim, temos: $\frac{VM}{VN} = \frac{r'}{r}$ (I)

Os triângulos *VPM* e *VQN* são semelhantes (têm ângulos correspondentes congruentes).

Assim, temos: $\frac{VP}{VQ} = \frac{VM}{VN}$ (II)

De (I) e (II), podemos concluir que: $\frac{VP}{VQ} = \frac{r'}{r}$

Como $VP = h'$ e $VQ = h$, temos: $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$

Propriedade 2: A razão entre a medida da área *A'* de uma secção transversal de um cone, feita a uma medida de altura *h'* em relação ao vértice *V*, e a medida da área *A* da base desse cone de medida de altura *h* é igual ao quadrado da razão entre *h'* e *h*, isto é:

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Demonstração

A medida da área da secção transversal do cone é $A' = \pi(r')^2$, e a medida da área da base do cone é $A = \pi r^2$. Assim, temos:

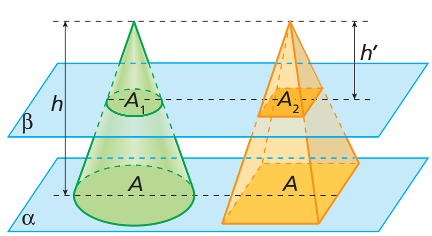
$\frac{A'}{A} = \frac{\pi(r')^2}{\pi r^2} \Rightarrow \frac{A'}{A} = \frac{(r')^2}{r^2}$

Pela propriedade 1, $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$; portanto:

$\frac{A'}{A} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{A'}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$

Determinação da medida do volume de um cone

Considere um cone e uma pirâmide em um mesmo semiespaço, de mesma medida de altura *h* e cujas bases estejam contidas no mesmo plano α, sendo a medida da área da base do cone igual à medida da área da base da pirâmide.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que cada plano β, paralelo a α, secciona o cone e também a pirâmide, determinando as secções do cone e da pirâmide, de medidas de área A_1 e A_2, respectivamente.

Pelas propriedades já estudadas, temos:

$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$ e $\frac{A_2}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$

Portanto: $\frac{A_1}{A} = \frac{A_2}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$

Assim, pelo princípio de Cavalieri, a medida do volume do cone é igual à medida do volume da pirâmide: $V_{cone} = V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$

Portanto, a medida do volume do cone é dada por:

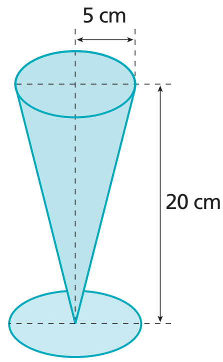
$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Observação

Considerando um cone e um cilindro em que as medidas de comprimento dos raios da base e as medidas das alturas sejam iguais, temos que a medida do volume do cone é um terço da medida do volume do cilindro.

Atividade resolvida

R8. Calcular a quantidade máxima de líquido, em litro, que a taça representada na figura pode comportar.



▸ Resolução

Vamos calcular a medida do volume interno da taça:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 20 \Rightarrow V = \frac{500\pi}{3}$$

Assim: $V \simeq 523{,}3\ \text{cm}^3$

Sabemos que $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3$ e $1\ \text{dm}^3 = 1.000\ \text{cm}^3$.

Logo: $1\ \text{L} = 1.000\ \text{cm}^3$

Então:

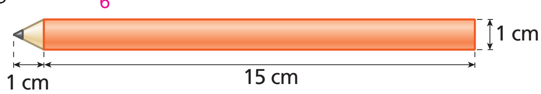
$$V \simeq 523{,}3\ \text{cm}^3 = 523{,}3 \cdot \frac{1}{1.000}\ \text{L} = 0{,}5233\ \text{L}$$

Portanto, a taça pode conter até aproximadamente 0,5233 L.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

32. Calcule a medida do volume do lápis representado na figura. **32.** $\frac{23}{6}\pi\ \text{cm}^3$



33. Um cone reto cujo raio da base mede 3 cm de comprimento tem medida de volume igual a $18\sqrt{2}\pi\ \text{cm}^3$. Calcule a medida da área total da superfície desse cone. **33.** $36\pi\ \text{cm}^2$

34. Em um cone de revolução cuja altura mede 10 cm, a medida da área da base excede em $216\pi\ \text{cm}^2$ a medida da área de uma secção paralela à base, feita a 2 cm do vértice. Calcule a medida do volume do cone. **34.** $750\pi\ \text{cm}^3$

35. Dois cones, 1 e 2, são gerados pela rotação da superfície determinada por um triângulo retângulo de catetos medindo 5 cm e 12 cm de comprimento. Para obter o cone 1, o giro se dá em torno do cateto menor; para obter o cone 2, em torno do cateto maior.

a. Determine a razão percentual entre as medidas dos volumes dos cones 1 e 2. **35 a.** 240%

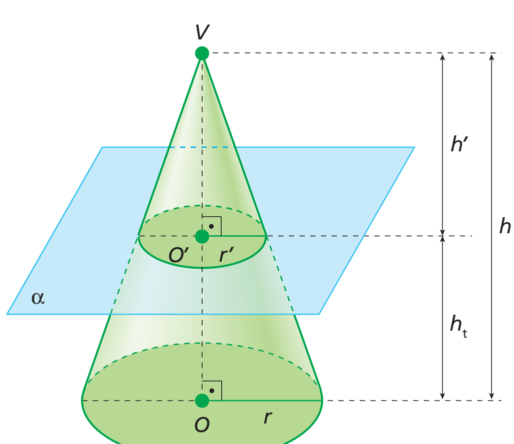
b. Se as medidas de comprimento dos catetos desse triângulo fossem x e y, em torno dos quais se fizessem rotações para gerar, respectivamente, os cones 1 e 2, qual seria a razão entre as medidas dos volumes dos cones 1 e 2? **35 b.** $\frac{y}{x}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Tronco de cone de bases paralelas

Vários objetos do nosso cotidiano têm o formato parecido com o de um tronco de cone, como copas de abajur, canecas e vasos, entre outros.

Considere um cone reto de vértice V, medida de altura h e medida de comprimento do raio da base r, seccionado por um plano α, paralelo ao plano da base, a uma medida de distância h_t dela ($h_t < h$). Esse plano α determina uma secção transversal de centro O' e raio de medida de comprimento r'.

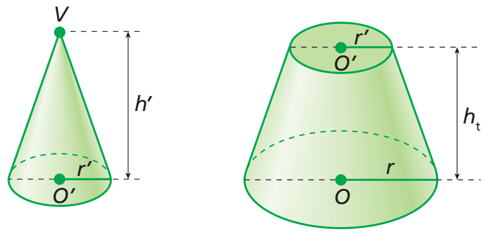


Alguns vasos têm formato parecido com o de um tronco de cone.

LIFESTYLE TRAVEL PHOTO/SHUTTERSTOCK

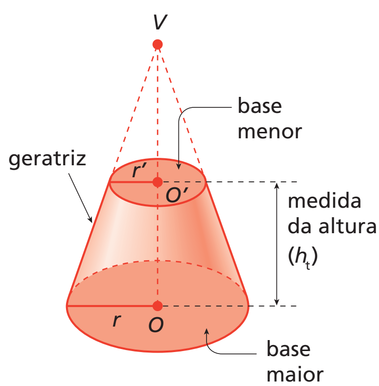
Ao seccionar o cone original, o plano α determina dois sólidos:

- um cone menor, de mesmo vértice V e medida de altura $h' = h - h_t$;
- um sólido denominado **tronco de cone de bases paralelas**.



Que figura geométrica é determinada pela secção meridiana de um tronco de cone de bases paralelas? **Questão.** Um trapézio.

Elementos de um tronco de cone



Considerando o tronco de cone representado anteriormente, podemos destacar os seguintes elementos:

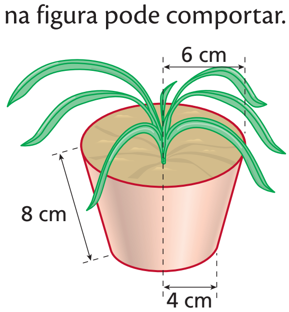
- **Base maior** – o círculo de centro O e raio de medida de comprimento r.
- **Base menor** – a secção transversal obtida por meio do plano α, ou seja, o círculo de centro O' e raio de medida de comprimento r'.
- **Geratrizes** – os segmentos cujas extremidades são pontos correspondentes das circunferências das bases e que estão contidos em retas que passam pelo vértice V do cone original.
- **Altura do tronco** – a distância entre os planos que contêm as bases do tronco de cone. Indicaremos a medida da altura do tronco por h_t.

Observação

Para calcular a medida do volume de um tronco de cone, basta subtrair, da medida do volume do cone original, a medida do volume do cone de mesmo vértice, com medida de altura h' e base congruente à base menor do tronco.

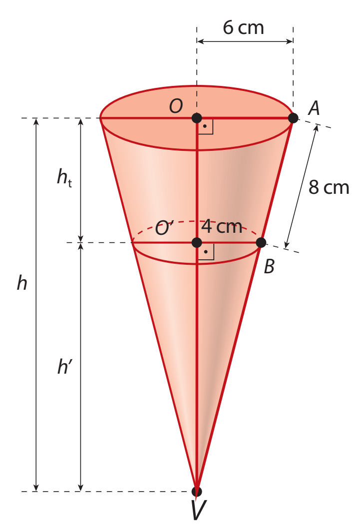
Atividades resolvidas

R9. Calcular a quantidade máxima de terra que o vaso representado na figura pode comportar.

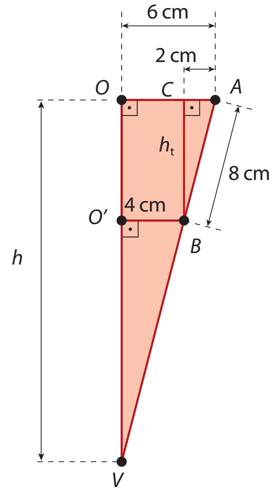


▶ **Resolução**

A atividade consiste em obter a medida do volume interno do vaso que tem formato parecido com o de um cone reto. Para isso, vamos considerar o cone que deu origem a esse tronco:



Destacando o triângulo AVO, temos:



Usando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, vamos calcular a medida da altura do tronco de cone:

$$8^2 = 2^2 + h_t^2 \Rightarrow h_t = \sqrt{60} \Rightarrow h_t = 2\sqrt{15}$$

Note que os triângulos AVO e ABC são semelhantes (têm ângulos correspondentes congruentes); então:

$$\frac{6}{2} = \frac{h}{h_t} \Rightarrow 3 = \frac{h}{2\sqrt{15}} \Rightarrow h = 6\sqrt{15}$$

Assim: $h' = 6\sqrt{15} - 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$

Logo, a medida do volume interno do tronco de cone é:

$$V_{tronco} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{15} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{15}$$

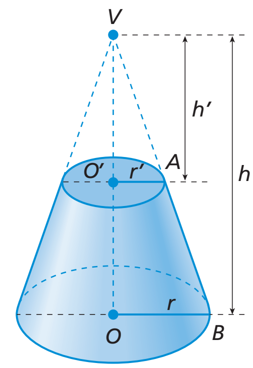
$$V_{tronco} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (216\sqrt{15} - 64\sqrt{15}) = \frac{152\sqrt{15}}{3} \cdot \pi$$

Portanto, o vaso comporta, no máximo, $\frac{152\sqrt{15}}{3}\pi$ cm³, aproximadamente 616 cm³, de terra.

R10. Dado um tronco de cone reto de bases paralelas, calcular a razão entre as medidas dos volumes V'_{cone}, do cone menor, e V_{cone}, do cone maior, que determinam esse tronco, em função da razão entre as respectivas medidas de altura, h' e h.

▶ **Resolução**

A medida do volume do tronco de cone é obtida da medida do volume V'_{cone} do cone menor (de medida de altura h' e de medida de comprimento do raio da base r') e da medida do volume V do cone maior (de medida de altura h e de medida de comprimento do raio da base r), conforme a figura.



Os triângulos $VO'A$ e VOB são semelhantes (têm ângulos correspondentes congruentes); portanto:

$$\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} \quad \text{(I)}$$

Como as medidas dos volumes dos cones são dados por $V'_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r')^2 \cdot h'$ e $V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$, a razão entre as medidas dos volumes é:

$$\frac{V'_{cone}}{V_{cone}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r')^2 \cdot h'}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

$$\frac{V'_{cone}}{V_{cone}} = \frac{(r')^2 \cdot h'}{r^2 \cdot h} = \frac{(r')^2}{r^2} \cdot \frac{h'}{h}$$

$$\frac{V'_{cone}}{V_{cone}} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cdot \frac{h'}{h} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos a razão solicitada:

$$\frac{V'_{cone}}{V_{cone}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3$$

Atividades propostas

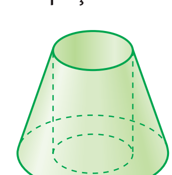
Registre em seu caderno

36. Os comprimentos dos raios das bases paralelas de um tronco de cone reto medem 5 cm e 3 cm. Sabendo que a medida da altura do tronco é 6 cm, calcule sua medida de volume. **36.** 98π cm³

37. As áreas das bases de um tronco de cone reto de bases paralelas medem 36π cm² e 16π cm². Sabendo que sua geratriz mede $2\sqrt{5}$ cm de comprimento, determine a medida do volume desse tronco. **37.** $\frac{304\pi}{3}$ cm³

38. Uma taça tem formato de cone reto cuja medida da altura é o dobro da medida do comprimento do diâmetro da base. A taça estava cheia de água, mas alguém bebeu até que o restante da água ficasse exatamente com a metade da medida da altura da taça. Que fração da água foi bebida? **38.** $\frac{7}{8}$

39. Observe a representação de uma peça com o formato de um tronco de cone reto. Note que, no centro, há uma cavidade em formato cilíndrico. A medida da altura do cilindro coincide com a medida da altura do tronco de cone. Sabendo que os comprimentos dos raios das bases paralelas do tronco de cone medem 7 cm e 12 cm e que o comprimento da geratriz do tronco mede 13 cm, calcule a medida do volume da peça. **39.** 520π cm³



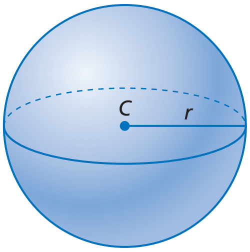
Esfera

Alguns monumentos e objetos do dia a dia têm formato esférico (como a bolinha de gude) ou aproximadamente esférico (como uma laranja). Para estudar esse tipo de formato, vamos analisar o sólido denominado esfera.

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

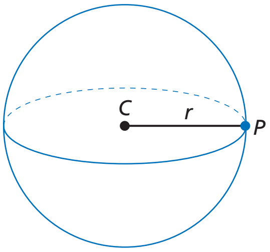
Monumento na Praça da Paz em Blumenau (SC). Foto de 2022.

Consideremos um ponto *C* do espaço e um número real e positivo *r*.

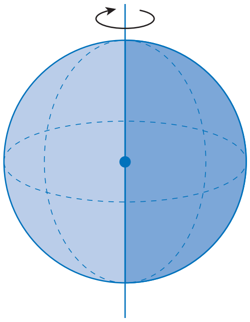


Chama-se **esfera** de centro *C* e medida de comprimento do raio *r* o sólido geométrico formado por todos os pontos *P* do espaço que estão a uma medida de distância de *C* menor ou igual a *r*.

Chamamos de **superfície esférica** a "casca" da esfera, ou seja, o conjunto de pontos *P* do espaço que estão a uma medida de distância de *C* igual a *r*.



Assim como o cilindro e o cone, a esfera também pode ser considerada um sólido de revolução, pois pode ser obtida pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que passa por seu diâmetro.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Fazendo a rotação completa de uma semicircunferência em torno do eixo que passa por seu diâmetro, que figura geométrica obtemos? **Questão.** Uma superfície esférica.

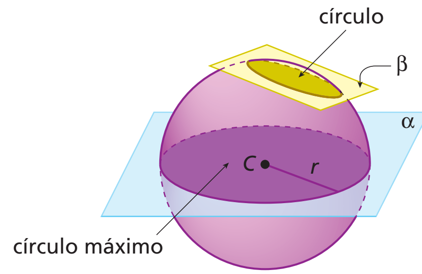
Secção de uma esfera

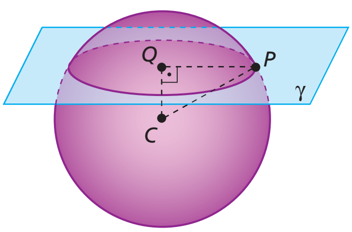
Secção plana de uma esfera

Observação

A secção plana de uma esfera é um ponto quando o plano é tangente à esfera. Assim, a intersecção da esfera com o plano é apenas o ponto de tangência.

Toda **secção plana** de uma esfera, ou intersecção de uma esfera com um plano, é um ponto ou um círculo. Se o plano de intersecção contiver o centro da esfera, então a secção obtida será chamada de **círculo máximo**.





A afirmação de que a intersecção de um plano com uma esfera pode ser um círculo é explicada de maneira simples. Observe, na figura, a secção determinada pelo plano γ. Considere o ponto Q de γ tal que $\overline{CQ} \perp \gamma$, e um ponto P qualquer de γ e da superfície esférica. Sendo o triângulo CQP um triângulo retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras: $(QP)^2 + (QC)^2 = (PC)^2$

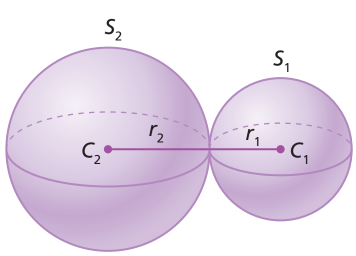
Assim, temos: $(QP)^2 = (PC)^2 - (QC)^2$

Como QC (medida da distância de C a Q) e PC (medida de comprimento do raio da esfera) são constantes para todos os pontos P da intersecção da secção com a superfície esférica, $QP = \sqrt{(PC)^2 - (QC)^2}$ também é constante, e a linha formada pelos pontos P dessa intersecção é uma circunferência de centro Q e raio $\overline{QP}$, ou seja, a secção é um círculo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades resolvidas

R11. As esferas S_1 e S_2 representadas a seguir, de raio medindo 3 cm e 4 cm de comprimento, respectivamente, têm somente um ponto em comum. Calcular a medida da distância entre seus centros.



▶ **Resolução**

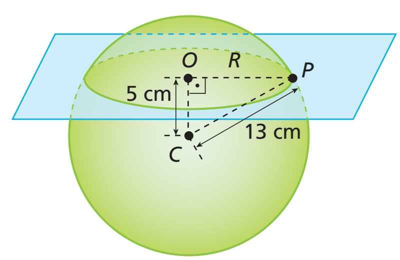
Como as esferas são tangentes, ou seja, têm somente um ponto em comum, o segmento de reta que une seus centros tem medida de comprimento $r_1 + r_2$; nesse caso, $3 + 4 = 7$.

Então, a medida da distância entre os centros das esferas é 7 cm.

R12. Calcular a medida do comprimento do raio R de uma secção plana de uma esfera sabendo que a medida do comprimento do raio dessa esfera é igual a 13 cm e que a medida da distância dessa secção ao centro da esfera é 5 cm.

▶ **Resolução**

Observe a figura.

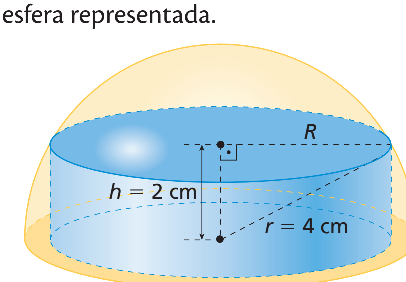


Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔCOP, obtemos:

$13^2 = 5^2 + R^2 \Rightarrow R^2 = 144 \Rightarrow R = 12$

Portanto, a medida do comprimento do raio R é igual a 12 cm.

R13. Calcular a medida do volume do cilindro inscrito na semiesfera representada.



▶ **Resolução**

$V_{cilindro} = \pi R^2 h = \pi \cdot (r^2 - h^2) \cdot h = \pi \cdot (4^2 - 2^2) \cdot 2 = 24\pi$

Portanto, a medida do volume do cilindro é 24π cm³.

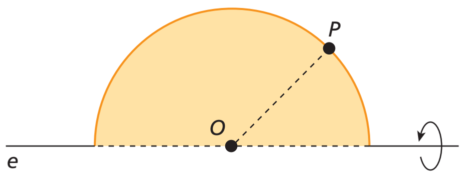
40. A medida da área do círculo máximo. Para uma esfera de raio de medida de comprimento r, essa medida de área máxima é igual a πr^2.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

40. Qual é a medida da área máxima que uma secção plana de uma esfera pode atingir?

41. Imagine que a figura representada a seguir vai girar em torno do eixo *e*.



Escreva que figura é descrita com esse giro:

a. pelo ponto P; **41 a.** Circunferência.

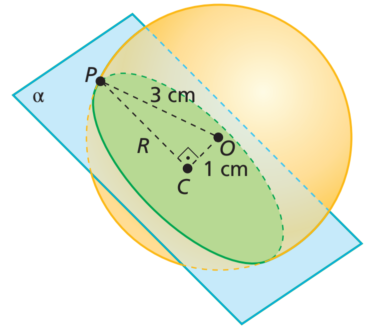
b. pelo segmento de reta $\overline{OP}$; **41 b.** Superfície lateral de um cone.

c. pela semicircunferência de centro O e raio $\overline{OP}$. **41 c.** Superfície esférica.

42. Uma superfície esférica, de centro O_1 e raio com medida de comprimento r_1, tem somente um ponto em comum com outra superfície esférica, de centro O_2 e raio com medida de comprimento r_2. Qual é a medida da distância entre O_1 e O_2?

42. $r_1 + r_2$ ou $r_1 - r_2$ ou $r_2 - r_1$.

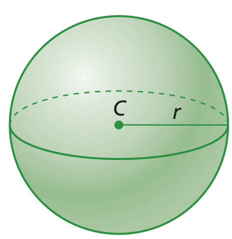
43. Calcule a medida do comprimento do raio R do círculo determinado pela intersecção do plano α com a esfera, conforme a figura a seguir. **43.** $2\sqrt{2}$ cm



44. Considere uma esfera, cujo raio mede 2 cm de comprimento, interceptada por um plano β de maneira que determine uma secção plana de raio de medida de comprimento $\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida da distância entre o plano β e o centro da esfera. **44.** 1 cm

Medida da área da superfície esférica e medida do volume da esfera

Consideremos uma esfera de centro C e raio de medida de comprimento r.



A **medida da área da superfície esférica** e a **medida do volume da esfera** são dadas, respectivamente, por:

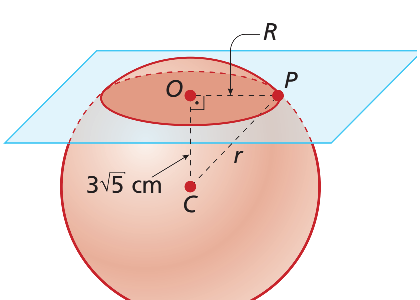
$$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2 \qquad V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Observação

As fórmulas da medida da área da superfície esférica e da medida do volume da esfera podem ser demonstradas, mas isso não será feito nesta coleção.

Atividades resolvidas

R14. Uma secção plana de uma esfera, distante $3\sqrt{5}$cm do centro da esfera, mede 36π cm^2 de área. Calcular a medida do volume da esfera e a medida da área de sua superfície.



▸ **Resolução**

Como essa secção plana da esfera é um círculo, a medida da área é dada por πR^2. Assim:

$36\pi = \pi R^2 \Rightarrow R = 6$ (medida de comprimento do raio da secção plana)

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔCOP, calculamos a medida do comprimento do raio da esfera:

$r^2 = 6^2 + (3\sqrt{5})^2 \Rightarrow r^2 = 36 + 45 \Rightarrow r^2 = 81 \Rightarrow r = 9$

Então, podemos calcular a medida do volume V da esfera e a medida da área A de sua superfície:

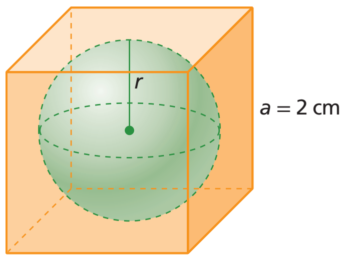
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 \Rightarrow V = 972\pi \Rightarrow V \simeq 3.052$

$A = 4\pi r^2 \Rightarrow A = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 \Rightarrow A = 324\pi \Rightarrow A \simeq 1.017$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, a medida do volume da esfera é, aproximadamente, 3.052 cm^3, e a medida da área da sua superfície é, aproximadamente, 1.017 cm^2.

R15. Uma esfera foi inscrita em um cubo, conforme mostra a figura. Calcular a medida do volume dessa esfera e determinar a razão entre as medidas das áreas da superfície cúbica e da superfície esférica.



▸ **Resolução**

Pela figura, temos $a = 2r$. Como a aresta do cubo mede 2 cm de comprimento, temos $r = 1$ cm.

Medida do volume da esfera:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 \Rightarrow V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi$$

Medida da área da superfície cúbica:

$$A_{\text{superfície cúbica}} = 6 \cdot 2^2 \Rightarrow A_{\text{superfície cúbica}} = 24$$

Medida da área da superfície esférica:

$$A_{\text{superfície esférica}} = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 \Rightarrow A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi$$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

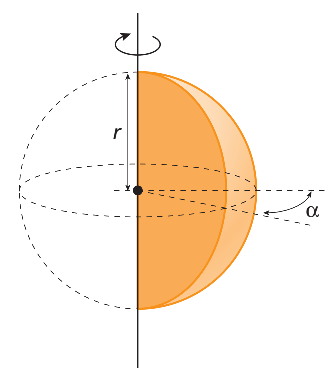
$$A_{\text{superfície esférica}} = 4 \cdot 3{,}14 \Rightarrow A_{\text{superfície esférica}} = 12{,}56$$

A razão entre as medidas das áreas é: $\frac{24}{12{,}56} \simeq 1{,}91$

Logo, a medida do volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi$ cm^3, e a medida da área da superfície cúbica é quase o dobro da medida da área da superfície esférica.

Cunha esférica e fuso esférico

Chama-se **cunha esférica** o sólido gerado pela rotação, por um ângulo de medida de abertura α, de um semicírculo de raio de medida de comprimento r em torno de um eixo que contém seu diâmetro.



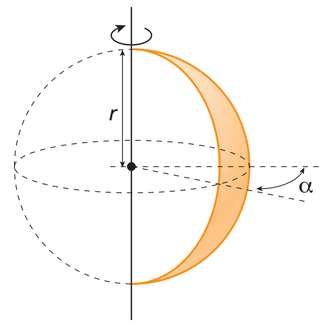
A **medida do volume de uma cunha esférica** é proporcional à medida da abertura α (em grau) do ângulo de rotação e pode ser calculada usando uma regra de três simples.

medida do volume		medida da abertura do ângulo (em grau)
$\frac{4}{3}\pi r^3$	———	360°
$V_{\text{cunha esférica}}$	———	α

Resolvendo essa regra de três, obtemos a medida do volume da cunha esférica:

$$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot r^3 \cdot \alpha}{270°}$$

Pela rotação, por um ângulo de medida de abertura α, de uma semicircunferência de medida do comprimento do raio r em torno de um eixo que contém seu diâmetro, obtemos um **fuso esférico**.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A **medida da área de um fuso esférico** é proporcional à medida da abertura α (em grau) do ângulo de rotação e pode ser calculada usando uma regra de três simples.

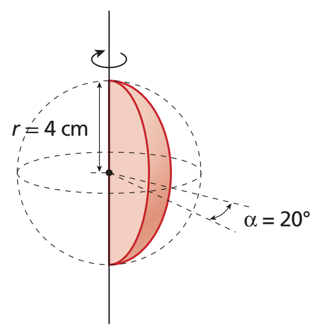
medida da área		medida da abertura do ângulo (em grau)
$4\pi r^2$	———	360°
$A_{\text{fuso esférico}}$	———	α

Resolvendo essa regra de três, obtemos a medida da área do fuso esférico:

$$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{90°}$$

Atividade resolvida

R16. Calcular a medida do volume da cunha esférica e a medida da área do fuso esférico da figura.



▸ **Resolução**

A medida do volume da cunha esférica é dada por:

$$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot 4^3 \cdot 20°}{270°} \Rightarrow V_{\text{cunha esférica}} = \frac{128\pi}{27}$$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{128 \cdot 3{,}14}{27} \simeq 14{,}9$$

A medida da área do fuso esférico é dada por:

$$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 20°}{90°} \Rightarrow A_{\text{fuso esférico}} = \frac{32\pi}{9}$$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{32 \cdot 3{,}14}{9} \simeq 11{,}2$$

Portanto, a medida do volume da cunha esférica é, aproximadamente, 14,9 cm³, e a medida da área do fuso esférico é, aproximadamente, 11,2 cm².

Atividades propostas

Registre em seu caderno

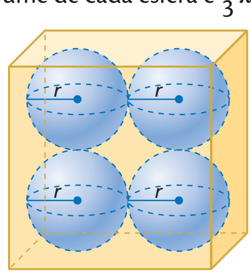
45. Determine a medida da área da superfície esférica e a medida do volume da esfera cujo:

a. comprimento do raio da esfera mede 3 cm; **45 a.** 36π cm²; 36π cm³

b. comprimento do diâmetro da esfera mede 18 cm. **45 b.** 324π cm²; 972π cm³

46. Um queijo moldado com formato esférico tem 10 cm de medida de comprimento do raio. Derretido, ele cabe exatamente em uma panela cilíndrica cujo raio mede 10 cm de comprimento. Qual é a medida da altura dessa panela? **46.** $\frac{40}{3}$ cm

47. Calcule a medida do volume do paralelepípedo representado a seguir sabendo que cada esfera tangencia quatro faces do paralelepípedo e outras duas esferas. Além disso, a medida do volume de cada esfera é $\frac{4}{3}\pi$ cm³. **47.** 32 cm³



48. Calcule a medida da área do fuso esférico e a medida do volume da cunha esférica obtidos pela rotação de um ângulo de medida de abertura de 45° e contidos em uma esfera cujo raio mede 6 cm de comprimento. **48.** 18π cm²; 36π cm³

49. Considerando uma laranja como uma esfera de raio de medida de comprimento r com 12 gomos congruentes, qual será a medida da área da superfície total de cada gomo? **49.** $\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^2$

50. Uma cunha esférica cujo raio mede 1 m de comprimento tem medida de volume de 1 m³. Qual é a medida da abertura α, em radiano, do ângulo que a determina? **50.** $\frac{3}{2}$ radiano

51. Uma casquinha de sorvete tem 10 cm de medida de altura (profundidade) e "boca" com 4 cm de medida de comprimento de diâmetro. Mostre que, se forem colocadas na casquinha duas conchas semiesféricas de sorvete, também de 4 cm de medida de comprimento de diâmetro, o sorvete não transbordará, mesmo que derreta.

52. PENSAMENTO COMPUTACIONAL *SOFTWARE* Como você poderia implementar no Scratch um algoritmo para calcular a medida da área da superfície ou a medida do volume de um dos corpos redondos estudados neste capítulo. (*Dica*: Use 3.14 como aproximação de π.)

51. Resposta no *Suplemento para o professor*. **52.** Exemplos de resposta no *Suplemento para o professor*.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

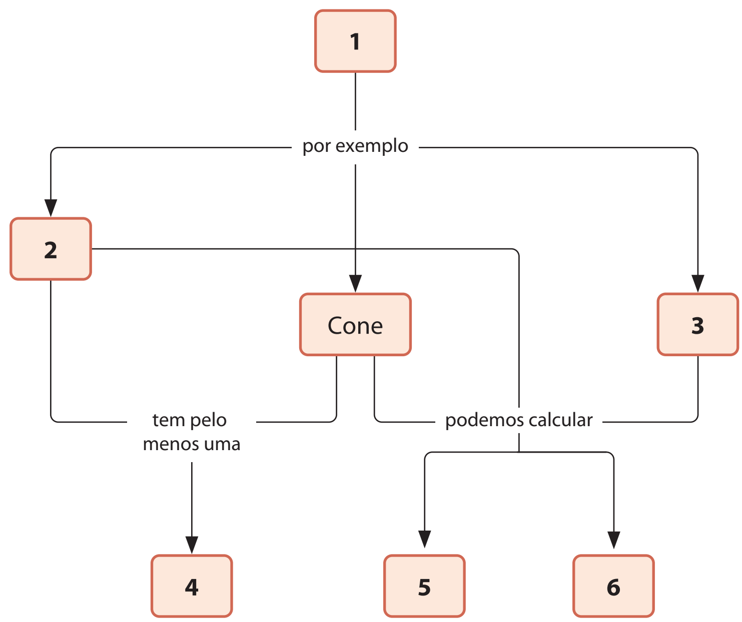
PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 4

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



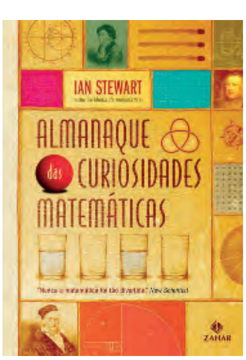
Conexões entre conceitos. Exemplo de resposta: A – 5; B – 3; C – 1; D – 4; E – 2; F – 6.

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Medida do volume
B. Esfera
C. Corpos redondos
D. Base
E. Cilindro
F. Medida da área da superfície

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro



REPRODUÇÃO/EDITORA ZAHAR

Almanaque das curiosidades matemáticas

Ian Stewart

Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Esse almanaque é um apanhado de cadernos de anotações que o autor começou a fazer aos 14 anos. Traz diversos tópicos relacionados à Matemática, apresentados por meio de jogos, quebra-cabeças, histórias, curiosidades, coisas para fazer ou construir etc. É uma leitura agradável e interessante para todos os públicos.

Software

Poly

Poly é um *software* para construir e explorar sólidos geométricos. Possui uma grande coleção de sólidos e permite a rotação e a planificação da superfície deles de maneira dinâmica. Além disso, as planificações de superfície podem ser impressas, para que o usuário recorte e monte seus próprios modelos.

Disponível em: http://www.peda.com/poly/. Acesso em: 12 out. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Alternativa **b**.

Q1. A medida da área, em centímetro quadrado, da superfície lateral de um cilindro reto com medida da altura de 6 cm e medida do comprimento do raio da base de 10 cm é:

a. 25π cm^2. **c.** 100π cm^2.
b. 120π cm^2. **d.** 125π cm^2.

Q2. A medida da área total da superfície de um cilindro equilátero é ______, sendo r a medida do comprimento do raio da base desse cilindro. Q2. Alternativa **d**.

a. $\frac{\pi r^2}{2}$ **c.** $2\pi r^2 + r^2$
b. $2\pi r^2 + 2r^2$ **d.** $2\pi r^2 + 4\pi r^2$

Q3. Considere um cilindro cuja medida do comprimento do raio r da base é o triplo da medida da altura h. A medida do volume desse cilindro é: Q3. Alternativa **a**.

a. $9\pi h^3$ **c.** $9\pi h^2$
b. $3\pi h^4$ **d.** $\frac{\pi h^3}{3}$

Q4. A medida da área da superfície lateral de um cone reto com medida da altura de 12 cm e medida do comprimento do raio da base de 9 cm é ______ cm^2. Q4. Alternativa **a**.

a. 135π **c.** 180π
b. 200π **d.** 250π

Q5. A medida da área total da superfície de um cone reto, cuja medida do comprimento g da geratriz é igual a duas vezes a medida do comprimento r do raio da base, é:

Q5. Alternativa **b**.

a. $\frac{\pi g^2}{2}$ **c.** $\frac{\pi g^3}{2}$
b. $\frac{3\pi g^2}{4}$ **d.** πg^2

Q6. Uma indústria de processamento de suco de uva usa dois tipos de embalagem, ambos com formato cônico e de mesma medida de altura.

Q6. Alternativa **d**.

A medida do comprimento do raio da base da embalagem A é metade da medida de comprimento do raio da embalagem B, na qual cabe ______ do conteúdo da embalagem A.

a. a metade **c.** o triplo
b. o dobro **d.** o quádruplo

Q7. Se o comprimento do raio de uma esfera mede 1 cm, então a medida da área da superfície dessa esfera mede ______ cm^2. Q7. Alternativa **b**.

a. $\frac{4\pi^2}{3}$ **c.** $\frac{4\pi}{3}$
b. 4π **d.** $4\pi^2$

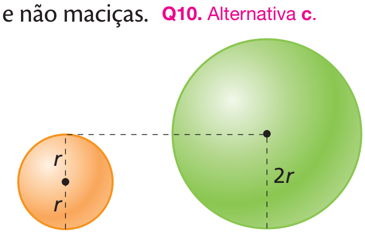
Q8. Uma esfera cujo raio tem medida de comprimento π mede ______. Q8. Alternativa **a**.

a. $\frac{4\pi^4}{3}$ **c.** $\frac{4\pi}{3}$
b. $4\pi^2$ **d.** 4

Q9. Um plano α tangencia uma esfera de centro O e raio de medida de comprimento r, isto é, α tem só um ponto em comum com a esfera. Outro plano β, paralelo a α, contém o centro O. A medida da distância entre os planos α e β é: Q9. Alternativa **c**.

a. π **b.** πr **c.** r **d.** $2r$

Q10. As bolas de borracha representadas na figura a seguir são esféricas e não maciças. Q10. Alternativa **c**.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Com a quantidade de borracha usada para fazer 12 bolas maiores podem-se fazer ______ bolas menores.

a. 4 **b.** 8 **c.** 48 **d.** 96

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

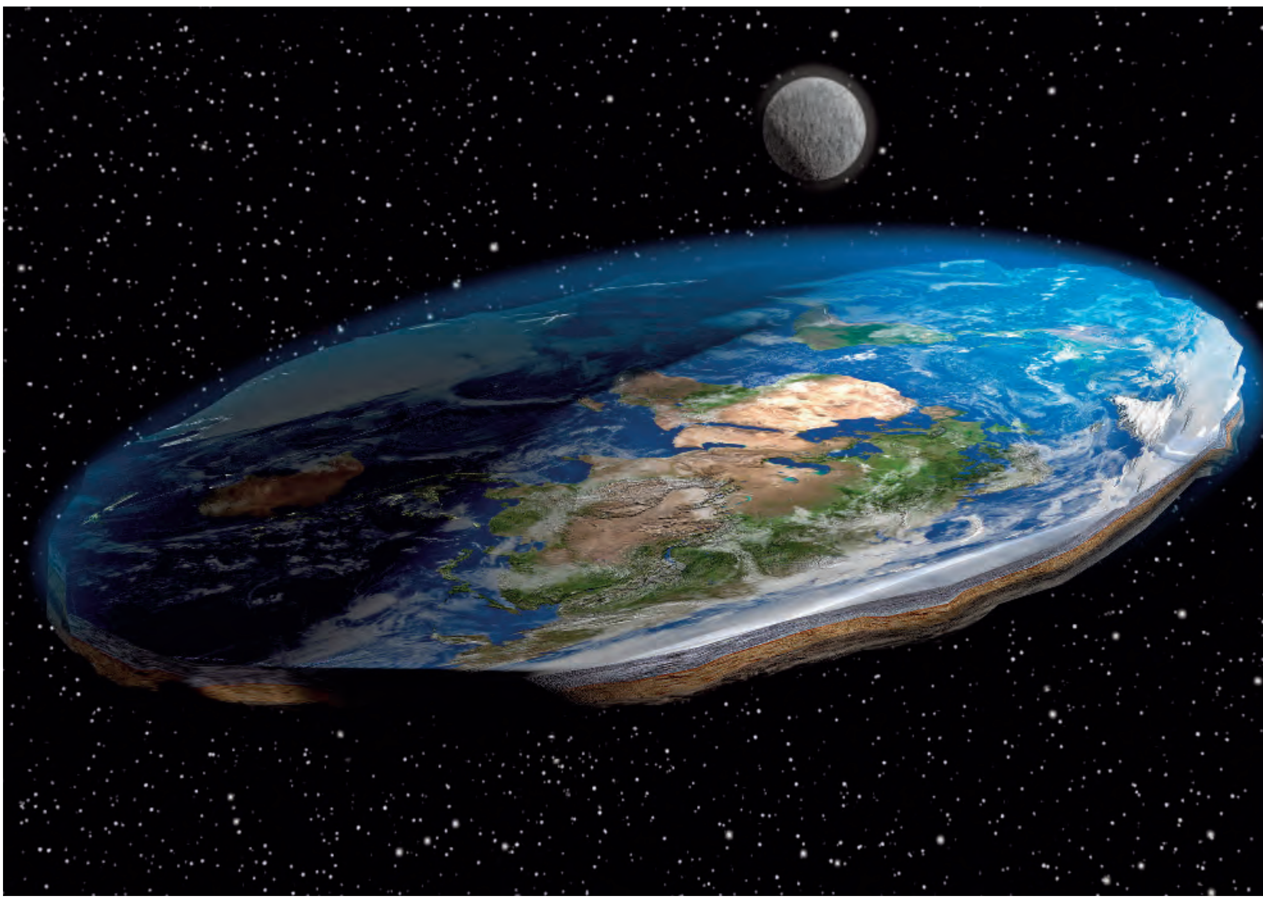
Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Identificar cilindros, cones, troncos de cone, esferas e seus respectivos elementos.	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Calcular a medida da área da superfície de corpos redondos.	X	X		X	X		X			X
Determinar a medida do volume de corpos redondos.			X			X		X		

A lenda do terraplanismo

ODS 16

A ciência já comprovou por meio de experimentos, fotos de satélite e viagens espaciais que a Terra tem o formato aproximado de uma esfera. No entanto, a partir de 2014, ganhou destaque a pseudoteoria de que a superfície da Terra seria plana: o movimento terraplanista. Essa pseudoteoria é uma *fake news* e ganhou adeptos em vários lugares do mundo, incluindo o Brasil.

AUNT SPRAY/SHUTTERSTOCK



Representação artística de como seria a Terra plana no espaço. Sem escala, cores fantasia. Esse tipo de imagem circulou com frequência na internet, induzindo milhares de pessoas a esse erro conceitual.

Os argumentos dos terraplanistas se resumem a tentativas de refutar conceitos provados e comprovados por mais de 2 mil anos de ciência.

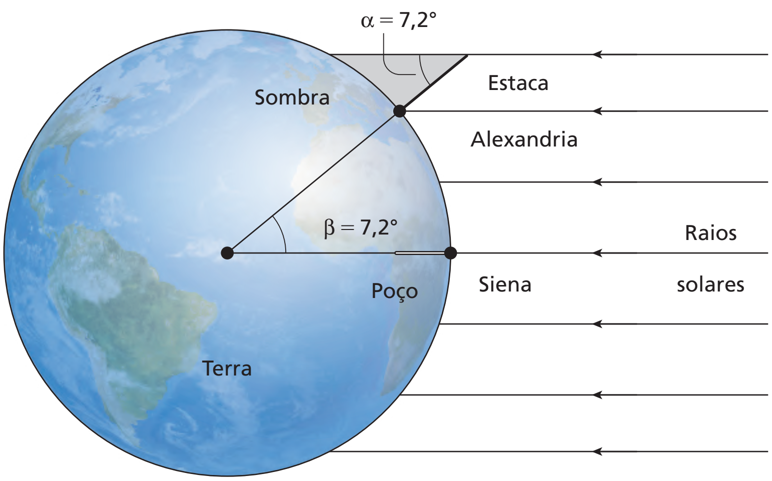
Eratóstenes (276 a.C.-194 a.C.), matemático, astrônomo, geógrafo e historiador grego, sem dispor dos recursos tecnológicos sofisticados como os que temos hoje, constatou que a superfície da Terra não é plana e, em 240 a.C., mediu o comprimento de sua circunferência máxima.

Por meio de documentos e experimentos, Eratóstenes observou que, em Siena, havia um local onde o Sol poderia ser visto refletido no fundo de um poço, sem a formação de sombra. Isso ocorria apenas uma vez por ano, ao meio-dia do dia mais longo do ano. Caso a superfície da Terra fosse plana, no mesmo dia e horário, esse fato aconteceria também em outro local. No entanto, Eratóstenes constatou que, em Alexandria (que ele acreditava se situar no mesmo meridiano de Siena), nesse mesmo dia e hora, uma vareta projetava uma sombra e que a medida da abertura do ângulo de inclinação com que os raios solares incidiam na vareta era de aproximadamente 7,2°.

2. Medida de comprimento da vareta e medida de comprimento da sombra projetada. Exemplo de resposta: Eratóstenes calculou a razão entre a medida de comprimento da sombra projetada pela medida de comprimento da vareta obtendo a tangente do ângulo de medida de abertura α. Com base nessa tangente, ele obteve uma medida aproximada da abertura α.

Diante disso, Eratóstenes concluiu que a superfície da Terra era curva, pois a sombra se formou devido ao Sol não estar incidindo diretamente sobre a vareta, mas, sim, de forma inclinada.

Agora, analise como Eratóstenes calculou a medida do comprimento da circunferência máxima da Terra.



Representação artística do experimento realizado por Eratóstenes em 240 a.C. Sem escala, cores fantasia.

Como, em Alexandria, a medida da abertura do ângulo de inclinação com que os raios solares incidiam na vareta era de aproximadamente 7,2°, então $\beta = 7{,}2°$, pois retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes. Os raios solares, nesse caso, podem ser associados a retas paralelas, e a transversal corresponde à reta "imaginária" que passa pelo centro da Terra e coincide com a vareta colocada em Alexandria.

A medida da distância entre as cidades de Siena e Alexandria, obtida por agrimensores daquela época, era de aproximadamente 5.000 estádios. Como 1 estádio equivale a 0,16 km, então a medida da distância entre as cidades era de aproximadamente 800 km. Indicando por C a medida aproximada do comprimento da circunferência máxima da Terra, temos:

$$\frac{C}{360°} = \frac{800 \text{ km}}{7{,}2°}$$

$$C = \frac{800 \text{ km}}{7{,}2°} \cdot 360°$$

$$C = 800 \text{ km} \cdot 50$$

$$C = 40.000 \text{ km}$$

3. Exemplos de resposta: A posição das estrelas e a visibilidade de algumas constelações apenas no hemisfério Norte ou Sul; a movimentação da Terra em relação ao Sol; a sombra redonda da Terra sobre a Lua durante um eclipse; fotografias da Terra tiradas do espaço.

Portanto, Eratóstenes concluiu que $C = 40.000$ km.

Atualmente, sabe-se que a medida obtida por Eratóstenes foi muito próxima da medida que instituições físicas atuais obtiveram empregando o uso de recursos tecnológicos sofisticados (40.076 km).

Atividades

Registre em seu caderno

1. **ARGUMENTAÇÃO** O que você responderia ao ser questionado sobre o formato da Terra? Que evidências você utilizaria para construir seus argumentos? 1. Respostas pessoais.

2. De que medidas Eratóstenes precisou para determinar a medida da abertura do ângulo α (ângulo de inclinação com que os raios solares incidiam na vareta colocada em Alexandria)? Explique como ele fez.

3. Pesquise e cite pelo menos três evidências do formato aproximadamente esférico da Terra. Compartilhe sua resposta com os colegas.

OBJETO DIGITAL **Vídeo: Algumas evidências da esfericidade da Terra**

Este vídeo aborda situações históricas em que evidenciavam que a Terra não poderia ser plana ou achatada, como a observação dos eclipses lunares e de constelações, visíveis apenas em certas regiões. Atualmente, imagens capturadas por satélites reforçam essas evidências científicas.

PESQUISA E AÇÃO Feira de empreendedorismo

OBJETIVOS

Pesquisar informações sobre empreendedorismo; identificar problemas da comunidade que possam gerar um negócio, definindo um produto; pesquisar informações sobre como começar, formalizar e operar um negócio; criar um produto; organizar uma feira de empreendedorismo para apresentar, além do produto criado, o processo de trabalho.

ODS 9 ODS 12

IGOR ALECSANDER/ISTOCK/GETTY IMAGES

O brechó é um tipo de negócio que envolve a venda de roupas, sapatos e acessórios usados, o que torna os preços mais acessíveis. Além do preço atrativo, o brechó é uma maneira de prolongar o uso de produtos, sendo uma alternativa sustentável de empreender.

Alguma vez você já observou um problema no município ou bairro onde mora, ou na escola em que estuda, e pensou em como poderia resolvê-lo? Se já fez isso, você teve uma atitude empreendedora. Um empreendedor observa tudo à sua volta e usa a criatividade para pensar em soluções para os problemas que encontra.

A preservação do meio ambiente, por exemplo, tem sido uma preocupação constante no mundo inteiro, e com ela surgem novos produtos e serviços ambientalmente responsáveis. Atitudes empreendedoras como essas preservam o meio ambiente, além de atenderem às necessidades da população.

No Brasil, muitos empreendedores construíram seu próprio negócio. Além da criatividade, eles precisaram adquirir conhecimentos para organizar e operacionalizar uma empresa.

Nesta seção, vocês vão pesquisar informações sobre o tema empreendedorismo e o que é necessário para iniciar um negócio. Também vão simular a criação de uma empresa, escolhendo um produto que atenda a uma necessidade específica e que seja ambientalmente sustentável. As informações pesquisadas e o produto criado serão apresentados para a comunidade escolar em uma feira de empreendedorismo.

Etapa 1: Pesquisa sobre empreendedorismo

Etapa 1: Comentários no *Suplemento para o professor*.

1. Pesquise sobre o tema empreendedorismo e responda aos itens a seguir.
   a. O que é empreendedorismo?
   b. Quais são as principais características de um empreendedor?

2. Reúna-se com os colegas e o professor, conversem sobre as respostas da atividade anterior e reflitam acerca da importância de compartilhar essas informações para auxiliar outras pessoas que desejem empreender.

Etapa 2: Escolha de um produto

Etapa 2: Comentários no *Suplemento para o professor*.

3. Neste momento, você e seus colegas vão escolher um produto que apresentarão na feira de empreendedorismo. Levantem ideias de negócios que podem ser criados. Pensem em algo que atenda às necessidades da comunidade e que seja ambientalmente responsável, ou seja, que se relacione com a preservação do meio ambiente para as atuais e as futuras gerações. Anotem as ideias sugeridas para que, em seguida, possam escolher uma delas.

4. Conversem sobre as propostas apresentadas e definam o produto. Vocês podem selecionar algumas das melhores ideias e, depois, fazer uma votação para decidir.

Etapa 3: Criação de uma empresa

Etapa 3: Comentários no *Suplemento para o professor*.

5. Definido o tipo de negócio, é o momento de criar a empresa. Negócios são acordos comerciais que, quando formalizados, podem se tornar uma empresa. Para formalizar o negócio, vocês vão se organizar em cinco grupos para a realização das atividades a seguir. Para isso, os integrantes de cada grupo devem realizar pesquisas e conversar para responder às questões propostas. Em seguida, cada grupo deverá elaborar um relatório com as respostas das questões para serem discutidas na próxima etapa.

Grupo 1: responsável pela organização da empresa.

- Quantos clientes a empresa pretende atender por mês?
- Quantos colaboradores serão necessários?
- Quais serão as tarefas de cada colaborador?
- Qual valor deverá ser investido no negócio?
- Quais serão as despesas iniciais para que a empresa comece a funcionar (aluguel, móveis, equipamentos, materiais)?
- Quais são as estimativas de despesas e receitas da empresa no primeiro ano? E no segundo ano?
- Qual recurso será utilizado para criar e operacionalizar a empresa? Será necessário obter empréstimo ou financiamento? Caso seja necessário, como proceder?

Grupo 2: responsável por buscar as informações necessárias para formalizar o negócio.

- O que significa registrar uma empresa?
- O que é o Cadastro Nacional da Pessoa Jurídica (CNPJ)?
- Quais direitos o empreendedor conquista ao formalizar a empresa? E deveres?
- Como escolher um nome para a empresa? Qual será o nome dessa empresa? (*)
- Quais modalidades de empresa existem? Qual modalidade será escolhida para esse negócio? (*)
- Quais documentos são necessários para registrar a empresa na modalidade escolhida?
- Quais taxas deverão ser pagas para o registro da empresa?

Grupo 3: responsável por realizar a pesquisa de mercado, ou seja, buscar informações que ajudem a lançar um produto no mercado.

- O que é uma pesquisa de mercado?
- Qual é o objetivo da pesquisa para esse empreendimento: lançar um produto ou escolher as formas de divulgação de um produto?
- Qual será a **população** pesquisada? Serão feitas entrevistas com possíveis clientes? Visitas a futuros concorrentes?
- Realizem a pesquisa de mercado da empresa.

Observação

População é o conjunto de todos os elementos ou resultados sob investigação em uma pesquisa.

Grupo 4: responsável por criar o plano de *marketing*. Esse plano é utilizado pela empresa para decidir, por exemplo, o preço de um produto ou onde ele será vendido.

- O que é plano de *marketing*?
- Como criar um plano de *marketing*?
- Criem o plano de *marketing* da empresa.

Grupo 5: responsável por criar o *slogan* do produto.

- O que é *slogan*?
- Quais *slogans* vocês conhecem?
- Pesquisem alguns *slogans* e conversem sobre eles. Quais ideias e sentimentos eles despertam?
- Criem algumas opções de *slogan* para o produto da empresa. Observem que o *slogan* deve ser breve e fácil de lembrar, além de provocar as ideias e/ou emoções desejadas. (*)

Etapa 4: Comentários no *Suplemento para o professor*.

Etapa 4: Compartilhamento de informações

6. Com base nos relatórios elaborados pelos grupos, a turma deverá compartilhar e discutir as informações obtidas na etapa anterior.

Em algumas tarefas relacionadas ao nome, modalidade e registro da empresa e ao *slogan* do produto (grupos 2 e 5, respectivamente), foram realizadas pesquisas, alguns levantamentos e sugestões; no entanto, a escolha final será feita nesta etapa.

7. Após as discussões e as escolhas finais, registre, nos respectivos relatórios, as decisões das questões que estavam em aberto.

Etapa 5: Comentários no *Suplemento para o professor*.

Etapa 5: Criação do produto

Vocês já definiram o produto e formalizaram a empresa. Agora, reúnam-se com os colegas e com o professor para criar o produto.

8. Para a preservação do meio ambiente, é essencial consumir os produtos de forma consciente e responsável. Além disso, é importante que as empresas sejam sustentáveis. Uma empresa sustentável, ao criar seu produto, pensa no melhor aproveitamento das matérias-primas e dos recursos naturais. Por isso, ao criarem o produto, pensem na economia e na sustentabilidade. Antes de começar a criação do produto, discutam sobre os pontos a seguir.

- Quais materiais serão necessários para criar o produto definido na etapa **2**?
- Quais recursos naturais serão necessários?
- Onde o produto será criado?
- Será necessário pedir auxílio a professores de outras disciplinas? Quais? Como essa parceria poderá ser realizada?

9. Criem o produto escolhido. O produto será apresentado na feira de empreendedorismo.

(*) Para esses itens, os grupos responsáveis devem levar algumas opções para decidirem com toda a turma.

Etapa 6: Escolha da embalagem

Etapa 6: Comentários no *Suplemento para o professor*.

10. A embalagem tem a função de armazenar o produto, mas, muitas vezes, pode ter outras utilidades, como fazer sua divulgação. Em alguns casos, a embalagem pode ser reutilizada para outros fins. Usar uma embalagem versátil, com outras funções e que pode ser reutilizada depois, também é uma forma de praticar a sustentabilidade. Antes de escolher a embalagem, conversem sobre os pontos a seguir.

- Como será a embalagem do produto? Lembrem-se de que é possível criar embalagens com medidas diferentes e que comportem a mesma quantidade de produto. Por isso, escolham a embalagem que utilize menos material em sua produção.
- Para decidir a melhor embalagem para o produto, levem para a sala de aula diferentes embalagens de um produto semelhante ao que vão produzir. Vocês podem criar embalagens com formatos e medidas diferentes. Calculem a medida da área total da superfície e a medida do volume das embalagens e definam qual delas é mais econômica, ou seja, utiliza menos material em sua produção.

11. Criem a embalagem do produto usando as medidas da embalagem mais econômica. Vocês também podem pensar em mais alternativas para tornar o produto ambientalmente sustentável, por exemplo, utilizar materiais recicláveis na embalagem e criar refil para a venda do produto.

Os capítulos **3** e **4** deste volume tratam de poliedros e corpos redondos, respectivamente. Revejam os formatos apresentados nesses capítulos e suas correspondentes planificações das superfícies e analisem a possibilidade de usá-los nas embalagens. Mesmo que vocês optem por comprar as embalagens de um fornecedor, para essa atividade construam alguns protótipos de embalagens, orientando-se pelos capítulos mencionados e fazendo as devidas adaptações para contemplar as especificidades e as necessidades do produto escolhido.

Etapa 7: Comentários no *Suplemento para o professor*.

Etapa 7: Organização da feira de empreendedorismo

12. Escolham um local adequado para realizar a feira de empreendedorismo. O local deve ter espaço para que cada grupo da etapa **3** exponha as informações dos relatórios produzidos. Além disso, o produto criado pela turma e sua embalagem também deverão ser apresentados. O espaço também deve permitir que os visitantes da feira observem tudo o que está exposto.

13. Alguns estudantes da turma podem ser escolhidos para realizar a abertura da feira de empreendedorismo. Eles podem preparar uma apresentação falando sobre o objetivo da feira, a criação da empresa e o produto produzido.

14. Façam cartazes convidando a comunidade escolar para participar da feira. Informem o objetivo, a data, o horário e o local. Vocês também podem criar convites digitais e divulgá-los no *site* e nas redes sociais da escola.

Iniciem a feira de empreendedorismo de acordo com o que foi planejado. Convidem os participantes para conhecer o produto criado e todo o processo que possibilitou a realização do evento. Caso algum participante da feira tenha dúvidas, procurem respondê-las com base nas pesquisas e nas discussões realizadas. Caso não saibam responder a alguma pergunta, peçam orientação aos professores envolvidos.

Etapa 8: Análise da atividade

Etapa 8: Comentários no *Suplemento para o professor*.

15. Após a feira de empreendedorismo, em conjunto com os colegas, avaliem o trabalho realizado. Nesse momento, vocês podem conversar sobre os pontos a seguir.

- Gostaram de pesquisar sobre empreendedorismo e sobre como formalizar e organizar um negócio?
- Como foi a experiência de participar de uma feira de empreendedorismo?
- Gostaram de compartilhar informações com as pessoas que visitaram a feira?
- Vocês acham que a exposição ajudou, de alguma forma, os visitantes?
- A feira apresentou informações importantes sobre o que é empreendedorismo e sobre como empreender?
- Vocês conseguiram trabalhar de maneira colaborativa durante as atividades?
- O que poderia ter sido melhor?

16. Agora, você fará uma autoavaliação que será entregue ao professor em formato de relatório. Para fazer a autoavaliação, pense nas questões a seguir.

- Ouvi com atenção as orientações do professor durante as atividades?
- Participei dos momentos de conversa e de pesquisa de informações?
- Auxiliei os colegas e o professor na organização da feira de empreendedorismo?
- Ouvi as falas dos colegas e do professor com atenção e respeito?
- Compreendi o que é empreendedorismo?
- Consegui compreender quais atitudes e características o empreendedor deve ter?
- Percebi qual é a importância de organizar uma feira de empreendedorismo para a comunidade escolar?
- Houve dificuldades durante as atividades propostas? Quais? Como busquei resolvê-las?
- O que aprendi durante a criação do produto?
- O que aprendi durante a organização e a realização da feira de empreendedorismo?

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 2

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

1. Qual é o conjunto solução da equação $-15x - 30 = 70$?

1. Alternativa **c**.

a. $S = \left\{\frac{-20}{3}\right\}$, considerando $U = \mathbb{Z}$.

b. $S = \left\{\frac{20}{3}\right\}$, considerando $U = \mathbb{Q}$.

c. $S = \left\{\frac{-20}{3}\right\}$, considerando $U = \mathbb{Q}$.

d. $S = \{0\}$, considerando $U = \mathbb{N}$.

e. $S = \{-2\}$, considerando $U = \mathbb{Z}$.

2. Qual equação do 1º grau com duas incógnitas a seguir tem o par ordenado $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right)$ como solução? 2. Alternativa **b**.

a. $x + y = \frac{3}{7}$

b. $\frac{3}{2}x + 4y = 2$

c. $4x + 3y = 3$

d. $8x + 3y = 4$

e. $x + y = 11$

3. Considere este sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

$$\begin{cases} -2x + 2y = 6 \\ x + y = -7 \end{cases}$$

Qual dos pares ordenados a seguir é solução desse sistema?

3. Alternativa **a**.

a. $(-5, -2)$

b. $(2, 5)$

c. $(-1, -2)$

d. $(-3, -4)$

e. $(-12, 5)$

4. O sistema formado pelas equações $x + y = 3$ e $x + y = 0$ é:

4. Alternativa **b**.

a. possível e determinado.

b. impossível.

c. possível e indeterminado.

d. representado graficamente por retas concorrentes.

e. representado graficamente por retas coincidentes.

5. Considere a inequação $3(x - 4) + 15 \geqslant 6(2x - 3)$, sendo $U = \mathbb{Q}$. Qual é a solução dessa inequação? 5. Alternativa **e**.

a. $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant \frac{2}{3}\right\}$

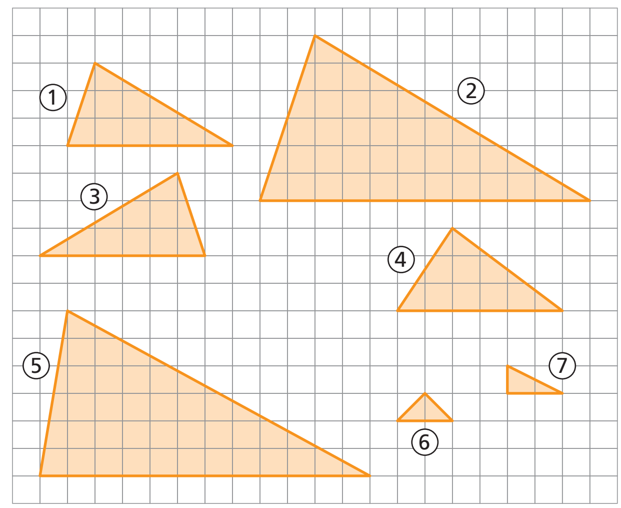
b. $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant \frac{14}{9}\right\}$

c. $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant -6\}$

d. $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant \frac{7}{3}\right\}$

e. $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant \frac{7}{3}\right\}$

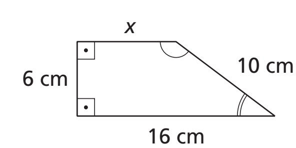
6. Analise os triângulos representados na malha quadriculada a seguir.

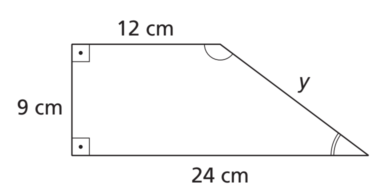


Quais triângulos são congruentes? 6. Alternativa **b**.

a. 1 e 2.
b. 1 e 3.
c. 1 e 4.
d. 2 e 5.
e. 6 e 7.

7. Considerando que os trapézios a seguir são semelhantes, qual é a medida de comprimento de $x + y$? 7. Alternativa **d**.





a. 8 cm

b. $\frac{44}{3}$ cm

c. 15 cm

d. 23 cm

e. 33 cm

8. Qual das figuras **não** apresenta simetria de reflexão?

8. Alternativa **b**.

a. Triângulo isósceles.

b. Trapézio retângulo.

c. Losango.

d. Quadrado.

e. Círculo.

Capítulo 5

MATRIZES E DETERMINANTES

VCG/GETTY IMAGES

Ary Borges e Bia Zaneratto comemoram um dos gols do Brasil contra o Panamá na Copa do Mundo de Futebol feminino de 2023, em Adelaide, Austrália.

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre estes e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 5 ODS 10

OBJETO DIGITAL **Vídeo: Da proibição ao apogeu: conheça a trajetória do futebol feminino no Brasil**

O vídeo complementa e enriquece o tema do texto de abertura deste capítulo abordando a história do futebol feminino e as dificuldades enfrentadas para que as mulheres pudessem ocupar um local de notoriedade em um esporte majoritariamente masculino.

Matriz

A Copa do Mundo de Futebol feminino é a competição mais importante dessa modalidade esportiva. Acontece de quatro em quatro anos e é realizada desde 1991. Em nove edições do campeonato, a seleção dos Estados Unidos é a maior campeã, com quatro títulos (1991, 1999, 2015 e 2019). Outras seleções ganhadoras foram a Noruega (1995), o Japão (2011) e a Espanha (2023), com um título cada uma, e a Alemanha, que é bicampeã (2003 e 2007).

Apesar de nunca ter ganhado uma Copa, o Brasil é uma das principais seleções de futebol feminino, e, logo após ter sido eliminada na fase de grupos na Copa de 2023, ocupava o 9º lugar no *ranking* mundial.

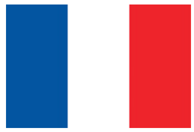
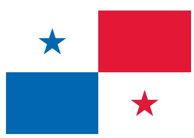
Mesmo com estatísticas favoráveis na Copa da Austrália e da Nova Zelândia de 2023 em relação à quantidade de público, ao retorno publicitário e à premiação, o futebol feminino está longe dos números do futebol masculino, que tem, principalmente, salários e premiações bem superiores. Por esse motivo, atletas de diversas nacionalidades protestaram antes da Copa. A seleção do Canadá ameaçou até boicotar a *SheBelieves Cup*, um tradicional campeonato de futebol feminino de seleções realizado anualmente nos Estados Unidos. Espera-se que as reivindicações das mulheres e as posições profissionais conquistadas nos dias atuais ajudem a diminuir essas diferenças progressivamente.

MADDIE MEYER - FIFA/GETTY IMAGES

Seleção feminina de futebol da Espanha, campeã da Copa do Mundo de Futebol feminino de 2023, na Austrália e na Nova Zelândia.

A seguir, observe a tabela de classificação do grupo da seleção brasileira na Copa do Mundo de 2023 com o número de vitórias, empates e derrotas de cada seleção.

Classificação do grupo F da Copa do Mundo de Futebol feminino de 2023

Posição	Seleção	Vitórias	Empates	Derrotas
1º	França  INIMMA-IS/ ISTOCK/GETTY IMAGES	2	1	0
2º	Jamaica  ANASTASIIA_M/ ISTOCK/GETTY IMAGES	1	2	0
3º	Brasil  VANREEEL/ISTOCK/ GETTY IMAGES	1	1	1
4º	Panamá  KOSMOZOO/ DIGITALVISION VECTORS/GETTY IMAGES	0	0	3

Fonte: elaborado com base em COPA do Mundo Feminina 2023 – grupos e eliminatórias. **Fifa**. Disponível em: https://www.fifa.com/pt/tournaments/womens/womensworldcup/australia-new-zealand2023/groups-and-knockout. Acesso em: 31 ago. 2024.

A organização dos dados numéricos em tabelas facilita a leitura e a interpretação desses dados, bem como alguns cálculos.

- Na coluna do número de vitórias, podemos verificar quantas vitórias cada seleção obteve.
- No cruzamento da coluna da quantidade de derrotas com a linha da Jamaica, temos o número 0, que indica a quantidade de derrotas dessa seleção.
- Na terceira linha, vemos que a seleção do Brasil obteve 1 vitória, 1 empate e 1 derrota.

Na Matemática, tabelas como a do grupo da seleção brasileira podem ser simplificadas com apenas os dados numéricos dispostos em linhas (filas horizontais) e colunas (filas verticais). A esse tipo de tabela damos o nome de **matriz**.

Uma matriz pode ser escrita entre parênteses ou entre colchetes, conforme o exemplo a seguir.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Essas matrizes representam a tabela do grupo F da Copa do Mundo de Futebol feminino de 2023, com o número de vitórias, de empates e de derrotas de cada seleção.

Como elas têm 4 linhas e 3 colunas, dizemos que são matrizes de **ordem** 4×3 (lemos: "quatro por três"), ou matrizes do **tipo** 4×3. Para simplificar a notação, podemos classificá-las como matrizes 4×3.

Define-se **matriz** $\boldsymbol{m \times n}$ (lemos: "m por n") como uma tabela com $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas, em que $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Confira alguns exemplos de matrizes a seguir.

a. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 4×2 (lemos: "quatro por dois"), pois tem 4 linhas e 2 colunas.

b. $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & x^2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & \sqrt{5} & x \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×3 (lemos: “três por três”), pois tem 3 linhas e 3 colunas.

Como a quantidade de linhas e colunas é a mesma (3), podemos dizer que essa é uma matriz de ordem 3.

c. $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×1 (lemos: “três por um”).

A ordem de uma matriz pode ser indicada no canto inferior direito, como nos exemplos a seguir.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 9 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}_{1 \times 4}$ (matriz de 1 linha e 4 colunas)

b. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 2 & 7 & 4 \\ 9 & 0 & \sqrt{5} & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$ (matriz de 3 linhas e 5 colunas)

Representação genérica de uma matriz

Os números que compõem uma matriz são chamados de **elementos** ou **termos**.

Em uma matriz, cada elemento ocupa uma posição definida por certa linha e por certa coluna, nessa ordem. Geralmente, nomeamos uma matriz com uma letra maiúscula e cada elemento com a letra minúscula correspondente seguida dos índices, respectivamente, da linha e da coluna em que o elemento está localizado na matriz.

Por exemplo, nesta matriz B, cada elemento pode ser representado pelo símbolo b_{ij}, em que i indica a linha e j indica a coluna ocupadas por ele.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1^{\underline{a}}\text{ coluna} & 2^{\underline{a}}\text{ coluna} & 3^{\underline{a}}\text{ coluna} \end{array} \\ B = & \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1^{\underline{a}}\text{ linha} \\ \leftarrow 2^{\underline{a}}\text{ linha} \\ \leftarrow 3^{\underline{a}}\text{ linha} \\ \leftarrow 4^{\underline{a}}\text{ linha} \end{array} \end{array}$$

Observe que o elemento 3 da matriz B encontra-se no cruzamento da $4^{\underline{a}}$ linha com a $1^{\underline{a}}$ coluna. Indicamos esse elemento por b_{41}.

Portanto, $b_{41} = 3$ (lemos: “b quatro um é igual a três”).

Algumas matrizes podem ter uma **lei de formação** para determinar seus elementos. Por exemplo, a matriz B pode ser produzida com base em $b_{ij} = i - j$.

De acordo com a matriz B:

a. o elemento que está na $1^{\underline{a}}$ linha e na $2^{\underline{a}}$ coluna é o -1, pois $b_{12} = 1 - 2 = -1$;

b. o elemento que está na $2^{\underline{a}}$ linha e na $1^{\underline{a}}$ coluna é o 1, pois $b_{21} = 2 - 1 = 1$;

c. o elemento que está na $3^{\underline{a}}$ linha e na $3^{\underline{a}}$ coluna é o 0, pois $b_{33} = 3 - 3 = 0$.

Uma matriz genérica A é representada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, com $i, j, m, n \in \mathbb{N}^*$. Assim, a matriz A, de ordem $m \times n$, pode ser representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Atividade resolvida

R1. Escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, na qual $a_{ij} = i + 2j$.

▶ **Resolução**

Uma matriz 2×3 é representada genericamente por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Aplicando a lei de formação dos elementos dessa matriz, temos:

- $a_{11} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$;
- $a_{12} = 1 + 2 \cdot 2 = 5$;
- $a_{13} = 1 + 2 \cdot 3 = 7$;
- $a_{21} = 2 + 2 \cdot 1 = 4$;
- $a_{22} = 2 + 2 \cdot 2 = 6$;
- $a_{23} = 2 + 2 \cdot 3 = 8$.

Portanto, $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Igualdade de matrizes

Tomando-se matrizes de mesma ordem, os elementos de mesmo índice, isto é, aqueles que ocupam a mesma posição, são denominados **elementos correspondentes.**

Considere as matrizes A e B a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Como as matrizes A e B são de mesma ordem (3×3), seus elementos correspondentes são:

$$\begin{matrix} a_{11} \text{ e } b_{11} & a_{12} \text{ e } b_{12} & a_{13} \text{ e } b_{13} \\ a_{21} \text{ e } b_{21} & a_{22} \text{ e } b_{22} & a_{23} \text{ e } b_{23} \\ a_{31} \text{ e } b_{31} & a_{32} \text{ e } b_{32} & a_{33} \text{ e } b_{33} \end{matrix}$$

Se todos os elementos correspondentes das matrizes A e B forem iguais, dizemos que essas matrizes também são iguais.

Duas matrizes são **matrizes iguais** quando são de mesma ordem e todos os elementos correspondentes são iguais.

Atividade resolvida

R2. Determinar os valores de x, y e z que tornam as matrizes A e B iguais.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & y+z & 1 \\ 3 & 5 & y-z \\ |x| & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

▸ Resolução

Para que as matrizes A e B sejam iguais, é necessário que os elementos correspondentes sejam iguais. Assim, devemos ter:

- $|x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$
- $\begin{cases} y + z = 7 \\ y - z = 9 \end{cases}$

Resolvendo o sistema pelo método da adição, obtemos:

$$+\begin{cases} y \cancel{+z} = 7 & \text{(I)} \\ y \cancel{-z} = 9 & \text{(II)} \end{cases}$$
$$\overline{2y \qquad = 16 \Rightarrow y = 8}$$

Substituindo y por 8 em (I), obtemos:

$8 + z = 7 \Rightarrow z = -1$

Portanto, $x = \pm 4$, $y = 8$ e $z = -1$.

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$

6. Não; nesse caso, para quaisquer valores de x, y e z, as matrizes A e B não seriam iguais, pois todos os elementos correspondentes precisam ser iguais, mas $a_{11} \neq b_{11}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Determine a ordem destas matrizes.

a. $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ **1 a.** 1×3

b. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ **1 b.** 3×1

c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ **1 c.** 2×1

d. $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ **1 d.** 2×2

2. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, na qual $a_{ij} = 3i + 2j$.

3. Escreva a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, em que: **3.** $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$b_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1, \text{ para } i = j \\ 3j, \text{ para } i \neq j \end{cases}$$

4. Identifique os elementos de A, em que $i = j$ ou $i + j = 4$.

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} |-6| & 0 & 3 \\ 8 & 7 & |-4| \\ -7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

4. $a_{11} = |-6| = 6$, $a_{22} = 7$, $a_{33} = 9$, $a_{13} = 3$, $a_{31} = -7$.

5. Obtenha uma lei de formação que represente os elementos da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{pmatrix}$. **5.** Resposta possível: $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, em que $a_{ij} = i^j$

6. ARGUMENTAÇÃO Considere as matrizes A e B da **atividade resolvida R2**. Caso mudássemos b_{11} para um número diferente de 2, mantendo os valores de x, y e z, as matrizes ainda seriam iguais? Explique.

7. Considere as matrizes $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. Elas são iguais? Por quê?

7. Não, pois elas não são de mesma ordem. A primeira é 5×1 e a segunda é 1×5.

8. Determine a, b, c e d para que as matrizes $\begin{pmatrix} a + 2b & 3c - 2d \\ -a + 3b & -2c + d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ sejam iguais.

8. $a = 1$, $b = 3$, $c = -1$ e $d = -3$.

Algumas matrizes especiais

De acordo com algumas características, certas matrizes recebem nomes especiais. Observe os tipos de matriz a seguir.

Matriz linha e matriz coluna

As matrizes que têm uma só linha ou uma só coluna são conhecidas, respectivamente, como **matriz linha** e **matriz coluna**.

Confira estes exemplos.

a. $\begin{pmatrix} -8 & \frac{3}{4} & 5{,}1 \end{pmatrix}$ é uma matriz linha de ordem 1×3.

b. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz coluna do tipo 2×1.

Matriz quadrada

A matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas é chamada de **matriz quadrada**.

Observe este exemplo.

$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2 ou, simplesmente, matriz de ordem 2.

As matrizes quadradas apresentam elementos que formam o que chamamos de **diagonais.**

Considere uma matriz quadrada A de ordem n. Os elementos a_{ij} com $i = j$, isto é, a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}, formam a **diagonal principal** dessa matriz. Os elementos a_{ij} com $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária** dessa matriz.

Analise esta matriz quadrada A.

Os elementos 1, 2 e 3 formam a diagonal principal e os elementos 5, 2 e -5 formam a diagonal secundária, conforme indicado na matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & -7 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

diagonal secundária diagonal principal

> **Observação**
>
> Uma matriz quadrada A com todos os elementos não pertencentes à diagonal principal (a_{ij} com $i \neq j$) iguais a zero é chamada de **matriz diagonal**.

Matriz nula

A matriz em que todos os elementos são iguais a zero é denominada **matriz nula.**

Observe o exemplo a seguir.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula do tipo 3×2, também indicada por $0_{3 \times 2}$.

Matriz identidade

A matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são iguais a zero é chamada de **matriz identidade**, também indicada por I_n.

Confira estes exemplos de matrizes identidades.

a. $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. $I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

> **Observação**
>
> Em qualquer matriz identidade de ordem n, vale a relação:
>
> $$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

9. Determine a matriz quadrada A de ordem 2, na qual $a_{ij} = \frac{i}{j}$.

9. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

10. Se $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, com $a_{ij} = 2i + j^2$, determine a diagonal principal e a diagonal secundária de A.

10. Diagonal principal: 3, 8 e 15; diagonal secundária: 11, 8 e 7.

11. Sendo $B = (b_{ij})_{4 \times 4}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, calcule a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem.

11. 375

12. Determine k, real, para que: **12.** 1

$$\begin{pmatrix} k^2 & k - 1 \\ -k + 1 & k \end{pmatrix} = I_2$$

13. O **traço** de uma matriz quadrada corresponde à soma dos elementos de sua diagonal principal. Determine o traço da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, com: **13.** 14

$$a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j, \text{ se } i = j \\ i^{j+1}, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Adição e subtração de matrizes

O dono de uma rede de escolas de idiomas fez um levantamento para saber a quantidade total de estudantes matriculados nos meses de março e abril deste ano, por unidade escolar.

PHOTOGRAPHEE.EU/SHUTTERSTOCK

Professora ensinando inglês para crianças.

Primeiro, ele construiu duas tabelas com o total de estudantes matriculados em cada mês.

Estudantes matriculados em março

Turno	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
Matutino	20	22	15
Vespertino	10	16	8
Noturno	15	21	13

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Estudantes matriculados em abril

Turno	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
Matutino	28	20	14
Vespertino	15	15	10
Noturno	10	26	19

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Com os dados das tabelas, o dono dessa rede de escolas de idiomas construiu uma nova tabela com o total de estudantes matriculados nos dois meses em cada turno e em cada unidade. Analise a seguir.

Estudantes matriculados em março e abril

Turno	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
Matutino	20 + 28	22 + 20	15 + 14
Vespertino	10 + 15	16 + 15	8 + 10
Noturno	15 + 10	21 + 26	13 + 19

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Assim, obteve:

Estudantes matriculados em março e abril

Turno	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
Matutino	48	42	29
Vespertino	25	31	18
Noturno	25	47	32

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Ele também percebeu que poderia comparar o número de matriculados nos meses de março e abril construindo uma nova tabela, mas com a diferença entre eles.

Diferença entre o total de estudantes matriculados em março e abril

Turno	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
Matutino	28 – 20	20 – 22	14 – 15
Vespertino	15 – 10	15 – 16	10 – 8
Noturno	10 – 15	26 – 21	19 – 13

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Assim, obteve a seguinte tabela:

Diferença entre o total de estudantes matriculados em março e abril

Turno	Unidade 1	Unidade 2	Unidade 3
Matutino	8	–2	–1
Vespertino	5	–1	2
Noturno	–5	5	6

Fonte: elaborado para fins didáticos.

O sinal negativo em alguns números da tabela indica que o mês de março teve maior quantidade de estudantes matriculados do que o mês de abril em alguns turnos e unidades.

A ideia trabalhada nessa situação será usada no estudo da adição e da subtração de matrizes.

Adição de matrizes

Observação

A matriz soma tem a mesma ordem das matrizes que foram adicionadas.

Dadas duas matrizes de mesma ordem, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a matriz soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, na qual $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e todo j.

Observe este exemplo de adição de matrizes.

Sejam as matrizes A e B, tal que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Como as matrizes A e B são de mesma ordem, para obter a matriz $C = A + B$, basta adicionar os elementos correspondentes de A e B:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+1 & 1+2 \\ 0+(-1) & 1+3 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Que matriz você obtém ao adicionar a matriz $0_{m \times n}$ a uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$?

Questão. A própria matriz A, pois $0_{m \times n}$ é a matriz nula, isto é, todos os seus elementos correspondem ao número zero; portanto, ao adicionar cada elemento (a_{ij}) da matriz A a zero, obtemos o próprio elemento (a_{ij}).

Matriz oposta

Chama-se **matriz oposta** da matriz A de ordem $m \times n$ (indicada por $-A$) a matriz que adicionada à matriz A resulta na matriz nula de mesma ordem, isto é, $A + (-A) = 0$, sendo 0 a matriz nula $0_{m \times n}$. Consequentemente, cada elemento da matriz $-A$ é oposto do elemento correspondente da matriz A.

Analise o exemplo a seguir.

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, então $-A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, pois:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-1) & -2 + 2 \\ -3 + 3 & 5 + (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que matriz você obtém ao calcular a matriz oposta da matriz oposta de uma matriz A?

Questão. A própria matriz A, pois, ao calcular o oposto do oposto de cada elemento a_{ij}, isto é, $-(-a_{ij})$, obtemos o próprio a_{ij}.
Espera-se que os estudantes percebam que pelo fato do oposto do oposto de um número ser o próprio número; então, a matriz oposta da matriz oposta é a matriz dada.

Propriedades da adição de matrizes

Dadas as matrizes A, B, C e $0_{m \times n}$ (matriz nula), todas de mesma ordem, valem as propriedades:

- comutativa: $A + B = B + A$;
- associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- existência do elemento neutro: $A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$;
- existência do elemento oposto: $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$.

Essas propriedades não serão demonstradas nesta coleção.

Subtração de matrizes

A diferença entre duas matrizes A e B de mesma ordem é obtida adicionando a matriz A à matriz oposta de B, isto é, $A - B = A + (-B)$.

Confira este exemplo de subtração de matrizes.

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, então a matriz $C = A - B$ é dada por:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Atividade resolvida

R3. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, obter $X_{2 \times 2}$ de modo que $A + X = B$.

▶ Resolução

Representando a matriz X por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + a & 1 + b \\ 0 + c & 3 + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Então:

- $2 + a = -1 \Rightarrow a = -3$;
- $1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$;
- $0 + c = 5 \Rightarrow c = 5$;
- $3 + d = 0 \Rightarrow d = -3$.

Logo, $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

É possível resolver de outro modo.

Poderíamos determinar a matriz X usando as propriedades da adição de matrizes:

$A + X = B \Rightarrow (-A) + A + X = (-A) + B \Rightarrow$

$\Rightarrow 0_{2 \times 2} + X = B - A \Rightarrow X = B + (-A)$

Assim:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

14 a. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ 14 b. $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ 16 a. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 16 b. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 16 c. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

14. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } D = I_3,$$

efetue, quando possível, as operações: 14 c. Não é possível.

a. $A + B$; **b.** $A + (B + C)$; **c.** $(A + B) + D$.

15. Reescreva o enunciado da atividade anterior de modo que todos os itens possam ser efetuados. 15. Resposta pessoal.

16. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcule:

a. $B - A$; **b.** $A - (B + I_2)$; **c.** $B - (A + 0_{2\times 2})$.

17. Determine a matriz X em cada item.

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 17 a. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 17 b. $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

18. Considerando as matrizes $A = (a_{ij})_{2\times 3}$, com $a_{ij} = i^2 + j^2$ para todo a_{ij}, e $B = (b_{ij})_{2\times 3}$, com $b_{ij} = 3i$ para todo b_{ij}, determine:

a. o elemento c_{22} da matriz $C = A + B$; 18 a. 14

b. o termo de C igual a 3. 18 b. Não existe.

Multiplicação de um número real por uma matriz

Sendo a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e k um número real, $k \cdot A$ é uma matriz de ordem $m \times n$ obtida pela multiplicação de k por todos os elementos de A.

Analise este exemplo de multiplicação de um número real k por uma matriz.

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -7 \\ 5 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ e $k = 3$, então:

$$k \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -7 \\ 5 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot(-7) \\ 3\cdot 5 & 3\cdot\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

Para essa matriz A, é válida a igualdade $A + A + A = 3 \cdot A$?

Questão. $A + A + A = \begin{pmatrix} 2+2+2 & 0+0+0 \\ 3+3+3 & -7-7-7 \\ 5+5+5 & \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$A + A + A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$

e $3A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$

Logo, $A + A + A = 3A$.

Atividade resolvida

R4. Determinar as matrizes X e Y tal que $\begin{cases} X + Y = A + 3B \\ X - Y = A + B \end{cases}$ em que:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

▶ Resolução

Adicionando as duas equações, temos:

$$+\begin{cases} X \cancel{+Y} = A + 3B \\ X \cancel{-Y} = A + B \end{cases}$$
$$2X = 2A + 4B \Rightarrow X = A + 2B$$

Como $X + Y = A + 3B$, temos:

$A + 2B + Y = A + 3B \Rightarrow Y = B$

Assim:

$$X = A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Y = B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

19. Para uma matriz A qualquer, vale a igualdade $A + A + A = 3 \cdot A$?

20. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, determine:

a. $3A$

b. $\frac{1}{3}(A + B)$

c. $2 \cdot A - \frac{1}{2} \cdot B$

d. $2A - (B + C)$

e. $2(A - C) + 3(B - A)$

f. $B + C - 2 \cdot I_2$

21. Invente duas matrizes A e B de mesma ordem e verifique se a igualdade de cada item é verdadeira ou falsa.

a. $4 \cdot A + 4 \cdot B = 4 \cdot (A + B)$ **21 a.** Verdadeira.

b. $3 \cdot A + 2 \cdot A = (3 + 2) \cdot A$ **21 b.** Verdadeira.

c. $-2 \cdot (5 \cdot B) = (-2 \cdot 5) \cdot B$ **21 c.** Verdadeira.

d. $6 \cdot (A + B) = 6 \cdot A + B$ **21 d.** Falsa.

e. $-1 \cdot (-B) = B$ **21 e.** Verdadeira.

22. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, calcule as matrizes X e Y tais que: $\begin{cases} 2X + Y = A - B \\ -3X - 2Y = B - 2A \end{cases}$

22. $X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

Multiplicação de matrizes

ODS 11

ODS 12

ODS 13

A poluição é um grave problema para a existência da vida em nosso planeta. Resultado da interação humana com os meios de produção e de consumo, é produzida, com maior intensidade, desde a Revolução Industrial. Os danos irreparáveis causados pela poluição nos ecossistemas deixam como legado para as próximas gerações a destruição da camada de ozônio, o derretimento das calotas polares, a presença de gases tóxicos na atmosfera e a contaminação de rios e mares, ocasionando extinção de espécies, diversos problemas de saúde para a raça humana e outros animais, além da escassez de recursos necessários à vida, como água potável e ar limpo.

DAVI CORREA/ISTOCK/GETTY IMAGES

Grande quantidade de lixo em praia da Ilha do Governador no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2023.

19. Considerando as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, de tal modo que $B = A + A + A$, para cada par i, j, com $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, temos:
$(b_{ij}) = (a_{ij}) + (a_{ij}) + (a_{ij}) \Rightarrow (b_{ij}) = 3 \cdot (a_{ij})$
Logo, $B = 3 \cdot A$.
Como $B = A + A + A$ e $B = 3 \cdot A$, podemos concluir que: $A + A + A = 3 \cdot A$.

20 a. $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

20 b. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

20 c. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{2} \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

20 d. $\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

20 e. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

20 f. $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

Nesse contexto, é necessário pensar em ações para minimizar os danos ao meio ambiente originados pela produção e pelo consumo. A reciclagem de materiais, como vidro, plástico, metal e papel/papelão feita em cooperativas, como a da foto a seguir, é um exemplo de ação de combate à poluição.

ALEX TAUBER/PULSAR IMAGENS

Cooperativa de reciclagem em São Paulo (SP). Foto de 2022.

OBJETO DIGITAL **Mapa clicável: Reciclagem no Brasil**

Este mapa clicável exibe dados estatísticos sobre os Estados, organizados por região, que possuem o maior número de empresas de reciclagem e a quantidade de materiais reciclados, conforme o **Atlas Brasileiro da Reciclagem**.

Observação

1 tonelada equivale a 1.000 kg.

OBJETO DIGITAL
Infográfico clicável: Microplástico
Este infográfico clicável aborda o tema da poluição plástica que tem aumentado nos últimos anos e compromete a saúde da vida marinha e a biodiversidade do planeta.

Considere a tabela a seguir que apresenta as medidas de massa de materiais reciclados por uma cooperativa em janeiro de 2025.

Medidas de massa (em tonelada) de materiais reciclados pela cooperativa em janeiro de 2025

Semana	Papelão	Lata de alumínio	Plástico rígido	Embalagem longa vida
1ª semana	15,5	9,2	8	6,4
2ª semana	12,3	14	5,1	7
3ª semana	13	15,7	10,3	8,5
4ª semana	12,8	10	8,9	5,6

Fonte: elaborado para fins didáticos.

O preço pelo qual a cooperativa vende cada tonelada dos materiais reciclados está indicado no quadro a seguir.

Preço da tonelada dos materiais reciclados pela cooperativa

Material reciclado	Preço por tonelada
Papelão	R$ 380,00
Lata de alumínio	R$ 3.200,00
Plástico rígido	R$ 1.300,00
Embalagem longa vida	R$ 290,00

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Para determinar o valor arrecadado, em real, pela cooperativa por semana, fazemos:

- **1ª semana:** $15{,}5 \cdot 380 + 9{,}2 \cdot 3.200 + 8 \cdot 1.300 + 6{,}4 \cdot 290 = 47.586$;
- **2ª semana:** $12{,}3 \cdot 380 + 14 \cdot 3.200 + 5{,}1 \cdot 1.300 + 7 \cdot 290 = 58.134$;
- **3ª semana:** $13 \cdot 380 + 15{,}7 \cdot 3.200 + 10{,}3 \cdot 1.300 + 8{,}5 \cdot 290 = 71.035$;
- **4ª semana:** $12{,}8 \cdot 380 + 10 \cdot 3.200 + 8{,}9 \cdot 1.300 + 5{,}6 \cdot 290 = 50.058$.

Também podemos efetuar esse cálculo utilizando matrizes. Observe as matrizes A (medida de massa, em tonelada, de cada material reciclado pela cooperativa por semana) e B (preço, em real, da tonelada de cada material reciclado pela cooperativa).

$$A = \begin{pmatrix} 15{,}5 & 9{,}2 & 8 & 6{,}4 \\ 12{,}3 & 14 & 5{,}1 & 7 \\ 13 & 15{,}7 & 10{,}3 & 8{,}5 \\ 12{,}8 & 10 & 8{,}9 & 5{,}6 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \quad B = \begin{pmatrix} 380 \\ 3.200 \\ 1.300 \\ 290 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

Trabalhando a ideia de multiplicação de matrizes, analisaremos como obter a matriz $C = A \cdot B$, sendo C a matriz que representa o valor arrecadado, em real, pela cooperativa semanalmente.

$$A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 15{,}5 & 9{,}2 & 8 & 6{,}4 \\ 12{,}3 & 14 & 5{,}1 & 7 \\ 13 & 15{,}7 & 10{,}3 & 8{,}5 \\ 12{,}8 & 10 & 8{,}9 & 5{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 380 \\ 3.200 \\ 1.300 \\ 290 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{41} \end{pmatrix}$$

Para determinar o valor obtido na 1ª semana, elemento c_{11}, fazemos:

$$a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + a_{14} \cdot b_{41} = 15{,}5 \cdot 380 + 9{,}2 \cdot 3.200 + 8 \cdot 1.300 + 6{,}4 \cdot 290 = 47.586$$

Note que multiplicamos:

- o primeiro elemento da primeira linha de A com o primeiro elemento da coluna de B.
- o segundo elemento da primeira linha de A com o segundo elemento da coluna de B.
- o terceiro elemento da primeira linha de A com o terceiro elemento da coluna de B.
- o quarto elemento da primeira linha de A com o quarto elemento da coluna de B.

Questão. Não. Se a quantidade de colunas da matriz A fosse diferente da quantidade de linhas da matriz B, sobrariam elementos que não teriam correspondentes; portanto, não seria possível multiplicar as matrizes.

A quantidade de colunas da matriz A poderia ser diferente da quantidade de linhas da matriz B? Por quê?

Para obter os valores obtidos na 2ª, na 3ª e na 4ª semana (respectivamente, c_{21}, c_{31} e c_{41}), procedemos de modo análogo ao da 1ª semana (c_{11}):

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} + a_{24} \cdot b_{41} =$$
$$= 12{,}3 \cdot 380 + 14 \cdot 3.200 + 5{,}1 \cdot 1.300 + 7 \cdot 290 = 58.134$$
$$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} + a_{34} \cdot b_{41} =$$
$$= 13 \cdot 380 + 15{,}7 \cdot 3.200 + 10{,}3 \cdot 1.300 + 8{,}5 \cdot 290 = 71.035$$
$$c_{41} = a_{41} \cdot b_{11} + a_{42} \cdot b_{21} + a_{43} \cdot b_{31} + a_{44} \cdot b_{41} =$$
$$= 12{,}8 \cdot 380 + 10 \cdot 3.200 + 8{,}9 \cdot 1.300 + 5{,}6 \cdot 290 = 50.058$$

Portanto, de $A \cdot B$, obtemos:

$$C = \begin{pmatrix} 47.586 \\ 58.134 \\ 71.035 \\ 50.058 \end{pmatrix}$$

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, o produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$, na qual cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos obtidos ao multiplicar o 1º elemento da linha i de A pelo 1º elemento da coluna j de B, o 2º elemento da linha i de A pelo 2º elemento da coluna j de B, e assim sucessivamente até o enésimo elemento da linha i de A pelo enésimo elemento da coluna j de B.

Note que o produto das matrizes A e B, indicado por $A \cdot B$, só é definido se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, e esse produto terá o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

iguais

Observe estes exemplos de multiplicações de matrizes.

a. $\begin{bmatrix} -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = [(-2) \cdot (-2) + 6 \cdot 6] = [40]$

b. $(1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \quad 1 \cdot 2 + 5 \cdot 3) = (11 \quad 17)$

Atividades resolvidas

R5. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, determinar $A \cdot B$.

▸ Resolução

Como a matriz A é do tipo 2×3 e a matriz B é do tipo 3×2, existe o produto $A \cdot B$, pois o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B. Então $A \cdot B = C$, sendo $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$.

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2}$$

iguais

Os elementos da matriz C são:

- c_{11}: soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 1ª linha de A pela 1ª coluna de B;
- c_{12}: soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 1ª linha de A pela 2ª coluna de B;
- c_{21}: soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 2ª linha de A pela 1ª coluna de B;
- c_{22}: soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 2ª linha de A pela 2ª coluna de B.

Assim, temos:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 27 & 17 \end{pmatrix}$.

R6. Determinar a matriz X tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

▶ **Resolução**

São condições para que exista essa multiplicação:

- a matriz X ter 2 colunas, pois a matriz multiplicada tem 2 linhas;
- a matriz X ter 2 linhas, pois o produto das matrizes tem 2 linhas.

$$X_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \text{ em que } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

iguais

Então, temos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot (-2) & a \cdot 3 + b \cdot (-1) \\ c \cdot 1 + d \cdot (-2) & c \cdot 3 + d \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes, obtemos os sistemas:

- $\begin{cases} a - 2b = 0 \\ 3a - b = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} c - 2d = 1 \\ 3c - d = 5 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, obtemos:

$a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{2}{5}$, $c = \frac{9}{5}$ e $d = \frac{2}{5}$.

Logo, $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

27 a. $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$

$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$A \cdot B \neq B \cdot A$; logo, não vale a propriedade comutativa.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Dadas as matrizes A, B e C, tais que as operações a seguir entre elas sejam possíveis, valem as propriedades:

- associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- distributiva à direita: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- distributiva à esquerda: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

Essas propriedades não serão demonstradas nesta coleção.

27 b. $A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$

$A \cdot B = A \cdot C$ e $B \neq C$; logo, eliminar a matriz A nos dois membros da igualdade não é uma operação válida.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

23. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

determine, caso exista:

a. $A \cdot B$;

b. $B \cdot A$;

c. $A \cdot C$;

d. $(A \cdot B) \cdot C$;

e. $A \cdot (B \cdot C)$.

23 a. $\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **23 d.** $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

23 b. Não é possível calcular.

23 c. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **23 e.** $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

24. Calcule o valor de x e de y de modo que: **24.** $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{7}{3}$.

$$\begin{pmatrix} -3 & y \\ x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

25. Determine a matriz X tal que $A \cdot X + B = C$, em que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

25. $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

26. Retomando a situação da abertura deste capítulo, determine a quantidade de pontos de cada seleção do Grupo F da Copa do Mundo de Futebol feminino de 2023 usando o produto de matrizes.

(*Dica*: Considere a matriz apresentada no início deste capítulo que representa a quantidade de vitórias, empates e derrotas de cada seleção do Grupo F e uma matriz com a pontuação correspondente por vitória (3 pontos), empate (1 ponto) e derrota (0 ponto).

26. França: 7 pontos; Jamaica: 5 pontos; Brasil: 4 pontos; Panamá: 0 ponto.

27. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

a. Calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e responda se a propriedade comutativa na multiplicação de matrizes é válida.

b. Verifique que $A \cdot B = A \cdot C$ e responda se é possível eliminar a matriz A nos dois membros da igualdade.

28. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, tal que $X \cdot A = A$.

a. Determine a matriz X. **28 a.** $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

b. O que pode ser dito a respeito da matriz X? **28 b.** X é a matriz identidade de ordem 2.

29. Invente quatro matrizes quadradas ($A_{1 \times 1}$, $B_{2 \times 2}$, $C_{3 \times 3}$ e $D_{4 \times 4}$) e calcule as multiplicações a seguir:

a. $A \cdot I_1$ e $I_1 \cdot A$; **29 a.** A e A.

b. $B \cdot I_2$ e $I_2 \cdot B$; **29 b.** B e B.

c. $C \cdot I_3$ e $I_3 \cdot C$; **29 c.** C e C.

d. $D \cdot I_4$ e $I_4 \cdot D$. **29 d.** D e D.

Agora, compare os produtos obtidos com as respectivas matrizes inventadas. **29.** Os produtos são iguais, respectivamente, às matrizes inventadas.

Determinante de uma matriz

A toda matriz quadrada associa-se um número, denominado **determinante da matriz**, que é obtido por meio de operações entre os elementos da matriz.

Para representar o determinante de uma matriz A (indicado por **det A**), substituímos os parênteses ou os colchetes da matriz por barras verticais simples.

Observe estes exemplos de matrizes e como representamos os seus determinantes.

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ e $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

b. $B = [4]$ e $\det B = |\,4\,|$

c. $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ e $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$

Observação

É possível calcular o determinante de matrizes de ordem maior que 3; porém, nesta coleção, apresentaremos apenas o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 1, 2 e 3.

Determinante de matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem 1 é o próprio elemento de A.

Confira este exemplo.

$$A = (-8) \Rightarrow \det A = |-8| = -8$$

Observação

Embora o módulo de um número e o determinante de uma matriz de ordem 1 sejam representados por um número entre barras verticais simples, esses conceitos são distintos.

Determinante de matriz de ordem 2

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem 2 é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem.

Analise o exemplo a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) - [(-3) \cdot (-1)] = 8 - 3 = 5$$

Determinante de matriz de ordem 3

O determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 pode ser calculado por um método chamado **regra de Sarrus**.

Pierre Frédéric **Sarrus** (1798-1861) foi um matemático francês e professor na universidade francesa de Estrasburgo.

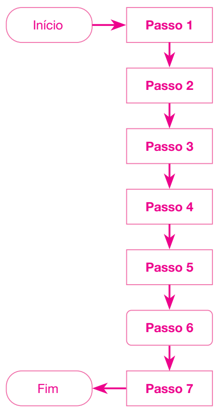
Considere esta matriz A e observe como é calculado seu determinante pela regra de Sarrus.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. À direita da representação para o cálculo do determinante, copiam-se as duas primeiras colunas da matriz.

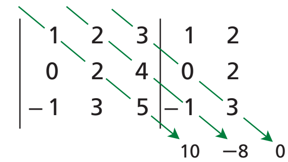
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix}$$

31 b.

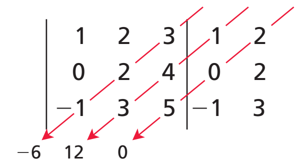


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

2. Multiplicam-se os elementos da diagonal principal e, na mesma direção da diagonal principal, multiplicam-se os elementos das outras duas diagonais à sua direita.



3. Multiplicam-se os elementos da diagonal secundária e, na mesma direção da diagonal secundária, multiplicam-se os elementos das outras duas diagonais à sua direita.



4. Subtraem-se as somas dos produtos obtidos nos passos **2** e **3**, nessa ordem.

$$\det A = (10 - 8 + 0) - (-6 + 12 + 0) = -4$$

Atividades resolvidas

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

R7. Para quais valores de x o determinante da matriz A a seguir é igual a -6?

$$A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ x & x+2 \end{pmatrix}$$

▶ **Resolução**

Calculando det A e igualando a -6, temos:

$x(x+2) - (-3)x = -6$

$x^2 + 2x + 3x = -6$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$

$x = \dfrac{-5 \pm 1}{2}$

$x = -2$ ou $x = -3$

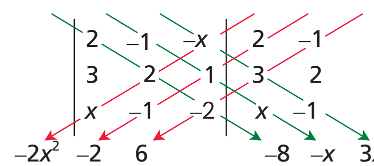
Portanto, $x = -2$ ou $x = -3$.

R8. Determinar x para que seja verdadeira a igualdade:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -x \\ 3 & 2 & 1 \\ x & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

▶ **Resolução**

Pela regra de Sarrus, temos:



Assim, temos:

$(-8 - x + 3x) - (-2x^2 - 2 + 6) = 0$

$2x^2 + 2x - 12 = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$

$x = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$

$x = 2$ ou $x = -3$

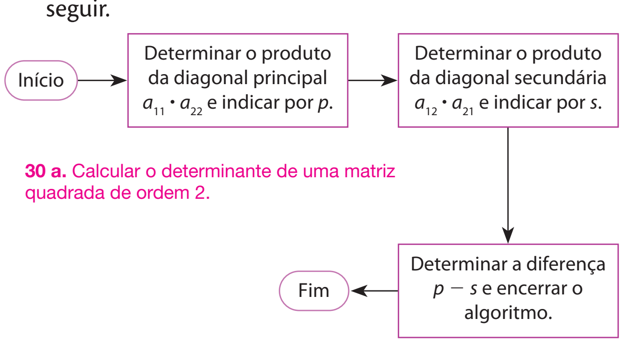
Portanto, $x = 2$ ou $x = -3$.

30 b. Espera-se que os estudantes percebam que o último passo depende de os anteriores terem sido executados; caso contrário, não é possível saber o valor correto de p ou de s para determinar a diferença $p - s$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

30. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Considere o algoritmo a seguir.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

30 a. Calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem 2.

a. Qual é a finalidade desse algoritmo?

b. É possível executar o último passo do algoritmo antes do primeiro?

31. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Considere o algoritmo na língua materna que calcula o determinante de uma matriz A de ordem 3. Depois, faça o que se pede.

Passo 1. Determine o produto de $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ e chame de a.

Passo 2. Determine o produto de $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$ e chame de b.

Passo 3. Determine o produto de $a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$ e chame de c.

Passo 4. Determine o produto de ▬ e chame de d.

Passo 5. Determine o produto de ▬ e chame de e.

Passo 6. Determine o produto de ▬ e chame de f.

Passo 7. Calcule o determinante por meio da expressão $(a + b + c) - (d + e + f)$.

a. Complete, em seu caderno, os **passos 4**, **5** e **6** do algoritmo.

b. Represente o algoritmo em um fluxograma.

31 a. Passo 4: $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$; passo 5: $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$; passo 6: $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$.

32. Resposta no *Suplemento para o professor*.

38. –1.326

32. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** ***SOFTWARE*** Analise este algoritmo produzido no Scratch para calcular o determinante de qualquer matriz quadrada de ordem 2.

SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE, EUA

Considerando esse algoritmo e o da **atividade 31**, produza um algoritmo no Scratch que calcule o determinante de qualquer matriz quadrada de ordem 3.

33. Dadas as matrizes $A = (2)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

a. det A; 33 a. 2 **b.** det B; 33 b. 5 **c.** det C. 33 c. –1

34. Aplicando a regra de Sarrus, calcule o valor dos determinantes a seguir.

a. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 34 a. 0 **b.** $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix}$ 34 b. 0

35. Determine o valor da expressão:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$ 35. –8

36. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

a. det $(A + B)$; 36 a. –12 **c.** det $(3 \cdot A)$; 36 c. –225
b. $3 \cdot$ det A; 36 b. –75 **d.** det A + det B. 36 d. –22

37. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calcule:

a. det $(A \cdot B)$; **b.** det $(B \cdot A)$; **c.** det $A \cdot$ det B.
37 a. 20 37 b. 20 37 c. 20

38. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA** O matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), em um artigo de 1812, demonstrou pela primeira vez o teorema que afirma que, se A e B são matrizes de ordem n, então det $(A \cdot B) =$ (det A) $\cdot$ (det B).

Fonte: elaborado com base em EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2011. p. 532.

BRIDGEMAN IMAGES/EASY MEDIABANK

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

Dada as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$, calcule det $(A \cdot B)$.

39. Em cada item, calcule os determinantes e, depois, responda às questões levando em consideração o que o resultado obtido sugere.

a. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 39 a. 0; sim.

O determinante de uma matriz de ordem 3 com uma linha de zeros sempre vale zero?

b. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 39 b. 0; sim; também valeria zero.

O determinante de uma matriz de ordem 3 em que uma linha é "o dobro de outra linha" sempre vale zero? E se fosse o triplo?

c. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix}$ 39 c. $ad - bc$; $3 \cdot (ad - bc)$; $3 \cdot (ad - bc)$; sim.

Se o determinante de uma matriz de ordem 2 tem uma linha (ou coluna) triplicada, seu valor triplica?

39 d. $ad - bc$; $ad - bc$; sim.

d. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

O determinante de uma matriz de ordem 2 e o da matriz obtida dessa ao trocar as linhas por colunas são iguais?

e. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ 39 e. $ad - bc$; $-(ad - bc)$; $-(ad - bc)$; opostos.

Determinantes de matrizes de ordem 2 que têm linhas (ou colunas) permutadas são iguais ou opostos?

f. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ 39 f. abc; sim.

O determinante de uma matriz diagonal de ordem 3 é sempre igual ao produto dos elementos da diagonal principal?

40. Calcule os determinantes de I_1, I_2 e I_3. Qual é o valor que você imagina para o determinante de I_4?

40. 1, 1, 1. Espera-se que os estudantes respondam que o determinante de I_4 é igual a 1.

Matrizes e determinantes em planilhas eletrônicas

Planilhas eletrônicas são *softwares* que podem ser usados para facilitar o cálculo em tabelas. Com esse tipo de *software*, podemos automatizar operações, além de apresentar dados em tabelas e gráficos.

Neste capítulo, definimos as matrizes como tabelas que apresentam dados numéricos dispostos em linhas e em colunas. Assim, uma tabela de números dispostos de maneira retangular em uma planilha eletrônica é uma matriz.

Observe como a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 15 & 9 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ pode ser representada em uma planilha eletrônica.

Campo que mostra a célula selecionada.

Campo que mostra o número ou, quando for o caso, a fórmula associada à célula.

Números que indicam as linhas da planilha.

Letras que indicam as colunas da planilha.

A1	*Fórmula*	2	
	A	B	C
1	2	3	0
2	–2	15	9
3	7	1	4
4			

Na planilha, cada elemento da matriz ocupa uma coluna (indicada por uma letra) e uma linha (indicada por um número). Assim, o elemento a_{11}, indicado na planilha por $A1$, é o elemento que está na coluna A e na linha 1 (nesse caso, o número 2).

Usando planilhas eletrônicas, é possível calcular o determinante de uma matriz quadrada, além do produto de duas matrizes.

Como exemplo, vamos considerar as matrizes $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ e $B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Vamos, inicialmente, representar a matriz A na planilha eletrônica.

D2	*Fórmula*	=MATRIZ.DETERM(A1:B2)			
	A	B	C	**D**	E
1	2	3		**Determinante**	
2	5	7		–1	
3					

Para calcular o determinante, em uma célula vazia da planilha (no exemplo, célula D2), digitamos a fórmula:

=MATRIZ.DETERM(A1:B2)

(Calcula o determinante da matriz cujo primeiro elemento está em A1 e o último elemento está em B2.)

Agora, vamos representar as matrizes A e B na planilha, deixando um espaço de pelo menos uma coluna entre elas.

A5	*Fórmula*	=MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)				
	A	**B**	**C**	D	E	F
1	2	3		–1	4	10
2	5	7		2	3	0
3						
4	**Produto de *A* por *B***					
5	4	17	20			
6	9	41	50			
7						

Para calcular o produto $A \cdot B$, em uma célula vazia da planilha (no exemplo, célula A5), digitamos a fórmula:

=MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)

(Determina o produto da matriz cujo primeiro elemento está em A1 e o último está em B2 pela matriz cujo primeiro elemento está em D1 e o último está em F2.)

Os elementos da matriz produto de ordem 2×3 preenchem automaticamente um intervalo de 2 linhas e 3 colunas (no exemplo, intervalo de A5 a C6), ficando um elemento por célula da planilha.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade proposta

Registre em seu caderno

41. **SOFTWARE** Considere as matrizes A e B do exemplo anterior e, usando uma planilha eletrônica, calcule o determinante da matriz B e o produto $B \cdot A$.

a. Que resultado você obteve em cada caso?

b. **ARGUMENTAÇÃO** Compare as respostas que você obteve com as de seus colegas e discutam por que vocês obtiveram esses resultados.

41 a. Nos dois casos, quando os estudantes tentarem realizar os cálculos na planilha, obterão uma mensagem de erro.

41 b. No caso do determinante, isso ocorrerá porque a matriz B não é quadrada; no caso do produto $B \cdot A$, porque o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

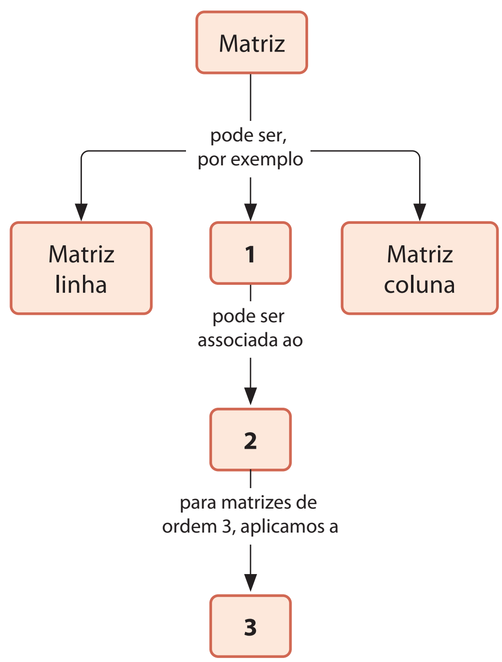
PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 5

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Conexões entre conceitos. A – 3; B – 1; C – 2.

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Regra de Sarrus **B.** Matriz quadrada **C.** Determinante

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

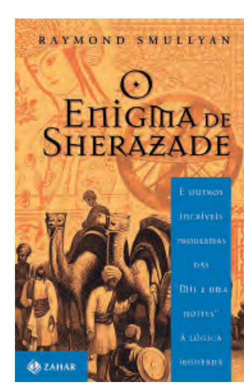
Livro

O enigma de Sherazade: e outros incríveis problemas das "Mil e uma noites" à lógica moderna

Raymond Smullyan

Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

Nessa obra, o autor coloca Sherazade, famosa personagem que narra os contos das *Mil e uma noites*, no centro de narrativas que relatam enigmas, quebra-cabeças e problemas de lógica que envolvem o leitor. O livro propõe charadas matemáticas, adivinhações, enigmas e exercícios de verdade e de mentira, cuja solução exige raciocínio lógico e estratégias que surpreendem o leitor desde a primeira página. Uma leitura original e cativante para todos os leitores.



REPRODUÇÃO/EDITORA ZAHAR

Software

CmapTools

O CmapTools é um programa gratuito exclusivo para construção de mapas conceituais. Além de outras funcionalidades a ferramenta permite a edição colaborativa e o compartilhamento de mapas conceituais entre diferentes usuários.

Disponível em: https://cmap.ihmc.us/cmaptools/. Acesso em: 3 ago. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Uma matriz de ordem 2 é uma matriz: **Q1.** Alternativa **b**.

a. identidade.
b. quadrada.
c. nula.
d. linha.

Q2. Só existe adição ou subtração de matrizes se elas forem: **Q2.** Alternativa **c**.

a. opostas.
b. nulas.
c. de mesma ordem.
d. quadradas.

Q3. Sejam as matrizes $A_{2 \times 3}$ e $B_{3 \times 2}$. Os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$ são: **Q3.** Alternativa **d**.

a. iguais.
b. opostos.
c. respectivamente, dos tipos 3×3 e 2×2.
d. respectivamente, dos tipos 2×2 e 3×3.

Q4. Considere as matrizes:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Essas matrizes são: **Q4.** Alternativa **d**.

a. iguais.
b. opostas.
c. identidades.
d. diagonais.

Q5. Na ______ de matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda. **Q5.** Alternativa **a**.

a. multiplicação
b. adição
c. subtração
d. igualdade

Q6. Multiplicando-se as matrizes $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, obtém-se uma matriz de ordem: **Q6.** Alternativa **a**.

a. 3×4
b. 3×5
c. 2×2
d. 3×3

Q7. Na multiplicação de matrizes, não é válida a propriedade: **Q7.** Alternativa **c**.

a. associativa.
b. distributiva à esquerda.
c. comutativa.
d. distributiva à direita.

Q8. O determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ é: **Q8.** Alternativa **d**.

a. -10
b. 22
c. 10
d. -22

Q9. Se pode ser calculado o determinante da matriz A, com certeza ela é: **Q9.** Alternativa **b**.

a. matriz linha.
b. matriz quadrada.
c. matriz coluna.
d. nenhuma das alternativas.

Q10. Se $\det A = 5$ e A é uma matriz de ordem 2, podemos afirmar que: **Q10.** Alternativa **d**.

a. $\det(-A) = -5$.
b. $\det\left(\frac{A}{10}\right) = 0{,}5$.
c. $\det(2A) = 10$.
d. $\det(2A) = 20$.

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

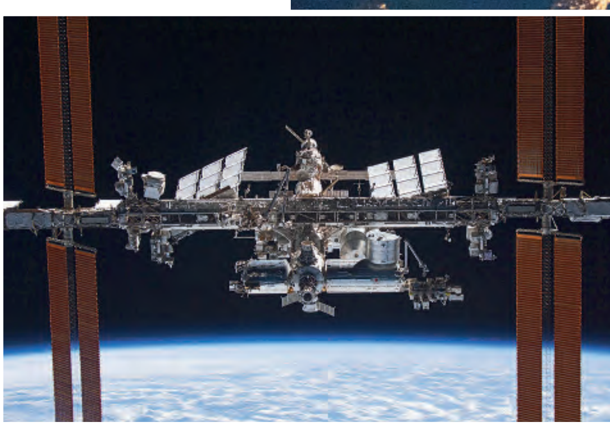
Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Identificar e classificar uma matriz.	X			X					X	
Realizar operações com matrizes.		X	X		X	X	X			
Calcular o determinante de uma matriz quadrada.								X	X	X

Capítulo 6

SISTEMAS LINEARES

JSC/NASA

Fotografia noturna do norte da Europa, capturada pelos astronautas a bordo da Estação Espacial Internacional (EEI), em janeiro de 2022.



THOMAS PESQUET/JSC/NASA

Estação Espacial Internacional (EEI) sobrevoando as Ilhas Marshall, no Oceano Pacífico. Imagem capturada em novembro de 2021.

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 7

OBJETO DIGITAL

Podcast: Fontes de energia renovável na matriz elétrica brasileira

Introdução ao estudo de sistemas lineares

A fotografia tirada da Estação Espacial Internacional e compartilhada pela Nasa mostra a visão noturna do norte da Europa. Os pontos em cor amarela mais forte indicam as luzes dos municípios. A luzes da foto incluem (da direita para a esquerda) Berlim (Alemanha); Copenhague (Dinamarca); e Oslo (Noruega). No centro, está o Mar Báltico que separa as nações escandinavas Suécia e Finlândia dos Estados Bálticos Estônia, Letônia e Lituânia.

A energia que ilumina os municípios e coloca em funcionamento grandes redes de computadores, indústrias, eletrodomésticos, aparelhos hospitalares etc. foi obra de um grande esforço científico da humanidade. Nos dias atuais, as intrincadas relações do ser humano com o mundo e com os modos de produção só são possíveis graças à energia.

A Matemática auxilia nesse processo fornecendo muitas ferramentas. Um exemplo são as **equações lineares** e os **sistemas de equações lineares**, usados para determinar as medidas de corrente que fluem em um circuito elétrico. Com a lei de Ohm e as leis de corrente e de voltagem de Kirchhoff, obtemos as equações que regem um circuito.

Já conhecemos os métodos da adição e da substituição para a resolução de sistemas. Vamos estudar, neste capítulo, o método do escalonamento, também chamado de **método da eliminação de Gauss-Jordan**. Esse método tem características parecidas com o método da adição e constitui uma poderosa ferramenta para a resolução, feita por computadores, de problemas complexos.

Este *podcast* enriquece o contexto da abertura do capítulo ao abordar a produção de energia elétrica no Brasil por meio de fontes renováveis, destacando o país como uma referência mundial nesse tipo de geração.

Equações lineares

Acompanhe a situação a seguir.

Uma loja de roupas vende par de meias, camisetas, camisas e calças, cujos preços estão especificados no quadro a seguir.

Júlio gastou R$ 739,00 em roupas nessa loja. Qual é a quantidade de cada produto que Júlio comprou?

Preços dos produtos vendidos pela loja

Produto	Preço da unidade (em real)
Par de meias	20
Camiseta	45
Camisa	62
Calça	75

Podemos representar esse problema matematicamente por meio de uma equação. Vamos indicar a quantidade de pares de meias, camisetas, camisas e calças por x, y, w e z, respectivamente. Agora, multiplicamos cada letra pelo preço da unidade do produto que ela representa. A adição dessas multiplicações deve resultar em 739. Observe a seguir.

$$20x + 45y + 62w + 75z = 739$$

Essa sentença matemática é um exemplo de **equação linear**.

Equação linear é toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, com $n \in \mathbb{N}^*$, em que $x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas; os números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ são os coeficientes das incógnitas; b, real, é o termo independente.

Observe os exemplos.

a. $x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$ **b.** $x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 3$ **c.** $2x + 3y - z = 0$

Quando o termo independente é nulo, a equação linear é chamada de **homogênea**.

Observação

As equações a seguir **não** são equações lineares.

- $x^2 + 3y - z = 7$ (incógnita x com expoente diferente de 1)
- $x - \frac{1}{y} = 3$ (incógnita y no denominador)
- $2x + 3yz = 0$ (termo $3yz$ com mais de uma incógnita)

Solução de uma equação linear

Acompanhe as afirmações a seguir.

- O par ordenado (3, 5) é solução da equação $-3x + 2y = 1$, pois, substituindo x por 3 e y por 5, obtemos uma sentença verdadeira: $-3 \cdot \mathbf{3} + 2 \cdot \mathbf{5} = 1$
- O terno ordenado (1, 3, 5) não é solução da equação $3x - 2y - 3z = 14$, pois $3 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \mathbf{3} - 3 \cdot \mathbf{5} = 14$ não é uma sentença verdadeira.
- O terno ordenado (0, 0, 0) é solução da equação $x + 2y - 3z = 0$, pois $\mathbf{0} + 2 \cdot \mathbf{0} - 3 \cdot \mathbf{0} = 0$ é uma sentença verdadeira.

Observação

Note que a equação $x + 2y - 3z = 0$ é homogênea.

A **solução de uma equação linear** é toda ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ que torna a igualdade $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ verdadeira, isto é, tal que $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b$ seja verdadeira.

Atividade resolvida

R1. Sabendo que o par ordenado $(2a, a)$ é solução da equação $4x + 3y = 10$, determinar o valor de a.

▸ **Resolução**

Substituindo x por $2a$ e y por a, obtemos:

$$4 \cdot (2a) + 3 \cdot (a) = 10 \Rightarrow 8a + 3a = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{11}$$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Verifique se os ternos ordenados a seguir são soluções da equação linear $2x + y + 3z = 11$.
   a. $(1, 3, 2)$ **1 a.** Sim.
   b. $(2, 2, 2)$ **1 b.** Não.
2. Determine k de modo que o par $(3, k)$ seja solução da equação linear $2x + 3y = 12$. **2.** 2
3. Encontre duas soluções para a equação $2a + 3b - c = 0$.
   3. Exemplos de resposta: (0, 0, 0), (1, −1, −1), (1, 1, 5) e (−2, 2, 2).
4. Verifique se o par $\left(3, \frac{2}{3}\right)$ é solução comum das equações lineares $x - 3y = 1$ e $x + 3y = 5$. **4.** Sim.
5. **EM DUPLA** Elabore uma equação linear com três incógnitas e determine duas de suas soluções. Depois, peça a um colega que determine duas soluções para a equação elaborada por você; determine duas soluções para a equação produzida por ele.
   5. Resposta pessoal.

Sistema de equações lineares

ODS 3

Acompanhe o texto e a situação a seguir.

O conceito Soberania Alimentar é relacionado ao direito de todas as pessoas escolherem como organizarão a produção e distribuição dos alimentos e está associado ao acesso a alimentos saudáveis, de maneira regular e sustentável, respeitando a identidade cultural alimentar de cada povo, já que tanto os produtos alimentares como a maneira de cultivá-los varia de um local para outro. Já o **Guia alimentar para a população brasileira** dispõe de um conjunto de informações e recomendações a respeito da alimentação, com a finalidade da promoção da saúde de todas as pessoas.

Fonte: elaborado com base em BRASIL. Ministério da Saúde. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília: 2014. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf. Acesso em: 14 out. 2024.

OBJETO DIGITAL
Infográfico clicável: Soberania alimentar e agricultura familiar

Este infográfico clicável enriquece o contexto de introdução ao estudo de sistemas de equações lineares ao relacionar os conceitos de soberania alimentar e agricultura familiar, destacando a importância desta última na geração de empregos e renda no meio rural.

Podemos perceber que o conceito de soberania alimentar e as informações do **Guia alimentar para a população brasileira** têm um objetivo em comum: contribuir para uma alimentação saudável. Esse assunto é frequente em nosso cotidiano e tem uma grande importância, inclusive em relação aos nutrientes que cada alimento possui.

Você já deve ter percebido que as embalagens de alimentos trazem informações sobre o valor energético, as quantidades de carboidratos, gorduras, sódio, proteínas etc. contidas nos produtos e a porcentagem que cada uma dessas quantidades representa nos Valores Diários de Referência (VDR) para uma alimentação adequada.

Você tem o hábito de analisar as informações nutricionais nas embalagens dos alimentos? Em caso afirmativo, o que, geralmente, chama mais a sua atenção? **Questão.** Resposta pessoal.

O quadro a seguir mostra as informações nutricionais de alguns alimentos: arroz e feijão ***in natura***, peito de frango, suco de laranja pasteurizado e adoçado, pão do tipo francês e margarina sem sal.

In natura: alimentos de origem vegetal ou animal que são consumidos em seu estado natural, sem terem passado por qualquer tipo de processamento ou alteração.

Informações nutricionais de alguns alimentos

Informações nutricionais \ Alimentos	Arroz *in natura* (50 g)	Feijão *in natura* (30 g)	Peito de frango (80 g)	Suco de laranja pasteurizado e adoçado (200 mL)	Pão francês (50 g)	Margarina sem sal (14 g)	VDR
Valor energético (kcal)	190	100	150	120	130	45	2.000
Carboidratos (g)	37	16	8	30	28	0	300
Proteínas (g)	3	7	13	1	4	0	75
Gorduras totais (g)	0	0	6	0	1,5	5	55

Fonte: elaborado com base em DORNELLES FILHO, Adalberto A. Montando uma dieta com sistemas lineares. **Revista do Professor de Matemática**, n. 59, p. 27-28, 2006.

Para montar uma dieta, é preciso determinar as quantidades $x_1, ..., x_6$ (em porções) de cada alimento necessárias para compor o VDR. Isso corresponde a resolver o sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} 190x_1 + 100x_2 + 150x_3 + 120x_4 + 130x_5 + 45x_6 = 2.000 \\ 37x_1 + 16x_2 + 8x_3 + 30x_4 + 28x_5 = 300 \\ 3x_1 + 7x_2 + 13x_3 + x_4 + 4x_5 = 75 \\ 6x_3 + 1{,}5x_5 + 5x_6 = 55 \end{cases}$$

Um **sistema *S* de equações lineares**, ou **sistema linear**, de *m* equações com *n* incógnitas é um conjunto de equações lineares do tipo:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Considere os exemplos.

a. $S_1 = \begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x - 4y = -7 \end{cases}$ (sistema de duas equações com duas incógnitas)

b. $S_2 = \begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - 0x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$ (sistema de três equações com quatro incógnitas)

Observação

O sistema S_2 também pode ser escrito assim:

$$S_2 = \begin{cases} x_1 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

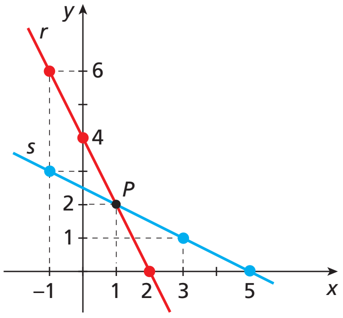
Solução de um sistema linear

Analise as seguintes equações e algumas de suas soluções:

- $2x + y = 4 \rightarrow$ (−1, 6), (0, 4), **(1, 2)**, (2, 0), ...
- $x + 2y = 5 \rightarrow$ (−1, 3), **(1, 2)**, (3, 1), (5, 0), ...

Observe que as duas equações têm o par ordenado (1, 2) como solução comum.

A ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é **solução de um sistema linear** de *m* equações com *n* incógnitas quando é solução de cada uma das equações do sistema.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe, no plano cartesiano, que os pares ordenados que são soluções da equação $2x + y = 4$ representam pontos da reta *r*, e cada ponto da reta *r*, por sua vez, representa uma solução da equação $2x + y = 4$. O mesmo ocorre para as soluções da equação $x + 2y = 5$ (reta *s*).

O par ordenado (1, 2) representa o ponto *P*, intersecção das retas *r* e *s*. O ponto *P* é a solução gráfica desse sistema.

Portanto, o par ordenado (1, 2) é a única solução do sistema: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

Representamos o conjunto solução desse sistema por $S = \{(1, 2)\}$.

Analise os exemplos.

a. Vamos considerar o sistema: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

O par ordenado (2, 3) satisfaz as duas equações do sistema, pois $2 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{3} = 7$ e $3 \cdot \mathbf{2} - \mathbf{3} = 3$. Assim, o par ordenado (2, 3) é solução do sistema.

b. Seja o sistema: $\begin{cases} -x + y - z = -2 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases}$

O terno ordenado (1, 3, 4) não é uma solução do sistema, pois, substituindo esses valores nas equações, obtemos:

$-\mathbf{1} + \mathbf{3} - \mathbf{4} = -2$ (sentença verdadeira)

$0 \cdot \mathbf{1} + 4 \cdot \mathbf{3} - 2 \cdot \mathbf{4} = 0$ (sentença falsa)

c. Seja o sistema: $\begin{cases} x + y - 2z = -6 \\ 3x - 2y + z = 15 \\ -2x - y + 3z = 7 \end{cases}$

O terno ordenado (3, −1, 4) é solução do sistema, pois, substituindo esses valores nas equações, obtemos:

$3 - 1 - 2 \cdot 4 = -6$ (sentença verdadeira)

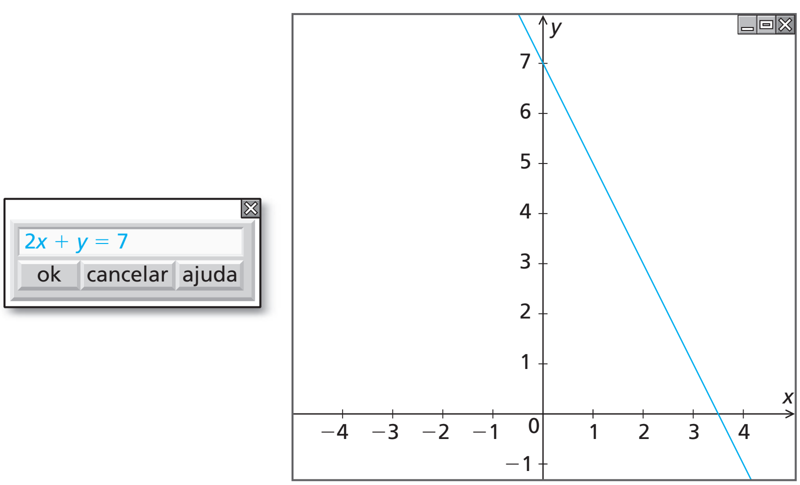
$3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) + 4 = 15$ (sentença verdadeira)

$-2 \cdot 3 - (-1) + 3 \cdot 4 = 7$ (sentença verdadeira)

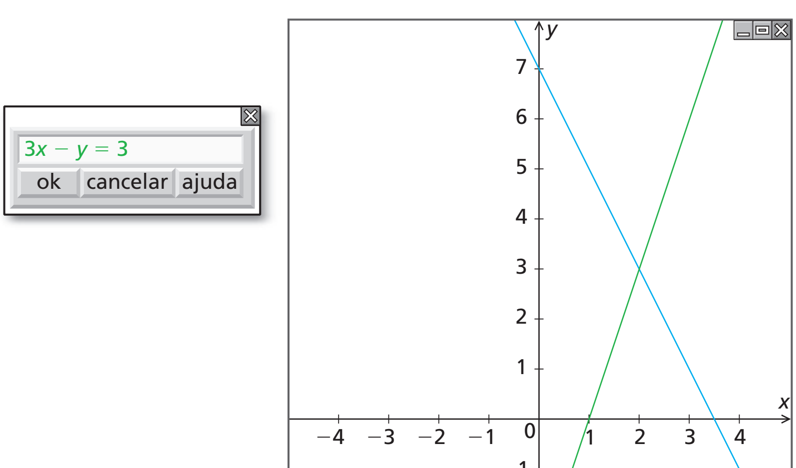
Solução de um sistema usando um *software* de construção de gráficos

Podemos determinar a solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$, analisada na página anterior, com o auxílio de um *software* de construção de gráficos.

1. Digitar a primeira equação do sistema ($2x + y = 7$) no campo de entrada de funções. Depois, clicar em "ok" para que a reta apareça no plano cartesiano.



2. Digitar a segunda equação do sistema ($3x - y = 3$) no campo de entrada e clicar em "ok".



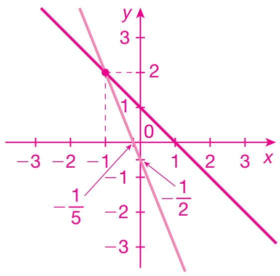
Observação

A equação $ax + by = c$, com $b \neq 0$, também representa a lei de uma função afim.

Explicitando a lei dessa função como $y = f(x)$, podemos escrever $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, com $b \neq 0$. Seu gráfico é uma reta não vertical.

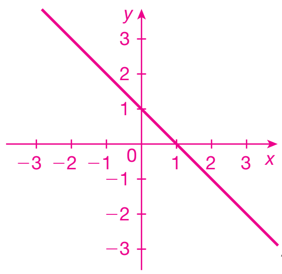
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

10 a.



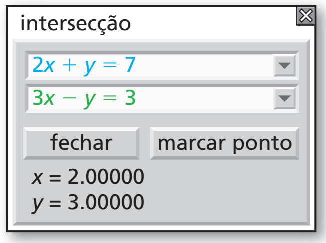
A solução do sistema é $S = \{(-1, 2)\}$

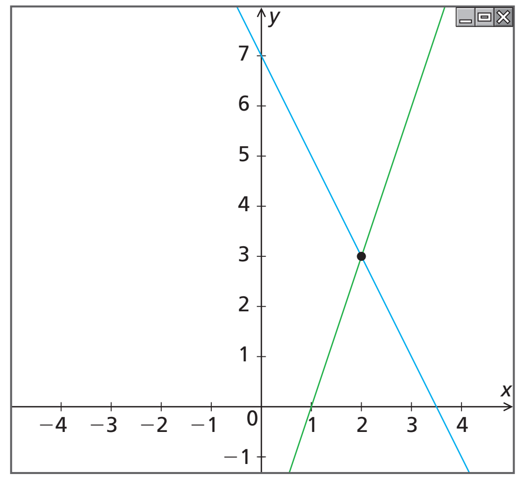
10 b.



Espera-se que os estudantes percebam que as duas equações geraram duas retas coincidentes.

3. Usar a ferramenta "intersecção" para determinar o ponto que representa a solução do sistema.





Assim, o par ordenado (2, 3) do ponto de intersecção entre as retas é a única solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$.

Atividade resolvida

R2. Resolver o sistema de equações: $\begin{cases} x + 4y = 12 \\ 5x + 2y = 24 \end{cases}$

▶ **Resolução**

$$\begin{cases} x + 4y = 12 \quad \text{(I)} \\ 5x + 2y = 24 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por -5 e adicionando a equação obtida, membro a membro, à equação (II), temos:

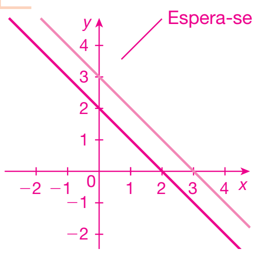
$$\begin{cases} -\cancel{5x} - 20y = -60 \\ \cancel{5x} + 2y = 24 \end{cases}$$

$$-18y = -36 \Rightarrow y = 2$$

Substituindo y por 2 em (II), obtemos $x = 4$.

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(4, 2)\}$.

10 c.



Espera-se que os estudantes percebam que não há solução para esse sistema, pois as retas são paralelas e não coincidentes.

Observações

- O método da adição para a resolução de um sistema consiste em multiplicar os membros de uma ou mais equações por números convenientes e, em seguida, adicioná-las membro a membro.
- O conjunto solução de um sistema é formado por todas as soluções comuns a todas as equações do sistema.

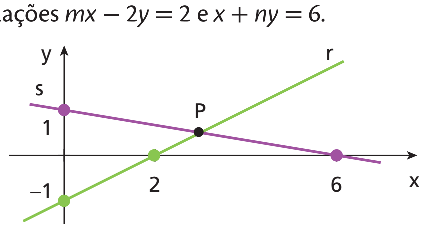
Atividades propostas

Registre em seu caderno

6. Os pares ordenados $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ e $(1, 2)$ são soluções da equação $y = ax + b$. Calcule os valores de a e b. **6.** $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

7. Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Encontre a solução comum das duas equações lineares que se pode obter de $(2x + y)(-x + 3y) = 0$. **7.** $S = \{(0, 0)\}$

8. As retas r e s são, respectivamente, as representações gráficas das equações $mx - 2y = 2$ e $x + ny = 6$.



Determine m, n e as coordenadas de P.

8. $m = 1$, $n = 6$ e $P\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

9. Considere o sistema: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ **9.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. Encontre três soluções para cada equação.

b. Em um mesmo plano cartesiano, represente as soluções gráficas de cada equação.

c. Identifique a solução gráfica do sistema.

10. SOFTWARE Use um *software* de construção de gráficos para determinar a solução dos sistemas a seguir. Depois, escreva suas observações sobre a solução determinada em cada um dos sistemas.

a. $S_1 = \begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$

b. $S_2 = \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

c. $S_3 = \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

12. São misturados 60 L de leite com 2% de gordura e 20 L de leite com 4% de gordura. Há dados desnecessários no enunciado; espera-se que os estudantes façam o tratamento da informação para identificar quais dados podem ser descartados e quais são relevantes para a resolução do problema.

11. Alguns estudantes faziam prova em uma sala. Em dado momento, 5 meninas terminaram e saíram da sala, ficando o número de meninos igual ao dobro do número de meninas. Depois de alguns minutos, 7 meninos terminaram a prova e saíram, ficando na sala o mesmo número de meninas e de meninos. Determine o número total de estudantes que faziam a prova nessa sala.
11. 26 estudantes.

12. Misturam-se dois tipos de leite – um com 2% de gordura, que tem o custo de R$ 2,00 por litro e outro com 4% de gordura, que tem custo de R$ 1,25 por litro – para obter, ao todo, 80 litros de leite com 2,5% de gordura. Quantos litros de leite de cada tipo são misturados?

13. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** Construa um sistema linear com duas equações e duas incógnitas que tenha solução. Depois, escreva uma situação do cotidiano que se adapte ao sistema elaborado. **13.** Resposta pessoal.

Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é classificado, de acordo com seu número de soluções, em:

- sistema possível e determinado (SPD) – uma só solução;
- sistema possível e indeterminado (SPI) – infinitas soluções;
- sistema impossível (SI) – nenhuma solução.

Observação

Pode-se provar que se um sistema de equações lineares tem mais de uma solução, então ele tem infinitas soluções. Não faremos a demonstração nesta coleção.

Atividade resolvida

R3. Em uma loja de tintas, uma máquina mistura látex e corante conforme o pedido do consumidor. Calcular a quantidade de litros de látex e de corante para que a máquina, preenchendo latas de 20 litros, obtenha latas de:

a. R$ 100,00, sendo o preço do litro de látex R$ 4,00 e o do litro de corante R$ 8,00;

b. R$ 80,00, sendo o preço do litro de látex R$ 4,00 e o do litro de corante R$ 4,00;

c. R$ 60,00, sendo o preço do litro de látex R$ 4,00 e o do litro de corante R$ 4,00.


BALEIN/SHUTTERSTOCK

O látex é o componente que ajuda a tinta aderir à superfície e o corante é utilizado para dar cor.

▸ **Resolução**

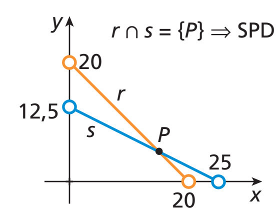
a. Indicando a quantidade, em litro, de látex e de corante por x e y, respectivamente, e sabendo que sempre haverá mistura entre eles, construímos o sistema:

$$S_1 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 8y = 100 \end{cases}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0$$

Resolvendo S_1, obtemos $x = 15$ e $y = 5$.

Logo, o conjunto solução é $S = \{(15, 5)\}$, isto é, S_1 tem apenas uma solução, constituindo um **sistema possível e determinado (SPD)**.

Representando graficamente o sistema, obtemos segmentos de reta, contidos nas retas r e s, conforme mostra a figura.



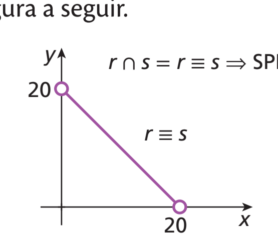
b. Nesse caso, construímos o sistema:

$$S_2 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 4y = 80 \end{cases}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0$$

Multiplicando a equação $x + y = 20$ por 4, obtemos a equação $4x + 4y = 80$, ou seja, as equações de S_2 têm as mesmas soluções. Algumas das infinitas soluções de S_2 são (1, 19), (2, 18), (3, 17) e (5,3; 14,7). Note que essas soluções são do tipo $(20 - \alpha, \alpha)$, com $0 < \alpha < 20$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Logo, $S = \{(20 - \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < \alpha < 20\}$ e S_2 é um **sistema possível e indeterminado (SPI)**.

Representando graficamente o sistema, obtemos segmentos de reta, contidos nas retas r e s, conforme mostra a figura a seguir.



Note que os gráficos que representam as duas equações são segmentos de reta contidos em retas coincidentes e apresentam infinitos pontos em comum.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

c. Para essa situação, construímos o sistema:

$$S_3 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 4y = 60 \end{cases}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0$$

Resolvendo S_3, temos:

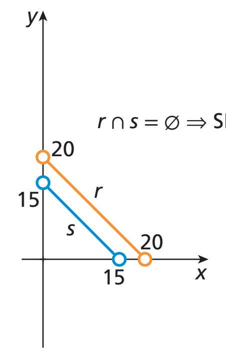
$$\begin{cases} -\cancel{4x} - \cancel{4y} = -80 \\ \cancel{4x} + \cancel{4y} = 60 \end{cases}$$

$$0x + 0y = -20 \Rightarrow 0 = -20 \text{ (sentença falsa)}$$

Não há valores para x e y que tornem a sentença verdadeira. Portanto, $S = \varnothing$ e S_3 é um **sistema impossível (SI)**.

Representando graficamente o sistema, obtemos segmentos de reta, contidos nas retas r e s, conforme mostra a figura a seguir.

Note que os gráficos que representam as duas equações são segmentos de reta contidos em retas paralelas distintas.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades propostas

Registre em seu caderno

14. Classifique os sistemas em SPD, SPI ou SI.

a. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ **14 a.** SPD

b. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$ **14 b.** SPI

c. $\begin{cases} x - y = 3 \\ -3x + 3y = 9 \end{cases}$ **14 c.** SI

d. $\begin{cases} x = 3 + y \\ y = x - 3 \end{cases}$ **14 d.** SPI

15. Calcule k tal que o sistema $\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ 3x - 2y + kz = 0 \end{cases}$ seja:

a. possível e indeterminado; **15 a.** $k = 0$

b. possível e determinado. **15 b.** $k \neq 0$

16. Considere o sistema: $\begin{cases} 6x + 3y = a \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

a. Existe algum valor de a que torne o sistema possível e indeterminado? Caso exista, resolva o sistema para o valor encontrado. **16 a.** Sim, $a = \frac{15}{2}$; $S = \left\{\left(\frac{5 - 2\alpha}{4}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

b. Existe algum valor de a que torne o sistema possível e determinado? Caso exista, resolva o sistema para o valor encontrado. **16 b.** Não.

17. Reescreva o sistema da **atividade 16** com um valor para a, de modo que o sistema seja impossível. **17.** Resposta pessoal.

Sistemas lineares homogêneos

Quando todos os termos independentes de um sistema linear são nulos, o sistema é denominado **homogêneo**.

Observe os exemplos.

a. $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4x - 6y + z - t = 0 \\ 0x + 3y - z + 5t = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -x + 8y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \\ 7x - 2z = 0 \end{cases}$

Todo sistema linear homogêneo com n incógnitas admite a ênupla (0, 0, ..., 0) como solução. Essa solução é chamada de **solução nula**, **trivial** ou **imprópria**.

Qualquer solução diferente de (0, 0, ..., 0) para um sistema homogêneo é chamada de **não nula**, **não trivial** ou **própria**.

Existe algum sistema linear homogêneo que não tenha, pelo menos, uma solução? Por quê?

Questão. Não. Porque sempre há a solução trivial ou infinitas soluções.

Atividade resolvida

R4. Determinar a, b e c para que o sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y - 7z = c + a \\ -2x + y + 2z = 1 - c \\ x - y + z = a - b \end{cases}$$

de incógnitas x, y e z seja homogêneo.

▶ **Resolução**

O sistema é homogêneo se:

$$\begin{cases} c + a = 0 \Rightarrow a = -c \\ 1 - c = 0 \Rightarrow c = 1 \\ a - b = 0 \Rightarrow a = b \end{cases}$$

Como $c = 1$ e $a = -c$, temos $a = -1$. E, como $a = b$, temos $b = -1$.

Logo, para que o sistema seja homogêneo, devemos ter $a = -1$, $b = -1$ e $c = 1$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

18. Calcule m e n para que os sistemas a seguir, de incógnitas x e y, tenham a mesma solução. **18.** $m = 1$ e $n = 3$.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y = 6 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x - y = m \\ x + y = n \end{cases}$$

19. Dado o sistema homogêneo de incógnitas x, y e z, determine a, b e c. **19.** $a = 2$, $b = -3$ e $c = -4$.

$$\begin{cases} x + y + z = a - 2 \\ x + 2y + 3z = 2a + c \\ x - y + 2z = a + 2b - c \end{cases}$$

Matrizes associadas a um sistema linear

Todo sistema linear pode ser associado a matrizes.

Considere os exemplos.

a. Vamos considerar o sistema: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - 7y = -3 \end{cases}$

- Chamamos de **matriz incompleta** a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, formada apenas pelos coeficientes ordenados das incógnitas de cada equação.
- Chamamos de **matriz completa** a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$, formada, ordenadamente, pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes de cada equação.

b. Para o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 10 \\ -x - y = -5 \end{cases}$, temos as matrizes associadas:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matriz incompleta}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}}_{\text{matriz completa}}$$

Quando uma das incógnitas do sistema não aparece em alguma das equações, seu coeficiente é nulo.

Observação

A matriz incompleta associada a um sistema linear também é chamada de **matriz dos coeficientes**.

Representação matricial de um sistema linear

Aplicando a definição de multiplicação de matrizes e o conceito de matriz incompleta associada a um sistema linear, é possível obter a **representação matricial** ou **forma matricial** do sistema.

Analise os exemplos.

a. Sistema linear: $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 7x - 4y = -1 \end{cases}$

Representação matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Podemos verificar essa representação matricial efetuando a multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \quad \rightarrow \quad 1x + 3y = 7$$

$$\begin{matrix} 7 & -4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \quad \rightarrow \quad 7x - 4y = -1$$

b. Sistema linear: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

Representação matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Podemos verificar essa representação matricial efetuando a multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \rightarrow 1x - 2y + 1z = 3$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \rightarrow 1x + 0y + 2z = 1$$

20 a. $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

20 b. $N = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Atividade resolvida

R5. Resolver o sistema linear associado à representação matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

▶ **Resolução**

O sistema correspondente a essa representação é:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

Pelo método da adição, obtemos $5x = 5$. Assim, $x = 1$ e $y = 2$.

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(1, 2)\}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

20. Escreva a matriz incompleta N e a matriz completa M para cada um dos sistemas lineares.

a. $\begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ x + 2z = 10 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$

21. Dadas as matrizes completas, escreva os sistemas lineares associados a elas.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

22. Escreva o sistema linear correspondente a:

a. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ **22 a.** $\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$

b. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 7 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ **22 b.** $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ x - 4y + 7z = 0 \\ 5x - 6z = 3 \end{cases}$

23. Elabore um sistema linear com três equações e três incógnitas. Escreva a representação matricial associada a esse sistema. **23.** Resposta pessoal.

21 a. $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$ **21 b.** $\begin{cases} 2x + 7y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$

24. Verifique se $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ é solução do sistema linear correspondente à representação matricial:

$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **24.** Sim.

25. Verifique quais dos ternos ordenados são soluções do sistema linear cuja representação matricial é:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **25.** Alternativas **b**, **c** e **d**.

a. $(1, 1, 1)$
b. $(0, 0, 0)$
c. $(-3, 1, 2)$
d. $(3, -1, -2)$
e. $(-1, 1, 0)$

26. Escreva o sistema linear associado a cada representação matricial. Em seguida, resolva-o.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ **26 a.** $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow S = \{(2, 8)\}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

26 b. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \{(1, 2, 3)\}$

Escalonamento de sistemas lineares

Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas lineares são **equivalentes** quando têm o mesmo conjunto solução.

Indica-se que o sistema S_1 é equivalente ao sistema S_2 por: $S_1 \sim S_2$

Analise o exemplo.

Sejam os sistemas lineares:

$$S_1 = \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} 3x + y = 9 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema S_1, temos:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \cancel{y} = 7 \\ \underline{-x - \cancel{y} = -5} \end{cases}$$
$$x = 2$$

Como $x = 2$, obtemos $y = 3$.

Logo, o conjunto solução de S_1 é $S = \{(2, 3)\}$.

Resolvendo o sistema S_2, temos:

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + \cancel{3y} = 27 \\ \underline{7x - \cancel{3y} = 5} \end{cases}$$
$$16x = 32 \Rightarrow x = 2$$

Como $x = 2$, obtemos $y = 3$.

Logo, o conjunto solução de S_2 é $S = \{(2, 3)\}$.

Como os dois sistemas lineares têm a mesma solução, eles são equivalentes.

Atividade resolvida

R6. Verificar se os sistemas são equivalentes.

$$S_1 = \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 6 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$S_2 = \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 4 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

▸ **Resolução**

Resolvendo cada um dos sistemas lineares, temos:

$$S_1 = \begin{cases} x + y + 2z = 2 & \text{(I)} \\ 2x + y + 2z = 4 & \text{(II)} \\ 3x + 2y + 4z = 6 & \text{(III)} \end{cases}$$

Da equação (I), temos: $x = 2 - y - 2z$

Substituindo na equação (II), temos:

$2(2 - y - 2z) + y + 2z = 4 \Rightarrow -y - 2z = 0 \Rightarrow y = -2z$

Substituindo em $x = 2 - y - 2z$, temos:

$$x = 2 - (-2z) - 2z \Rightarrow x = 2$$

Substituindo $x = 2$ e $y = -2z$ na equação (III), temos:

$$3 \cdot 2 + 2(-2z) + 4z = 6 \Rightarrow 0z = 0$$

A equação $0z = 0$ admite solução $z = \alpha$, sendo α real.

Substituindo em $y = -2z$, temos: $y = -2\alpha$

Logo, o conjunto solução é $S_1 = \{(2, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

$$S_2 = \begin{cases} x - y - 2z = 2 & \text{(I)} \\ 2x - 3y - 6z = 4 & \text{(II)} \\ x + 2y + 4z = 2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Da equação (I), temos: $x = 2 + y + 2z$

Substituindo na equação (II), temos:

$2(2 + y + 2z) - 3y - 6z = 4 \Rightarrow -y - 2z = 0 \Rightarrow y = -2z$

Substituindo em $x = 2 + y + 2z$, temos:

$$x = 2 - 2z + 2z \Rightarrow x = 2$$

Substituindo $x = 2$ e $y = -2z$ na equação (III), temos:

$$2 + 2(-2z) + 4z = 2 \Rightarrow 0z = 0$$

A equação $0z = 0$ admite solução $z = \alpha$, sendo α real.

Substituindo em $y = -2z$, temos: $y = -2\alpha$

Logo, o conjunto solução é $S_2 = \{(2, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Como os dois sistemas têm o mesmo conjunto solução, eles são equivalentes.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

27. Determine a e b de modo que sejam equivalentes os sistemas lineares: **27.** $a = 0$ e $b = 1$

$$S_1 = \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$$

28. Calcule m e n tal que as representações matriciais correspondam a sistemas lineares equivalentes. **28.** $m = -\frac{5}{2}$ e $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} m & 5 \\ 4 & -n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

29. Nos sistemas possíveis e determinados S_1, S_2 e S_3 a seguir, observe que: **29.** $S = \{(2, -2, 1)\}$; sim.

- a segunda equação de S_2 foi obtida adicionando a segunda equação de S_1 com a primeira equação de S_1 multiplicada por 2 ($E = B + 2 \cdot A$);
- a terceira equação de S_2 foi obtida adicionando a terceira equação de S_1 com a primeira equação de S_1 multiplicada por 3 ($F = C + 3 \cdot A$);
- a terceira equação de S_3 foi obtida adicionando a terceira equação de S_2 com a segunda equação de S_2 multiplicada por 4 ($I = F + 4 \cdot E$).

$$S_1 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(A)} \\ 2x + 5y + 4z = -2 & \text{(B)} \\ 3x + 2y + z = 3 & \text{(C)} \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(D)} \\ y + 2z = 0 & \text{(E)} \\ -4y - 2z = 6 & \text{(F)} \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(G)} \\ y + 2z = 0 & \text{(H)} \\ 6z = 6 & \text{(I)} \end{cases}$$

Determine o conjunto solução de S_3 e verifique se também é conjunto solução de S_2 e de S_1, isto é, verifique se S_1, S_2 e S_3 são sistemas equivalentes.

30. Em cada item, faça o que se pede.

a. Resolva o sistema linear: $S_1 = \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$

b. PENSAMENTO COMPUTACIONAL Siga os passos para obter um novo sistema linear, que indicaremos por S_2.

Passo 1. Mantenha uma das equações de S_1.

Passo 2. Multiplique por um número real não nulo a equação que foi mantida.

Passo 3. Adicione a equação obtida no **passo 2** à outra equação de S_1.

Passo 4. A equação obtida no **passo 3** será a segunda equação de S_2.

c. Verifique que $S_1 \sim S_2$.

30 a. $S = \{(6, 5)\}$

30 b. Exemplo de resposta:

$S_2 = \begin{cases} x - 2y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

A primeira equação do sistema linear S_2 é igual à primeira equação do sistema linear S_1. A segunda equação de S_2 foi obtida adicionando a segunda equação de S_1 com a primeira equação de S_1 multiplicada por -1 .

30 c. Resolvendo S_2, obtemos: $S = \{(6, 5)\}$ Portanto, $S_1 \sim S_2$

Sistemas lineares escalonados

Para resolver e classificar sistemas lineares, podemos recorrer ao processo do **escalonamento**, ou **método da eliminação de Gauss-Jordan**.

Antes de estudar o método, estudaremos o que são **sistemas lineares escalonados** e como resolvê-los e classificá-los.

Um sistema linear em que todas as equações apresentam as incógnitas na mesma ordem é dito **escalonado** quando, de cada equação para a seguinte, aumenta a quantidade de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo.

Observe os exemplos.

a. $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 0x + 2y - z = 3 \\ 0x + 0y + z = 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 0x + 3y + 2z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y + 2z - 3t = 7 \\ 0x + 0y + 5z + t = 2 \end{cases}$

Observação

Para verificar se o sistema linear está escalonado, é importante considerar todas as incógnitas, na mesma ordem, e lembrar que, quando a incógnita não aparece explicitamente, é porque seu coeficiente é zero.

Quando o sistema linear não estiver escalonado, é possível escaloná-lo. Isso será estudado na página seguinte.

Atividade resolvida

R7. Resolver e classificar os sistemas lineares a seguir.

a. $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 2y - z = 3 \\ z = 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2y - 6z = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 6y - 3z = 5 \\ y - 3z = 8 \\ 0z = 2 \end{cases}$

▶ **Resolução**

a. Como o sistema já está escalonado, temos $z = 5$.

Substituindo z por 5 na segunda equação, obtemos:

$$2y - 5 = 3 \Rightarrow y = 4$$

Substituindo z por 5 e y por 4 na primeira equação, obtemos:

$$2x - 4 + 5 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Logo, há uma só solução $\left(\frac{1}{2}, 4, 5\right)$.

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

b. O sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2y - 6z = 0 \end{cases}$ possui duas equações e três incógnitas.

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, sendo α real, temos:

$$\begin{cases} x + 2y - \alpha = 4 \\ 2y - 6\alpha = 0 \end{cases}$$

Resolvendo esse novo sistema, encontramos $y = 3\alpha$ e $x = 4 - 5\alpha$.

Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Por exemplo, fazendo $\alpha = -6$, obtemos o terno $(34, -18, -6)$, que satisfaz o sistema.

Como α é um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções, ou seja, é um sistema possível e indeterminado (SPI).

Portanto, a solução do sistema será do tipo $(4 - 5\alpha, 3\alpha, \alpha)$, em que α é real.

c. Na equação $0z = 2$, do sistema $\begin{cases} x + 6y - 3z = 5 \\ y - 3z = 8 \\ 0z = 2 \end{cases}$ não há valores para z que tornem a igualdade verdadeira, pois toda multiplicação por zero resulta em zero. Sem solução, o sistema é impossível (SI).

Observação

Quando um sistema admite infinitas soluções (SPI), chamamos a variável que assume o valor α, real, de **variável livre**. No item **b**, z é a variável livre.
Há sistemas com mais de uma variável livre.

O processo de escalonamento de um sistema linear

Para escalonar um sistema linear, escrevemos sistemas equivalentes a ele, adotando quantas vezes for necessário, total ou parcialmente, o seguinte procedimento:

I. invertemos a posição das equações;

II. multiplicamos ambos os membros de uma equação por um mesmo número, real e não nulo;

III. substituímos uma equação pela adição dela com outra multiplicada por um número real não nulo.

Observação

Se todos os termos de uma equação linear forem multiplicados por um mesmo número real não nulo, o conjunto solução da equação não será alterado.

Analise os exemplos.

a. Para escalonar o sistema linear $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - 3y - 3z = 5 \\ 3x - y - 5z = 10 \end{cases}$, adotamos os seguintes passos:

1º Anulamos os coeficientes da 1ª incógnita nas 2ª e 3ª equações.

Processo para anular os coeficientes da 1ª incógnita nas 2ª e 3ª equações

Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por −2 com a 2ª equação, gerando uma nova 2ª equação: $\begin{array}{rcl} -\cancel{2x}+4y+2z & = & -6 \\ \cancel{2x}-3y-3z & = & 5 \\ \hline y-z & = & -1 \end{array}$	Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por −3 com a 3ª equação, gerando uma nova 3ª equação: $\begin{array}{rcl} -\cancel{3x}+6y+3z & = & -9 \\ \cancel{3x}-y-5z & = & 10 \\ \hline 5y-2z & = & 1 \end{array}$	Substituindo a 2ª e a 3ª equações pelas novas equações, temos: $\begin{cases} x-2y-z=3 \\ y-z=-1 \\ 5y-2z=1 \end{cases}$

2º Para anular o coeficiente da incógnita y na nova 3ª equação, multiplicamos a nova 2ª equação por −5 e adicionamos o produto obtido com a nova 3ª equação:

$$\begin{array}{rcl} -\cancel{5y}+5z & = & 5 \\ \cancel{5y}-2z & = & 1 \\ \hline 3z & = & 6 \end{array}$$

3º Após substituir a 3ª equação pela soma obtida, temos um sistema escalonado equivalente ao sistema inicial:

$$\begin{cases} x-2y-z=3 \\ y-z=-1 \\ 3z=6 \end{cases}$$

Agora, podemos obter a solução do sistema:

- Da 3ª equação, obtemos $z=2$.
- Substituindo z por 2 na 2ª equação, obtemos $y=1$.
- Substituindo z por 2 e y por 1 na 1ª equação, obtemos $x=7$.

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S=\{(7, 1, 2)\}$.

b. Para escalonar o sistema linear $\begin{cases} 3x-y+z=5 \\ x+y-2z=3 \\ 2x+3y-z=7 \end{cases}$, adotamos os seguintes passos:

1º Como 1ª equação, escolhemos aquela cuja 1ª incógnita tenha coeficiente não nulo e, se possível, igual a 1 ou a −1, o que simplifica o processo. Assim, invertemos a posição da 1ª e da 2ª equação:

$$\begin{cases} x+y-2z=3 & \text{(2ª equação no sistema inicial)} \\ 3x-y+z=5 & \text{(1ª equação no sistema inicial)} \\ 2x+3y-z=7 & \text{(3ª equação no sistema inicial)} \end{cases}$$

2º Anulamos os coeficientes da 1ª incógnita nas 2ª e 3ª equações.

Processo para anular os coeficientes da 1ª incógnita nas 2ª e 3ª equações

Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por −3 com a 2ª equação, gerando uma nova 2ª equação: $\begin{array}{rcl} -\cancel{3x}-3y+6z & = & -9 \\ \cancel{3x}-y+z & = & 5 \\ \hline -4y+7z & = & -4 \end{array}$	Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por −2 com a 3ª equação, gerando uma nova 3ª equação: $\begin{array}{rcl} -\cancel{2x}-2y+4z & = & -6 \\ \cancel{2x}+3y-z & = & 7 \\ \hline y+3z & = & 1 \end{array}$	Substituindo a 2ª e a 3ª equações pelas novas equações, temos: $\begin{cases} x+y-2z=3 \\ -4y+7z=-4 \\ y+3z=1 \end{cases}$

3º No sistema obtido, invertemos a posição entre a 2ª e a 3ª equações:

$$\begin{cases} x+y-2z=3 & \\ y+3z=1 & \text{(3ª equação no sistema anterior)} \\ -4y+7z=-4 & \text{(2ª equação no sistema anterior)} \end{cases}$$

4º Para anular o coeficiente da incógnita y da nova 3ª equação, multiplicamos a nova 2ª equação por 4 e adicionamos o produto obtido com a nova 3ª equação:

$$\begin{array}{rcl} -\cancel{4y}+12z & = & 4 \\ \cancel{4y}+7z & = & -4 \\ \hline 19z & = & 0 \end{array}$$

5º Após substituir a 3ª equação pela soma obtida, temos um sistema escalonado equivalente ao sistema inicial:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ y + 3z = 1 \\ 19z = 0 \end{cases}$$

A resolução do sistema fica, então, facilitada:

- Da 3ª equação, obtemos $z = 0$.
- Substituindo z por 0 na 2ª equação, obtemos $y = 1$.
- Substituindo z por 0 e y por 1 na 1ª equação, obtemos $x = 2$.

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S = \{(2, 1, 0)\}$.

c. Para escalonar o sistema $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = -3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, adotamos os seguintes passos:

1º Invertemos a posição das equações: passamos a 3ª equação para o lugar da 1ª equação e vice-versa, o que simplifica o processo, conforme foi visto no exemplo **b**.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & \text{(3ª equação do sistema inicial)} \\ 2x - y - z = -3 & \text{(2ª equação do sistema inicial)} \\ 3x + 2y + 2z = -1 & \text{(1ª equação do sistema inicial)} \end{cases}$$

2º Anulamos os coeficientes da 1ª incógnita nas 2ª e 3ª equações.

Processo para anular os coeficientes da 1ª incógnita nas 2ª e 3ª equações

Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por −2 com a 2ª equação, gerando uma nova 2ª equação:	Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por −3 com a 3ª equação, gerando uma nova 3ª equação:	Substituindo a 2ª e a 3ª equações pelas novas equações, temos:
$\begin{array}{r} -\cancel{2x} - 2y - 2z = 0 \\ \cancel{2x} - y - z = -3 \\ \hline -3y - 3z = -3 \end{array}$	$\begin{array}{r} -\cancel{3x} - 3y - 3z = 0 \\ \cancel{3x} + 2y + 2z = -1 \\ \hline -y - z = -1 \end{array}$	$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - 3z = -3 \\ -y - z = -1 \end{cases}$

3º Para anular o coeficiente da incógnita y na 3ª equação no sistema obtido, dividimos a 2ª equação por −3 e adicionamos, membro a membro, a nova 2ª equação com a 3ª equação, podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Este último é um sistema escalonado equivalente ao sistema inicial.

A equação $0z = 0$ admite a solução $z = \alpha$, em que α é um número real.

Admitindo a solução $z = \alpha$, sendo α real, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + \alpha = 0 \\ y + \alpha = 1 \end{cases}$$

Resolvendo esse novo sistema, encontramos $y = 1 - \alpha$ e $x = -1$.

Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Por exemplo, fazendo $\alpha = 3$, obtemos o terno $(-1, -2, 3)$, que satisfaz o sistema.

Como α representa um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções, ou seja, é um sistema possível e indeterminado (SPI). Então, a solução do sistema é do tipo $(-1, 1 - \alpha, \alpha)$, em que α é um número real.

Portanto, $S = \{(-1, 1 - \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema.

Atividade resolvida

R8. Escalonar e resolver o sistema linear: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 4x - 6y + 8z = 16 \\ 4x - 7y + 6z = 15 \end{cases}$

▶ **Resolução**

Processo de escalonamento do sistema linear

Multiplicamos a 1ª equação por −4 e a adicionamos à 2ª, gerando uma nova 2ª equação. Multiplicamos a 1ª equação por −4 e a adicionamos à 3ª, gerando uma nova 3ª equação: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2y + 4z = 4 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$	Dividimos a 2ª equação por 2: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$	Multiplicamos a 2ª equação por −1 e a adicionamos à 3ª, gerando uma nova 3ª equação: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ 0z = 1 \end{cases}$

A nova 3ª equação não admite solução.

Logo, o sistema é impossível (SI) e, portanto, $S = \varnothing$.

35 a. $S = \{(1, 3)\}$; SPD. **35 b.** $S = \varnothing$; SI. **35 c.** $S = \varnothing$; SI. **35 d.** $S = \{(1, 2, -2)\}$; SPD. **35 e.** $S = \left\{\left(\frac{28 - 3\alpha}{5}, \frac{9 + \alpha}{5}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; SPI. **35 f.** $S = \left\{\left(\frac{\alpha - 5}{3}, \frac{17 - 4\alpha}{3}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; SPI.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

31. EM DUPLA Elabore um sistema linear de equações escalonado com três equações e três incógnitas e peça a um colega que o resolva. Você também deve resolver o sistema escalonado elaborado pelo seu colega. **31.** Resposta pessoal.

32. Resolva e classifique os sistemas lineares escalonados.

a. $\begin{cases} -3x + 5y = -11 \\ 2y = -2 \end{cases}$ **32 a.** $S = \{(2, -1)\}$; SPD.

b. $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$ **32 b.** $S = \{(1, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; SPI.

c. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2y + z = 3 \\ -4z = 4 \end{cases}$ **32 c.** $S = \{(3, -2, -1)\}$; SPD.

d. $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$

32 d. $S = \{(7\alpha - 4, 1 - 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; SPI.

33. Escalone e resolva os sistemas lineares a seguir.

a. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ **33 a.** $S = \{(2, 3)\}$

b. $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$ **33 b.** $S = \{(3, -1)\}$

c. $\begin{cases} 4x - 2y = 34 \\ x + 6y = 2 \end{cases}$ **33 c.** $S = \{(8, -1)\}$

d. $\begin{cases} x + y = -4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$ **33 d.** $S = \{(-1, -3)\}$

34. **(Enem-2022)** Três amigos, A, B e C, se encontraram em um supermercado. Por coincidência, estavam comprando os mesmos itens, conforme o quadro.

Amigos	Arroz (kg)	Feijão (kg)	Macarrão (kg)
A	3	2	4
B	2	3	3
C	2	2	2

Os amigos estavam muito entretidos na conversa e nem perceberam que pagaram suas compras, pegaram seus trocos e esqueceram seus comprovantes. Já longe do supermercado, "A" lembrou que precisava saber o quanto pagou por um quilo de arroz e dois quilos de macarrão, pois estava comprando para sua vizinha e esperava ser ressarcido. "B", que adorava desafios matemáticos, disse que pagou suas compras com R$ 40,00 e obteve troco de R$ 7,30, e que conseguiria determinar o custo desses itens se os amigos dissessem como pagaram e quanto foram seus respectivos trocos. "A" disse que pagou com R$ 40,00 e obteve troco de R$ 4,00, e "C" pagou com R$ 30,00 e obteve troco de R$ 5,40. A vizinha de "A" deve a ele pela compra, em reais, o valor de **34.** Alternativa **c**.

a. 8,10.
b. 10,00.
c. 11,40.
d. 12,00.
e. 13,20.

35. Escalone, resolva e classifique os sistemas lineares.

a. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 3 \\ 3x + 4y + 4z = 4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} -x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + z = 13 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 5x + 2y + z = 3 \\ 6x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$

Farmacêutico

CHICO FERREIRA/PULSAR IMAGENS

Farmacêuticos atuando no Centro Henrique Penna, em Bio-Manguinhos – Fundação Osvaldo Cruz, Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2021.

O farmacêutico é o profissional que trabalha no desenvolvimento, na produção, na análise, na manipulação e na **dispensação** de **medicamentos**, **remédios** e **fármacos**. Pode atuar em farmácias, hospitais, indústrias de medicamentos, laboratórios de análises clínicas, no desenvolvimento de produtos de higiene pessoal, cosméticos e perfumes.

Dispensação: ato de distribuir um ou mais medicamentos a um paciente, geralmente diante da apresentação de uma prescrição elaborada por médico ou por outro profissional autorizado.

Medicamentos: produto elaborado por farmácias de manipulação ou por indústrias farmacêuticas para prevenir e tratar doenças ou aliviar sintomas.

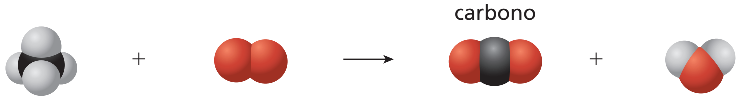
Remédio: método ou cuidado terapêutico que ajudam a combater doenças ou a aliviar sintomas, mas que não passaram pelas etapas que um medicamento passa para ser liberado.

Fármacos: é o princípio ativo do medicamento, ou seja, é a substância que garante a ação terapêutica.

Para se tornar farmacêutico, o profissional deve ter completado algum curso superior em Farmácia, reconhecido pelo Ministério da Educação (MEC). Além disso, para exercer a profissão, o farmacêutico precisa ter registro no Conselho Regional de Farmácia (CRF) do estado onde trabalha.

Elementos químicos e equações que representam as reações químicas fazem parte do cotidiano dos farmacêuticos. Considere, por exemplo, a equação que representa a reação de oxidação do gás metano.

Uma molécula de metano + Uma molécula de oxigênio ⟶ Uma molécula de dióxido de carbono + Uma molécula de água



$$CH_4 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$$

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

À esquerda da seta, estão os reagentes e, à direita, os produtos da reação. Note que o número de átomos dos reagentes é diferente do número de átomos dos produtos. Em casos como esse, costuma-se fazer o balanceamento da equação. Esse balanceamento possibilita prever mais facilmente a quantidade de reagentes necessários e de produtos formados em uma reação.

No processo de balanceamento de equações não podemos alterar o valor dos índices que acompanham os símbolos dos elementos químicos, pois alteraríamos as substâncias representadas, ou seja, estaríamos descrevendo outra reação química.

Utilizando sistemas lineares, é possível calcular os coeficientes de equações químicas para que fiquem balanceadas. Para balancear a equação anterior, vamos indicar seus coeficientes por *a*, *b*, *c* e *d*.

$$a\ CH_4 + b\ O_2 \rightarrow c\ CO_2 + d\ H_2O$$

Como a quantidade de átomos dos reagentes deve ser igual à quantidade de átomos dos produtos obtidos, temos:

$a = c$ (para o carbono)

$4a = 2d$ (para o hidrogênio)

$2b = 2c + d$ (para o oxigênio)

Com essas igualdades, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a = c \\ 4a = 2d \\ 2b = 2c + d \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, temos:

$$a = c \text{ e } b = d = 2a$$

Fazendo $a = \beta$, com β sendo um número real, a solução geral do sistema é $S = (\beta, 2\beta, \beta, 2\beta)$.

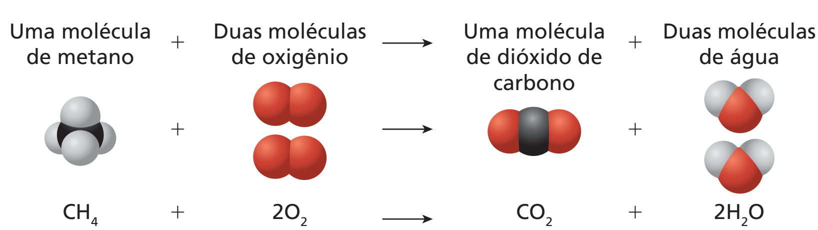
Esse é um sistema possível e indeterminado, ou seja, apresenta infinitas soluções.

Ao balancear uma equação química, é conveniente utilizar os menores coeficientes naturais diferentes de zero. Assim, fazendo $\beta = 1$, obtemos a solução (1, 2, 1, 2), ou seja, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ e $d = 2$.

Substituindo *a*, *b*, *c* e *d* pelos valores obtidos, temos:

$$1\ CH_4 + 2\ O_2 \rightarrow 1\ CO_2 + 2\ H_2O$$

Como a quantidade de átomos dos reagentes deve ser igual à quantidade de átomos dos produtos obtidos, a equação balanceada é:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

Registre em seu caderno

1. **EM GRUPO** Responda às questões.

a. Você conhece algum farmacêutico? Em caso afirmativo, o que essa pessoa faz? **1.** Respostas pessoais.

b. O que mais chama a sua atenção na profissão de farmacêutico? Por quê?

2. Responda às questões sobre balanceamento de equações químicas.

a. O que significa dizer que uma equação química está balanceada?

2 a. Significa dizer que a quantidade de átomos de cada elemento químico presente no(s) reagente(s) é igual à quantidade de átomos de cada elemento químico presente no(s) produto(s) da reação.

b. Quais são as informações relevantes para montar o sistema linear que possibilita balancear uma equação química? Cite uma informação que não interfere na resolução.

2 b. As informações importantes são o número de átomos dos reagentes e dos produtos. Uma informação que não interfere no balanceamento é o nome de cada elemento químico.

3. Faça o balanceamento da equação química a seguir.

3. $Fe_3O_4 + CO \rightarrow 3\ FeO + CO_2$

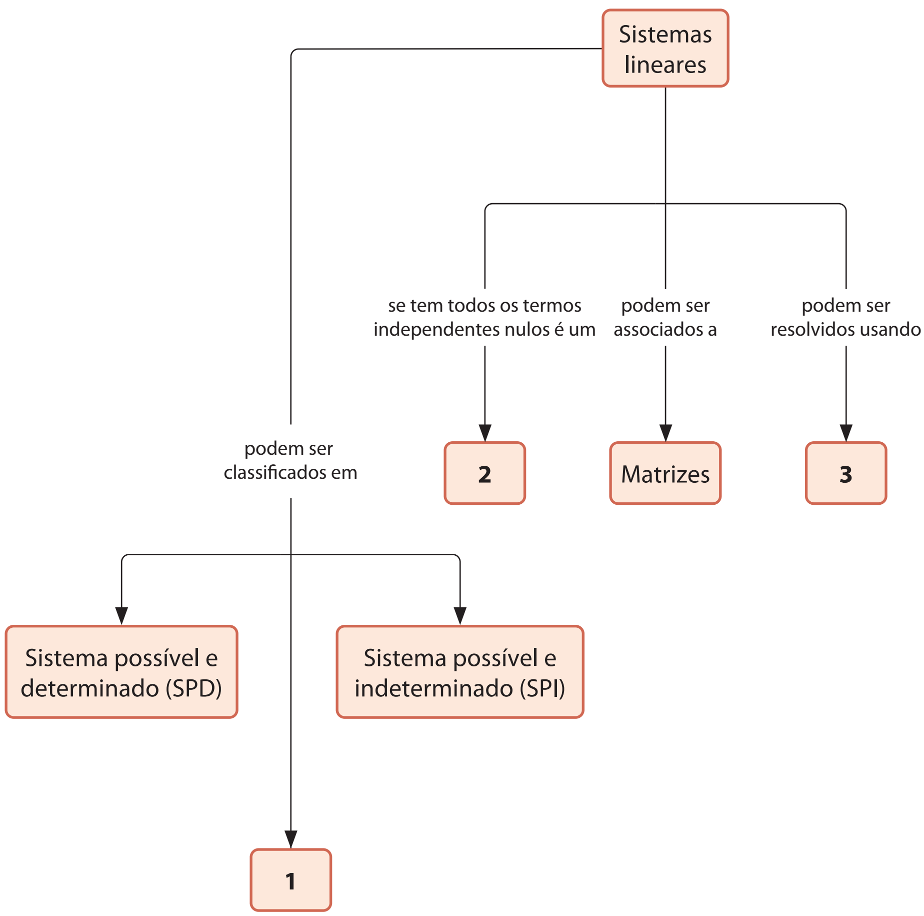
$$Fe_3O_4 + CO \rightarrow FeO + CO_2$$

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 6

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa mental a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Escalonamento

B. Sistema impossível (SI)

C. Sistema linear homogêneo

Conexões entre conceitos. A – 3; B – 1; C – 2.

SUGESTÃO DE AMPLIAÇÃO

Livro

Matemática divertida e curiosa

Malba Tahan

Rio de Janeiro: Record, 2014.

REPRODUÇÃO/EDITORA RECORD

Nessa obra, o autor relata casos curiosos sobre fatos e descobertas matemáticas. Traz, ainda, enigmas, problemas e figuras que surpreendem pela ilusão de óptica. O livro é um clássico do professor Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido pelo pseudônimo Malba Tahan. Uma leitura que amplia o universo de conhecimentos e, ao mesmo tempo, diverte.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. A equação que, com $2x + 2y = 2$, compõe um sistema linear de 2 equações com 3 incógnitas é: **Q1.** Alternativa **a**.

a. $y - z = 0$
b. $3x + 3y = 3$
c. $xy + xz + yz = 3$
d. $x^3 + y^3 = 8$
e. $xyz = 0$

Q2. Em um plano cartesiano, duas retas se interceptam em um único ponto diferente da origem. O que podemos afirmar sobre o sistema representado por estas retas? **Q2.** Alternativa **e**.

a. É possível e indeterminado.
b. É impossível.
c. É homogêneo.
d. Não é linear.
e. É possível e determinado.

Q3. Para que os sistemas lineares $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + y = a \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ sejam equivalentes, o valor de a deve ser: **Q3.** Alternativa **c**.

a. 5 **b.** 4 **c.** 9 **d.** 12 **e.** 10

Q4. Um sistema linear homogêneo: **Q4.** Alternativa **d**.

a. tem coeficientes das incógnitas iguais a zero.
b. tem todos os termos independentes diferentes de zero.
c. não tem solução.
d. tem todos os termos independentes iguais a zero.
e. não pode ser escalonado.

Q5. Para que $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ (a + 3)x + y = 5 \end{cases}$ seja um sistema linear escalonado, o valor de a deve ser: **Q5.** Alternativa **d**.

a. 2 **b.** 3 **c.** 0 **d.** -3 **e.** -5

Q6. A representação matricial $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ corresponde ao sistema: **Q6.** Alternativa **b**.

a. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$

Q7. Dos sistemas lineares

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x - 2y = 5 \\ x + y + 2z = 10 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ y + 5z = 17 \\ 22z = 67 \end{cases}$$

pode-se dizer que: **Q7.** Alternativa **b**.

a. não têm solução.
b. são equivalentes.
c. têm infinitas soluções.
d. são homogêneos.
e. são possíveis e indeterminados.

Q8. Alternativa **c**.

Q8. Em uma loja, os artigos A e B, custam juntos R$ 55,00, os artigos A e C, custam juntos R$ 50,00 e os artigos B e C custam juntos R$ 45,00. A soma dos preços dos artigos A, B e C é:

a. R$ 85,00 **b.** R$ 80,00 **c.** R$ 75,00 **d.** R$ 70,00 **e.** R$ 65,00

Q9. Uma loja ofereceu a seus clientes a possibilidade de comprar lençóis, fronhas e colchas agrupados nos seguintes jogos: **Q9.** Alternativa **c**.

(I) 2 lençóis e 2 fronhas;
(II) 2 lençóis e 2 colchas;
(III) 1 lençol, 1 fronha e 1 colcha.

O preço de cada peça é o mesmo em qualquer um dos jogos, I, II e III, que são vendidos por R$ 130,00, R$ 256,00 e R$ 143,00, respectivamente. O preço unitário da colcha é:

a. R$ 85,00 **b.** R$ 80,00 **c.** R$ 78,00 **d.** R$ 70,00 **e.** R$ 65,00

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9
Representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares.								X	X
Reconhecer e classificar sistemas lineares.	X	X	X	X			X		
Apresentar sistema linear na forma matricial e vice-versa.						X			
Aplicar o processo do escalonamento para resolver sistemas lineares.					X		X	X	X

Capítulo 7

GEOMETRIA ANALÍTICA

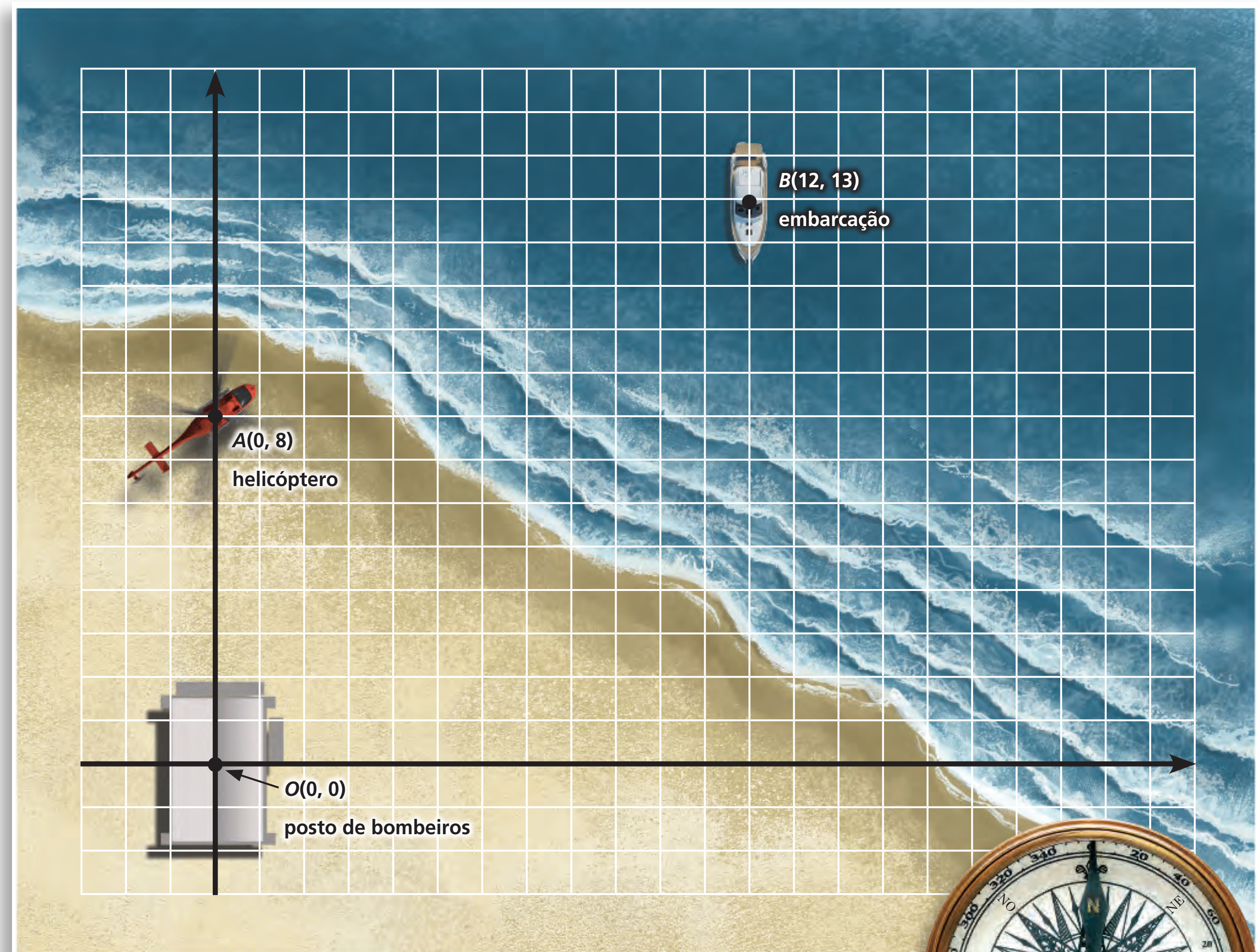
Ponto

O corpo de bombeiros de certo município litorâneo recebeu o chamado de um grupo de pessoas em uma embarcação avariada. Para o resgate, há um helicóptero, que está posicionado a 8 km ao norte do posto de bombeiros local, conforme indica o esquema da página seguinte. Qual é a menor medida de distância que o helicóptero deve percorrer até encontrar a embarcação?

Essa medida de distância é dada pela medida de distância entre o ponto *A* (localização do helicóptero) e o ponto *B* (localização da embarcação), indicados no esquema. Sabemos que a menor medida de distância entre esses pontos é a medida de comprimento do segmento de reta de extremidades *A* e *B*.

Neste capítulo, estudaremos o cálculo dessa medida de distância e resolveremos esse e outros problemas relacionados à Geometria.

A Geometria analítica fundamenta-se no estudo de pontos, retas e curvas, por meio do qual é possível transpor inúmeros problemas geométricos para a linguagem algébrica.



EBER EVANGELISTA/ARQUIVO DA EDITORA

RANGIZZ/SHUTTERSTOCK

Bússola de latão.

A Geometria analítica possibilita o estudo de figuras geométricas como pontos, retas e circunferências, por meio de sentenças matemáticas. Assim, uma figura geométrica pode ter suas propriedades analisadas e estudadas por processos algébricos, o que facilita a resolução de vários problemas.

A seguir, faremos um estudo do **ponto** com base no enfoque da Geometria analítica.

Como já estudamos, o **plano cartesiano**, ou **sistema cartesiano ortogonal**, é formado por dois eixos perpendiculares entre si. O eixo x (horizontal) é denominado eixo das **abscissas**, e o eixo y (vertical) é denominado eixo das **ordenadas**. Os eixos se cruzam no ponto $O(0, 0)$, denominado **origem**.

Podemos associar qualquer ponto P do plano cartesiano a um único par ordenado (x_P, y_P) de números reais e, reciprocamente, dado um par ordenado (x_P, y_P) de números reais, a ele fica associado um único ponto P pertencente ao plano. Dizemos que x_P e y_P são as **coordenadas** de P.

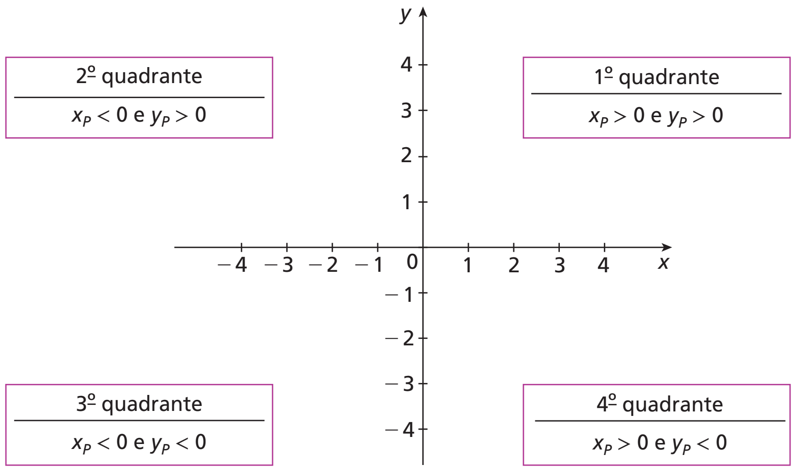
Considerando o problema do resgate das pessoas na embarcação avariada, no esquema anterior, podemos associar:

- o ponto O (localização do posto de bombeiros) à origem.
- o ponto A (localização do helicóptero) ao par ordenado (0, 8);
- o ponto B (localização da embarcação) ao par ordenado (12, 13).

MUSEU DO LOUVRE, PARIS

A palavra **cartesiano** tem origem no nome do criador desse sistema de localização de pontos no plano, René Descartes (1596-1650). BOURDON, Sébastien. **Suposto retrato de René Descartes**. 1645. Óleo sobre tela, 88 cm × 71 cm.

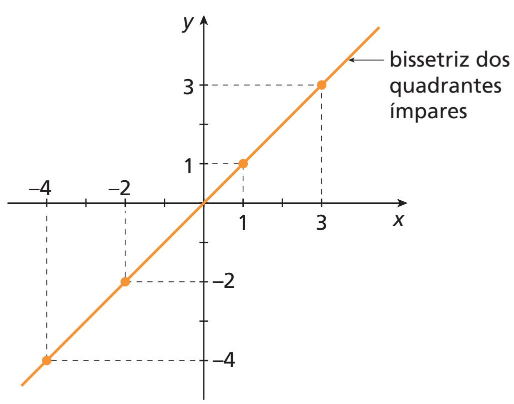
Os eixos do plano cartesiano dividem esse plano em quatro regiões, denominadas **quadrantes**, que são numerados no sentido anti-horário conforme indicado a seguir. Observe as condições para que um ponto $P(x_P, y_P)$ pertença a cada quadrante.



Observações

- Se um ponto P pertence ao eixo das abscissas, suas coordenadas são $(x_P, 0)$.
- Se um ponto P pertence ao eixo das ordenadas, suas coordenadas são $(0, y_P)$.

No plano cartesiano, a reta que contém a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes é chamada de **bissetriz dos quadrantes ímpares**.

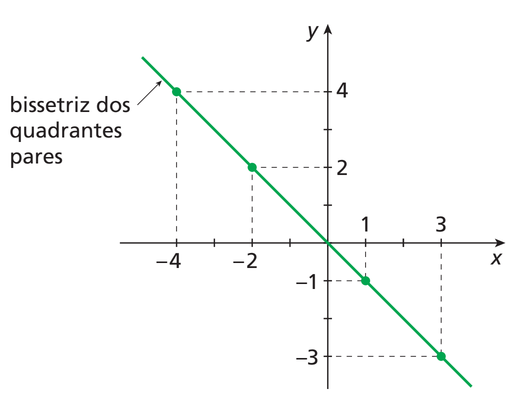


Observação

A bissetriz dos quadrantes é uma reta que passa pela origem e divide cada quadrante em duas regiões determinadas por ângulos cuja medida de abertura é igual a 45°.

Qual é a relação entre a abscissa x_P e a ordenada y_P de qualquer ponto P da bissetriz dos quadrantes ímpares? **Questão 1**. A abscissa é igual à ordenada, ou seja, $x_P = y_P$.

Já a reta que contém a bissetriz do 2º e do 4º quadrantes é chamada de **bissetriz dos quadrantes pares**.

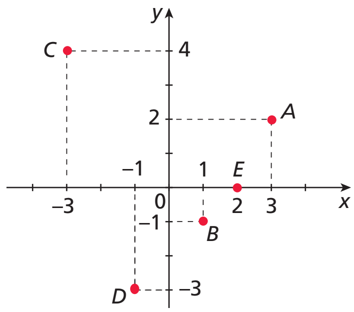


Qual é a relação entre a abscissa x_P e a ordenada y_P de qualquer ponto P da bissetriz dos quadrantes pares? **Questão 2**. A abscissa é igual ao oposto da ordenada, ou seja, $x_P = -y_P$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades resolvidas

R1. Determinar os pares ordenados associados aos pontos representados no plano cartesiano.



▶ **Resolução**

Observando a figura, percebemos que o ponto A está associado ao par ordenado $(3, 2)$; o ponto B, ao par $(1, -1)$; o ponto C, ao par $(-3, 4)$; o ponto D, ao par $(-1, -3)$; e o ponto E, ao par $(2, 0)$.

R2. Representar no plano cartesiano os pontos $A(1, 5)$, $B(4, 1)$ e $C(1, 1)$ e traçar os segmentos de reta com extremidades nesses pontos.

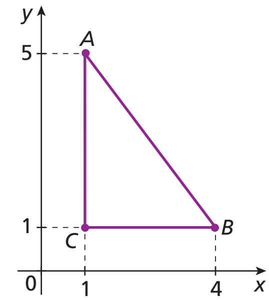
▶ **Resolução**

As coordenadas do ponto A são $x_A = 1$ e $y_A = 5$.

As coordenadas do ponto B são $x_B = 4$ e $y_B = 1$.

As coordenadas do ponto C são $x_C = 1$ e $y_C = 1$.

Note que os pontos A, B e C determinam o $\triangle ABC$.



R3. Obter os valores de a e de b para que os pontos $A(a^2 - 8, 1)$ e $B(4, b - 4)$ pertençam, respectivamente, ao eixo das ordenadas e ao eixo das abscissas.

▶ **Resolução**

Se o ponto A pertence ao eixo das ordenadas, então $x_A = 0$.

Assim: $a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$ ou $a = -2\sqrt{2}$

Se o ponto B pertence ao eixo das abscissas, então $y_B = 0$.

Assim: $b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Construa um plano cartesiano e localize os pontos $A(-1, -4)$, $B(7, 1)$, $C(2, -2)$, $D(-6, 0)$, $E\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$ e $F(4, 6)$.
1. Resposta no *Suplemento para o professor*.

2. Determine a que quadrante pertence cada um dos pontos associados aos pares ordenados a seguir.

a. $(3, -\sqrt{2})$ **2 a.** 4º quadrante.

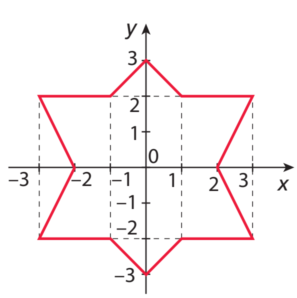
b. $(-\pi, -4)$ **2 b.** 3º quadrante.

c. $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \pi\right)$ **2 c.** 1º quadrante.

d. $(-1, 1)$ **2 d.** 2º quadrante.

3. ARGUMENTAÇÃO Em seu caderno, localize no plano cartesiano os pontos $D(0, 0)$, $E(-3, -6)$ e $F(2, 4)$. Eles são vértices de um triângulo? Por quê? **3.** Não, porque os pontos *D*, *E* e *F* estão alinhados.

4. Considere o polígono representado no plano cartesiano a seguir.



a. Determine os pares ordenados associados aos vértices do polígono.

b. Algum desses vértices pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares ou à bissetriz dos quadrantes pares? **4 b.** Não.

4 a. (0, 3), (1, 2), (3, 2), (2, 0), (3, −2), (1, −2), (0, −3), (−1, −2), (−3, −2), (−2, 0), (−3, 2) e (−1, 2).

5. O ponto $A(m - 8, n - 5)$ pertence ao 2º quadrante para que valores de m e n? Explique como você obteve esses valores.
5. $m, n \in \mathbb{R}$ tal que $m < 8$ e $n > 5$; justificativa no *Suplemento para o professor*.

6. Resolva os itens a seguir.

a. Construa um plano cartesiano e represente nele os pontos $P(8, 0)$ e $Q(0, 6)$. **6 a.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

b. Calcule a medida da distância, em unidade de medida de comprimento (u), entre o ponto P e a origem do plano cartesiano. **6 b.** 8 u

c. Calcule a medida da distância, em u, entre o ponto Q e a origem do plano cartesiano. **6 c.** 6 u

d. EM DUPLA Junto com um colega, calculem a medida de comprimento do segmento de reta determinado pelos pontos P e Q representados no plano cartesiano.

e. Calcule a medida da distância, em u, entre os pontos P e Q usando a estratégia elaborada no item anterior. **6 e.** 10 u

f. Escreva, em função de a e b, a medida de comprimento de um segmento de reta que tem como extremidades os pontos $A(a, 0)$ e $B(0, b)$. **6 f.** $\sqrt{a^2 + b^2}$

7. Use um papel quadriculado para representar um plano cartesiano. Nele, faça um esboço de cada item e cite uma característica geométrica do conjunto dos pontos com:

a. abscissa 4; **7 a.** Pontos da reta vertical que passa por (4, 0).

b. ordenada −3; **7 b.** Pontos da reta horizontal que passa por (0, −3).

c. ordenada 5; **7 c.** Pontos da reta horizontal que passa por (0, 5).

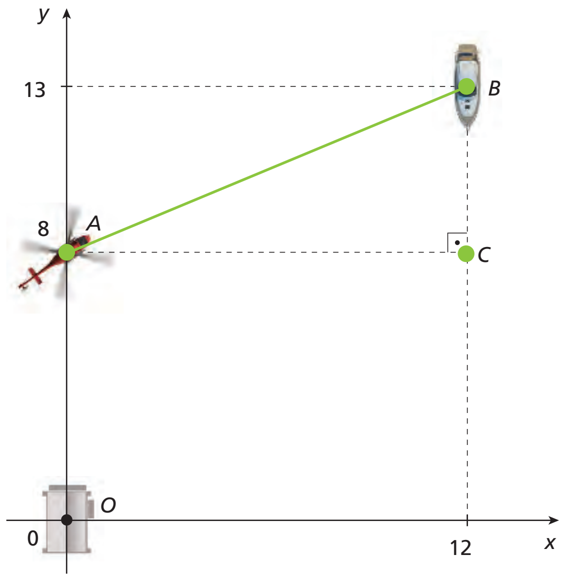
d. abscissa −4. **7 d.** Pontos da reta vertical que passa por (−4, 0).

6 d. Basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo cujos vértices são os pontos *P* e *Q* e a origem do plano cartesiano.

Medida da distância entre dois pontos

Há situações cotidianas em que é importante determinar a medida da distância entre dois pontos. Retomando o problema apresentado na abertura deste capítulo, no qual foram fornecidas as localizações de um grupo de pessoas em uma embarcação no mar (ponto *B*) e de um helicóptero que fará o resgate (ponto *A*), pergunta-se: A que medida de distância o helicóptero está da embarcação?

Transportando os dados para o plano cartesiano, temos:



Para responder à questão, vamos considerar no plano cartesiano o ponto auxiliar $C(12, 8)$. Assim:

- a medida de distância do ponto *A* ao ponto *C* ($d_{A,\,C}$) é 12 km;
- a medida de distância do ponto *B* ao ponto *C* ($d_{B,\,C}$) é 5 km (13 km − 8 km = 5 km);
- a medida de distância do ponto *A* ao ponto *B* ($d_{A,\,B}$) é *d* km.

Os pontos *A*, *B* e *C* são os vértices de um triângulo retângulo. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

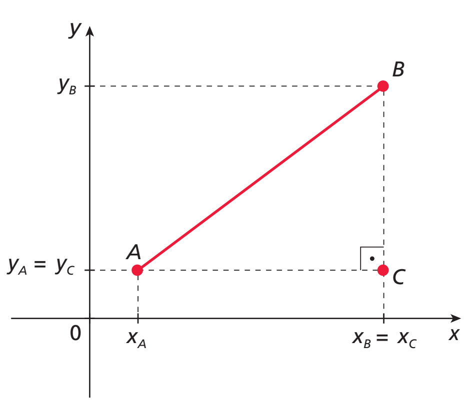
$$(d_{A,\,B})^2 = (d_{A,\,C})^2 + (d_{B,\,C})^2 \Rightarrow d^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow d^2 = 169 \Rightarrow d = 13 \text{ ou } d = -13$$

Como $d > 0$, temos $d = 13$.

Logo, o helicóptero está a 13 km da embarcação.

Qual seria a medida da distância percorrida pelo helicóptero da sua localização inicial ao posto de bombeiros, passando pelo ponto de resgate das pessoas?

Agora, vamos determinar a medida da distância $d_{A,\,B}$ entre dois pontos quaisquer $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Para isso, vamos representá-los no plano cartesiano, incluindo um ponto $C(x_C, y_C)$, em que $x_C = x_B$ e $y_C = y_A$.



Observação

Por definição, a medida da distância entre dois pontos corresponde a um número **não** negativo.

Questão. Como o posto de bombeiros está em $O(0, 0)$, temos de calcular a medida da distância $d_{B,\,O}$:

$(d_{B,\,O})^2 = 12^2 + 13^2 = 313$

$d_{B,\,O} = \sqrt{313} \simeq 17{,}7$

Logo, o helicóptero percorreria uma medida da distância equivalente a $d_{A,\,B} + d_{B,\,O}$, ou seja, aproximadamente 30,7 km (13 km + 17,7 km = = 30,7 km).

Repare que temos um triângulo ABC, retângulo em C.

Pelo teorema de Pitágoras: $(d_{A,\,B})^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

Sabemos que $AC = |x_B - x_A|$ e que $BC = |y_B - y_A|$.

Observação

O **módulo**, ou **valor absoluto**, de um número real x, indicado por $|x|$, é definido como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Como $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$ e $|y_B - y_A|^2 = (y_B - y_A)^2$, temos:

$$(d_{A,\,B})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Portanto, a medida da distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do plano cartesiano é dada por:

$$\boxed{d_{A,\,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

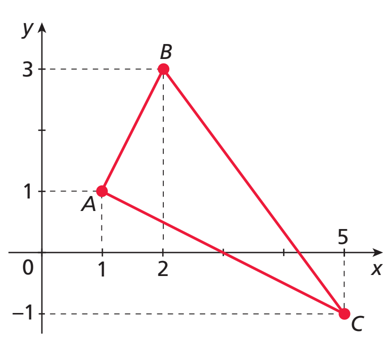
A fórmula anterior também é válida quando A e B estão alinhados horizontalmente ou verticalmente? Justifique sua resposta.

Questão. Sim.
Alinhados horizontalmente:
$C \equiv B$, $y_B - y_A = 0$; logo:
$d_{A,\,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + 0^2} = |x_B - x_A|$
Alinhados verticalmente:
$C \equiv A$, $x_B - x_A = 0$; logo:
$d_{A,\,B} = \sqrt{0^2 + (y_B - y_A)^2} = |y_B - y_A|$

Atividades resolvidas

R4. Determinar a medida do perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ e $C(5, -1)$.

▶ **Resolução**



Vamos calcular as medidas de comprimento dos lados do triângulo ABC:

$$d_{A,\,B} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$d_{B,\,C} = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$d_{A,\,C} = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Portanto, a medida do perímetro do triângulo ABC é $(3\sqrt{5} + 5)$ u.

R5. Dados os pontos $A(-2, m)$ e $B(1, 3)$, determinar m para que a medida da distância entre A e B seja 5 u.

▶ **Resolução**

Como a medida da distância entre A e B deve ser 5 u, temos:

$$(d_{A,\,B})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^2 = (1+2)^2 + (3-m)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 = 9 + 9 - 6m + m^2 \Rightarrow m^2 - 6m - 7 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos dois valores de m que tornam a medida da distância entre A e B igual a 5 u: $m = 7$ ou $m = -1$

R6. Determinar o ponto $C(m, 2m)$ equidistante dos pontos $A(-7, 0)$ e $B(3, 0)$.

▶ **Resolução**

Como o ponto C é equidistante dos pontos A e B, a medida da distância entre C e A é a mesma que entre C e B. Assim:

$$d_{C,\,A} = d_{C,\,B} \Rightarrow \sqrt{(m+7)^2 + (2m-0)^2} =$$

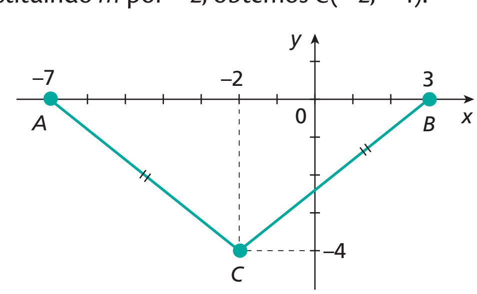
$$= \sqrt{(m-3)^2 + (2m-0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+7)^2 + 4m^2 = (m-3)^2 + 4m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 + 14m + 49 = m^2 - 6m + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20m = -40 \Rightarrow m = -2$$

Substituindo m por -2, obtemos $C(-2, -4)$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

10. A medida da distância entre os pontos corresponde à medida do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo. Assim, a medida dessa distância pode ser calculada usando o teorema de Pitágoras.

15. $C\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}, \frac{-9-\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $C\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{-9+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

8. Calcule a medida da distância, em u, entre os pontos de cada item.

a. $A(2, 1)$ e $B(5, 5)$ **8 a.** 5 u

b. $A(0, 0)$ e $B(-1, 3)$ **8 b.** $\sqrt{10}$ u

c. $D(-4, -2)$ e $E(0, 7)$ **8 c.** $\sqrt{97}$ u

d. $C(4\sqrt{3}, 5)$ e $B(6\sqrt{3}, 3)$ **8 d.** 4 u

9. Determine a medida da distância, em u, do ponto $C(2, 3)$:

a. à origem; **9 a.** $\sqrt{13}$ u

b. ao eixo das ordenadas; **9 b.** 2 u

c. ao eixo das abscissas. **9 c.** 3 u

10. Qual é o padrão que pode ser reconhecido quando pretende-se determinar a medida da distância entre dois pontos cujas abscissas e ordenadas são diferentes entre si?

11. Localize no plano cartesiano os vértices $A(3, 3)$, $B(9, 3)$, $C(9, -3)$ e $D(3, -3)$ do quadrilátero $ABCD$. Em seguida, responda às perguntas.

a. Qual é a medida da área desse quadrilátero em unidade de medida de área (u^2)? **11 a.** 36 u^2

b. Qual é a medida de seu perímetro em u? **11 b.** 24 u

c. Qual é a medida de comprimento de sua diagonal em u? **11 c.** $6\sqrt{2}$ u

12. Obtenha o ponto P do eixo das ordenadas equidistante de $A(6, 8)$ e de $B(2, 5)$. **12.** $P\left(0, \frac{71}{6}\right)$

13. ARGUMENTAÇÃO Considere $A(-2, -5)$, $B(-4, -1)$ e $C(4, 3)$ vértices do triângulo ABC. Explique como você faria para provar que esse triângulo é retângulo.

13. Para provar que o triângulo *ABC* é retângulo, basta calcular as medidas de comprimento de seus lados e verificar que essas medidas satisfazem o teorema de Pitágoras.

14. Em cada caso, registre se o triângulo de vértices A, B e C é equilátero, escaleno ou isósceles. Depois, determine qual deles é um triângulo retângulo.

a. $A(1, 6)$, $B(2, 3)$ e $C(4, 5)$ **14 a.** Isósceles.

b. $A(7, 1)$, $B(10, 4)$ e $C(3, 5)$ **14 b.** Escaleno e retângulo.

c. $A(0, 0)$, $B(2, 2\sqrt{3})$ e $C(4, 0)$ **14 c.** Equilátero.

15. Dois dos vértices de um triângulo equilátero ABC são $A(2, -5)$ e $B(3, -4)$. Determine as coordenadas do vértice C.

16. Considere no plano cartesiano os pontos $P(2, 3)$ e $Q(5, 3)$. Após girar o segmento $\overline{PQ}$ em torno de P em um ângulo de medida de abertura de 60° no sentido horário, obtém-se o segmento $\overline{PR}$. **16 a.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. Represente a situação em um plano cartesiano.

b. ARGUMENTAÇÃO Qual é a medida de comprimento do segmento $\overline{PQ}$? E do segmento $\overline{PR}$? Explique.

c. Classifique o $\triangle PQR$ quanto às medidas de comprimento dos lados. **16 c.** Equilátero.

d. Quais são as coordenadas do ponto R? **16 d.** $\left(\frac{7}{2}, \frac{6-3\sqrt{3}}{2}\right)$

e. ARGUMENTAÇÃO Agora, refaça os itens anteriores supondo que a rotação do segmento $\overline{PQ}$ tenha ocorrido no sentido anti-horário. O que você pode concluir?

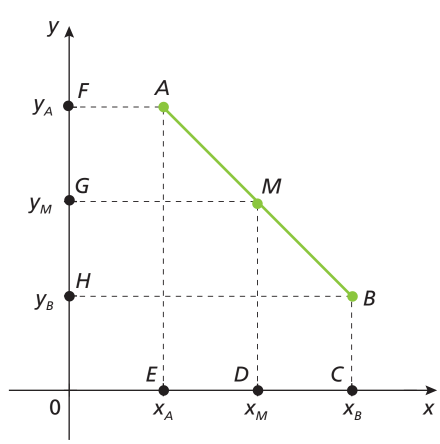
16 e. Respostas no *Suplemento para o professor*.

16 b. 3; 3; como $\overline{PR}$ foi obtido pela rotação de $\overline{PQ}$, esses segmentos são congruentes.

Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Analise como determinar o ponto médio de um segmento de reta qualquer no plano cartesiano.

Considere um segmento de reta de extremidades $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ cujo ponto médio é $M(x_M, y_M)$.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo teorema de Tales, podemos obter a relação a seguir entre as abscissas desses pontos:

$$AM = MB \Rightarrow ED = DC \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_M = x_B + x_A$$

Portanto:

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}$$

Também pelo teorema de Tales, podemos obter a seguinte relação entre as ordenadas desses pontos:

$$BM = MA \Rightarrow HG = GF \Rightarrow y_M - y_B = y_A - y_M \Rightarrow 2y_M = y_A + y_B$$

Portanto:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Podemos concluir que, dado um segmento de retas cujas extremidades são os pontos *A* e *B*, a abscissa do ponto médio será a média aritmética das abscissas das extremidades, e a ordenada do ponto médio será a média aritmética das ordenadas das extremidades.

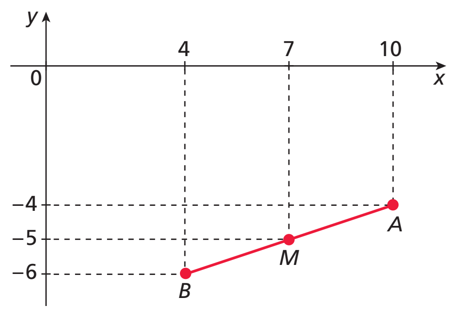
Portanto, o **ponto médio** do segmento $\overline{AB}$ é dado por:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Observações

- Se $y_A = y_B = y$, isto é, se $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo *x*, temos: $M\left(\frac{x_B + x_A}{2}, y\right)$
- Se $x_A = x_B = x$, isto é, se $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo *y*, temos: $M\left(x, \frac{y_B + y_A}{2}\right)$

Considere o exemplo.



O ponto médio *M* do segmento $\overline{AB}$ sendo *A*(10, −4) e *B*(4, −6), tem as coordenadas dadas por:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{10 + 4}{2} = 7$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4 + (-6)}{2} = -5$$

Logo, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é *M*(7, −5).

Atividades resolvidas

R7. Determinar o par ordenado associado ao ponto *B* sabendo que *M*(−1, −1) é o ponto médio de $\overline{AB}$ com *A*(−1, 1).

▶ Resolução

Como *M*(−1, −1) é o ponto médio de $\overline{AB}$, então:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-1 + x_B}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + x_B = -2 \Rightarrow x_B = -1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{1 + y_B}{2} \Rightarrow$$

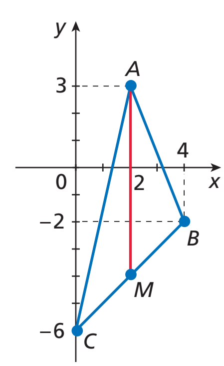
$$\Rightarrow 1 + y_B = -2 \Rightarrow y_B = -3$$

Logo, *B*(−1, −3).

R8. Determinar a medida de comprimento da mediana $\overline{AM}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo cujos vértices são *A*(2, 3), *B*(4, −2) e *C*(0, −6).

▶ Resolução

A situação foi representada no plano cartesiano.



As coordenadas do ponto médio *M* do segmento $\overline{BC}$ são:

$$x_M = \frac{4 + 0}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{(-2) + (-6)}{2} = -4$$

Assim, o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ é *M*(2, − 4).

A medida de comprimento da mediana é dada por:

$$d_{A,\,M} = \sqrt{(2-2)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Portanto, a medida de comprimento da mediana $\overline{AM}$ é 7 u.

Observação

A mediana $\overline{AM}$ de um triângulo *ABC* é o segmento de reta cujas extremidades são o ponto *A*, vértice do triângulo, e o ponto *M*, ponto médio do lado $\overline{BC}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

18 b. A resposta seria a mesma.

18 c. Não, pois a ordem dos vértices poderia ser diferente; assim, por exemplo, $\overline{AD}$ poderia ser uma diagonal do paralelogramo que teria ponto médio $M'(-1, 3)$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

17. Determine o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ em cada item a seguir.

a. $A(3, 2)$ e $B(5, 4)$ **17 a.** $M(4, 3)$

b. $A(-3, -4)$ e $B(-7, 0)$ **17 b.** $M(-5, -2)$

18. EM DUPLA Resolva esta atividade junto com um colega considerando que $A(4, 1)$, $B(2, 3)$, $C(-8, 7)$ e $D(-6, 5)$ são vértices consecutivos de um paralelogramo.

a. Determinem o ponto M de intersecção de suas diagonais. (*Dica*: As diagonais de um paralelogramo se cruzam no ponto médio.) **18 a.** $M(-2, 4)$

b. ARGUMENTAÇÃO Conversem e expliquem o que ocorreria com a resposta do item **a** se as coordenadas do vértice A não fossem informadas no enunciado.

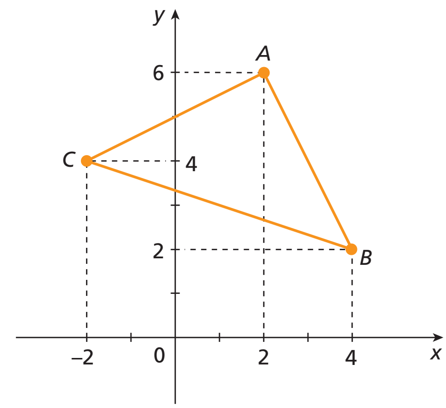
c. ARGUMENTAÇÃO Se fossem retirados do enunciado os dados "consecutivos" e "$C(-8, 7)$", a resposta do item **a** seria a mesma? Justifiquem sua resposta.

19. Considere $A(-1, 3)$ e $B(0, 1)$ vértices consecutivos de um paralelogramo $ABCD$ e $M(1, 4)$ o ponto de intersecção de suas diagonais. Calcule:

a. as coordenadas dos vértices C e D e represente o paralelogramo no plano cartesiano;

b. a medida do perímetro desse paralelogramo.

20. Dado o triângulo ABC representado a seguir, determine a medida de comprimento da mediana $\overline{AM}$ relativa ao lado $\overline{BC}$, em u. **20.** $\sqrt{10}$ u



21. Determine as coordenadas dos vértices de um triângulo cujos lados têm como pontos médios $P(-1, 4)$, $Q(2, -1)$ e $R(-2, 2)$. **21.** $(3, 1)$, $(-5, 7)$ e $(1, -3)$.

22. ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS EM DUPLA Elabore um problema sobre coordenadas do ponto médio de um segmento de reta. Troque-o com um colega para que você resolva o problema formulado por ele, e ele resolva o problema elaborado por você. Depois, destroquem para verificar a resolução.

22. Resposta pessoal.

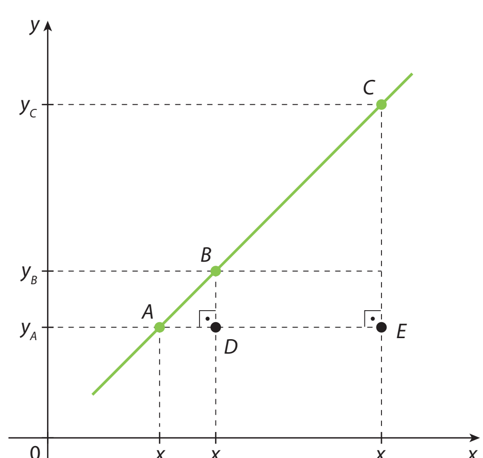
19 a. $C(3, 5)$ e $D(2, 7)$; representação no *Suplemento para o professor*.

19 b. $(10 + 2\sqrt{5})$ u

Condição de alinhamento de três pontos

Considere três pontos distintos do plano cartesiano, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. É possível determinar uma condição para que esses pontos pertençam a uma reta, ou seja, para que estejam alinhados.

Vamos considerar o caso em que os pontos pertencem a uma reta não paralela a um dos eixos:

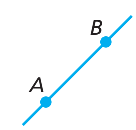


Os triângulos ACE e ABD são semelhantes, pelo caso (AA) (ângulo A é comum e os ângulos D e E são retos). Logo:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} \Rightarrow \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}, \text{ com } x_B - x_A \neq 0 \text{ e } y_B - y_A \neq 0$$

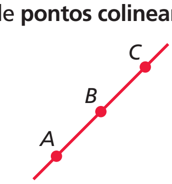
Observações

Dois pontos distintos estão sempre alinhados.

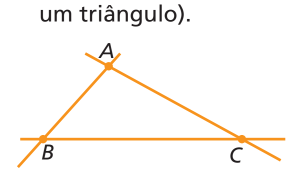


Três pontos distintos podem:

- estar alinhados (chamados de **pontos colineares**);



- não estar alinhados (neste caso, são vértices de um triângulo).



Assim:

$(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A) = 0$

$x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + \cancel{x_A y_A} - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C - \cancel{x_A y_A} = 0$

$x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C = 0$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por -1 e reordenando os termos, obtemos:

$-x_C\, y_B + x_C\, y_A + x_A\, y_B + x_B\, y_C - x_B\, y_A - x_A\, y_C = 0$

$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0 \quad \text{(I)}$

Vamos recordar o desenvolvimento, pela regra de Sarrus, do determinante da matriz D a seguir. Depois, vamos compará-lo com o primeiro membro da igualdade (I).

$$\det D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A$$

coluna das ordenadas dos pontos

coluna das abscissas dos pontos

Portanto, o primeiro membro da igualdade (I) é o determinante da matriz D.

Logo, se três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Nesse caso, a recíproca também é verdadeira:

Se $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$, então os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados.

Essas condições também são válidas quando dois dos pontos coincidem ou quando os pontos pertencem a uma reta paralela a algum dos eixos. Então:

Três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, são colineares se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Atividades resolvidas

R9. Verificar se os pontos $A(3, 2)$, $B(4, 1)$ e $C(1, 4)$ são colineares.

▶ Resolução

Vamos calcular o determinante da matriz D:

$$\det D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 16 - 1 - 12 - 8 = 0$$

Como $\det D = 0$, os pontos são colineares.

R10. Determinar o valor de k para que os pontos $A(k, 7)$, $B(2, -3)$ e $C(k, 1)$ sejam os vértices de um triângulo.

▶ Resolução

Para que A, B e C sejam os vértices de um triângulo, eles não podem estar alinhados. Assim:

$$\begin{vmatrix} k & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$-3k + 7k + 2 + 3k - k - 14 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6k - 12 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$

Logo, para que os pontos $A(k, 7)$, $B(2, -3)$ e $C(k, 1)$ sejam vértices de um triângulo, devemos ter $k \neq 2$.

30 c. $x_p = y_P$; $P\left(\frac{11}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

23. Verifique se os pontos A, B e C são colineares.

a. $A(2, 3)$, $B(-2, -5)$ e $C(-1, -3)$ **23 a.** Sim.

b. $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ e $C(3, -1)$ **23 b.** Não.

24. Verifique para quais valores de x existe o triângulo ABC, sendo $A(x, 1)$, $B(x + 1, 2)$ e $C(0, 3)$. **24.** $x \neq -2$

25. Determine m para que os pontos $A(-1, m)$, $B(2, -3)$ e $C(-4, 5)$:

a. sejam colineares; **25 a.** $m = 1$

b. sejam vértices de um triângulo. **25 b.** $m \neq 1$

26. Determine dois pontos que estejam alinhados com os pontos $A(1, 4)$ e $B(0, 3)$. **26.** Há infinitas possibilidades, como $P(-1, 2)$ e $Q(2, 5)$.

27. Determine uma relação entre as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ para que ele esteja alinhado com $A(2, 3)$ e $B(5, 4)$. **27.** $x - 3y + 7 = 0$

28. A reta que contém os pontos $C(1, 3)$ e $D(2, 5)$ intercepta o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas, respectivamente, nos pontos A e B. Determine os pares ordenados associados aos pontos A e B.

29. EM DUPLA Em uma região plana, serão construídas duas estradas r e s, sem curvas. Os engenheiros representaram o projeto dessas estradas em um plano cartesiano com origem na sede da empresa. Nesse plano, a unidade de medida linear é 1 km, o eixo y indica o sentido norte e o eixo x indica o sentido leste. No projeto, foi definido que r deve passar pelos pontos $A(1, 1)$ e $B(-2, 4)$, enquanto s deve passar pelos pontos $C(1, 3)$ e $D(-2, -6)$.

Considerando essas informações, resolva os itens a seguir junto com um colega.

a. Determinem o ponto $P(x, y)$ em que as estradas r e s vão se cruzar. **29 a.** $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

b. ARGUMENTAÇÃO Expliquem como vocês determinaram esse ponto. **29 b.** O ponto P pode ser determinado impondo a condição de alinhamento de três pontos para P, A e B e para P, C e D.

c. Representem os pontos e as estradas r e s no plano cartesiano, mostrando o ponto de intersecção. **29 c.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

30. O ponto $P(x_P, y_P)$ está alinhado com os pontos $A(5, 3)$ e $B(-2, 1)$. Indique a condição necessária e determine o par ordenado associado ao ponto P para que ocorra o que está indicado em cada item a seguir.

a. P pertença ao eixo x. **30 a.** $y_p = 0$; $P\left(-\frac{11}{2}, 0\right)$.

b. P pertença ao eixo y. **30 b.** $x_p = 0$; $P\left(0, \frac{11}{7}\right)$.

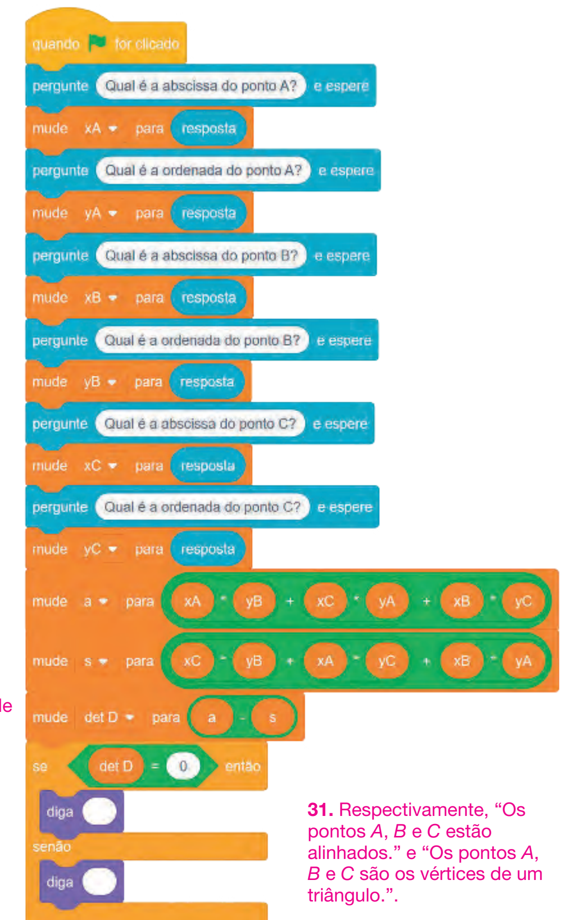
c. P pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares.

d. P pertença à bissetriz dos quadrantes pares.

e. $y_P = 2x_P$. **30 e.** $12\,x_p = 11$; $P\left(\frac{11}{12}, \frac{11}{6}\right)$. **30 d.** $x_P = -y_P$; $P\left(-\frac{11}{9}, \frac{11}{9}\right)$.

31. PENSAMENTO COMPUTACIONAL *SOFTWARE* Analise este algoritmo que está sendo produzido no Scratch para definir se, com base nas coordenadas de três pontos fornecidas pelo usuário, esses pontos estão alinhados ou são os vértices de um triângulo.

(*Dica*: Considere que as variáveis a e s correspondem, respectivamente, aos produtos dos elementos da matriz D que são adicionados e aos produtos dos elementos da matriz D que são subtraídos para calcular det D.)



SCRATCH MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE, EUA

31. Respectivamente, "Os pontos A, B e C estão alinhados." e "Os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo.".

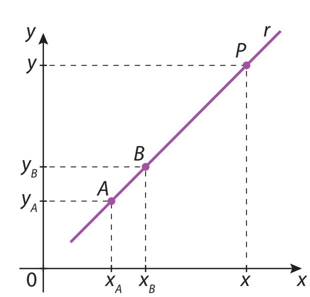
Quais frases completariam corretamente os dois últimos comandos **diga** desse algoritmo?

28. $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $B(0, 1)$.

Reta

Equação geral da reta

Dados dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes à reta r, vamos determinar uma relação entre as coordenadas de um ponto genérico, $P(x, y)$, também pertencente à reta r.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Pela condição de alinhamento para os pontos A, B e P, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

Observação

Quando nos referimos apenas à equação da reta, estamos considerando a equação geral da reta.

Como as únicas variáveis nesse determinante são x e y, os outros elementos são números reais conhecidos. Assim, podemos fazer:

- $(y_A - y_B) = a$
- $(x_B - x_A) = b$
- $x_A y_B - x_B y_A = c$

Não sendo a e b simultaneamente nulos, obtemos a **equação geral da reta**:

$$ax + by + c = 0$$

Por que temos de considerar que a e b não podem ser simultaneamente nulos?

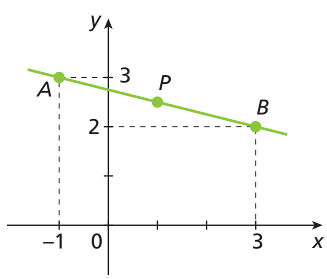
Questão. Se $a = b = 0$, então $y_A = y_B$ e $x_A = x_B$, o que implica que os pontos A e B não são distintos (isso contradiz nossa hipótese inicial de que A e B são pontos distintos).

Atividades resolvidas

R11. Obter a equação geral da reta r que passa pelos pontos $A(-1, 3)$ e $B(3, 2)$.

▶ Resolução

Considere um ponto $P(x, y)$ pertencente à reta r. Ele está alinhado com os pontos A e B.



Pela condição de alinhamento de três pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$3x + 3y - 2 - 9 - 2x + y = 0 \Rightarrow x + 4y - 11 = 0$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é $x + 4y - 11 = 0$.

R12. Verificar se o ponto $P(3, 2)$ pertence à reta s, cuja equação é $x - 3y + 3 = 0$.

▶ Resolução

Para que o ponto $P(3, 2)$ pertença à reta s, suas coordenadas devem satisfazer a equação dessa reta.

Substituindo x por 3 e y por 2 na equação da reta s, obtemos:

$3 - 3 \cdot 2 + 3 = 0 \Rightarrow 3 - 6 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (sentença verdadeira)

Portanto, o ponto P pertence à reta s de equação $x - 3y + 3 = 0$.

R13. Obter a equação geral da reta r, que passa pelos pontos $A(3, 1)$ e $B(2, 4)$, e determinar seus pontos de intersecção com os eixos x e y.

▶ Resolução

Seja $P(x, y)$ um ponto pertencente à reta r de tal maneira que os pontos A, B e P estejam alinhados. Então:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x + 2y + 12 - 2 - 4x - 3y = 0 \Rightarrow -3x - y + 10 = 0$

Portanto, a equação geral da reta r é $-3x - y + 10 = 0$.

Vamos determinar agora os pontos de intersecção da reta r com os eixos x e y.

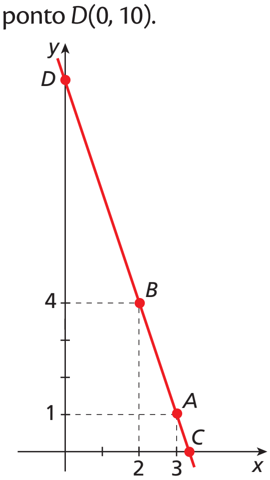
A reta r intercepta o eixo x no ponto $C(c, 0)$. Substituindo as coordenadas do ponto C na equação geral de r, obtemos:

$$-3c - 0 + 10 = 0 \Rightarrow c = \frac{10}{3}$$

Analogamente, a reta r intercepta o eixo y no ponto $D(0, d)$. Substituindo as coordenadas do ponto D na equação geral de r, obtemos:

$$-3 \cdot 0 - d + 10 = 0 \Rightarrow d = 10$$

Logo, a reta r intercepta o eixo x no ponto $C\left(\frac{10}{3}, 0\right)$ e o eixo y no ponto $D(0, 10)$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades propostas

Registre em seu caderno

32. Verifique se cada ponto a seguir pertence à reta s, cuja equação é $x - y + 2 = 0$.

a. $A(2, 3)$ **32 a.** Não. **b.** $B(1, 3)$ **32 b.** Sim.

33. Em cada caso, verifique se os pontos são colineares. Se forem, determine a equação geral da reta que passa por eles.

a. $A(-2, -5)$, $B(-4, -1)$ e $C(4, 3)$ **33 a.** Não.

b. $A(3, 5)$, $B(1, 0)$ e $C\left(2, \frac{5}{2}\right)$ **33 b.** Sim; $5x - 2y - 5 = 0$.

34. $m = 3$

34. Os pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 4)$ determinam uma reta. Calcule o valor de m para que o ponto $C(1, m)$ pertença a essa reta.

35. Quais são os pontos de intersecção da reta de equação $x + 3y + 1 = 0$ com os eixos x e y? **35.** $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ e $(-1, 0)$

36. Considere os pontos $A(2, 3)$, $B(5, -1)$, $C(-1, 4)$ e $D(2, 3)$. Determine:

36 a. $4x + 3y - 17 = 0$

a. a equação geral da reta suporte do segmento $\overline{AB}$;

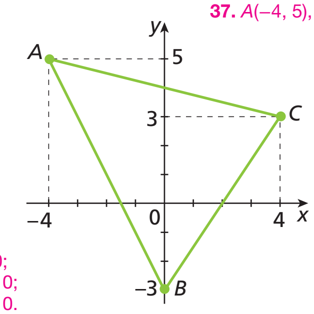
b. a equação geral da reta suporte do segmento $\overline{CD}$;

36 b. $x + 3y - 11 = 0$

c. o ponto de intersecção entre as retas obtidas nos itens anteriores. **36 c.** $(2, 3)$

37. Considere o triângulo ABC representado. Identifique os pares ordenados associados aos vértices do triângulo ABC e determine as equações das retas suportes:

37. $A(-4, 5)$, $B(0, -3)$ e $C(4, 3)$.



37 a. $2x + y + 3 = 0$;
$3x - 2y - 6 = 0$;
$x + 4y - 16 = 0$.

a. dos lados desse triângulo;

b. das medianas desse triângulo;

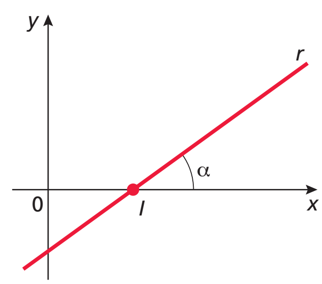
37 b. $5x + 6y - 10 = 0$;
$x = 0$;
$x - 3y + 5 = 0$.

c. dos três segmentos de reta cujas extremidades são os pontos médios dos lados desse triângulo.

37 c. $x + 4y - 2 = 0$;
$2x + y - 4 = 0$;
$3x - 2y + 8 = 0$.

Medida da inclinação e coeficiente angular de uma reta

Observe a figura.



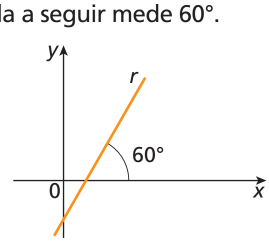
A medida de abertura α ($0° \leqslant \alpha < 180°$ ou $0 \leqslant \alpha < \pi$) do ângulo indicado na figura é chamada de **medida da inclinação da reta** e é obtida girando-se o eixo x no sentido anti-horário em torno do ponto I até ele coincidir com a reta r.

O **coeficiente angular** ou a **declividade** de uma reta, **não perpendicular** ao eixo x, é o número real m expresso pela tangente trigonométrica de sua medida de inclinação α, ou seja:

$$m = \text{tg}\ \alpha$$

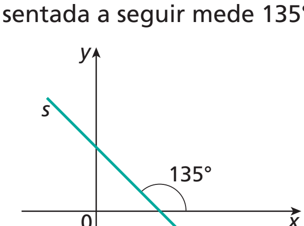
Observe os exemplos.

a. A inclinação da reta r representada a seguir mede 60°.



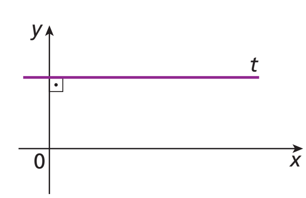
Logo, o coeficiente angular da reta r é dado por: $m = \text{tg}\ 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow m = \sqrt{3}$

b. A inclinação da reta s representada a seguir mede 135°.



Logo, o coeficiente angular da reta s é dado por: $m = \text{tg}\ 135° \Rightarrow$
$\Rightarrow m = -1$

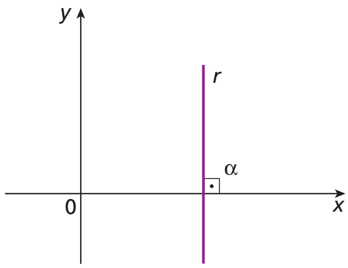
c. A inclinação da reta r representada a seguir mede 0°.



Logo, o coeficiente angular da reta t é dado por: $m = \text{tg}\ 0° \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 0$

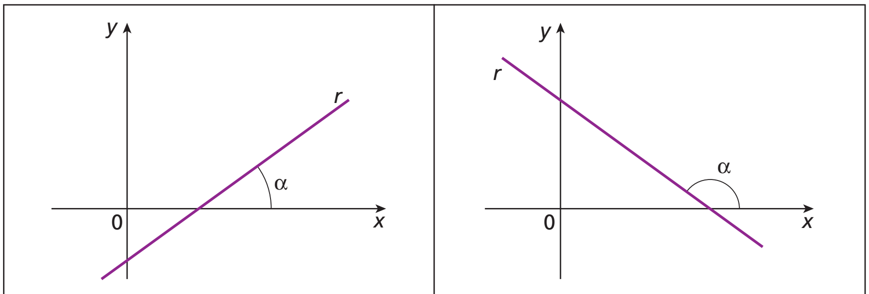
Observação

Atenção!
Se $\alpha = 90° \Rightarrow m$ não é definido, pois não existe tg 90°.



O sinal do coeficiente angular de uma reta varia de acordo com a declividade.

Sinal do coeficiente angular de uma reta



Quando não conhecemos a medida da inclinação α da reta, mas são dados dois pontos distintos pertencentes a essa reta, podemos obter o coeficiente angular m calculando tg α por meio das coordenadas dos pontos.

Considere dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes a uma reta r não paralela ao eixo y e formando com o eixo x um ângulo de medida de abertura α.

Vamos demonstrar que o coeficiente angular da reta r é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

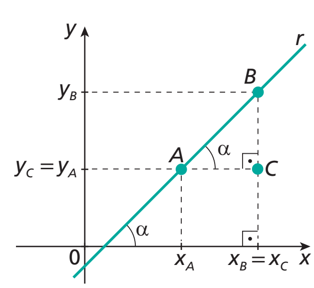
Observação

Para acompanhar a demonstração a seguir, convém lembrar que, em um triângulo retângulo, a tangente de um de seus ângulos agudos de medida de abertura α é dada por:

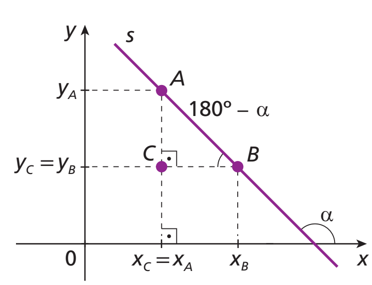
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo de medida de abertura } \alpha}{\text{medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo de medida de abertura } \alpha}$$

Demonstração

- **1º caso: 0° < α < 90°**
  Considere este triângulo ABC representado.
  O triângulo ABC é retângulo em C; logo:
  $$m = \text{tg } \alpha = \frac{d_{C,\,B}}{d_{A,\,C}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
  Portanto, o coeficiente angular m é dado por: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$



- **2º caso: 90° < α < 180°**
  Considere o triângulo ABC representado.
  O triângulo ABC é retângulo em C; logo:
  $$m = \text{tg } \alpha = -\text{tg } (180° - \alpha) = -\frac{d_{C,\,A}}{d_{C,\,B}} = -\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
  Portanto, o coeficiente angular m é dado por: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$



- **3º caso: α = 0°**
  Podemos verificar que $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ vale também quando $\alpha = 0°$, pois $y_B = y_A$ e $x_B \neq x_A$; logo, $m = 0$.

Portanto, para qualquer α, com $\alpha \neq 90°$ e $0° \leqslant \alpha < 180°$, temos: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Observação

A tangente de um ângulo é igual ao oposto da tangente do suplementar desse ângulo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades resolvidas

R14. Determinar o coeficiente angular da reta r que passa pelos pontos $A(2, 3)$ e $B(4, 9)$.

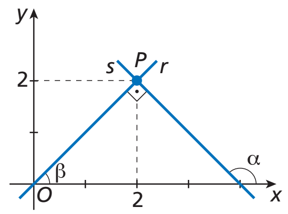
▸ **Resolução**

O coeficiente angular é dado por:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9 - 3}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

Logo, o coeficiente angular da reta r é 3.

R15. Calcular o valor de $m_r \cdot m_s$ sabendo que m_r e m_s correspondem, respectivamente, ao coeficiente angular das retas r e s representadas a seguir.



▸ **Resolução**

O coeficiente angular da reta r é dado por:

$$m_r = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

Note que: $m_r = \text{tg}\ \beta = 1 \Rightarrow \beta = 45°$

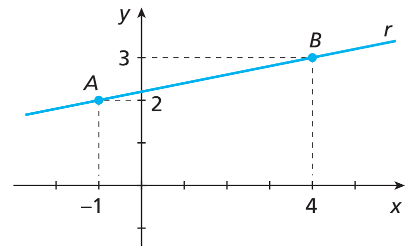
Pela propriedade do ângulo externo, temos:

$\alpha = \beta + 90° \Rightarrow \alpha = 45° + 90° \Rightarrow \alpha = 135°$

Então: $m_s = \text{tg}\ 135° = -1$ e $m_r \cdot m_s = 1 \cdot (-1) = -1$

Portanto, $m_r \cdot m_s = -1$.

R16. Determinar a equação geral da reta r representada a seguir.



▸ **Resolução**

Faremos o estudo do coeficiente angular da reta r.

Considerando $A(-1, 2)$ e $B(4, 3)$, vamos calcular o coeficiente angular da reta r que passa por A e B:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{4 - (-1)} = \frac{1}{5}$$

A reta r tem coeficiente angular $m = \frac{1}{5}$ e passa pelo ponto $B(4, 3)$.

Vamos considerar um ponto $P(x, y)$ qualquer da reta r, com com $P \neq B$. Dessa forma, temos:

$$\frac{1}{5} = \frac{y - 3}{x - 4} \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{5}(x - 4) \Rightarrow 5y - 15 = x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 5y + 11 = 0$$

Note que as coordenadas de A e de B satisfazem essa equação:

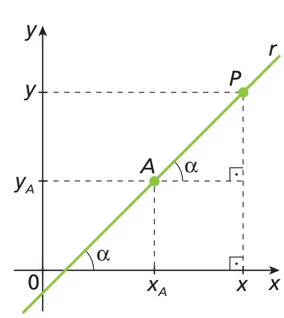
$$\mathbf{-1} - 5 \cdot \mathbf{2} + 11 = 0 \text{ e } \mathbf{4} - 5 \cdot \mathbf{3} + 11 = 0.$$

Portanto, $x - 5y + 11 = 0$ é a equação geral da reta r.

Equação da reta de coeficiente angular m e que passa por um ponto $A(x_A, y_A)$

Já estudamos como determinar a equação de uma reta conhecendo dois de seus pontos. Agora, vamos determinar a equação de uma reta r conhecendo um de seus pontos, $A(x_A, y_A)$, e seu coeficiente angular m.

Considere o ponto $P(x, y)$ na reta r, sendo $P \neq A$ e $m = \text{tg}\ \alpha$.



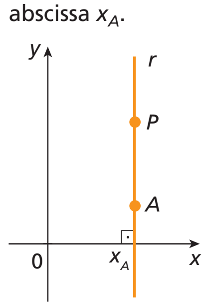
Como $m = \text{tg}\ \alpha$, então: $m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$

Portanto, a equação de uma reta que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

Observação

Todos os pontos da reta r paralela ao eixo y, representada a seguir, tem abscissa x_A.



Nesse caso, $x = x_A$ é a equação de r.

Atividades resolvidas

R17. Determinar a equação da reta *r* que intercepta o eixo *y* no ponto $P(0, 1)$ e intercepta o eixo *x* segundo uma medida de inclinação de 150°.

$\left(\text{Dica: tg } 150° = -\text{tg } 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}.\right)$

▶ **Resolução**

Como $m = \text{tg } 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $P(0, 1)$ pertence à reta *r*, temos:

$$y - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow \sqrt{3}x + 3y - 3 = 0$$

Portanto, a equação da reta *r* é $\sqrt{3}x + 3y - 3 = 0$.

R18. Um laboratório estudou uma colônia de bactérias composta inicialmente de 350 indivíduos vivos.

Após a aplicação de certo medicamento, verificou-se que o número de indivíduos vivos na colônia diminuiu com a medida de tempo; depois de 25 horas, não havia mais nenhum indivíduo vivo na colônia.

Supondo que o número *y* de indivíduos vivos variou linearmente com a medida de tempo *x*, em hora, contado a partir da administração do medicamento, determinar:

a. a expressão que relaciona *y* a *x*;

b. o número de indivíduos que permaneciam vivos após 10 horas da aplicação do medicamento.

▶ **Resolução**

a. Vamos considerar o par ordenado (x, y) para identificar que, após *x* horas, havia *y* indivíduos vivos na colônia. Assim, temos pontos com os seguintes significados:

- $A(0, 350)$: estado inicial da colônia (0 h após a aplicação do medicamento havia 350 indivíduos);
- $B(25, 0)$: estado final da colônia (25 h após a aplicação do medicamento havia 0 indivíduo).

Como a relação é supostamente linear, seu gráfico é um conjunto de pontos pertencentes à reta que passa pelos pontos *A* e *B*.

O coeficiente angular *m* da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$$m = \frac{0 - 350}{25 - 0} = -14$$

A reta tem coeficiente angular $m = -14$ e passa por $B(25, 0)$.

Assim: $y - 0 = -14(x - 25) \Rightarrow y = -14x + 350$

Portanto, a expressão que relaciona *y* a *x* é $y = -14x + 350$, tal que $0 \leqslant x \leqslant 25$.

b. Para obter o número de indivíduos vivos após 10 horas da aplicação do medicamento, basta substituir *x* por 10 na igualdade $y = -14x + 350$.

Assim: $y = -14 \cdot 10 + 350 = 210$

Portanto, após 10 horas da aplicação do medicamento, havia 210 indivíduos vivos na colônia de bactérias.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

38. Determine, se existir, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos:

a. $A(-1, 2)$ e $B(-1, 5)$; **38 a.** Não existe.

b. $A(3, 0)$ e $B(4, 0)$; **38 b.** 0

c. $A(1, 2)$ e $B(-2, -1)$; **38 c.** 1

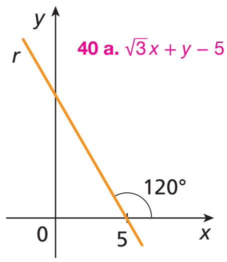
d. $A\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{7}\right)$ e $B(0, 0)$. **38 d.** $-\frac{\sqrt{2}}{14}$

39. $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} - 6 = 0$

39. Escreva a equação da reta *r* que passa pelo ponto $A(1, -6)$ e com uma inclinação que mede 60° em relação ao eixo *x*.

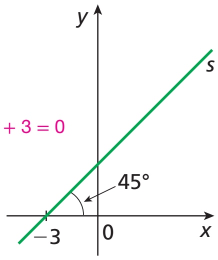
40. Determine as equações das retas representadas a seguir.

a.



40 a. $\sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$

b.

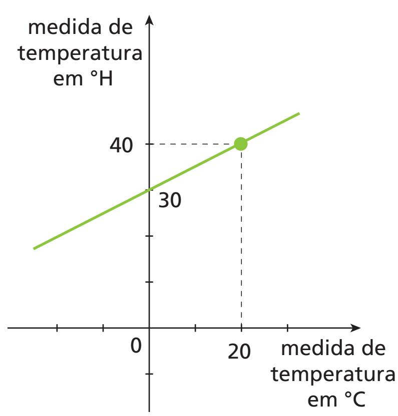


40 b. $x - y + 3 = 0$

41. ARGUMENTAÇÃO Na **atividade resolvida R16**, poderíamos determinar a equação da reta *r* usando $m = \frac{1}{5}$ e $A(-1, 2)$? Justifique sua resposta.

41. Sim. Conhecendo o coeficiente angular da reta, é possível obter sua equação a partir de qualquer um de seus pontos.

42. Um cientista inventou uma escala para termômetro e chamou-a de escala *H* (°H). Relacionando-a com a escala Celsius (°C), obteve o gráfico representado a seguir.



Considerando as informações do gráfico, resolva os itens a seguir.

a. Quando a medida de temperatura de um corpo for 70 °C, qual será a medida de temperatura indicada pelo termômetro com escala *H*? **42 a.** 65 °H

b. Calcule a única medida de temperatura em que há coincidência de valores em ambas as escalas.

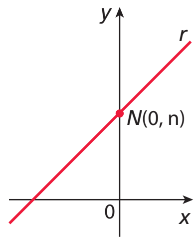
42 b. 60 °C ou 60 °H

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Equação reduzida da reta

Sabemos que a equação da reta *r* que passa por um ponto $A(x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular *m* é dada por $y - y_A = m(x - x_A)$.

Observe o gráfico a seguir.



Como a intersecção da reta *r* com o eixo *y* é o ponto *N*(0, *n*), temos:

$$y - n = m(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow \boxed{y = mx + n}$$

A forma $y = mx + n$ é denominada **equação reduzida da reta**, em que *m* é o coeficiente angular da reta e *n* é a ordenada do ponto no qual a reta intercepta o eixo *y*.

Podemos fazer uma analogia entre a equação reduzida da reta e a lei de uma função afim:

equação reduzida da reta	função afim
$y = mx + n$	$f(x) = ax + b$

Observe que $m = \text{tg}\ \alpha = a$. Então, se $m > 0$ $(0° < \alpha < 90°)$, a função afim é **crescente**; se $m < 0$ $(90° < \alpha < 180°)$, a função afim é **decrescente**; se $m = 0$ $(\alpha = 0°)$, a função afim é **constante**.

Observe também que $n = b$ é a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo *y*, também chamado de **coeficiente linear** da reta.

Observação

Na prática, para obter o coeficiente linear, basta fazer $x = 0$ na equação da reta; o valor obtido para a ordenada *y* é o coeficiente linear.

Atividade resolvida

R19. Determinar os coeficientes linear e angular da reta de equação $6x - 5y - 30 = 0$.

▶ Resolução

Para determinar os coeficientes linear e angular da reta, basta isolar *y* em $6x - 5y - 30 = 0$.

Assim: $6x - 5y - 30 = 0 \Rightarrow 5y = 6x - 30 \Rightarrow y = \frac{6}{5}x - 6$

Comparando a equação anterior com a equação reduzida da reta, temos o coeficiente linear -6 e o coeficiente angular $\frac{6}{5}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

43. Obtenha os coeficientes linear e angular de cada reta cuja equação é dada a seguir.

a. $\sqrt{3}x - 5y + 2 = 0$ **43 a.** $m = \frac{\sqrt{3}}{5}$; $n = \frac{2}{5}$.

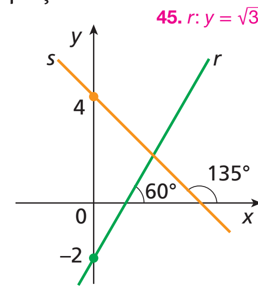
b. $-\frac{1}{2}x + \sqrt{2}y - \frac{1}{8} = 0$ **43 b.** $m = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $n = \frac{\sqrt{2}}{16}$.

44. O valor de um número real *x* vai aumentar 30%, dando um resultado *y*. Expresse *y* em função de *x* e represente graficamente essa função. Qual é a medida da inclinação da reta que representa essa função?

44. $y = 1{,}3x$; representação gráfica no *Suplemento para o professor*; aproximadamente 53°.

45. Determine as equações reduzidas das retas *r* e *s* a seguir.

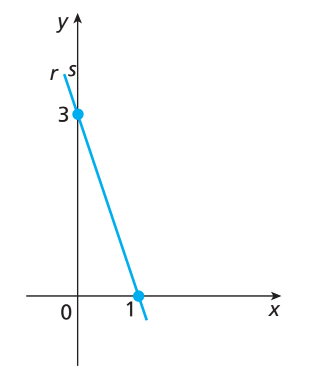
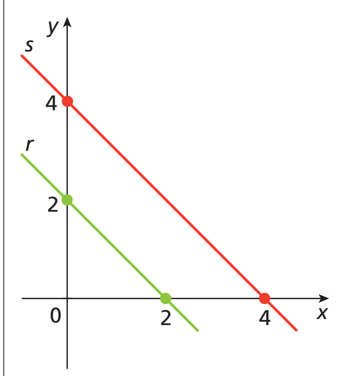
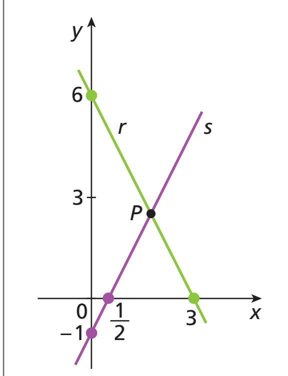
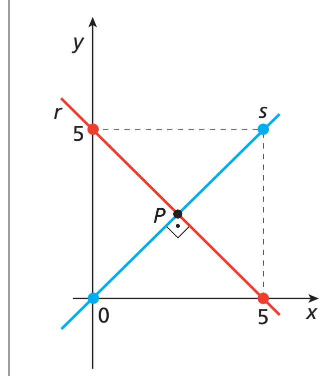
45. r: $y = \sqrt{3}x - 2$; s: $y = -x + 4$.



Posição relativa entre duas retas no plano

Duas retas coplanares podem ser classificadas em paralelas (coincidentes ou distintas) ou concorrentes, sendo as retas perpendiculares um caso particular de retas concorrentes. Observe, por exemplo, as retas *r* e *s* a seguir e suas respectivas equações.

Posições relativas entre duas retas coplanares

Retas paralelas coincidentes	Retas paralelas distintas	Retas concorrentes não perpendiculares	Retas concorrentes perpendiculares
			
$r: 3x + y - 3 = 0$ $s: 6x + 2y - 6 = 0$ $r \equiv s$	$r: x + y - 2 = 0$ $s: x + y - 4 = 0$ $r \parallel s$	$r: 2x + y - 6 = 0$ $s: -2x + y + 1 = 0$	$r: x + y - 5 = 0$ $s: -x + y = 0$ $r \perp s$

A seguir, estudaremos quais condições permitem determinar a posição relativa entre duas retas no plano cartesiano conhecendo apenas suas equações ou seus coeficientes angulares e/ou lineares.

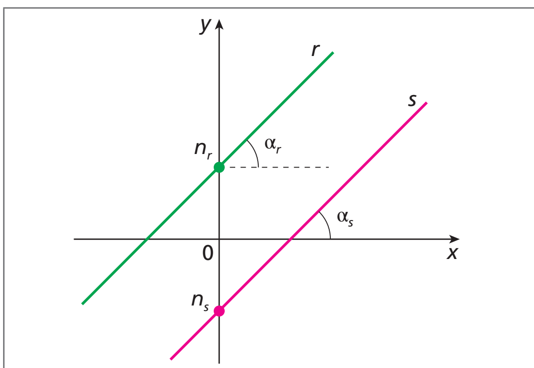
Condição de paralelismo de duas retas

Duas retas *r* e *s* são paralelas quando têm a mesma direção.

Vamos verificar as condições para que as retas *r* e *s*, de coeficientes angulares m_r e m_s e coeficientes lineares n_r e n_s, sejam paralelas.

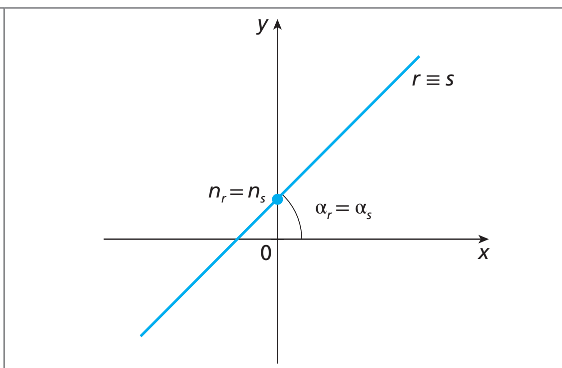
Lembrando que retas paralelas podem ser distintas ou coincidentes, temos:

Retas paralelas distintas e coincidentes



Para que as retas *r* e *s* sejam **paralelas distintas**, devem satisfazer estas condições:

$$m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s$$



Para que as retas *r* e *s* sejam **paralelas coincidentes**, devem satisfazer estas condições:

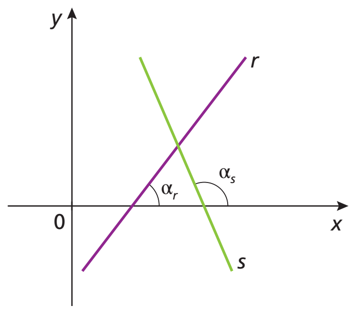
$$m_r = m_s \text{ e } n_r = n_s$$

Observação

Se m_r e m_s não estão definidos, então *r* e *s* são retas verticais, isto é, paralelas ao eixo *y*; portanto, são paralelas entre si.

Condição de perpendicularismo de duas retas

Inicialmente, vamos verificar quais são as condições para que as retas r e s, não verticais, de inclinações que medem α_r e α_s e de coeficientes angulares $m_r = \text{tg } \alpha_r$ e $m_s = \text{tg } \alpha_s$, sejam concorrentes.



Questão 1. Não, pois r e s terão a mesma direção. Logo, serão paralelas.
Questão 2. Não, pois, por exemplo, se a reta r for vertical e a reta s for não vertical, m_r não estará definido e m_s, sim. Portanto, não teremos $m_r = m_s$.

Para que as retas r e s sejam concorrentes, isto é, não paralelas, devemos ter:

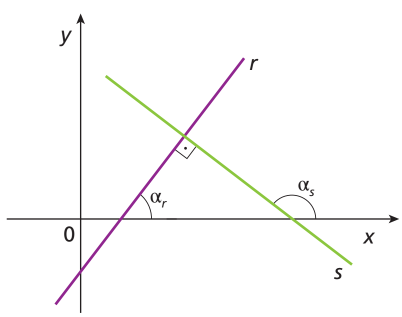
$$\alpha_r \neq \alpha_s \Rightarrow \text{tg } \alpha_r \neq \text{tg } \alpha_s \Rightarrow \boxed{m_r \neq m_s}$$

Portanto, para que duas retas não verticais sejam **concorrentes**, elas devem ter coeficientes angulares diferentes.

Se r e s forem verticais, poderão ser retas concorrentes?

Se apenas uma das retas, r ou s, for vertical, poderá ocorrer a igualdade $m_r = m_s$?

Agora, vamos considerar as retas r e s, não verticais, concorrentes perpendiculares, conforme a figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

$\alpha_s = \alpha_r + 90° \Rightarrow \text{tg } \alpha_s = \text{tg } (\alpha_r + 90°)$ (I)

$$\text{tg } (\alpha_r + 90°) = \frac{\text{sen } (\alpha_r + 90°)}{\cos (\alpha_r + 90°)} = \frac{\text{sen } \alpha_r \cdot \cos 90° + \text{sen } 90° \cdot \cos \alpha_r}{\cos \alpha_r \cdot \cos 90° - \text{sen } \alpha_r \cdot \text{sen } 90°}$$

Como $\cos 90° = 0$ e $\text{sen } 90° = 1$, temos:

$$\text{tg } (\alpha_r + 90°) = \frac{\text{sen } \alpha_r \cdot 0 + 1 \cdot \cos \alpha_r}{\cos \alpha_r \cdot 0 - \text{sen } \alpha_r \cdot 1} = \frac{\cos \alpha_r}{-\text{sen } \alpha_r} = -\frac{1}{\frac{\text{sen } \alpha_r}{\cos \alpha_r}} = -\frac{1}{\text{tg } \alpha_r}$$

$$\text{tg } (\alpha_r + 90°) = -\frac{1}{\text{tg } \alpha_r} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$\text{tg } \alpha_s = -\frac{1}{\text{tg } \alpha_r} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Portanto, as retas r e s, não verticais, são **perpendiculares** quando:

$$\boxed{m_r \cdot m_s = -1}$$

Observações

- $\text{tg } (a + b) = \dfrac{\text{sen } (a + b)}{\cos (a + b)}$
- $\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$
- $\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

Atividades resolvidas

R20. Determinar a posição da reta *r*, de equação $x + 2y - 6 = 0$, em relação à reta *s*, de equação $3x + 6y - 5 = 0$.

▸ Resolução

Primeiro, vamos determinar os coeficientes angular e linear de *r* e *s* usando as equações na forma reduzida.

Para a reta *r*, temos:

$$x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Portanto: $m_r = -\frac{1}{2}$ e $n_r = 3$

Para a reta *s*, temos:

$$3x + 6y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$$

Portanto: $m_s = -\frac{1}{2}$ e $n_s = \frac{5}{6}$

Como $m_r = m_s = -\frac{1}{2}$ e $n_r \neq n_s$, então as retas *r* e *s* são paralelas distintas.

R21. Verificar se as retas *r* e *s*, respectivamente, de equações $2x + 3y - 6 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$, são perpendiculares.

▸ Resolução

r: $2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$

s: $3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_s = \frac{3}{2}$

Como $m_r \cdot m_s = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$, temos que $r \perp s$.

R22. Escrever a equação reduzida da reta *r* que passe pelo ponto $P(-2, 1)$ e seja perpendicular à reta *s* de equação $2x + y - 2 = 0$.

▸ Resolução

A equação reduzida da reta *s* é:

$$2x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2x + 2$$

Portanto, $m_s = -2$.

Para que as retas *r* e *s* sejam perpendiculares, é necessário que o produto de seus coeficientes angulares seja igual a -1.

$$m_s \cdot m_r = -1 \Rightarrow (-2) \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_r = \frac{1}{2}$$

O ponto *P* pertence à reta *r*; então:

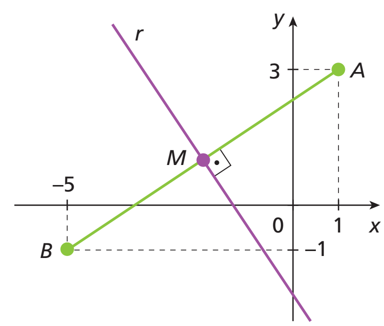
$$y_P = m_r \cdot x_P + n_r \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + n_r \Rightarrow n_r = 2$$

Logo, a equação reduzida da reta *r*, que passa por *P* e é perpendicular à reta *s*, é $y = \frac{1}{2}x + 2$.

R23. Determinar a equação reduzida da mediatriz *r* do segmento $\overline{AB}$, de extremidades $A(1, 3)$ e $B(-5, -1)$.

▸ Resolução

A mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular a esse segmento e que passa por seu ponto médio.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos determinar as coordenadas do ponto médio *M* do segmento $\overline{AB}$:

- $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-5)}{2} = -2$
- $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$

Assim, o ponto médio é $M(-2, 1)$.

O coeficiente angular da reta suporte do segmento $\overline{AB}$ é tal que:

$$m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 3}{-5 - 1} = \frac{2}{3}$$

O coeficiente angular da reta mediatriz *r* é tal que:

$$m_{\overleftrightarrow{AB}} \cdot m_r = -1 \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_r = -\frac{3}{2}$$

Como o ponto médio *M* de $\overline{AB}$ pertence à mediatriz *r*, temos:

$$y_M = m_r \cdot x_M + n_r \Rightarrow 1 = -\frac{3}{2} \cdot (-2) + n_r \Rightarrow n_r = -2$$

Portanto, a equação reduzida da reta *r*, mediatriz de $\overline{AB}$, é $y = -\frac{3}{2}x - 2$.

Atividades propostas

46. Em cada item, verifique se as retas *r* e *s* são paralelas coincidentes, paralelas distintas, concorrentes não perpendiculares ou concorrentes perpendiculares.

a. $r: x + y - 3 = 0$ e $s: x - y + 1 = 0$ **46 a.** Concorrentes perpendiculares.

b. $r: 3x - 2y + 1 = 0$ e $s: y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ **46 b.** Concorrentes.

c. $r: y = 2 + x$ e $s: -x + y - 3 = 0$ **46 c.** Paralelas distintas.

d. $r: 2x - y + 2 = 0$ e $s: x - \frac{1}{2}y + 1 = 0$

46 d. Paralelas coincidentes.

47. Dadas as retas *r*, de equação $2x - 4y - 2 = 0$, e *s*, de equação $y = \frac{x}{2} + 3$, faça o que se pede.

47 a. Resposta no *Suplemento para o professor*.

a. Represente essas retas no plano cartesiano.

b. Observe a representação do item **a** e escreva a posição relativa de *r* e *s*. **47 b.** Paralelas distintas.

c. Verifique algebricamente a resposta dada no item **b**.

47 c. Resposta no *Suplemento para o professor*.

51 a. Mediatriz de AB: $y = -x - 2$; mediatriz de BC: $y = \frac{1}{3}x$; mediatriz de AC: $y = 3x + 4$.

48. Determine a equação geral da reta r que passa pela origem do sistema cartesiano e é: **48 a.** $5x - y = 0$

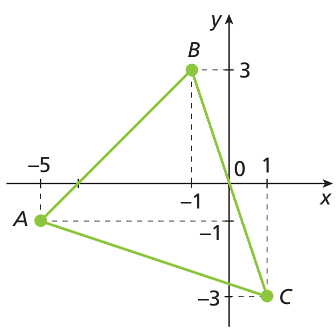
a. paralela à reta de equação $5x - y + 2 = 0$; **48 b.** $x - 5y = 0$

b. perpendicular à reta de equação $5x + y + 2 = 0$.

49. Dada a reta r, de equação $y = 3x - 1$, e o ponto $P(-3, 1)$, determine a equação geral da reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r. **49.** $x + 3y = 0$

50. Obtenha a equação reduzida da reta paralela à reta $4x - 2y + 1 = 0$ e que passa pelo ponto de intersecção da reta $2x - y + 3 = 0$ com o eixo das ordenadas. **50.** $y = 2x + 3$

51. **EM DUPLA** Junto com um colega, considerem o triângulo representado e resolva cada item.

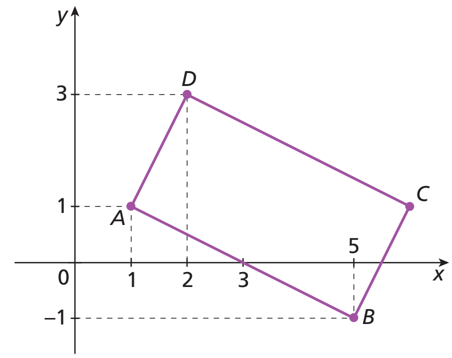


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Obtenham a equação reduzida da mediatriz de cada um dos lados do triângulo.

b. O circuncentro O de um triângulo ABC é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados desse triângulo. Determinem o par ordenado associado ao ponto O.

52. Analise o retângulo representado a seguir. **51 b.** $O\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



Determine: **52 a.** $A(1, 1)$, $B(5, -1)$, $C(6, 1)$ e $D(2, 3)$.

a. os pares ordenados associados aos vértices do retângulo;

b. as equações gerais das retas suportes das diagonais;

c. a medida da área do retângulo em u^2; **52 c.** $10\ u^2$

d. a medida do perímetro do retângulo em u.

52 d. $6\sqrt{5}$ u

52 b. $y - 1 = 0$ e $4x + 3y - 17 = 0$.

Vetores

Grandezas escalares e grandezas vetoriais

Algumas grandezas podem ser representadas apenas pelo valor numérico de sua medida acompanhado da unidade de medida, por exemplo: massa, volume, temperatura etc. Essas grandezas são chamadas de **escalares**.

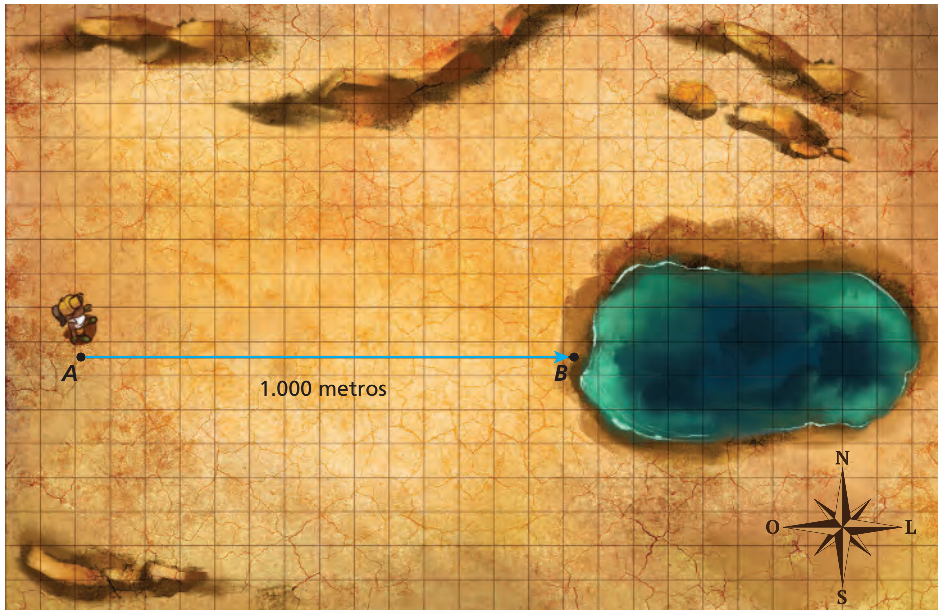
Entretanto, há grandezas que, para serem representadas, necessitam de outros atributos além do valor numérico da medida e da unidade de medida. Suponha que você precise ir a um local que não conhece. Nesse caso, apenas a informação sobre a medida da distância não será suficiente: serão necessárias outras informações, como a direção e o sentido para chegar ao local. Assim, grandezas como deslocamento, velocidade, aceleração etc. precisam de outras informações para que sejam representadas. Essas grandezas são chamadas de **vetoriais**.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Para que a informação da primeira imagem seja completa, será necessário incluir a direção e o sentido. Essas informações estão resumidas na placa da segunda imagem.

Podemos representar geometricamente o deslocamento da pessoa até a água da seguinte forma:

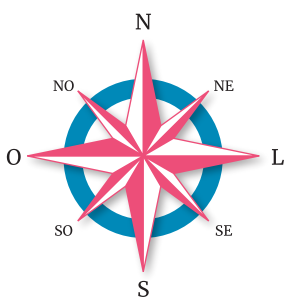
ATENÇÃO! A IMAGEM ESTÁ REPRESENTADA SEM ESCALA E SEM PROPORÇÃO ENTRE OS ELEMENTOS.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

A ideia de direção pode ser percebida na orientação dos pontos cardeais. O eixo com Norte e Sul é uma direção, assim como o eixo com Leste e Oeste.

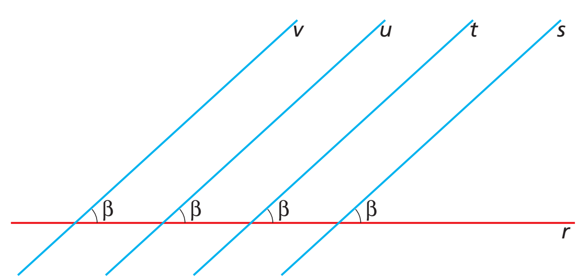


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que a direção ligando a pessoa à água está representada por um segmento de reta com extremidades nos pontos *A* e *B*. A medida de comprimento do segmento $\overline{AB}$ determina a medida da distância a ser percorrida, e a ponta de seta do segmento determina o sentido (de Oeste para Leste). Assim, o segmento orientado representa a direção, o sentido e a medida da distância.

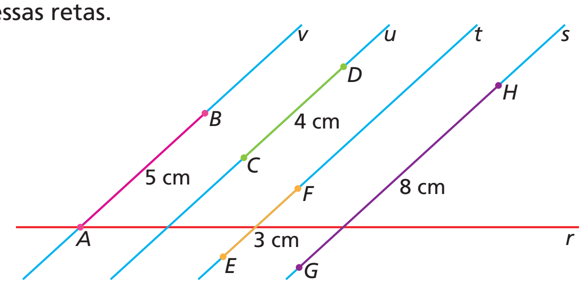
Definindo vetores

Observe, na figura a seguir, que o ângulo de medida de abertura β determina a direção das retas *s*, *t*, *u*, *v* em relação à reta *r*.



Dizemos que essas retas têm a mesma direção, pois são paralelas. Dessa maneira, para mencionar a direção dessas retas, basta dizer a direção de apenas uma delas, que é determinada pelo ângulo de medida de abertura β tomado a partir da reta *r*, no sentido anti-horário.

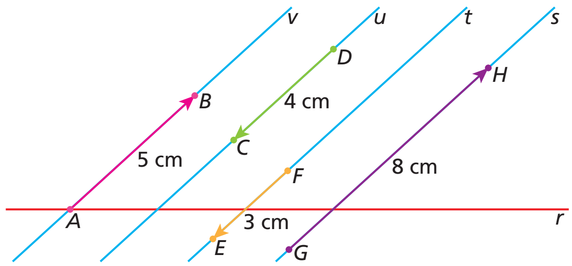
Agora, observe que podemos indicar a medida de comprimento de segmentos de reta contidos nessas retas.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Dessa maneira, já temos um modo de representar, geometricamente, a direção e a medida de comprimento.

Podemos, também, representar o sentido. Observe.



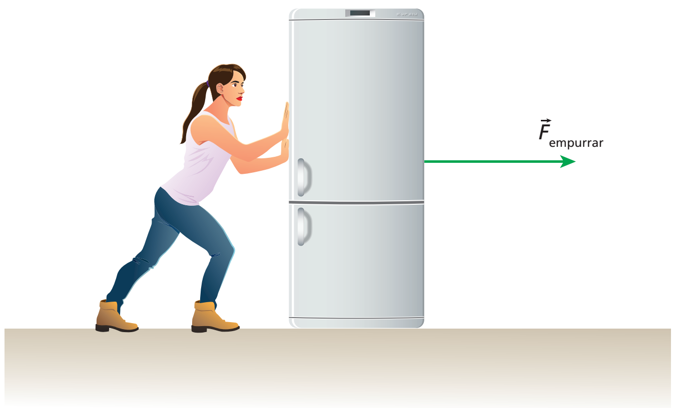
Note que a ponta de seta em cada segmento indica o sentido. Por exemplo, o sentido do segmento $\overline{AB}$ é o mesmo do segmento $\overline{GH}$ e contrário ao sentido dos segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{FE}$.

Portanto, por meio de um segmento de reta orientado, podemos expressar uma direção, um sentido e uma medida de comprimento, que é o valor atribuído à grandeza, também chamado de **módulo**.

Os **vetores** são representados geometricamente por esses segmentos orientados.

Analise o exemplo.

Observe a ilustração de uma pessoa empurrando uma geladeira, que se desloca com uma força $\vec{F}$ de módulo 10 N.



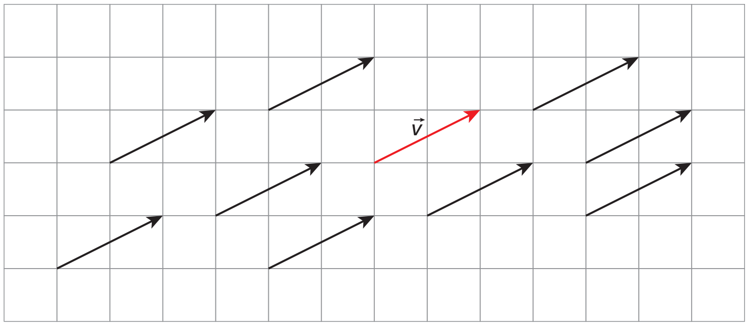
O vetor $\vec{F}$ está indicando a direção, que é horizontal; o sentido, da esquerda para a direita de quem olha para a figura; e, por meio da medida de seu comprimento, o módulo da força, em Newton. Adotamos como medida de comprimento da seta 2 cm, que, nesse caso, correspondente ao módulo da força de 10 N, mas poderíamos adotar outra escala.

Geralmente, indicamos um vetor com uma letra e uma seta acima dessa letra, como fizemos com o vetor $\vec{F}$ no exemplo anterior. O módulo de um vetor é representado por $|\vec{F}|$ ou F.

Um vetor é o conjunto de todos os segmentos orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo. Cada um desses segmentos orientados representa o vetor.

Considere o exemplo.

Na figura, o vetor $\vec{v}$ representa todos os vetores que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo.



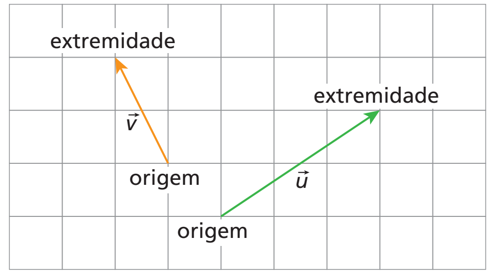
Observação

Em grandezas vetoriais, geralmente nos referimos ao módulo de uma grandeza quando estamos falando da medida dessa grandeza.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

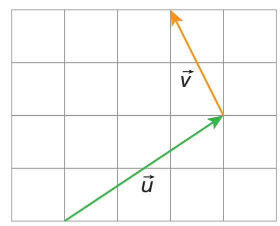
Adição vetorial

Considere os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Na figura, destacamos a extremidade (ponta de seta) e a origem (ponta sem seta) desses vetores.



Podemos adicionar os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ usando o procedimento a seguir.

1. Deslocamos qualquer um dos dois vetores de modo que a extremidade de um coincida com a origem do outro. Isso pode ser feito porque um vetor pode ser representado por todos os infinitos segmentos orientados de mesma direção, mesmo sentido e mesmo modulo. Nesse caso, "deslocar" significa que vamos trabalhar com outro segmento orientado que representa o vetor *u* ou o vetor *v* em outra parte do plano.

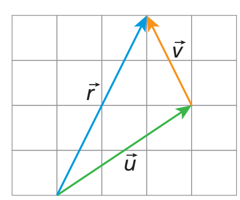


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Uma linha poligonal é formada por dois ou mais segmentos de reta, dois a dois consecutivos e não colineares.

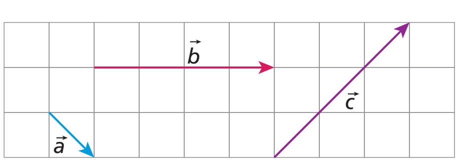
2. Construímos o **vetor soma** ou **resultante** da adição de maneira que sua origem coincida com a origem da linha poligonal formada pelos dois vetores no passo **1** e a extremidade coincida com a extremidade da linha poligonal.



Assim, $\vec{u} + \vec{v}$ é igual ao vetor $\vec{r}$.

Atividade resolvida

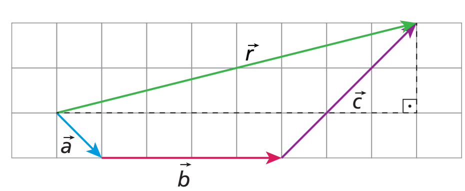
R24. Dados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, determinar o vetor resultante e calcular seu módulo, sabendo que o comprimento do lado de cada quadrado da malha mede 1 u.



▸ **Resolução**

Para obter o vetor resultante $\vec{r}$, compomos uma linha poligonal de modo que a extremidade de um vetor coincida com a origem de outro.

Em seguida, calculamos o módulo do vetor resultante $\vec{r}$ usando o teorema de Pitágoras.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Como cada quadrado da malha tem lado de medida de comprimento 1 u e *r* é o módulo do vetor resultante, fazemos:

$r^2 = 2^2 + 8^2$

$r^2 = 4 + 64$

$r^2 = 68 = 2^2 \cdot 17$

$r = \sqrt{2^2 \cdot 17}$

$r = 2\sqrt{17}$

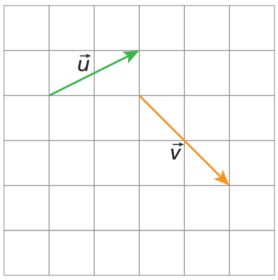
Portanto, o módulo do vetor resultante $\vec{r}$ é igual a $2\sqrt{17}$ u.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

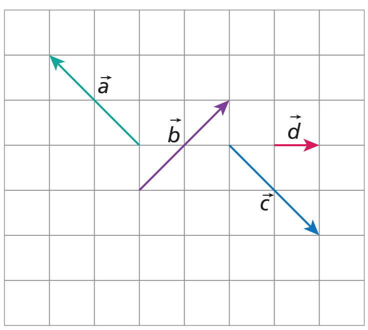
53. Copie os vetores de cada item em uma malha quadriculada e faça a adição vetorial para obter o vetor resultante. Considerando que o comprimento do lado do quadrado da malha mede 1 u, qual é o módulo do vetor resultante em cada item?

a.



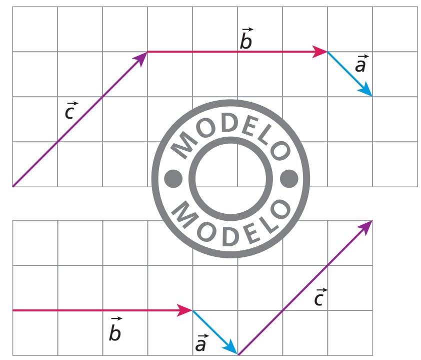
53 a. Representação no *Suplemento para o professor*; $\sqrt{17}$ u.

b.



53 b. Representação no *Suplemento para o professor*; $\sqrt{13}$ u.

54. Com base nas duas figuras representadas a seguir, reflita e responda: Na **atividade resolvida R24**, deslocamos o vetor $\vec{b}$, mas poderíamos deslocar os outros vetores? O resultado seria o mesmo? **54.** Sim; sim.



55. Considere a figura apresentada na resolução da **atividade resolvida R24**. Suponha que um plano cartesiano seja representado nessa figura, sendo que a origem do vetor $\vec{a}$ coincide com a origem do plano e que o vetor $\vec{b}$ é paralelo ao eixo das abscissas.

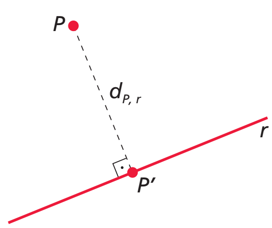
a. Quais seriam os pares ordenados associados às extremidades dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, da figura? **55 a.** (1, –1), (5, –1) e (8, 2).

b. Como você calcularia $\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|$?

55 b. Calculando a medida da distância entre os pontos (0, 0) e (8, 2).

Medida da distância entre ponto e reta

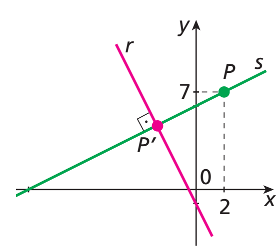
A medida da distância de um ponto *P* a uma reta *r* é a medida da distância entre *P* e sua projeção ortogonal *P'* sobre *r*.



Observe o exemplo.

Para calcular a medida da distância entre o ponto *P*(2, 7) e a reta *r*, de equação $2x + y + 1 = 0$, precisamos inicialmente obter a equação da reta *s*, que passa por *P* e é perpendicular a *r*.

As retas *r* e *s* interceptam-se no ponto *P'*(*x*, *y*), que é a projeção ortogonal do ponto *P* sobre a reta *r*. Então, para resolver esse problema, basta calcular a medida da distância entre *P* e *P'*.



Temos:

$$\text{reta } r\text{: } 2x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1 \Rightarrow m_r = -2$$

Para $r \perp s$, temos: $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow (-2) \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = \frac{1}{2}$

Portanto, a equação da reta *s* é:

$$y - y_P = m_s(x - x_P) \Rightarrow y - 7 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x - 2y + 12 = 0$$

Como $\{P'\} = r \cap s$, devemos resolver o sistema linear formado pelas equações das retas *r* e *s* e obter as coordenadas de *P'*.

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - 2y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{14}{5} \text{ e } y = \frac{23}{5}$$

Portanto: $P'\left(-\frac{14}{5}, \frac{23}{5}\right)$

Como $d_{P,\,r} = d_{P,\,P'}$, temos:

$$d_{P,\,r} = \sqrt{\left(-\frac{14}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{23}{5} - 7\right)^2} = \sqrt{\frac{576}{25} + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{720}{25}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Logo, a medida da distância entre o ponto P e a reta r é $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ u.

Fórmula da medida da distância entre um ponto e uma reta

Para um ponto qualquer $P(x_P, y_P)$ e uma reta qualquer r de equação geral $ax + by + c = 0$, para calcular a medida da distância $d_{P,\,r}$ entre o ponto P e a reta r podemos utilizar a fórmula:

$$d_{P,\,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Observação

É possível demonstrar essa fórmula, mas não faremos a demonstração nesta coleção.

Ao estudarmos a equação geral da reta, definimos que a e b não são simultaneamente nulos, o que nos garante que $\sqrt{a^2 + b^2}$ sempre é diferente de zero.

Aplicando a fórmula ao exemplo anterior, para calcular a medida da distância entre o ponto $P(2, 7)$ e a reta r de equação $2x + y + 1 = 0$, obtemos:

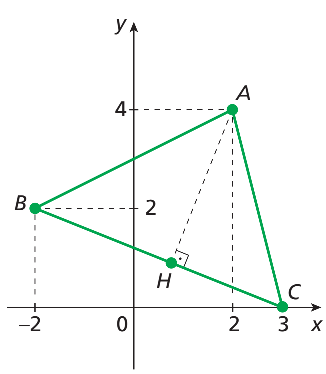
$$d_{P,\,r} = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Atividades resolvidas

R25. Dado o triângulo de vértices $A(2, 4)$, $B(-2, 2)$ e $C(3, 0)$, calcular a medida de sua altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

▸ Resolução

Representamos o triângulo ABC neste plano cartesiano.



Vamos determinar a equação da reta suporte de $\overline{BC}$:

$$\overleftrightarrow{BC}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 5y - 6 = 0$$

A medida procurada é a medida da distância entre o ponto $A(2, 4)$ e a reta $\overleftrightarrow{BC}$:

$$d_{A,\,\overleftrightarrow{BC}} = \frac{|2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + (-6)|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{18}{\sqrt{29}} = \frac{18\sqrt{29}}{29}$$

Portanto, a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é $\frac{18\sqrt{29}}{29}$ u.

R26. Calcular a medida da distância entre as retas paralelas r e s, de equações $2x - y + 4 = 0$ e $2x - y - 7 = 0$, respectivamente.

▸ Resolução

A medida da distância entre duas retas paralelas é igual à medida da distância de um ponto P qualquer de uma delas à outra reta.

Então, vamos encontrar um par ordenado associado a um ponto P qualquer da reta r.

Para $x = 0$, temos: $2 \cdot 0 - y + 4 = 0 \Rightarrow y = 4$

Logo, $P(0, 4)$ é um ponto de r.

Agora, basta calcular a medida da distância entre P e a reta s.

$$d_{P,\,s} = \frac{|2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + (-7)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

Portanto, a medida da distância entre as retas paralelas r e s é $\frac{11\sqrt{5}}{5}$ u.

Atividades propostas

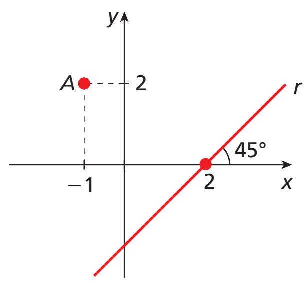
Registre em seu caderno

56. Obtenha a medida da distância, em u, da origem do plano cartesiano à reta de equação $3x + 4y - 4 = 0$. **56.** $\frac{4}{5}$ u

57. Um triângulo tem vértices $A(2, 0)$, $B(3, 1)$ e $C(0, 2)$. Calcule a medida da altura do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$, em u. **57.** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ u

58. Obtenha a medida da distância, em u, entre as retas paralelas $2x - 3y + 5 = 0$ e $4x - 6y - 1 = 0$. **58.** $\frac{11\sqrt{13}}{26}$ u

59. Um quadrado tem um vértice em A e um lado na reta r.



a. Identifique o par ordenado associado ao ponto A e determine a equação geral da reta r. **59 a.** $A(-1, 2)$; $x - y - 2 = 0$.

b. Calcule a medida de comprimento, em u, do lado do quadrado. **59 b.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ u

c. Determine a medida de comprimento, em u, da diagonal do quadrado. **59 c.** 5 u

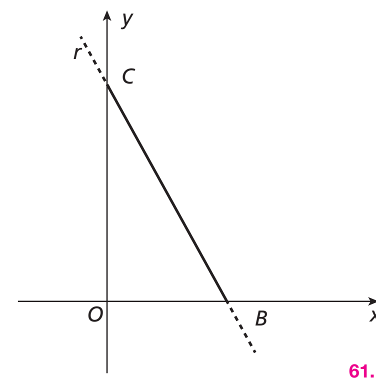
d. Calcule a medida da área, em u^2, e a medida do perímetro do quadrado, em u. **59 d.** Respectivamente, $\frac{25}{2}$ u^2 e $10\sqrt{2}$ u.

60. Dadas as retas $r: 2x + 5y - 4 = 0$ e $s: 5x - 2y + 8 = 0$, determine as equações das retas cujos pontos são equidistantes de r e s. Siga estes passos:

- considere um ponto genérico $P(x, y)$;
- use a definição $d_{P,r} = d_{P,s}$;
- obtenha as equações das retas eliminando os módulos.

60. $3x - 7y + 12 = 0$ e $7x + 3y + 4 = 0$.

61. **(UPE-2023)** A reta r, representada na figura a seguir, é o gráfico da função afim $f(x) = -2x + 6$, e B e C são os pontos de intersecção da reta r com os eixos x e y, respectivamente.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

61. Alternativa **b.**

Qual é a medida da distância entre os pontos B e C?

a. 9
b. $3\sqrt{5}$
c. $2\sqrt{3}$
d. $4\sqrt{3}$
e. $6\sqrt{5}$

62. ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS | EM DUPLA Elabore um problema sobre o cálculo da medida da altura de um trapézio dadas as coordenadas de seus vértices. Troque-o com um colega para que um resolva o problema formulado pelo outro. Depois, destroquem os problemas para verificar a resolução. **62.** Resposta pessoal.

Inequações do 1º grau com duas incógnitas

Já resolvemos inequações com uma incógnita. Agora, vamos estudar **inequações do 1º grau com duas incógnitas**.

Considere os exemplos.

a. $2x - 7y < 0$ **b.** $\sqrt{5}x + y \geqslant 0$ **c.** $8y - \frac{1}{3}x > 0$ **d.** $x + y \leqslant 0$

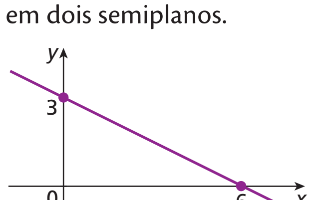
Uma inequação do 1º grau com duas incógnitas admite infinitas soluções, que podem ser representadas graficamente, conforme apresentado nas atividades resolvidas a seguir.

Atividade resolvida

R27. Representar graficamente a inequação $x + 2y - 6 \leqslant 0$.

▶ Resolução

A reta de equação $x + 2y - 6 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

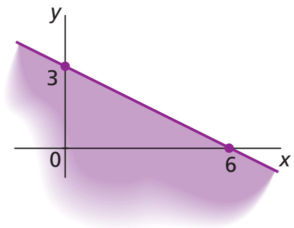
Para verificar qual dos semiplanos representa os pontos tais que $x + 2y - 6 \leqslant 0$, vamos testar um ponto auxiliar qualquer, por exemplo, $P(0, 0)$, substituindo suas coordenadas na desigualdade.

Assim:

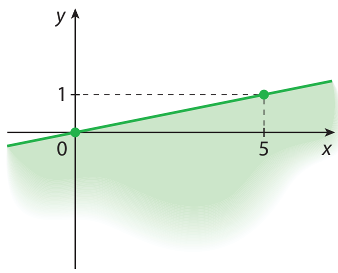
$x + 2y - 6 \leqslant 0 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 - 6 \leqslant 0 \Rightarrow -6 \leqslant 0$ (sentença verdadeira)

Como a sentença é verdadeira, P está no semiplano procurado; logo, podemos representar o semiplano correspondente à inequação $x + 2y - 6 \leqslant 0$.

Observe:



R28. Determinar a inequação cuja representação gráfica é:



▸ **Resolução**

Vamos escrever a equação da reta r que determina o semiplano. Ela passa pelos pontos (0, 0) e (5, 1); logo, $m_r = \frac{1-0}{5-0} = \frac{1}{5}$. Sua equação geral é dada por $y - 0 = \frac{1}{5} \cdot (x - 0)$, ou seja, é $x - 5y = 0$.

Agora, vamos calcular o valor numérico V do 1º membro da equação geral de r para as coordenadas de um ponto da região representada que não pertença a r. Substituindo na expressão $x - 5y$ as coordenadas do ponto $P(1, 0)$, por exemplo, temos: $V = 1 - 5 \cdot 0 = 1$.

Como $V > 0$ e r faz parte da região representada, os pontos descritos na representação gráfica são tais que $x - 5y \geqslant 0$.

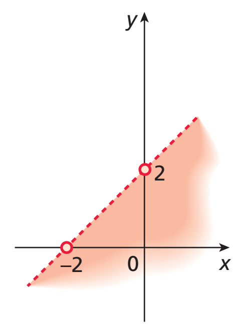
R29. Representar graficamente o sistema de inequações:

$$\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ x + y - 4 \leqslant 0 \end{cases}$$

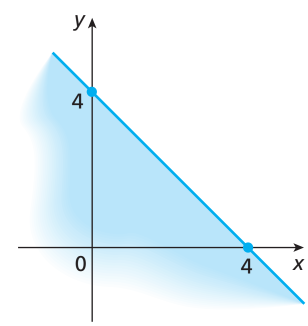
▸ **Resolução**

Vamos representar graficamente cada inequação:

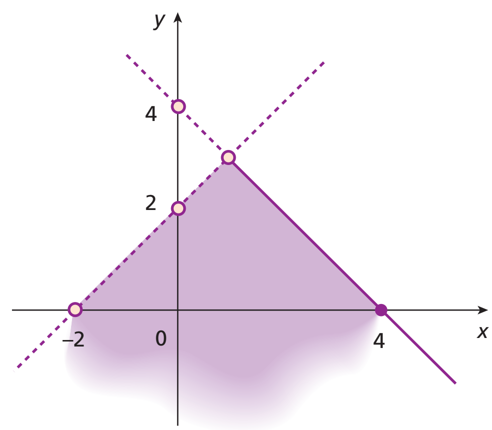
$x - y + 2 > 0$



$x + y - 4 \leqslant 0$



A região procurada é a intersecção dos dois semiplanos formados pelas soluções das inequações $x - y + 2 > 0$ e $x + y - 4 \leqslant 0$. Logo:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades propostas

Registre em seu caderno

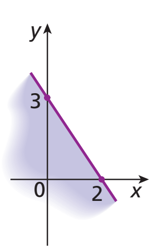
63. Resolva graficamente as inequações:

a. $x - y + 1 \geqslant 0$

b. $2x - y + 2 < 0$

63. Respostas no *Suplemento para o professor*.

64. Determine a inequação cuja representação gráfica é dada a seguir. **64.** $3x + 2y - 6 \leqslant 0$



65. Represente graficamente o sistema de inequações:

$$\begin{cases} 2x - y - 10 \leqslant 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$$

65. Resposta no *Suplemento para o professor*.

66. Uma fábrica produz dois tipos de calça, A e B, sendo x a quantidade diária produzida da calça A e y, a da calça B. Cada unidade produzida de A custa R$ 30,00 e cada unidade produzida de B custa R$ 70,00; portanto, o custo total diário da produção conjunta de A e B é igual a $p = 30x + 70y$.

a. Sendo o custo total diário igual a R$ 4.200,00, para a produção de igual quantidade das calças A e B, quantas calças são confeccionadas por dia? **66 a.** 84 calças.

b. ARGUMENTAÇÃO Nessa situação, x ou y podem **não** ser números naturais? Justifique sua resposta.

c. Se o custo total diário for R$ 6.300,00, quais são os valores máximos para x e y, sabendo que $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$? **66 c.** $x = 210$ e $y = 90$.

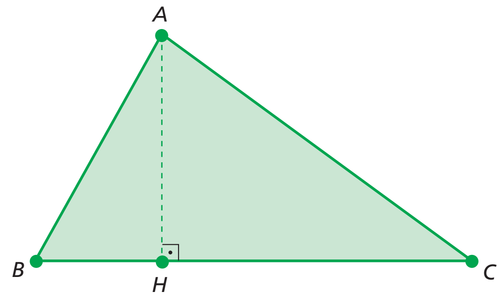
d. ARGUMENTAÇÃO Expresse essa situação, por meio de uma inequação, considerando que o custo total diário máximo é R$ 6.300,00. A representação gráfica dessa inequação é um semiplano? Justifique sua resposta.

66 b. Não, pois x e y representam o número de calças de cada tipo, então precisam ser números naturais.

66 d. $30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$, com $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$; não, pois, como a situação está definida apenas para $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$, a representação gráfica da inequação é um conjunto finito de pontos do semiplano $30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$.

Medida da área de uma superfície triangular: uma aplicação na Geometria analítica

Considere o triângulo ABC.



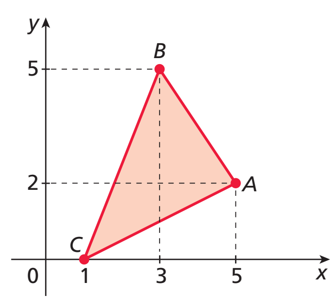
Na Geometria plana, a medida da área desse triângulo é dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

Considerando a medida de distância entre dois pontos e entre um ponto e uma reta, essa fórmula pode ser escrita como:

$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,\,C} \cdot d_{A,\,r}$, em que r é a reta suporte do lado $\overline{BC}$ do triângulo.

Observe o triângulo ABC representado no plano cartesiano a seguir.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Os pontos $A(5, 2)$, $B(3, 5)$ e $C(1, 0)$ são vértices do triângulo ABC.

Vamos calcular a medida da área desse triângulo.

Podemos escolher $\overline{BC}$ como base e determinar sua medida de comprimento:

$$d_{B,\,C} = \sqrt{(1-3)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

Agora, vamos determinar a equação da reta r, suporte do lado $\overline{BC}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + y - 5 - 3y = 0 \Rightarrow 5x - 2y - 5 = 0$$

A medida da distância do vértice A à reta r, suporte do lado $\overline{BC}$, é dada por:

$$d_{A,\,r} = \frac{|5 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 + (-5)|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{|16|}{\sqrt{29}} = \frac{16}{\sqrt{29}}$$

Considerando os dados obtidos, vamos calcular a medida da área do triângulo.

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,\,C} \cdot d_{A,\,r} \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{16}{\sqrt{29}} = \frac{16}{2} = 8$$

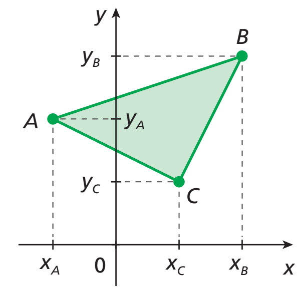
Portanto, o triângulo ABC tem 8 u² de medida de área.

Observação

Para simplificar a linguagem em contextos que envolvem medidas de área, ao nos referirmos a uma **superfície poligonal**, geralmente usaremos o nome do **polígono** que a determina. Por exemplo, em vez de dizer "a medida da área da superfície triangular", diremos "a medida da área do triângulo".

Fórmula da medida da área do triângulo

Agora, vamos executar os mesmos passos do procedimento anterior para calcular a medida da área de um triângulo qualquer supondo conhecidos os seus vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A medida de comprimento do lado $\overline{BC}$ é:

$$d_{B,\,C} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

A equação da reta r, suporte do lado $\overline{BC}$, é dada por:

$$\det D' = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{(y_B - y_C)}_{a}x + \underbrace{(x_C - x_B)}_{b}y + \underbrace{(x_B y_C - x_C y_B)}_{c} = ax + by + c = 0$$

A medida da distância do vértice A à reta suporte do lado $\overline{BC}$ é:

Observação

A matriz D é a matriz D' com $x = x_A$ e $y = y_A$.

$$d_{A,\,r} = \frac{\left|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + (x_B y_C - x_C y_B)\right|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}$$

$$d_{A,\,r} = \frac{|\det D|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}$$

A medida da área do triângulo é dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,\,C} \cdot d_{A,\,r}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\cancel{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}\right) \cdot |\det D|}{\cancel{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}}$$

Portanto, a medida da área do triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2}|\det D|, \text{ com } \det D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Atividade resolvida

R30. Sabendo que os pontos $A(0, 1)$, $B(3, 3)$ e $C(6, y)$ são os vértices de um triângulo cuja medida da área é igual a 6 u², determine os possíveis valores de y.

▶ **Resolução**

$$A_{\text{triângulo}} = 6 \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2}|\det D| \Rightarrow 6 = \frac{1}{2}|\det D| \Rightarrow |\det D| = 12$$

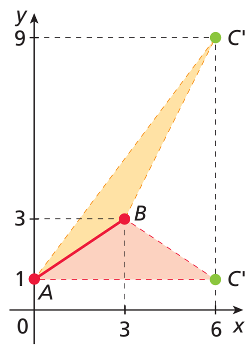
$$\det D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & y & 1 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 3y - 18 - 0 - 3 = 3y - 15$$

Resolvendo a equação modular, obtemos:

$$|\det D| = 12 \Rightarrow |3y - 15| = 12 \Rightarrow \begin{cases} 3y - 15 = 12 \\ \text{ou} \\ 3y - 15 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ \text{ou} \\ y = 1 \end{cases}$$

Portanto, $y = 1$ ou $y = 9$.

Para cada um desses valores de y, temos as superfícies triangulares representadas na figura.

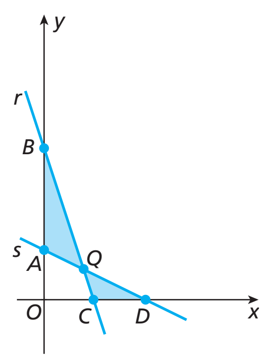


Atividades propostas

Registre em seu caderno

67. Obtenha a medida da área do quadrilátero *ABCD*, em u², sabendo que seus vértices são os pontos $A(4, 0)$, $B(7, 2)$, $C(0, 5)$ e $D(1, 1)$. **67.** 17 u²

68. Considere as retas *r* e *s*, de equações $y = -3x + 6$ e $y = -\frac{x}{2} + 2$, respectivamente.



Determine:

68 a. $A(0, 2)$, $B(0, 6)$, $C(2, 0)$ e $D(4, 0)$.

a. os pares ordenados associados aos pontos *A*, *B*, *C* e *D*;

b. o par ordenado associado ao ponto *Q*, intersecção das retas *r* e *s*;

c. a medida da área da figura azul, em u²; **68 c.** $\frac{22}{5}$ u² **68 b.** $Q\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

d. a medida da área do quadrilátero *OAQC*, em u²; **68 d.** $\frac{14}{5}$ u²

e. a medida da área do polígono *OBQD*, em u². **68 e.** $\frac{36}{5}$ u²

69. Dois dos vértices de um triângulo *ABC* são $A(2, -2)$ e $B(3, -3)$. Sabe-se que a medida da área desse triângulo é 6 u² e que o vértice *C* pertence à reta $2x + y - 1 = 0$. Determine os possíveis pares ordenados que podem ser associados ao do vértice *C*. **69.** (–11, 23) ou (13, –25)

70. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** **EM DUPLA** Elabore um problema sobre o cálculo da medida da área de um trapézio dadas as coordenadas de seus vértices. Troque-o com um colega para que um resolva o problema formulado pelo outro. Depois, destroquem os problemas para verificar a resolução. **70.** Resposta pessoal.

Circunferência

Desde a Antiguidade alguns povos se preocupam em estudar a circunferência. Por exemplo, no papiro *Rhind* (texto matemático escrito pelo egípcio Ahmes por volta de 1650 a.C.), existem problemas envolvendo o cálculo de medida de área de um círculo.

Por volta de 300 a.C., o matemático grego Euclides (c. 325-265 a.C.) escreveu a obra intitulada *Elementos*, na qual descreve construções com régua e compasso traçando retas e circunferências. Mais tarde, René Descartes contribuiu para o desenvolvimento da Geometria analítica, em que há outro enfoque para o estudo da circunferência.

O formato de circunferência está presente em diversas situações do mundo moderno, desde o uso no dia a dia até o emprego em experimentos científicos, como no formato do contorno do túnel do Sirius: um acelerador de partículas brasileiro, instalado em Campinas (SP).

ODS 9

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

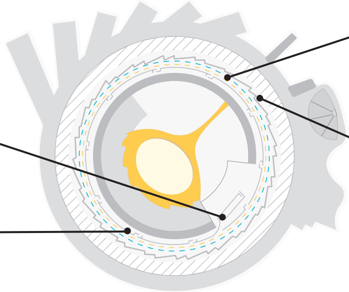
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Considerado uma das mais modernas infraestruturas já construídas no Brasil, esse acelerador de partículas foi projetado para emitir luz com brilho mais intenso dentre outros equipamentos de mesma classe de energia.

Acelerador de partículas Sirius, em Campinas (SP). Foto de 2022.

PAULOALBERTO82/SHUTTERSTOCK

Confira a seguir como funciona o Sirius.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

O processo inicial de aceleração começa com o aquecimento de um fio de tungstênio. Assim, elétrons são liberados do material no canhão de elétrons e conduzidos para os anéis de aceleração.

Campos elétricos aceleram as partículas a medidas de velocidade próximas à da luz (300.000 km/s) e campos magnéticos são responsáveis pela mudança de trajetória delas em um túnel cujo comprimento da circunferência mede 518 metros.

Qual é a medida aproximada do comprimento do raio do túnel do Sirius?

A radiação passa pelas amostras a serem analisadas nas linhas de luz. Nessas linhas são realizadas medições para experimentos que usam diferentes técnicas, como espalhamento de raios X, espectroscopia do infravermelho ao raio X, cristalografia, tomografia e outras.

Observação

Para saber mais sobre o Sirius, você pode acessar o *site* https://www.lnls.cnpem.br/sirius/. Acesso em: 18 out. 2024.

Questão. A medida do comprimento do raio do túnel do Sirius é aproximadamente igual a 82,5 m.

A circunferência como lugar geométrico

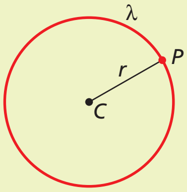
Quando analisamos figuras geométricas com base em certa propriedade, estamos estudando um lugar geométrico. Considere a definição:

Lugar geométrico é um conjunto de pontos que partilham uma propriedade, de modo que:

- todos esses pontos atendam a essa propriedade;
- somente esses pontos tenham essa propriedade.

Na Geometria analítica, estudamos a circunferência como um lugar geométrico, pois ela é um conjunto de pontos que obedecem à seguinte propriedade: todos estão à mesma medida de distância do centro. Além disso, **todos** os pontos da circunferência, e **somente** eles, atendem a essa propriedade.

Dados um ponto fixo C do plano e uma medida de distância r, a **circunferência** λ é o lugar geométrico dos pontos P do plano que estão à mesma medida de distância r de C.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

O ponto C é o **centro** da circunferência, e r é a medida de comprimento do **raio**.

Observação

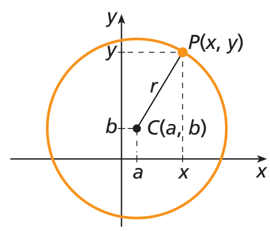
Todo segmento de reta cujas extremidades são o centro e um ponto qualquer da circunferência é um raio dessa circunferência.

Equações da circunferência

Equação reduzida da circunferência

Assim como procedemos na obtenção da equação da reta, impondo uma condição algébrica para as coordenadas dos seus pontos, também podemos determinar a equação da circunferência.

Com base em sua definição como lugar geométrico, vamos estabelecer uma relação para um ponto qualquer $P(x, y)$ que pertence à circunferência de centro $C(a, b)$ e raio de medida de comprimento r.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

O ponto $P(x, y)$ pertence à circunferência se, e somente se, $d_{C,\,P} = r$.

Logo: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

A equação descrita é a **equação reduzida da circunferência** de centro $C(a, b)$ e raio de medida de comprimento r.

Acompanhe o exemplo.

Vamos determinar a equação reduzida da circunferência de raio de medida de comprimento $r = 3$ e centro $C(-2, 1)$.

Tomando um ponto $P(x, y)$ qualquer da circunferência, temos:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$[x-(-2)]^2 + (y-1)^2 = 3^2$

$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$

Logo, $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ é a equação reduzida dessa circunferência.

Quando a equação reduzida da circunferência é $x^2 + y^2 = r^2$, qual é o centro da circunferência?

Questão. A equação reduzida da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio de medida de comprimento r é:
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
Para que seja $x^2 + y^2 = r^2$, devemos ter:
$x - a = x \Rightarrow a = 0$
$y - b = y \Rightarrow b = 0$
Logo, o centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$ é $C(0, 0)$.

Atividades resolvidas

R31. Verificar se os pontos $A(6, -3)$ e $B(4, 0)$ pertencem à circunferência de raio de medida de comprimento $r = 4$ e $C(2, -3)$.

▸ **Resolução**

Primeiro, vamos obter a equação reduzida dessa circunferência:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$(x-2)^2 + [y-(-3)]^2 = 4^2$

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

Para saber se os pontos A e B pertencem à circunferência, vamos substituir suas coordenadas na equação reduzida obtida.

- Substituindo as coordenadas do ponto $A(6, -3)$ na equação $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$, obtemos:

  $(6-2)^2 + (-3+3)^2 = 16 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 4^2 + 0^2 = 16 \Rightarrow 16 = 16$ (sentença verdadeira)

  Como obtemos uma sentença verdadeira, o ponto $A(6, -3)$ pertence à circunferência.

- Substituindo as coordenadas do ponto $B(4, 0)$ na equação $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$, obtemos:

  $(4-2)^2 + (0+3)^2 = 16 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 2^2 + 3^2 = 16 \Rightarrow 4 + 9 = 16 \Rightarrow 13 = 16$ (sentença falsa)

  Como obtemos uma sentença falsa, o ponto $B(4, 0)$ não pertence à circunferência.

R32. Determinar as coordenadas do centro C e a medida do comprimento r do raio de uma circunferência a partir de sua equação $(x+1)^2 + y^2 = 16$.

▸ **Resolução**

Podemos obter o centro $C(a, b)$ e a medida de comprimento r do raio da circunferência comparando a equação na forma reduzida com a equação dada:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

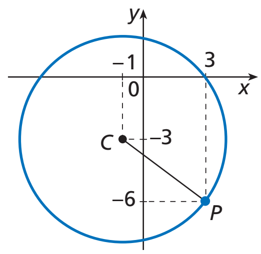
$(x + 1)^2 + y^2 = 16$ ou $[x - (-1)]^2 + (y - 0)^2 = 16$

Logo, $a = -1$ e $b = 0$; então, $C(-1, 0)$.

Como $r^2 = 16$ e $r > 0$, então $r = 4$.

Portanto, o centro é $C(-1, 0)$ e a medida de comprimento do raio é 4 u.

R33. Determinar a equação reduzida da circunferência representada a seguir.



▸ Resolução

De acordo com a figura, C(−1, −3) e P(3, −6).

A medida de comprimento do raio dessa circunferência é igual à medida da distância $d_{C,\,P}$. Assim:

$r = d_{C,\,P} \Rightarrow r = \sqrt{(3 + 1)^2 + (-6 + 3)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{16 + 9} \Rightarrow r = \sqrt{25} \Rightarrow r = 5$

Substituindo as coordenadas do centro da circunferência e o valor de r na equação da circunferência, obtemos:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$[x - (-1)]^2 + [y - (-3)]^2 = 5^2$

$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é:

$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades propostas

Registre em seu caderno

71. Obtenha o centro C e a medida de comprimento r do raio das circunferências de equações:

a. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$ **71 a.** $C(1, 2)$ e $r = 10$.

b. $x^2 + (y - 3)^2 = 5$ **71 b.** $C(0, 3)$ e $r = \sqrt{5}$.

c. $(x - 5)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ **71 c.** $C(5, 0)$ e $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

72. Indique quais dos pontos $P(-2, 1)$, $Q(-1, 3)$, $R(-2, 3)$, $S(0, 1)$ e $T(-1, 0)$ pertencem à circunferência cuja equação reduzida é $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$. **72.** R e T.

73. ARGUMENTAÇÃO Uma circunferência representada no plano cartesiano pode ser gráfico de uma função? Justifique sua resposta. **73.** Não, pois para alguns valores de x há dois valores de y correspondentes.

74. Escreva a equação reduzida do lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que distam 3 u do ponto $C(2, -1)$. **74.** $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

75. Determine, em cada caso, a equação reduzida da circunferência que tem raio de medida de comprimento r e centro C.

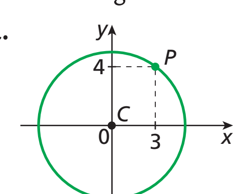
a. $r = 2$ e $C(1, 3)$. **75 a.** $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

b. $r = 4$ e $C(0, 0)$. **75 b.** $x^2 + y^2 = 16$

76. Determine a equação reduzida da circunferência que tem o segmento de reta $\overline{RS}$, de extremidades $R(3, 0)$ e $S(-3, 3)$, como diâmetro. **76.** $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$

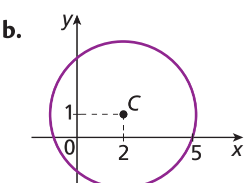
77. Obtenha a equação reduzida de cada circunferência representada a seguir.

a.



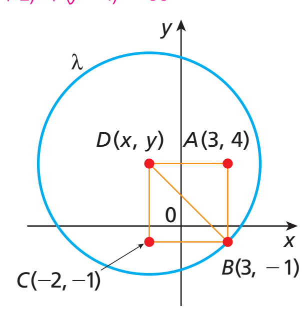
77 a. $x^2 + y^2 = 25$

b.



77 b. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$

78. Os pontos $A(3, 4)$, $B(3, -1)$, $C(-2, -1)$ e $D(x, y)$ são os vértices de um quadrado cuja diagonal $\overline{BD}$ é um raio da circunferência λ, de centro D. Determine a equação reduzida de λ. **78.** $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 50$



Equação geral da circunferência

A **equação geral da circunferência** de centro $C(a, b)$ e raio de medida de comprimento r é obtida desenvolvendo-se os quadrados da equação reduzida.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

Portanto, a equação geral da circunferência é:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0}$$

Essa equação também é chamada de **equação normal da circunferência**.

Observe que essa equação pode ser escrita como $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, em que c é o termo independente e $c = a^2 + b^2 - r^2$. Dessa forma, verificamos que ela é uma equação incompleta do 2º grau com duas variáveis, já que a completa é do tipo $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$.

Observe os exemplos.

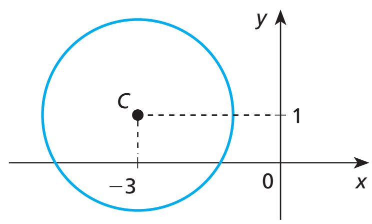
a. Vamos obter a equação geral da circunferência de centro $C(-3, 1)$ e raio de medida de comprimento $r = 2$.

Para isso, podemos escrever a equação reduzida da circunferência e, em seguida, desenvolver os quadrados.

$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 + 1 - 4 = 0$

Portanto, a equação geral da circunferência é: $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$



b. Dada a equação da circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$, vamos determinar o centro C e a medida de comprimento r do raio.

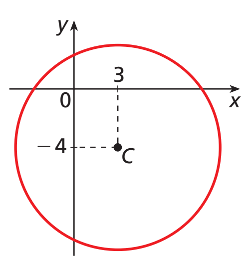
Para isso, tentamos escrever a equação por meio de trinômios quadrados perfeitos.

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 6x + \square}_{\text{(I)}} + \underbrace{y^2 + 8y + \triangle}_{\text{(II)}} = 24 + \square + \triangle$$

Para que (I) e (II) sejam trinômios quadrados perfeitos, precisamos completá-los, respectivamente, com os números 9 e 16.

Ao adicionarmos 9 e 16 ao primeiro membro, para que a igualdade se mantenha, é preciso adicionar 9 e 16 também ao segundo membro. Assim:

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x - 3)^2} + \underbrace{y^2 + 8y + 16}_{(y + 4)^2} = \underbrace{24 + 9 + 16}_{49}$$



Portanto, o centro da circunferência é $C(3, -4)$ e o comprimento do raio mede 7 u.

Atividade resolvida

R34. Seja $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ uma equação completa do 2º grau. Determinar as condições que os coeficientes A, B, C, D, E e F devem cumprir para que a equação dada seja de uma circunferência.

Resolução

Vamos transformar em 1 o coeficiente de x^2. Para isso, dividiremos a equação por A:

$$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 \ (A \neq 0)$$

Agora, compararemos essa equação com a equação geral da circunferência:

$$1x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \overset{0}{\frac{C}{A}}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

$$1x^2 + 1y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Observe que:

<table>
<tr><td>$\frac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0$</td><td rowspan="4">$\frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2$
$r^2 = a^2 + b^2 - \frac{F}{A}$
$r^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}$
$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$,
com $D^2 + E^2 - 4AF > 0$</td></tr>
<tr><td>$\frac{C}{A} = 0 \Rightarrow C = 0$</td></tr>
<tr><td>$\frac{D}{A} = -2a \Rightarrow a = -\frac{D}{2A}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{E}{A} = -2b \Rightarrow b = -\frac{E}{2A}$</td></tr>
</table>

Portanto, concluímos que as condições são:
$A = B \neq 0$, $C = 0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades propostas

Registre em seu caderno

79. Determine, se existirem, o centro *C* e a medida de comprimento *r* do raio da circunferência em cada caso.

a. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ **b.** $(x + 1)^2 - (y - 2)^2 = 9$

79 a. $C(1, -1)$ e $r = \sqrt{2}$. **79 b.** Não existem.

80. Analise se a equação $4x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 9 = 0$ representa uma circunferência. **80.** Não representa.

81. Dada a equação da circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 18y + 8 = 0$, determine o par ordenado associado ao centro e a medida de comprimento do raio dessa circunferência, usando para a solução o método de completar quadrados e a análise dos coeficientes. **81.** $C(3, -9)$ e $r = \sqrt{82}$.

82. Determine a equação geral da circunferência, em cada caso, dados o centro *C* e a medida de comprimento *r* do raio.

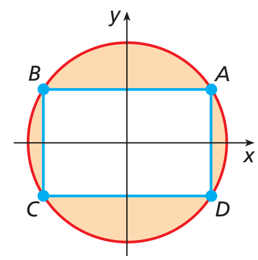
a. $C(-3, 2)$ e $r = 3$. **b.** $C(0, -5)$ e $r = \sqrt{5}$.

83. Em que condições a equação a seguir representa uma circunferência? **83.** $p < 1$

$$x^2 + y^2 + x + y + \frac{p}{2} = 0$$

82 a. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ **82 b.** $x^2 + y^2 + 10y + 20 = 0$

84. O quadrilátero *ABCD* é um retângulo inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 - 5 = 0$.



a. Se a abscissa de *A* é 2, o que você conclui sobre sua ordenada? **84 a.** $y = 1$

b. Determine os pares ordenados associados aos outros três vértices do retângulo. **84 b.** $B(-2, 1)$, $C(-2, -1)$ e $D(2, -1)$.

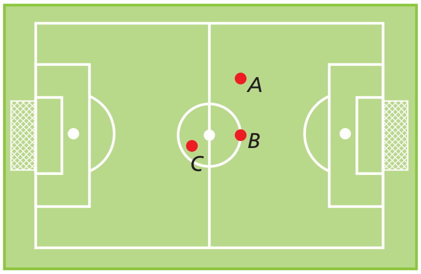
c. É possível calcular a medida da área da região alaranjada? Em caso afirmativo, explique como você faria para determiná-la.

84 c. Sim; a medida da área da região alaranjada pode ser calculada pela diferença entre a medida da área do círculo e a medida da área do retângulo.

Posições relativas

Posição relativa entre ponto e circunferência

Observe a ilustração a seguir.

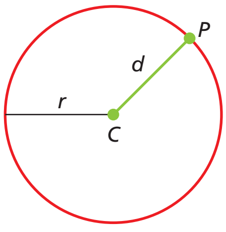
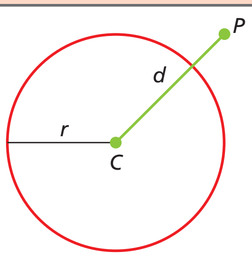
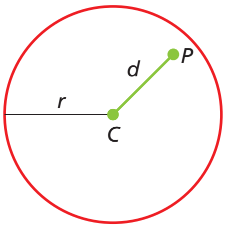


Nessa situação, os pontos *A*, *B* e *C* representam posições distintas de três jogadores em relação à circunferência do círculo central do campo de futebol.

As possíveis posições de um ponto $P(x, y)$ do plano em relação a uma circunferência λ de centro *C* e raio de medida de comprimento *r* são: exterior, interior ou pertencente à circunferência.

Para analisar a posição desse ponto em relação à circunferência, comparamos a medida de distância *d* do ponto *P* ao centro *C* da circunferência com a medida de comprimento *r* do raio da circunferência:

Posições relativas entre ponto e circunferência

$d = r$	$d > r$	$d < r$
		
O ponto *P* pertence à circunferência.	O ponto *P* é exterior à circunferência.	O ponto *P* é interior à circunferência.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades resolvidas

R35. Determinar a posição de cada um dos pontos indicados a seguir em relação à circunferência de equação $x^2 + (y - 2)^2 = 9$.

a. $P(1, 5)$ **b.** $Q(0, 4)$ **c.** $R(3, 2)$

▶ **Resolução**

Para saber a posição que cada ponto ocupa em relação à circunferência dada, devemos calcular a medida da distância entre cada ponto e o centro da circunferência.

Da equação da circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 9$, temos o centro $C(0, 2)$ e a medida de comprimento do raio $r = 3$.

Calculando as respectivas medidas de distância, temos:

a. $d_{C,P} = \sqrt{(1-0)^2 + (5-2)^2} \Rightarrow d_{C,P} = \sqrt{10}$

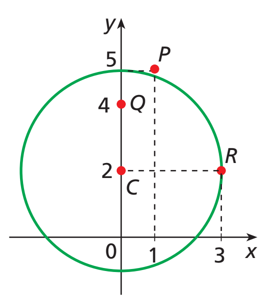
Como $\sqrt{10} > 3$, então $d_{C,P} > r$; logo, o ponto P é exterior à circunferência.

b. $d_{C,Q} = \sqrt{(0-0)^2 + (4-2)^2} \Rightarrow d_{C,Q} = 2$

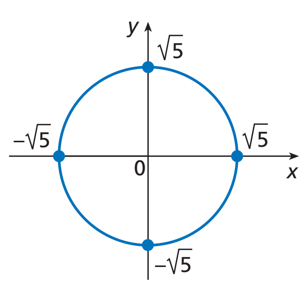
Como $2 < 3$, então $d_{C,Q} < r$; logo, o ponto Q é interior à circunferência.

c. $d_{C,R} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-2)^2} \Rightarrow d_{C,R} = 3$

Então, $d_{C,R} = r$; logo, o ponto R pertence à circunferência.



R36. Observe a circunferência representada.



a. Determinar a equação dessa circunferência.

b. Indicar a posição dos pontos $A(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $B(-2, -2)$ em relação à circunferência.

c. Determinar os pares ordenados associados aos pontos pertencentes à circunferência e à bissetriz dos quadrantes ímpares.

▶ **Resolução**

a. A circunferência tem centro $C(0, 0)$ e medida de comprimento do raio $r = \sqrt{5}$.

Portanto, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 5$.

b. Vamos determinar a medida da distância entre cada ponto e o centro da circunferência:

$$d_{C,A} = \sqrt{(\sqrt{2} - 0)^2 + (\sqrt{3} - 0)^2}$$

$$d_{C,A} = \sqrt{5}$$

Então, $d_{C,A} = r$; logo, o ponto A pertence à circunferência.

$$d_{C,B} = \sqrt{(-2-0)^2 + (-2-0)^2}$$

$$d_{C,B} = \sqrt{8}$$

Como $\sqrt{8} > \sqrt{5}$, isto é, $d_{C,B} > r$, o ponto B é exterior à circunferência.

c. Precisamos determinar os pontos de intersecção entre a circunferência ($x^2 + y^2 = 5$) e a bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$). Então:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Para $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$, temos $y = \frac{\sqrt{10}}{2}$; para $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, temos $y = -\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Portanto, os pares ordenados procurados são $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades propostas

Registre em seu caderno

85. Indique a posição do ponto $P(-1, 2)$ em relação à circunferência de centro C e medida de comprimento r do raio, em que:

a. $C(2, 3)$ e $r = 3$; **85 a.** Exterior.

b. $C(-2, 2)$ e $r = 2$; **85 b.** Interior.

c. $C(-3, 1)$ e $r = \sqrt{5}$. **85 c.** Pertence.

86. Identifique a posição do ponto P em relação à circunferência nos seguintes casos:

a. $P(2, -1)$ e $x^2 + (y - 3)^2 = 4$; **86 a.** Exterior.

b. $P(2, 2)$ e $(x - 2)^2 + y^2 = 4$; **86 b.** Pertence.

c. $P(-1, 0)$ e $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$. **86 c.** Interior.

87. Se a equação de uma circunferência é $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$, calcule o valor de k para que o ponto $P(k, 1)$ esteja:

a. na circunferência; **87 a.** 4 ou 2.

b. no interior da circunferência. **87 b.** $2 < k < 4$

89 a. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{2}$ 89 b. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

88. **(ESA-2023)** Qual é a posição do ponto $P(5, 3)$ em relação à circunferência de centro $C(3, 1)$ e raio igual a 5 unidades?

a. Externo. 88. Alternativa **b.**

b. Interno, não coincidente com o centro.

c. Pertencente à circunferência.

d. Coincidente com o centro.

e. Excêntrico.

89. Sabendo que um quadrado tem vértices consecutivos $A(3, 3)$, $B(4, 2)$, $C(3, 1)$ e $D(2, 2)$, determine:

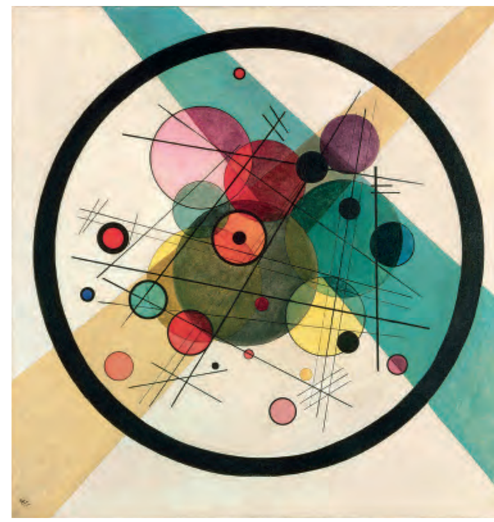
a. a equação da circunferência inscrita nesse quadrado;

b. a equação da circunferência circunscrita ao quadrado;

c. a medida da área da coroa circular formada pelas circunferências, em u^2. 89 c. $\frac{\pi}{2}$ u^2

Posição relativa entre reta e circunferência

Observe a reprodução da obra *Circles in a Circle* do artista russo Wassily Kandinsky (1866-1944). Note que algumas figuras representadas se parecem com circunferências com região interna colorida e outras se parecem com retas. Algumas dessas retas interceptam as circunferências, e outras, não.

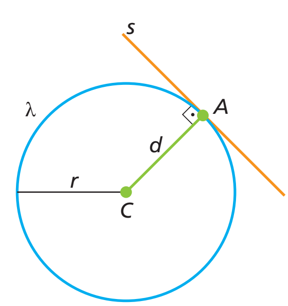
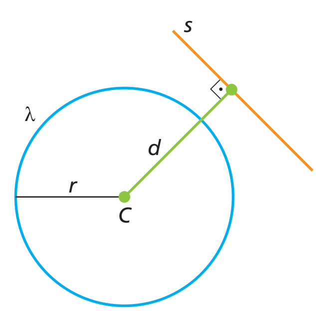
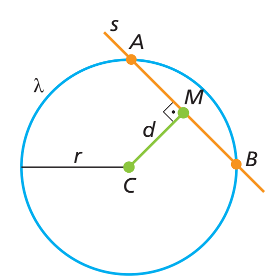


WASSILY KANDINSKY - MUSEU DE ARTE DA FILADÉLFIA, ESTADOS UNIDOS

KANDINSKY, Wassily. **Circles in a Circle**. 1923. Óleo sobre tela, 98,7 cm × 95,6 cm.

Dadas uma reta s e uma circunferência λ de centro $C(x_0, y_0)$ e raio de medida de comprimento r, ambas no mesmo plano, há três casos possíveis para a posição relativa entre s e λ, de acordo com a medida da distância d entre a reta e o centro da circunferência:

Posições relativas entre reta e circunferência

$d = r$	$d > r$	$d < r$
		
A reta s é tangente à circunferência λ.	A reta s é exterior à circunferência λ.	A reta s é secante à circunferência λ.

Com base nos três casos anteriores, concluímos que:

- se $d = r$, então $s \cap \lambda = \{A\}$ (s é tangente à circunferência λ);
- se $d > r$, então $s \cap \lambda = \varnothing$ (s é exterior à circunferência λ);
- se $d < r$, então $s \cap \lambda = \{A, B\}$ (s é secante à circunferência λ).

Observação

Lembre-se de que a medida da distância de uma reta s, de equação $ax + by + c = 0$, a um ponto $C(x_0, y_0)$ é dada por:

$$d_{C,\,s} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades resolvidas

R37. Determinar a posição relativa entre a reta *s* de equação $x + y + 1 = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.

▶ Resolução

Primeiro, vamos obter o centro e a medida de comprimento do raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ comparando-a com a equação geral: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

Como $-2a = 2$, então $a = -1$. Como $-2b = 2$, então $b = -1$.

Portanto, o centro da circunferência é $C(-1, -1)$.

Substituindo $a = b = -1$ em $a^2 + b^2 - r^2 = 1$, obtemos $r = 1$.

Agora, vamos calcular a medida da distância do centro da circunferência à reta *s*:

$$d_{C,s} = \frac{|1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $d_{C,s} < r$, então a reta *s* é secante à circunferência.

R38. Considere a equação geral da circunferência μ: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0$. Determinar a equação geral da reta *v* tangente a μ no ponto $P(-3, -1)$.

▶ Resolução

Vamos determinar as coordenadas do centro *C* da circunferência:

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 18 + 1 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$

Logo, $C(1, 1)$.

Lembremos que, se *v* é tangente a μ no ponto *P*, então *v* é perpendicular à reta que passa por $C(1, 1)$ e $P(-3, -1)$, que chamaremos de *w*.

Vamos determinar o coeficiente angular m_w da reta *w*:

$$m_w = \frac{-1 - 1}{-3 - 1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Com isso, podemos determinar o coeficiente angular m_v da reta *v*:

$$m_v = \frac{-1}{m_w} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Logo, a equação da reta *v* é: $y + 1 = -2(x + 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + y + 7 = 0$

Observações

Lembre-se:

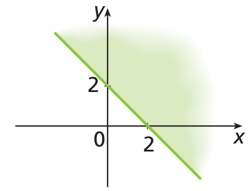
- Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ tais que $x_A \neq x_B$. O coeficiente angular da reta *r* determinada pelos pontos *A* e *B* é: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- Se *r* e *s* são retas perpendiculares, então:
$m_r \cdot m_s = -1$

R39. Representar no plano cartesiano o sistema de inequações:

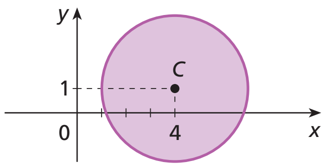
$$\begin{cases} x + y - 2 \geqslant 0 \\ (x - 4)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 9 \end{cases}$$

▶ Resolução

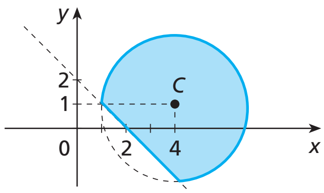
A inequação $x + y - 2 \geqslant 0$ representa um semiplano situado acima da reta $x + y = 2$, incluindo a própria reta. Portanto, temos a representação gráfica a seguir.



A inequação $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 9$ representa a reunião de todos os pontos da circunferência $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$ com todos os pontos interiores a ela. Como a circunferência tem centro $C(4, 1)$ e medida de comprimento do raio $r = 3$, temos esta representação gráfica.



A solução do sistema é a representação gráfica da intersecção dos dois conjuntos obtidos anteriormente. Logo, temos:



R40. Obter os valores de *k* para que a reta $y = x + k$ seja tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

▶ Resolução

Para determinar o(s) ponto(s) de intersecção entre a reta e a circunferência, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y = x + k \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Substituindo $y = x + k$ na equação da circunferência, obtemos:

$x^2 + (x + k)^2 - 9 = 0$

$x^2 + x^2 + 2kx + k^2 - 9 = 0$

$2x^2 + 2kx + (k^2 - 9) = 0$ (equação do 2º grau)

$\Delta = (2k)^2 - 4 \cdot 2(k^2 - 9)$

Devemos ter $\Delta = 0$, então:

$-4k^2 + 72 = 0 \Rightarrow k^2 = 18 \Rightarrow k = 3\sqrt{2}$ ou $k = -3\sqrt{2}$

Observação

Para haver tangência, a equação do 2º grau em *x* deve ter soluções iguais; por isso, a condição: $\Delta = 0$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

90. Determine, em cada caso, a posição relativa da reta s em relação à circunferência. Se houver pontos comuns (tangente ou secante), determine esses pontos.

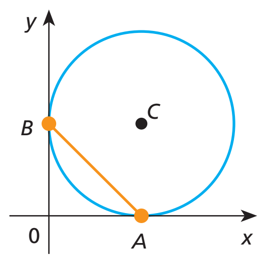
a. $s: x + y = 6$ e $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$ **90 a.** Tangente; $P(3, 3)$.

b. $s: x - y = 1$ e $x^2 + y^2 = 1$ **90 b.** Secante; $A(1, 0)$ e $B(0, -1)$.

c. $s: y = x + 3$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$ **90 c.** Exterior.

91. Para quais valores de k a reta $y = x + k$ é tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$? **91.** $-2\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$.

92. A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$ é tangente ao eixo x no ponto A e é tangente ao eixo y no ponto B. **92.** $4\sqrt{2}$ u



Determine a medida de comprimento de $\overline{AB}$, em u.

93. Respostas no *Suplemento para o professor*.

93. Represente graficamente no plano as inequações a seguir.

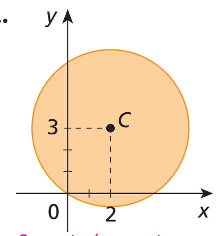
a. $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 \geqslant 9$ **b.** $(x - 4)^2 + y^2 < 16$

94. Qual é a medida da área do círculo representado pela inequação $x^2 + (y - 1)^2 - 1 \leqslant 0$, em u²? **94.** π u²

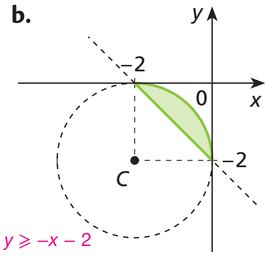
95. Qual é a medida do comprimento da circunferência representada pela equação $x^2 + y^2 = 25$, em u? **95.** 10π u

96. Escreva a inequação ou o sistema correspondente a cada representação gráfica. **96 a.** $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 13$

a.



b.



97. $\Delta > 0$: a reta é secante; $\Delta = 0$: a reta é tangente; $\Delta < 0$: a reta é exterior.

96 b. $\begin{cases} y \geqslant -x - 2 \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 4 \end{cases}$

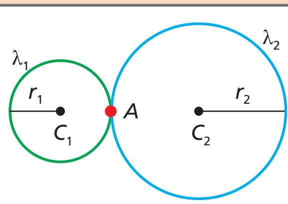
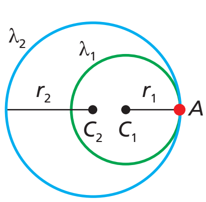
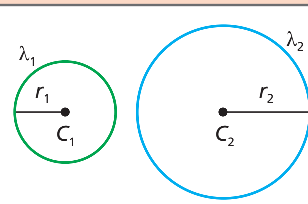
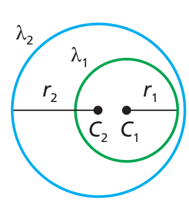
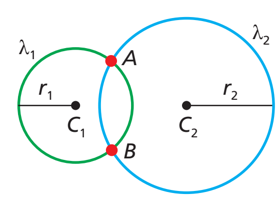
97. Para determinar a posição de uma reta relativa a uma circunferência, substituímos uma das variáveis, isolada na equação da reta, na equação da circunferência e obtemos, assim, uma equação do 2º grau.
Fazendo a análise do discriminante dessa equação do 2º grau, determine a posição da reta em relação à circunferência quando $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$.

98. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** **EM DUPLA** Elabore as equações de uma reta s e de uma circunferência λ. O problema consiste em determinar a posição relativa da reta e da circunferência. Troque-o com um colega para que um resolva o problema formulado pelo outro. Depois, destroquem os problemas para verificar a resolução. **98.** Resposta pessoal.

Posição relativa entre duas circunferências

Considerando duas circunferências, λ_1 e λ_2, distintas em um mesmo plano, podemos analisar a posição relativa entre λ_1 e λ_2 comparando a medida da distância d entre seus centros C_1 e C_2 com as medidas de comprimento r_1 e r_2 dos raios das respectivas circunferências:

Posições relativas entre duas circunferências

Circunferências tangentes	Circunferências disjuntas	Circunferências secantes
 exteriores $d = r_1 + r_2$  interiores $d = \lvert r_1 - r_2 \rvert$	 exteriores $d > r_1 + r_2$  interiores $0 \leqslant d < \lvert r_1 - r_2 \rvert$	 $\lvert r_1 - r_2 \rvert < d < r_1 + r_2$
um ponto em comum	nenhum ponto em comum	dois pontos em comum

Se duas circunferências são tangentes, é possível traçar um triângulo cujos vértices sejam o ponto de tangência e os centros das circunferências? **Questão**. Não, pois os pontos são colineares.

Para saber quantos são os pontos comuns entre duas circunferências, basta conhecer as medidas de comprimento de seus raios e a medida da distância entre seus centros. Para saber quais são esses pontos, é preciso resolver o sistema formado pelas equações a elas associadas.

Observe os exemplos.

a. Vamos determinar a posição relativa entre as circunferências definidas pelas equações $(x + 2)^2 + (y - 12)^2 = 169$ e $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25$.

Primeiro, determinamos os centros C_1 e C_2 e as medidas de comprimento dos raios r_1 e r_2 de cada circunferência.

Como $(x + 2)^2 + (y - 12)^2 = 169$, então $C_1(-2, 12)$ e $r_1 = 13$.

Escrevendo a equação reduzida da outra circunferência, temos:

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25 \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 25$$

Então, $C_2(0, 3)$ e $r_2 = 5$.

Agora, vamos determinar a medida da distância d entre os centros C_1 e C_2:

$$d = \sqrt{[0 - (-2)]^2 + (3 - 12)^2} = \sqrt{85}$$

Observe que $|13 - 5| < \sqrt{85} < 13 + 5$, ou seja: $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$

Portanto, as circunferências são secantes.

b. Vamos determinar a equação da circunferência de centro $C_1(-1, 0)$ e que tangencia exteriormente a circunferência de equação $(x + 3)^2 + y^2 = 1$.

Da equação $(x + 3)^2 + y^2 = 1$, temos $C_2(-3, 0)$ e $r_2 = 1$.

As circunferências são tangentes exteriores; então: $d = r_1 + r_2$

Vamos calcular a medida da distância d entre os centros das circunferências:

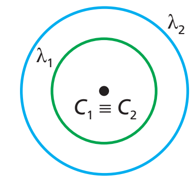
$$d = \sqrt{[-3 - (-1)]^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Como $r_2 = 1$, temos: $2 = r_1 + 1 \Rightarrow r_1 = 1$

Portanto, a equação da circunferência é $(x + 1)^2 + y^2 = 1$.

Observação

Quando $d = 0$, as circunferências λ_1 e λ_2 são **concêntricas**, ou seja, têm o mesmo centro.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades propostas

Registre em seu caderno

99. Em cada caso, determine mentalmente a posição relativa de duas circunferências cujas medidas de comprimento dos raios são r_1 e r_2, sabendo que d é a medida da distância entre seus centros.

a. $r_1 = 4$ cm; $r_2 = 2$ cm; $d = 2$ cm. **99 a.** Tangentes interiores.

b. $r_1 = 4$ cm; $r_2 = 2$ cm; $d = 5$ cm. **99 b.** Secantes.

c. $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 4$ cm; $d = 10$ cm. **99 c.** Tangentes exteriores.

d. $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 2$ cm; $d = 1$ cm. **99 d.** Disjuntas interiores.

e. $r_1 = 5$ cm; $r_2 = 3$ cm; $d = 0$ cm. **99 e.** Concêntricas.

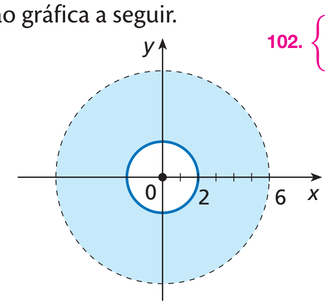
f. $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 4$ cm; $d = 12$ cm. **99 f.** Disjuntas exteriores.

100. Represente duas circunferências que tenham apenas um ponto de intersecção e uma reta que seja tangente a uma circunferência e secante à outra.
100. Resposta no *Suplemento para o professor*.

101. Obtenha, se existirem, os pares ordenados associados aos pontos comuns às circunferências de equações $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e $x^2 + y^2 - 16x = 48$.
101. Não há pontos comuns.

102. Escreva o sistema de inequações correspondente à representação gráfica a seguir.

102. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 36 \\ x^2 + y^2 \geqslant 4 \end{cases}$



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

103. Resolva graficamente os sistemas.

a. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25 \\ x - y \geqslant 5 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x > 0 \\ x^2 + y^2 - 10x < 0 \end{cases}$

103. Respostas no *Suplemento para o professor*.

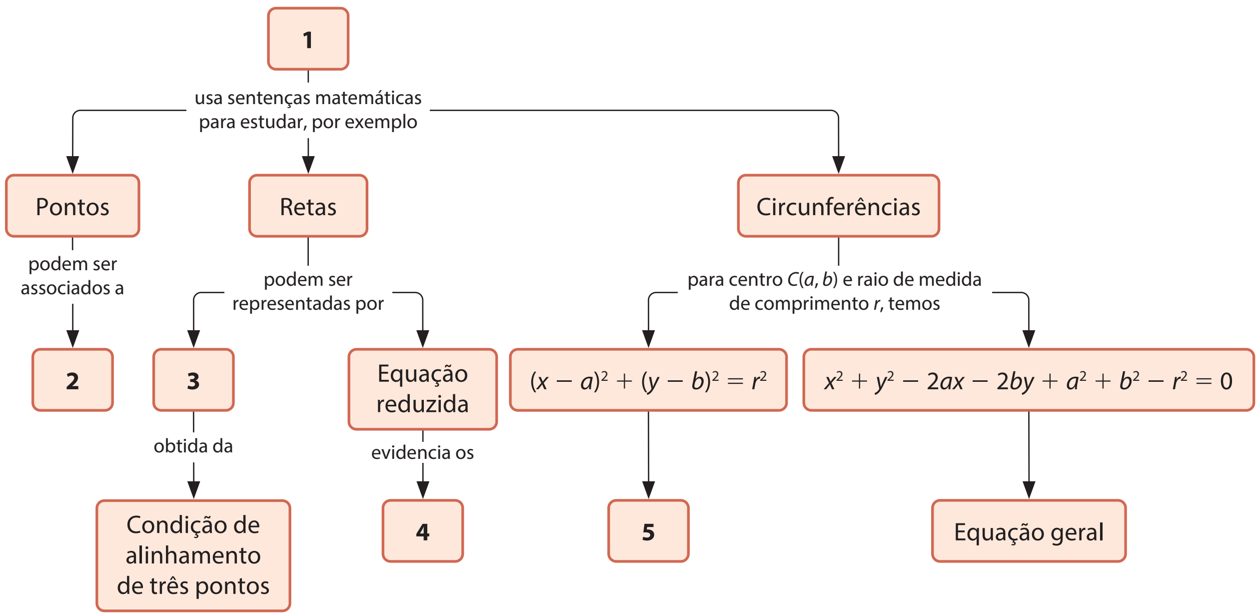
104. Qual é a equação da circunferência, cujo centro é a origem, tangente à reta de equação $4x + 3y = 20$? Calcule a medida da área, em u^2, da região limitada por essa circunferência.

104. $x^2 + y^2 = 16$; 16π u^2.

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Equação geral

B. Coeficientes angular e linear

C. Equação reduzida **Conexões entre conceitos.** A – 3; B – 4; C – 5; D – 2; E – 1.

D. Pares ordenados

E. Geometria analítica

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livros

O diabo dos números: um livro de cabeceira para todos aqueles que têm medo de Matemática

Hans Magnus Enzensberger

São Paulo: Cia. das Letras, 1997.

A Matemática se resume a uma montanha de números? E os cálculos, para que servem? O autor, um dos maiores poetas da língua alemã, escreveu esse livro pensando em quem tem medo de Matemática e não gosta de estudá-la. Robert, personagem que conduz a história, também pensava que os números eram monstruosos, absurdos e inúteis. Mas, um dia, ele começou a sonhar com Teplotaxl, um senhor do tamanho de um gafanhoto com aparência de diabo, que brinca com os números e surpreende com seus conhecimentos matemáticos. As situações sonhadas pelo menino apresentam vários assuntos vistos na escola, como a relação de Euler e a sequência de Fibonacci, de maneira curiosa e divertida. A leitura amplia o universo de conhecimentos de todos os leitores.

A Matemática das coisas

Nuno Grato

São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro explora exemplos da importância da Matemática no dia a dia, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Alternativa c.

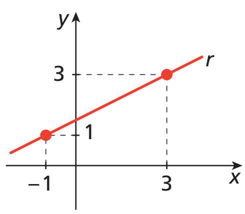
Q1. O polígono de vértices $A(2, 0)$, $B(1, 1)$, $C(1, 5)$ e $D(0, 3)$ é um:

a. trapézio.
b. retângulo.
c. quadrilátero.
d. paralelogramo.

Q2. A medida da distância, em u, entre os pontos $A(1, -5)$ e $B(6, -2)$ é: Q2. Alternativa a.

a. $\sqrt{34}$ **b.** 36 **c.** $\sqrt{108}$ **d.** 6

Q3. Para que uma reta s seja paralela à reta r, representada a seguir, o coeficiente angular de s deve ser ▬.
Q3. Alternativa b.



a. igual a -2
b. igual a $\frac{1}{2}$
c. igual a $-\frac{1}{2}$
d. diferente de $\frac{1}{2}$

Q4. As retas de equações $y = \frac{1}{2}x + 11$ e $y = -2x - 6$ são:
Q4. Alternativa a.

a. concorrentes perpendiculares.
b. concorrentes não perpendiculares.
c. paralelas coincidentes.
d. paralelas distintas.

Q5. A medida da distância, em u, entre o ponto $A(1, 0)$ e a reta $y = x$ é: Q5. Alternativa c.

a. $\sqrt{2}$ **b.** 1 **c.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d.** 2

Q6. A medida da área do quadrilátero de vértices $A(0, 2)$, $B(0, 0)$, $C(2, 0)$ e $D(3, 5)$, em u^2, é: Q6. Alternativa c.

a. 2^1 **b.** 2^2 **c.** 2^3 **d.** 2^4

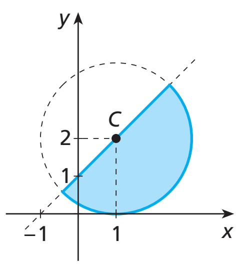
Q7. O centro e a medida de comprimento do raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x = 0$ são: Q7. Alternativa a.

a. $C(3, 0)$ e $r = 3$.
b. $C(0, 0)$ e $r = 6$.
c. $C(0, 3)$ e $r = 3$.
d. $C(0, 0)$ e $r = 3$.

Q8. Para que a equação $mx^2 + 4y^2 + 8x + 12y + 10 = 0$ represente uma circunferência, devemos ter: Q8. Alternativa b.

a. $m = 8$
b. $m = 4$
c. $m = 12$
d. $m = 2$

Q9. A figura a seguir é a representação gráfica do sistema de inequações dado por: Q9. Alternativa a.



a. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 2 \\ x - y - 1 < 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 16 \\ 2x - y + 1 > 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1 \\ x - y + 2 < 0 \end{cases}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9
Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.	X								
Calcular a medida da distância entre dois pontos.		X							
Escrever as equações de uma reta e de uma circunferência.			X				X	X	
Identificar posições relativas entre elementos como ponto, reta e circunferência.			X	X					
Calcular a medida da distância entre ponto e reta.					X				
Calcular a medida da área de triângulos usando determinantes.						X			
Resolver inequações do 1º grau com duas incógnitas e sistemas, graficamente.									X

Capítulo 8

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

MISTERSTOCK/SHUTTERSTOCK

Parte de um dos murais do Palácio de Alhambra.

COLORMAKER/SHUTTERSTOCK

Palácio de Alhambra, em Granada, Espanha. Foto de 2022.

Transformações geométricas

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

Além da grandiosidade, o Palácio de Alhambra, localizado na cidade de Granada, na Espanha, tem a arquitetura e a decoração islâmica como atrativos históricos e turísticos.

Analise a parte de um dos murais desse palácio apresentada nesta página. Essa parte é constituída de figuras que se repetem, formando um padrão e preenchendo todo o plano.

A construção geométrica de uma figura congruente ou semelhante a outra figura no plano, respeitando-se algumas regras, é chamada de **transformação geométrica.**

As transformações geométricas são aplicadas em muitas áreas do conhecimento, como em Matemática, Química, Engenharia, Arquitetura, Artes, Física, Biologia, entre outras.

Confira estes exemplos de transformações geométricas presentes na parte do mural do Palácio de Alhambra apresentada na página anterior.

MISTERSTOCK/SHUTTERSTOCK

No início da década de 1920, Escher visitou o Palácio de Alhambra e encantou-se com os murais que decoravam o palácio. Isso o motivou a trabalhar as transformações geométricas em suas obras.

Observação

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) foi um artista gráfico holandês conhecido por suas obras com conceitos geométricos.

Analise a reprodução de um quadro de Escher.

© 2024 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

ESCHER, Maurits Cornelis. **Regular Division Reptiles**. 1942. Aquarela, 34 cm × 45 cm.

A figura do lagarto se repete, formando um padrão em todo o plano da obra.

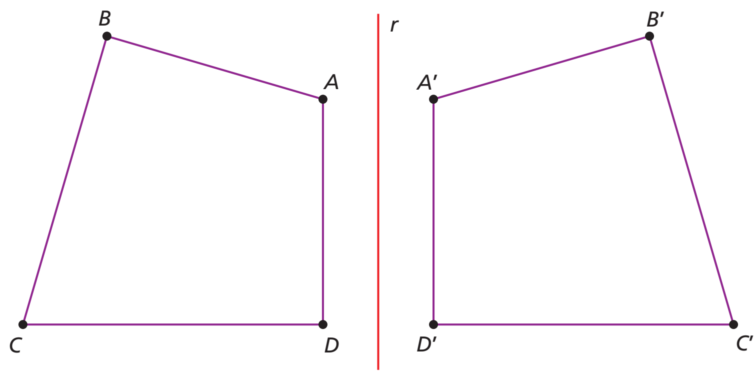
Seja um plano α. Uma **transformação geométrica** T é uma função $T: \alpha \to \alpha$ que associa a um ponto $P \in \alpha$ outro ponto $P' \in \alpha$, tal que $T(P) = P'$. O ponto P' é a **imagem** de P.

Observação

Usando a notação da teoria de função e nomeando a transformação geométrica do exemplo **a** como T, podemos dizer que $T(A) = A'$, $T(B) = B'$, $T(C) = C'$ e $T(D) = D'$.

Analise estes exemplos de transformações geométricas.

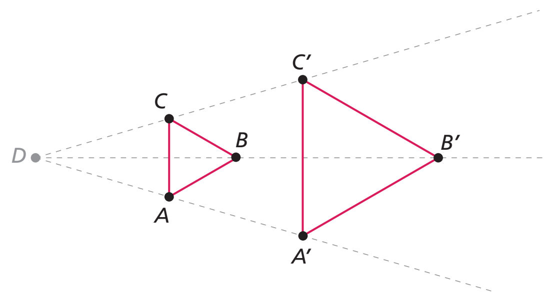
a. O quadrilátero $A'B'C'D'$ é a imagem do quadrilátero $ABCD$ por uma transformação geométrica.



Usando uma régua e um transferidor, meça o comprimento dos lados e a abertura dos ângulos internos correspondentes dos quadriláteros $A'B'C'D'$ e $ABCD$. A figura $A'B'C'D'$ é congruente à figura $ABCD$ original?

Questão 1. Os segmentos correspondentes são congruentes, pois $AB = A'B' = 3$ cm, $AD = A'D' = 3$ cm, $BC = B'C' = 4$ cm e $CD = C'D' = 4$ cm. Os ângulos internos correspondentes são congruentes, pois: $m(\hat{A}) = m(\hat{A'}) \simeq 106°$, $m(\hat{B}) = m(\hat{B'}) = 90°$, $m(\hat{C}) = m(\hat{C'}) \simeq 74°$ e $m(\hat{D}) = m(\hat{D'}) = 90°$. Portanto, os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são congruentes.

b. O triângulo $A'B'C'$ é a imagem do triângulo ABC por uma transformação geométrica.



Usando uma régua e um transferidor, meça o comprimento dos lados e a abertura dos ângulos internos correspondentes dos triângulos $A'B'C'$ e ABC. Em seguida, mostre que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$, em que $k \in \mathbb{R}$. O triângulo $A'B'C'$ é semelhante ao triângulo ABC original?

Questão 2. Os ângulos internos correspondentes são congruentes, pois: $m(\hat{A}) = m(\hat{A'}) = 60°$, $m(\hat{B}) = m(\hat{B'}) = 60°$ e $m(\hat{C}) = m(\hat{C'}) = 60°$. Como $AB = BC = AC = 1$ cm e $A'B' = B'C' = A'C' = 2$ cm, temos: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{2}$ Os segmentos correspondentes são proporcionais. Portanto, o triângulo $A'B'C'$ é semelhante ao triângulo ABC.

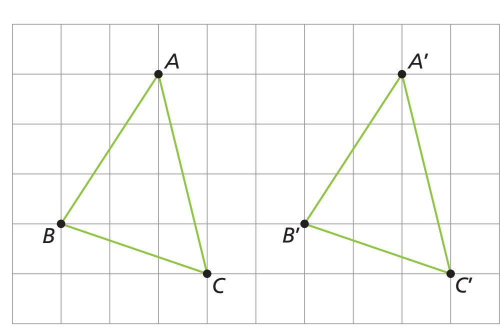
Neste capítulo, trabalharemos dois tipos de transformações geométricas no plano: as que geram uma figura congruente à original e as que geram uma figura semelhante mas não congruente à original.

Isometrias

As **isometrias** ou **transformações isométricas** são transformações que têm a propriedade de preservar a **medida da distância** entre pontos e gerar uma figura congruente à figura original.

O triângulo $A'B'C'$ é uma isometria ou uma transformação isométrica do triângulo ABC.

Como $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e $AC = A'C'$ e os ângulos internos correspondentes são congruentes, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A seguir, falaremos sobre os principais tipos de isometria no plano: as reflexões, as translações e as rotações.

Reflexões

Existem dois tipos de reflexão: em relação a uma reta ou em relação a um ponto. Vamos analisar cada caso.

Reflexão em relação a uma reta

Observe as imagens a seguir.

GARY HERSHORN/GETTY IMAGES

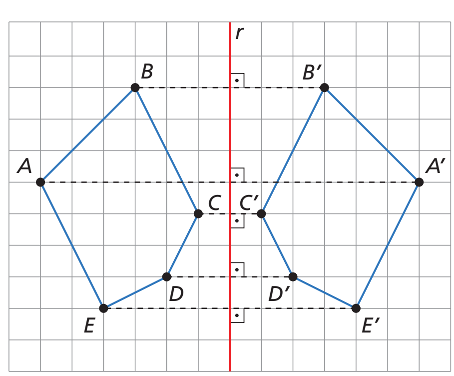
Destaque de parte da foto; sem alteração de medidas, com inclusão de reta *r* e contornos em vermelho.

Ponte do Brooklin na cidade de Nova Iorque. Foto de 2020.

Observe que, da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda, o contorno do portal é simétrico em relação à reta *r*. Ou seja, a imagem do contorno, por reflexão em relação à reta *r*, coincide com ele próprio.

Sejam uma reta *r* e um ponto *P* pertencentes a um plano α. Uma reflexão de *P* em relação à reta *r* gera um ponto *P*' em α se, e somente se, *r* é mediatriz do segmento $\overline{PP'}$. Dizemos que *P*' é a **reflexão** ou o **simétrico** do ponto *P* **em relação à reta** *r*. Se o ponto *P* pertencer à reta *r*, o simétrico de *P* será o próprio ponto *P*.

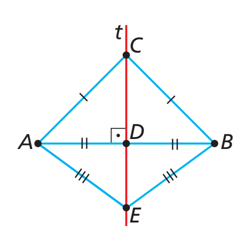
No exemplo a seguir, a reta *r* é a mediatriz de qualquer segmento de reta que tem como extremidades um ponto do polígono *ABCDE* e sua imagem no polígono *A*'*B*'*C*'*D*'*E*'. Logo, *r* é mediatriz dos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$. Assim, podemos dizer que a figura *A*'*B*'*C*'*D*'*E*' é uma reflexão da figura *ABCDE* em relação à reta *r*.



Em uma reflexão, o ponto *P*', imagem de um ponto *P* em relação a uma reta, é o simétrico do ponto *P*. O ponto *P*, por sua vez, é o simétrico de *P*'. A reta de reflexão também é conhecida como **eixo de reflexão** ou **eixo de simetria.** A simetria em relação a uma reta pode ser chamada de **simetria axial.**

Observação

A reta que passa pelo ponto médio de um segmento e é perpendicular a ele é chamada **mediatriz** do segmento. Também podemos definir a mediatriz como o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de dois pontos fixos e distintos desse mesmo plano. Na figura a seguir, observe que os pontos *C*, *D* e *E* pertencentes à reta *t*, que é mediatriz do segmento $\overline{AB}$, equidistam dos pontos *A* e *B*. Isso ocorre com qualquer ponto que pertence à reta *t*.

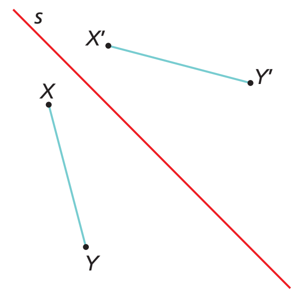


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Cada ponto do segmento $\overline{XY}$ tem seu simétrico no segmento $\overline{X'Y'}$.

Observe outro exemplo de reflexão em relação a uma reta.



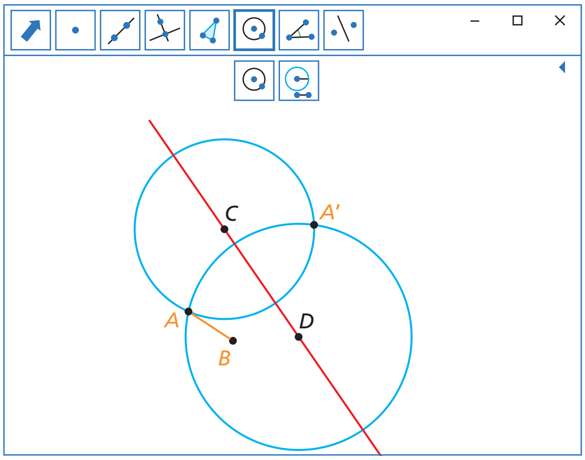
O segmento $\overline{X'Y'}$ é simétrico ao segmento $\overline{XY}$ e, reciprocamente, o segmento $\overline{XY}$ é simétrico ao segmento $\overline{X'Y'}$. A reta *s* é o eixo de simetria.

Verifique a seguir como construir o simétrico de um segmento, em relação a uma reta, utilizando um *software* de Geometria dinâmica.

Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma reta $\overleftrightarrow{CD}$, vamos construir o segmento $\overline{A'B'}$, simétrico a $\overline{AB}$.

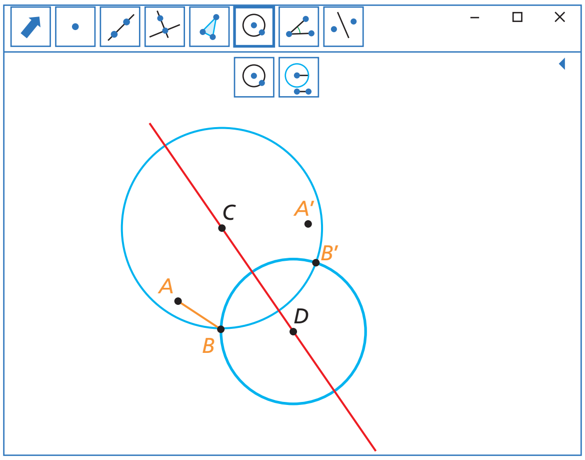
1. Definidos o segmento $\overline{AB}$ e a reta $\overleftrightarrow{CD}$, construímos a circunferência de centro *C* e raio $\overline{CA}$ e a circunferência de centro *D* e raio $\overline{DA}$. Uma das intersecções dessas circunferências é o ponto *A*. A outra intersecção é o ponto *A*', simétrico de *A*.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

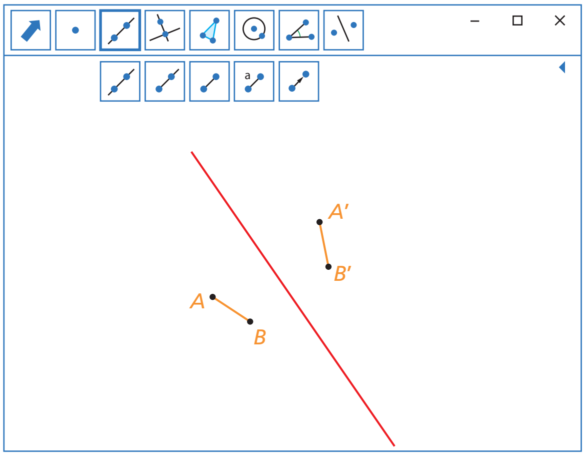


2. Usamos uma ferramenta do *software* para ocultar as construções auxiliares a fim de melhor compreender os próximos passos da construção principal.

   Em seguida, construímos a circunferência de centro *C* e raio $\overline{CB}$ e a circunferência de centro *D* e raio $\overline{DB}$. Uma das intersecções dessas circunferências é o ponto *B*. A outra intersecção é o ponto *B*', simétrico de *B*.



3. Traçamos o segmento $\overline{A'B'}$, que é o simétrico de $\overline{AB}$, e ocultamos as circunferências do passo anterior, bem como os pontos *C* e *D*.

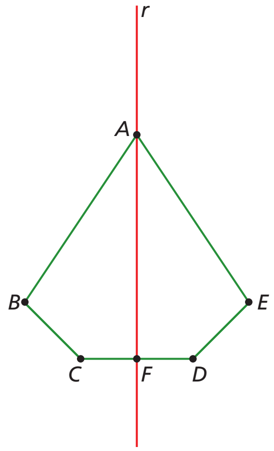


Com essa construção geométrica, podemos perceber que, para determinar o simétrico de um segmento, basta determinar os simétricos das extremidades do segmento e, depois, com as extremidades determinadas, traçar o segmento simétrico.

Figuras com simetria de reflexão

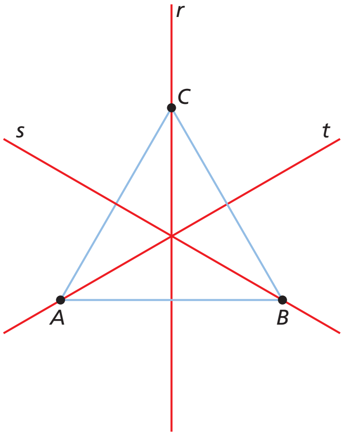
Observe algumas figuras que apresentam simetria de reflexão. Note que algumas delas têm mais de um eixo de simetria.

a.



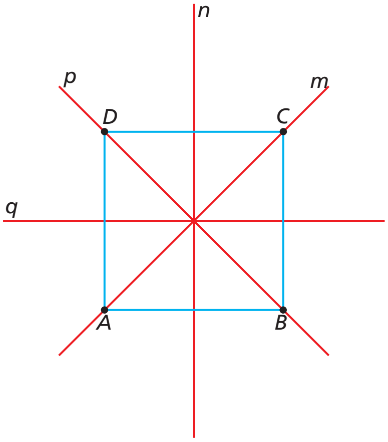
Os pontos *A* e *F* pertencem ao pentágono e à reta *r*, que é o eixo de simetria dessa figura.

b.



O triângulo equilátero tem três eixos de simetria.

c.



O quadrado tem quatro eixos de simetria.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

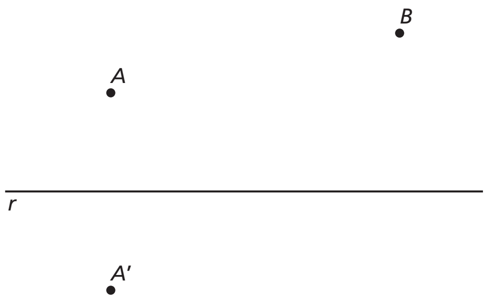
Atividade resolvida

R1. Determinar um ponto *C* na reta *r*, de modo que a medida da distância do ponto *A* ao ponto *B*, passando por *C*, seja a menor possível.

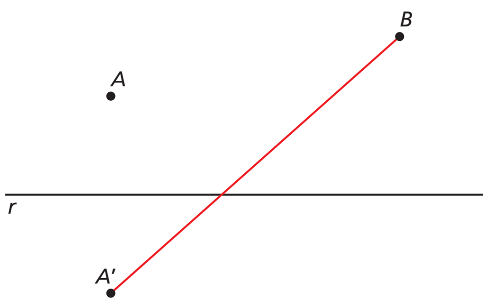
▶ **Resolução**

Primeiro, devemos lembrar que a menor medida de distância entre dois pontos é a medida do segmento de reta que tem esses pontos como extremidades. Assim, se conseguirmos obter um segmento de reta com extremidades em *A* e *B* que passe por *C*, teremos a solução do problema. Como isso não é possível, pois os três pontos não são colineares, podemos resolver o problema com o simétrico do ponto A em relação à reta r.

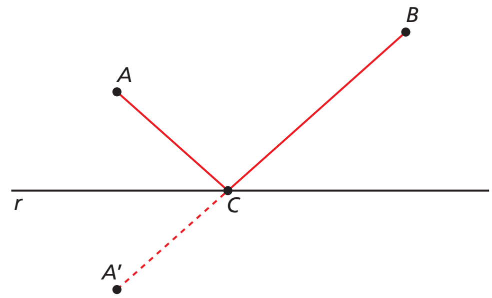
Construímos o ponto A', que é o simétrico do ponto A em relação à reta r.



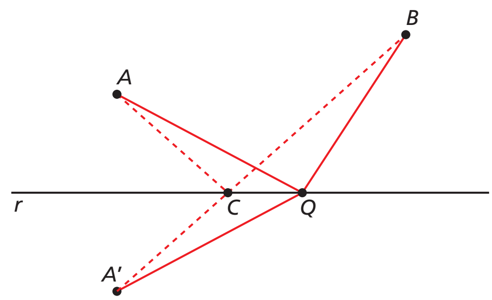
Feito isso, vamos traçar o segmento $\overline{A'B}$.



A intersecção entre o segmento $\overline{A'B}$ e a reta r é o ponto C que procuramos, pois r é a mediatriz de $\overline{AA'}$; logo, $A'C = AC$.



Analise o que aconteceria se escolhêssemos um ponto Q, diferente de C, na reta r.



Note que $A'C + CB$ é menor que $A'Q + QB$, qualquer que seja Q pertencente à reta r, pois C está contido no segmento $\overline{A'B}$ cuja medida de comprimento corresponde à menor medida de distância entre A' e B.

Portanto, o ponto de intersecção entre a reta r e o segmento $\overline{A'B}$, tal que A' é o simétrico de A em relação à reta r, é o ponto C, para o qual $AC + CB$ é mínimo.

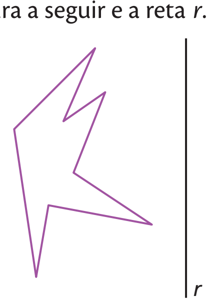
Observação

A **atividade resolvida R1** poderia ter sido resolvida usando o mesmo procedimento, porém com o simétrico do ponto B em relação à reta r.

Atividades propostas

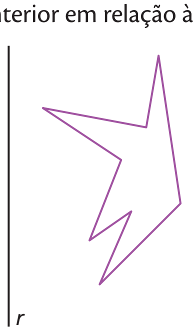
Registre em seu caderno

1. Considere a figura a seguir e a reta r. **1.** Alternativa **c.**

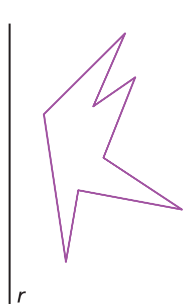


Qual das alternativas apresenta a figura simétrica à figura anterior em relação à reta r?

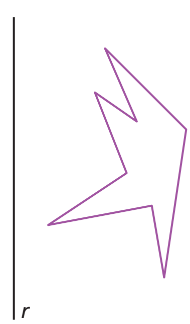
a.



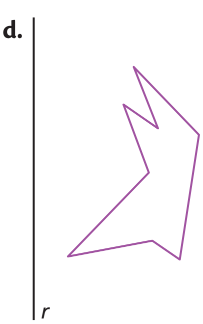
b.



c.



d.

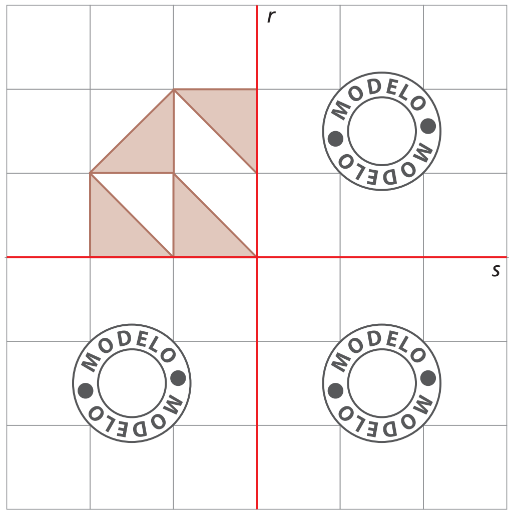


2. Leia o texto a seguir e depois faça o que se pede.

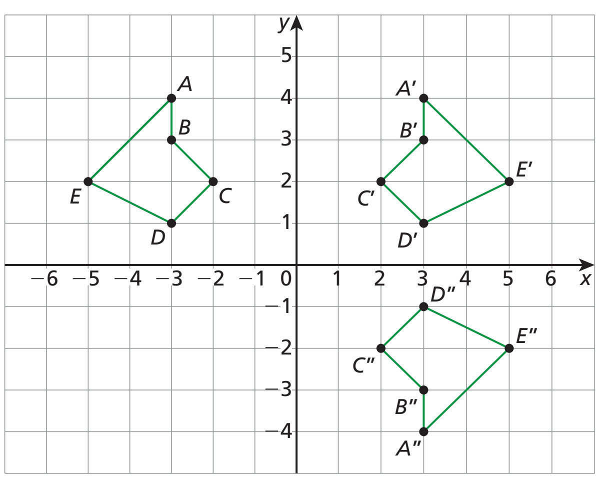
Uma empresa solicitou a um *designer* que fizesse um logotipo. Para realizar o trabalho, ele traçou um quarto do projeto e pensou: "Vou fazer duas reflexões para concluir o desenho; primeiro, em relação à reta r; depois, com a figura original e a obtida na primeira reflexão, faço outra reflexão em relação à reta s".

Copie em uma malha quadriculada a figura que se refere a um quarto do projeto e desenhe as duas reflexões que o *designer* pensou para obter o logotipo encomendado pela empresa.

2. Resposta no *Suplemento para o professor*.



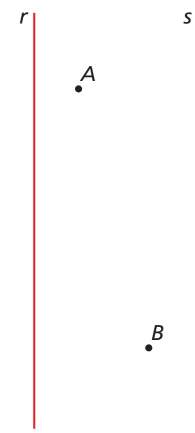
3. Uma figura pode ser obtida por meio de uma composição de reflexões. Por exemplo, no plano cartesiano a seguir, o polígono *A'B'C'D'E'* é a reflexão do polígono *ABCDE* em relação ao eixo das ordenadas. O polígono *A"B"C"D"E"*, por sua vez, é a reflexão do polígono *A'B'C'D'E'* em relação ao eixo das abscissas. Assim, podemos dizer que o polígono *A"B"C"D"E"* é uma reflexão do polígono *ABCDE*, primeiro, em relação ao eixo das ordenadas e, posteriormente, ao eixo das abscissas.



Pensando nessa ideia, um triângulo *PQR*, que está em um plano cartesiano, foi submetido a duas reflexões: primeiro, em relação ao eixo das abscissas; depois, em relação ao eixo das ordenadas. Assim, foi gerado um triângulo com vértices nos pontos *P*"(−1, −4), *Q*"(−2, −1) e *R*"(−7, −5). Determine as coordenadas dos pontos *P*, *Q* e *R* do triângulo original. 3. *P*(1, 4), *Q*(2, 1) e *R*(7, 5).

4. Uma fonte luminosa emite raios de luz em todas as direções, e esses raios seguem em linha reta a partir dela. Uma fonte está localizada no ponto *A* da figura entre dois espelhos paralelos representados pelas retas *r* e *s*. Copie a figura e, com régua e compasso, desenhe e explique a trajetória que um raio de luz deve percorrer até atingir o ponto *B*, após refletir uma vez em cada espelho. Atenção! Cuidado ao usar o compasso.

Considere que o meio em que está sendo propagada a luz é o mesmo em toda a sua trajetória.



4. Resposta no *Suplemento para o professor*.

5. **SOFTWARE** Em um *software* de Geometria dinâmica, construa um segmento $\overline{PQ}$ e o seu simétrico $\overline{P'Q'}$ em relação a uma reta *s*. Depois, selecione o segmento $\overline{PQ}$ e movimente-o com o botão. Em seguida, faça o mesmo com o segmento $\overline{P'Q'}$, com a reta *s*, com um ponto da reta *s* e, finalmente, com o ponto *P*. Descreva o que você observou em cada movimento. 5. Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão em relação a um ponto

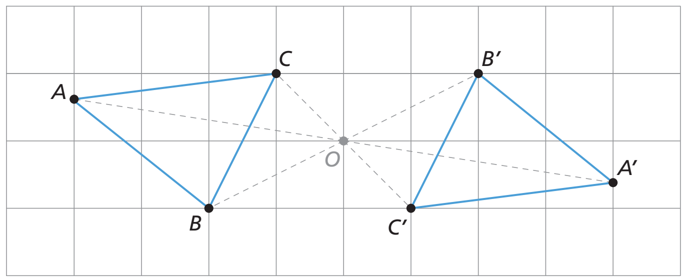
Analise a reprodução de uma obra de Rza Abbasi. Na obra, o artista usou a **reflexão em relação a um ponto**.

MUSEU NACIONAL DE ARTE ASIÁTICA DO SMITHSONIAN INSTITUTION, WASHINGTON, D.C

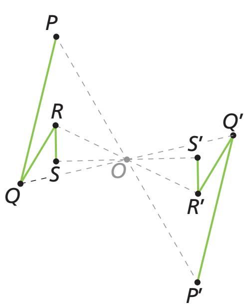
ABBASI, Rza. **Quatro cavalos**. 1616. Tinta sobre papel, 12 cm × 15,4 cm.

No exemplo a seguir, o triângulo $A'B'C'$ é simétrico ao triângulo ABC em relação ao ponto O. Para isso, a medida da distância do ponto A ao ponto O deve ser igual à medida da distância de A' ao ponto O. Note que o mesmo ocorre com os pontos B e C em relação aos pontos B' e C', respectivamente. Isso significa que o ponto O é o ponto médio dos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$. De forma genérica, o ponto O é também o ponto médio do segmento $\overline{XX'}$, sendo X um ponto qualquer do triângulo ABC, e X', o seu simétrico pertencente ao triângulo $A'B'C'$.

O ponto O é chamado de **centro de reflexão**. Dizemos, por exemplo, que o ponto A' é simétrico ao ponto A em relação ao ponto O, e, reciprocamente, o ponto A é simétrico ao ponto A'.



Sejam os pontos O e P pertencentes a um plano α. Uma reflexão de P em relação ao ponto O gera um ponto P' em α se, e somente se, O é ponto médio do segmento $\overline{PP'}$. Dizemos que P' é a **reflexão** ou o **simétrico** do ponto P **em relação ao ponto** O. Se o ponto P coincidir com o ponto O, a reflexão do ponto P ou o simétrico de P em relação ao ponto O será o próprio ponto P.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

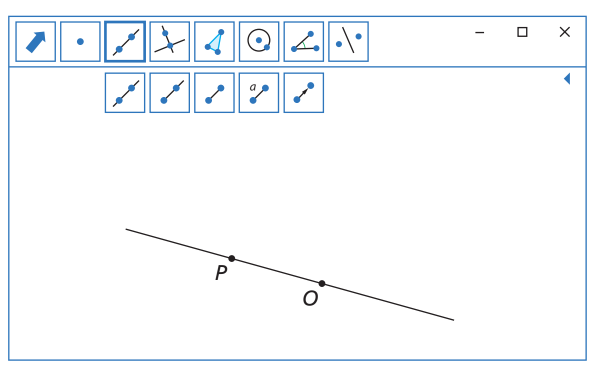
Observe outro exemplo de reflexão em relação a um ponto.

A figura $P'Q'R'S'$ é simétrica à figura $PQRS$ em relação ao ponto O.

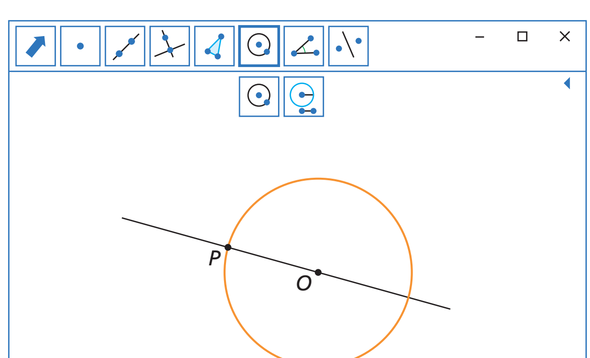
Acompanhe a seguir a construção do simétrico P' de um ponto P em relação a um centro de reflexão O, utilizando um *software* de Geometria dinâmica.

Dados um ponto O, centro de reflexão, e um ponto P, vamos construir o ponto P', simétrico de P em relação a O.

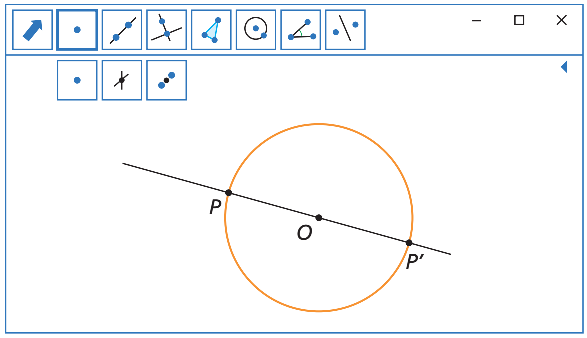
1. Definidos os pontos P e O, traçamos a reta $\overleftrightarrow{PO}$.



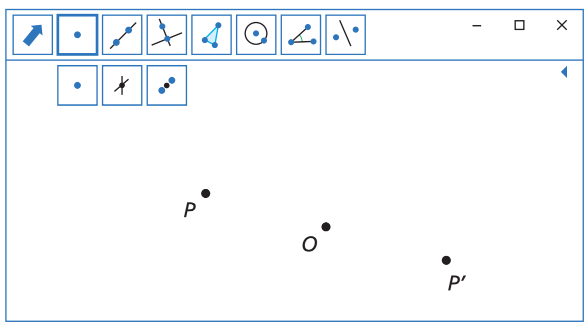
2. Construímos a circunferência de centro O e raio $\overline{OP}$.



3. Há duas intersecções entre a reta $\overleftrightarrow{PO}$ e a circunferência de centro O e raio $\overline{OP}$, sendo uma delas o ponto P. A outra será o ponto P', simétrico de P em relação a O.



4. Ocultamos as construções auxiliares, deixando apenas o ponto P, o seu simétrico P' e o centro de reflexão O.



Questão. Ao movimentar o ponto P, o ponto P' também se movimentará, mantendo a simetria em relação ao ponto O.

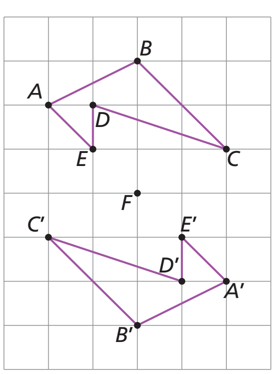
Se for possível, use um *software* de Geometria dinâmica para fazer essa construção. Ao terminar, clique no botão e movimente o ponto P. O que você verificou com esse movimento?

Atividades propostas

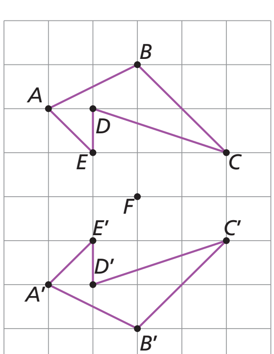
Registre em seu caderno

6. Em qual das alternativas a figura $A'B'C'D'E'$ é simétrica da figura $ABCDE$ em relação ao ponto F? **6.** Alternativa **a.**

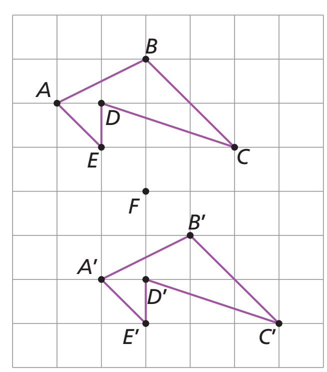
a.



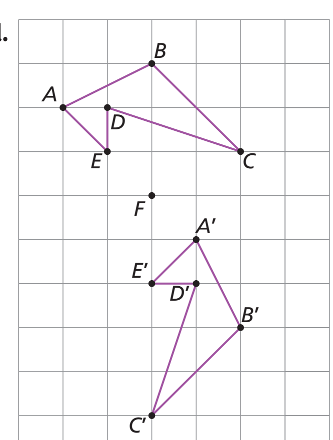
b.



c.



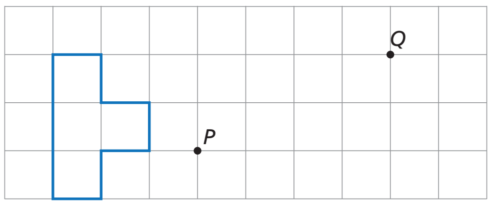
d.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

7. Resposta no *Suplemento para o professor*.

7. Uma figura pode ser obtida por meio de uma composição de reflexões em relação a pontos no plano. Pensando nessa ideia, em uma malha quadriculada, copie a figura e os pontos *P* e *Q*. Depois, faça uma reflexão da figura em relação ao ponto *P* e, com a figura obtida, faça outra reflexão em relação ao ponto *Q*.



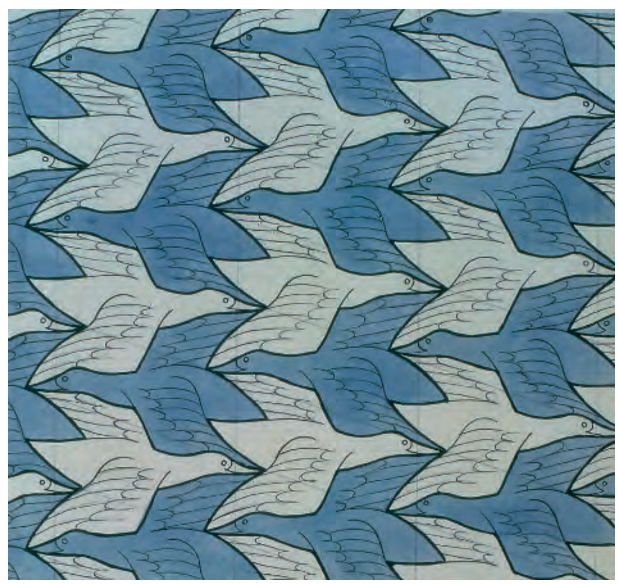
8. Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

8. **EM GRUPO** Em um papel quadriculado, trace um polígono qualquer *ABCD*. Depois, construa o polígono *A'B'C'D'* simétrico ao polígono *ABCD* em relação a um ponto *P* qualquer do plano. Com a figura obtida, construa o polígono *A"B"C"D"*, simétrico em relação a um ponto *Q* qualquer do plano, não coincidente a *P*.

Meça o comprimento dos segmentos $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$, $\overline{CC''}$ e $\overline{DD''}$ e escreva o que você observou quanto às medidas apuradas e à posição do polígono *A"B"C"D"* em relação ao polígono *ABCD*. Converse com os colegas da turma e verifique se chegaram à mesma conclusão que você.

Translações

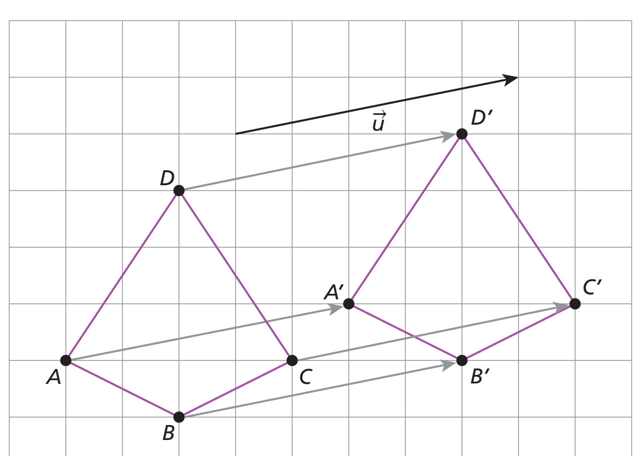
Observe a reprodução de outra obra de Escher.



ESCHER, Maurits Cornelis. **Dois pássaros**. 1938. Aquarela, 34 cm × 45 cm.

Note que tanto os pássaros de cor cinza quanto os de cor azul se repetem, preenchendo o plano e formando um padrão. Esse padrão é resultado de uma transformação geométrica chamada de **translação**.

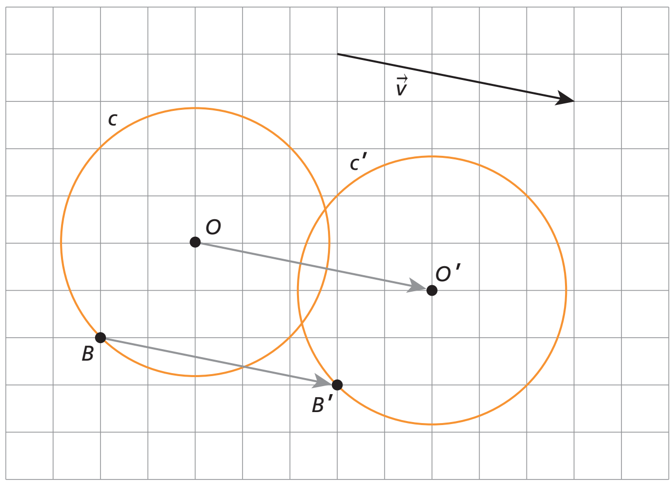
Na figura a seguir, dizemos que o polígono *A'B'C'D'* é uma translação do polígono *ABCD* determinada pelo vetor $\vec{u}$.



Todos os pontos da figura original foram transladados por vetores que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo do vetor $\vec{u}$. Assim, $\vec{u}$ é representado por todos esses vetores.

Sejam um vetor $\vec{w}$ e o ponto P pertencentes a um plano α. Se no ponto P for posicionada a origem do vetor $\vec{w}$, obtém-se o ponto P' em sua extremidade. Pode-se chamar o ponto P' de **translação** de P ou imagem de P determinada pelo vetor $\vec{w}$.

Observe um exemplo de translação a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A circunferência c' é uma translação da circunferência c determinada pelo vetor $\vec{v}$. Cada ponto da circunferência c é transladado na mesma direção, no mesmo sentido e do mesmo módulo do vetor $\vec{v}$.

Como você faria para transladar uma circunferência c de centro O por um vetor $\vec{a}$?

Questão. Para fazer a translação da circunferência c, basta obter O', translação do centro O determinada pelo vetor $\vec{a}$. Depois, traçar a circunferência com a ponta-seca do compasso em O' e abertura igual à medida do comprimento do raio da circunferência c.

Arte indígena Baniwa

OBJETO DIGITAL
Podcast: Arte indígena

O *podcast* enriquece o contexto deste tópico apresentando uma entrevista em que Daniel Munduruku, filho do povo indígena Munduruku, escritor e professor, graduado em Filosofia e licenciado em História e Psicologia, explica sobre a importância da arte indígena como forma de expressão cultural desse povo.

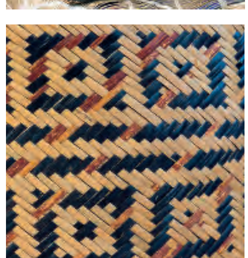
Os **Baniwa**, indígenas que habitam a região Norte do Brasil nas proximidades do Rio Negro, têm como tradição a produção de cestos, balaios, jarros e peneiras. As matérias-primas empregadas na confecção desses utensílios são as fibras de uma planta chamada **arumã** e pigmentos para colorir, extraídos de outras plantas.

Grande parte da arte indígena brasileira é rica em figuras geométricas. Nos utensílios produzidos pelos Baniwa, é possível identificar algumas transformações geométricas que estamos estudando.

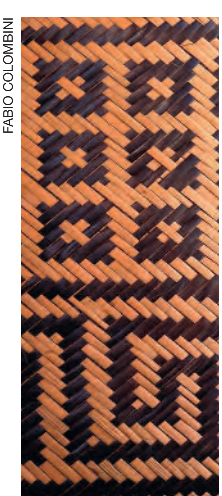
ISMAR INGBER/PULSAR IMAGENS

RITA BARRETO/FOTOARENA

FABIO COLOMBINI



FABIO COLOMBINI



ATENÇÃO! AS IMAGENS ESTÃO REPRESENTADAS SEM PROPORÇÃO ENTRE ELAS.

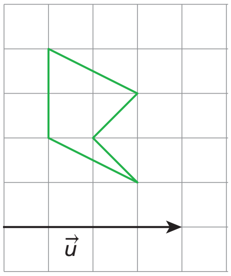
Transformações geométricas presentes em utensílios produzidos pelos Baniwa.

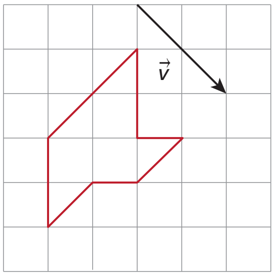
9. Respostas no *Suplemento para o professor*.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

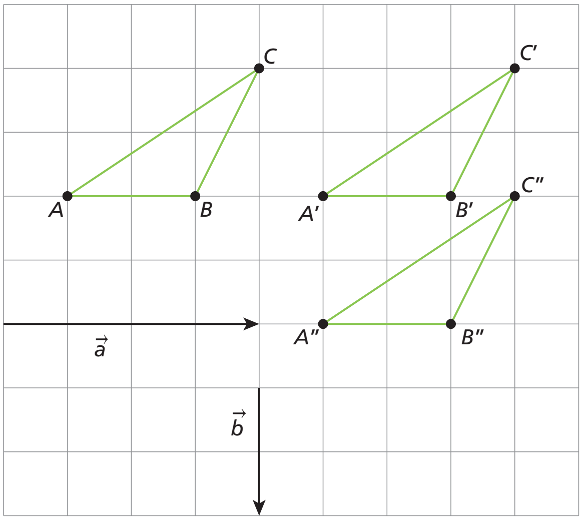
9. Copie as figuras a seguir em papel quadriculado. Depois, faça a translação da figura de cada item em relação ao vetor indicado.

a. 

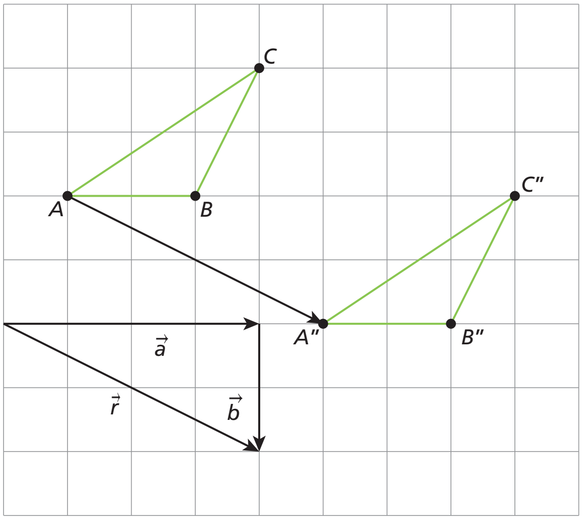
b. 

10. Leia o texto e faça o que se pede.

Uma translação pode ser obtida pela composição de duas ou mais translações. Na figura a seguir, note que o triângulo *ABC* foi transladado 4 u da malha quadriculada para a direita, na direção horizontal, e depois o triângulo obtido *A'B'C'* foi transladado 2 u para baixo, na direção vertical.

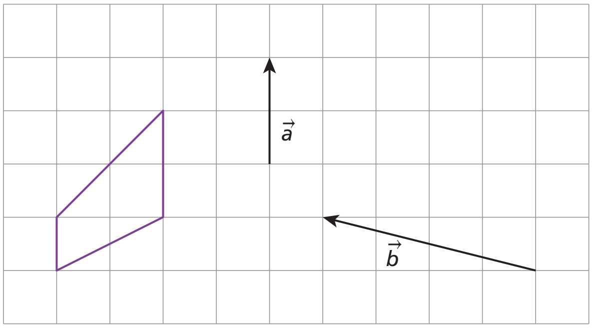


Observe que as duas translações feitas correspondem a uma única translação determinada pelo vetor soma $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$.



Copie o quadrilátero e os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ em uma malha quadriculada e translade a figura a seguir em relação ao vetor $\vec{a} + \vec{b}$.

10. Resposta no *Suplemento para o professor*.



11. Pesquise na internet fotografias que retratem a arte indígena brasileira (pode ser pintura corporal ou arte em algum utensílio). A arte deve apresentar alguma transformação geométrica estudada até o momento. Após a escolha, copie parte do desenho geométrico em uma folha avulsa e indique o tipo de transformação efetuada.

11. Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Rotações

Verifique a seguir imagens de flocos de neve.

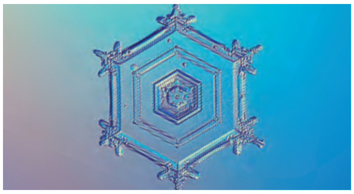

ALEXEY KLJATOV/SHUTTERSTOCK

Imagem com ampliação de 24 vezes.


ALEXEY KLJATOV/SHUTTERSTOCK

Imagem com ampliação de 20 vezes.


ALEXEY KLJATOV/SHUTTERSTOCK

Imagem com ampliação de 15 vezes.

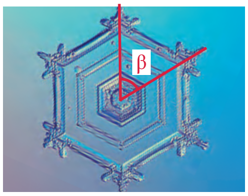

ALEXEY KLJATOV/SHUTTERSTOCK

Imagem com ampliação de 24 vezes.

Imagens de flocos de neve obtidas pelo russo Alexey Kljatov por meio de *softwares* de tratamento de imagens.

Observe a parte do floco de neve limitada pelo ângulo de medida de abertura β. Essa parte se repete em torno do centro do floco no plano da fotografia, por 6 vezes. Essa repetição pode ser associada a uma transformação geométrica chamada de **rotação**.

Qual é a medida de abertura β do ângulo? Explique como pensou para responder.

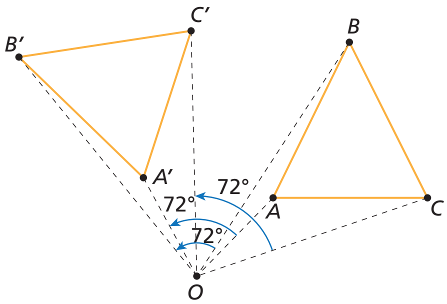


ALEXEY KLJATOV/SHUTTERSTOCK

Imagem com ampliação de 24 vezes.

Questão. Espera-se que os estudantes concluam que a medida de abertura β do ângulo é 60°, pois $6 \cdot 60°$ é igual a 360° (medida da abertura do ângulo central correspondente à circunferência toda).

No exemplo a seguir, o triângulo $A'B'C'$ foi obtido a partir de uma rotação no sentido anti-horário do triângulo ABC por um ângulo de medida de abertura igual a 72°, em torno do ponto O.



O ponto O é chamado de **centro da rotação**, e o ângulo que usamos para rotacionar a figura, de **ângulo de rotação**.

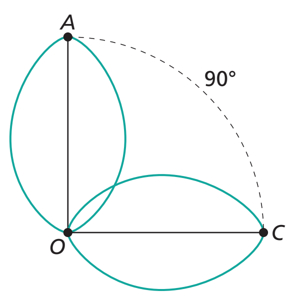
Sejam um ponto O, um ângulo de medida de abertura θ e os pontos P e P' pertencentes a um plano α. P' é uma **rotação** de P, ou imagem de P, por um ângulo de medida de abertura θ em torno do ponto O se, e somente se, $OP = OP'$ e $m(P\hat{O}P') = \theta$.

Observação

A rotação de P para P' pode ser no sentido horário ou anti-horário.

O centro de rotação pode ser também um dos pontos da figura.

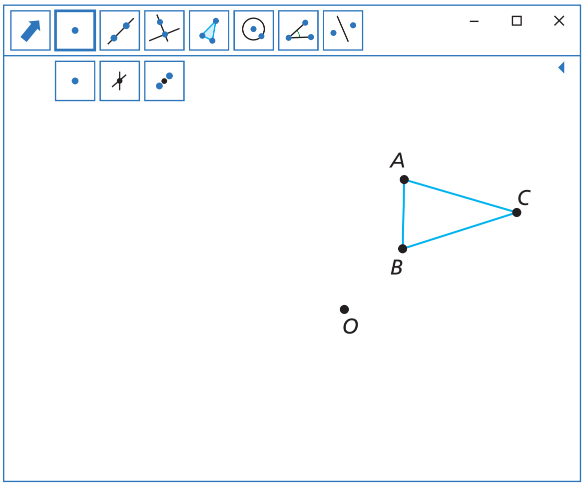
O segmento de reta $\overline{OC}$ a seguir é uma rotação do segmento de reta $\overline{OA}$ por um ângulo de medida de abertura igual a 90°, no sentido horário, em torno do ponto O.



Construção da rotação de uma figura com *software* de Geometria dinâmica

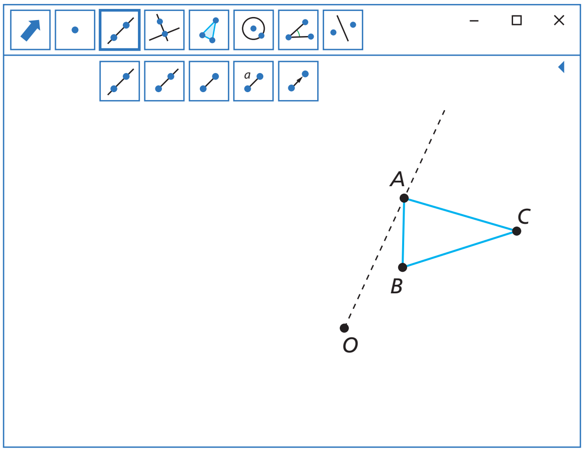
Vamos construir o triângulo $A'B'C'$ por meio de uma rotação do triângulo ABC. Para isso, escolhemos a medida da abertura do ângulo, o centro e o sentido da rotação.

1. Definidos a medida da abertura do ângulo e o sentido da rotação, construímos um triângulo ABC e o ponto O, centro da rotação.

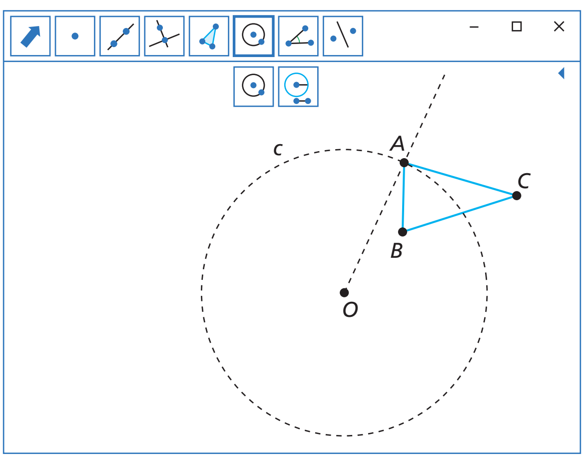


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

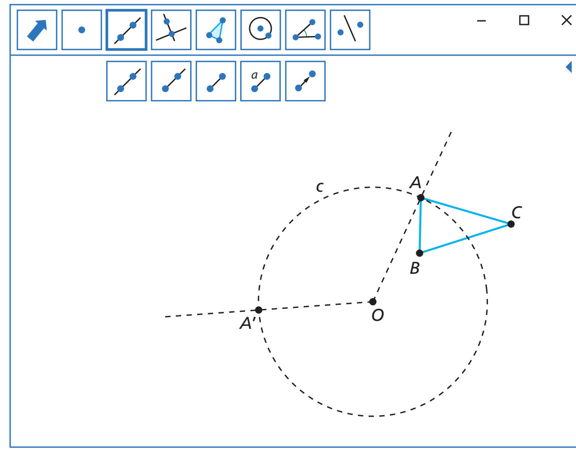
2. Construímos a semirreta $\overrightarrow{OA}$. A partir desse passo, vamos deixar tracejadas as construções auxiliares.



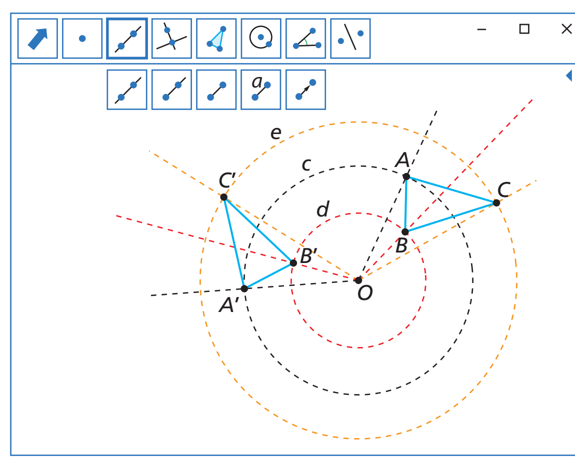
3. Construímos a circunferência *c* de centro *O* e raio $\overline{OA}$.



4. Nesse exemplo, escolhemos um ângulo de rotação com abertura medindo 120° e o sentido da rotação como anti-horário. Então, considerando $\overrightarrow{OA}$ um dos lados do ângulo de rotação, construímos o outro lado do ângulo no sentido anti-horário e marcamos o ponto *A*', intersecção da circunferência *c* com o outro lado do ângulo construído.



5. Para determinar os outros vértices *B*' e *C*' da figura rotacionada, utilizamos o mesmo procedimento usado para determinar o ponto *A*'. Para isso, usamos as circunferências *d* e *e*. Concluindo, traçamos os lados do triângulo *A*'*B*'*C*'.



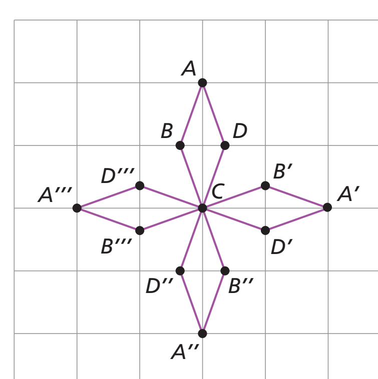
Composição de rotações em torno do mesmo ponto

Observe a figura que foi composta de três rotações do losango *ABDC* em torno do ponto *C*.

O losango *A*'*B*'*CD*' foi obtido do losango *ABCD* por uma rotação com medida da abertura de 90° no sentido horário ou de 270° no sentido anti-horário em torno do ponto *C*.

O losango *A*''*B*''*CD*'' foi obtido do losango *A*'*B*'*CD*' por uma rotação com medida da abertura de 90° no sentido horário ou de 270° no sentido anti-horário em torno do ponto *C*.

O losango *A*'''*B*'''*CD*''' foi obtido do losango *A*''*B*''*CD*'' por uma rotação com medida da abertura igual a 90° no sentido horário ou de 270° no sentido anti-horário em torno do ponto *C*.



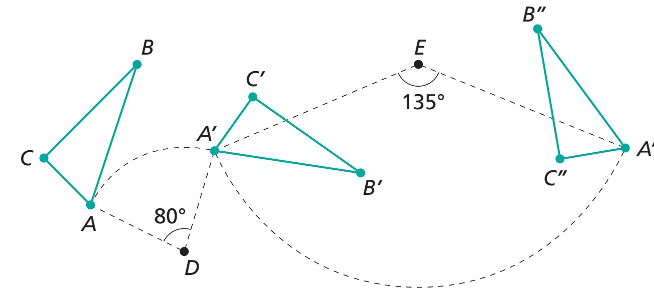
Note que a segunda e a terceira rotações foram obtidas de outras rotações já realizadas.

Observação

Observe na figura que qualquer losango pode ser uma rotação de qualquer outro losango, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário.

Composição de rotações em torno de pontos distintos

Na figura, o triângulo $A'B'C'$ foi obtido do triângulo ABC por uma rotação com medida da abertura igual a 80° no sentido horário em torno do ponto D. O triângulo $A''B''C''$ foi obtido do triângulo $A'B'C'$ por uma rotação com medida da abertura igual a 135° no sentido anti-horário em torno do ponto E.



Atividades propostas

Registre em seu caderno

12. Observe a imagem desta obra da artista Judith Lauand.

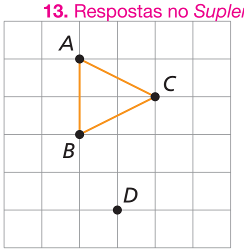
LAUAND, Judith. **Espaço virtual**. 1992. Têmpera sobre tela, 45 cm × 40 cm.

Fazendo uma rotação no sentido horário de um quadrilátero em relação ao ponto central do hexágono regular para obter o próximo quadrilátero, qual deve ser a medida da abertura do ângulo desse giro? **12.** 60°

13. Em um papel quadriculado, copie a figura e o centro de rotação de cada item. Depois, usando régua, transferidor e compasso, faça a rotação dessa figura conforme as indicações do sentido e da medida da abertura do ângulo. Atenção! Cuidado ao usar o compasso.

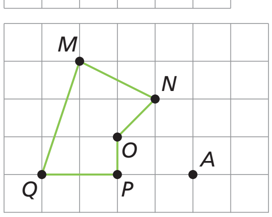
13. Respostas no *Suplemento para o professor*.

a.



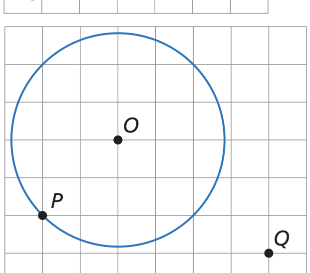
- centro de rotação: D
- sentido: horário
- medida da abertura do ângulo: 60°

b.



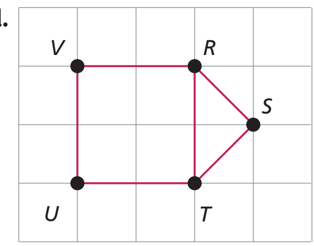
- centro de rotação: A
- sentido: anti-horário
- medida da abertura do ângulo: 90°

c.



- centro de rotação: Q
- sentido: horário
- medida da abertura do ângulo: 80°

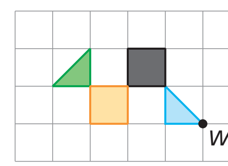
d.



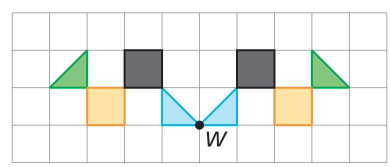
- Centro de rotação: S.
- Sentido: anti-horário.
- Medida da abertura do ângulo: 135°.

14. Qual das alternativas representa uma rotação da figura em torno do ponto W?

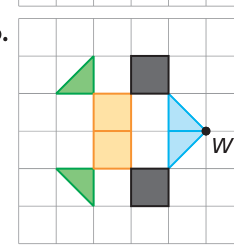
14. Alternativa **d**.



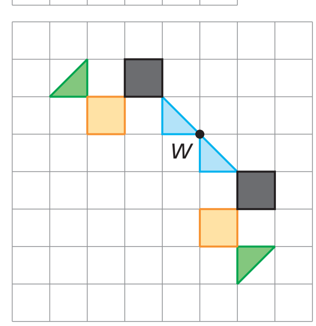
a.



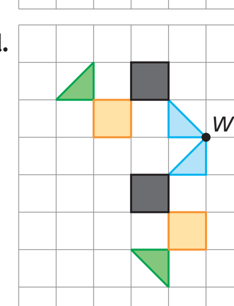
b.



c.

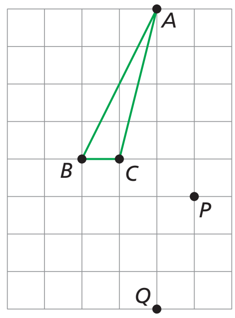


d.



15. Resposta no *Suplemento para o professor*.

15. Copie o triângulo ABC e os pontos P e Q em uma malha quadriculada. Com régua, transferidor e compasso, determine o triângulo $A''B''C''$, que é resultado de uma composição de rotações, conforme as medidas de abertura de ângulo, sentido e centro de rotação indicados. Atenção! Cuidado ao usar o compasso.



1ª rotação. Centro de rotação: P; sentido: horário; medida da abertura do ângulo: 65°.

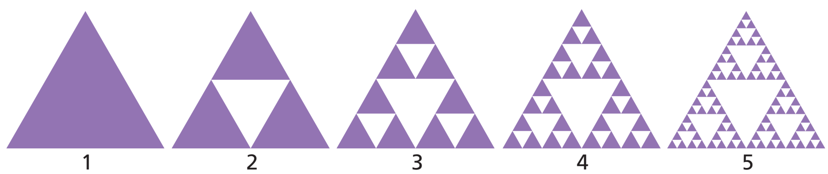
2ª rotação. Centro de rotação: Q; sentido: horário; medida da abertura do ângulo: 45°.

16. **SOFTWARE** Em um *software* de Geometria dinâmica, construa um triângulo equilátero e, por meio de rotações feitas nesse triângulo, construa um hexágono cujos lados tenham a mesma medida de comprimento dos lados do triângulo.

16. Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

Homotetia

O matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969) foi o primeiro a descrever o fractal conhecido como **Triângulo de Sierpinski**. Ele é construído por meio de um processo recursivo. Analise os passos da construção do triângulo de Sierpinski a seguir.

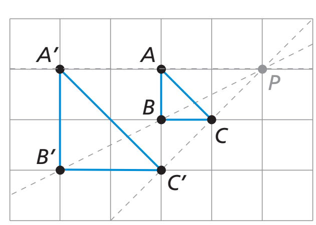


Uma recursão pode ser explicada como uma ação simples que gera um resultado, e essa ação simples pode ser repetida nesse resultado gerado. No caso do Triângulo de Sierpinski, a cada repetição, também chamada de iteração, devem ser "retiradas'' as regiões limitadas pelos triângulos cujos vértices são os pontos médios dos triângulos que limitam cada região existente no passo anterior.

Nesse fractal, as figuras que surgem a cada iteração são uma redução das figuras do passo anterior. Nesse fractal está presente uma transformação geométrica chamada de **homotetia**.

A **homotetia** é uma transformação geométrica que tem como resultado uma figura semelhante à original. Esse tipo de transformação preserva a razão entre as medidas de comprimento dos segmentos, as medidas de abertura de ângulos e o paralelismo entre os segmentos correspondentes. A figura obtida com a transformação pode ser uma ampliação, uma redução ou uma figura congruente à figura inicial.

Na figura a seguir, dizemos que o triângulo $A'B'C'$ é o resultado de uma homotetia do triângulo ABC por uma razão $k = 2$. O ponto P é chamado de **centro da homotetia.**



$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$

$\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$

$\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$

O ponto A', por exemplo, é obtido como o ponto da semirreta $\overrightarrow{PA}$ tal que $PA' = 2 \cdot PA$; do mesmo modo, $PB' = 2 \cdot PB$ e $PC' = 2 \cdot PC$.

Em uma homotetia, o ponto original, o ponto transformado e o centro de homotetia são sempre colineares.

Se a razão k for maior que zero, a homotetia é chamada de **direta**; se k for menor que zero, a homotetia é chamada de **inversa.**

Dado um ponto O em um plano α, chamamos de **homotetia** a transformação geométrica que associa a cada ponto P um ponto P', ambos pertencentes a α, tal que $OP \cdot |k| = OP'$, sendo k um número real diferente de zero, e os pontos P, P' e O, colineares.

Observação

O módulo de um número real a, indicado por $|a|$, também é um número real tal que:

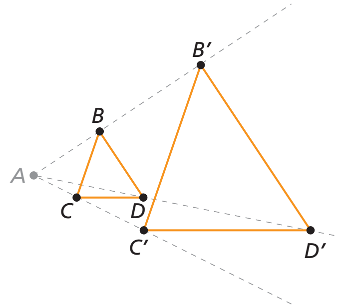
- se $a \geq 0$, $|a| = a$;
- se $a < 0$, $|a| = -a$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe os exemplos.

a. A homotetia direta com razão k, tal que $k > 1$, resulta em uma ampliação da figura. Verifique a seguir.

O triângulo $B'C'D'$ é uma homotetia do triângulo BCD. O centro de homotetia é o ponto A, e a razão é $\frac{5}{2}$. Podemos dizer também que o triângulo $B'C'D'$ é **homotético** ao triângulo BCD com centro de homotetia em A e razão $\frac{5}{2}$.

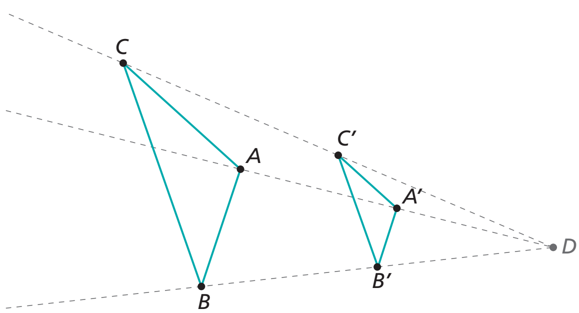


Assim, nesse exemplo, dado um ponto X qualquer da figura original e o seu homotético X', temos: $AX \cdot \frac{5}{2} = AX'$

Em uma homotetia **direta**, o ponto X', homotético de X, pertence à **semirreta** que tem como origem o centro da homotetia e passa por X.

b. A homotetia direta com razão k, tal que $0 < k < 1$, resulta em uma redução da figura original. Verifique a seguir.

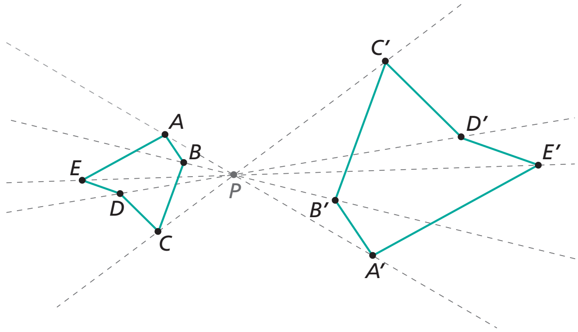
O triângulo $A'B'C'$ é uma homotetia do triângulo ABC. O centro de homotetia é o ponto D, e a razão é $\frac{1}{2}$.



Nesse exemplo, dado um ponto X qualquer da figura original e o seu homotético X', temos: $DX \cdot \frac{1}{2} = DX'$

c. A homotetia inversa com razão k, tal que $k < -1$, resulta em uma ampliação invertida da figura. Verifique a seguir.

A figura $A'B'C'D'E'$ é uma homotetia da figura $ABCDE$. O centro de homotetia é o ponto P, e a razão é -2.



Observação

Em alguns *softwares* de Geometria dinâmica, há uma ferramenta chamada homotetia. Para usar essa ferramenta você deve escolher um ponto para ser o centro da homotetia, a figura que será transformada e definir a razão de homotetia.

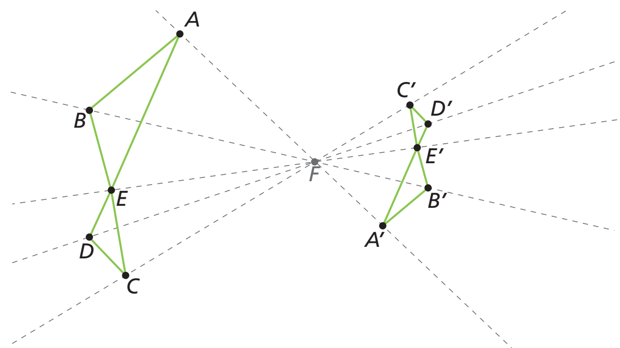
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse exemplo, dado um ponto X qualquer da figura original e o seu homotético X', temos: $PX \cdot |-2| = PX'$

Em uma homotetia **inversa**, o ponto X', homotético de X, pertence à **semirreta oposta** à semirreta que tem como origem o centro da homotetia e passa por X.

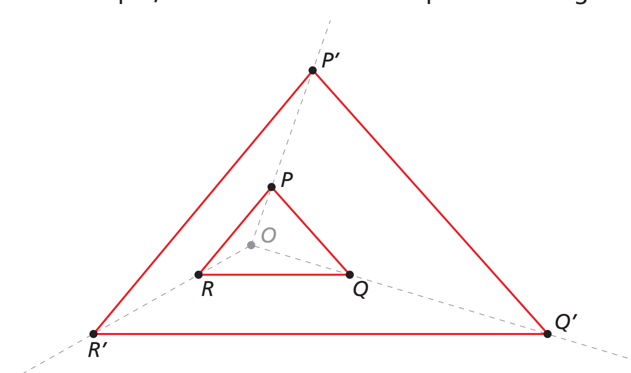
d. A homotetia inversa com a razão k, tal que $-1 < k < 0$, resulta em uma redução invertida da figura. Verifique a seguir.

A figura $A'B'C'D'E'$ é uma homotetia da figura $ABCDE$. O centro de homotetia é o ponto F, e a razão é $-\frac{1}{2}$.



Nesse exemplo, dado um ponto X qualquer da figura original e o seu homotético X', temos: $FX \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| = FX'$

e. O triângulo $P'Q'R'$ é uma homotetia direta do triângulo PQR de centro O e razão 3. Note que, nesse exemplo, o centro de homotetia pertence à região interna da figura.



Observação

Dados dois polígonos homotéticos em um plano cartesiano, podemos calcular a razão da homotetia, dividindo a medida de comprimento de um dos lados do polígono obtido pela medida de comprimento do lado correspondente do polígono inicial. A razão não pode ser 0, pois, caso pudesse, todos os pontos obtidos da homotetia dos vértices do polígono inicial seriam coincidentes e não haveria polígono como figura inicial, mas somente um ponto.

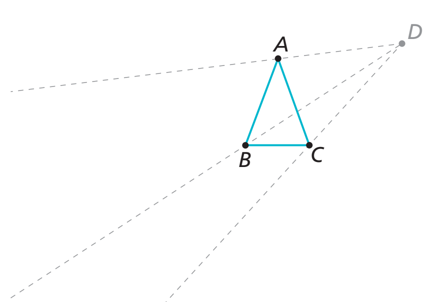
Qual é a posição de um ponto A', homotético de A, em uma homotetia de centro P e razão igual a 1? E se a razão for -1?

Questões. Razão 1: $PA \cdot 1 = PA' \Rightarrow PA = PA'$
Como a homotetia é direta ($k > 0$), o ponto A' pertence à semirreta $\overrightarrow{PA}$. Logo, o ponto A' coincide com o ponto A.
Razão -1: $PA \cdot |-1| = PA' \Rightarrow PA = PA'$
Como a homotetia é inversa ($k < 0$), o ponto A' pertence à semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{PA}$. Logo, o ponto A' está à mesma medida de distância de P que o ponto A, mas pertence à semirreta oposta à $\overrightarrow{PA}$.

Observe, a seguir, a construção de uma homotetia direta com régua graduada.

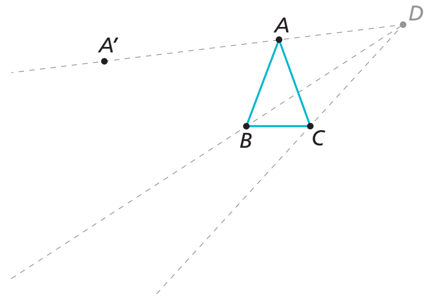
Vamos construir um triângulo $A'B'C'$, homotético do triângulo ABC, tal que o ponto D seja o centro da homotetia e a razão seja $k = 2{,}4$.

1. Dado o triângulo ABC e o ponto D, construímos as semirretas $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{DC}$.

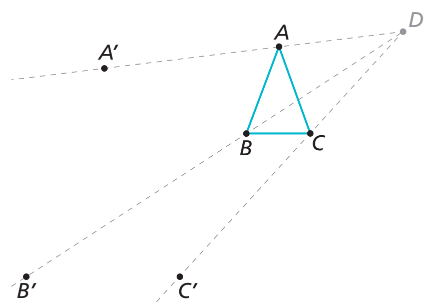


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

2. Como a razão é 2,4, temos, da definição de homotetia, que $DA' = 2,4 \cdot DA$ e que D, A e A' são colineares. Assim, a medida do comprimento do segmento $\overline{DA'}$ é igual à medida do comprimento do segmento $\overline{DA}$ multiplicada por 2,4. Com a régua graduada, marcamos o ponto A' na semirreta $\overrightarrow{DA}$.

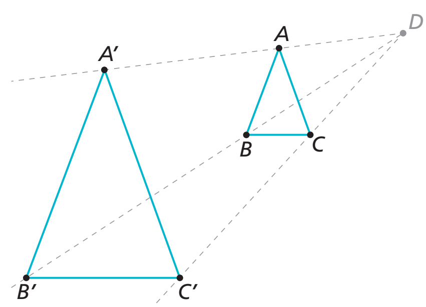


3. Procedemos da mesma maneira para obter os pontos B' e C'. Usamos $DB' = 2,4 \cdot DB$ para o ponto B' e $DC' = 2,4 \cdot DC$ para o ponto C'.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

4. Por fim, construímos o triângulo traçando os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{A'C'}$.



OBJETO DIGITAL
Carrossel de imagens: Arte geométrica dos povos originários e dos quilombolas

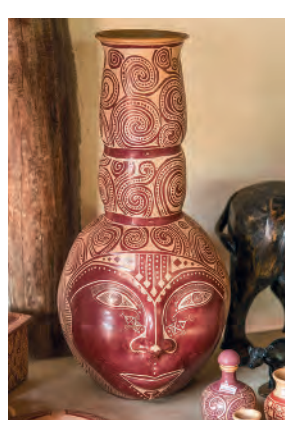
Cerâmica marajoara

A cerâmica marajoara é um tipo de arte indígena da Ilha de Marajó (PA), reconhecida internacionalmente como interessante, bela e sofisticada. Suas peças têm ornamentos geométricos com abordagens que podem ser associadas às transformações geométricas, como simetrias, translações e rotações. Observe a seguir fotografias de alguns utensílios de cerâmica marajoara.

ATENÇÃO! AS IMAGENS ESTÃO REPRESENTADAS SEM PROPORÇÃO ENTRE ELAS.


FERNANDO COSTA/ALAMY/FOTOARENA

Cerâmica marajoara exposta no mercado Ver-o-peso, em Belém (PA). Foto de 2022.


RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

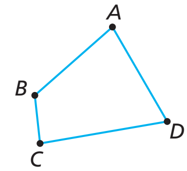
Cerâmica marajoara exposta em ateliê de arte no município de Soure, Ilha de Marajó (PA). Foto de 2019.


RITA BARRETO/FOTOARENA

Cerâmica marajoara da Instituição Caruanas do Marajó Cultura e Ecologia, localizada no município de Soure, Ilha de Marajó (PA). Foto de 2022.

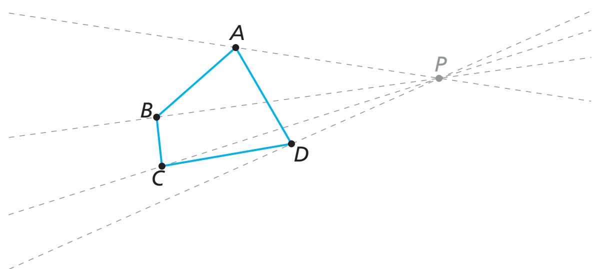
Atividade resolvida

R2. Construir um quadrilátero $A'B'C'D'$, homotético do quadrilátero $ABCD$, com razão igual a $-\frac{1}{2}$ e centro de homotetia P.

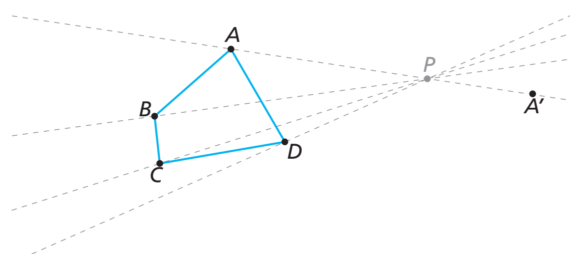


▸ **Resolução**

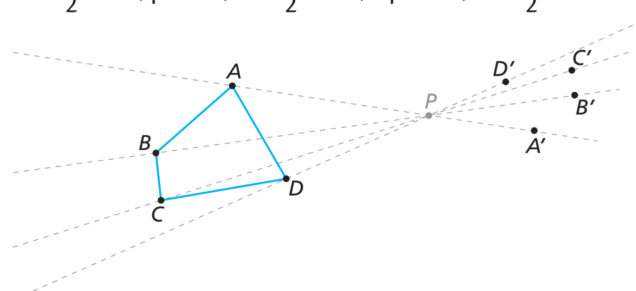
1. Construímos as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$ e $\overleftrightarrow{DP}$.



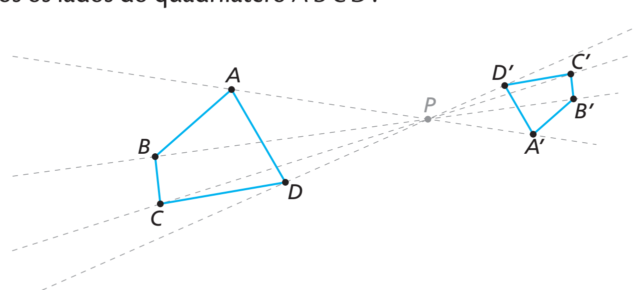
2. Dado que a homotetia é inversa e $PA \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| = PA' \Rightarrow PA \cdot \frac{1}{2} = PA'$, construímos o ponto A' na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{PA}$, sendo que a medida da distância de P ao ponto A' é a metade da medida da distância de P ao ponto A.



3. Procedemos da mesma maneira para obter os pontos B', C' e D' da figura transformada. Para B', usamos a relação $PB \cdot \frac{1}{2} = PB'$; para C', $PC \cdot \frac{1}{2} = PC'$; e para D', $PD \cdot \frac{1}{2} = PD'$. Assim, obtemos:



4. Por fim, traçamos os lados do quadrilátero $A'B'C'D'$.



Observação

Se considerássemos esse quadrilátero $A'B'C'D'$ como figura inicial em uma homotetia de razão -2 e centro P, obteríamos o quadrilátero homotético $ABCD$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

17. Respostas no *Suplemento para o professor*.

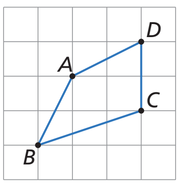
18. Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

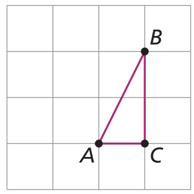
17. Copie a figura de cada item em uma malha quadriculada e construa, com régua graduada, a figura homotética a cada uma delas conforme centro e razão indicados.

a.



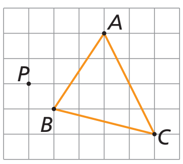
- Centro da homotetia: *C*.
- Razão: -2.

c.



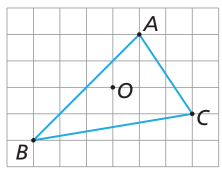
- Centro da homotetia: *A*.
- Razão: 2.

b.



- Centro da homotetia: *P*.
- Razão: $\frac{3}{2}$.

d.

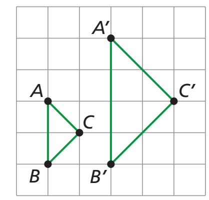


- Centro da homotetia: *O*.
- Razão: -1.

18. **ARGUMENTAÇÃO** Figuras homotéticas são semelhantes, porém a recíproca não é verdadeira: figuras semelhantes nem sempre são homotéticas. Explique por que essa afirmação é verdadeira.

19. Resposta no *Suplemento para o professor*.

19. O triângulo *A'B'C'* é homotético do triângulo *ABC*. Copie os dois triângulos em uma malha quadriculada e determine o centro e a razão usados na homotetia.



20. Pesquise na internet fotografias que retratem a cerâmica marajoara. A arte deve apresentar alguma transformação geométrica estudada até o momento. Após a escolha, copie parte do desenho geométrico em uma folha avulsa e indique o tipo de transformação realizada. Se for uma homotetia, considere uma figura como inicial e registre se a homotetia é direta ou inversa. 20. Resposta pessoal.

Matrizes e transformações geométricas

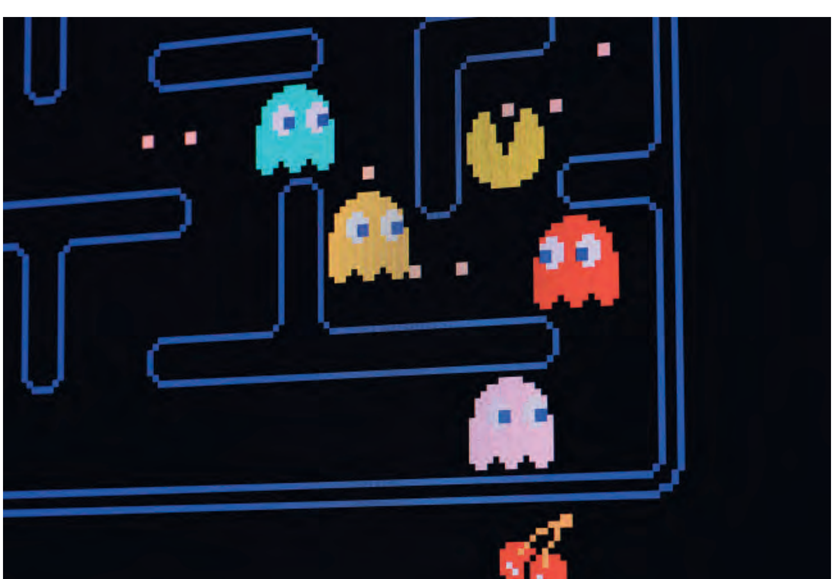
A imagem em uma tela de televisão, computador ou celular é formada por pontos chamados de *pixels*, que correspondem a elementos de uma matriz de *m* linhas por *n* colunas. Os valores de *m* e *n* determinam o número de *pixels*. Quanto maior esse número, melhor a qualidade da imagem.

Uma televisão de alta definição, por exemplo, tem 1.280 *pixels* (quantidade de colunas) por 720 *pixels* (quantidade de linhas), o que resulta em 921.600 *pixels*. Já os aparelhos de tecnologia Ultra HD, chamados de 4K, têm (3.840 × 2.160) *pixels*, o que resulta em 8.294.400 *pixels*; isso representa uma imagem de qualidade bem superior à das telas de alta definição.

As animações dos objetos observadas na tela de um jogo ou de um filme são formadas pela mudança de cores dos *pixels*, e uma ferramenta matemática que torna essa movimentação possível é a operação com matrizes.

ODS 9

A cor nos *pixels* anima os personagens de um jogo de *videogame*.



Fotografia de personagens de um jogo de *videogame*.

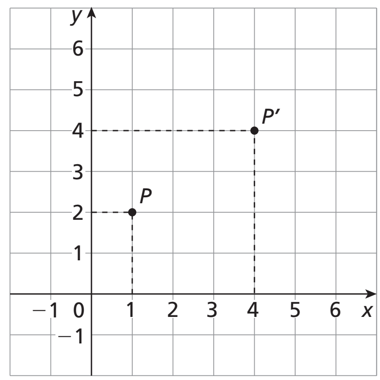
A seguir, analisaremos como fazer algumas transformações geométricas no **plano cartesiano** usando matrizes.

Translações

A translação de uma figura no plano cartesiano pode ser feita com a adição de matrizes.

No exemplo a seguir, o ponto $P'(4, 4)$ é uma translação, no plano cartesiano, do ponto $P(1, 2)$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



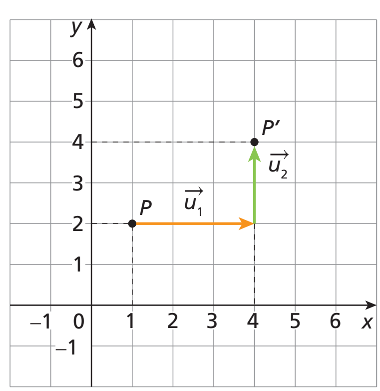
Podemos representar o ponto P pela matriz coluna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. A abscissa do ponto é representada na matriz pelo elemento a_{11}, e a ordenada é representada pelo elemento a_{21}. O ponto P' será representado pela matriz $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Agora, precisamos adicionar uma matriz à matriz do ponto P para representar o deslocamento na direção horizontal e na direção vertical, de modo que o resultado seja a matriz $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resolvendo essa equação, temos $a = 3$ e $b = 2$. Assim, a matriz que representa o deslocamento é $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, de maneira que 3 u foram deslocadas na direção do eixo x, e 2 u foram deslocadas na direção do eixo y.

Observe, a seguir, que a translação do ponto P para o ponto P' pode ser feita pelos vetores $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$, que têm módulos iguais a 3 e 2, respectivamente.



Observação

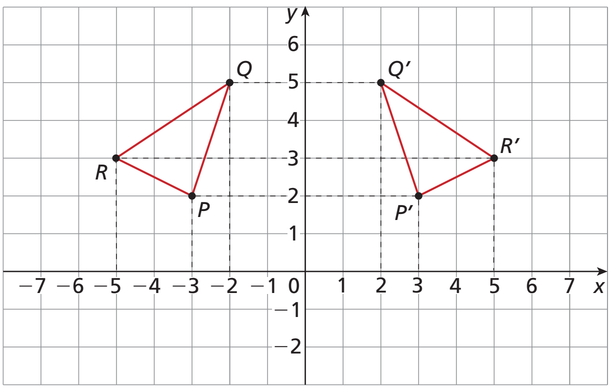
Para transladar polígonos, primeiro representamos as coordenadas dos vértices do polígono original em uma matriz: abscissas na primeira linha e ordenadas na segunda linha. Depois adicionamos essa matriz à matriz que representa o deslocamento na direção horizontal e na direção vertical.

Para uma translação, no plano cartesiano, de um ponto $A(x, y)$ para um ponto A', de modo que o deslocamento seja de a u na direção horizontal (eixo x) e de b u na direção vertical (eixo y), fazemos: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$

Reflexões

Reflexões em relação aos eixos x e y em um plano cartesiano

Observe o triângulo $P'Q'R'$, simétrico ao triângulo PQR **em relação ao eixo** y.



Vamos verificar como pode ser feita essa reflexão usando matrizes.

Primeiro, determinamos a matriz que representa o triângulo PQR. Assim, da maneira como representamos a matriz de um ponto, as abscissas de cada vértice do triângulo devem ocupar a primeira linha da matriz, e as ordenadas, a segunda linha, sendo cada coluna ocupada pelo par ordenado de cada vértice. Indicaremos por A a matriz do triângulo PQR.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Note que a primeira coluna da matriz A refere-se ao vértice P, a segunda coluna, ao vértice Q, e a terceira coluna, ao vértice R. De posse da matriz A, vamos usar determinada operação e outra matriz para obtermos a matriz que representa o triângulo simétrico ao triângulo PQR.

Nesse caso, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pela matriz A para obter a matriz que representa o triângulo $P'Q'R'$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Com a multiplicação, obtivemos a matriz que representa os pares ordenados (3, 2), (2, 5) e (5, 3), que são exatamente os pares ordenados dos vértices P', Q' e R' do triângulo simétrico ao triângulo PQR em relação ao eixo y.

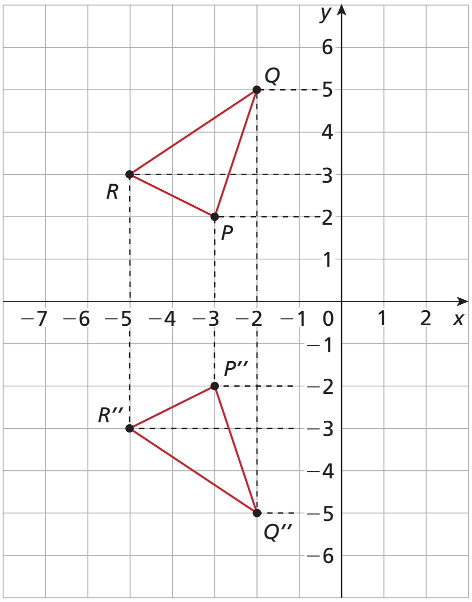
Para refletir o triângulo PQR **em relação ao eixo** x, multiplicamos a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pela matriz A. Observe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

A **matriz produto** representa os vértices do triângulo $P''Q''R''$, simétrico ao triângulo PQR em relação ao eixo x, no plano cartesiano.

Para obter as coordenadas de um ponto P', reflexão do ponto $P(x, y)$ **em relação ao eixo** y, no plano cartesiano, com a utilização de matrizes, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pela matriz que representa o ponto P: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Para obter as coordenadas de um ponto P'', reflexão do ponto $P(x, y)$ **em relação ao eixo** x, no plano cartesiano, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pela matriz que representa o ponto P: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Observação

Lembre-se: para que um produto de matrizes exista, o número de colunas do primeiro fator deve ser igual ao número de linhas do segundo fator.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

O quadro a seguir lista o seno e o cosseno de alguns ângulos.

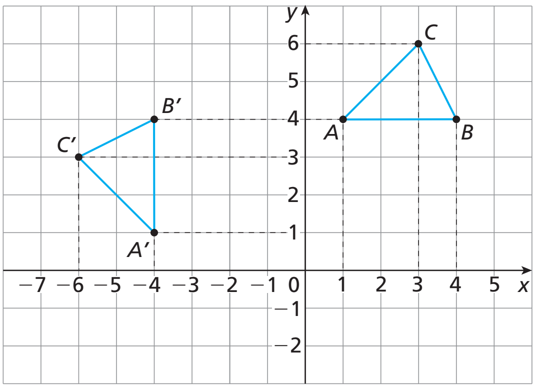
Seno e cosseno de alguns ângulos

Medida da abertura do ângulo	seno	cosseno
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0
180°	0	−1
270°	−1	0
360°	0	1

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Rotações em relação à origem de um plano cartesiano

Para fazer a rotação de uma figura em relação à origem de um plano cartesiano, vamos usar também a multiplicação de matrizes. Acompanhe o exemplo a seguir.



O triângulo *A*'*B*'*C*', representado pela matriz $\begin{pmatrix} -4 & -4 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, é uma rotação com medida da abertura igual a 90° do triângulo *ABC* em relação à origem do plano cartesiano no sentido anti-horário. A matriz que representa *ABC* é $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Considerando que α é a medida de abertura do ângulo de rotação, vamos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ pela matriz do triângulo *ABC* para, assim, verificar que a matriz obtida será a que representa o triângulo *A*'*B*'*C*'.

Dado que $\begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen}\,90° \\ \text{sen}\,90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Para obter as coordenadas *a* e *b* de um ponto *P*', resultado da rotação de um ângulo com medida de abertura α no sentido anti-horário do ponto *P*(*x*, *y*), em relação à origem de um plano cartesiano, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ pela matriz que representa o ponto *P*:

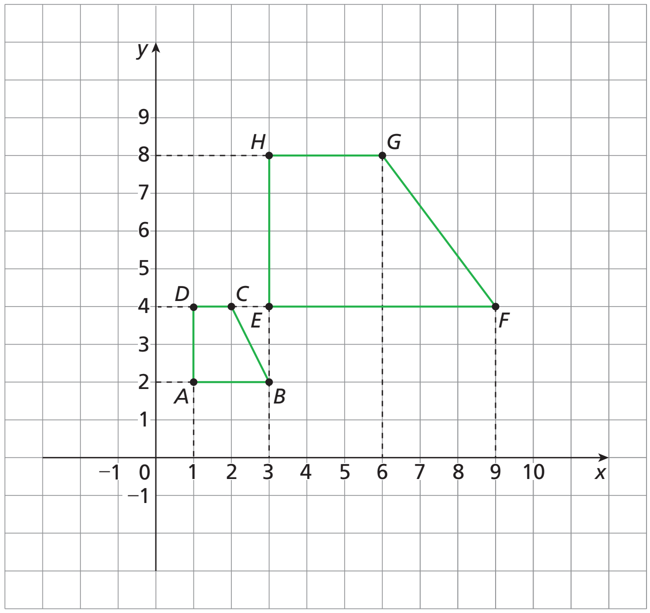
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Transformações por escala

A **transformação por escala** é um tipo diferente das transformações que estudamos até aqui, pois, com ela, podemos transformar uma figura na direção horizontal (eixo das abscissas) e na direção vertical (eixo das ordenadas) de modo independente. Ou seja, a razão da transformação na direção do eixo *x* pode ser diferente da razão da transformação na direção do eixo *y*.

Para fazer essa transformação, multiplicamos a matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ pela matriz que representa a figura original. O elemento *a* é o fator que transforma a figura original na direção do eixo *x*, e o elemento *b* é o fator que transforma a figura na direção do eixo *y*.

No exemplo a seguir, o trapézio *ABCD* foi transformado no trapézio *EFGH* na direção vertical com uma razão igual a 2 e na direção horizontal com uma razão igual a 3. Portanto, o trapézio *EFGH* não é semelhante ao trapézio *ABCD*.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A matriz que representa o trapézio *ABCD* é $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Observe que a multiplicação terá como resultado a matriz que representa o trapézio *EFGH*. Sendo $a = 3$ e $b = 2$, temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Assim, como esperado, o resultado é uma matriz que representa os pontos *E*, *F*, *G* e *H*.

23. Resposta no *Suplemento para o professor*. **25 a.** Resposta no *Suplemento para o professor*. **24 a.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

21. Em uma malha quadriculada, construa um plano cartesiano e desenhe os triângulos cujos vértices estão representados pelas matrizes a seguir. **21.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

25 b. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

25 c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

24 b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

24 c. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

22. A matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ representa os vértices de um triângulo que foi transladado 6 u para a direita e 1 u para cima. Determine a matriz do triângulo que originou essa translação. **22.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

23. Determine as matrizes que representam as reflexões dos triângulos da **atividade 21** em relação ao eixo *x* e ao eixo *y*.

24. Observe a matriz a seguir, que representa os vértices de um quadrilátero no plano cartesiano.

Depois, faça o que se pede.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Construa a figura em um plano cartesiano.

b. Determine a matriz que representa a rotação com medida da abertura igual a 90° do quadrilátero *ABCD* em torno da origem, no sentido anti-horário.

c. Determine a matriz que representa a rotação com medida da abertura igual a 180° do quadrilátero *ABCD* em torno da origem, no sentido anti-horário.

d. Construa, no mesmo plano cartesiano da figura original, os quadriláteros *A'B'C'D'* e *A"B"C"D"*, rotações dos itens **b** e **c**, respectivamente. **24 d.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

25. Considere o retângulo de vértices *A*(3, 9), *B*(6, 9), *C*(6, 3) e *D*(3, 3) em um plano cartesiano e faça o que se pede.

a. Construa o retângulo em um plano cartesiano.

b. Determine a matriz que representa os vértices do retângulo.

c. Determine a matriz que representa a transformação por escala do retângulo na razão $\frac{1}{3}$ nas direções horizontal e vertical.

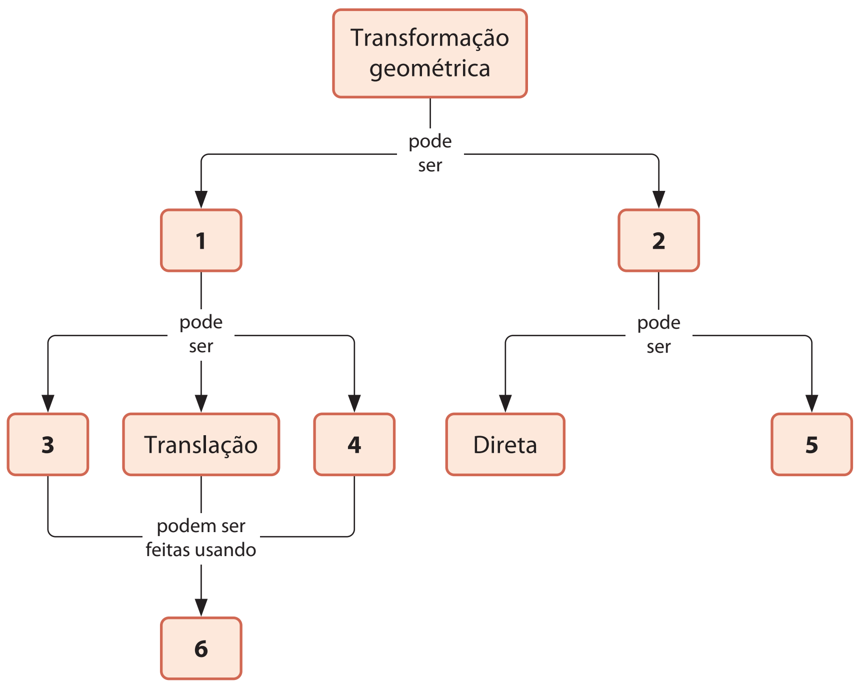
d. Construa a figura transformada no mesmo plano cartesiano do item **a**. **25 d.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



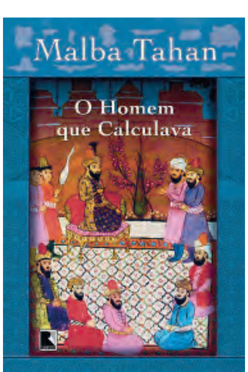
Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Matrizes
B. Reflexão
C. Homotetia
D. Inversa
E. Isometria
F. Rotação

Conexões entre conceitos. Exemplo de resposta: A – 6; B – 3; C – 2; D – 5; E – 1; F – 4.

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro



REPRODUÇÃO/EDITORA RECORD

O homem que calculava

Malba Tahan

Rio de Janeiro: Record, 2001.

Nesse livro, Malba Tahan, pseudônimo do professor de Matemática brasileiro Júlio César de Mello e Souza, narra de forma envolvente e lúdica a história do calculista Beremiz Samir, o homem que calculava. Beremiz maneja os números com a facilidade de um ilusionista, e problemas aparentemente insolúveis demonstram uma transparente simplicidade quando expostos por ele, encantando reis, poetas, xeques e sábios.

Software

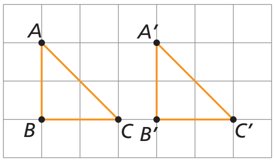
GeoGebra

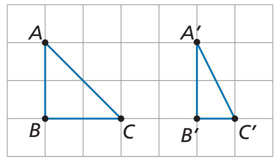
O GeoGebra é um *software* que combina Geometria e Álgebra e possui uma versão que pode ser usada *on-line*. Entre suas diversas funcionalidades estão a realização de atividades de Geometria dinâmica e a construção e a manipulação de gráficos de funções diversas.

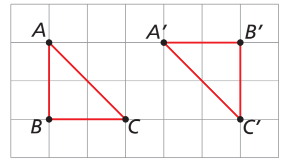
Disponível em: https://www.geogebra.org/classic. Acesso em: 17 set. 2024.

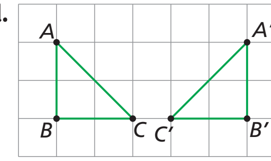
AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Qual alternativa representa uma translação? **Q1.** Alternativa **a.**

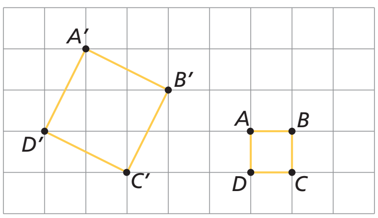
a.


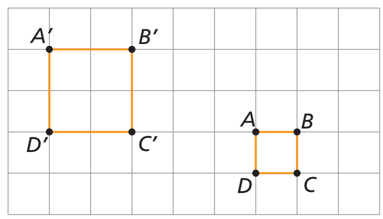
b.


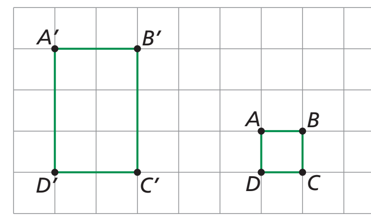
c.


d.


Q2. Em que alternativa *A'B'C'D'* é a imagem de *ABCD* por uma homotetia? **Q2.** Alternativa **b.**

a.


b.


c.


Q3. Uma transformação homotética e uma transformação isométrica de um polígono sempre preservam, respectivamente: **Q3.** Alternativa **c.**

a. a medida da distância entre pontos correspondentes e a medida da abertura de ângulos correspondentes.

b. a medida da distância entre pontos correspondentes e o paralelismo entre os segmentos correspondentes.

c. a medida da abertura de ângulos correspondentes e a medida da distância entre pontos correspondentes.

d. a medida da distância entre pontos correspondentes e a razão entre as medidas de comprimento de segmentos correspondentes.

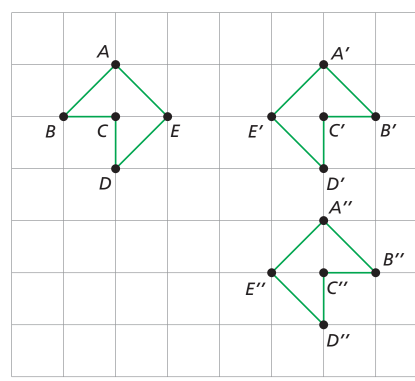
Q4. O polígono *A"B"C"D"E"* é o resultado de uma composição de transformações isométricas no plano aplicada ao polígono *ABCDE*. Quais são essas transformações? **Q4.** Alternativa **d.**

a. Rotação e translação.

b. Reflexão em relação a um ponto e rotação.

c. Translação e rotação.

d. Reflexão em relação a uma reta e translação.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Q5. Qual matriz devemos adicionar à matriz que representa um ponto no plano cartesiano para que ele seja transladado 5 u na direção vertical, no sentido de baixo para cima? **Q5.** Alternativa **a.**

a. $\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Compreender os principais tipos de transformações isométricas (reflexão, translação e rotação) e as suas composições.	X			X	X
Compreender as transformações homotéticas.		X			
Distinguir uma transformação isométrica de uma transformação homotética.		X	X		
Realizar transformações geométricas no plano cartesiano por meio de operações com matrizes.					X

Fake news – manipulação de imagens

ODS 17

As *fake news* estão cada vez mais presentes na mídia. Além de aparecerem na forma de texto em notícias com informações falsas, surgem em imagens manipuladas, causando, em ambos os casos, desinformação e erros de interpretação. As chances de encontrar uma foto falsa em redes sociais, ou na internet, são cada vez maiores, principalmente quando se refere a notícias que tratam as informações de modo exagerado, insensível e sem compromisso com a verdade (notícias sensacionalistas).

Atualmente, a facilidade de manipular uma imagem de forma realista e imperceptível é muito grande e não tem limites. Analise, a seguir, alguns exemplos.

TECH. SGT. LANCE CHEUNG/U.S. AIR FORCE; SLOWMOTIONGLI/ISTOCK/GETTY IMAGES

Imagem de um possível flagrante de tubarão tentando atacar um homem das forças armadas estadunidenses.

TECH. SGT. LANCE CHEUNG/U.S. AIR FORCE

Imagem de helicóptero tirada em San Francisco (EUA), junto da ponte Golden Gate. Foto de 2002.

SLOWMOTIONGLI/ISTOCK/GETTY IMAGES

Imagem de tubarão-branco registrada na África do Sul. Foto de 2020.

No exemplo a seguir, podemos observar como a imagem da direita foi manipulada para fazer parecer que o leão é preto em vez de branco.

PMVTISL/SHUTTERSTOCK

Imagem real de leão africano branco. Foto de 2023.

PMVTISL/SHUTTERSTOCK

Imagem manipulada.

Para entender como essas imagens são manipuladas, podemos recorrer ao que foi estudado sobre matrizes.

Ao ampliarmos, ao máximo, uma imagem na tela do computador ou celular, é possível perceber que ela é formada por *pixels*, pequenos pontos que são os menores elementos que formam uma imagem digital (imagem que pode ser representada por números). Quanto maior o número de *pixels*, melhor é a qualidade da imagem.

Cada um dos *pixels* que compõem uma imagem digital está relacionado a um elemento de uma matriz. Por exemplo, uma imagem que tem 1.024 *pixels* por 768 *pixels* pode ser associada a uma matriz com 768 linhas e 1.024 colunas.

Quando fazemos operações com matrizes que estejam relacionadas com imagens digitais, a matriz resultante gera outra imagem digital.

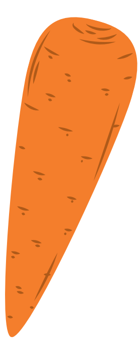
Sejam A e B matrizes do mesmo tipo que representam imagens digitais; então, a matriz soma $A + B$ corresponde à imagem que é obtida quando adicionamos as imagens representadas por A e B. Analise o exemplo a seguir.

Observação

Ao indicarmos uma matriz, apresentamos a quantidade de linhas e a quantidade de colunas, nessa ordem.

Ao indicarmos o número de *pixels* de uma imagem, apresentamos as quantidades de pixels por coluna e por linha, ou seja, em ordem oposta a que é usada para uma matriz.

Imagem associada à matriz A.



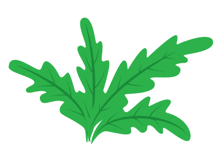


Imagem associada à matriz B.

Imagem associada à matriz $A + B$.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Sejam C e D matrizes do mesmo tipo que representam imagens digitais; então a matriz diferença $C - D$ corresponde à imagem que é obtida quando subtraímos da imagem representada por C a imagem representada por D. Analise o exemplo a seguir.

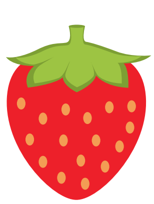


Imagem associada à matriz C.

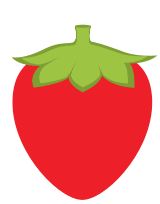


Imagem associada à matriz D.

Imagem associada à matriz $C - D$.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

OBJETO DIGITAL
Vídeo: Armadilhas das *fakes news*

Enriquecendo o tema desta seção, o vídeo apresenta situações em que os estudantes devem desconfiar de que uma informação pode não ser verdadeira, orientando-os a checar e buscar fontes confiáveis de notícias.

1. Resposta pessoal.

Atividades

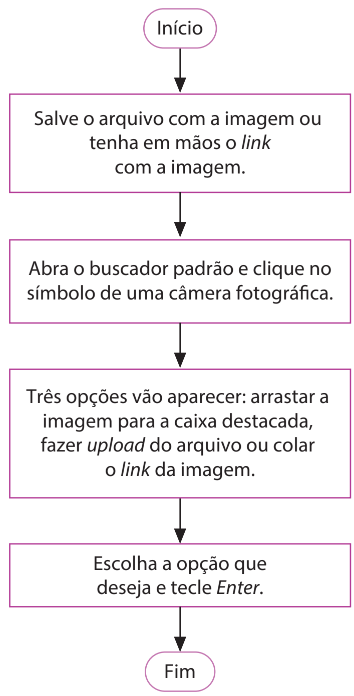
Registre em seu caderno

1. Você já viu alguma *fake news* com imagem manipulada? Se sim, descreva essa imagem para os colegas e conte como você identificou que se tratava de uma imagem manipulada e as possíveis intenções de quem a manipulou.

2. Adição.

2. Que operação entre matrizes está por trás da imagem manipulada do flagrante do tubarão?

3. Uma das maneiras de identificar se uma imagem é manipulada é por meio da pesquisa reversa de imagem. Essa pesquisa ajuda a descobrir se a imagem já foi compartilhada antes na internet, em quais *sites* e em qual contexto. Também vai exibir imagens similares que possam ter alguma ligação com a imagem pesquisada. O fluxograma a seguir mostra como fazer essa pesquisa.

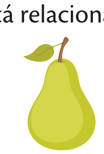


a. Você já fez uma pesquisa reversa de imagens? Por qual razão? O que você concluiu? Conte sua experiência aos colegas e ao professor. **3 a.** Respostas pessoais.

b. Pesquise duas imagens na internet e utilize a pesquisa reversa de imagens para verificar se são imagens reais. Depois, compartilhe com os colegas as imagens e as conclusões a que chegou.
3 b. Resposta pessoal.

4. A matriz A^t cujas linhas coincidem ordenadamente com as colunas de A é conhecida como matriz transposta. Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$, então $A^t = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$. **4.** Alternativa **a.**

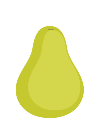
Considere a imagem da pera, que está relacionada a uma matriz B.

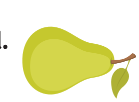


Qual das alternativas corresponde à imagem que se relaciona com B^t?

a. 

b. 

c. 

d. 

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

PESQUISA E AÇÃO Exposição de arte

OBJETIVOS

Pesquisar informações sobre discriminação racial e desigualdade racial; pesquisar informações acerca da Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial (1968), a Conferência de Durban (2001) e a Década Internacional de Afrodescendentes (2015-2024); apreciar e analisar obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira; criar obra de arte inspirada nas culturas africana e afro-brasileira; promover uma exposição das obras criadas para a comunidade escolar.

ODS 10

No Brasil e no exterior, ainda hoje os afrodescendentes são vítimas de discriminação e de desigualdade racial. Considerando essa realidade, reconhece-se a importância de proteger e promover os direitos humanos desses povos, eliminando qualquer forma de preconceito.

Para combater o racismo e a desigualdade racial, a Assembleia Geral da Organização das Nações Unidas (ONU) proclamou o período entre 2015 e 2024 a Década Internacional de Afrodescendentes, com o tema: "Reconhecimento, justiça e desenvolvimento". Durante esse período, foi criado um programa de atividades com os objetivos a seguir.

- Promover o respeito, proteção e cumprimento de todos os direitos humanos e liberdades fundamentais das pessoas afrodescendentes, como reconhecido na Declaração Universal dos Direitos Humanos;
- Promover um maior conhecimento e respeito pelo patrimônio diversificado, a cultura e a contribuição de afrodescendentes para o desenvolvimento das sociedades;
- Adotar e reforçar os quadros jurídicos nacionais, regionais e internacionais de acordo com a Declaração e Programa de Ação de Durban e a Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial, bem como assegurar a sua plena e efetiva implementação.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. 2015-2024: Década Internacional de Afrodescendentes. Disponível em: http://decada-afro-onu.org/plan-action.shtml. Acesso em: 17 set. 2024.

DANIELLEBRA/SHUTTERSTOCK

Museu Afro Brasil Emanoel Araujo, localizado no Parque Ibirapuera, em São Paulo. Com um acervo de mais de 8 mil obras, o museu celebra a história, a arte e a influência africana na formação da sociedade brasileira. Foto de 2024.

Para valorizar a cultura desses povos, nesta seção você vai conhecer algumas produções artesanais e artísticas baseadas nas culturas africana e afro-brasileira, além de descobrir como a Geometria está presente nessas produções.

Como exemplo, é possível observar transformações geométricas na confecção de tecidos, na criação de máscaras e nas pinturas corporais, repletas de cores e de significados.

Depois de conhecer e apreciar obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira, você vai criar uma obra de arte e organizar uma exposição para a comunidade escolar.

Etapa 1: Pesquisa e análise de dados sobre desigualdade racial

Etapa 1: Comentários no *Suplemento para o professor*.

1. **EM DUPLA** Em duplas, pesquisem as respostas para as seguintes questões:
   a. O que é a Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial?
   b. Por quem e quando foi adotada essa convenção?
   c. Quem promoveu a Conferência de Durban? Quando e onde essa conferência foi realizada?
   d. O que são a Declaração e o Programa de Ação de Durban?
   e. O que é a Década Internacional de Afrodescendentes? Por que ela foi criada?
   f. Quais são os objetivos da Década Internacional de Afrodescendentes?

OBJETO DIGITAL *Podcast*: Racismo estrutural

Complementando a proposta de atividade desta seção, o *podcast* aborda como o racismo está presente em nossa sociedade, apresentando raízes históricas e dados estatísticos.

2. **EM GRUPO** Reúna-se com quatro colegas e pesquisem, em fontes confiáveis, informações sobre a desigualdade racial no Brasil. Anotem os dados mais interessantes e relevantes que encontrarem, assim como a fonte da qual foram retirados. Conversem sobre eles e, depois, compartilhem com a turma as conclusões do grupo.

3. **EM GRUPO** Agora, toda a turma deve se reunir e conversar sobre as questões e os dados pesquisados. Reflitam sobre a importância de extinguir a discriminação e a desigualdade racial. Conversem também sobre a relevância de conhecer, valorizar e respeitar as manifestações culturais dos povos afrodescendentes.

Etapa 2: Análise e apreciação de obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira

Etapa 2: Comentários no *Suplemento para o professor*.


TRACK5/E+/GETTY IMAGES

Os tecidos *kente* apresentam diferentes estampas geométricas e variadas cores. Tradicionalmente, eram utilizados apenas pelos reis do império africano Ashanti.

Muitos trabalhos artísticos baseados nas culturas africana e afro-brasileira apresentam figuras geométricas que se repetem, formando padrões coloridos, como é o caso dos tecidos *kente*, tecidos tradicionais do povo Ashanti, que vive em Gana, na África.

Algumas obras de arte também exploram as figuras geométricas e utilizam o conceito de transformação geométrica em sua criação. Um exemplo são as obras do artista baiano Rubem Valentim (1922-1991), que apresentam transformações geométricas com representações de figuras geométricas planas.

4. **EM DUPLA** Em duplas, pesquisem outras obras de arte baseadas na cultura africana ou afro-brasileira que apresentem transformações geométricas. Vocês podem pesquisar, por exemplo, quadros de Rubem Valentim e esculturas do artista plástico Jorge dos Anjos (1957-).


MUSEU DE ARTE MODERNA DA BAHIA, SALVADOR.

VALENTIM, Rubem. **[Sem título]**. 1989. Serigrafia, 100 cm × 70 cm. Na obra, é possível observar imagens que podem ser associadas às transformações geométricas.

5. **EM DUPLA** Escolha uma das obras pesquisadas e converse com seu colega sobre as obras que selecionaram, baseando-se nas questões a seguir.

a. Qual é o título da obra? Quem a criou?
b. O que você achou da obra? Ela o faz pensar ou sentir algo? Se sim, o quê?
c. Quais cores e figuras geométricas foram utilizadas na obra?
d. Quais figuras geométricas se repetem na obra?
e. Quais transformações geométricas estão presentes na obra?
f. Existem transformações isométricas na obra? Em caso afirmativo, de que tipo elas são: translação, reflexão ou rotação?

Etapa 3: Criação de obras de arte

Etapa 3: Comentários no *Suplemento para o professor*.

6. Agora é a sua vez de criar uma obra de arte inspirada nas culturas africana e afro-brasileira! Com o auxílio de régua, esquadro, transferidor e compasso, faça transformações geométricas. Use a criatividade e lembre-se de que as obras de arte africanas e afro-brasileiras são, em geral, muito coloridas. Você pode fazer as ilustrações com lápis grafite e, em seguida, pintá-las com tinta, giz de cera ou outros materiais. Também é possível representar as figuras geométricas usando papéis coloridos e fazendo uma colagem. Atenção! Cuidado ao usar o compasso.

OBJETO DIGITAL
Carrossel de imagens: Obras de arte baseadas na cultura africana
O carrossel de imagens apresenta algumas obras de Rubem Valentim, artista baiano que utilizava composições geométricas em suas obras como forma de explorar a cultura nacional dando forma a símbolos e emblemas afro-brasileiros. Baseando-se na arte de Rubem Valentim, os estudantes podem criar a própria obra de arte inspirada nas culturas africana e afro-brasileira na **atividade 6**.

Etapa 4: Exposição das obras de arte

Etapa 4: Comentários no *Suplemento para o professor*.

7. **EM GRUPO** Com a ajuda do professor, definam um ambiente adequado da escola para expor as obras de arte criadas. Organizem o espaço de maneira que os visitantes possam circular e observar todas as obras expostas.

8. Crie uma ficha de identificação para sua obra contendo: seu nome, o título de sua obra, os materiais utilizados para fazê-la e a técnica escolhida. Na exposição, essa ficha deverá ser posicionada ao lado da obra.

9. **EM GRUPO** Elaborem uma apresentação para a abertura da exposição. É imprescindível destacar a importância de conhecer e valorizar as culturas africana e afro-brasileira e de combater a desigualdade e a discriminação racial, além de comentar sobre a Década Internacional de Afrodescendentes.

10. **EM GRUPO** Criem convites impressos ou digitais para a comunidade escolar informando o tema, a data e o local da exposição.

Etapa 5: Análise e síntese do trabalho realizado

Etapa 5: Comentários no *Suplemento para o professor*.

11. **EM GRUPO** Após a exposição, reúna-se com toda a turma para avaliar coletivamente o trabalho realizado, com a mediação do professor.

12. Escreva sua autoavaliação em um relatório e entregue-a ao professor. Para isso, considere as seguintes questões:
- Ajudei os colegas nas etapas de pesquisa?
- Participei ativamente dos momentos de conversa?
- Participei na organização da exposição?
- Ouvi as falas dos colegas e do professor com atenção e respeito?
- Busquei apreciar e analisar as obras de arte pesquisadas?
- Consegui reconhecer o uso de transformações geométricas nas obras de arte?
- Senti dificuldades durante a criação da obra de arte? E em outros momentos? Em caso afirmativo, quais foram as dificuldades? Como busquei resolvê-las?
- Ajudei a turma propondo ideias e sugestões durante a realização deste trabalho?
- Compreendi a importância de combater a discriminação racial e a desigualdade racial?
- O que aprendi durante a criação da obra de arte e a organização da exposição?

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

1. **(Enem-2019)** Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo 6 m, é cercado por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, em 8 m, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais 100 m^2 de área. O síndico do condomínio irá avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada.

Utilize 3 como aproximação para π.

A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque **1.** Alternativa **e.**

a. será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 21 m^2.

b. será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 24 m^2.

c. será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 48 m^2.

d. não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 108 m^2.

e. não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 120 m^2.

2. **(Enem-2020)** Uma das Sete Maravilhas do Mundo Moderno é o Templo de Kukulkán, localizado na cidade de Chichén Itzá, no México. Geometricamente, esse templo pode ser representado por um tronco reto de pirâmide de base quadrada.

As quantidades de cada tipo de figura plana que formam esse tronco de pirâmide são **2.** Alternativa **c.**

a. 2 quadrados e 4 retângulos.

b. 1 retângulo e 4 triângulos isósceles.

c. 2 quadrados e 4 trapézios isósceles.

d. 1 quadrado, 3 retângulos e 2 trapézios retângulos.

e. 2 retângulos, 2 quadrados e 2 trapézios retângulos.

3. **(Enem-2022)** Uma cozinheira produz docinhos especiais por encomenda. Usando uma receita-base de massa, ela prepara uma porção, com a qual produz 50 docinhos maciços de formato esférico, com 2 cm de diâmetro. Um cliente encomenda 150 desses docinhos, mas pede que cada um tenha formato esférico com 4 cm de diâmetro. A cozinheira pretende preparar o número exato de porções da receita-base de massa necessário para produzir os docinhos dessa encomenda.

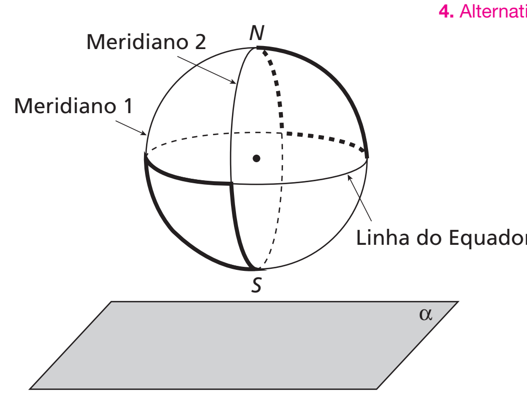
Quantas porções da receita-base de massa ela deve preparar para atender esse cliente? **3.** Alternativa **e.**

a. 2 **c.** 6 **e.** 24

b. 3 **d.** 12

4. **(Enem-2022)** Na figura estão destacadas duas trajetórias sobre a superfície do globo terrestre, descritas ao se percorrer parte dos meridianos 1, 2 e da Linha do Equador, sendo que os meridianos 1 e 2 estão contidos em planos perpendiculares entre si. O plano α é paralelo ao que contém a Linha do Equador.

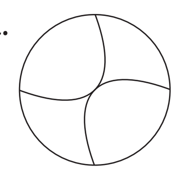
4. Alternativa **e.**



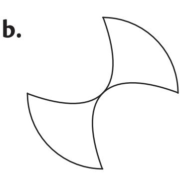
ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

A vista superior da projeção ortogonal sobre o plano α dessas duas trajetórias é

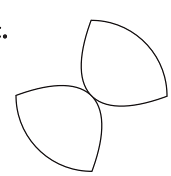
a.



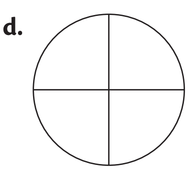
b.



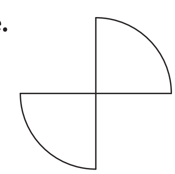
c.



d.



e.



5. **(Enem-2021)** Uma pessoa pretende viajar por uma companhia aérea que despacha gratuitamente uma mala com até 10 kg.

Em duas viagens que realizou, essa pessoa utilizou a mesma mala e conseguiu 10 kg com as seguintes combinações de itens:

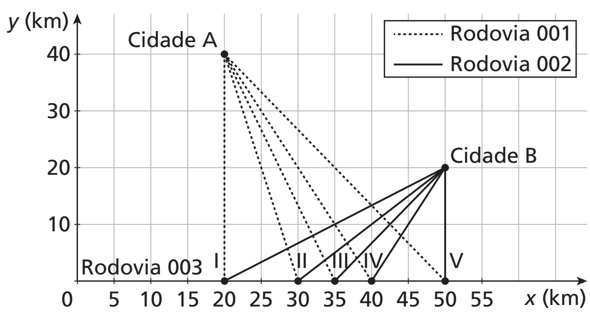
Viagem	Camisetas	Calças	Sapatos
I	12	4	3
II	18	3	2

Para ter certeza de que sua bagagem terá massa de 10 kg, ela decide levar essa mala com duas calças, um sapato e o máximo de camisetas, admitindo que itens do mesmo tipo têm a mesma massa.

Qual a quantidade máxima de camisetas que essa pessoa poderá levar? 5. Alternativa **b**.

a. 22 **b.** 24 **c.** 26 **d.** 33 **e.** 39

6. **(Enem-2022)** O governo de um estado pretende realizar uma obra de infraestrutura para auxiliar na integração e no processo de escoamento da produção agrícola de duas cidades. O projeto consiste na interligação direta das cidades A e B com a Rodovia 003, pela construção das Rodovias 001 e 002. As duas rodovias serão construídas em linha reta e deverão se conectar à Rodovia 003 em um mesmo ponto, conforme esboço apresentado na figura, na qual estão também indicadas as posições das cidades A e B, considerando o eixo *x* posicionado sobre a Rodovia 003, e cinco localizações sugeridas para o ponto de conexão entre as três rodovias.



Pretende-se que a distância percorrida entre as duas cidades, pelas Rodovias 001 e 002, passando pelo ponto de conexão, seja a menor possível.

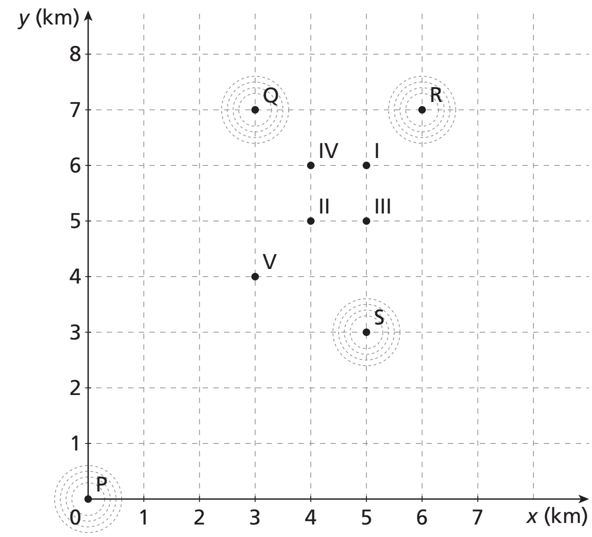
6. Alternativa **d**.

Dadas as exigências do projeto, qual das localizações sugeridas deve ser a escolhida para o ponto de conexão?

a. I **b.** II **c.** III **d.** IV **e.** V

7. **(Enem-2019)** Um aplicativo de relacionamentos funciona da seguinte forma: o usuário cria um perfil com foto e informações pessoais, indica as características dos usuários com quem deseja estabelecer contato e determina um raio de abrangência a partir da sua localização. O aplicativo identifica as pessoas que se encaixam no perfil desejado e que estão a uma distância do usuário menor ou igual ao raio de abrangência. Caso dois usuários tenham perfis compatíveis e estejam numa região de abrangência comum a ambos, o aplicativo promove o contato entre os usuários, o que é chamado de *match*.

O usuário P define um raio de abrangência com medida de 3 km e busca ampliar a possibilidade de obter um *match* se deslocando para a região central da cidade, que concentra um maior número de usuários. O gráfico ilustra alguns bares que o usuário P costuma frequentar para ativar o aplicativo, indicados por I, II, III, IV e V. Sabe-se que os usuários Q, R e S, cujas posições estão descritas pelo gráfico, são compatíveis com o usuário P, e que estes definiram raios de abrangência respectivamente iguais a 3 km, 2 km e 5 km.

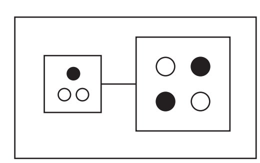


Com base no gráfico e nas afirmações anteriores, em qual bar o usuário P teria a possibilidade de um *match* com os usuários Q, R e S, simultaneamente? 7. Alternativa **a**.

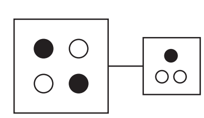
a. I **b.** II **c.** III **d.** IV **e.** V

8. **(UPE-2019)** Considere a figura a seguir. Com base nesta, indique a alternativa que apresenta uma figura obtida quando realizamos uma simetria de reflexão, segundo um eixo vertical.

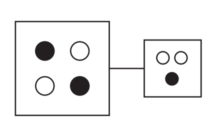
8. Alternativa **a**.



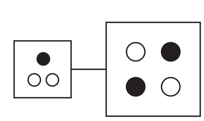
a.



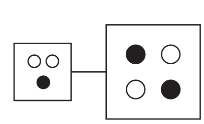
b.



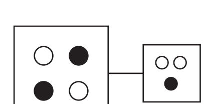
c.



d.



e.



Avaliação diagnóstica 1

1. Alternativa **b**.
2. Alternativa **c**.
3. Alternativa **e**.
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **e**.
6. Alternativa **a**.

CAPÍTULO 1 Superfícies poligonais, círculo e áreas

1. e **2.** Tarefas do estudante.

3. 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm.

4. Tarefa do estudante.
- **a.** $\ell_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$
- **b.** $D = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$
- **c.** $P = 4\sqrt{3}R$

5.
- **a.** Buraco, pois a abertura de cada ângulo interno mede menos que 180°; então, dois desses ângulos, justapostos, têm medida de abertura menor que 360°.
- **b.** Sobreposição, pois a abertura de cada ângulo interno mede mais que 120°; então, três desses ângulos, justapostos, têm medida de abertura maior que 360°.

6. Exemplos de resposta: peças de marchetaria, forros de madeira, papéis de parede, estampas de tecido, vitrais, malharias e crochês.

7. e **8.** Respostas pessoais.

9. Tarefa do estudante.

10.
- **a.** A medida de perímetro dobra e a medida de área quadruplica.
- **b.** A função *P*.
- **c.** (4, 16)

11. 11,2 m^2

12. Sim, pois todo quadrado é retângulo.

13. 8 m^2

14.
- **a.** 3
- **b.** 3
- **c.** 9

15. $12\sqrt{5}$ cm^2

16. $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

17. $100\sqrt{3}$ cm^2

18. Tarefas do estudante.

19.
- **a.** Aproximadamente 1,714 cm^2.
- **b.** Aproximadamente 1,732 cm^2.
- **c.** As medidas de área obtidas pelos dois métodos são próximas.

20. 22,8 cm^2

21. 75 u^2 e 50 u^2, respectivamente.

22. 15 cm^2

23. 8.798 cm^2

24. Alternativa **c**.

25. 4 m e $8\sqrt{3}$ m^2

26. Tarefas do estudante.

27. $9\sqrt{3}$ cm^2

28. $72\sqrt{3}$ cm^2

29. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

30. R$ 120,00

31. $6(1 + \sqrt{2})$ cm

32.
- **a.** 93 cm^2
- **b.** $6(6 + \sqrt{6})$ m^2

33. Resposta pessoal.

34. $\frac{\sqrt{3}}{4}[OA \cdot (OB + OF) + OC \cdot (OB + OD) + $
$+ OE \cdot (OD + OF)]$

35. $C_1 = 2\pi r$
$C_2 = 2\pi(r \cdot k) = C_1 \cdot k$
Logo, a medida do comprimento também será multiplicada por *k*.

36.
- **a.** 2π unidades.
- **b.** $\frac{1}{2\pi}$ unidade.

37. Alternativa **e**.

38. Tarefa do estudante.

39. $\frac{5\pi - 3}{6}$ cm^2

40. 5π cm^2

41. A medida da área dos polígonos inscritos aumenta conforme a quantidade de lados aumenta.

Para finalizar o capítulo 1

Autoavaliação

Q1. Alternativa **d**.
Q2. Alternativa **b**.
Q3. Alternativa **d**.
Q4. Alternativa **a**.
Q5. Alternativa **c**.
Q6. Alternativa **d**.
Q7. Alternativa **a**.

CAPÍTULO 2 Introdução à geometria espacial

1. Infinitos; um único; infinitos.

2. Infinitos planos, um só plano ou nenhum plano.

3. Seis retas.

4. Verdadeira. Basta fixar três pontos da figura por onde passa um único plano e variar o outro ponto, que é coplanar.

5. Três pontos (três pés da mesa) determinam um único plano (do chão); quatro pontos podem determinar mais de um plano.

6.
- **a.** Verdadeira
- **b.** Falsa
- **c.** Falsa
- **d.** Verdadeira

7. Afirmações **a** e **c**.

8.
- **a.** Essas linhas são formadas pelos rastros dos pneus na lâmina de água de chuva do chão da rua.
- **b.** Essas linhas não se cruzam, pois os sulcos dos pneus de um lado do carro mantêm sempre a mesma medida de distância dos sulcos dos pneus do outro lado do carro.

9. Afirmações dos itens **a**, **b** e **c**.
Justificativas: Tarefa do estudante.

10.
- **a.** O fio de prumo serve para verificar a perpendicularidade de superfícies ou estruturas em relação ao solo, assegurando que estejam corretamente alinhadas na vertical.
- **b.** O nível de bolha serve para verificar a horizontalidade ou perpendicularidade de superfícies.

11.
- **a.** 24 pares.
- **b.** 18 pares.

12. Tarefa do estudante.

13. Alternativa **a**.

14.
- **a.** Tarefa do estudante.
- **b.** Resposta pessoal.

15. e **16.** Tarefas do estudante.

17. Podemos afirmar que o ponto *A* pertence ao plano α.

18. Podemos dizer que a medida da distância de qualquer ponto do plano α à reta *r* é maior ou igual à medida da distância de qualquer ponto da reta *r* ao plano α.

19.
- **a.** 2 cm
- **b.** 2 cm
- **c.** $\sqrt{29}$ cm
- **d.** Nula.
- **e.** 5 cm
- **f.** 3 cm
- **g.** 5 cm

20. $E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_3 \cup E_4$; $E_1 \cup E_3$; $E_2 \cup E_4$

21. 60°

22.
- **a.** Sim.
- **b.** Não.

23.
- **a.** Paralelas.
- **b.** Paralelas.

24. Alternativa **d**.

25. Alternativa **c**.

26. Alternativa **a**.

Para finalizar o capítulo 2

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c**.
Q2. Alternativa **a**.
Q3. Alternativa **b**.
Q4. Alternativa **b**.
Q5. Alternativa **d**.
Q6. Alternativa **d**.
Q7. Alternativa **b**.
Q8. Alternativa **a**.
Q9. Alternativa **d**.
Q10. Alternativa **d**.
Q11. Alternativa **c**.
Q12. Alternativa **c**.

CAPÍTULO 3 Poliedros

1. Pentaedro.
2. Heptaedro.
3. 14 faces, 36 arestas e 24 vértices.
4. a. $V = 16$, $F = 10$ e $A = 24$; não convexo.
b. $V = 9$, $F = 9$ e $A = 16$; convexo.
5. Tarefa do estudante.
6. A relação de Euler é satisfeita.
7. 10 vértices.
8. a. Poliedro I.
b. Ambos têm 12 faces.
c. Ambos têm 10 vértices.
d. Ambos têm 20 arestas.
e. Ambos satisfazem a relação de Euler.
9. 8 faces.
10. 11 faces.
11. 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares.
12. 9 faces e 16 arestas.
13. a. Tarefa do estudante.
b. Não é possível, pois qualquer outro posicionamento das quatro faces triangulares resultaria em um triângulo equilátero ou em um paralelogramo respectivamente congruentes às planificações já representadas.
14. 27 arestas, 9 faces e 19 vértices.
15. a. Tarefa do estudante.
b. Resposta pessoal.
16. 18 arestas e 12 vértices.
17. a. A face 6.
b. A face 1.
18. 30
19. Tarefa do estudante.
20. O retângulo, pois o fato de a reta *r* ser perpendicular aos planos garante os quatro ângulos internos retos para as faces laterais.
21. a. Não; não.
b. Respostas pessoais.
22. Quatro.
23. Tarefa do estudante.
24. a. 15 cm
b. $\frac{\sqrt{61}}{2}$ cm
25. $8\sqrt{2}$ cm^2
26. 5
27. Aproximadamente 6,16 m; Rafael pode aceitar a encomenda.
28. 30 cm, 40 cm e 120 cm.
29. a. $3\sqrt{5}$ cm
b. $3(\sqrt{2} + 1)$ cm
30. $10\sqrt{6}$ cm
31. Tarefa do estudante.
32. Alternativa **d**.
33. Alternativa **b**.
34. Exemplo de resposta:
Passo 1. Dados *a* e *h*, dimensões das faces laterais do prisma, calcula-se a medida da área de uma face lateral do prisma.
Passo 2. Multiplica-se por 6 o valor obtido no passo 1 para calcular a medida da área lateral do prisma.
Passo 3. Dada a dimensão da base do prisma hexagonal, calcula-se a medida da área da base.
Passo 4. Multiplica-se por 2 o valor obtido no passo 3 para calcular a medida da área das bases desse prisma.
Passo 5. Calcula-se a soma dos valores obtidos nos passos 2 e 4 para determinar a medida da área total da superfície do prisma hexagonal regular e encerra-se o algoritmo.
35. 1.300 cm^2
36. a. $21\sqrt{3}$ m^2
b. 104 m^2
37. Cubo B.
38. a. 6 u^2, 24 u^2, 54 u^2, 96 u^2.
b. Fica multiplicada por 4; fica multiplicada por 9.
c. 8, 27 e 64, respectivamente.
39. a. Consegue, pois a medida da área total do teto é aproximadamente 43 m^2, e duas demãos equivalem a aproximadamente 86 m^2.
b. Uma demão Carlos consegue, pois a medida da área total das paredes internas é aproximadamente 142 m^2; adicionando o teto, fica 185 m^2. Duas demãos não são possíveis, pois 370 m^2 é maior que o rendimento máximo.
c. Talvez consiga, pois a medida da área total pintada seria aproximadamente 228 m^2, maior que o rendimento mínimo e menor que o rendimento máximo.
40. Resposta pessoal.
41. 14.700 g
42. 216 m^3
43. 105 cm^3
44. 236 cm^2
45. Alternativa **c**.
46. 40 cm^3
47. 3.150 cm^3
48. $\sqrt{71}$ u
49. $4.096\sqrt{3}$ cm^3
50. $\frac{8.000\sqrt{3}}{9}$ L
51. 832 cm^2 e 1.536 cm^3.
52. Menor: 4 cm, 4 cm e 4 cm; maior: 1 cm, 1 cm e 64 cm.
53. a. 8 cm^3
b. 24 cm^2
c. Fica multiplicado por 8.
d. Fica multiplicada por 4.
54. 9 faces.
55. $2n$ arestas, $(n + 1)$ faces e $(n + 1)$ vértices.
56. I e II
57. 10 cm
58. $\sqrt{43}$ dm
59. 13 m
60. Respectivamente, $4\sqrt{2}$ cm, 3 cm e 5 cm.
61. Tarefa do estudante.
62. $108(40 + 3\sqrt{3})$ mm^2
63. 64 cm^2, 80 cm^2 e 144 cm^2.
64. 4 cm
65. 384 cm^2
66. 48 cm^3
67. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm^3
68. Respectivamente, $18\sqrt{3}$ cm^2 e $9\sqrt{2}$ cm^3.
69. $24\sqrt{3}$ cm^3
70. $32\sqrt{3}$ cm^3
71. 192 cm^3
72. 24 cm^3
73. a. 16 cm^2
b. 72 cm^2
c. 88 cm^2
d. $\sqrt{77}$ cm
e. $16\frac{\sqrt{77}}{3}$ cm^3
74. 1 para 12.
75. A medida da altura do prisma é o dobro da medida da altura da pirâmide.
76. $\frac{125}{3}$ cm^3
77. 3 cm^3
78. 2 para 1.

79. Exemplo de resposta:

Passo 1. Dadas as dimensões da aresta lateral e das bases do tronco da pirâmide regular, calcula-se a medida da altura da face lateral do tronco.

Passo 2. Calcula-se a medida da altura do tronco da pirâmide regular.

Passo 3. Calcula-se a medida da altura da pirâmide regular.

Passo 4. Calcula-se a medida do volume do tronco da pirâmide e encerra-se o algoritmo.

80. 8 cm

81. Respectivamente, 12 cm e 1.552 cm^3.

82. 9 m

83. $78\sqrt{3}$ m^3

84. 312 cm^3

Trabalho e juventudes – Engenheiro civil

1. Exemplo de resposta: Capacidade de resolver problemas, boa comunicação, liderança, proatividade etc.
2. Exemplo de resposta: Proteger os trabalhadores contra riscos à saúde e à integridade física.
3. **a.** 81 m^2
   b. $30{,}375\sqrt{3}$ m^3

Para finalizar o capítulo 3

Autoavaliação

Q1. Alternativas **a** e **d**.
Q2. Alternativa **b**.
Q3. Alternativa **d**.
Q4. Alternativa **d**.
Q5. Alternativa **c**.
Q6. Alternativa **c**.
Q7. Alternativa **c**.
Q8. Alternativa **d**.
Q9. Alternativa **b**.

CAPÍTULO 4 Corpos redondos

1. 3π cm^2

2. π

3. $(100\pi^2 + 50\pi)$ cm^2

4. 28π cm^2

5. Medida da altura: 9 cm; medida do comprimento do raio: 6 cm.

6. Resposta pessoal.

7. 1.050π cm^2

8. $(2 + 2\sqrt{3})$ cm

9. 16π dm^2

10. 0,314 mL

11. 500π cm^3

12. 24 dias.

13. $\frac{8}{9}$

14. 48 recipientes menores.

15. 40 cm

16. **a.** Sim. A única diferença entre os métodos são os fatores $\frac{\pi^2}{4}$ e π, que valem cerca de 2,47 e 3,14, respectivamente, com uma diferença de apenas 0,67 entre eles, que pode ser considerada insignificante diante da facilidade com a qual os marceneiros podem realizar o processo da cubagem da madeira.
b. Resposta pessoal.

17. $60°$

18. $\frac{\pi}{3}$

19. $20\sqrt{2}$ cm

20. $10\sqrt{3}$ cm

21. **a.** 135π cm^2; 216π cm^2
b. 260π cm^2; 360π cm^2

22. $1.088\pi\sqrt{13}$ cm^2

23. $2\pi(2 + \sqrt{29})$ cm^2

24. 75π cm^2

25. 1.000π cm^2

26. $\frac{200\sqrt{3}}{3}\pi$ cm^2

27. Resposta pessoal.

28. 5 cm

29. 2,5 m

30. $\left(\frac{84}{5}\right)\pi$ dm^2

31. A superfície lateral tenderia a coincidir com a base do modelo de cone; a medida da área dessa superfície tenderia a ser igual à medida da área da base do modelo de cone.

32. $\frac{23}{6}\pi$ cm^3

33. 36π cm^3

34. 750π cm^3

35. **a.** 240%
b. $\frac{y}{x}$

36. 98π cm^3

37. $\frac{304\pi}{3}$ cm^3

38. $\frac{7}{8}$

39. 520π cm^3

40. A medida da área do círculo máximo. Para uma esfera de raio de medida de comprimento r, essa medida de área máxima é igual a πr^2.

41. **a.** Circunferência.
b. Superfície lateral de um cone.
c. Superfície esférica.

42. $r_1 + r_2$ ou $r_1 - r_2$ ou $r_2 - r_1$.

43. $2\sqrt{2}$ cm

44. 1 cm

45. **a.** 36π cm^2; 36π cm^3
b. 324π cm^2; 972π cm^3

46. $\frac{40}{3}$ cm

47. 32 cm^3

48. 18π cm^2; 36π cm^3

49. $\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^2$

50. $\frac{3}{2}$ radiano

51. e **52.** Tarefas do estudante.

Para finalizar o capítulo 4

Autoavaliação

Q1. Alternativa **b**.
Q2. Alternativa **d**.
Q3. Alternativa **a**.
Q4. Alternativa **a**.
Q5. Alternativa **b**.
Q6. Alternativa **d**.
Q7. Alternativa **b**.
Q8. Alternativa **a**.
Q9. Alternativa **c**.
Q10. Alternativa **c**.

Educação midiática – A lenda do terraplanismo

1. Respostas pessoais.
2. Medida de comprimento da vareta e medida de comprimento da sombra projetada. Exemplo de resposta: Eratóstenes calculou a razão entre a medida de comprimento da sombra projetada e a medida de comprimento da vareta obtendo a tangente do ângulo de medida de abertura α. Com base nessa tangente, ele obteve uma medida aproximada da abertura α.
3. Exemplos de resposta: A posição das estrelas e a visibilidade de algumas constelações apenas no hemisfério Norte ou Sul; a movimentação da Terra em relação ao Sol; a sombra redonda da Terra sobre a Lua durante um eclipse; fotografias da Terra tiradas do espaço.

Pesquisa e ação – Feira de empreendedorismo

Tarefa do estudante.

Avaliação diagnóstica 2

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **b**.
3. Alternativa **a**.
4. Alternativa **b**.
5. Alternativa **e**.
6. Alternativa **b**.
7. Alternativa **d**.
8. Alternativa **b**.

CAPÍTULO 5 Matrizes e determinantes

1. **a.** 1×3
   b. 3×1
   c. 2×1
   d. 2×2

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. $a_{11} = |-6| = 6$, $a_{22} = 7$, $a_{33} = 9$, $a_{13} = 3$, $a_{31} = -7$

5. Resposta possível: $A = (a_{ij})_{3\times4}$, em que $a_{ij} = i^j$.

6. Não; nesse caso, para quaisquer valores de x, y e z, as matrizes A e B não seriam iguais, pois todos os elementos correspondentes precisam ser iguais, mas $a_{11} \neq b_{11}$.

7. Não, pois elas não são de mesma ordem. A primeira é 5×1 e a segunda é 1×5.

8. $a = 1$, $b = 3$, $c = -1$ e $d = -3$.

9. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

10. Diagonal principal: 3, 8 e 15; diagonal secundária: 11, 8 e 7.

11. 375

12. 1

13. 14

14. **a.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$
    c. Não é possível.

15. Resposta pessoal.

16. **a.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
    c. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

17. **a.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

18. **a.** 14
    b. Não existe.

19. Considerando as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, de tal modo que $B = A + A + A$, para cada par i, j, com $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, temos: $(b_{ij}) = (a_{ij}) + (a_{ij}) + (a_{ij}) \Rightarrow (b_{ij}) = 3 \cdot (a_{ij})$
    Logo, $B = 3 \cdot A$.
    Como $B = A + A + A$ e $B = 3 \cdot A$, podemos concluir que: $A + A + A = 3 \cdot A$.

20. **a.** $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$
    b. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$
    c. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{2} \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
    d. $\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$
    e. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$
    f. $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

21. **a.** Verdadeira.
    b. Verdadeira.
    c. Verdadeira.
    d. Falsa.
    e. Verdadeira.

22. $X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

23. **a.** $\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
    b. Não é possível calcular.
    c. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
    d. $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$
    e. $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

24. $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{7}{3}$.

25. $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

26. França: 7 pontos; Jamaica: 5 pontos; Brasil: 4 pontos; Panamá: 0 ponto.

27. **a.** $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$
    $B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
    $A \cdot B \neq B \cdot A$; logo, não vale a propriedade comutativa.
    b. $A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$
    $A \cdot B = A \cdot C$ e $B \neq C$; logo, eliminar a matriz A nos dois membros da igualdade não é uma operação válida.

28. **a.** $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$
    b. X é a matriz identidade de ordem 2.

29. **a.** A e A.
    b. B e B.
    c. C e C.
    d. D e D.
    Os produtos são iguais, respectivamente, às matrizes inventadas.

30. **a.** Calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem 2.
    b. O último passo depende de os anteriores terem sido executados; caso contrário, não é possível saber o valor correto de p ou de s para determinar a diferença $p - s$.

31. **a.** Passo 4: $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$;
    passo 5: $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$;
    passo 6: $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$.
    b. Tarefa do estudante.

32. Tarefa do estudante.

33. **a.** 2
    b. 5
    c. -1

34. **a.** 0
    b. 0

35. -8

36. **a.** -12
    b. -75
    c. -225
    d. -22

37. **a.** 20
    b. 20
    c. 20

38. -1.326

39. **a.** 0; sim.
    b. 0; sim; também valeria zero.
    c. $ad - bc$; $3 \cdot (ad - bc)$; $3 \cdot (ad - bc)$; sim.
    d. $ad - bc$; $ad - bc$; sim.
    e. $ad - bc$; $-(ad - bc)$; $-(ad - bc)$; opostos.
    f. abc; sim.

40. 1, 1, 1. Espera-se que os estudantes respondam que o determinante de I_4 é igual a 1.

41. **a.** Nos dois casos, quando os estudantes tentarem realizar os cálculos na planilha, obterão uma mensagem de erro.
    b. No caso do determinante, isso ocorrerá porque a matriz B não é quadrada; no caso do produto $B \cdot A$, porque o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

Para finalizar o capítulo 5

Autoavaliação

Q1. Alternativa **b**.
Q2. Alternativa **c**.
Q3. Alternativa **d**.

Q4. Alternativa **d.**
Q5. Alternativa **a.**
Q6. Alternativa **a.**
Q7. Alternativa **c.**
Q8. Alternativa **d.**
Q9. Alternativa **b.**
Q10. Alternativa **d.**

CAPÍTULO 6 Sistemas lineares

1. **a.** Sim.
b. Não.
2. 2
3. Exemplos de resposta: (0, 0, 0), (1, −1, −1), (1, 1, 5) e (−2, 2, 2).
4. Sim.
5. Resposta pessoal.
6. $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$
7. $S = \{(0, 0)\}$
8. $m = 1$, $n = 6$ e $P\left(3, \frac{1}{2}\right)$.
9. Tarefa do estudante.
10. **a.** A solução do sistema é $S = \{(-1, 2)\}$
b. As duas equações geraram duas retas coincidentes.
c. Não há solução para esse sistema, pois as retas são paralelas e não coincidentes.
11. 26 estudantes.
12. São misturados 60 L de leite com 2% de gordura e 20 L de leite com 4% de gordura. Há dados desnecessários no enunciado; espera-se que os estudantes façam o tratamento da informação para identificar quais dados podem ser descartados e quais são relevantes para a resolução do problema.
13. Resposta pessoal.
14. **a.** SPD
b. SPI
c. SI
d. SPI
15. **a.** $k = 0$
b. $k \neq 0$
16. **a.** Sim, $a = \frac{15}{2}$;
$S = \left\{\left(\frac{5-2\alpha}{4}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.
b. Não.
17. Resposta pessoal.
18. $m = 1$ e $n = 3$.
19. $a = 2$, $b = -3$ e $c = -4$.
20. **a.** $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e
$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
b. $N = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e
$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
21. **a.** $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 3x - 2x + 2z = 4 \end{cases}$
b. $\begin{cases} 2x + 7y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$
22. **a.** $\begin{cases} 3x + 2y - z = -2 \\ 5x + 4x - 3z = 5 \end{cases}$
b. $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ x - 4y + 7z = 0 \\ 5x - 6z = 3 \end{cases}$
23. Resposta pessoal.
24. Sim.
25. Alternativas **b**, **c** e **d**.
26. **a.** $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow S = \{(2, 8)\}$
b. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \{(1, 2, 3)\}$
27. $a = 0$ e $b = 1$.
28. $m = -\frac{5}{2}$ e $n = 3$.
29. $S = \{(2, -2, 1)\}$; sim.
30. **a.** $S = \{(6, 5)\}$
b. Exemplo de resposta:
$S_2 = \begin{cases} x - 2y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases}$
A primeira equação do sistema linear S_2 é igual à primeira equação do sistema linear S_1. A segunda equação de S_2 foi obtida adicionando a segunda equação de S_1 com a primeira equação de S_1 multiplicada por −1.
c. Resolvendo S_2, obtemos: $S = \{(6, 5)\}$. Portanto, $S_1 \sim S_2$.
31. Resposta pessoal.
32. **a.** $S = \{(2, -1)\}$; SPD.
b. $S = \{(1, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; SPI.
c. $S = \{(3, -2, -1)\}$; SPD.
d. $S = \left\{\left(7\alpha - 4, 1 - 3\alpha, \alpha\right) \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; SPI.
33. **a.** $S = \{(2, 3)\}$
b. $S = \{(3, -1)\}$
c. $S = \{(8, -1)\}$
d. $S = \{(-1, -3)\}$
34. Alternativa **c.**
35. **a.** $S = \{(1, 3)\}$; SPD.
b. $S = \varnothing$; SI.
c. $S = \varnothing$; SI.
d. $S = \{(1, 2, -2)\}$; SPD.
e. $S = \left\{\left(\frac{28 - 3\alpha}{5}, \frac{9 + \alpha}{5}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; SPI.
f. $S = \left\{\left(\frac{\alpha - 5}{3}, \frac{17 - 4\alpha}{3}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; SPI.

Trabalho e juventudes – Farmacêutico

1. Respostas pessoais.
2. **a.** Significa dizer que a quantidade de átomos de cada elemento químico presente no(s) reagente(s) é igual à quantidade de átomos de cada elemento químico presente no(s) produto(s) da reação.
b. As informações importantes são os números de átomos dos reagentes e dos produtos. Uma informação que não interfere no balanceamento é o nome de cada elemento químico.
3. $Fe_3O_4 + CO \rightarrow 3\ FeO + CO_2$

Para finalizar o capítulo 6

Autoavaliação

Q1. Alternativa **a.**
Q2. Alternativa **e.**
Q3. Alternativa **c.**
Q4. Alternativa **d.**
Q5. Alternativa **d.**
Q6. Alternativa **b.**
Q7. Alternativa **b.**
Q8. Alternativa **c.**
Q9. Alternativa **c.**

CAPÍTULO 7 Geometria analítica

1. Tarefa do estudante.
2. **a.** 4º quadrante.
b. 3º quadrante.
c. 1º quadrante.
d. 2º quadrante.
3. Não, porque os pontos *D*, *E* e *F* estão alinhados.
4. **a.** (0, 3), (1, 2), (3, 2), (2, 0), (3, −2), (1, −2), (0, −3), (−1, −2), (−3, −2), (−2, 0), (−3, 2) e (−1, 2).
b. Não.
5. $m, n \in \mathbb{R}$ tal que $m < 8$ e $n > 5$; tarefa do estudante.
6. **a.** Tarefa do estudante.
b. 8 u
c. 6 u
d. Basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo cujos vértices são os pontos *P* e *Q* e a origem do plano cartesiano.
e. 10 u
f. $\sqrt{a^2 + b^2}$
7. **a.** Pontos da reta vertical que passa por (4, 0).
b. Pontos da reta horizontal que passa por (0, −3).
c. Pontos da reta horizontal que passa por (0, 5).
d. Pontos da reta vertical que passa por (−4, 0).

8. **a.** 5 u
b. $\sqrt{10}$ u
c. $\sqrt{97}$ u
d. 4 u

9. **a.** $\sqrt{13}$ u
b. 2 u
c. 3 u

10. A medida da distância entre os pontos corresponde à medida do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo. Assim, a medida dessa distância pode ser calculada usando o teorema de Pitágoras.

11. **a.** 36 u^2
b. 24 u
c. $6\sqrt{2}$ u

12. $P\left(0, \frac{71}{6}\right)$

13. Para provar que o triângulo *ABC* é retângulo, basta calcular as medidas de comprimento de seus lados e verificar que essas medidas satisfazem o teorema de Pitágoras.

14. **a.** Isósceles.
b. Escaleno e retângulo.
c. Equilátero.

15. $C\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}, \frac{-9-\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $C\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{-9+\sqrt{3}}{2}\right)$.

16. **a.** Tarefa do estudante.
b. 3; 3; como $\overline{PR}$ foi obtido pela rotação de $\overline{PQ}$, esses segmentos são congruentes.
c. Equilátero.
d. $\left(\frac{7}{2}, \frac{6-3\sqrt{3}}{2}\right)$
e. Tarefa do estudante.

17. **a.** $M(4, 3)$
b. $M(-5, -2)$

18. **a.** $M(-2, 4)$
b. A resposta seria a mesma.
c. Não, pois a ordem dos vértices poderia ser diferente; assim, por exemplo, $\overline{AD}$ poderia ser uma diagonal do paralelogramo que teria ponto médio $M'(-1, 3)$.

19. **a.** $C(3, 5)$ e $D(2, 7)$; tarefa do estudante.
b. $\left(10 + 2\sqrt{5}\right)$ u

20. $\sqrt{10}$ u

21. (3, 1), (− 5, 7) e (1, −3).

22. Resposta pessoal.

23. **a.** Sim.
b. Não.

24. $x \neq -2$

25. **a.** $m = 1$
b. $m \neq 1$

26. Há infinitas possibilidades, como $P(-1, 2)$ e $Q(2, 5)$.

27. $x - 3y + 7 = 0$

28. $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $B(0, 1)$.

29. **a.** $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
b. O ponto *P* pode ser determinado impondo a condição de alinhamento de três pontos para *P*, *A* e *B* e para *P*, *C* e *D*.
c. Tarefa do estudante.

30. **a.** $y_p = 0; P\left(-\frac{11}{2}, 0\right)$.
b. $x_p = 0; P\left(0, \frac{11}{7}\right)$.
c. $x_p = y_p; P\left(\frac{11}{5}, \frac{11}{5}\right)$.
d. $x_p = -y_p; P\left(-\frac{11}{9}, \frac{11}{9}\right)$.
e. $12x_p = 11; P\left(\frac{11}{12}, \frac{11}{6}\right)$.

31. Respectivamente, "Os pontos *A*, *B* e *C* estão alinhados." e "Os pontos *A*, *B* e *C* são os vértices de um triângulo.".

32. **a.** Não.
b. Sim.

33. **a.** Não.
b. Sim; $5x - 2y - 5 = 0$.

34. $m = 3$

35. $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ e $(-1, 0)$

36. **a.** $4x + 3y - 17 = 0$
b. $x + 3y - 11 = 0$

37. $A(-4, 5)$, $B(0, -3)$ e $C(4, 3)$.
a. $2x + y + 3 = 0$;
$3x - 2y - 6 = 0$;
$x + 4y - 16 = 0$.
b. $5x + 6y - 10 = 0$;
$x = 0$;
$x - 3y + 5 = 0$.
c. $x + 4y - 2 = 0$;
$2x + y - 4 = 0$;
$3x - 2y + 8 = 0$.

38. **a.** Não existe.
b. 0
c. 1
d. $-\frac{\sqrt{2}}{14}$

39. $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} - 6 = 0$

40. **a.** $\sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$
b. $x - y + 3 = 0$

41. Sim. Conhecendo o coeficiente angular da reta, é possível obter sua equação a partir de qualquer um de seus pontos.

42. **a** 65 °H
b. 60 °C ou 60 °H

43. **a.** $m = \frac{\sqrt{3}}{5}; n = \frac{2}{5}$.
b. $m = \frac{\sqrt{2}}{4}; n = \frac{\sqrt{2}}{16}$.

44. $y = 1{,}3x$; tarefa do estudante; aproximadamente 53°.

45. $r: y = \sqrt{3}x - 2; s: y = -x + 4$.

46. **a.** Concorrentes perpendiculares.
b. Concorrentes.
c. Paralelas distintas.
d. Paralelas coincidentes.

47. **a.** Tarefa do estudante.
b. Paralelas distintas.
c. Tarefa do estudante.

48. **a.** $5x - y = 0$
b. $x - 5y = 0$

49. $x + 3y = 0$

50. $y = 2x + 3$

51. **a.** Mediatriz de *AB*: $y = -x - 2$;
mediatriz de *BC*: $y = \frac{1}{3}x$;
mediatriz de *AC*: $y = 3x + 4$.
b. $O\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

52. **a.** $A(1, 1)$, $B(5, -1)$, $C(6, 1)$ e $D(2, 3)$
b. $y - 1 = 0$ e $4x + 3y - 17 = 0$.
c. 10 u^2
d. $6\sqrt{5}$ u

53. **a.** Tarefa do estudante; $\sqrt{17}$ u.
b. Tarefa do estudante; $\sqrt{13}$ u.

54. Sim; sim.

55. **a.** (1, −1), (5, −1) e (8, 2).
b. Calculando a medida da distância entre os pontos (0, 0) e (8, 2).

56. $\frac{4}{5}$ u

57. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ u

58. $\frac{11\sqrt{13}}{26}$ u

59. **a.** $A(-1, 2)$; $x - y - 2 = 0$.
b. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ u
c. 5 u
d. Respectivamente, $\frac{25}{2}$ u^2 e $10\sqrt{2}$ u.

60. $3x - 7y + 12 = 0$ e $7x + 3y + 4 = 0$.

61. Alternativa **b**.

62. Resposta pessoal.

63. Tarefa do estudante.

64. $3x + 2y - 6 \leqslant 0$

65. Tarefa do estudante.

66. **a.** 84 calças.
b. Não, pois *x* e *y* representam o número de calças de cada tipo, então precisam ser números naturais.
c. $x = 210$ e $y = 90$.
d. $30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$, com $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$; não, pois, como a situação está definida apenas para $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$, a representação gráfica da inequação é um conjunto finito de pontos do semiplano $30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$.

67. 17 u^2

68. a. $A(0, 2)$, $B(0, 6)$, $C(2, 0)$ e $D(4, 0)$.

b. $Q\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

c. $\frac{22}{5}$ u²

d. $\frac{14}{5}$ u²

e. $\frac{36}{5}$ u²

69. $(-11, 23)$ ou $(13, -25)$.

70. Resposta pessoal.

71. a. $C(1, 2)$ e $r = 10$.

b. $C(0, 3)$ e $r = \sqrt{5}$.

c. $C(5, 0)$ e $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

72. R e T.

73. Não, pois para alguns valores de x há dois valores de y correspondentes.

74. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

75. a. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

b. $x^2 + y^2 = 16$

76. $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$

77. a. $x^2 + y^2 = 25$

b. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$

78. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 50$

79. a. $C(1, -1)$ e $r = \sqrt{2}$.

b. Não existem.

80. Não representa.

81. $C(3, -9)$ e $r = \sqrt{82}$.

82. a. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

b. $x^2 + y^2 + 10y + 20 = 0$

83. $p < 1$

84. a. $y = 1$

b. $B(-2, 1)$, $C(-2, -1)$ e $D(2, -1)$.

c. Sim; a medida da área da região alaranjada pode ser calculada pela diferença entre a medida da área do círculo e a medida da área do retângulo.

85. a. Exterior.

b. Interior.

c. Pertence.

86. a. Exterior.

b. Pertence.

c. Interior.

87. a. 4 ou 2.

b. $2 < k < 4$

88. Alternativa **b**.

89. a. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{2}$

b. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

c. $\frac{\pi}{2}$ u²

90. a. Tangente; $P(3, 3)$.

b. Secante; $A(1, 0)$ e $B(0, -1)$.

c. Exterior.

91. $-2\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$.

92. $4\sqrt{2}$ u

93. Tarefa do estudante.

94. π u²

95. 10π u

96. a. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 13$

b. $\begin{cases} y \geqslant -x - 2 \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 4 \end{cases}$

97. $\Delta > 0$: a reta é secante;

$\Delta = 0$: a reta é tangente;

$\Delta < 0$: a reta é exterior.

98. Resposta pessoal.

99. a. Tangentes interiores.

b. Secantes.

c. Tangentes exteriores.

d. Disjuntas interiores.

e. Concêntricas.

f. Disjuntas exteriores.

100. Tarefa do estudante.

101. Não há pontos comuns.

102. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 36 \\ x^2 + y^2 \geqslant 4 \end{cases}$

103. Tarefa do estudante.

104. $x^2 + y^2 = 16$; 16π u².

Para finalizar o capítulo 7

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c**.

Q2. Alternativa **a**.

Q3. Alternativa **b**.

Q4. Alternativa **a**.

Q5. Alternativa **c**.

Q6. Alternativa **c**.

Q7. Alternativa **a**.

Q8. Alternativa **b**.

Q9. Alternativa **a**.

CAPÍTULO 8 Transformações geométricas

1. Alternativa **c**.

2. e **3.** Tarefas do estudante.

4. $P(1, 4)$, $Q(2, 1)$ e $R(7, 5)$.

5. Resposta pessoal.

6. Alternativa **a**.

7., **8.**, **9.** e **10.** Tarefas do estudante.

11. Resposta pessoal.

12. 60°

13. Tarefa do estudante.

14. Alternativa **d**.

15., **16.**, **17.**, **18.** e **19.** Tarefa do estudante.

20. Resposta pessoal.

21. Tarefa do estudante.

22. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

23. Tarefa do estudante.

24. a. Tarefa do estudante.

b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

d. Tarefa do estudante.

25. a. Tarefa do estudante.

b. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d. Tarefa do estudante.

Para finalizar o capítulo 8

Autoavaliação

Q1. Alternativa **a**.

Q2. Alternativa **b**.

Q3. Alternativa **c**.

Q4. Alternativa **d**.

Q5. Alternativa **a**.

Educação midiática – *Fake news* – manipulação de imagens

1. Resposta pessoal.

2. Adição.

3. Respostas pessoais.

4. Alternativa **a**.

Pesquisa e ação – Exposição de arte

Tarefa do estudante.

Prepare-se para o Enem e vestibulares

1. Alternativa **e**.

2. Alternativa **c**.

3. Alternativa **e**.

4. Alternativa **e**.

5. Alternativa **b**.

6. Alternativa **d**.

7. Alternativa **a**.

8. Alternativa **a**.

LISTA DE SIGLAS

CNPJ – Cadastro Nacional de Pessoa Jurídica
Crea – Conselho Regional de Engenharia e Agronomia
CRF – Conselho Regional de Farmácia
EEI – Estação Espacial Internacional
Enem – Exame Nacional do Ensino Médio
EPIs – Equipamentos de Proteção Individual
ESA – Escola de Sargento das Armas
Espcex – Escola Preparatória de Cadetes do Exército
EVA – Etileno Acetato de Vinila
Fifa – Federação Internacional de Futebol
GPS – Global Positioning System (Sistema de Posicionamento Global)
IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
MEC – Ministério da Educação
Obmep – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
ONU – Organização da Nações Unidas
UEA – Universidade do Estado do Amazonas
UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais
Unicamp – Universidade Estadual de Campinas
UPE – Universidade de Pernambuco
VDR – Valores diários de referência

BLIKSTEIN, Paulo. **O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação**. 22 dez. 2008. Disponível em: http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html. Acesso em: 11 set. 2024.
Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas também para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.
Livro conceituado e referência em história da Matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. **Currículo de referência em tecnologia e computação**: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. São Paulo: Cieb, 2018. Disponível em: https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.
Esse documento propõe um currículo para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental, complementando a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com foco em tecnologia e computação. A proposta é baseada em três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: https://ibge.gov.br/. Acesso em: 11 maio 2024.
O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 11 set. 2024.
Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, ampliando o tempo mínimo do estudante na escola de 800 horas para 1.000 horas anuais (até 2022) e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple a BNCC, conhecido como Novo Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC: SEB, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 22 out. 2024.
Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC: SEB: Dicei, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 22 out. 2024.
As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica e orientaram a criação da BNCC. Elas são estabelecidas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019.
Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: propostas de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019.
Materiais elaborados como complementação ao que estabelece a BNCC sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).
Livro conceituado em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. **Matemática**: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.
Com mais de 25 anos de experiência, as autoras incentivam professores de Matemática do Ensino Médio a buscar novas ideias para a sala de aula.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade**: história, teoria e pesquisa. 18. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).
Essa obra propõe reflexões sobre a construção de um conhecimento mais integrado e livre, destacando a conexão entre diferentes áreas no ensino e aprendizagem.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos (tomo 1)**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.
Livro sobre história da Matemática com foco na invenção dos algarismos.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos (tomo 2)**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000. v. 2.
Em dois volumes, essa obra busca responder, de forma simples, a diversas questões sobre a história dos algarismos e do cálculo, desde a Pré-história até a era dos computadores.

LIMA, Elon Lages *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).
Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro apresenta tópicos como teoria dos conjuntos e funções (afins, quadráticas, polinomiais, logarítmicas e trigonométricas).

MACEDO, Horácio. **Dicionário de Física ilustrado**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.
Esse dicionário é voltado para quem busca informações gerais e sucintas sobre conceitos de Física, incluindo definições, comentários e referências a verbetes relacionados.

MESTRE, P. A. A. **O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos**. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, 2017.
Essa dissertação propõe estratégias para resolver problemas matemáticos, mapeando as capacidades fundamentais da Matemática, no nível de letramento do Pisa, aos conceitos do pensamento computacional.

SUPLEMENTO PARA O PROFESSOR

Esta coleção tem como objetivo proporcionar aos estudantes uma sólida formação matemática, alinhada com as mais recentes diretrizes educacionais e políticas públicas. Desenvolvida em conformidade com o **Decreto nº 12.021, de 16 de maio de 2024**, que altera o **Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017**, a coleção reforça o compromisso do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) em fornecer recursos educacionais de alta qualidade para a educação básica.

Com uma linguagem acessível ao estudante, a coleção favorece a compreensão e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos. Em cada volume é dado destaque para quatro temas – Desenvolvimento sustentável, Trabalho e juventudes, Educação midiática e Estratégias de estudo –, que procuram engajar os estudantes, facilitar o aprendizado e prepará-los para os desafios do mundo contemporâneo.

Com base nesses critérios, foi elaborado este *Suplemento para o professor*, que se apresenta dividido em duas partes: Parte Geral e Parte Específica.

Na Parte Geral, são feitas considerações e reflexões sobre temas diversos relacionados à educação, aos jovens e à diversidade cultural e étnica do Brasil. Há também uma descrição da estrutura do Livro do Estudante, bem como recomendações de materiais suplementares e sugestões de cronograma bimestral, trimestral e semestral.

A Parte Específica de cada volume traz comentários e orientações que objetivam enriquecer, tanto no aspecto teórico como no metodológico, os temas abordados nos capítulos, além de fornecer resoluções de todas as atividades. Ainda nesta parte, são explicitadas todas as conexões com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), facilitando o planejamento pedagógico.

Com esta coleção, esperamos contribuir para o seu trabalho em sala de aula e oferecer a você uma ferramenta auxiliar para o aprendizado do estudante.

Os editores

SUMÁRIO

PARTE GERAL

Pressupostos teóricos e metodológicos

As **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica**, definidas pelo Parecer CNE/CEB nº 7, de 7 de abril de 2010, e pela Resolução CNE/CEB nº 4, de 13 de julho de 2010, têm como finalidade orientar e assegurar a coerência e a qualidade da Educação Básica no Brasil. Elas estabelecem princípios, fundamentos e procedimentos que devem ser seguidos pelas instituições de ensino em todo o território nacional, garantindo um currículo que promova a formação integral dos estudantes. As diretrizes visam, ainda, assegurar a inclusão, a equidade e o respeito à diversidade, contribuindo para o desenvolvimento das competências e das habilidades necessárias para a vida em sociedade, para o exercício da cidadania e para a continuidade dos estudos em níveis mais avançados.

No que se refere mais especificamente ao Ensino Médio, o documento propõe uma revisão do currículo e uma nova dinâmica ao processo educativo, a fim de se adequar aos tempos de aprendizagem dos estudantes. Segundo as **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** (2013, p. 149), é preciso "permitir diferentes formas de oferta e de organização, mantida uma unidade nacional, sempre tendo em vista a qualidade de ensino".

Esta coleção foi elaborada tendo como referência as **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** e a **Base Nacional Comum Curricular**, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório que norteia a construção dos currículos de todos os sistemas e redes de ensino da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que o conjunto de aprendizagens essenciais e progressivas nela contido constitui o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas, dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC, orientada pelos princípios delineados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, estabelece os conhecimentos, as competências e as habilidades que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Segundo a BNCC (2018, p. 8):

> [...] **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC, dessa forma, estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Conhecimento

Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Pensamento científico, crítico e criativo

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Repertório cultural

Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Comunicação

Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Cultura digital

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Trabalho e projeto de vida

Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentação

Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Autoconhecimento e autocuidado

Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Empatia e cooperação

Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Responsabilidade e cidadania

Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fontes: BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9, 10; INSTITUTO Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Competências gerais da nova BNCC**. Brasília, DF: MEC. Disponível em: http://inep80anos.inep.gov.br/inep80anos/futuro/novas-competencias-da-base-nacional-comum-curricular-bncc/79. Acesso em: 12 set. 2024.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:

EM 13 MAT 103 → Esse código refere-se à habilidade 3 relacionada à competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definições curriculares.

EM: Ensino Médio

13: a habilidade pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição do currículo

MAT: Matemática e suas Tecnologias

1: competência específica à qual se relaciona a habilidade
03: numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência

É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial da BNCC, referente à etapa do Ensino Médio, que aponta as cinco competências específicas para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

Competências específicas[1]	Habilidades
Competência específica 1 Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	**(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT102)** Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas. **(EM13MAT103)** Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos. **(EM13MAT104)** Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. **(EM13MAT105)** Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). **(EM13MAT106)** Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

CONTINUA

1 Para saber mais sobre a finalidade de cada competência específica, consulte: BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 532, 534, 535, 536, 538, 540.

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 2 Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	**(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. **(EM13MAT202)** Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos. **(EM13MAT203)** Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
Competência específica 3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	**(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT303)** Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. **(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. **(EM13MAT307)** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. **(EM13MAT309)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 3	**(EM13MAT312)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. **(EM13MAT313)** Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro. **(EM13MAT314)** Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.). **(EM13MAT315)** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. **(EM13MAT316)** Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
Competência específica 4 Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	**(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. **(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. **(EM13MAT403)** Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. **(EM13MAT404)** Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT405)** Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. **(EM13MAT406)** Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra. **(EM13MAT407)** Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.
Competência específica 5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	**(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. **(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT504)** Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. **(EM13MAT505)** Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

CONTINUA

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 5	**(EM13MAT506)** Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. **(EM13MAT509)** Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. **(EM13MAT510)** Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: elaborado com base em BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 532-541.

As mudanças no Ensino Médio

A **Constituição Federal de 1988**, a **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB** (Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996) e o **Plano Nacional de Educação – PNE** (Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014) garantem a obrigatoriedade do Ensino Médio como dever do Estado e direito de todos, com progressiva universalização e gratuidade. O objetivo é preparar os estudantes para o exercício da cidadania, qualificá-los para o trabalho e desenvolver sua capacidade de continuar aprendendo e adaptando-se com flexibilidade às demandas da sociedade contemporânea, como as rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico.

Nesse contexto, o Ensino Médio, por meio da Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017, passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola e proporcionar uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela formação geral básica, que abrange as competências e as habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC. Além disso, sugere-se a introdução dos Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se afirmar que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do docente que apenas transmite informações, e do estudante que recebe o conteúdo de modo mecânico e descontextualizado.

Dessa maneira, torna-se premente organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como na esfera do trabalho.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

Os jovens e as juventudes

Diante da fluidez das mudanças que se desenham na sociedade contemporânea e que refletem no Ensino Médio, faz-se necessário compreender os jovens: suas identidades culturais, seus gostos, seus estilos, seus valores, suas vivências bem como a ideia do que representa ser jovem hoje.

Nessa óptica, a juventude é entendida de forma mais ampla e não como uma etapa da vida. O indivíduo vai se descobrindo, construindo-se de acordo com o contexto histórico, social e cultural próprios, o que, por sua vez, implica diferentes modos de vivenciar a juventude; daí dizermos juventudes no plural, enfatizando essa grande diversidade dos modos de ser jovem. Para Carrano e Dayrell (2013, p. 15):

> [...] a juventude é uma categoria dinâmica. Ela é transformada no contexto das mutações sociais que vêm ocorrendo ao longo da história. Na realidade, não há tanto uma juventude, e, sim, jovens enquanto sujeitos que a experimentam e a sentem segundo determinado contexto sociocultural onde se inserem e, assim, elaboram determinados modos de ser jovem.

E as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155) consideram

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

Assim, inserir-se no universo dos jovens e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino e aprendizagem.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, como sujeito crítico, participativo, sendo reconhecido no exercício pleno da cidadania e agente de transformação da sociedade. Segundo o **Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA** (Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990):

> Art. 53. A criança e o adolescente têm direito à educação, visando ao pleno desenvolvimento de sua pessoa, preparo para o exercício da cidadania e qualificação para o trabalho, assegurando-se lhes:
>
> I – igualdade de condições para o acesso e permanência na escola;
>
> II – direito de ser respeitado por seus educadores;
>
> III – direito de contestar critérios avaliativos, podendo recorrer às instâncias escolares superiores;
>
> IV – direito de organização e participação em entidades estudantis [...]

A experiência participativa na escola e na própria sociedade permite exercitar não somente a vivência da cidadania como também as escolhas para o seu projeto de vida e para o mundo do trabalho, no qual muitos jovens já estão inseridos enquanto estudam. Tratando-se de escolhas e projeto de vida, vale destacar o jovem do campo. Para acolher esses jovens, é preciso proporcionar um ambiente de aprendizagem que respeite suas origens e experiências. Ao garantir a esses estudantes condições para que se sintam bem-vindos e apoiados, a escola pode combater a evasão escolar e incentivar a continuidade dos estudos, contribuindo para o desenvolvimento sustentável das comunidades rurais. A inclusão desses jovens na educação formal permite ainda que tragam suas perspectivas únicas, enriquecendo o ambiente escolar e promovendo uma educação mais diversa e representativa.

As **Diretrizes Operacionais para a Educação Básica nas Escolas do Campo** (Parecer CNE/CEB nº 36, de 4 de dezembro de 2001, Resolução CNE/CEB nº 1, de 3 de abril de 2002, Parecer CNE/CEB nº 3, de 18 fevereiro de 2008, e Resolução CNE/CEB nº 2, de 28 de abril de 2008) orientam a organização e a implementação de uma educação que atenda às especificidades e necessidades das populações rurais. Essas diretrizes visam assegurar que a educação oferecida nas escolas do campo seja de qualidade, contextualizada e relevante para o cotidiano dos estudantes, promovendo a valorização das culturas locais e o desenvolvimento sustentável das comunidades. Além disso, buscam garantir o direito à educação a todos os jovens do campo, combatendo a desigualdade educacional e fortalecendo a inclusão social por meio de práticas pedagógicas que respeitem as identidades e os saberes do meio rural.

Outro aspecto das juventudes a ser destacado é a sociabilidade. O mundo cultural no qual o jovem está inserido possibilita o reforço da construção de sua identidade. Por meio das diferentes linguagens culturais, o jovem forma grupos nos quais expressa comportamentos e atitudes, posicionando-se diante de si e da sociedade. Dayrell (2016, p. 28) pontua que "o mundo da cultura aparece como um espaço privilegiado de práticas, representações, símbolos e rituais onde os jovens buscam demarcar uma identidade juvenil".

Estar atento aos grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento de seus modos de agir e de seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e bullying* (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotografias e vídeos constrangedores.

As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Nesse contexto, vale destacar as dificuldades enfrentadas pelos jovens que se identificam como LGBTQIAP+, por exemplo: *bullying*, agressões físicas, exclusão social e a falta de representação e de apoio adequado no currículo e nas políticas escolares.

O quadro a seguir explica o significado da sigla LGBTQIAP+, que designa diversas minorias sexuais e de gênero em resposta ao tamanho do espectro e das demandas da comunidade.

Entenda a sigla LGBTQIAP+

L	**Lésbicas:** designa as mulheres, cis ou trans, que sentem atração por outras mulheres, cis ou trans, de forma romântica ou sexual.
G	**Gays**: corresponde aos homens, cis ou trans, que se sentem atraídos por outros homens, cis ou trans, de forma romântica ou sexual.
B	**Bissexuais:** diz respeito às pessoas que se relacionam romântica ou sexualmente com indivíduos de ambos os sexos/gêneros (feminino e masculino).
T	**Transgêneros e travestis:** a transexualidade se refere aos indivíduos que se identificam com o gênero que se distingue ao sexo designado ao nascer, abarcando homens e mulheres que buscam adequar-se à sua identidade de gênero. Já travestis são pessoas que buscam a construção de uma identidade feminina permanente oposta ao seu sexo biológico.
Q	***Queer***: trata-se de uma designação tida como "guarda-chuva", funcionando como um termo que abrange todos da comunidade que não desejam ou não se veem dentro das demais designações, ou seja, sujeitos que não se identificam nem se nomeiam com nenhum gênero em específico.
I	**Intersexo:** abarca as pessoas que têm desígnios sexuais biológicos (órgãos, hormônios e cromossomos masculinos e femininos) de ambos os gêneros.
A	**Assexuais:** nomeiam indivíduos que não sentem atração sexual pelas demais pessoas, sejam sujeitos do mesmo gênero/sexo, sejam indivíduos opostos.
P	**Pansexuais:** orientação sexual que designa as pessoas que desenvolvem atração romântica e sexual pelos demais indivíduos, independentemente da identidade de gênero destes. É importante ressaltar que a pansexualidade se difere da bissexualidade como nível de importância da identidade de gênero para que o indivíduo se relacione ou não com a pessoa.
+	**+ (mais):** corresponde a outras orientações sexuais, identidades e expressões de gênero que são abraçadas pela sigla, além de representar a abertura de uma futura inserção de novas orientações e identidades, demonstrando uma infinitude plural e diversa diante do espectro romântico, sexual e de gênero da humanidade.

Fonte: elaborado com base em UNICEF BRASIL. **LGBTQIAP+ e saúde mental**: acolhendo e lutando contra estigmas e preconceito. [*S. l.*], 23 jun. 2023. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/blog/lgbtqiap-mais-e-saude-mental. Acesso em: 13 set. 2024.

Promover um ambiente inclusivo e seguro contribui para que todos se sintam aceitos e respeitados. Cabe à equipe escolar investir na formação dos profissionais para que compreendam melhor a sexualidade e acolham todos os estudantes. É necessário discutir a sexualidade abertamente e estabelecer regras baseadas no respeito. É essencial realizar rodas de conversa com aqueles que não cumprem as regras ou estão envolvidos em conflitos. Uma escola que acolhe a diversidade ensina valores importantes e prepara os estudantes para viver em uma sociedade plural e melhorar o desempenho acadêmico e a autoestima dos jovens LGBTQIAP+.

Em relação aos jovens em situação de itinerância, como povos ciganos, circenses, migrantes, imigrantes, ou em trânsito, é preciso flexibilizar o currículo, permitindo ajustes no conteúdo e no cronograma das atividades escolares para acomodar as particularidades de suas trajetórias nômades. O suporte adicional, que pode incluir aulas de reforço, também é fundamental para garantir que esses estudantes acompanhem o ritmo escolar e se sintam acolhidos no ambiente educativo.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é importante educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha papel relevante na organização dessa rede, como mediador do processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

Princípios éticos para a construção da cidadania

Vivemos em uma sociedade em que as relações entre indivíduos devem ser pautadas na ética, fortalecendo a dignidade humana, o direito de expressar opiniões e ideias e o respeito sem discriminação. Para Lodi e Araujo (2007, p. 70) essas relações precisam ser construídas "a partir do diálogo, na interação estabelecida entre pessoas imbuídas de razão e emoções em um mundo constituído de pessoas, objetos e relações multiformes, díspares e conflitantes".

Por isso, é necessário aprender a ser cidadão, respeitando e sendo solidário, responsável, justo e não violento, além de dialogar em diversas situações. É importante ser cidadão do lugar onde está inserido, preocupado com as questões locais e ampliando esse conceito, ser cidadão do mundo – a ideia de cidadania global postulada pela Unesco – consciente e preocupado com questões globais, como a pobreza, as desigualdades, as mudanças climáticas e os direitos humanos.

Uma das maneiras de promover essa aprendizagem está no estímulo às reflexões e vivências sobre questões reais na prática, criando no convívio escolar espaços democráticos para tais discussões e busca de soluções que promovam o diálogo, o respeito e a dignidade.

Trazemos algumas questões que podem permear tais discussões. Uma delas é a questão ambiental, preocupação da **Política Nacional de Educação Ambiental – PNEA** (Lei nº 9.795, de 27 de abril de 1999) e das **Diretrizes Curriculares para a Educação Ambiental** (Resolução CNE/CEB nº 2, de 15 de junho de 2012). A PNEA estabelece um marco para a integração da educação ambiental em todos os níveis de ensino, buscando garantir que os estudantes desenvolvam uma compreensão crítica dos problemas ambientais e estejam capacitados para atuar de forma responsável e ética em relação ao meio ambiente. As Diretrizes Curriculares para a Educação Ambiental, por sua vez, orientam a implementação desses princípios no currículo escolar, propondo metodologias e conteúdos que fomentem o pensamento crítico e a ação prática em questões ambientais. Juntas, essas políticas visam promover uma educação que não apenas informe sobre questões ambientais, mas que também engaje os indivíduos em práticas sustentáveis e na construção de um futuro mais equilibrado e sustentável.

Outra questão a ser discutida na escola é aquela relativa ao envelhecimento da população, buscando conscientização e soluções para esse desafio, visto que muitas pessoas idosas são discriminadas, violentadas em seus direitos e, principalmente, abandonadas afetivamente. De acordo com o Censo Demográfico 2022 do IBGE, o Brasil tinha 15,8% da população com 60 anos ou mais de idade, o que indicava um crescimento de aproximadamente 46% em relação ao Censo Demográfico 2010, quando representava 10,8% da população. O **Estatuto da Pessoa Idosa** (Lei nº 10.741, de 1º de outubro de 2003), que assegura à pessoa idosa autonomia, integração e participação efetiva na sociedade, estabelece medidas de proteção contra abusos, negligência e discriminação, assegurando acesso a serviços de saúde, assistência social, educação, cultura e lazer.

Explorar com os estudantes dados estatísticos e situações reais mostradas nos noticiários promove uma compreensão mais profunda das condições e dos desafios enfrentados pelas pessoas idosas. Essa análise permite identificar tendências, problemas e oportunidades de melhoria na qualidade de vida dos idosos, além de sensibilizar os jovens sobre questões de saúde, segurança e direitos. Ao engajar-se com esses dados e relatos, os estudantes desenvolvem habilidades críticas e empáticas, tornando-se cidadãos mais conscientes e preparados para contribuir positivamente para uma sociedade que valoriza e respeita as pessoas idosas.

A questão da violência contra a mulher também precisa estar presente na escola se quisermos uma sociedade mais justa e igualitária. Tratar desse tema ajuda a desconstruir estereótipos de gênero, promovendo o respeito e a igualdade. Para isso, sensibilize os estudantes sobre os impactos da violência e a importância de denunciar e combater tais comportamentos. Para enriquecer debates e reflexões, pode-se trazer para a sala de aula a **Lei Maria da Penha** (Lei nº 11.340, de 7 de agosto de 2006), que criou medidas protetivas, delegacias especializadas, centro de reabilitação e educação para os agressores e diversas ferramentas públicas para o atendimento à mulher. Ao integrar essa temática no ambiente escolar, cria-se um espaço seguro para discutir questões de direitos humanos e empoderamento, preparando os jovens para reconhecer e enfrentar a violência de forma consciente e proativa, contribuindo assim para a redução da violência de gênero a longo prazo.

Outro ponto que contribui para a construção da cidadania é a discussão, na escola, de como nos relacionamos no trânsito. O **Código de Trânsito Brasileiro** (Lei nº 9.503, de 23 de setembro de 1997), em seu artigo 76, propõe a educação para o trânsito em todas as etapas da educação, o que está diretamente ligado a um processo de construção de conceitos para o exercício da cidadania. Ensinar as regras e a importância da segurança no trânsito ajuda a prevenir acidentes e a salvar vidas. Além disso, desenvolve nos estudantes uma compreensão das responsabilidades individuais e coletivas, incentivando atitudes de respeito e cooperação no espaço público. Ao internalizar esses valores, os estudantes se tornam cidadãos mais preparados para contribuir com um trânsito mais seguro e harmonioso, refletindo uma sociedade mais organizada e atenta ao bem-estar de todos.

Nesta coleção, princípios éticos como os da dignidade, do respeito, da liberdade, da responsabilidade e da justiça são trabalhados por meio da abordagem de questões ambientais, do Estatuto da Pessoa Idosa, da Lei Maria da Penha, do Código de Trânsito Brasileiro etc. Tais abordagens podem estar presentes em aberturas de capítulos, seções, contextos de introdução de conteúdos, atividades e objetos educacionais digitais.

Identidades

A diversidade cultural e pluriétnica do Brasil é uma de suas características mais marcantes, resultante de sua rica história de encontros e misturas entre povos indígenas, africanos, europeus e asiáticos. Essa diversidade se reflete em diversos aspectos da vida brasileira, incluindo a música, a culinária, as festas populares, as tradições religiosas e as expressões artísticas. A convivência e a integração de diferentes etnias e culturas contribuem para a formação de uma identidade nacional única e plural, valorizando a multiplicidade de perspectivas e enriquecendo a sociedade. Reconhecer e celebrar essa diversidade é essencial para promover o respeito, a inclusão e a igualdade, fortalecendo a coesão social e a democracia no Brasil.

Por outro lado, toda essa diversidade traz com ela desigualdades sociais, econômicas e raciais. Discriminação, preconceito e exclusão são problemas persistentes que afetam grupos marginalizados, incluindo povos indígenas, afro-brasileiros e imigrantes. A falta de reconhecimento e valorização de todas as culturas pode levar à invisibilidade e à perda de patrimônios culturais importantes. Além disso, políticas públicas inadequadas e a insuficiente implementação de ações agravam essas desigualdades, dificultando a construção de uma sociedade verdadeiramente justa e inclusiva.

Esse panorama também se reflete na escola. Por isso, a fim de contribuir com uma sociedade mais justa e igualitária e promover uma educação antirracista, convém explorar com os estudantes a **História e Cultura Afro-Brasileira e Indígena** (Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003, e Lei nº 11.645, de 10 de março de 2008). Essa exploração pode ser realizada por meio de rodas de conversa e trabalhos em grupo, além da sugestão de elaboração de um produto final, como cartaz, *podcast*, curta-metragem ou outras produções multimídia, ao longo do ano letivo. A formação de uma roda de conversa permitirá que os estudantes compartilhem e debatam suas experiências e perspectivas sobre o racismo e a diversidade em um ambiente seguro e empático. Como conclusão, os estudantes poderão trabalhar em grupo, utilizando ferramentas digitais para a elaboração de projetos que sintetizem as discussões. Para que as ideias e os aprendizados sejam divulgados de modo mais amplo, considere a possibilidade de compartilhar os trabalhos finalizados com a comunidade escolar. Essa abordagem visa não apenas aprofundar a compreensão dos temas antirracistas, mas também engajar os estudantes de maneira significativa e prática, demonstrando que é possível, sim, construir uma educação antirracista. As **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana** (Parecer CNE/CP nº 3, de 10 de março de 2004, e Resolução CNE/CP nº 1, de 17 de junho de 2004), respaldadas pela Lei nº 12.288, de 20 de julho de 2010, que institui o Estatuto da Igualdade Racial e estabelece em sua Seção II, art. 11, a obrigatoriedade do estudo da história geral da África e da população negra no Brasil, observado o disposto na Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, especificam os conteúdos e as metodologias a serem adotados, garantindo que a educação das relações étnico-raciais seja integrada de forma transversal em todos os componentes curriculares, contribuindo para uma formação cidadã que valorize a contribuição desses grupos para a constituição da sociedade brasileira e que se sintam encorajados a combater o racismo estrutural e a discriminação, enfatizando, nesse sentido, uma educação antirracista, que ainda se mostra incipiente no Brasil.

Já as **Diretrizes Nacionais para a Educação Escolar Quilombola** (Resolução CNE/CEB nº 8, de 20 de novembro de 2012), por sua vez, visam garantir que o currículo escolar valorize e preserve a herança cultural quilombola, assegurando que as escolas quilombolas e as que atendem estudantes provenientes de territórios quilombolas levem em consideração as especificidades e práticas socioculturais de tais comunidades. Além disso, essas diretrizes contribuem para a educação antirracista ao promover o respeito e a compreensão das diversidades culturais, combatendo estereótipos e preconceitos desde o início da vida escolar.

As **Diretrizes Nacionais para a Educação em Direitos Humanos** (Resolução CNE/CP nº 1, de 30 de maio de 2012), por sua vez, têm como foco a promoção de uma cultura de respeito, valorização e defesa dos direitos humanos em todas as etapas e modalidades da educação no Brasil e estão alinhadas com as demais diretrizes aqui mencionadas. Incluir essas histórias e culturas no currículo escolar fortalece a identidade e o respeito pelos povos indígenas, afro-brasileiros e quilombolas, incentivando a construção de uma sociedade mais equitativa e democrática, na qual a diversidade é vista como uma riqueza a ser celebrada e protegida.

Esta coleção busca abranger a diversidade cultural e étnica do Brasil por meio de aberturas de capítulos e contextos presentes no estudo de conteúdos e nas atividades. A intenção é enriquecer a experiência de aprendizado para todos os estudantes e promover um ambiente de respeito, valorização e equidade.

A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a **Etnomatemática** – campo de estudo que explora as práticas matemáticas em diferentes contextos culturais. A ideia central é entender como diferentes grupos culturais desenvolvem e utilizam conceitos e técnicas matemáticas para resolver problemas no dia a dia. Isso pode incluir, por exemplo, a forma como comunidades indígenas medem terras, constroem suas habitações ou fazem cálculos para atividades agrícolas.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e precisam ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obra e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por exemplo, usando trigonometria).

Com base nessa perspectiva e diante da diversidade cultural que forma a identidade do povo brasileiro e está presente na sala de aula, trazer a matemática presente na cultura indígena e africana é uma possibilidade de compreender os saberes e fazeres desses povos, valorizando a contribuição cultural, além de diminuir a fronteira entre o currículo e a matemática prática que está fora da sala de aula.

Um modo de atingir esse objetivo é explorar, por exemplo, os grafismos da arte indígena presentes na pintura corporal, na cestaria ou na cerâmica para estudar as transformações geométricas.

Da cultura africana, podemos utilizar não só a arte das estampas e das máscaras, mas também os jogos. Um dos mais conhecidos é o mancala[2], comparável, em alguns aspectos, com o xadrez. O objetivo é distribuir as sementes uma a uma em um tabuleiro com duas cavidades maiores (os oásis) e doze cavas menores. O vencedor será aquele que terminar com o maior número de sementes no oásis. O trabalho com esse jogo permite estimular o raciocínio lógico e estratégico, já que o jogador precisa elaborar estratégias para vencer, e estabelecer relações com a cultura africana, desconstruindo preconceitos, valorizando a contribuição cultural africana.

Portanto, utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrirem a Matemática do dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática com base na valorização cultural dos diferentes grupos que compõem nossa sociedade e estão presentes na sala de aula.

A gestão de sala de aula

Uma boa gestão de sala de aula incentiva a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem instigante tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas, e requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando de sua conservação. Incluí-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático, que atenda a todos os estudantes, incluindo aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e de participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 27) explicam que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os estudantes podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e as atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se realiza uma atividade individual, reduzem drasticamente a interação entre os estudantes. Ao planejar a aula, é necessário também que o professor pense a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

---

2 **Como jogar o mancala.**

Há pelo menos 200 variações do jogo. No Brasil, a mais difundida é a que segue:

Número de participantes: 2

Material: 36 sementes e um tabuleiro com 12 cavas pequenas e dois oásis (cavas maiores que servem de reservatórios).

Objetivo: colocar o maior número de sementes no próprio oásis. Entenda a dinâmica:

1. Os jogadores se sentam frente a frente e ficam com o oásis à sua direita. Em seguida, cada um distribui 18 sementes em suas seis cavas (três em cada). No início, o oásis fica vazio.
2. Quem começa escolhe uma das cavas do seu campo, pega todas as sementes dela e as distribui, uma a uma, nas cavas seguintes, em sentido anti-horário.
3. Se passar pelo próprio oásis, o jogador deixa uma semente nele e segue colocando as demais no campo adversário, mas nunca no oásis de lá. Se a última semente cair no próprio oásis, ele pode fazer outra jogada. Se ela cair em uma cava vazia, ele pode adicionar ao seu oásis todas as sementes da cava seguinte.

Quando as sementes se reduzirem a ponto de não ser mais possível semear o campo adversário, os jogadores recolhem suas sobras, juntam ao seu oásis e contam. Quem tiver mais é o vencedor (disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/9104/um-jogo-para-semear-colher-e-contar. Acesso em: 24 ago. 2024).

A organização do tempo também precisa ser avaliada: um bom planejamento prévio do que e de como será trabalhado, com estratégias diferenciadas a fim de atender às especificidades de cada turma, permite envolver os estudantes em atividades que favoreçam a real aprendizagem.

Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala e intelectual, entre outras), transtornos de aprendizagem, de comportamento ou de conduta – déficit de atenção/hiperatividade, transtorno do espectro autista (TEA)[3] e transtorno opositivo desafiador (TOD)[4], entre outros. É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças que podem impedir a participação na sociedade desses indivíduos.

Para tanto, é necessário mudar paradigmas e rever como se dá a inclusão na escola, respaldada desde 1990 no **Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA** (Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990), no **Estatuto da Juventude** (Lei nº 12.852, de 5 de agosto de 2013) e no **Estatuto da Pessoa com Deficiência** (Lei nº 13.146, de 6 de julho de 2015), que asseguram a todas as crianças e a todos os adolescentes, independentemente de suas condições físicas, sensoriais ou intelectuais, o acesso à educação de qualidade. Nesse contexto, o **Atendimento Educacional Especializado – AEE** (Decreto nº 7.611, de 17 de novembro de 2011) desempenha papel fundamental ao complementar e suplementar o ensino regular, oferecendo recursos e serviços de apoio especializado que promovem a plena participação e aprendizagem dos estudantes com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades (superdotação). O AEE deve ser organizado a fim de atender às necessidades específicas de cada estudante, com a formação de professores capacitados e a adaptação de materiais e espaços escolares, reforçando o compromisso com uma educação inclusiva e equitativa, conforme os princípios do ECA e do Estatuto da Juventude.

Entretanto, apesar do respaldo legal, a garantia do direito de concluir seus estudos e de estar inserido no mercado de trabalho não ocorre na prática. A solução para reverter esse quadro é o acolhimento de estudantes que apresentam deficiências e transtornos de aprendizagem, de comportamento e conduta, com base no entendimento de suas necessidades, e a criação de um ambiente de aceitação na sala de aula por meio de ações, como atividades em grupos que incentivem a interação entre todos.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são caminhos viáveis. No início, pode parecer difícil; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

Nesse contexto de inclusão, é fundamental combater a LGBTQIAP+fobia (junção da sigla LGBTQIAP+ com o sufixo -*fobia*), que, segundo o guia LGBTQIAP+: um guia educativo, significa "medo exagerado ou intolerância/aversão às pessoas que se identificam nessa sigla" (Santos e Jesus, p. 19).

Embora a LGBTQIAP+fobia seja crime, isso não é suficiente para que uma sociedade mude seu padrão de comportamento sociocultural. Para combatê-la, seja no ambiente escolar, seja fora dele, é importante dialogar e criar espaços acolhedores para todos aqueles que se identificam como LGBTQIAP+. Nesse âmbito, é importante combater o preconceito e as diferenças cristalizadas entre meninos e meninas, respeitando o direito de cada indivíduo ser quem é, além de incentivar e apoiar todos a denunciarem atos de discriminação em qualquer campo.

Outro preconceito presente na sociedade e que se reflete na escola é a gordofobia: preconceito contra pessoas gordas manifestado em atitudes, falas, representações negativas e barreiras para a inclusão dos corpos considerados acima do peso "ideal". Torna-se uma violência que precisa ser debatida na escola, ouvindo os estudantes gordos e aqueles que praticam tal violência na busca de tornar a escola um ambiente inclusivo e acolhedor. Para discutir e combater a gordofobia no ambiente escolar, pode-se incentivar os estudantes a relatarem, caso se sintam confortáveis, em uma roda de conversa acolhedora e respeitosa, casos de preconceito e/ou *bullying* de que foram vítimas, por não apresentarem o padrão de beleza imposto pelo mundo da moda e da mídia, ou situações de gordofobia que presenciaram. Como proposta de atividade interdisciplinar com o componente curricular Arte, proponha à turma um estudo sobre os padrões de beleza em diferentes épocas da história e em distintas sociedades, para que possam desconstruir padrões estéticos impostos pela sociedade.

Concomitante a essa discussão – independentemente de ser gordo ou magro, evitando-se estereótipos –, é preciso estabelecer uma conexão com o **Guia alimentar da população brasileira** (2014), elaborado pelo Ministério da Saúde. Esse guia oferece orientações abrangentes sobre alimentação saudável para a população e enfatiza a importância de uma dieta elaborada com alimentos *in natura* ou minimamente processados, promovendo práticas alimentares que valorizam a cultura e a diversidade alimentar brasileira. Além de fornecer diretrizes nutricionais, o guia

---

3 De acordo com o *site* **InformaSUS/UFSCar**, o transtorno do espectro autista (TEA) é uma alteração no neurodesenvolvimento que dificulta a organização de pensamentos, sentimentos e emoções, gerando prejuízos nas interações sociais, na comunicação e no aprendizado. As características desse transtorno variam de caso a caso, daí o nome espectro. As pessoas com TEA podem apresentar déficits persistentes na comunicação e na interação social verbal e não verbal; abordagem social anormal; dificuldade para estabelecer conversa; compartilhamento reduzido de interesses, emoções ou afeto; dificuldade para iniciar ou responder a interação; déficit na compreensão e no aprendizado de gestos e expressões faciais; fragmentação do contato visual e dificuldade de manter relacionamentos. Saiba mais em: https://informasus.ufscar.br/transtorno-do-espectro-autista-tea-o-que-precisamos-aprender/ e https://institutoolgakos.org.br/assets/pdf/publicacao/Cartilha-TEA%20(1).pdf. Acessos em: 24 ago. 2024.

4 O transtorno opositivo desafiador (TOD) é um distúrbio que afeta crianças e adolescentes ou, em algumas situações, é resultado do enfrentamento de situações estressantes (conflitos familiares ou dificuldades escolares) vivenciadas pelo indivíduo, transtornos de ansiedade, transtorno de déficit de atenção e hiperatividade ou transtorno de conduta. Caracteriza-se por um padrão de comportamento desafiador persistente (desafio às regras e à figura da autoridade), frequente e duradoura em relação a esse tipo de comportamento observado na maioria das outras crianças da mesma idade. Dificuldade em lidar com frustrações, teimosia, crises explosivas de raiva após ser contrariado e desejo exacerbado de vingança são características desse transtorno.

aborda aspectos sociais, culturais e ambientais da alimentação, incentivando escolhas conscientes que contribuem para a saúde individual e coletiva. É essencial que esse documento seja utilizado nas escolas de maneira que promova uma compreensão holística da saúde, valorizando a diversidade corporal e combatendo a gordofobia, incentivando práticas alimentares saudáveis sem estigmatizar ou discriminar qualquer grupo de estudantes.

A escola precisa ser um espaço democrático no qual todos possam se expressar, ouvindo e sendo ouvidos em suas diferenças e necessidades. Os educadores precisam estar atentos, como já mencionado, para não reproduzir estereótipos, mas, sim, tornar a escola um espaço de reflexão e transformação da sociedade.

A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo. Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, consigam se desenvolver. Essas propostas, certamente, necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

As metodologias ativas

Para a escola acompanhar as muitas e rápidas mudanças que ocorrem na sociedade, é necessário superar a educação bancária tradicional e focar no protagonismo do estudante exercido no processo de ensino e aprendizagem por meio de uma educação centrada na resolução de problemas, desafios e jogos. Um modo desse protagonismo acontecer é investir nas metodologias ativas. Segundo Jose Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares. Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, utilizando problemas e situações reais, e a ser o protagonista de seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É nessa relação professor-estudante-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, por meio das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar nos conteúdos desenvolvidos e no que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas representam a oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola, além de ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

Como aplicar as metodologias ativas com o livro didático

O uso do livro didático varia conforme a visão pedagógica do professor. Em uma abordagem que valoriza o protagonismo do estudante e a ideia de juventude plural, o livro didático torna-se um recurso a mais para enriquecer a prática docente.

Nesse sentido, esta coleção didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. A **aprendizagem baseada em projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmos ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões coletivas, refletem, analisam e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, a fim de estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessárias, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é importante planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É imprescindível também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar, e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta coleção, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa a ser colocada em prática é a da **sala de aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, fazem uso de aplicativos) ou sugerir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor levantará algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que necessitam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na sala de aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os estudantes aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam também no seu próprio ritmo.

Nesta coleção, o professor poderá propor aos estudantes que analisem antes as aberturas de capítulos, para que tragam dúvidas e comentem o que entenderam. É possível pedir, ainda, que realizem previamente as atividades propostas, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades a serem elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta coleção, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível com base em perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para explicar e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

É importante organizar os grupos de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas e a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e o melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, podem-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que nem todos participam, é fundamental abordar os integrantes do grupo, a fim de retomar os procedimentos de trabalho e revisar as regras. Se a falta de participação persistir, sugere-se a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprender a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual apresenta ora uma linguagem formal, ora um sistema de representação.

Tanto a língua materna como a linguagem matemática apresentam um sistema de representação simbólico, com letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer maior esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É por esse motivo que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

A teoria do filósofo francês Raymond Duval (2011) contribui para que o professor encontre caminhos para a resolução de tal entrave. Na teoria dos registros de representações semióticas em Matemática, Duval explica que, para aprender matemática, é importante que o estudante compreenda ao menos dois tipos de registro de um mesmo objeto matemático (uma representação linguística, uma simbólica ou uma gráfica).

A professora Claudia Flores (2006), em seu artigo "Representações semióticas em Matemática", explica que, para Duval, o pensamento está ligado às operações semióticas e a sua compreensão só é possível com o recurso das representações semióticas, uma vez que:

> [...] as representações no domínio da matemática são consideráveis, já que os objetos matemáticos, não sendo acessíveis pela percepção, só podem sê-lo por sua representação, lembrando que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes, dependendo da necessidade e do uso. Para o caso do objeto matemático, a função, por exemplo, pode-se ter um registro de representação linguística (função linear), um registro de representação simbólica ($y = x$ ou $f(x) = x$), ou ainda, um registro de representação gráfica (o desenho do gráfico da função).

Daí a importância de incentivar a conversão entre esses registros de representação.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante adquira habilidades de leitura e consiga resolver as situações de maneira mais eficaz.

Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é solicitar aos estudantes que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, peça a eles que, em duplas, leiam o texto do colega e deem contribuições para melhorar o texto.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[5] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais – gráficos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas –, bem como ao uso de *softwares*. É preciso que os educadores incluam em sua rotina meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática, propondo atividades em que os estudantes explicitem o raciocínio, aplicando o uso de diferentes gêneros textuais, promovendo discussões/debates e registros variados (orais, pictóricos e corporais).

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da **competência geral 4** da BNCC. Por outro lado, é necessário que haja interação entre os estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode também promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

Para ajudar os estudantes a desenvolver a capacidade argumentativa e de inferência em textos orais e escritos, é essencial incentivar a leitura crítica e diversificada, proporcionando acesso a diferentes gêneros textuais. Promover discussões e debates sobre os textos lidos ajuda a identificar argumentos, pontos de vista e evidências, aprimorando a habilidade de inferência. No que diz respeito à expressão escrita, deve-se incentivar a redação de textos argumentativos, concentrando-se na estrutura lógica e no uso de dados e exemplos concretos. Oferecer *feedback* detalhado e construtivo é fundamental para o desenvolvimento dessas habilidades. Atividades orais, como debates e apresentações, também fortalecem a argumentação e a capacidade de inferência, estimulando a articulação clara e persuasiva das ideias.

Nesta coleção, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, as seções *Educação midiática* e *Trabalho e juventudes*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente, e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

Nesse contexto de mudanças rápidas, os objetos educacionais digitais (OEDs) – *podcasts*, vídeos, carrosséis de imagens, infográficos clicáveis e mapas clicáveis – emergem como ferramentas essenciais para complementar e enriquecer os temas estudados. Esses recursos não apenas aproveitam o potencial das TDIC, mas também estão alinhados com as diretrizes da **Portaria nº 451**, de 16 de maio de 2018, que define critérios e procedimentos para a produção, recepção, avaliação e distribuição de recursos educacionais abertos ou gratuitos voltados para a Educação Básica em programas e plataformas oficiais do Ministério da Educação. Ao atender esses critérios, os OEDs garantem que os materiais oferecidos sejam de qualidade, acessíveis e estejam em conformidade com as políticas educacionais nacionais, tornando-se, assim, fundamentais para a educação no mundo digitalizado de hoje.

A preocupação com essas transformações e sua repercussão na formação das novas gerações faz-se presente na **Política Nacional de Educação Digital – Pned** (Lei nº 14.533, de 11 de janeiro de 2023), que objetiva aprimorar o acesso de toda a população brasileira aos recursos e às ferramentas

5 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

digitais, bem como a garantia da inserção da educação digital no ambiente escolar.

Tais preocupações também estão presentes na BNCC (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

> - pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
> - mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
> - cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e critica.

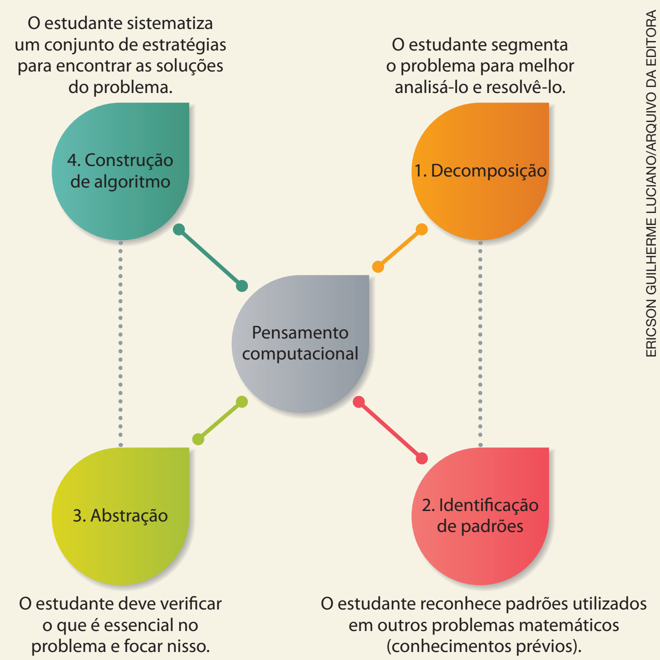
Portanto, o uso do computador no que se refere à educação escolar não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas também à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Como complemento à BNCC, foram instituídas as **Normas sobre Computação na Educação Básica** (Resolução CNE/CE nº 1, de 4 de outubro de 2022), cuja finalidade é integrar o ensino de computação e pensamento computacional de forma transversal no currículo escolar. Essa integração procura desenvolver nos estudantes competências essenciais para o século XXI, como a resolução de problemas, a lógica, a criatividade e a capacidade de inovação. Essas normas visam ainda promover a inclusão digital e a equidade, assegurando a estudantes de diferentes contextos sociais e econômicos oportunidades iguais para aprender e se beneficiar das tecnologias da informação e comunicação.

O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo "*Computational thinking*", da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, para que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares, conforme mostra o esquema a seguir.



Processos cognitivos relacionados ao pensamento computacional.

Fonte: Os editores.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para desenvolver o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. O trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", apresenta atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", realizadas sem o uso do computador, são importantes para incentivar a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão no trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- *Code.org:* apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os estudantes, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.
- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante descobre uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o *Scratch* trazem blocos de comandos que se encaixam, aproximando-se de termos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são encorajados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

Nesta coleção, o Capítulo 10 do volume 1 é inteiro dedicado ao pensamento computacional. Esse capítulo tem como objetivos orientar os estudantes a compreender o conceito de algoritmo, interpretar e construir fluxogramas, entender o que é linguagem de programação e suas estruturas e propõe problemas para que eles resolvam com o auxílio do *Scratch*. Além disso, ao longo da coleção, há diversas atividades pensadas intencionalmente para desenvolver o pensamento computacional.

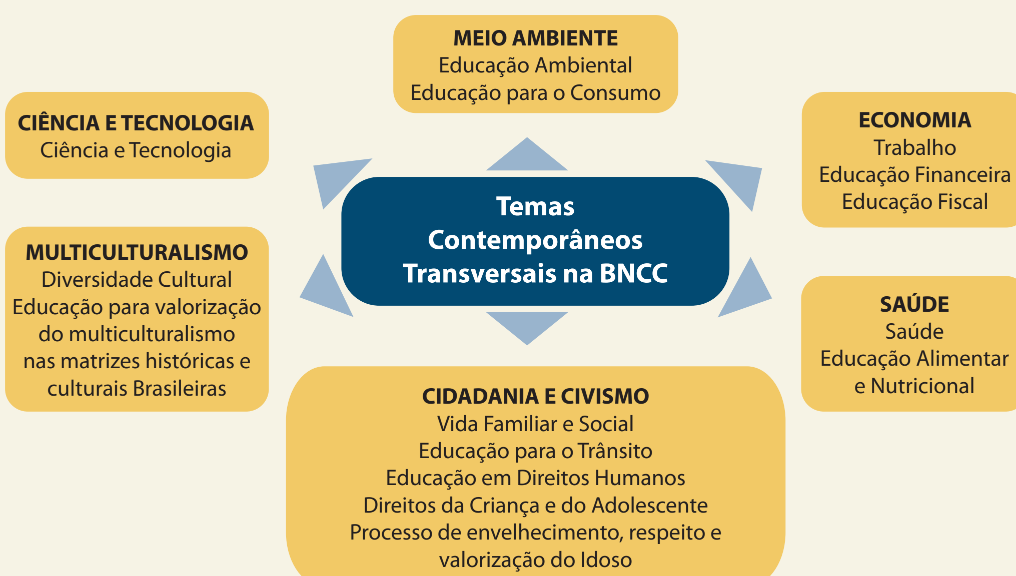
Os Temas Contemporâneos Transversais e a interdisciplinaridade

Os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) têm como finalidade integrar diferentes áreas do conhecimento e abordar questões relevantes e atuais na formação educacional dos estudantes. Eles promovem uma educação crítica e reflexiva, preparando os estudantes para desafios complexos da sociedade contemporânea. Ao abordar temas como sustentabilidade, ética, cidadania, diversidade cultural e inclusão, os TCTs incentivam o trabalho integrado com diferentes áreas, desenvolvem competências socioemocionais e fomentam uma consciência cidadã e global. Desse modo, contribuem para a formação integral do indivíduo, capacitando-o para agir de maneira responsável e participativa na construção de um futuro mais justo e sustentável.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCTs quando afirma que:

> cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.

O esquema a seguir mostra como os quinze TCTs estão organizados em seis macroáreas.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019a.

Ao longo desta coleção, os TCTs são trabalhados por meio de aberturas de capítulos, seções, contextos presentes na teoria e em algumas atividades. Na Parte Específica do Manual do Professor, há comentários que auxiliam o professor na identificação desses momentos e inspiram diálogos em sala de aula.

Os TCTs também podem ser explorados por meio da interdisciplinaridade, o que, por sua vez, vai ao encontro da forma como o currículo do Ensino Médio deve ser elaborado – por área de conhecimento – e planejado de maneira interdisciplinar e transdisciplinar.

O trabalho com a interdisciplinaridade visa proporcionar uma educação mais integrada, preparando os estudantes para compreender e enfrentar a complexidade do mundo contemporâneo. Ao conectar diferentes áreas do conhecimento, a interdisciplinaridade promove o desenvolvimento de habilidades críticas e criativas, facilitando a aplicação prática do aprendizado em situações reais. Além disso, essa abordagem estimula a colaboração entre professores de diferentes disciplinas, enriquecendo o processo educativo e tornando-o mais dinâmico e relevante para os estudantes. Em última análise, a interdisciplinaridade contribui para a formação de indivíduos mais preparados para a vida acadêmica, profissional e pessoal, capazes de pensar de maneira sistêmica e solucionar problemas de forma inovadora e eficaz.

Na coleção, estimula-se o trabalho interdisciplinar por meio dos contextos, seções (*Pesquisa e ação*, *Trabalho e juventudes* e *Educação midiática*), atividades e orientações para o professor.

Temas em destaque na coleção

Na coleção destacam-se quatro temáticas: **desenvolvimento sustentável**, **trabalho e juventudes**, **educação midiática** e **estratégias de estudo**. Essas temáticas são essenciais para proporcionar uma formação integral aos estudantes, conectando o aprendizado matemático às realidades contemporâneas e às demandas do século XXI. O desenvolvimento sustentável é abordado para fomentar, entre outras coisas, a consciência ambiental e a responsabilidade social. O tema trabalho e juventudes visa preparar os estudantes para os desafios do mercado de trabalho e para a construção de um futuro promissor. A educação midiática é integrada para capacitar os estudantes a navegarem e criticar a vasta quantidade de informações digitais. Por fim, as estratégias de estudo são apresentadas para que os estudantes desenvolvam técnicas eficazes de aprendizagem, promovendo a autonomia e a autoeficácia em suas jornadas educacionais.

Desenvolvimento sustentável

Em 2015, os 193 Estados-membros da Organização das Nações Unidas (ONU), incluindo o Brasil, comprometeram-se a adotar a chamada Agenda 2030 para o desenvolvimento sustentável, considerada uma das mais ambiciosas da história da diplomacia internacional. Essa agenda tem como finalidade orientar os esforços globais para alcançar um desenvolvimento sustentável e inclusivo até o ano de 2030. Ela estabelece 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) e 169 metas que visam erradicar a pobreza, proteger o planeta e garantir a todas as pessoas que desfrutem de paz e prosperidade.

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS)

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

ODS	Meta	ODS	Meta	ODS	Meta
1 ERRADICAÇÃO DA POBREZA	Acabar com a pobreza em todas as suas formas, em todos os lugares.	7 ENERGIA LIMPA E ACESSÍVEL	Assegurar o acesso confiável, sustentável, moderno e a preço acessível à energia para todas e todos.	13 AÇÃO CONTRA A MUDANÇA GLOBAL DO CLIMA	Tomar medidas urgentes para combater a mudança climática e seus impactos.
2 FOME ZERO E AGRICULTURA SUSTENTÁVEL	Acabar com a fome, alcançar a segurança alimentar e melhoria da nutrição e promover a agricultura sustentável.	8 TRABALHO DECENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO	Promover o crescimento econômico sustentado, inclusivo e sustentável, emprego pleno e produtivo e trabalho decente para todas e todos.	14 VIDA NA ÁGUA	Conservar e usar de maneira sustentável dos oceanos, dos mares e dos recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável.
3 SAÚDE E BEM-ESTAR	Assegurar uma vida saudável e promover o bem-estar para todas e todos, em todas as idades.	9 INDÚSTRIA, INOVAÇÃO E INFRAESTRUTURA	Construir infraestruturas resilientes, promover a industrialização inclusiva e sustentável e fomentar a inovação.	15 VIDA TERRESTRE	Proteger, recuperar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres, gerir de forma sustentável as florestas, combater a desertificação, deter e reverter a degradação da terra e deter a perda de biodiversidade.
4 EDUCAÇÃO DE QUALIDADE	Assegurar a educação inclusiva e equitativa e de qualidade, e promover oportunidades de aprendizagem ao longo da vida para todas e todos.	10 REDUÇÃO DAS DESIGUALDADES	Reduzir a desigualdade dentro dos países e entre eles.	16 PAZ, JUSTIÇA E INSTITUIÇÕES EFICAZES	Promover sociedades pacíficas e inclusivas para o desenvolvimento sustentável, proporcionar o acesso à justiça para todos e construir instituições eficazes, responsáveis e inclusivas em todos os níveis.
5 IGUALDADE DE GÊNERO	Alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas.	11 CIDADES E COMUNIDADES SUSTENTÁVEIS	Tornar as cidades e os assentamentos humanos inclusivos, seguros, resilientes e sustentáveis.	17 PARCERIAS E MEIOS DE IMPLEMENTAÇÃO	Fortalecer os meios de implementação e revitalizar a parceria global para o desenvolvimento sustentável.
6 ÁGUA POTÁVEL E SANEAMENTO	Assegurar a disponibilidade e gestão sustentável da água e saneamento para todas e todos.	12 CONSUMO E PRODUÇÃO RESPONSÁVEIS	Assegurar padrões de produção e de consumo sustentáveis.		

Fonte: elaborado com base em NAÇÕES UNIDAS BRASIL. Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil. **Nações Unidas Brasil**, Brasília, DF, [202-]. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 30 ago. 2024.

No Livro do Estudante, esses objetivos são trabalhados em aberturas de capítulos, seções e contextos da teoria. Esses momentos estão sinalizados por meio de releituras dos ícones anteriores. Na Parte Específica do Manual do Professor, há comentários a respeito da relação desses objetivos com os temas abordados no Livro do Estudante e de como fomentar discussões em sala de aula.

Trabalho e juventudes

Os jovens enfrentam diversos desafios no mundo do trabalho atualmente, resultantes das rápidas transformações econômicas, tecnológicas e sociais. A automação e a digitalização estão redefinindo o mercado de trabalho, exigindo novas habilidades e competências que muitos jovens ainda não possuem. Além disso, a precarização do trabalho e o crescimento do emprego informal dificultam o acesso a empregos estáveis e bem-remunerados. A competição acirrada e a falta de experiência prática também são obstáculos significativos, frequentemente resultando em altas taxas de desemprego juvenil. A desigualdade de oportunidades, baseada em fatores como gênero, raça e origem socioeconômica, agrava ainda mais a situação. Esses desafios exigem políticas públicas eficazes, educação e formação profissional adaptadas às novas demandas do mercado.

Nesta coleção, temas relacionados ao mundo do trabalho são desenvolvidos principalmente na seção *Trabalho e juventudes*. Nessa seção, são abordados vários temas, como profissões, tributos, igualdade de condições, inclusão no ambiente de trabalho, segurança no trabalho etc., favorecendo uma compreensão abrangente das dinâmicas do mercado de trabalho. Ao explorar diversas profissões e os requisitos associados a cada uma, os estudantes identificam suas próprias vocações e interesses. Assim, ao enfatizar a igualdade de condições e a inclusão, a seção promove a conscientização a respeito da importância de um ambiente de trabalho justo e acessível a todos.

As propostas dessa seção podem ser enriquecidas sugerindo aos estudantes que visitem os locais de trabalho de diversos profissionais. Com a devida autorização dos responsáveis, o professor pode organizar visitas guiadas, proporcionando uma experiência prática e concreta das diferentes carreiras. Isso permite que os estudantes observem de perto as rotinas e ambientes de trabalho, ampliando sua compreensão sobre as possibilidades profissionais.

Educação midiática

Compreender e analisar criticamente informações provenientes de diferentes mídias, como jornais, revistas, televisão, rádio, *sites*, redes sociais etc., é essencial para o exercício pleno da cidadania em um mundo cada vez mais conectado e carregado de informações.

A capacidade de discernir entre fontes confiáveis e questionáveis permite ao cidadão elaborar opiniões informadas, tomar decisões conscientes e participar de maneira ativa e responsável na sociedade. Esse discernimento é fundamental para combater a desinformação, as *fake news* e a manipulação midiática, que podem distorcer a realidade e influenciar negativamente o debate público. Além disso, a análise crítica das informações promove o desenvolvimento do pensamento crítico, a valorização da diversidade de perspectivas e a capacidade de argumentar. Desse modo, um cidadão bem-informado e crítico contribui para a construção de uma sociedade mais democrática, justa e resiliente, capaz de enfrentar desafios complexos e promover o bem comum.

Além de todo esse cenário, há que se citar a inteligência artificial, que vem ganhando cada vez mais espaço. É um campo da ciência da computação que desenvolve algoritmos capazes de realizar tarefas que normalmente requerem inteligência humana, como a capacidade de aprender, reconhecer padrões, tomar decisões e processar textos em linguagem natural. Usada em diversas áreas, como saúde, finanças, transporte, educação e entretenimento, a IA oferece soluções inovadoras e eficientes para problemas complexos, transformando significativamente o modo como vivemos e trabalhamos, trazendo benefícios substanciais, mas também levantando questões éticas e sociais que precisam ser abordadas, como privacidade, segurança e impacto no mundo do trabalho.

Na coleção, esse tema está contemplado na seção *Educação midiática*, que abrange temas essenciais para a formação crítica dos estudantes no mundo digital. Entre os tópicos destacados estão as *fakes news*, em que se explora a identificação e o combate de notícias falsas que circulam nas redes sociais e em outras mídias. Incentiva-se também a análise criteriosa de dados e informações, com o intuito de compreender a verdadeira intenção por trás deles. A seção trabalha ainda com gráficos que induzem a erro, fornecendo subsídios para que os estudantes reconheçam representações visuais enganosas. Além disso, desmistifica a “lenda do terraplanismo”, mostrando evidências científicas que refutam essa crença. O uso da inteligência artificial (IA) é outro ponto abordado, destacando suas potencialidades e limitações no fornecimento de informações. Por fim, a manipulação de imagens é discutida, mostrando técnicas e conceitos matemáticos usados para alterar fotografias, e como essas manipulações podem influenciar a percepção pública.

Estratégias de estudo

Trabalhar com o protagonismo juvenil proposto pela BNCC implica investir no desenvolvimento da autonomia do estudante, seja na escola, seja fora dela. Um dos pontos que dialoga com essa premissa é o ensinar a aprender, a estudar, a buscar informações, a pesquisar, a registrar.

De acordo com a pesquisa “Estratégias de estudo e aprendizagem utilizadas pelos estudantes do Ensino Médio”, desenvolvida por Maciel, Souza e Dantas (2015), o uso eficaz de estratégias de estudo e aprendizagem está associado a fatores motivacionais e autorregulatórios.

Há dois tipos de estratégias: as cognitivas e as metacognitivas. As estratégias cognitivas são aquelas que propiciam o armazenamento da informação como repetir, grifar ou resumir as ideias de um texto; memorizar as informações por meio de questionamentos, anotações e paráfrases; mapear as ideias centrais e fazer relações entre elas.

As estratégias metacognitivas são os meios que cada um usa para planejar, monitorar e regular seu próprio pensamento, avaliando se está obtendo os resultados desejados; ou seja, o estudante planeja o que e como irá estudar ao longo de determinado período, estabelecendo quais ações irá desenvolver para atingir o seu objetivo. Replaneja o que não está dando certo com base na reflexão, buscando outras ações para que, ao final, avalie o resultado, verificando se atingiu aquilo a que se propôs. É um processo que precisa ser ensinado pelo professor.

De acordo com a pesquisa citada anteriormente:

> [...] o uso de estratégias possibilitará ao estudante desenvolver maior autonomia sobre sua aprendizagem e reconhecer-se como sujeito na construção do próprio conhecimento. Outro ponto é que, ao se tornar mais

consciente do próprio processo de aprendizagem, o estudante pode sentir-se em melhores condições de controlar a própria motivação, tornando-se mais engajado em aprender (Maciel; Souza; Dantas, 2015).

Assim, indicar estratégias de estudo variadas para os estudantes é fundamental para promover um aprendizado mais eficaz e significativo. Ferramentas como mapas conceituais, por exemplo, auxiliam na organização e visualização das relações entre diferentes conceitos, facilitando a compreensão dos conteúdos. Já as avaliações permitem que os estudantes monitorem seu progresso e identifiquem áreas que necessitam de mais atenção. Ao utilizar essas estratégias, os estudantes desenvolvem habilidades metacognitivas, tornando-se mais autônomos e proativos no processo de aprendizagem.

Na coleção, as seções *Avaliação diagnóstica* (1 e 2), *Para finalizar o capítulo* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares* atendem essa temática.

Mapa conceitual

Mapa conceitual ou mapa de conceitos é uma estratégia de ensino que tem como finalidade permitir aos estudantes organizarem e integrarem o que estudaram de maneira visual e estruturada.

Na coleção, os mapas conceituais são explorados na subseção *Conexões entre conceitos* da seção *Para finalizar o capítulo*. Nessa subseção, é solicitado aos estudantes que identifiquem palavras/termos que completam corretamente um mapa conceitual parcialmente construído. Propostas como essa não apenas auxiliam na organização do conhecimento, mas também desenvolvem habilidades de pensamento crítico e analítico, à medida que o estudante avalia a relevância e a interdependência dos diferentes conceitos. Além disso, completar mapas conceituais promove a revisão e a consolidação do aprendizado, ajudando os estudantes a internalizar o conteúdo e a se preparar para aplicá-los nas atividades ou situações cotidianas.

Avaliação

Avaliar é uma tarefa difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou de meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico.

Nesse contexto, convém, em primeiro lugar, obter informações sobre habilidades, conhecimentos e necessidades individuais dos estudantes no início de um ciclo de ensino, o que pode ser feito por meio de **avaliações diagnósticas**. Para os estudantes, essas avaliações permitem identificar conhecimentos que dominam e dificuldades, favorecendo o recebimento de apoio direcionado e personalizado que pode ajudá-los a progredir de maneira efetiva na aprendizagem. Para os professores, as avaliações diagnósticas subsidiam o planejamento das aulas e a escolha de estratégias pedagógicas. Elas ajudam a adaptar as aulas às necessidades específicas da turma, promovendo um ambiente de aprendizagem mais inclusivo e eficiente. Ao compreender o ponto de partida dos estudantes, os professores podem estabelecer metas realistas e desafiadoras. Na coleção, em cada volume, são propostas duas avaliações diagnósticas, uma no início do ano letivo e outra no meio. Essas avaliações são compostas de questões de múltipla escolha que permitem identificar lacunas no aprendizado e detectar os conhecimentos previamente adquiridos.

As **avaliações formativas** complementam as avaliações diagnósticas, uma vez que possibilitam aos estudantes acompanhar seu progresso, detectando e identificando suas dificuldades e facilidades. Para os professores é a oportunidade de ajustar estratégias de ensino. A subseção *Autoavaliação* da seção *Para finalizar o capítulo* cumpre essa função.

As avaliações formativas servem de instrumento para que se coloquem em prática dois modelos avaliativos: modelo comparativo e ipsativo. O **modelo comparativo** tem como objetivo comparar o desempenho dos estudantes com um padrão ou critério externo ou com outros grupos de estudantes. Esse tipo de modelo pode motivá-los a buscar melhorias contínuas, pois visualizam seu desempenho em um contexto mais amplo. Já o **modelo ipsativo** tem como finalidade comparar o desempenho de um estudante com ele mesmo ao longo do tempo, possibilitando a ele a análise de seu próprio desenvolvimento e identificando pontos positivos e desafios que tem pela frente. O foco está no progresso individual e pessoal do estudante, valorizando a sua evolução em relação as suas próprias metas e objetivos de aprendizagem.

Ainda considerando a tarefa de avaliar, temos as **avaliações somativas** ou de **resultados**. Essas avaliações ocorrem ao final de um período, com o intuito de verificar se os objetivos educacionais foram alcançados. Além disso, elas oferecem dados importantes para os professores ajustarem suas práticas pedagógicas e melhorarem o currículo, garantindo que os estudantes estejam bem-preparados para os desafios acadêmicos futuros. São exemplos de avaliação somativa as provas, os testes e os projetos finais.

Ao final de cada volume da coleção, é proposta a seção *Prepare-se para o Enem e vestibulares*. Essa seção tem caráter de avaliação somativa e visa ajudar os estudantes a se prepararem para os exames de larga escala.

Um ponto a ser mencionado é a questão do acompanhamento das aprendizagens. Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e as habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho for de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante de formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações.

Outras estratégias de estudo

No mundo de constantes transformações em que vivemos atualmente, o conhecimento evolui rapidamente. Por isso, é primordial estar sempre aprendendo; daí a necessidade de investir no aprender a aprender.

Listamos, a seguir, algumas estratégias de estudo que devem ser trabalhadas com os estudantes em sala de aula para que possam ser utilizadas por eles dentro de sua rotina.

- **Resumos dos conteúdos:** ao resumir os conteúdos, os estudantes identificam os pontos principais e estruturam o conhecimento de forma concisa, o que facilita a revisão e o entendimento aprofundado dos temas. Para que esse método seja eficiente, o estudante precisa ler a teoria, fazer as atividades e depois escrever a explicação do que foi lido e compreendido, com suas próprias palavras. Podem-se também acrescentar desenhos e figuras ao texto.
- **Consulta a materiais complementares:** consultar materiais complementares como livros, *sites*, jogos, *softwares* e videoaulas é uma estratégia de estudo essencial para aprofundar o conhecimento e diversificar as fontes de aprendizado. Esses recursos adicionais oferecem diferentes perspectivas e abordagens sobre o mesmo assunto, permitindo uma compreensão mais ampla e completa. Além disso, o uso de múltiplos formatos de mídia pode tornar o aprendizado mais dinâmico e engajador, facilitando a compreensão e a aplicação prática do conhecimento adquirido. Na coleção, são sugeridos materiais complementares para os estudantes na subseção *Sugestões de ampliação* da seção *Para finalizar o capítulo*.
- ***Flashcards*:** essa estratégia consiste na utilização de cartões pequenos, nos quais são escritos uma pergunta, termo ou conceito de um lado, e a resposta, definição ou explicação do outro. Esses cartões podem ser de papel (*post-it*, por exemplo) ou digitais (obtidos por meio de *softwares* específicos). O objetivo é melhorar a retenção e a recuperação de informações. São ideais para ser usados no estudo de fórmulas matemáticas, definições, propriedades, entre outros.

É importante lembrar que cada um tem suas características e seu ritmo próprio de estudar e aprender. Os estudantes devem estar à vontade para utilizar a estratégia que julgarem conveniente.

Organização e estrutura da obra

A seleção dos conteúdos e temas, nesta obra, foi feita com base nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e nas competências gerais, específicas e habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular. Essa seleção apoia a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes.

O encaminhamento dos conteúdos e as diversas atividades contribuem para que os estudantes apliquem os conhecimentos matemáticos e se apropriem de diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático: indução, dedução e raciocínio por analogia. Além disso, nas aberturas, contextos e seções são abordados temas que envolvem meio ambiente, saúde, pluralidade cultural, cidadania, educação financeira e tecnologia, entre outros, o que favorece a conexão entre o conteúdo e a realidade dos estudantes. Isso não apenas torna o ensino mais relevante e interessante, como também prepara os jovens para serem cidadãos informados e engajados, capazes de entender e enfrentar os desafios do mundo moderno. Essa abordagem promove a interdisciplinaridade, uma vez que facilita interconexões entre diferentes áreas do conhecimento.

A obra está organizada em três volumes, cada qual composto de seções, capítulos e boxes. As páginas iniciais de cada volume apresentam a *Organização da obra*, um texto sobre os *Objetivos de Desenvolvimento Sustentável* e o *Sumário*. No início e no meio de cada volume, são propostas *Avaliações diagnósticas*, que objetivam identificar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes a respeito dos conceitos e procedimentos estudados nos Anos Finais do Ensino Fundamental e que serão mobilizados no decorrer do semestre.

Após o trabalho com as avaliações diagnósticas, inicia-se o estudo dos assuntos previstos nos capítulos.

A abertura de cada capítulo traz um tema no qual está presente o conteúdo a ser estudado, o que possibilita realizar um diagnóstico dos conhecimentos prévios que os estudantes já têm sobre o conteúdo a ser desenvolvido.

Cuidou-se para que os conteúdos de cada capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e pelo boxe *Atividade(s) resolvida(s)*, que trabalha uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

No boxe *Atividades propostas*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade. Algumas delas recebem *tags* especiais, conforme mostra o quadro a seguir.

Significado das *tags* presentes em algumas atividades propostas

Tags	Característica da atividade
EM DUPLA	Para os estudantes realizarem em duplas. Promovem o diálogo e o aprendizado colaborativo.
EM GRUPO	Envolvem a participação de três ou mais estudantes. Também promovem o diálogo e o aprendizado colaborativo.
ARGUMENTAÇÃO	Têm como finalidade desenvolver a capacidade de pensar criticamente e defender pontos de vista, articulando ideias de forma clara e convincente.
SOFTWARE	Envolvem planilhas eletrônicas, *Scratch* ou *softwares* de construção de gráfico/geometria dinâmica.
PENSAMENTO COMPUTACIONAL	Trabalham um ou mais pilares do pensamento computacional, por meio de algoritmos representados por fluxogramas, na língua materna ou no *Scratch*.
ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS	Para os estudantes criarem questões ou enunciados de problemas.
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	Exploram fatos históricos ligados à Matemática.

Ao realizar atividades práticas que envolvem o uso de materiais como compasso ou tesoura, é importante ficar atento aos riscos envolvidos, assegurando sempre a integridade física de todos. É crucial que, antes de iniciar qualquer atividade, o professor identifique potenciais perigos e implemente medidas de segurança apropriadas. É importante sempre fornecer instruções claras e detalhadas aos estudantes sobre os procedimentos corretos e as precauções necessárias ao manusear esses instrumentos. Dessa forma, é possível criar um ambiente seguro e propício ao aprendizado, minimizando o risco de acidentes.

Em alguns capítulos, temos a seção *Trabalho e juventudes*, que aborda temas como profissões, tributos, igualdade de condições, inclusão no ambiente de trabalho, segurança no trabalho etc., favorecendo uma compreensão abrangente das dinâmicas do mercado de trabalho.

Ao término do capítulo, é proposta a seção *Para finalizar*, que se subdivide nas subseções *Conexões entre conceitos*, *Sugestões de ampliação* e *Autoavaliação*. Na subseção *Conexões entre conceitos*, é solicitado aos estudantes que identifiquem palavras/termos que completam corretamente um mapa conceitual parcialmente construído. Na subseção *Sugestões de ampliação*, são sugeridos recursos complementares, como livros, *sites*, jogos, *softwares* e videoaulas, para o enriquecimento e a ampliação do conhecimento e para diversificar as fontes de aprendizado. A subseção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os principais conteúdos trabalhados, o que possibilita aos estudantes acompanhar seu progresso, detectando e identificando suas dificuldades e facilidades. O quadro presente ao final dessa subseção relaciona as questões com os objetivos do capítulo e serve de guia para os estudantes retomarem o que foi estudado. Essa subseção permite trabalhar a **competência geral 10**, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

Ao final do volume, são propostas as seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*.

A seção *Educação midiática* explora temas essenciais para a formação crítica dos estudantes no mundo digital. Os tópicos explorados são: *fakes news*, análise crítica de informações, gráficos que induzem a erro, "lenda do terraplanismo", Inteligência Artificial (IA) e a manipulação de imagens.

Na seção *Pesquisa e ação*, são propostas atividades em grupo que envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece a **competência geral 4**. A seção permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo em que exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a **competência geral 2**. Essa seção favorece também a **competência geral 7**, já que, em algumas atividades, os estudantes discutirão temas, como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a **competência geral 9**, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente.

A seção *Prepare-se para o Enem e vestibulares*, por sua vez, propõe questões do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e de vestibulares de diferentes regiões do país, com o intuito de ajudar os estudantes a se preparar para exames de larga escala.

Também, ao final do volume, são encontradas as *Respostas* de todas as atividades e as *Referências bibliográficas comentadas*.

Sugestões de cronograma

As diferenças de rendimento entre as turmas podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor a outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir sugestões de cronograma bimestrais, trimestrais e semestrais para cada um dos três volumes desta coleção. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

Sugestões de cronograma para o volume 1

Sugestão de cronograma bimestral

1º bimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2 e 3
2º bimestre	Capítulos 4 e 5 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
3º bimestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6, 7 e 8
4º bimestre	Capítulos 9 e 10 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma trimestral

1º trimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2, 3 e 4
2º trimestre	Capítulo 5 *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6 e 7
3º trimestre	Capítulos 8, 9 e 10 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma semestral

1º semestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2, 3, 4 e 5 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
2º semestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6, 7, 8, 9 e 10 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestões de cronograma para o volume 2

Sugestão de cronograma bimestral

1º bimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1 e 2
2º bimestre	Capítulos 3, 4 e 5 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
3º bimestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6 e 7
4º bimestre	Capítulos 8 e 9 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma trimestral

1º trimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2 e 3
2º trimestre	Capítulos 4 e 5 *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Avaliação diagnóstica 2* Capítulo 6
3º trimestre	Capítulos 7, 8 e 9 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma semestral

1º semestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2, 3, 4 e 5 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
2º semestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6, 7, 8 e 9 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestões de cronograma para o volume 3

Sugestão de cronograma bimestral

1º bimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1 e 2
2º bimestre	Capítulos 3 e 4 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
3º bimestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 5 e 6
4º bimestre	Capítulos 7 e 8 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma trimestral

1º trimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2 e 3
2º trimestre	Capítulo 4 *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 5 e 6
3º trimestre	Capítulos 7 e 8 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma semestral

1º semestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2, 3 e 4 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
2º semestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 5, 6, 7 e 8 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestões/referências suplementares

Livros e artigos

Ensino de Matemática

BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). **Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica**: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.

Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a educação e a educação matemática.

BOALER, J. **Mentalidades matemáticas**: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Tradução: Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro aponta os motivos que tornam a Matemática vilã para muitos e mostra como professores, gestores e família podem ajudar a modificar esse cenário. Traz exemplos e atividades práticas que podem tornar a aprendizagem da matemática acessível para todos.

CAMARGO, F.; DAROS, T. **A sala de aula inovadora**: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro mostra como é possível renovar e inovar a sala de aula trazendo mais de 40 estratégias destinadas à educação básica e ao ensino superior para implementar mudanças que levem a um aprendizado ativo.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.

O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

A obra aborda a história de conteúdos matemáticos, discorrendo sobre o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.

HUFF, D. **Como mentir com Estatística**. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.

PONTE, J. P. *et al*. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de trabalhar nessa perspectiva.

PRANE, B. Z. D.; LEITE, H. C. A.; PALMEIRA, C. A. Matemática para deficientes visuais no Ensino Médio regular: desafios, possibilidades e perspectivas. *In:* CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Apresentações** [...]. Recife: Comitê Interamericano de Educação Matemática, 2011.

O artigo apresenta práticas desenvolvidas em sala de aula com estudantes com deficiência visual no Ensino Médio para garantir-lhes o direito à aprendizagem em Matemática, inclusive expondo algumas dificuldades e soluções encontradas durante essa experiência.

Tecnologias da Informação e Comunicação

BACICH. L.; NETO. T. A.; TREVISANI, F. M. **Ensino híbrido:** personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Discute o que é o ensino híbrido e traz propostas e experiências para que esse modelo possa ser implementando nas escolas brasileiras.

História da Matemática

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

A obra mostra o desenvolvimento da Matemática desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.

Sites e artigos da internet

Sites acessados em: 24 ago. 2024.

• http://www.periodicos.capes.gov.br/

Site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). Disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

• https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat

Site da **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Traz artigos de todas as edições publicadas.

• http://www.edumatec.mat.ufrgs.br

Site do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

• https://www.ime.usp.br/lem/

Site do Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade de São Paulo (USP). Objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

• https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/

Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

Revistas e periódicos

BOLETIM GEPEM. Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da UFRRJ. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/index. Acesso em: 25 ago. 2024.

Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. Brasília, DF: Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/index. Acesso em: 25 ago. 2024.

Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem). Traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA (RPM). Rio de Janeiro: SBM. Disponível em: https://rpm.org.br/. Acesso em: 25 ago. 2024.

Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Destina-se àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

Referências bibliográficas comentadas

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE LÉSBICAS, *GAYS*, BISSEXUAIS, TRAVESTIS E TRANSEXUAIS. Secretaria de Educação. **Pesquisa nacional sobre o ambiente educacional no Brasil 2015**: as experiências de adolescentes e jovens lésbicas, *gays*, bissexuais, travestis e transexuais em nossos ambientes educacionais. Curitiba: ABGLT, 2016. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/materiais/pesquisa-nacional-sobre-o-ambiente-educacional-no-brasil-2016/. Acesso em: 25 ago. 2024.

O relatório apresenta as análises e os resultados da primeira pesquisa nacional virtual realizada no Brasil e em outros cinco países latino-americanos com adolescentes e jovens lésbicas, *gays*, bissexuais, travestis e transexuais sobre suas experiências nas instituições de ensino.

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam o uso de metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. **Ensino híbrido**: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

A obra apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, a fim de alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. Existem outras matemáticas? **Nova Escola**, 3 maio 2019. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas. Acesso em: 13 set. 2024.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. **Modernidade líquida**. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Zygmunt Bauman, em suas obras, usa o termo "modernidade líquida" para descrever a fluidez e volatilidade das relações no mundo contemporâneo, em contraste com a "modernidade sólida". Suas obras são referência sobre o tema.

BENDER, W. N. **Aprendizagem baseada em projetos**: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações na sala de aula.

BENEVIDES, B. G. **O que fazer em caso de violência lgbtifóbica**: cartilha de orientações à população LGBTI no combate à LGBTIfobia. Rio de Janeiro: ANTRA e ABGLT, 2020. Disponível em: https://antrabrasil.org/wp-content/uploads/2020/03/cartilha-lgbtifobia.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

A cartilha traz informações e orientações para o enfrentamento das violências e violações dos direitos da população LGBTQIAP+.

BLIKSTEIN, P. **O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação**. Palestra proferida durante o V Congresso Brasileiro de Informática na Educação. Rio de Janeiro, 24-27 out. 2016. Disponível em: http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html. Acesso em: 25 ago. 2024.

O autor aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa é identificar tarefas cognitivas que podem ser feitas mais rapidamente por um computador, e a segunda é programá-lo para executar essas tarefas, transferindo o que não é essencialmente humano.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica**. (Tese de doutorado) Programa de Pós-graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/172208/001054290.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 25 ago. 2024.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. Casa Civil. **Decreto nº 7.611, de 17 de novembro de 2011**. Dispõe sobre a educação especial, o atendimento educacional especializado e dá outras providências. Brasília, DF: Casa Civil, 18 nov. 2011. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2011/decreto/d7611.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento dispõe sobre a educação especial e o atendimento de educação especializada nas instituições de ensino no país.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990**. Dispõe sobre o Estatuto da Criança e do Adolescente e dá outras providências. Brasília: DF: Casa Civil, 1990. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l8069.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento garante os direitos e deveres das crianças e dos adolescentes em todo o país.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e as bases da educação nacional. Brasília, DF: Casa Civil, 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento disciplina a educação escolar vinculando-a ao mundo do trabalho e à prática social, além de abranger todos os processos formativos nos diferentes segmentos sociais.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 9.503, de 23 de setembro de 1997**. Institui o Código de Trânsito Brasileiro. Brasília: DF: Casa Civil, 1997. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9503.htm. Acesso em: 12 jul. 2024.

O documento institui o Código de Trânsito Brasileiro nas vias terrestres do território nacional.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 9.795, de 27 de abril de 1999**. Dispõe sobre a educação ambiental, institui a Política Nacional de Educação Ambiental e dá outras providências. Brasília: DF: Casa Civil, 1999. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9795.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui a política nacional de educação ambiental, objetivando preservar, melhorar e recuperar a qualidade ambiental assegurando, no país, as condições necessárias para um desenvolvimento socioeconômico sustentável.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira" e dá outras providências. Brasília, DF: Casa Civil, 2003. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/l10.639.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento inclui no currículo oficial das redes de ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira".

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 10.741, de 1º de outubro de 2003**. Dispõe sobre o Estatuto do Idoso e dá outras providências. Brasília, DF: Casa Civil, 2003. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/L10.741compilado.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui o Estatuto do Idoso, regulando os direitos assegurados às pessoas com idade igual ou superior a 60 anos.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 11.340, de 7 de agosto de 2006**. Cria mecanismos para coibir a violência doméstica e familiar contra a mulher, nos termos do § 8º do art. 226 da Constituição Federal, da Convenção sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação contra as Mulheres e da Convenção Interamericana para Prevenir, Punir e Erradicar a Violência contra a Mulher; dispõe sobre a criação dos Juizados de Violência Doméstica e Familiar contra a Mulher; altera o Código de Processo Penal, o Código Penal e a Lei de Execução Penal e dá outras providências. Brasília, DF: Casa Civil, 2006. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2006/lei/l11340.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui a Lei Maria da Penha a fim de combater e coibir a violência contra a mulher no país.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 11.645, de 10 de março de 2008**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, modificada pela Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da rede de ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira e Indígena". Brasília, DF: Casa Civil, 2008. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2008/lei/l11645.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento acrescenta à Lei nº 10.639 a obrigatoriedade de se estudar a história e a cultura indígena e afro-brasileira nos estabelecimentos de ensino fundamental e médio.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 12.288, de 20 de julho de 2010**. Institui o Estatuto da Igualdade Racial. Brasília, DF: Casa Civil, 2010. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2010/lei/l12288.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento estabelece a obrigatoriedade do estudo da história geral da África e da população negra no Brasil, observado o disposto na Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 12.852, de 5 de agosto de 2013**. Dispõe sobre o Estatuto da Juventude e dá outras providências. Brasília, DF: Presidência da República, 2013. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/CCIVIL_03/_Ato2011-2014/2013/Lei/L12852.htm. Acesso em: 14 abr. 2024.

O estatuto define os direitos dos jovens entre 15 e 29 anos e determina as diretrizes para as políticas públicas voltadas para esse grupo, com o objetivo de garantir o desenvolvimento integral dos jovens e sua participação ativa na sociedade.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 13.146, de 6 de julho de 2015**. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Brasília, DF: Casa Civil, 2015. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13146.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui o Estatuto da Pessoa com Deficiência, objetivando assegurar e promover, em condições de igualdade, o exercício dos direitos e das liberdades fundamentais por pessoa com deficiência, visando à sua inclusão social e à sua cidadania.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e as bases da educação nacional, e a Lei nº 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho – CLT, aprovada pelo Decreto-Lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Brasília, DF: Casa Civil, 2017. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

Documento que reorganiza o Ensino Médio substituindo a legislação vigente até então em todo o país.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 14.533 de 11 de janeiro de 2023**. Institui a Política Nacional de Educação Digital e altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a Lei nº 9.448, de 14 de março de 1997, a Lei nº 10.260, de 12 de julho de 2001, e a Lei nº 10.753, de 30 de outubro de 2003. Brasília, DF: Casa Civil, 2023. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2023-2026/2023/Lei/L14533.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui a política nacional de educação digital visando incrementar os resultados das políticas públicas relacionadas ao acesso da população brasileira a recursos, ferramentas e práticas digitais, com prioridade para as populações mais vulneráveis.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CP nº 3, de 10 de março de 2004**. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana. Brasília, DF: CNE, 10 mar. 2004. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/cnecp_003.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento analisa e regulamenta a Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003, sobre as diretrizes e bases da educação nacional para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática “História e Cultura Afro-Brasileira”.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Parecer CNE/CEB nº 3, de 18 de fevereiro de 2008**. Reexame do Parecer CNE/CEB nº 23, de 12 de setembro de 2007. Brasília, DF: CNE/CEB, 18 fev. 2008. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/2008/pceb003_08.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento reexamina o parecer nº 23/2007 referente às orientações para o atendimento da educação no campo.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Parecer CNE/CEB nº 7, de 7 de abril de 2010**. Estabelece as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica. Brasília, DF: Ministério da Educação, 7 abr. 2010. Disponível em: https://prograd.ufu.br/sites/prograd.ufu.br/files/media/documento/parecer_cneceb_no_72010_aprovado_em_7_de_abril_de_2010.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento analisa as diretrizes curriculares nacionais gerais para a Educação Básica em todo o país.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Parecer CNE/CEB nº 36, de 4 de dezembro de 2001**. Dispõe sobre as diretrizes operacionais para a Educação Básica nas escolas do campo. Brasília, DF: CNE/CEB, 4 dez. 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/EducCampo01.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento analisa as diretrizes operacionais para a Educação Básica para as escolas do campo.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução CNE/CEB nº 1, de 4 de outubro de 2022**. Estabelece as normas sobre computação na Educação Básica – complemento à BNCC. Brasília, DF: CNE/CEB, 4 out. 2022.

O documento é um complemento à BNCC e fundamenta as normas e os usos da tecnologia e da inclusão digital aos estudantes da Educação Infantil ao Ensino Médio.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução CNE/CEB nº 2, de 28 de abril de 2008**. Estabelece diretrizes complementares, normas e princípios para o desenvolvimento de políticas públicas de atendimento da Educação Básica do campo. Brasília, DF: CNE/CEB, 28 abr. 2008. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/resolucao_2.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento estabelece as diretrizes complementares, as normas e os princípios para o desenvolvimento de políticas públicas de atendimento da Educação Básica do campo.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução nº 2, de 15 de junho de 2012**. Estabelece as Diretrizes Curriculares para a Educação Ambiental. Brasília, DF: CNE/CEB, 15 jun. 2012. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rcp002_12.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento estabelece as diretrizes curriculares nacionais para a Educação Ambiental em vigor no país.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução nº 8, de 20 de novembro de 2012**. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Escolar Quilombola na Educação Básica. Brasília, DF: CNE/CEB, 20 nov. 2012. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/etnico_racial/pdf/resolucao_8_201112.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento define as diretrizes curriculares nacionais para a Educação Escolar Quilombola na educação básica do país.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, DF: Presidência da República, [2016]. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento é a lei fundamental e suprema do país, regendo e validando todas as normativas de ordem jurídica, política e social.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

Esse documento oficial do MEC apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – Computação**: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022.

O documento é um complemento à BNCC e contém as normas que orientam a implementação do uso da tecnologia em sala de aula, da Educação Infantil ao Ensino Médio, garantindo o direito de aprendizagem relacionado ao uso crítico das ferramentas digitais.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução CNE/CEB nº 1, de 3 de abril de 2002**. Inclui as diretrizes operacionais para a Educação Básica no campo. Brasília, DF: MEC, 3 abr. 2002.

O documento institui as diretrizes operacionais para a Educação Básica no campo.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução nº 1, de 17 de junho de 2004**. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana. Brasília, DF: CNE/CEB, 2004. Disponível em: https://prograd.ufu.br/legislacoes/resolucao-cnecp-no-1-de-17-de-junho-de-2004#:~:text=Resumo%3A,Cultura%20Afro%2DBrasileira%20e%20Africana. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento fundamenta a Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003, que institui as diretrizes curriculares nacionais para a educação das relações étnico-raciais e para o ensino de História e Cultura Afro-brasileira e Africana nas escolas do país.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução nº 4, de 13 de julho de 2010**. Estabelece as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica. Brasília, DF: MEC, 13 jul. 2010. Disponível em: https://prograd.ufu.br/sites/prograd.ufu.br/files/media/documento/resolucao_cneceb_no_4_de_13_de_julho_de_2010.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento define as diretrizes curriculares nacionais gerais para a Educação Básica para o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC: SEB: Dicei, 2013. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/mod/folder/view.php?id=3934461. Acesso em: 25 ago. 2024.

Esse documento do Ministério da Educação define as normas obrigatórias para a implementação do currículo da Educação Básica no país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a educação das relações étnico-raciais e para o ensino de História e Cultura Afro-brasileira e Africana**. Brasília, DF: MEC, 2004. Disponível em: https://media.ceert.org.br/portal-4/pdf/diretrizes.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento traz informações, marcos legais das diretrizes curriculares para a educação das relações étnico-raciais e para o ensino da História e da Cultura Afro-brasileira e Africana, ampliando o debate sobre o tema no país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BRASIL. Ministério das Relações Exteriores. **Transformando nosso mundo**: a agenda 2030 para o desenvolvimento sustentável. Brasília, DF: Governo Federal: ONU Brasil, 2016. Disponível em: https://www.mds.gov.br/webarquivos/publicacao/Brasil_Amigo_Pesso_Idosa/Agenda2030.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

A publicação traz informações sobre a Agenda 2030, a Declaração dos Objetivos Sustentáveis pela ONU, os 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, os meios de implementação bem como seu acompanhamento.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília, DF: Ministério da Saúde/Secretaria de Atenção à Saúde/Departamento de Atenção Básica, 2014. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento apresenta as primeiras diretrizes alimentares oficiais para a população brasileira com o objetivo de promover a saúde e a boa alimentação, combatendo a desnutrição, prevenindo a obesidade, o diabetes, o AVC, o infarto e o câncer.

BUCK INSTITUTE FOR EDUCATION. **Aprendizagem baseada em projetos**: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

A obra descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos com ferramentas e recursos de auxílio a sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. **Gestão de EAD no ensino híbrido**: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Presidente Prudente: Centro Universitário Toledo Prudente, 2017. Disponível em: https://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O autor aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.

CARRANO, P.; DAYRELL, J. (org.). **Formação de professores do Ensino Médio**: o jovem como sujeito do Ensino Médio. Etapa I – caderno II. Curitiba: UFPR: Setor de Educação, 2013. Disponível em: https://observatorioensinomedio.wordpress.com/wp-content/uploads/2014/03/web-caderno-2.pdf. Acesso em: 13 set. 2024.

A coleção tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que pretendem facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. **Planejando o trabalho em grupo**: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em pesquisa e experiência docente, o livro traz informações importantes sobre a aplicação com sucesso da aprendizagem cooperativa, a fim de construir salas de aula equitativas. O livro inclui pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando a contribuição do trabalho em equipe para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e a organização das salas de aula pelos professores para que todos participem ativamente.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da Matemática e de seu ensino, bem como as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatematica.

DAYRELL J. (org.). **Por uma pedagogia das juventudes**: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária dedicado a construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de processos educativos efetivamente dialógicos, baseados em encontros inter e entre gerações.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. **Revista Thelma**, Pelotas, v. 14, n. 1, p. 268-288, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. As autoras realizam um estudo bibliográfico das principais teorias de aprendizagem, como a interação social de Vygotsky, a experiência de Dewey e a aprendizagem significativa de Ausubel.

EDUCAÇÃO para a cidadania global: preparando estudantes para os desafios do século XXI. Brasília, DF: Unesco, 2015. Disponível em: https://www.mprj.mp.br/documents/20184/1330165/Educacao_para_a_cidadania_global_-_Unesco.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

A publicação traz os pressupostos teóricos e práticos para a aplicação da educação para a cidadania global (ECG): abordagens curriculares, uso de tecnologias da informação e comunicação, abordagens baseadas nos esportes e na arte, na comunidade e na formação de professores, e iniciativas lideradas por jovens.

FERRARI, A. C.; MACHADO, D; OCHS, M. **Guia da educação midiática**. São Paulo: Instituto Palavra Aberta, 2020. Disponível em: https://educamidia.org.br/api/wp-content/uploads/2021/03/Guia-da-Educac%CC%A7a%CC%83o-Midia%CC%81tica-Single.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O livro traz dicas e exemplos que ajudam o professor a incorporar a educação midiática em sua prática diária.

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In:* SOUSA, C. A. de M. *et al*. (org.). **Juventudes e tecnologias**: sociabilidades e aprendizagens. Brasília, DF: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nosso cotidiano. Adolescentes e jovens usam em seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O artigo apresenta estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Bolema**, v. 19, n. 26, p. 77-102, 2006. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1853. Acesso em: 25 ago. 2024.

O artigo aborda o papel dos registros de representações semióticas para a aprendizagem matemática com base nos estudos de Raymond Duval.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. **Nova Escola**, 14 ago. 2018. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula. Acesso em: 30 set. 2024.

Ao reconhecer que os professores têm receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). **Projetos pedagógicos no contexto escolar**: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade escolar e seus projetos, propondo caminhos para planejar e desenvolver processos de ensino. Discute práticas, sugere formas de implementá-las e incentiva sua realização nas escolas.

HORN, M. B.; STAKER, H. **Blended**: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Os autores apresentam um guia para implementar o ensino híbrido, combinando ensino presencial e virtual, centrado no estudante. O ensino híbrido é uma tendência global na educação, oferecendo um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). **Panorama do Censo 2022**. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/?utm_source=ibge&utm_medium=home&utm_campaign=portal. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento disponibiliza indicadores e mapas referentes aos resultados do Censo de 2022 nas diferentes áreas.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). **Pesquisa nacional por amostra de domicílios contínua**. Rio de Janeiro: IBGE, 2015. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9127-pesquisa-nacional-por-amostra-de-domicilios.html. Acesso em: 25 ago. 2024.

No *link* é possível encontrar tabelas e gráficos que apresentam características do mercado de trabalho relativas às pessoas de 15 anos ou mais de idade.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). Pessoas com deficiência têm menor acesso à educação, ao trabalho e à renda. **Agência IBGE Notícias**, Rio de Janeiro, 7 jul. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37317-pessoas-com-deficiencia-tem-menor-acesso-a-educacao-ao-trabalho-e-a-renda. Acesso em: 25 ago. 2024.

No *link* é possível encontrar dados, tabulações, gráficos e análises relativos às pessoas com deficiência.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANISIO TEIXEIRA (INEP). **Censo de Educação Básica 2023**. Brasília, DF: Inep, 22 fev. 2024. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/censo-escolar/mec-e-inep-divulgam-resultados-do-censo-escolar-2023. Acesso em: 25 ago. 2024.

O *link* disponibiliza os resultados e comentários do Censo Escolar de 2023.

INSTITUTO PALAVRA ABERTA. **Educação midiática em rede**: guia prático para gestores. Disponível em: https://educamidia.org.br/api/wp-content/uploads/2022/01/guia-do-gestor-digital.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O guia traz sugestões e ideias para a formação do professor com base em quatro passos: sensibilizar, engajar, formar e sustentar, dando sentido ao uso da tecnologia e à fluência digital e midiática dos estudantes.

INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL COMO FERRAMENTA PARA A EDUCAÇÃO. **Somos Conexão**, São Paulo, n. 10, p. 18-30, 2024.

A matéria discute os desafios e as oportunidades que a inteligência artificial oferece tanto no desenvolvimento de estratégias personalizadas de ensino como na otimização do tempo para o trabalho do professor.

KRAUSE, M.; ANNUNCIATO, P. Um jogo para semear, colher e contar. **Nova Escola**, São Paulo, 23 nov. 2017. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/9104/um-jogo-para-semear-colher-e-contar. Acesso em: 25 ago. 2024.

O artigo traz explicações sobre o jogo africano mancala e suas possibilidades de uso na sala de aula com foco na Matemática.

LGBTQIAP+. *In*: **Dicionário LGBTQIAP+**: descomplicando a diversidade. Disponível em: https://www.ongarco.org/post/dicion%C3%A1rio-lgbtqiap-descomplicando-a-diversidade. Acesso em 25 ago. 2024.

O dicionário traz a diferença entre identidade de gênero e orientação sexual bem como o significado de cada letra da sigla LGBTQIAP+.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? **Revista Educativa**, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características da juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Destaca ainda a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e estudantes e nos modos de aprender.

LODI, L. H.; ARAÚJO, U. F. Escola, democracia e cidadania. *In*: **Ética e cidadania**: construindo valores na escola e na sociedade. Secretaria de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Etica/liv_etic_cidad.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

O texto de Lucia Helena Lodi e de Ulisses Araújo contribui para a construção de uma escola baseada em participação democrática e desenvolvimento de uma cidadania consciente e crítica. Os autores propõem o programa Ética e Cidadania e o Fórum Escolar de Ética e da Cidadania.

LUCHESI, B.M.; LARA, E.M.O.; SANTOS, M.A. **Guia prático de introdução às metodologias ativas**. Campo Grande: Ed. da UFMS, 2022.

O *e-book* traz informações básicas e essenciais das metodologias ativas de aprendizagem.

LUVISON, C. C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). **Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar a influência dessas relações na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, D.; TOBIAS, E. **5 contribuições da educação midiática à educação antirracista**. São Paulo: Instituto Palavra Aberta, 2022. Disponível em: https://educamidia.org.br/api/wp-content/uploads/2023/07/BIBLIOTECA_EM-e-educac%CC%A7a%CC%83o-antirracista_ISBN.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O guia aponta as cinco contribuições para a educação antirracista com base na educação midiática: reconhecimento de preconceitos e estereótipos, reflexão sobre o discurso de ódio e suas consequências, reconhecimento de preconceito algorítmico, engajamento e participação, e ocupação de espaços. Apresenta também cinco propostas de atividades para serem aplicadas pelo professor em sala de aula.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. **Revista da Faculdade de Educação**, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989.

O artigo analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MACIEL, A. C. de M.; SOUZA, L. F. N. I. de; DANTAS, M. A. Estratégias de estudo e aprendizagem utilizadas pelos estudantes do Ensino Médio. **Psicol. Ensino & Form**., Brasília, DF, v. 6, n. 1, p. 14-32, 2015.

O artigo apresenta o estudo realizado com 534 estudantes do Ensino Médio do estado de São Paulo com o objetivo de identificar e analisar as estratégias de estudos e aprendizagem utilizadas por eles.

MANZINI, E. J. (org.). **Inclusão do estudante com deficiência na escola**: os desafios continuam. Marília: ABPEE/Fapesp, 2007.

As pesquisas apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é um tema polêmico e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola carece de prática pedagógica para efetivar a inclusão. A obra pode orientar professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. **Metodologias ativas de bolso**: como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado, por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

MOREIRA, M. A. **Mapas conceituais e aprendizagem significativa**. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/mapasport.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O artigo traz o conceito e a fundamentação teórica dos mapas conceituais, além de fornecer exemplos na área de Ciências.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). **Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reúnem subsídios teóricos e práticos relativos as interfaces entre a educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

O FUTURO do mundo do trabalho para as juventudes brasileiras. **Fundação Itaú**, São Paulo, 27 set. 2023. Disponível em: https://www.fundacaoitau.org.br/observatorio/o-futuro-do-mundo-do-trabalho-para-juventudes-brasileiras. Acesso em: 25 ago. 2024.

O estudo traça um perfil dos jovens de 14 a 29 anos – cerca de 24% da população brasileira – e apresenta os principais desafios e caminhos para a inserção produtiva dessa faixa etária.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. **Estratégias educativas para a prevenção da violência**. Tradução: Joaquim Ozorio. Brasília, DF: Unesco: UCB, 2002.

O livro permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando a melhoria da convivência.

PADIAL, K. Igualdade de gênero. **Nova Escola**, São Paulo, 10 dez. 2015. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/7889/igualdade-de-genero. Acesso em: 25 ago. 2024.

A reportagem busca refletir sobre as relações de gênero na escola com os diferentes segmentos nela existentes.

REDE INTERMUNICIPAL DE COOPERAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO – RICD. **Agenda 2030**. Disponível em: https://rumoa2030.pt/a-agenda-2030/. Acesso em: 25 ago. 2024.

O *site* traz informações sobre o cumprimento da Agenda 2030 e seus desdobramentos.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. **Violência na escola**: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep/Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

O livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas Leste e Sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência praticadas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SALAS, P. Questões de gênero: caminhos para abordar o assunto em sala de aula. **Nova Escola**, São Paulo, 7 abr. 2022. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/21183/questoes-de-genero-caminhos-para-abordar-o-assunto-em-sala-de-aula. Acesso em: 25 ago. 2024.

A reportagem aborda as questões de gênero debatidas na escola e como elas podem ser trabalhadas a fim de construir uma sociedade mais equânime.

SANTOS, M. M. dos; JESUS, J. I. S. F. LGBTQIAP+fobia. *In*: FARIA FILHO, F. de M.; OLIVEIRA, R. A.; Rodrigues, E. L. de P. (org.). **LGBTQIAP+**: um guia educativo. Ceres, GO: IF Goiano, 2022. p. 19.

Esse guia educativo aborda de maneira acessível e informativa as questões relacionadas às diversidades de gênero e sexualidade.

SANTOS, T. **Metodologias ativas de ensino-aprendizagem**. (Mestrado profissional em Educação Profissional e Tecnológica) – Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Pernambuco, Olinda, 2019. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/565843. Acesso em: 25 ago. 2024.

A cartilha traz informações sobre as características das metodologias ativas e descreve algumas delas trazendo o passo a passo para a sua implementação prática.

SILVA, G. M. da (coord.). **Educação quilombola em números**. Projeto Quilombos e Educação, [*s. l.*], 2020. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/comissoes/comissoes-permanentes/ce/apresentacoes-em-eventos/apresentacoes-audiencias-2021/arquivos-2021/GivaniaSilva.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

A apresentação traz os resultados do Projeto Quilombos e Educação com os números referentes à educação quilombola no país.

SOLÉ, I. **Estratégias de leitura**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo da obra é ajudar educadores e profissionais a promoverem a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

STARIOLO, M. Levantamento quantitativo pioneiro na América Latina mapeia comunidade LGBT no Brasil. **Jornal da Unesp**, [*s. l.*], 24 out. 2022. Disponível em: https://jornal.unesp.br/2022/10/24/levantamento-quantitativo-pioneiro-na-america-latina-mapeia-comunidade-algbt-no-brasil/#:~:text=O%20percentual%20de%20brasileiros%20adultos,os%20dados%20populacionais%20do%20IBGE. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento traz dados sobre orientação sexual no Brasil, fazendo um mapeamento da comunidade *LGBT* e os diferentes tipos de violência sofrida por essa minoria.

UNESCO. **Violência escolar e *bullying*: relatório sobre a situação mundial**. Brasília, DF: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres *Ewha*, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados disponíveis à época sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como valorizar as iniciativas que abordam o problema.

UNICEF BRASIL. LGBTQIAP+ e saúde mental: acolhendo e lutando contra estigmas e preconceito. **Unicef Brasil**, Brasília, DF, 23 jun. 2023. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/blog/lgbtqiap-mais-e-saude-mental. Acesso em: 27 set. 2024.

Esse artigo destaca a importância de apoiar a saúde mental da população LGBTQIAP+, afetada por estigmas e preconceitos. A organização defende ambientes inclusivos e políticas que combatam a discriminação, promovendo o acesso a cuidados de qualidade e a redução da marginalização.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. **Gestão da sala de aula**: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

O livro é um guia para criar um ambiente de aprendizagem organizado e produtivo, com exemplos de professores de várias disciplinas. Oferece recomendações práticas e ajuda a construir boas relações com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711. Acesso em: 25 ago. 2024.

Nesse artigo, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental que todas as pessoas devem dominar para atuar na sociedade moderna.

PARTE ESPECÍFICA

A BNCC neste volume

O quadro a seguir mostra as competências gerais, específicas e as habilidades da BNCC contempladas neste volume.

Competências e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias contempladas neste volume

Capítulos/seções	Competências gerais	Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias e habilidades
Avaliação diagnóstica 1	-	EM13MAT201 EM13MAT308 EM13MAT309 EM13MAT505
Capítulo 1 – Superfícies poligonais, círculo e áreas	2, 3, 5	EM13MAT201 Competência específica 3: EM13MAT307, EM13MAT308 Competência específica 4 Competência específica 5: EM13MAT505, EM13MAT506
Capítulo 2 – Introdução à Geometria espacial	1	Competência específica 3 Competência específica 5: EM13MAT509
Capítulo 3 – Poliedros	-	Competência específica 3: EM13MAT309, EM13MAT315 Competência específica 4 Competência específica 5: EM13MAT504
Capítulo 4 – Corpos redondos	4	Competência específica 3: EM13MAT309 Competência específica 5: EM13MAT504
Educação midiática – A lenda do terraplanismo	1, 2, 7	Competência específica 1 EM13MAT308
Pesquisa e ação – Feira de empreendedorismo	2, 4, 6, 7, 8, 9, 10	Competência específica 2 Competência específica 3: EM13MAT309
Avaliação diagnóstica 2	-	EM13MAT105 EM13MAT301
Capítulo 5 – Matrizes e determinantes	1, 5, 7	Competência específica 2 EM13MAT315 Competência específica 4
Capítulo 6 – Sistemas lineares	5	Competência específica 3: EM13MAT301
Capítulo 7 – Geometria analítica	5	Competência específica 3: EM13MAT301, EM13MAT307 Competência específica 4: EM13MAT401 Competência específica 5
Capítulo 8 – Transformações geométricas	1, 2, 3, 5	EM13MAT105 Competência específica 3
Educação midiática – Fake news – manipulação de imagens	2, 5, 9	Competência específica 3
Pesquisa e ação – Exposição de arte	1, 3, 7, 9, 10	Competência específica 1: EM13MAT102, EM13MAT105
Prepare-se para o Enem e vestibulares	-	Competência específica 1: EM13MAT105 Competência específica 3: EM13MAT301, EM13MAT307

Os Temas Contemporâneos Transversais neste volume

Este volume aborda diferentes Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), ao explorar temas atuais e relevantes para a formação dos estudantes. Esses temas também contribuem para a integração entre diferentes áreas do conhecimento.

O quadro a seguir elenca os TCTs contemplados em cada capítulo e seção deste volume.

Temas Contemporâneos Transversais contemplados neste volume

Capítulos/seções	Temas Contemporâneos Transversais
Capítulo 1 – Superfícies poligonais, círculos e áreas	Diversidade Cultural
Capítulo 2 – Introdução à Geometria espacial	Ciência e Tecnologia, Saúde
Capítulo 3 – Poliedros	Ciência e Tecnologia
Capítulo 4 – Corpos redondos	Ciência e Tecnologia, Diversidade Cultural, Trabalho
Educação midiática – A lenda do terraplanismo	Ciência e Tecnologia
Pesquisa e ação – Feira do empreendedorismo	Educação Ambiental, Educação Financeira, Educação Fiscal, Educação para o Consumo, Trabalho
Capítulo 5 – Matrizes e determinantes	Educação Ambiental, Educação em Direitos Humanos, Vida Familiar e Social
Capítulo 6 – Sistemas lineares	Ciência e Tecnologia, Educação Alimentar e Nutricional, Trabalho
Capítulo 7 – Geometria analítica	-
Capítulo 8 – Transformações geométricas	Diversidade Cultural; Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras
Educação midiática – *Fake news* – manipulação de imagens	Educação em Direitos Humanos
Pesquisa e ação – Exposição de arte	Diversidade Cultural; Educação em Direitos Humanos; Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 1

Objetivos

- Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes.
- Preparar os estudantes para os conteúdos que serão estudados no 1º semestre.

Orientações didáticas

A proposta desta avaliação é que os estudantes realizem as atividades com base nos conhecimentos prévios.

O quadro a seguir relaciona as atividades às habilidades da BNCC voltadas para o Ensino Fundamental – Anos finais que os estudantes mobilizam durante a resolução das atividades e às habilidades do Ensino Médio que serão desenvolvidas ao longo do semestre.

Relação entre as habilidades do Ensino Fundamental – Anos finais desenvolvidas nas atividades e as habilidades do Ensino Médio

Atividades	Assuntos	Habilidades do Ensino Fundamental – Anos finais	Habilidades do Ensino Médio
1	Polígonos	**(EF06MA18)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.	–
2	Semelhança de triângulos	**(EF09MA12)** Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.	EM13MAT308
3	Ângulos	**(EF06MA25)** Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas.	EM13MAT505
4	Ângulos internos de polígonos regulares	**(EF07MA27)** Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.	EM13MAT505
5	Polígonos equidecomponíveis	**(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.	EM13MAT201 e EM13MAT309
6	Ângulos complementares e ângulos suplementares	**(EF06MA27)** Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.	–

Analisando as respostas do estudante, às atividades é possível avaliar seus conhecimentos prévios e identificar defasagens ou enganos cometidos. Isso pode ajudar a planejar o trabalho durante o semestre.

Na **atividade 1**, espera-se que os estudantes obtenham a **alternativa b**, uma vez que a figura da **alternativa a** é uma linha poligonal aberta, as figuras das **alternativas c** e **d** não são linhas poligonais e a da **alternativa e** é uma linha poligonal não simples. Retome o conceito de polígono e a classificação das linhas poligonais em aberta ou fechada e em simples ou não simples. Depois, convide os estudantes para representar alguns polígonos na lousa.

Na **atividade 2**, caso os estudantes tenham escolhido a **alternativa a** como correta, provavelmente consideraram apenas o valor de x. Caso tenham escolhido a **alternativa b**, provavelmente consideraram apenas o valor de y, não atentando para o fato de que a atividade pede o valor de $x + y$. Se escolheram as **alternativas d** ou **e**, provavelmente não identificaram corretamente a proporção das medidas de comprimento dos lados. Nesses casos, retome o conceito de semelhança de triângulos e enfatize a importância de identificar adequadamente os lados e ângulos correspondentes.

A **atividade 3** envolve o reconhecimento de ângulos consecutivos e ângulos adjacentes. Se indicaram a **alternativa a** como correta, é provável que não tenham compreendido que, além do vértice, os ângulos também precisam ter um lado em comum para serem consecutivos. Se escolheram as **alternativas b**, **c** ou **d**, retome os conceitos relacionados a ângulos consecutivos e ângulos adjacentes.

A **atividade 4** propõe o cálculo da medida da abertura de cada ângulo interno de um polígono regular. Se os estudantes responderam que a **alternativa a** é a correta, provavelmente utilizaram equivocadamente a sentença $\frac{(n-3)\cdot 180°}{n}$. Se optaram pela **alternativa b**, provavelmente consideraram que o polígono tem 9 lados, em vez de 10. Se escolheram a **alternativa d**, consideraram que o polígono tem 11 lados, em vez de 10. Caso tenham escolhido a **alternativa e**, confundiram a fórmula usando a sentença $\frac{n\cdot 180°}{(n-2)}$. Nesses casos, retome os conceitos de medidas de abertura dos ângulos internos de polígonos regulares e trabalhe com novos exemplos para que possam aplicar novamente a fórmula.

Na **atividade 5**, os estudantes devem identificar, dentre as superfícies poligonais representadas em uma malha quadriculada, um par de superfícies poligonais equivalentes. Se eles responderam que as **alternativas a** ou **b** estão corretas, provavelmente consideraram que as superfícies poligonais equivalentes são aquelas que têm o mesmo formato. Caso tenham escolhido a **alternativa c**, podem ter considerado que superfícies poligonais equivalentes são limitadas por polígonos não convexos. Se elegeram a **alternativa d**, provavelmente consideraram que as superfícies poligonais equivalentes são aquelas que têm a mesma medida de perímetro. Caso seja necessário, retome com a turma que as superfícies poligonais equivalentes são aquelas que têm a mesma medida de área.

A **atividade 6** envolve os conceitos de ângulos complementares e suplementares. Se os estudantes indicaram qualquer alternativa errada, é possível que tenham lido a medida da abertura de um ou mais ângulos de maneira equivocada ou efetuado as operações com as medidas de abertura dos ângulos incorretamente. Também é possível que ainda não dominem os conceitos de ângulos complementares e ângulos suplementares.

CAPÍTULO 1 Superfícies poligonais, círculo e áreas

Objetivos

- Identificar polígonos, superfícies poligonais, circunferências e círculos.
- Estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles.
- Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de medidas de área de superfícies poligonais e do círculo.

Justificativa dos objetivos

Identificar polígonos, superfícies poligonais, circunferências e círculos é essencial para desenvolver o raciocínio geométrico, permitindo uma melhor compreensão dos formatos que nos cercam. Estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles facilita o cálculo preciso de medidas, fundamental para diversas áreas, como arquitetura e *design*. Resolver situações-problema que envolvem o cálculo de medidas de área aprimora a habilidade de aplicar conceitos matemáticos a situações práticas, fortalecendo a capacidade de análise e resolução de problemas.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 2**, **3** e **5**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 2: **EM13MAT201**.

  Competência específica 3: **EM13MAT307** e **EM13MAT308**.

  Competência específica 4.

  Competência específica 5: **EM13MAT505** e **EM13MAT506**.
- **Competência específica e habilidade de Computação:**

  Competência específica 1[1]: **EM13CO01**[2].

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Tema Contemporâneo Transversal

Diversidade Cultural

Orientações didáticas

A abertura do capítulo explora as figuras presentes em objetos feitos empregando a técnica da marchetaria. Peça aos estudantes que leiam o texto e, em seguida, compartilhem suas impressões sobre o tema. Complemente dizendo que essa técnica artística está relacionada à marcenaria e converse sobre a importância do trabalho dos artesãos. Pergunte se conhecem alguém que se dedica a essa profissão. Comente que a marchetaria é usada para ornamentar superfícies, nas quais podem ser aplicados metais, madrepérolas, pedras, entre outros materiais. O trabalho com o tema desta abertura aborda o **TCT Diversidade Cultural** ao apresentar aos estudantes a importância e a história da técnica milenar marchetaria.

Polígonos regulares

O conceito de polígono regular é o foco deste tópico. Você pode iniciar o estudo explorando os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes. Verifique se eles distinguem polígonos regulares de não regulares, por exemplo.

Antes de explorar o conceito de polígonos regulares, introduza os conceitos de segmentos de reta congruentes e de ângulos congruentes. Para verificar se eles compreenderam, você pode solicitar que representem em uma malha quadriculada pares de segmentos de reta congruentes ou pares de ângulos congruentes. Depois, peça-lhes que validem as representações feitas por um colega.

1 **(Competência específica 1)** Compreender as possibilidades e os limites da Computação para resolver problemas, tanto em termos de viabilidade quanto de eficiência, propondo e analisando soluções computacionais para diversos domínios do conhecimento, considerando diferentes aspectos.

2 **(EM13CO01)** Explorar e construir a solução de problemas por meio da reutilização de partes de soluções existentes.

Para o desenvolvimento deste tópico, é desejável retomar com os estudantes ideias referentes a polígonos convexos de n lados, como: decomposição em $(n - 2)$ triângulos a partir de um vértice, cálculo do número de diagonais e cálculo da soma das medidas das aberturas dos ângulos internos.

Este tópico possibilita aos estudantes usarem estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos, verificarem a coerência de resultados, elaborarem argumentos plausíveis e, assim, desenvolver a **competência específica 3**, bem como a habilidade **EM13MAT308**, pois são motivados a aplicar relações métricas e noções de semelhança para resolver problemas que envolvem triângulos.

Nas **atividades resolvidas R1** e **R2**, os estudantes verificam como construir polígonos regulares inscritos em uma circunferência usando régua e compasso (**atividade resolvida R1**) e um *software* de Geometria dinâmica (**atividade resolvida R2**). A **atividade resolvida R2** favorece o desenvolvimento da **competência geral 5** ao fazer uso de um *software* de Geometria dinâmica. Caso não seja possível utilizá-lo, as construções podem ser feitas com régua e compasso. Se julgar necessário, oriente os estudantes a usar um esquadro para ângulos retos.

Ao trabalhar com o triângulo equilátero inscrito em uma circunferência dado no livro, solicite aos estudantes que verifiquem as medidas de comprimento da altura do triângulo ABC e do segmento $\overline{HO}$ um dos apótemas. Pergunte a eles: "Sabendo que $HO = \frac{r}{2}$, o que é possível concluir sobre a relação entre as medidas de comprimento do apótema e da altura do triângulo ABC?". Espera-se que percebam que a medida do comprimento do apótema é $\frac{1}{3}$ da medida do comprimento da altura.

Se considerar necessário, retome que a medida do comprimento do apótema corresponde à medida do comprimento do raio de uma circunferência inscrita em um polígono regular.

Para resolver a **atividade resolvida R4**, foi preciso fazer uma seleção das informações pertinentes. É importante que os estudantes notem que o primeiro passo, nessa resolução, é representar o tampo de vidro e o suporte de apoio da mesa por uma circunferência e um triângulo, respectivamente. Em seguida, extrair as medidas necessárias para a resolução. Por fim, de acordo com o resultado obtido, escolher o tampo de vidro. Pergunte se havia alguma informação irrelevante à resolução da atividade. Espera-se que indiquem que saber o material de que são feitos o tampo e a base não importa para a resolução. Esse tipo de questão permite o trabalho com o pilar **abstração** do pensamento computacional.

A **atividade resolvida R5** envolve o uso de um *software* de Geometria dinâmica. Com isso, os estudantes verificam como construir e manipular objetos matemáticos, com o auxílio da tecnologia.

Na **atividade 1**, após fazer uma pesquisa, os estudantes devem registrar a sequência de passos necessária para construir um pentágono regular com régua não graduada e compasso. Se achar pertinente, proponha que representem essa sequência de passos por meio de um fluxograma.

Na **atividade 2**, comente com os estudantes que, para a construção do hexágono regular inscrito em uma circunferência, podem seguir procedimentos análogos aos apresentados na **atividade resolvida R2**.

A **atividade 3** pode ser aproveitada para que os estudantes façam outras descobertas além da solicitada; por exemplo, a relação entre as medidas de comprimento do apótema e da altura do triângulo equilátero – a medida do comprimento do apótema é igual à terça parte da medida de comprimento da altura do triângulo. Na Geometria, estudamos que essa é uma propriedade do baricentro do triângulo, que divide a medida de comprimento de cada mediana na razão 1 : 2.

Para a resolução da **atividade 4**, eles podem fazer apenas um esboço do hexágono regular circunscrito a uma circunferência. Pode-se aproveitar a atividade para trabalhar a construção solicitada usando adequadamente régua, esquadro e/ou compasso. Caso os estudantes apresentem dificuldade com essas construções, pode ser necessária uma orientação prévia para a construção do hexágono regular circunscrito, conforme os passos a seguir.

- Traçar uma circunferência e uma reta r que passe pelo centro O dela.
- Com o auxílio de um transferidor, construir 6 ângulos centrais com abertura medindo 60° a partir da reta r.
- Com uma régua apoiada em um esquadro, traçar por O a perpendicular à reta r, obtendo um ponto P na circunferência.
- Por P, traçar uma paralela à reta r, obtendo um ponto A em um dos lados de um dos ângulos com medida de abertura de 60°.
- Com centro em O e raio $\overline{OA}$, traçar outra circunferência de modo que a intersecções dela com os outros lados dos ângulos com medida de abertura de 60° sejam os pontos B, C, D, E e F, vértices do hexágono solicitado.
- Traçar $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$ para obter um hexágono circunscrito a uma circunferência.

O objetivo do estudo do subtópico *Ladrilhamento* é levar os estudantes a compreender aspectos importantes sobre a escolha do formato de peças para pavimentar o plano, sem que haja sobreposição de peças ou que fiquem espaços vazios entre elas. Assim, eles vão investigar e elaborar conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 5**, bem como da habilidade **EM13MAT505**.

Nas **atividades 5** a **9**, os estudantes vão aplicar os conceitos estudados sobre ladrilhamento, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT505**.

Antes de propor a **atividade 7**, por meio de questionamentos, motive os estudantes a refletir sobre as características necessárias a um polígono para que seja possível cobrir todo o plano. Eles podem perceber que, quanto maior a quantidade de lados de um polígono regular, menor será a quantidade de polígonos em um único vértice.

A **atividade 8** trata do **TCT Diversidade Cultural** e favorece o desenvolvimento da **competência geral 3**, em razão do reconhecimento e da apreciação do mosaico como arte.

Na **atividade 9**, os estudantes podem utilizar as ferramentas de um *software* de Geometria dinâmica para fazer testes com diferentes polígonos, regulares ou não, e verificar a possibilidade de fazer um ladrilhamento. Ressalte que o mosaico é uma técnica muito usada em aplicações em pisos decorativos, tecidos estampados, vitrais, cerâmicas, entre outros.

Medida da área de algumas superfícies poligonais planas

Este tópico tem como foco o cálculo da medida de área de superfícies poligonais planas e a resolução de problemas envolvendo esses cálculos.

Ao trabalhar com o subtópico *Medida da área de uma superfície limitada por um paralelogramo não retângulo*, relembre com os estudantes o que são polígonos convexos e não convexos: se a reta que passa por qualquer par de vértices consecutivos mantiver todos os demais vértices no mesmo semiplano, então tal polígono será convexo; caso contrário, tem-se um polígono não convexo.

A abordagem desenvolvida no subtópico *Medida da área de uma superfície triangular* leva os estudantes a empregar mais de um método para a obtenção da medida de área de uma superfície e acompanhar a dedução de expressões de cálculo para aplicar em situações concretas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307**.

Ao trabalhar diferentes registros de representação matemáticos na solução e na comunicação de resultados, a **atividade resolvida R6** e a **atividade 10** favorecem o trabalho com as **competências específicas 4** e **5** e com a habilidade **EM13MAT506**. Nessas atividades, o estudante, além de interpretar as representações gráficas da variação da medida de perímetro e de área delimitada por um polígono regular em função da medida de comprimento de seus lados, deve analisar as funções envolvidas para distinguir em qual delas o comportamento é proporcional.

Uma possível solução para a **atividade 11** seria:

- indicar a medida do comprimento do lado do quadrado por x:

$$x^2 + x^2 = 25$$
$$2x^2 = 25$$
$$x = \sqrt{12{,}5}$$

- calcular a medida da área do quadrado:

$$A = x^2 \Rightarrow A = \left(\sqrt{12{,}5}\right)^2 \Rightarrow A = 12{,}5$$

Logo, a medida da área do quadrado é igual a 12,5 m^2.

Proponha aos estudantes que resolvam as **atividades 12** e **16** em duplas, a fim de que possam trocar ideias entre si.

Na **atividade 13**, os estudantes podem indicar as medidas dos comprimentos dos lados por x. Como essas medidas estão na razão 1 : 2, isso implica que uma medida será o dobro da outra. Traduzindo essa situação por uma equação, temos:

$$x + x + 2x + 2x = 12 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, o comprimento de um lado mede 2 m e o comprimento do outro, 4 m. Desse modo, a medida da área desse retângulo é 8 m^2.

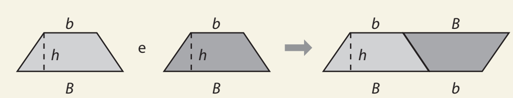
Explore a **atividade 14** com os seguintes questionamentos:

- Os paralelogramos *DEFG* e *DCBA* são semelhantes?
- No caso de serem semelhantes, a razão entre as medidas de área é igual ao quadrado da razão entre as medidas dos comprimentos dos lados correspondentes?
- Para realizar essa atividade, é necessário que os paralelogramos sejam semelhantes?

As **atividades 15** a **18** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**, pois propõem a aplicação de relações métricas para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos. Sempre que achar conveniente, oriente os estudantes a fazer um esboço da situação antes de realizarem os cálculos.

Na **atividade 18**, é apresentado um algoritmo incompleto em Scratch para o cálculo da medida da área de um polígono, e os estudantes devem completar o algoritmo relacionando as medidas de comprimento da base do polígono e da altura relativa a essa base se o polígono for um retângulo, um paralelogramo ou um triângulo. Esse tipo de atividade contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13CO01**, uma vez que os estudantes podem perceber que o mesmo algoritmo, com pequenas alterações, pode ser utilizado para calcular a medida de área de diferentes polígonos.

Ao trabalhar o subtópico *Medida da área de uma superfície trapezoidal*, solicite aos estudantes que façam uma pesquisa para obter a medida de área de um trapézio por meio de um procedimento diferente do que foi trabalhado no livro. Uma possibilidade é:



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$2 \cdot A_{\text{trapézio}} = A_{\text{paralelogramo}}$$
$$2 \cdot A_{\text{trapézio}} = (B + b) \cdot h$$
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Essa proposta favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307**, pois leva o estudante a empregar outro método para a obtenção da medida da área de uma superfície.

Na **atividade 21**, os estudantes podem decompor o quadrado *ABCD*, cuja área mede 100 u^2, em quatro triângulos retângulos. Assim, podem perceber que o trapézio *AMCD* tem medida de área igual a $\frac{3}{4}$ da medida de área de *ABCD* e a medida de área do triângulo *CDM* corresponde a $\frac{1}{2}$ da medida de área de *ABCD*.

Na **atividade 22**, incentive os estudantes a buscar mais de uma estratégia de resolução. Eles podem, por exemplo, pensar em subtrair da medida de área do quadrado maior (25 cm^2) a medida de área de dois trapézios (de bases medindo 1 cm e 5 cm de comprimento e altura medindo 1 cm de comprimento) e a medida da área de dois triângulos retângulos de catetos medindo 1 cm e 4 cm de comprimento. Outra resolução possível é subtrair da medida de área do quadrado maior a medida da área de quatro triângulos retângulos (de catetos medindo 1 cm e 4 cm de comprimento) e, depois, subtrair 2 cm^2, correspondentes à medida da área de dois quadrados (superior esquerdo e inferior direito).

Ao trabalhar a **atividade 23**, avalie a conveniência de solicitar aos estudantes que pesquisem as especificações legais da construção da bandeira brasileira.

A **atividade 26** desenvolve a elaboração de um algoritmo no Scratch para calcular as medidas de área de um trapézio e de um losango. Caso os estudantes apresentem dificuldades com o algoritmo, retome a **atividade 18** e oriente-os a usar como referência o algoritmo apresentado no enunciado dessa atividade. Caso alguns deles não consigam acessar o Scratch, oriente-os a escrever o algoritmo na linguagem materna.

Ao trabalhar as **atividades resolvidas R7** e **R8**, oriente os estudantes a fazer um esboço da figura descrita em cada enunciado para que compreendam as respectivas resoluções.

Na **atividade 28**, oriente os estudantes a decompor o hexágono central em 6 triângulos equiláteros e comparar esses triângulos com os de cor laranja. Espera-se que eles percebam que cada triângulo laranja é congruente a um dos triângulos que compõem o hexágono regular pelo caso LLL (lado-lado-lado). Então, a medida da área da região laranja é igual à medida da área do hexágono regular. A **atividade 31** permite a comparação entre as medidas de comprimento do lado do quadrado e do apótema do octógono regular.

O subtópico *Medida da área de uma superfície aproximada ou composta de superfícies poligonais* favorece o desenvolvimento da **competência geral 2** e das habilidades **EM13MAT201** e **EM13MAT307**, pois propõe ações adequadas às demandas de uma região rural, envolvendo medições e cálculos de medidas de área.

Após as explicações teóricas sobre o cálculo de medidas de área de terrenos com contornos não muito "alinhados", comente com os estudantes que, atualmente, há aplicativos que tornam o trabalho de medir áreas bem mais fácil. Basta ter um celular ou computador para obter a medida de área de grandes terrenos. Os aplicativos trabalham com GPS ou mapas por satélite. O usuário deve digitar o endereço e representar o contorno do terreno observado na tela. Feito isso, deve clicar na ferramenta para calcular a medida de área.

Na **atividade resolvida R9** e na **atividade 32**, a figura inicial é decomposta em polígonos cujo cálculo da medida de área já foi estudado. Dessa maneira, calculam-se as medidas das áreas de todos os polígonos e adicionam-se, obtendo a medida da área da figura inicial. Assim, trabalha-se com o pilar da **decomposição** do pensamento computacional, que propõe a fragmentação de um problema em tarefas menores e mais simples de serem resolvidas, viabilizando a solução do problema inicial.

A **atividade 33** favorece o desenvolvimento da **competência geral 2** ao levar os estudantes a exercitarem a curiosidade intelectual para, segundo uma abordagem científica, crítica e reflexiva, investigar e testar a hipótese levantada no início deste subtópico, formular e resolver problemas.

A **atividade 34** propõe uma aplicação da Matemática na agrimensura. Seria interessante solicitar aos estudantes uma pesquisa sobre esse ramo de atividade. Quanto ao cálculo, convém propor um questionamento sobre a precisão desse procedimento e o que poderia ser feito para obter resultados mais próximos do real. Espera-se que os estudantes concluam que a precisão do cálculo torna-se maior com o aumento da quantidade de repartições da superfície com o vértice no ponto *O*.

Círculo e circunferência

Neste tópico, são abordados conceitos relacionados à circunferência e seus elementos e também ao círculo e suas partes. É importante que esteja evidente a diferença entre circunferência e círculo. Caso julgue necessário, explique aos estudantes que circunferência é uma linha fechada em um plano cujos pontos estão a uma mesma medida de distância de um ponto fixo, chamado centro; um círculo é a união de uma circunferência com sua região interna. Neste tópico, também serão trabalhados cálculos de medidas de área do círculo, da coroa circular, do setor circular e do segmento circular.

Ao trabalhar as **atividades resolvidas R10** a **R12**, é possível primeiro propor aos estudantes que as realizem utilizando suas estratégias pessoais. Depois de discutir coletivamente como fizeram cada uma, é importante explorar com eles as resoluções apresentadas.

As **atividades 35** a **41** podem ser trabalhadas em dupla, a fim de que os estudantes troquem ideias acerca dos conceitos envolvidos. Na **atividade 35**, espera-se que eles compreendam que, ao multiplicar a medida de comprimento do raio de uma circunferência por *k*, a medida do comprimento da circunferência também será multiplicada por *k*. Na **atividade 36**, eles são levados a concluir que, aumentando em uma unidade a medida de comprimento do raio de uma circunferência, a medida do comprimento da circunferência aumentará em 2π unidades; aumentando em uma unidade a medida do comprimento da circunferência, a medida de comprimento do seu raio aumentará em $\frac{1}{2\pi}$ unidade.

É possível ampliar a proposta da **atividade 40** e pedir aos estudantes que calculem a medida da área da região situada entre as três circunferências. Essa medida de área pode ser obtida subtraindo da medida de área do triângulo *ABC* a medida da área do semicírculo cuja medida do comprimento do raio é igual à medida de comprimento do raio das circunferências de centro *A*, *B* ou *C*. Ou seja, $2\sqrt{3}\ \text{cm}^2 - \frac{2\pi}{2}\ \text{cm}^2 = (2\sqrt{3} - \pi)\ \text{cm}^2$.

Na **atividade 41**, é proposto o uso de um *software* de Geometria dinâmica. Comente que é importante que todas as circunferências tenham raio com a mesma medida de comprimento, mesmo quando forem ampliadas ou reduzidas. A maioria dos *softwares* de Geometria dinâmica tem essa funcionalidade. Explique aos estudantes que, a partir da construção do quadrado, pode-se utilizar a bissetriz para construir o octógono regular, o hexadecágono regular (polígono com 16 lados) e assim sucessivamente. Solicite a eles que verifiquem o que acontece com a medida da área de cada polígono conforme aumenta a quantidade de lados. Eles devem perceber que as medidas das áreas dos polígonos vão se aproximando da medida da área do círculo. Comente que é possível demonstrar esse fato, e que a observação feita por meio das construções realizadas com o *software* de Geometria dinâmica não constitui prova, embora possa ser utilizada como ferramenta facilitadora na realização de testes e conjecturas.

Para finalizar o capítulo 1

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 2 Introdução à Geometria espacial

Objetivos

- Identificar a posição relativa entre retas; planos; retas e planos; e aplicá-las na resolução de problemas.
- Identificar e calcular medidas de distância entre pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.
- Identificar um diedro e determinar sua medida.
- Reconhecer diferentes projeções cartográficas e investigar deformações provocadas por algumas delas.

Justificativa dos objetivos

A resolução de inúmeros problemas cotidianos pressupõe saber calcular medidas de distância. Situações reais são, então, representadas por elementos ideais, como ponto, reta, plano, ângulo etc., cujas posições relativas devem ser identificadas para a posterior definição e cálculo da medida da distância entre eles.

BNCC

- **Competência geral da BNCC: 1**.
- **Competências específicas e habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 3.

  Competência específica 5: **EM13MAT509**.
- **Competência específica e habilidade da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas:**

  Competência específica 1[1]: **EM13CHS106[2]**.

Os textos na íntegra da competência geral, das competências específicas e da habilidade da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Ciência e Tecnologia
- Saúde

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

ODS 3 ODS 9 ODS 17

Orientações didáticas

Este capítulo apresenta conceitos relacionados à projeção ortogonal e de cálculo de medidas de distância, necessários para o cálculo de medidas de área da superfície e de volume de prismas, pirâmides e corpos redondos, que serão objeto de estudo nos próximos capítulos. A maneira como esses conceitos são explorados, por meio de investigação e estabelecendo conjecturas, favorece as **competências específicas 3** e **5**.

Na abertura sobre a impressão de próteses em 3D, inicie contextualizando a necessidade de haver à disposição das pessoas próteses mais acessíveis. Fale também de como a tecnologia envolvida nesse tipo de impressão oferece soluções inovadoras. Cite como exemplos implantes dentários, próteses de mãos e pernas, de alguns ossos e até de crânio de seres humanos criados em impressoras 3D, além de bicos, pernas e patas de animais. A discussão sobre a importância da educação e dos investimentos necessários para o desen-

1 **(Competência específica 1)** Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.

2 **(EM13CHS106)** Utilizar as linguagens cartográfica, gráfica e iconográfica, diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais, incluindo as escolares, para se comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

volvimento desses tipos de tecnologia e de produto, assim como sobre o aumento do bem-estar proporcionado por esses equipamentos, envolve os **TCTs Saúde** e **Ciência e Tecnologia** e os **ODS 3: Saúde e Bem-Estar** e **ODS 9: Indústria, inovação e infraestrutura**.

Ressalte que essa tecnologia usa conceitos de Geometria espacial para criar próteses personalizadas que são tanto eficientes quanto economicamente viáveis. Se julgar oportuno, apresente exemplos reais de uso de próteses impressas em 3D, por meio de vídeos e imagens da internet. Outra possibilidade é apresentar aos estudantes o *site* da comunidade e-NABLE no Brasil, disponível em: http://e-nablebrasil.org/wp/ (acesso em: 24 out. 2024).

A comunidade exemplifica como a cooperação e a parceria entre indivíduos de diferentes partes do mundo podem gerar um impacto social significativo, e é nesse sentido que o **ODS 17: Parcerias e meios de implementação** está relacionado ao tema.

A Geometria euclidiana

Neste tópico, serão estudadas algumas noções primitivas e como os postulados estabelecem relações com elas. Inicie comentando com os estudantes que, ao definirmos um objeto, recorremos a palavras e definições já existentes, as quais podem ter sido criadas de outras palavras e definições que também já existiam. Mas como foram definidas as primeiras palavras em Geometria?

Para responder a essa questão, parte-se de conceitos não definidos, chamados de primitivos (noções primitivas). Os postulados fazem a descrição das relações entre esses conceitos primitivos. Por isso, são aceitos sem demonstração. Apresente as noções primitivas e os postulados presentes no livro. Depois, comente que os teoremas são demonstrados, com base nos postulados, por meio de deduções lógicas. Demonstre o teorema 1 na lousa, enfatizando os postulados utilizados, e faça com eles a **atividade resolvida R1**. Em seguida, organize a turma em duplas e oriente-as a realizar as atividades propostas.

Se necessário, nas **atividades 1** a **4**, verifique se os estudantes compreendem o significado das palavras “distintos”, “colineares” e “coplanares”. Oriente-os a fazer esboços das situações descritas para que possam chegar às conclusões com mais facilidade.

Na **atividade 5**, se julgar conveniente, peça aos estudantes uma pesquisa para saber se os suportes usados para assentar máquinas fotográficas, filmadoras, telescópios etc. são tripés ou quadripés. Solicite que argumentem sobre o porquê da opção pelo tripé. Após a resolução, pergunte se o fato de a mesa de três pernas nunca ficar manca implica que seu tampo estará sempre na horizontal quando colocada em pé em um chão plano e horizontal. Esse questionamento vai além da determinação de um plano por três pontos distintos e não colineares. Também aborda o conceito de paralelismo entre planos.

Ainda nessa atividade, chame a atenção dos estudantes para a **abstração**, um dos pilares do pensamento computacional, empregada relacionando a situação real com o postulado **P6**.

Posições relativas

Neste tópico, serão trabalhadas as posições relativas entre retas, entre planos e entre retas e planos. Apresente as definições relacionadas ao paralelismo entre retas, entre planos e entre retas e planos. A concepção de paralelismo de retas implícita na definição tem por base a noção de direção, uma vez que associamos duas retas paralelas como retas que têm a mesma direção. Depois, apresente algumas propriedades do paralelismo.

Ao trabalhar o conceito de retas reversas, oriente os estudantes a analisar a figura e explique que os planos (ABE) e (CDG) são paralelos não coincidentes, ou seja, os planos não têm nenhum ponto comum e, por isso, a reta s contida no plano (ABE) e a reta r contida no plano (CDG) não têm nenhum ponto comum. Além disso, s é paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ e r é perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$; portanto, r e s não são paralelas; logo, r e s são reversas.

Depois, faça a **atividade resolvida R2** com a turma. Se necessário, oriente os estudantes a construir em casa, antes da aula, um modelo do sólido representado nessa atividade utilizando embalagens. A utilização de materiais concretos ajuda-os a compreender o enunciado e a resolução.

Em seguida, peça aos estudantes que façam as **atividades 6** a **8**. Na **atividade 8**, se possível, apresente a música “Paralelas”, de Belchior, disponível nas plataformas de *streaming*. A letra dessa música traz observações do cotidiano que permitem reflexões sobre nossas escolhas.

Depois, apresente a situação do livro em que o conceito de perpendicularismo é utilizado. Essa abordagem valoriza o conhecimento historicamente construído para entender a realidade e continuar aprendendo, contemplando, assim, a **competência geral 1**.

Em seguida, explique os conceitos de retas concorrentes, retas perpendiculares, retas ortogonais, reta e plano perpendiculares e planos concorrentes. Ao apresentar o teorema fundamental do perpendicularismo, retome a situação do gnômon. Depois, faça com os estudantes a **atividade resolvida R3**.

Na sequência, apresente os conceitos de planos perpendiculares e as propriedades do perpendicularismo. Caso os estudantes tenham dificuldades para compreender as propriedades, explique-as utilizando materiais concretos: folhas de papel para representar planos e varetas ou lápis para representar retas. Depois, faça com os estudantes as **atividades resolvidas R4** a **R6**.

Nos **itens a** e **b** da **atividade 9**, comente com a turma que existe a possibilidade de as retas serem reversas. No **item c**, fale sobre a possibilidade de uma reta contida em α ser perpendicular a r e não a α.

No **item a** da **atividade 11**, oriente os estudantes a comparar sua resposta com a de um colega para verificar se consideraram todos os pares de segmentos de reta perpendiculares. O mesmo procedimento pode ser adotado para o **item b**.

Na **atividade 13**, instrua os estudantes a analisar as propriedades do paralelismo e perpendicularismo.

Na **atividade 14**, oriente os estudantes a fazer um esboço da situação descrita. Depois, mostre a eles que uma reta qualquer contida em α pode ser paralela, concorrente ou perpendicular ao plano β. Nessa atividade, a reta r é perpendicular à reta de intersecção dos planos, então r é perpendicular ao plano β.

Na **atividade 15**, relembre que as diagonais de um quadrado são perpendiculares.

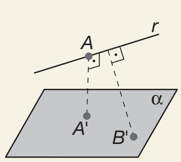
Na **atividade 16**, pode ser necessário relembrar o teorema fundamental da proporcionalidade: se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina, sobre esses lados, segmentos proporcionais.

Projeções ortogonais e medidas de distância

Explique o que são projeções ortogonais de um ponto sobre uma reta, de um ponto sobre um plano e de uma reta sobre um plano. Apresente outros exemplos, se achar necessário. Esses conceitos são importantes para que os estudantes compreendam os cálculos de medidas de distância entre dois pontos, entre um ponto e uma reta, entre um ponto e um plano, entre uma reta e um plano paralelos, entre dois planos paralelos e entre duas retas reversas.

Se achar necessário, durante a explicação do exemplo apresentado para calcular a medida da distância entre o ponto H e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ no cubo representado, oriente os estudantes a analisar a figura e explique a eles que, no cubo, os planos (ABC) e (BDH) são perpendiculares e, por isso, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que está contida no plano (ABC) é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BH}$ que está contida no plano (BDH); logo, HB é a medida da distância do ponto H à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Ao abordar a medida da distância entre uma reta e um plano paralelos, é interessante enfatizar que o fato de qualquer ponto da reta r estar à mesma medida de distância do plano α não implica que todo ponto de α esteja à mesma medida de distância de r.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Antes de explorar o exemplo do cubo com a turma, proponha os seguintes questionamentos: “Como se obtém a medida da distância entre duas retas paralelas distintas?”; “Qual é a medida da distância entre duas retas coincidentes?”. Espera-se que, para a primeira questão, os estudantes respondam que, dadas duas retas paralelas distintas r e s, a medida da distância entre elas é a medida da distância entre qualquer ponto de r e a projeção ortogonal desse ponto sobre a reta s ou vice-versa.

Para a segunda questão, espera-se que respondam que a medida da distância é nula.

Em seguida, faça com os estudantes a **atividade resolvida R7**. Se necessário, retome o teorema de Pitágoras e mostre como calcular a medida do comprimento da diagonal de um quadrado e a medida do comprimento da diagonal de um cubo.

Depois, oriente os estudantes a realizar as atividades propostas. Nas **atividades 17** e **18**, incentive os estudantes a apresentar justificativas plausíveis. Oriente-os a traduzir o enunciado de ambas as atividades por meio de figuras. Na **atividade 19**, oriente os estudantes a reproduzir a figura no caderno e representar nela as retas e os planos mencionados nos itens.

Ângulos e diedros

Neste tópico, serão apresentadas as medidas de abertura de ângulos formados por duas retas concorrentes, por duas retas paralelas, por duas retas reversas, por uma reta e um plano e por dois planos.

Ao trabalhar a medida da abertura do ângulo formado por dois planos, serão mobilizados os conceitos de semiplano, diedro e ângulo plano. Certifique-se de que eles compreendem bem esses conceitos. As **atividades resolvidas R8** e **R9** trabalham a identificação de diedros. Esse é o momento oportuno para avaliar se esse conceito ficou evidente para a turma.

A **atividade 20** é similar às atividades resolvidas, que podem ser retomadas, se necessário.

Na **atividade 21**, retome o conceito de projeção ortogonal de reta sobre plano, destacando que temos a projeção ortogonal de um segmento de reta sobre um plano na atividade.

Caso os estudantes tenham dificuldades para fazer a **atividade 22**, oriente-os a construir um modelo de diedro com folhas de papel sulfite e representar nelas as retas, as semirretas e os pontos presentes na figura. Em seguida, proponha que façam os **itens a** e **b**, por meio da manipulação do modelo construído.

As projeções cartográficas

Neste tópico, serão estudadas as projeções cartográficas e as deformações causadas por elas, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT509**.

Ao utilizar a linguagem cartográfica de forma crítica, significativa e reflexiva para comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS106**.

Ao estudar cada umas das projeções, espera-se que os estudantes percebam que cada projeção tem vantagens e limitações. Compreender as deformidades causadas pelas projeções permite avaliar a precisão dos mapas e identificar a projeção mais adequada para diferentes necessidades, como navegação, planejamento urbano ou análise ambiental. Após apresentar e discutir cada projeção com eles, você pode pedir que pesquisem mapas em livros, jornais, atlas e levem para a sala de aula, no dia combinado, para que juntos possam avaliar a conveniência das projeções empregadas.

Nas **atividades 23** a **26**, aproveite para explicar que a latitude, que é a medida da distância, em graus, da linha do Equador até o paralelo de determinado lugar. Os valores da latitude variam de 0° (linha do Equador) a 90° (polos), devendo ser indicada também a posição: no Hemisfério Sul (S) ou no Hemisfério Norte (N). Já a longitude é a medida da distância, em graus, entre o meridiano de origem e o meridiano local. Por convenção, adotou-se como origem o Meridiano de Greenwich (que passa pelo Observatório de Greenwich, na Inglaterra).

Para finalizar o capítulo 2

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 3 Poliedros

Objetivos

- Identificar poliedros (incluindo prismas, pirâmides, troncos de pirâmides) e seus elementos.
- Reconhecer propriedades dos poliedros e aplicar relações entre seus elementos.
- Calcular medidas de áreas, de volumes e de comprimento de elementos de poliedros.
- Resolver situações-problema que envolvam poliedros (do ponto de vista métrico e geométrico).

Justificativa dos objetivos

Poliedros, prismas, pirâmides e troncos de pirâmides constituem o formato geométrico de muitos objetos do mundo real que precisamos reconhecer e dos quais precisamos obter as medidas da área da superfície e do volume para a resolução de diversos problemas cotidianos.

BNCC

Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:

Competência específica 3: **EM13MAT309** e **EM13MAT315**.

Competência específica 4.

Competência específica 5: **EM13MAT504**.

Os textos na íntegra das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Ciência e Tecnologia
- Trabalho

Orientações didáticas

A imagem de abertura deste capítulo traz a representação de uma tela que se assemelha a um jogo eletrônico que, além de comumente ser reconhecido pelos estudantes, desperta o interesse e a atenção deles. Essa aproximação da realidade ao contexto estudado em sala de aula promove a valorização da cultura juvenil e do **TCT Ciência e Tecnologia**, favorecendo o enriquecimento do aprendizado.

Para iniciar o estudo deste capítulo, retome os conceitos de sólidos geométricos e, em seguida, parta para a definição de poliedros. Após a classificação dos poliedros, os prismas serão objeto de estudo, ampliando o repertório dos estudantes com a resolução de problemas que envolvem medidas de área da superfície e de volume de prismas. O estudo das pirâmides é conduzido de modo análogo ao dos prismas. Dessa maneira, as habilidades **EM13MAT309** e **EM13MAT504** são favorecidas ao longo do capítulo.

Sólidos geométricos

Neste tópico, os estudantes vão retomar as características de alguns sólidos geométricos. Discuta com eles a classificação dos sólidos geométricos em dois grandes grupos: poliedros e corpos redondos. Comente que, neste capítulo, os estudos serão focados nos poliedros.

Considerando os poliedros e os corpos redondos ilustrados, explore as figuras planas que podem ser obtidas ao realizarmos um corte nos sólidos geométricos ou os apoiarmos em um plano.

Poliedros

Inicie o estudo deste tópico explorando a definição de poliedro e solicitando aos estudantes que elaborem contraexemplos de poliedros. É importante que eles sejam capazes de identificar os elementos em um poliedro para compreender a relação de Euler.

As **atividades 1** a **3** exploram os elementos e as nomenclaturas de poliedros.

A **atividade 4** propõe a classificação dos poliedros em convexos ou não convexos. As **atividades 5** a **12** mobilizam o uso da relação de Euler. A **atividade 8** propicia a comparação de dois poliedros, um convexo e outro não convexo, os quais têm o mesmo número de vértices, o mesmo número de arestas e o mesmo número de faces, bem como ambos satisfazem a relação de Euler. Na **atividade 11**, após a aplicação da relação de Euler, é importante que os estudantes percebam a necessidade de aplicar conceitos algébricos ao resolver um sistema de equações.

As **atividades 13** a **19** exploram a planificação da superfície de poliedros. Incentive os estudantes a obter outras duas planificações da superfície do poliedro apresentado na **atividade 13**. Na **atividade 14**, verifique se eles percebem que o poliedro regular com faces pentagonais é o dodecaedro, mas que devem considerar na atividade sua superfície poliédrica após a retirada de três faces adjacentes a um vértice.

Se julgar conveniente, amplie a **atividade 17** propondo aos estudantes que renumerem as faces da planificação da superfície do cubo de modo que a soma dos números de quaisquer duas faces opostas seja constante, como em um dado. Uma resposta possível é obtida com a troca de lugar dos números 2 e 3 e dos números 4 e 6.

Prismas

Neste tópico, serão apresentados a definição de prisma, os elementos de um prisma e a classificação dos prismas.

Ao explorar o subtópico *Medida do comprimento da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo*, aproveite para sanar eventuais dúvidas relacionadas ao teorema de Pitágoras.

As questões propostas após a **atividade resolvida R6** permitem aos estudantes entender as relações métricas entre elementos de um cubo, além de exercitar um procedimento de análise.

Na **atividade 21**, os estudantes têm oportunidade de verificar, por meio das definições de poliedro regular e de prisma regular, quais dos poliedros regulares são prismas, além de produzir contraexemplos para fundamentar sua resposta.

As **atividades 22** e **23** propõem reflexões acerca das diagonais de um paralelepípedo, inclusive de um caso específico: cubo. As **atividades 24** a **30** mobilizam o cálculo da medida de comprimento da diagonal de paralelepípedos ou fornecem essa medida no enunciado para que os estudantes utilizem-na para a resolução de problemas. Se julgar necessário, na **atividade 28**, retome a relação entre números diretamente proporcionais.

Após fazer a representação proposta na **atividade 31**, espera-se que os estudantes percebam que a questão espacial foi reduzida a um problema de Geometria plana em que é possível aplicar o teorema de Pitágoras.

As **atividades 32** e **33** exploram a planificação da superfície de um prisma, especificamente um cubo. Em cada caso, oriente os estudantes a construir moldes para identificar a alternativa correta.

As **atividades resolvidas R7** a **R10** mobilizam o cálculo da medida da área total da superfície de diferentes prismas. Antes de propor a resolução da **atividade 34**, chame a atenção dos estudantes para o fato de que o cálculo solicitado segue o mesmo raciocínio: é preciso calcular a medida da área das faces laterais e das bases para determinar a medida da área total da superfície do prisma. Essa atividade envolve dois pilares do pensamento computacional, a **decomposição** e o **algoritmo**. Se julgar conveniente, amplie a atividade e solicite aos estudantes que representem o algoritmo elaborado por meio de um fluxograma.

As **atividades 35** a **40** favorecem o desenvolvimento da **competência específica 3** e da habilidade **EM13MAT309**, pois os estudantes vão resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de medidas de área da superfície de prismas em situações reais, como o cálculo do gasto de material para a pintura de um imóvel.

Aproveite a **atividade 35** para que os estudantes percebam a importância do uso dos poliedros nas produções industriais e nas construções encontradas no cotidiano.

Na **atividade 36**, os estudantes têm a possibilidade de perceber a diferença entre os cálculos das medidas das alturas do prisma reto e do prisma oblíquo e a necessidade da aplicação da Trigonometria.

O subtópico *Medida do volume de um prisma* favorece o desenvolvimento da **competência específica 5** e da habilidade **EM13MAT504**, pois incentiva os estudantes a estabelecer conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas e a investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção da fórmula de cálculo da medida do volume dessas figuras.

Ao explorar a **atividade resolvida R12**, chame a atenção dos estudantes para dois pilares do pensamento computacional favorecidos: **abstração** e **decomposição**, uma vez que, para calcular a medida do volume de ar em um galpão, representa-se o galpão por uma figura (prisma) e propõe-se a decomposição da figura em outros dois prismas para calcular a medida do volume de cada um deles e, depois, determinar a medida do volume de ar no galpão (figura toda).

As **atividades 41** a **53** exploram o cálculo da medida do volume de prismas. Aproveite a **atividade 41** para que os estudantes reflitam sobre a relação entre as medidas de volume e de massa, conhecida como densidade. A **atividade 50** propicia a reflexão sobre a relação entre medidas em metro cúbico e litro.

Aproveite a **atividade 43** para relacioná-la com a História da Matemática. Conte aos estudantes que o rei Hierão de Siracusa (306 a.C.-215 a.C.) incumbiu Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) de verificar se sua coroa era toda de ouro, conforme encomendara ao ourives. Arquimedes sabia que deveria determinar a densidade da coroa e comparar com a densidade do ouro. Mas como medir o volume da coroa sem derretê-la? Ele descobriu a solução quando, ao entrar em uma banheira com água, observou que o nível da água subia. Concluiu então que, para medir o volume da coroa, bastava mergulhar a coroa em água e calcular a medida do volume de água deslocado, que deveria ser equivalente. Exultante, Arquimedes teria exclamado "Eureka!" (Eu achei!).

Se julgar conveniente, após a **atividade 53**, proponha uma questão inversa à proposta no **item c**: “Qual é a medida de comprimento x da aresta de um cubo cuja medida de volume é o dobro da medida de volume de um cubo cujo comprimento da aresta mede a?”. Espera-se que os estudantes concluam que $x = a\sqrt[3]{2}$. Convém comentar com eles que a construção (usando régua e compasso) da aresta de um cubo cuja medida de volume seja o dobro da medida de volume de um cubo fornecido é um dos três problemas clássicos da Matemática grega, conhecido como duplicação do cubo. Há diversas teorias sobre a origem desse problema, inclusive uma que afirma que o oráculo de Delfos orientou a população da ilha de Delos a duplicar a medida do volume do altar cúbico do templo de Apolo para livrar-se de uma peste.

Pirâmides

O tópico inicia o estudo de pirâmides definindo-as como poliedros. Em seguida, explore os elementos de uma pirâmide e a classificação de acordo com o número de arestas da base da pirâmide. As **atividades 54** a **56** tratam desses conceitos iniciais.

Ao tratar das pirâmides regulares, é importante que os estudantes se familiarizem com os termos utilizados antes de explorar algumas relações métricas nas pirâmides, como as propostas nas **atividades 57** a **61**.

A **atividade 61** favorece o desenvolvimento da **competência específica 5**, uma vez que os estudantes deverão demonstrar a relação entre as medidas de comprimento da aresta da base e do apótema da base de pirâmides regulares.

As **atividades 62** a **65** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT309** ao calcular a medida da área total da superfície de uma pirâmide ou utilizar essa medida na resolução de problemas.

O subtópico *Medida do volume de uma pirâmide* contempla a **competência específica 5** e a habilidade **EM13MAT504**, pois leva os estudantes a estabelecer conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas e a investigar propriedades das pirâmides para a obtenção da fórmula de cálculo da medida do volume desses poliedros.

As **atividades 66** a **73** mobilizam os conhecimentos para o cálculo da medida do volume de diferentes pirâmides. As **atividades 74** e **75** propõem uma reflexão sobre a relação entre as medidas da altura de um prisma e de uma pirâmide, considerando a medida do volume desses poliedros.

Chame a atenção dos estudantes na resolução das **atividades 76** e **77**, de modo que percebam a diversidade de conceitos utilizados para determinar as medidas de volume. Na **atividade 76**, verifique se eles são capazes de identificar que a pirâmide $PQCG$ tem PQC como base determinada por um triângulo e $\overline{CG}$, altura da pirâmide.

A **atividade 78** deve ser resolvida com base no fato de que a medida do volume de uma pirâmide corresponde à terça parte da medida do volume do prisma de mesma medida de área da base e de mesma medida de altura.

No subtópico *Tronco de pirâmide de bases paralelas*, destaque a diferença entre troncos de pirâmides e pirâmides.

A **atividade 79** favorece o desenvolvimento das **competências específicas 3** e **4** e da habilidade **EM13MAT315**, ao solicitar aos estudantes que escrevam um algoritmo, em linguagem corrente e em um fluxograma, para calcular a medida do volume do tronco de uma pirâmide regular. Além disso, a atividade contribui com o desenvolvimento do pilar **algoritmo** do pensamento computacional.

As **atividades 80** a **84** mobilizam diversos conceitos estudados até o momento para a resolução de problemas envolvendo troncos de pirâmides.

Trabalho e juventudes – Engenheiro civil

Objetivos

- Compreender o que faz um engenheiro civil.
- Reconhecer a importância do uso dos Equipamentos de Proteção Individual (EPIs).
- Resolver problemas envolvendo o cálculo das medidas da área da superfície e do volume de poliedros.

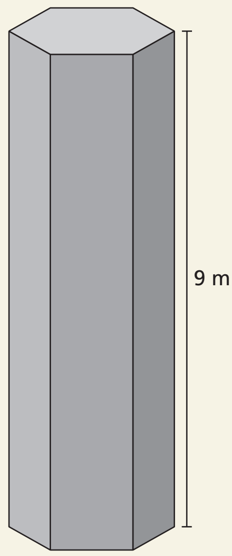
Orientações didáticas

A profissão de engenheiro civil é o foco desta seção, que desenvolve o **TCT Trabalho**. Faça a leitura do texto com a turma e comente que esse profissional está envolvido diretamente com a construção de residências, edifícios, indústrias, viadutos, pontes, túneis, praças, barragens, portos, sistemas hidráulicos e de saneamentos, entre outras obras. É importante também informar como é o curso superior de Engenharia Civil. Diga a eles que existe um ciclo inicial de disciplinas, focadas em Matemática, Física e Química, uma vez que é necessário dar subsídios para calcular, por exemplo, a solidez e a resistência de materiais e as medidas de área de locais e de volume de estruturas. Após esse ciclo inicial, são estudadas disciplinas específicas. Depois dessa conversa, proponha aos estudantes que respondam à **atividade 1**. Reserve um momento para que compartilhem as respostas.

A **atividade 2** tem como foco os Equipamentos de Proteção Individual (EPIs). Comente que, na construção civil, os trabalhadores estão expostos a diversas situações em que podem se machucar e, por isso, é importante a utilização desses equipamentos de proteção. Se considerar necessário, explique a função de cada um deles. O capacete, por exemplo, protege a cabeça contra colisões e objetos que podem cair sobre ela. Os óculos de segurança protegem contra respingos, faíscas e pequenos objetos que podem atingir os olhos. As luvas, por sua vez, protegem contra produtos químicos, queimaduras e cortes. Já os protetores auditivos resguardam os ouvidos dos ruídos de máquinas ou de equipamentos que geram barulho excessivo. É importante dizer aos estudantes que a Lei nº 6.514/77, da Consolidação das Leis do Trabalho (CLT), e a Norma Regulamentadora 6 (NR 6) regulamentam o uso de EPIs.

Leia o enunciado da **atividade 3** com os estudantes e, caso perceba que apresentam dificuldade, oriente-os a fazer um esboço da coluna de concreto que o engenheiro civil está projetando. Espera-se que façam um esboço como o representado a seguir.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Para obter a medida da área lateral da estrutura (**item a**), espera-se que os estudantes calculem:

$A = 6 \cdot 1{,}5 \cdot 9 = 81$

A medida da área lateral da estrutura da coluna é 81 m^2.

A medida do volume de concreto necessário para preencher totalmente a coluna (**item b**) pode ser obtida por meio do cálculo a seguir:

$V = A_{base} \cdot h$

$V = \dfrac{6 \cdot 1{,}5^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 9 = \dfrac{3 \cdot 2{,}25 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 9 = 30{,}375\sqrt{3}$

A medida do volume de concreto necessário para preencher totalmente a coluna é $30{,}375\sqrt{3}$ m^3.

Para finalizar o capítulo 3

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 4 Corpos redondos

Objetivos

- Identificar cilindros, cones, troncos de cone, esferas e seus respectivos elementos.
- Calcular a medida da área da superfície de corpos redondos.
- Determinar a medida do volume de corpos redondos.

Justificativa dos objetivos

Cilindros, cones, troncos de cone e esferas constituem o formato geométrico de muitos objetos do mundo real. Entender como se calculam as medidas de área da superfície e de volume desses sólidos é essencial para resolver problemas não apenas da Matemática mas também de outras áreas, como *design* de embalagens e Engenharia.

BNCC

- **Competência geral da BNCC: 4**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 3: **EM13MAT309**.

  Competência específica 5: **EM13MAT504**.
- **Competência específica e habilidade da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**

  Competência específica 3[1]: **EM13CNT307**[2].

Os textos na íntegra da competência geral, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Ciência e Tecnologia
- Diversidade Cultural
- Trabalho

1 **(Competência específica 3)** Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

2 **(EM13CNT307)** Analisar as propriedades dos materiais para avaliar a adequação de seu uso em diferentes aplicações (industriais, cotidianas, arquitetônicas ou tecnológicas) e/ou propor soluções seguras e sustentáveis considerando seu contexto local e cotidiano.

Objetivo do Desenvolvimento Sustentável

ODS 9

Orientações didáticas

Em muitos momentos deste capítulo, os estudantes serão motivados a usar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos, a verificar a coerência de resultados, a elaborar argumentos plausíveis e, assim, a desenvolver as **competências específicas 3** e **5**. Além disso, as habilidades **EM13MAT309** e **EM13MAT504** são favorecidas, pois os estudantes são levados a estabelecer conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas e a investigar processos de obtenção das medidas da área da superfície e do volume de corpos redondos, incluindo o princípio de Cavalieri.

A abertura relaciona um dos conteúdos que será estudado – corpos redondos – com algo do cotidiano: o boliche. Jogos como o boliche costumam despertar a atenção e são de interesse de muitos jovens. Para iniciar, peça aos estudantes que leiam o texto e, em seguida, compartilhem suas impressões sobre o tema. Pergunte se alguém já jogou boliche e incentive-os a compartilhar suas vivências acerca do assunto.

Corpos redondos

Ao iniciar o tema, verifique o conhecimento prévio dos estudantes em relação aos corpos redondos. Pergunte a eles quais objetos do cotidiano têm formato parecido com esses sólidos geométricos. Nesse momento, é importante que eles distingam poliedros e corpos redondos. Comente que os poliedros são sólidos geométricos formados pela reunião de uma superfície poliédrica fechada com todos os pontos do espaço delimitados por ela. Já os corpos redondos são sólidos que têm pelo menos uma parte de sua superfície arredondada, ou seja, não plana.

Cilindro

A introdução deste tópico aborda a presença do formato cilíndrico em construções e artefatos. Um exemplo desses artefatos são as fibras ópticas, que permitem comunicações mais rápidas e seguras. Trazer esse exemplo à tona contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT307**. Aproveite para estabelecer relação com o **TCT Ciência e Tecnologia** sobre as contribuições da Matemática no avanço tecnológico das indústrias. O tema proposto também possibilita o trabalho com o **ODS 9: Indústria, inovação e infraestrutura**.

Ao apresentar os elementos de um cilindro, você pode recorrer a um modelo.

Para que os estudantes compreendam mais facilmente as diferentes secções de um cilindro, você pode pedir a eles que construam um modelo de cilindro reto e outro de cilindro oblíquo usando massa de modelar. Em seguida, oriente-os a fazer um corte nos modelos construídos de modo que contenha o eixo de cada um. Em seguida, dê um tempo para que analisem e comparem as secções meridianas obtidas. Procedimento parecido pode ser adotado para que percebam que qualquer secção transversal de um cilindro é um círculo congruente à base.

A **atividade resolvida R1** envolve os cálculos das medidas de área lateral e de área total da superfície dos cilindros de revolução obtidos a partir de uma superfície retangular de dimensões medindo 3 cm e 5 cm. Peça aos estudantes que tentem fazê-la antes de apresentar as explicações e verifique se concluirão que, ao rotacionar a superfície retangular em torno da reta que contém o lado de menor medida de comprimento, a medida da área total da superfície do cilindro é maior.

Na **atividade resolvida R2**, retome que a razão entre dois números é dada por sua divisão obedecendo à ordem na qual eles foram solicitados. Assim, de acordo com o que foi solicitado no enunciado, os estudantes terão de calcular a razão entre a medida da área da base (valor do numerador) e a medida da área da secção meridiana do cilindro (valor do denominador).

Nas **atividades 1** a **6**, os estudantes vão lidar com cálculos de medidas de área da superfície de cilindros. Se eles tiverem dificuldade para entender o enunciado, oriente-os a fazer um esboço da situação.

A **atividade resolvida R3** envolve o cálculo da medida do volume de cilindros. Aproveite a oportunidade para verificar se os estudantes têm alguma dúvida.

Etnomatemática

O tema trazido pelo boxe *Observação* que vem na sequência da **atividade resolvida R3** permite estabelecer uma relação com os **TCTs Trabalho** e **Diversidade Cultural**. Ele traz um texto sobre a cubagem da madeira. Explique que a cubagem da madeira se refere ao processo de obtenção da medida do volume de toras de madeira, prática conhecida pelos trabalhadores rurais para medir o volume do tronco de uma árvore, sem o uso de fórmula matemática.

Comente com os estudantes que a Etnomatemática trata dos conhecimentos de vários povos ou grupos sociais relacionados à Matemática que foram desenvolvidos ao longo do tempo. Assim, leve-os a refletir que não há uma única maneira de aplicar a Matemática no dia a dia, ressaltando a importância de valorizar o conhecimento de determinados grupos sociais. Em seguida, em uma roda de conversa, pergunte a eles quais profissões necessitam e se apropriam dos conhecimentos matemáticos para modelar, criar e elaborar regras e fórmulas, e executar suas atividades. Algumas delas são: costureiro, pedreiro, cozinheiro, artesão etc. Porém, nem sempre esses profissionais aprenderam os cálculos de modo formal e tradicional nas escolas. Por esse motivo, surgiu a Etnomatemática, com o intuito de compreender o modo como nasceu um saber matemático e também como foi organizado e propagado na sociedade.

No **item a** da **atividade 16**, oriente os estudantes a pensar no formato das toras e a discutir se o método usado por marceneiros no sul do Brasil é adequado para calcular a medida do volume delas. Incentive-os a refletirem sobre possíveis diferenças entre o formato real das toras e o formato cilíndrico, além de analisarem se a aproximação obtida por eles é razoável. O **item b** da **atividade 16** favorece a **competência geral 4** ao propor que os estudantes utilizem diferentes linguagens para expressar e compartilhar as informações e as experiências obtidas na pesquisa sobre Etnomatemática e nas entrevistas com trabalhadores de diversas áreas sobre os saberes matemáticos presentes em sua prática profissional.

Oriente os estudantes a se organizar, de modo que dividam as tarefas e elaborem um cronograma. Se possível, faça uma mostra dos trabalhos da turma para toda a escola. Sugira algumas atividades a serem pesquisadas, como o uso de esquadro com linhas de pedreiro para determinar paredes perpendiculares, a construção das tesouras na sustentação de telhado, a determinação do nível de um terreno, os cálculos de contabilidade, de produção agrícola e de medida de área de terreno e a construção de moldes para peças cerâmicas, metálicas ou plásticas.

Cone

Este tópico tem como foco o estudo do cone. Para que os estudantes possam compreender alguns conceitos com mais facilidade, você pode solicitar que recorram a modelos feitos com materiais concretos.

No subtópico *Planificação da superfície de um cone reto*, enfatize que a planificação da superfície desse corpo redondo é composta de um círculo e um setor circular cujos pontos de seu arco são também pontos da circunferência da base. Logo, todos estão à mesma medida de distância do vértice.

Antes de explorar a resolução da **atividade resolvida R4**, incentive os estudantes a levantar hipóteses e a fazer experimentos com um molde de semicírculo feito com papel, por exemplo.

Ao trabalhar as relações métricas entre os elementos de um cone reto, verifique a pertinência de retomar a regra de três com a turma.

Ao propor as **atividades 17** a **20**, oriente os estudantes a fazer esboços para compreender mais facilmente os enunciados e o que precisam fazer.

O estudo da determinação da medida do volume de um cone permite aos estudantes explorar conceitos geométricos e desenvolver estratégias de cálculo próprias. Desse modo, a habilidade **EM13MAT504** e a **competência específica 5** têm seu desenvolvimento favorecido.

Ao trabalhar a **atividade resolvida R8**, recorde com os estudantes a relação entre as unidades de medida litro, decímetro cúbico e centímetro cúbico.

Verifique se os estudantes compreenderam o que é um tronco de cone e reconhecem seus elementos. Depois, faça com eles as **atividades resolvidas R9** e **R10**.

Amplie a proposta da **atividade 36** e proponha os seguintes questionamentos para a turma: "O que aconteceria com a medida do volume do tronco se a medida do comprimento do raio de uma das bases fosse maior? E se a medida da altura fosse inferior a 6 cm?". Deixe-os à vontade para conjecturar e trocar ideias.

Na **atividade 38**, caso tenham dificuldades para entender a situação-problema, incentive-os a fazer um esboço da situação.

Esfera

Este tópico aborda as principais características da esfera e os cálculos da medida de seu volume e da medida da área de sua superfície. Inicie o estudo solicitando aos estudantes que citem exemplos de objetos presentes no cotidiano que têm formato esférico. Depois, dedique um momento para falar sobre o monumento na Praça da Paz, em Blumenau (SC). Comente que o monumento é um globo cujo comprimento do diâmetro mede 2 m, sendo segurado por duas mãos, simbolizando a paz entre os povos e as nações da Terra.

Ao definir esfera e superfície esférica, verifique se os estudantes conseguem perceber a diferença entre esses dois conceitos. Para que o conceito de secção plana de uma esfera fique mais evidente, é possível utilizar um modelo de esfera de isopor e cortá-lo com o auxílio de uma régua. Assim, os estudantes poderão perceber que a secção será um círculo em caso de corte ou que a secção será um ponto, caso a régua só encoste no modelo.

Apresente as sentenças para o cálculo da medida da área da superfície esférica e da medida do volume da esfera. Depois, faça com a turma as **atividades resolvidas R14** e **R15**.

Em seguida, explore os conceitos de cunha esférica e fuso esférico. É importante verificar se os estudantes conseguem distinguir esses dois conceitos. Faça com eles a **atividade resolvida R16**.

Proponha aos estudantes que façam as **atividades 45** a **51** e acompanhe-os, a fim de tirar eventuais dúvidas. Permita que troquem ideias uns com os outros.

A **atividade 52** envolve a implementação de um algoritmo no Scratch. Se possível, oriente os estudantes a formar grupos para que cada grupo implemente os algoritmos para calcular a medida da área da superfície e a medida do volume de todos os corpos redondos estudados no capítulo. Destaque a necessidade do uso do ponto em vez da vírgula; portanto, eles devem escrever 3.14 como aproximação de π. Caso tenham dificuldades para fazer a atividade diretamente no Scratch, você pode pedir a eles que registrem na linguagem materna como seria cada algoritmo.

Para finalizar o capítulo 4

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA – A lenda do terraplanismo

Objetivos

- Refutar as *fake news* de que a Terra é plana utilizando conhecimentos cientificamente construídos e consolidados.
- Conhecer o experimento realizado por Eratóstenes para medir o comprimento da circunferência máxima da Terra.

BNCC

- **Competências gerais: 1**, **2** e **7**.
- **Competências específicas e habilidade de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 1.

  Competência específica 3: **EM13MAT308**.

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e da habilidade da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Tema Contemporâneo Transversal

Ciência e Tecnologia

Objetivo de Desenvolvimento Sustentável

ODS 16

Orientações didáticas

Nesta seção, os estudantes são levados a perceber como os conhecimentos cientificamente construídos e consolidados podem auxiliar a refutar *fake news*; nesse caso, a pseudoteoria de que a Terra é plana.

Antes de explorar o conteúdo da seção com a turma, convém retomar o conceito de tangente estudado no volume 2.

A seção dialoga com o **ODS 16: Paz, justiça e instituições eficazes** e exercita a **competência geral 7**, uma vez que oportuniza o acesso público à informação, promovendo a disseminação de informações precisas e a promoção de um ambiente em que a verdade científica é valorizada, fatores que são fundamentais para sociedades pacíficas e justas. Combater a desinformação é parte desse esforço. O tema da seção ainda favorece o trabalho com o **TCT Ciência e Tecnologia**, de maneira que os estudantes, no decorrer da seção, são levados a compreender que a ciência associada ao bom uso da tecnologia é a fonte mais confiável de informação.

Antes de iniciar o trabalho com o texto, sugira aos estudantes que respondam à **atividade 1**. Aproveite para registrar os comentários que julgar pertinentes. Em seguida, comente sobre a pseudoteoria de que a Terra é plana e, se julgar conveniente, mostre exemplos de *fake news* sobre o assunto publicadas na internet.

Antes de apresentar o experimento e as conclusões de Eratóstenes (276 a.C.-194 a.C.), proponha a seguinte atividade aos estudantes, organizados em grupos: providencie um globo terrestre para cada grupo, um mapa-múndi, massa de modelar, palitos de fósforo e lanterna. O globo poderá ser substituído por uma esfera de isopor com os continentes desenhados e o mapa-múndi, por uma folha de cartolina com o desenho dos continentes. Caso não haja material suficiente para todos os grupos, faça a demonstração para a turma.

Acompanhe os passos a seguir.

Passo 1. Com a massa de modelar, fixe um palito de fósforo em um estado ou município na região Norte e um na região Sul do Brasil no globo terrestre. É importante que a medida da distância entre os pontos seja suficiente para que consigam perceber a diferença na medida do comprimento das sombras projetadas pelos palitos.

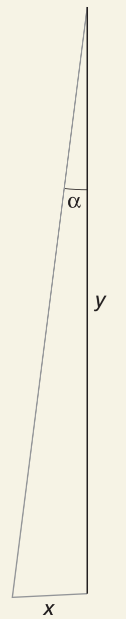
Passo 2. Solicite aos estudantes que coloquem o mapa-múndi sobre uma superfície plana e fixem outros palitos sobre os mesmos locais.

Passo 3. Explique a eles que a luz da lanterna simulará a luz do Sol e peça aos estudantes que projetem a luz sobre o globo, iluminando os palitos, e que meçam o comprimento das sombras projetadas.

Passo 4. Peça aos estudantes que repitam o procedimento do **passo 3**, mas considerando o mapa-múndi.

Passo 5. Oriente os estudantes a registrar as medidas obtidas e a compará-las. Ajude-os a relacionar essas diferenças com a superfície curva do globo e a plana do mapa-múndi.

Após a realização dessa prática, que exercita a **competência geral 2**, estimulando a curiosidade intelectual dos estudantes, bem como fornecendo uma abordagem diferente às ciências, explore o experimento realizado por Eratóstenes e proponha a **atividade 2**. A abordagem desse experimento desenvolve a **competência geral 1**, valorizando a construção histórica de um conhecimento fundamental para o desenvolvimento das ciências, além de exercitar a **competência específica 1** e a habilidade **EM13MAT308**, aplicando o conhecimento sobre relações trigonométricas em um problema de Ciências da Natureza. Ao explicá-lo, oriente os estudantes a fazer um esboço da situação. Indicando por x a medida do comprimento da sombra projetada e por y a medida do comprimento da vareta, temos:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Espera-se que os estudantes percebam que o triângulo anterior é próximo de um triângulo retângulo. Assim:

$$\text{tg}\,\alpha \simeq \frac{x}{y}$$

Desse modo, α corresponde à medida da abertura do ângulo cuja tangente é igual a, aproximadamente, $\frac{x}{y}$.

Em seguida, solicite aos estudantes que façam a **atividade 3**. Verifique se consultaram fontes confiáveis durante a pesquisa. Se julgar conveniente, convide o professor da área de Ciências da Natureza para explorar as respostas obtidas pelos estudantes.

PESQUISA E AÇÃO – Feira de empreendedorismo

Objetivos

- Pesquisar informações sobre empreendedorismo.
- Identificar problemas da comunidade que possam gerar um negócio, definindo um produto.
- Pesquisar informações sobre como começar, formalizar e operar um negócio.
- Criar um produto.
- Organizar uma feira de empreendedorismo para apresentar, além do produto criado, o processo de trabalho.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 2**, **4**, **6**, **7**, **8**, **9** e **10**.
- **Competências específicas e habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 2.

  Competência específica 3: **EM13MAT309**.
- **Competência específica e habilidade da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas:**

  Competência específica 3[1]: **EM13CHS301**[2].

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e da habilidade da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Educação Ambiental
- Educação Financeira
- Educação Fiscal
- Educação para o Consumo
- Trabalho

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

ODS 9 ODS 12

Orientações didáticas

Com a finalidade de organizar o trabalho, a atividade desta seção é proposta em etapas, que poderão ser feitas no decorrer do semestre. Mesmo que algumas delas, como a coleta de dados e a elaboração do relatório, sejam realizadas fora da sala de aula, é importante orientar os estudantes com relação ao planejamento, ao prazo, aos tipos de questão que deverão ser propostos etc., reservando algumas aulas para isso. Ao propor a realização de uma feira de empreendedorismo, os estudantes tornam-se disseminadores de informações que podem ajudar pessoas a estabelecer objetivos de vida, por exemplo, iniciando seu próprio negócio e determinando os meios mais adequados para alcançar seus objetivos.

Em uma roda de conversa, inicie a discussão para a partilha de conhecimentos prévios sobre empreendedorismo, educação financeira e responsabilidade socioambiental. Pergunte aos estudantes se conhecem alguém que começou o próprio negócio e peça que compartilhem o que sabem a respeito. É interessante que percebam que o empreendedorismo pode ser uma alternativa para superar dificuldades econômicas e sociais e enfrentar o desemprego. O trabalho com esta seção possibilita o desenvolvimento dos **TCTs Educação Ambiental**, **Educação Financeira**, **Educação Fiscal**, **Educação para o Consumo** e **Trabalho**, além de abordar os **ODS 9: Indústria, inovação e infraestrutura** e **ODS 12: Consumo e produção responsáveis**.

Utilizar a criatividade para pensar em soluções ligadas ao mundo do trabalho que atendam às necessidades das pessoas, bem como a preservação do meio ambiente, vai ao encontro do que propõem as **competências gerais 2**, **6** e **7**. Além disso, a **competência específica 2** e a habilidade **EM13CHS301** são favorecidas, no que diz respeito à partici-

1 **(Competência específica 3)** Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global.

2 **(EM13CHS301)** Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável.

pação em ações do mundo contemporâneo, especialmente na tomada de decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados à sustentabilidade.

ETAPA 1

Oriente os estudantes a realizar a pesquisa em fontes de informação confiáveis e especializadas no tema. O Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas (Sebrae), por exemplo, oferece informações e cursos que podem auxiliar o empreendedor. Diversas informações podem ser conferidas em: https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae (acesso em: 28 out. 2024).

No **item a** da **atividade 1**, espera-se que os estudantes respondam que empreendedorismo é a disposição para criar negócios, produtos e técnicas de produção ou modificar o que já existe. O empreendedor é aquele que vê além do que já existe e cria algo usando a criatividade.

No **item b** da **atividade 1**, os estudantes podem citar que algumas características de um empreendedor são: otimismo; autoconfiança; criatividade; independência; ousadia; resiliência; flexibilidade; capacidade de lidar com frustrações, de analisar informações e acontecimentos, de organizar pessoas, de liderar, de relacionar informações e de argumentar. O empreendedor reconhece a importância do esforço e da resistência para o sucesso de seu negócio; está sempre aberto a novas ideias. É preciso ressaltar aos estudantes que essas características e atitudes necessárias ao empreendedor não são inatas, mas desenvolvidas ao longo da vida.

Na **atividade 2**, sugira aos estudantes que anotem informações e reflexões que possam surgir nessa conversa. Algumas informações podem ser encontradas em: https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/bis/o-que-e-ser-empreendedor,ad17080a3e107410VgnVCM1000003b74010aRCRD (acesso em: 28 out. 2024).

ETAPA 2

Auxilie os estudantes a fazer a escolha considerando a viabilidade da criação do produto na escola. Dependendo do produto escolhido, sugere-se desenvolver a etapa de criação dele em parceria com professores de outras áreas do conhecimento.

Na **atividade 3**, sugira aos estudantes que façam um *brainstorming* para o levantamento de ideias. Para isso, eles deverão anotar todas as ideias que surgirem, evitando-se avaliações e críticas, para que se possa recolher o maior número possível delas. Posteriormente, devem ser retomadas e discutidas com os estudantes, para que se defina um bom negócio.

Na **atividade 4**, incentive os estudantes a refletir sobre o que seria um bom negócio. Considerando a importância do desenvolvimento sustentável, auxilie-os a escolher um ambientalmente responsável e que ajude a promover o consumo ético e consciente. Alguns exemplos de negócios: brechó de roupas, sapatos e brinquedos; sebo de livros; confecção de camisetas; fábrica de bijuterias; loja de artesanato. É possível obter algumas ideias em: https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/ideias (acesso em: 28 out. 2024).

ETAPA 3

Na **atividade 5**, auxilie os estudantes a se organizar de modo que os grupos tenham uma quantidade adequada de integrantes, de acordo com as atividades que devem realizar. Para viabilizar o desenvolvimento de suas atividades, os grupos devem buscar informações a respeito do planejamento, da organização e da formalização de um negócio. Pode-se sugerir aos grupos o artigo disponível em: https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/sebraeaz/6-passos-para-iniciar-bem-o-seu-novo-negocio,a28b5e24d0905410VgnVCM2000003c74010aRCRD (acesso em: 28 out. 2024).

Grupo 1

Os estudantes são incentivados a verificar tipos de recursos necessários para a abertura e a operação do negócio escolhido, cotar custos, fazer projeções de venda e lucro e descontar tributos. Desse modo, são mobilizados a elaborar planejamento financeiro em curto, médio e longo prazos.

Com relação à necessidade de empréstimo ou financiamento, os estudantes devem realizar uma pesquisa para responder a essa questão. Pode-se sugerir que leiam o artigo “Financiamento ou empréstimo: como avaliar a necessidade e contratar”, disponível em: https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/financiamento-ou-emprestimo-como-avaliar-a-necessidade-e-contratar,b76e047f76801510VgnVCM2000004d00210aRCRD (acesso em: 28 out. 2024).

Esse momento da atividade é oportuno para estimular os estudantes a analisar alternativas de prevenção em longo prazo. Além disso, por tratar do uso consciente de produtos do mercado financeiro, a questão possibilita que se aborde o **TCT Educação Financeira**.

Grupo 2

Os estudantes devem pesquisar as informações necessárias para formalizar o negócio.

- O registro de uma empresa funciona como uma certidão de nascimento. Com ele, a empresa está oficialmente criada e legalizada.
- A sigla CNPJ significa Cadastro Nacional da Pessoa Jurídica. É um número que identifica uma pessoa jurídica; cada empresa possui um número único, assim como cada cidadão possui um único número de CPF (Cadastro de Pessoa Física).
- Alguns exemplos de direitos conquistados ao formalizar uma empresa são os direitos e os benefícios previdenciários: aposentadoria por idade, aposentadoria por invalidez, auxílio-doença, salário-maternidade, entre outros.
- Para escolher o nome da empresa, pode-se pensar no seu objetivo, no público que busca atender e nas características do negócio que podem estar presentes no nome. É recomendável escolher um nome breve e simples para que as pessoas possam pronunciá-lo com facilidade.
- Algumas modalidades de empresa são: Empresário Individual, Microempreendedor Individual (MEI), Empresa Individual de Responsabilidade Limitada (Eireli), Sociedade Empresária e Sociedade Simples. Informações sobre a documentação necessária e as taxas para o registro de uma empresa podem ser obtidas nos artigos a seguir.
    - Entenda a importância de formalizar e registrar o seu negócio. Disponível em: https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/sebraeaz/legalize-e-proteja-seu-negocio-como-registrar-uma-empresa,e47817e688095410VgnVCM2000003c74010aRCRD (acesso em: 22 out. 2024).
    - Como abrir uma empresa. Disponível em: https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/como-abrir-uma-empresa,665cef598bb74510VgnVCM1000004c00210aRCRD (acesso em: 28 out. 2024).

Grupo 3

Os estudantes devem realizar uma pesquisa de mercado, que pode ser feita com clientes, fornecedores e concorrentes. O objetivo é coletar informações sobre opiniões, comportamentos, valores e necessidades para tomar decisões de *marketing*, por exemplo: lançar um produto ou serviço, definir o melhor meio de divulgação do produto, ajustar preços etc. Para responder às questões, os estudantes podem buscar informações no artigo "Tudo o que você precisa saber sobre pesquisa mercadológica", disponível em: https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/pesquisa-de-mercado-o-que-e-e-para-que-serve,97589f857d545410VgnVCM1000003b74010aRCRD (acesso em: 28 out. 2024).

Grupo 4

Os estudantes vão criar o plano de *marketing*.

- O plano de *marketing* ajuda a empresa a definir seus objetivos, suas metas e suas estratégias em relação ao produto que vai vender, ao preço dele e aos pontos de venda.
- Para criar um plano de *marketing*, é necessário definir os objetivos; identificar os pontos fortes e fracos do negócio; avaliar oportunidades e ameaças dele; identificar o público-alvo e buscar atender às necessidades desse público. Sugira aos estudantes que leiam o documento "Como elaborar um plano de *marketing*", disponível em: https://bibliotecas.sebrae.com.br/chronus/ARQUIVOS_CHRONUS/bds/bds.nsf/1947E3304928A275032571FE00630FB1/$File/NT00032296.pdf (acesso em: 28 out. 2024).

Grupo 5

Os estudantes criarão o *slogan* do produto: uma frase curta e fácil de ser lembrada, utilizada para lançar uma marca ou um produto; busca representar a empresa ou o produto, trazendo à memória das pessoas ideias e emoções relacionadas a eles.

Nesta atividade, o mote do produto que será criado pela turma é a responsabilidade socioambiental; por isso, o *slogan* pode estar relacionado a essa temática.

ETAPA 4

Nesta etapa, todas as informações levantadas pelos grupos na etapa anterior serão compartilhadas. Ressalte as mais relevantes, mediando as discussões e auxiliando nas definições de nome e modalidade da empresa e na escolha do *slogan*. Também é importante que os estudantes sejam conscientizados de que o trabalho é coletivo e, por isso, os grupos devem se reunir para compartilhar as informações pesquisadas e atualizar os colegas sobre o andamento das atividades.

ETAPA 5

Durante a criação do produto, mobilize os estudantes a refletir sobre responsabilidade socioambiental e sustentabilidade. Promova momentos de conversa em que possam falar da importância do consumo ético, responsável e consciente, tanto do ponto de vista do consumidor como das empresas que comercializam os produtos. Para ajudar os estudantes, pode-se sugerir que leiam e conversem sobre o artigo "Como integrar a sustentabilidade aos pequenos negócios", disponível em: https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/como-integrar-a-sustentabilidade-aos-pequenos-negocios,201e16aead757810VgnVCM1000001b00320aRCRD (acesso em: 28 out. 2024)

ETAPA 6

Assim como na etapa anterior, deve-se mobilizar os estudantes a refletir sobre responsabilidade socioambiental e sustentabilidade. Se possível, antes de iniciar esta etapa, peça aos estudantes que assistam ao vídeo disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=x8DIsqyGG_o (acesso em: 28 out. 2024).

Para a escolha da embalagem, os critérios de sustentabilidade também devem ser considerados. Assim, é possível recorrer a definições e procedimentos matemáticos para construir um protótipo utilizando os conhecimentos de cálculo de medidas da área da superfície e do volume de prismas, pirâmides e corpos redondos para cálculo da quantidade de material que será utilizado, favorecendo a **competência específica 3** e a habilidade **EM13MAT309**.

Nessa etapa, os estudantes vão mobilizar alguns conceitos matemáticos estudados nos últimos capítulos. Se necessário, relembre características das planificações de superfície de poliedros e corpos redondos, bem como os cálculos de medida da área e do volume de poliedros e corpos redondos.

ETAPA 7

Esta é a etapa culminante do projeto proposto na seção. É importante viabilizar o acontecimento do evento, garantindo, por exemplo, a reserva do espaço onde será realizada a feira. Ajude os estudantes na organização do evento e dos turnos de participação, a fim de que sempre haja estudantes em quantidade suficiente para atender e orientar os visitantes, atentando também para possíveis horários de pico.

A feira de empreendedorismo, com a exposição do produto e dos relatórios produzidos na etapa 3 e a apresentação de todo o processo descrito nas etapas, favorece o desenvolvimento da **competência geral 4**, já que utiliza linguagens verbais (oral e escrita), bem como conhecimento das linguagens matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências e ideias no contexto do empreendedorismo.

ETAPA 8

Nesta última etapa, será preciso mediar a discussão. É importante deixar que os estudantes exponham suas opiniões, ouçam as dos colegas e reflitam sobre todo o processo.

Na **atividade 16**, oriente os estudantes na realização do relatório de autoavaliação. Eles devem se basear nas perguntas propostas, nas experiências que tiveram no decorrer da realização das etapas, nas pesquisas, nas discussões durante as atividades e na experiência de produzir uma feira de empreendedorismo. A ideia é que avaliem se alcançaram os objetivos propostos, se tiveram dificuldade durante as etapas, como lidaram com elas e de que modo a atividade contribuiu para a formação deles.

Nesta seção, a maioria das atividades é realizada em grupos, o que requer competências como autoconhecimento, compreensão da diversidade humana, reconhecimento das próprias emoções e das dos outros, autocrítica, empatia, diálogo, resolução de conflitos, cooperação, respeito, disposição para acolher e valorizar a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza; capacidade de agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários. Assim, é favorecido o desenvolvimento das **competências gerais 8**, **9** e **10**.

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 2

Objetivos

- Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes.
- Preparar os estudantes para os conteúdos que serão estudados no 2º semestre.

Orientações didáticas

A proposta desta avaliação é que os estudantes realizem as atividades com base nos conhecimentos prévios.

O quadro a seguir relaciona as atividades às habilidades da BNCC voltadas para o Ensino Fundamental – Anos finais que os estudantes mobilizam durante a resolução das atividades e às habilidades do Ensino Médio que serão desenvolvidas ao longo do semestre.

Relação entre as habilidades do Ensino Fundamental – Anos finais desenvolvidas nas atividades e as habilidades do Ensino Médio

Atividades	Assuntos	Habilidades do Ensino Fundamental – Anos finais	Habilidades do Ensino Médio
1	Equação do 1º grau com uma incógnita	**(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.	EM13MAT301
2	Equação do 1º grau com duas incógnitas	**(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.	EM13MAT301
3 e 4	Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas	**(EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.	EM13MAT301
5	Inequação do 1º grau com uma incógnita	–	EM13MAT301
6	Congruência de polígonos	**(EF03MA16)** Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.	EM13MAT105
7	Semelhança de polígonos	**(EF05MA18)** Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.	EM13MAT105
8	Simetria	**(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.	EM13MAT105

Analisando as respostas do estudante às atividades, é possível avaliar seus conhecimentos prévios e identificar defasagens ou enganos cometidos. Isso pode ajudar a planejar o trabalho durante o semestre.

Na **atividade 1**, se o estudante indicou como correta a **alternativa a**, ele pode não ter considerado que $U = \mathbb{Z}$. Se indicou a **alternativa b**, considerou a equação $15x - 30 = 70$, desprezando o sinal de menos do coeficiente da incógnita x. Se optou pela **alternativa d**, considerou que o conjunto solução é vazio para $U = \mathbb{N}$, mas pode ter confundido o símbolo do vazio com o algarismo zero. Se optou pela **alternativa e**, pode ter resolvido a equação $-15x - 30 = 0$ em vez da equação $-15x - 30 = 70$.

Na **atividade 2**, os estudantes que optaram pela **alternativa a** podem ter substituído os valores de x e y por $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$, respectivamente, mas efetuado as operações de modo incorreto, considerando que o numerador da soma corresponde à soma dos numeradores e o denominador da soma corresponde à soma dos denominadores. Os que obtiveram as **alternativas c** ou **d**, equivocaram-se ao considerar que $x = \frac{1}{4}$ e $y = \frac{2}{3}$. Os que optaram pela **alternativa e**, substituíram os valores de x e y por $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$, respectivamente, mas efetuaram os cálculos de modo incorreto, efetuando $2 \cdot 4 + 3 \cdot 1$. Em todas as situações, reforce que, em um par ordenado, o primeiro elemento do par é a abscissa e o segundo, a ordenada.

Na **atividade 3**, os estudantes que indicaram a **alternativa b** provavelmente aplicaram o método da substituição, isolando de forma incorreta a incógnita x da segunda equação, obtendo $x = -y + 7$. Se indicaram a **alternativa c**, determinaram o valor de y corretamente (-2), mas, ao calcular o valor de x, substituíram y por 2 em $-2x + 2y = 6$. Os que optaram pela **alternativa d**, em algum momento da resolução, esqueceram o termo $2y$ da primeira equação. Os que escolheram a **alternativa e**, multiplicaram a segunda equação por 2 e obtiveram $2x + 2y = 14$, em vez de $2x + 2y = -14$. Se achar necessário, resolva o sistema com a turma, aplicando os métodos da adição e da substituição, destacando os momentos em que pode ocorrer a maior parte dos erros em cada método, principalmente quando é necessário aplicar os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade. Depois, comente que um sistema pode ter nenhuma, uma ou infinitas soluções.

A **atividade 4** desenvolve a análise de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Espera-se que os estudantes, sem fazer cálculos, reconheçam que o sistema é impossível, pois $x + y$ não pode ser igual a 0 e 3 ao mesmo tempo. Retome a análise da solução de sistemas por meio da representação gráfica caso tenham optado por alguma alternativa incorreta.

Na **atividade 5**, os estudantes que indicaram a **alternativa a** esqueceram a parcela 15 do primeiro termo. Os que escolheram a **alternativa b**, provavelmente não aplicaram a propriedade distributiva corretamente. Os que obtiveram a **alternativa c**, por sua vez, provavelmente consideraram que o segundo membro é $2x - 3$ em vez de $6(2x - 3)$. Por fim, os que optaram pela **alternativa d**, não inverteram o sentido da desigualdade ao aplicar o princípio multiplicativo. Reforce com os estudantes que é importante ter atenção ao aplicar a propriedade distributiva e os princípios aditivo e multiplicativo das desigualdades. Oriente-os a sempre avaliar a razoabilidade da solução obtida, pois essa análise pode dar indícios de que algum erro de cálculo foi cometido.

Na **atividade 6**, se os estudantes consideraram correta a **alternativa a**, provavelmente confundiram os conceitos de triângulos congruentes e triângulos semelhantes. Se optaram pelas **alternativas c** ou **d**, provavelmente não observaram que os triângulos têm ângulos internos correspondentes com medidas de abertura diferentes; portanto, não são congruentes. Se indicaram a **alternativa e**, podem ter levado em consideração apenas a medida de comprimento de um dos lados dos triângulos para concluir que seriam congruentes.

Na **atividade 7**, os estudantes que obtiveram a **alternativa a** consideraram apenas o valor de x em vez do valor de $x + y$. Se escolheram as **alternativas b** ou **e**, é possível que tenham montado equivocadamente a proporção. Se indicaram incorretamente a **alternativa c**, consideraram apenas o valor de y em vez do valor de $x + y$. Ao resolver essa atividade, destaque os lados e ângulos que são correspondentes.

Caso os estudantes tenham dificuldades para fazer a **atividade 8**, oriente-os a representar as figuras de cada alternativa e a traçar ao menos um eixo de simetria nelas. . Ao optar por uma alternativa incorreta, eles podem ter considerado equivocadamente que deveriam identificar a figura que apresenta simetria de reflexão

CAPÍTULO 5 Matrizes e determinantes

Objetivos

- Identificar e classificar uma matriz.
- Realizar operações com matrizes.
- Calcular o determinante de uma matriz quadrada.

Justificativa dos objetivos

Saber identificar e classificar uma matriz permite organizar e interpretar informações de forma estruturada, útil em análise de dados e resolução de problemas. Realizar operações com matrizes, como adição e multiplicação, desenvolve o raciocínio lógico e a habilidade de manipular conjuntos de dados organizados, algo muito aplicado em computação e ciências. Calcular o determinante de uma matriz é importante para que os estudantes consigam compreender diversos conteúdos em Geometria analítica.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC**: **1**, **5** e **7**.
- **Competências específicas e habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias**:

Competência específica 2.

Competência específica 3: **EM13MAT315**.

Competência específica 4.

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e da habilidade da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Educação Ambiental
- Educação em Direitos Humanos
- Vida Familiar e Social

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

ODS 5 ODS 10 ODS 11 ODS 12 ODS 13

Orientações didáticas

A abertura tem como objetivo apresentar aos estudantes uma aplicação do conceito de matrizes, utilizando dados sobre a Copa do Mundo de Futebol feminino. Esse tema pode envolver os estudantes, uma vez que faz parte da cultura juvenil e, consequentemente, do universo deles. Aproveite essa abordagem e proponha algumas reflexões sobre o tema, como diferença nos valores recebidos, falta de investimento em comparação com o futebol masculino, além da desigualdade de gênero e do preconceito sofrido por jogadoras dessa modalidade. Nesse sentido, o **ODS 5: Igualdade de gênero**, que tem como principal meta combater a desigualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas, e o **ODS 10: Redução das desigualdades**, que visa a condições de igualdade para todas as pessoas, são desenvolvidos, e os **TCTs Educação em Direitos Humanos** e **Vida Familiar e Social** são abordados.

Este capítulo apresenta os conteúdos relacionados a matrizes e determinantes de um modo contextualizado e conectado com situações cotidianas, sendo trabalhado por meio de situações práticas. Em todo o capítulo, os estudantes poderão usar diferentes registros de representação matemáticos na busca da resolução de problemas, favorecendo, assim, o desenvolvimento da **competência específica 4**.

Matriz

No início do tópico, os estudantes são levados a reconhecer a representação por meio de matrizes. Ao trabalhar a definição com a turma, comente que a ideia de matriz está presente em diferentes situações cotidianas: na computação gráfica, na tomografia computadorizada, na criptografia, entre outras. Se julgar conveniente, motive-os a pesquisar as aplicabilidades de matriz em outras situações e, depois, organize uma roda de conversa para compartilharem suas descobertas.

Pergunte aos estudantes: "Se uma matriz com 20 elementos tem 4 linhas, qual é a ordem dessa matriz?". Espera-se que eles percebam que, nesse caso, a matriz é de ordem 4×5.

Apresente o conceito de igualdade de matrizes e faça com os estudantes a **atividade resolvida R2**. Enfatize que o sistema de equações obtido pode ser resolvido de diferentes maneiras.

Ao propor as **atividades 1** a **8**, selecione algumas delas para fazer de maneira coletiva. Aproveite a oportunidade e verifique a necessidade de retomar algum conceito.

Amplie a proposta da **atividade 5**, organizando os estudantes em duplas e solicitando que um deles crie uma matriz utilizando uma lei de formação para que o outro descubra qual é essa lei, e vice-versa.

A **atividade 6** tem como objetivo estimular a argumentação. Convide alguns estudantes para verbalizar como pensaram para responder à questão proposta.

Na **atividade 7**, leve-os a concluir que as matrizes são diferentes, mesmo sendo formadas pelos mesmos números. Antes de propor a **atividade 8**, pergunte: "As matrizes A e B a seguir podem ser consideradas iguais?".

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{32}{4} & \frac{70}{10} \\ \frac{108}{18} & \frac{130}{26} \end{pmatrix}$$

Espera-se que os estudantes concluam que sim, pois o valor de cada fração da matriz B corresponde aos respectivos valores da matriz A.

Antes de propor as **atividades 9** a **13**, solicite aos estudantes que apresentem exemplos de matriz linha, matriz coluna, matriz quadrada, matriz nula e matriz identidade. Na **atividade 10**, caso julgue necessário, retome que, em uma matriz quadrada de ordem n, os elementos nos quais $i = j$ constituem a diagonal principal e os elementos em que $i + j = n + 1$ constituem a diagonal secundária. Na **atividade 13**, para verificar se os estudantes compreenderam o que é o traço de uma matriz quadrada, solicite que determinem o traço da matriz a seguir.

$$\begin{pmatrix} 15 & 20 & 30 & 18 \\ 10 & 13 & 4 & 7 \\ 8 & 7 & 3 & 14 \\ 5 & 21 & 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Espera-se que os estudantes concluam que o traço dessa matriz é 81, pois:

$$15 + 13 + 3 + 50 = 81$$

Adição e subtração de matrizes

Neste tópico, ressalte aos estudantes que é importante observar a ordem de cada matriz para verificar a possibilidade de efetuar algumas operações. Para adicionar ou subtrair duas matrizes, é necessário que elas tenham a mesma ordem.

As **atividades 14** a **18** envolvem as operações de adição e subtração com matrizes. Antes de propor aos estudantes que as resolvam, solicite que elaborem três matrizes de mesma ordem e verifiquem a validade das propriedades da adição. Espera-se que percebam que, independentemente dos valores atribuídos, as propriedades da adição de matrizes são válidas. Na **atividade 14**, verifique se os estudantes reconhecem que a matriz $D = I_3$ é do tipo 3×3. Na **atividade 18**, não é necessário construir as matrizes A, B e C, mas sua construção pode ajudar na verificação dos resultados.

Multiplicação de um número real por uma matriz

Aproveite as **atividades 19** a **22** para avaliar o conhecimento dos estudantes acerca de multiplicação de um número real por uma matriz. Caso eles apresentem dificuldades na **atividade 19**, proponha que façam algumas investigações com matrizes cujos elementos são conhecidos. Em seguida, ajude-os a fazer a demonstração para uma matriz A qualquer. Uma sugestão para a **atividade 21** é que eles a resolvam em duplas, a fim de compartilhar ideias. A **atividade 22** pode ser ampliada pedindo a eles que elaborem outras matrizes e resolvam o sistema de equações apresentado.

Multiplicação de matrizes

O texto apresentado neste tópico trata de um sério problema ambiental: a poluição. Converse com os estudantes sobre a importância da preservação do meio ambiente e os danos que a poluição causa a todos. Aproveite o momento e abra uma roda de conversa perguntando a eles sobre atitudes que podem ser tomadas no dia a dia para proteger o meio ambiente, a fim de promover a conscientização sobre os cuidados necessários com o nosso planeta.

Ao promover discussões e reflexões sobre a necessidade dos cuidados com a natureza, os estudantes se identificam como parte integrante da sociedade, comprometendo-se com a preservação do ambiente, o que favorece o trabalho com o **TCT Educação Ambiental**. Para complementar, se considerar adequado, solicite a eles que façam uma pesquisa sobre a sustentabilidade e a preservação ambiental. Essa abordagem vai ao encontro do que propõem os **ODS 11: Cidades e comunidades sustentáveis**, **ODS 12: Consumo e produção responsáveis** e **ODS 13: Ação contra a mudança global do clima**, os quais indicam o uso de métodos de produção amigáveis ao meio ambiente e a redução da quantidade de resíduos na natureza. Combine com a turma um dia para que possam realizar uma roda de conversa, a fim de apresentar o resultado de suas pesquisas. Essa situação favorece o desenvolvimento da **competência geral 7** e da **competência específica 2**.

Ao trabalhar multiplicação de matrizes é importante que os estudantes compreendam que essa operação só é definida quando o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz.

Após realizarem as **atividades 23** a **29**, oriente-os a comparar as respostas obtidas com as de um colega. A ideia é incentivar a troca de ideias e permitir a eles que percebam eventuais equívocos cometidos. No **item b** da **atividade 23**, verifique se eles notaram que não é possível calcular $B \cdot A$, pois o número de colunas da matriz B é diferente do número de linhas da matriz A.

Determinante de uma matriz

Neste tópico, será estudado como se calcula o determinante de matrizes de ordem 1, 2 e 3.

Para as **atividades resolvidas R7** e **R8**, proponha aos estudantes que as resolvam antes de abordar as resoluções do livro. Durante a resolução, verifique se apresentam dificuldades.

As **atividades 30** e **31** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que os estudantes investigam e representam, por meio de um fluxograma, um algoritmo. Ao transitar entre os registros de representação, também é favorecido o desenvolvimento da **competência específica 4**.

Na **atividade 32**, recorde que o **algoritmo**, um dos pilares do pensamento computacional, é uma sequência finita de passos para resolver um problema ou realizar uma tarefa. Para escrevê-lo, com início e fim, é preciso ter clareza e ordenar corretamente os passos, a fim de que o objetivo seja atingido.

Na **atividade 36**, incentive os estudantes a comparar o resultado do **item a** com o do **item d** e o resultado do **item b** com o do **item c**. Espera-se que eles percebam que o determinante da soma de duas matrizes não é igual à soma dos determinantes, assim como o determinante de um número multiplicado por uma matriz não corresponde ao produto desse número pelo determinante da matriz.

Na **atividade 38**, os estudantes devem aplicar o teorema demonstrado por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Chame a atenção deles para o fato de o teorema valer somente para matrizes quadradas. Espera-se que façam os seguintes cálculos:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = -1 \cdot 10 - (8 \cdot 2) = -10 - 16 = -26$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - (-7 \cdot 3) = 30 - (-21) = 30 + 21 = 51$$

$\det (AB) = (\det A) \cdot (\det B)$

$\det (AB) = (-26) \cdot (51) = -1.326$

Após terminarem os cálculos, peça que verifiquem que poderiam obter o mesmo resultado calculando $A \cdot B$ e $\det (AB)$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 5 + 2 \cdot (-7) & -1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 8 \cdot 5 + 10 \cdot (-7) & 8 \cdot 3 + 10 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 9 \\ -30 & 84 \end{pmatrix}$$

$$\det (A \cdot B) = \begin{vmatrix} -19 & 9 \\ -30 & 84 \end{vmatrix} = -19 \cdot 84 - (-30 \cdot 9) =$$

$$= -1.596 + 270 = -1.326$$

Atividades como essa favorecem o desenvolvimento da **competência geral 1**, pois permitem aos estudantes valorizarem os conhecimentos historicamente construídos para continuar aprendendo.

A **atividade 39** permite que os estudantes levantem hipóteses sobre algumas propriedades dos determinantes.

Matrizes e determinantes em planilhas eletrônicas

Para trabalhar com este tópico, se possível, leve os estudantes à sala de informática da escola ou solicite que, em casa, reproduzam os procedimentos apresentados no livro e explorem outros recursos das planilhas eletrônicas. É importante ressaltar que algumas planilhas podem ter comandos diferentes dos apresentados.

O trabalho com esse tópico favorece o desenvolvimento da **competência geral 5**, porque envolve a compreensão e utilização de tecnologias digitais de informação para produzir conhecimento se resolver problemas.

Para finalizar o capítulo 5

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 6 Sistemas lineares

Objetivos

- Representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares.
- Reconhecer e classificar sistemas lineares.
- Apresentar sistema linear na forma matricial e vice-versa.
- Aplicar o processo do escalonamento para resolver sistemas lineares.

Justificativa dos objetivos

Representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares permite que os estudantes compreendam a utilidade prática da Álgebra. Reconhecer e classificar sistemas facilita a identificação de soluções possíveis, enquanto a apresentação matricial aprimora a organização e clareza na resolução. O escalonamento, por sua vez, é uma técnica que possibilita simplificar e resolver sistemas de forma eficiente, favorecendo o pensamento lógico e sistemático.

BNCC

- **Competência geral da BNCC**: **5**.
- **Competência específica e habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias**:

  Competência específica 3: **EM13MAT301**.
- **Competência específica e habilidades da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**:

  Competência específica 1[1]: **EM13CNT101**[2] e **EM13CNT106**[3].

Os textos na íntegra da competência geral, da competência específica e da habilidade da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Ciência e Tecnologia
- Educação Alimentar e Nutricional
- Trabalho

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

ODS 3 ODS 7

Orientações didáticas

A abertura do capítulo pode ser trabalhada interdisciplinarmente com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo, o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT106**. Se julgar oportuno, fale a respeito de possíveis soluções para demandas que envolvem geração e consumo de energia, considerando a disponibilidade de recursos, a eficiência energética, a relação custo-benefício, as características geográficas e ambientais, a produção de resíduos e os impactos socioambientais, dando ênfase à produção de energia renovável, que reduz consideravelmente esses impactos. Essa abordagem explora o **TCT Ciência e Tecnologia**. Além disso, diante da situação apresentada, solicite aos estudantes uma pesquisa a respeito dos processos de energia, de locomoção, de abastecimento e de armazenamento de suprimentos da Estação Espacial Internacional (EEI). Questões como "Qual é a medida de velocidade da EEI?"; "Qual é a medida de distância de sua órbita à Terra?"; "Como dormem e se alimentam os astronautas sem a força da gravidade?" podem aguçar a curiosidade e despertar o interesse pela pesquisa.

Ao longo do capítulo, a habilidade **EM13MAT301** e a **competência específica 3** serão favorecidas, pois os estudantes deverão resolver e elaborar problemas que envolvam equações lineares usando técnicas algébricas

1 **(Competência específica 1)** Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

2 **(EM13CNT101)** Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas.

3 **(EM13CNT106)** Avaliar, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais, tecnologias e possíveis soluções para as demandas que envolvem a geração, o transporte, a distribuição e o consumo de energia elétrica, considerando a disponibilidade de recursos, a eficiência energética, a relação custo/benefício, as características geográficas e ambientais, a produção de resíduos e os impactos socioambientais e culturais.

e gráficas, com ou sem o apoio de tecnologias digitais, empregando estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos.

Introdução ao estudo de sistemas lineares

Oriente os estudantes a ler o texto apresentado. Em seguida, abra uma discussão sobre o acesso da população brasileira à energia nos diferentes setores, como residencial, automobilístico, público, entre outros. Aborde assuntos que envolvam questões relacionadas à confiabilidade do sistema, à sustentabilidade, como o uso de energias renováveis, e à acessibilidade. Essa discussão favorece a abordagem do **ODS 7: Energia limpa e acessível**.

Equações lineares

Neste tópico, serão trabalhados o reconhecimento de uma equação linear e a verificação de uma solução dessa equação. Trabalhe com os exemplos apresentados no livro e faça com a turma a **atividade resolvida R1**. Em seguida, oriente-os a resolver as atividades propostas.

Nas **atividades 1** e **4**, os estudantes devem substituir os números das ênuplas apresentadas nas equações e verificar se são obtidas sentenças verdadeiras.

Para fazer a **atividade 2**, os estudantes podem aplicar o mesmo procedimento da **atividade resolvida R1.**

Na **atividade 3**, o estudante deve utilizar o método de tentativa e erro para encontrar algumas possíveis soluções. Reforce que esse tipo de atividade não apresenta apenas uma solução correta.

Ao propor a **atividade 5**, peça a cada integrante da dupla que conte ao colega a estratégia adotada para obter duas soluções da equação linear criada por ele.

Sistema de equações lineares

Neste tópico, será apresentado o conceito de sistema linear e se verificará se uma ênupla é ou não solução desse sistema. Além disso, será mostrado como obter a solução de um sistema usando um *software* de construção de gráficos, como classificar um sistema linear e como trabalhar com sistemas lineares homogêneos e matrizes associadas a um sistema linear.

De início, apresenta-se o conceito de soberania alimentar e são trazidas informações sobre o *Guia alimentar para a população brasileira*. Converse com os estudantes sobre o tema. Verifique se compreenderam que a soberania alimentar está relacionada ao direito das pessoas de poderem escolher suas próprias políticas agrícolas e alimentares, garantindo o acesso a alimentos saudáveis e produzidos com métodos sustentáveis. Comente que, nesse contexto, a agricultura familiar desempenha um papel fundamental, pois garante a produção de alimentos frescos e diversificados e também preserva tradições locais, gerando empregos e fortalecendo as economias regionais.

Esse tema pode ser ampliado comentando que, mesmo com as diversas mudanças socioculturais ocorridas nas últimas décadas, verifica-se que as deficiências de micronutrientes e a desnutrição crônica ainda são prevalentes em grupos vulneráveis da população. Assim, as principais doenças que atualmente acometem os brasileiros deixaram de ser agudas e passaram a ser crônicas; por exemplo, há um aumento expressivo do sobrepeso e da obesidade em todas as faixas etárias, denunciando que a forma de consumo dos alimentamos precisa ser revista. Essas discussões abordam o **TCT Educação Alimentar e Nutricional** e o **ODS 3: Saúde e Bem-Estar**.

Apresente exemplos de sistemas lineares e de sistemas que não são lineares para que percebam as diferenças. Ao abordar a solução de um sistema linear, explique que ênupla ordenada é uma sequência ordenada de n valores e que, quando a sequência tem dois ou três valores, as ênuplas ordenadas recebem, respectivamente, os nomes de par ordenado e terno ordenado. Enfatize que vamos considerar sempre que as soluções de um sistema linear de m equações com n incógnitas são ênuplas ordenadas de números reais.

Na **atividade 7**, eles devem resolver um sistema de duas equações e duas incógnitas. Se julgar necessário, diga-lhes que as duas equações que se pode obter são $2x + y = 0$ e $-x + 3y = 0$.

Na **atividade 8**, os estudantes devem identificar os pares ordenados (2, 0) e (0, −1) correspondentes a dois pontos pertencentes à reta r e os pares ordenados (6, 0) e (0, 1) correspondentes a dois pontos da reta s. Depois, devem substituí-los no lugar das incógnitas x e y das duas equações para determinar m, n e as coordenadas de P.

Você pode ampliar a proposta da **atividade 9** e solicitar aos estudantes que tracem, no plano cartesiano, uma reta paralela ao eixo y que passe pelo ponto (3, 0), por exemplo. Em seguida, eles devem identificar que ponto dessa reta é solução da primeira equação do sistema ($x - y = 0$) e que ponto dela é solução da segunda equação ($x + y = 2$). Por fim, devem verificar que as coordenadas desses pontos satisfazem as respectivas equações.

O trabalho desenvolvido em *Solução de um sistema usando um* software *de construção de gráficos* favorece o desenvolvimento da **competência geral 5**. Se possível, reproduza com a turma os passos apresentados no livro com o auxílio de um *software* de construção de gráficos. Aproveite a oportunidade e oriente os estudantes a resolver a **atividade 10**. O uso do *software* de construção de gráficos facilita verificar se um sistema tem uma, infinitas ou nenhuma solução. Essa atividade servirá como preparação para o próximo assunto.

Nas **atividades 11** e **12**, os estudantes devem interpretar os enunciados e traduzi-los matematicamente por meio de sistemas lineares. É importante que percebam que as incógnitas das equações que compõem o sistema linear da **atividade 11** representam números naturais. Já as incógnitas das equações que compõem o sistema linear da **atividade 12** representam números reais não negativos.

Para a **atividade 13**, sugira os seguintes temas para que os estudantes construam os sistemas lineares: relacionar a quantidade de rodas em um estacionamento com o número de carros e motos, a quantidade de patas em uma fazenda com o número de galinhas e porcos, entre outros. Caso haja dificuldades, sugira que elaborem sistemas que tenham resolução simples. Por exemplo, $x + y = 6$ e $x - y = 2$. Nesse caso, a solução é o par ordenado (4, 2).

Em seguida, comente como um sistema linear é classificado e chame a atenção para o fato de que, se um sistema tem mais de uma solução, então ele tem infinitos soluções.

Oriente-os a considerar um sistema linear de duas equações com duas incógnitas cada. Se esse sistema tem duas soluções, isso significa que as retas que representam cada equação têm dois pontos em comum, ou seja, são coincidentes. Como as retas são coincidentes, elas têm infinitos pontos em comum e consequentemente o sistema possui infinitas soluções. Convém apresentar alguns exemplos de sistemas SPD, SPI e SI para a turma antes de explorar com eles a **atividade resolvida R3**. Se possível, proponha o uso de um *software* de construção de gráficos para verificar os resultados. Depois, oriente-os a resolver as atividades propostas.

Na **atividade 14**, espera-se que os estudantes resolvam os sistemas para depois classificá-los. Incentive-os a utilizar diferentes estratégias.

Na **atividade 15**, oriente os estudantes a primeiro resolver o sistema, antes de calcular o valor de *k*.

Antes de definir sistemas lineares homogêneos, escreva na lousa alguns sistemas lineares que têm todos os termos independentes nulos. Depois, proponha aos estudantes que encontrem ao menos uma solução para cada um desses sistemas sem fazer cálculos. Reserve um momento para que troquem e levantem hipóteses. Espera-se que reconheçam que cada um deles tem solução nula. Após esse momento inicial, defina sistemas lineares homogêneos e comente que todo sistema linear homogêneo com *n* incógnitas admite a ênupla (0, 0, ..., 0) como solução. Convém fazer com eles a **atividade resolvida R4**.

A **atividade 19** é similar à **atividade resolvida R4**. Se necessário, oriente-os a rever essa atividade.

Mostre aos estudantes como podemos associar matrizes a um sistema linear, diferenciando as matrizes completas das incompletas. Nesse momento, peça que resolvam as **atividades 20** e **21**. Depois, mostre como é possível obter a representação matricial de um sistema linear. Se necessário, recorde com eles como fazer uma multiplicação de matrizes. Em seguida, faça com eles a **atividade resolvida R5**.

Após os estudantes concluírem a **atividade 23**, incentive-os a compartilhar as respostas com os demais colegas. A ideia é que um valide a representação matricial do outro.

Na **atividade 25**, verifique se os estudantes percebem de antemão que o sistema linear representado é homogêneo e, portanto, o terno ordenado (0, 0, 0) é sua solução trivial.

Escalonamento de sistemas lineares

Neste tópico, serão estudados sistemas lineares equivalentes, o conceito de sistema escalonado e como se realiza o processo de escalonamento. Inicie comentando o que são sistemas lineares equivalentes e apresentando exemplos.

Nas **atividades 27** e **28**, oriente-os a resolver o primeiro sistema e, com a solução obtida, determinar o que se pede no segundo sistema.

Nas **atividades 29** e **30**, os estudantes começam a manipular equações que compõem sistemas lineares. O objetivo dessas atividades é fazer com que eles comecem a se familiarizar com o processo de escalonamento de um sistema linear. Esse assunto será abordado no próximo tópico.

Inicie o subtópico *Sistemas lineares escalonados* explicando o que caracteriza esse tipo de sistema e o motivo para recorrer ao escalonamento. Apresente os exemplos do livro e faça a **atividade resolvida R7**, possibilitando a retomada da classificação de sistema estudada anteriormente.

Depois, apresente as ações que podem ser aplicadas às equações para escalonar um sistema. Reforce que tais ações visam obter equações equivalentes em que cada equação em relação à anterior tem uma maior quantidade de coeficientes nulos.

O escalonamento de um sistema linear se alinha ao pilar da **decomposição** do pensamento computacional, pois envolve dividir o problema em outros menores e mais simples. No processo de escalonamento, transformamos um sistema linear em outros mais simples até chegar à forma escalonada dele.

Procure resolver com a turma os exemplos apresentados no livro. Mostre que o processo de escalonamento também permite obter a solução de sistemas possíveis e indeterminados.

Na **atividade resolvida R8**, chame a atenção dos estudantes para que percebam que, por meio do processo de escalonamento, chegou-se à conclusão de que o sistema é impossível.

A **atividade 31** permite que os estudantes sejam sujeitos ativos na troca do conhecimento. Direcione para que haja discussões sobre os sistemas lineares apresentados e a maneira como foram resolvidos. Se julgar necessário, peça a alguns deles que escrevam na lousa seus sistemas lineares e as respectivas resoluções.

Trabalho e juventudes – Farmacêutico

Objetivos

- Compreender o que faz um farmacêutico.
- Compreender o método de balanceamento de equações químicas.

Orientações didáticas

Nesta seção, a profissão de farmacêutico é o foco. É importante que os estudantes percebam que as atribuições dos farmacêuticos vão além da atuação em farmácias e incluem manipular fórmulas, sintetizar e analisar fármacos, atuar no campo de pesquisa para o desenvolvimento de remédios ou cosméticos, trabalhar na indústria de alimentos, entre outras. Essa abordagem permite o desenvolvimento do **TCT Trabalho**.

Leia os dois primeiros parágrafos do texto com os estudantes e, em seguida, proponha que respondam aos **itens a** e **b** da **atividade 1**. Incentive-os a dialogar e compartilhar suas experiências e impressões. O restante do texto trata do balanceamento de equações químicas e permite um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, desenvolvendo a **competência específica 1 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, bem como a habilidade **EM13CNT101**, ao explorar algumas reações químicas e os efeitos de seus reagentes e produtos nos humanos. Explique que equação química é a representação simbólica abreviada de uma reação química (ou fenômeno químico) e que os reagentes são representados no primeiro membro, enquanto os produtos, no segundo membro. Se necessário, esclareça que os reagentes são as substâncias que entram em reação e são consumidas no processo, ao passo que os produtos são as substâncias formadas pela reação.

Comente a necessidade de balancear equações químicas e, se considerar oportuno, peça que respondam à questão do **item a** da **atividade 2**. Faça a correção coletiva, permitindo aos estudantes expor seus entendimentos pessoais para, em conjunto, obter uma definição mais formal do conceito.

Antes de explicar como realizar o balanceamento da equação química que representa a reação de oxidação do gás metano, proponha aos estudantes que façam o balanceamento da equação química $H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$ utilizando estratégias pessoais. Espera-se que alguns deles obtenham a seguinte equação:

$$2\,H_2 + O_2 \rightarrow 2\,H_2O$$

Convide os estudantes que conseguiram concluir a tarefa a explicar aos colegas como fizeram. É possível que alguns deles tenham feito o balanceamento mentalmente.

Enfatize que, no balanceamento de equações químicas, não podemos alterar o valor dos índices das fórmulas moleculares, pois alteraríamos a equação, ou seja, estaríamos descrevendo outra reação química que poderia resultar em outro(s) produto(s).

Em seguida, faça com a turma o balanceamento da equação que representa a reação de oxidação do gás metano. Ao final, peça aos estudantes que façam o **item b** da **atividade 2**, tendo em mente os processos que observaram.

Na **atividade 3**, os estudantes vão balancear a equação química $Fe_3O_4 + CO \rightarrow FeO + CO_2$. Espera-se que eles procedam da forma indicada a seguir.

Vamos indicar os coeficientes por *a*, *b*, *c* e *d*:

$$a\,Fe_3O_4 + b\,CO \rightarrow c\,FeO + d\,CO_2$$

Como a quantidade de átomos dos reagentes deve ser igual à dos produtos obtidos, temos:

$3a = c$ (para o ferro)

$4a + b = c + 2d$ (para o oxigênio)

$b = d$ (para o carbono)

Com essas igualdades, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3a = c \\ 4a + b = c + 2d \\ b = d \end{cases}$$

Na equação $4a + b = c + 2d$, vamos substituir *c* por $3a$ e *b* por *d*. Assim, temos:

$$4a + d = 3a + 2d \Rightarrow a = d$$

Dessa forma, temos: $a = b = d$ e $3a = c$.

Fazendo $d = \beta$, com β sendo um número real, a solução geral do sistema é $(\beta, \beta, 3\beta, \beta)$. Esse é um sistema possível e indeterminado, ou seja, apresenta infinitas soluções.

Fazendo $\beta = 1$, obtemos a solução (1, 1, 3, 1), ou seja, $a = 1$, $b = 1$, $c = 3$ e $d = 1$. Substituindo *a*, *b*, *c* e *d* pelos valores obtidos, temos a seguinte equação balanceada:

$$1\,Fe_3O_4 + 1\,CO \rightarrow 3\,FeO + 1\,CO_2$$

Para finalizar o capítulo 6

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 7 Geometria analítica

Objetivos

- Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.
- Calcular a medida da distância entre dois pontos.
- Escrever as equações de uma reta e de uma circunferência.
- Identificar posições relativas entre elementos como ponto, reta e circunferência.
- Calcular a medida da distância entre ponto e reta.
- Calcular a medida da área de triângulos usando determinantes.
- Resolver inequações do 1º grau com duas incógnitas e sistemas, graficamente.

Justificativa dos objetivos

A importância do estudo da Geometria analítica se dá pela combinação entre a Álgebra e a Geometria, o que permite ao estudante relacionar esses dois campos da Matemática. A representação de entes geométricos no plano cartesiano e o cálculo da medida de distâncias permite aos estudantes ampliar o que estudaram e resolver diferentes problemas.

BNCC

- **Competência geral da BNCC**: **5**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias**:

  Competência específica 3: **EM13MAT301** e **EM13MAT307**.

  Competência específica 4: **EM13MAT401**.

  Competência específica 5.
- **Competência específica e habilidade da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**:

  Competência específica 1[1]: **EM13CNT103**[2].

Os textos na íntegra da competência geral, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Objetivo de Desenvolvimento Sustentável

ODS 9

Orientações didáticas

Nesse capítulo, trataremos do estudo da Geometria analítica. O primeiro tópico foca no estudo do ponto: representação no plano cartesiano, cálculo da medida da distância entre dois pontos, coordenadas do ponto médio de um segmento de reta e condição de alinhamento de três pontos.

O estudo da reta é o foco do tópico seguinte. Nele são estudadas diferentes equações da reta e a posição relativa entre duas retas no plano.

Os vetores também são abordados nesse capítulo, pautados no estudo de grandezas escalares e vetoriais. Ainda, serão estudadas as inequações do 1º grau com duas incógnitas. Espera-se que os estudantes

1 **(Competência específica 1)** Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

2 **(EM13CNT103)** Utilizar o conhecimento sobre as radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação em equipamentos de uso cotidiano, na saúde, no ambiente, na indústria, na agricultura e na geração de energia elétrica.

percebam que o estudo da Geometria analítica permite a transposição de problemas geométricos para a linguagem algébrica.

A circunferência será estudada como lugar geométrico. A equação reduzida e a equação geral da circunferência também serão objeto de estudo, seguidas das posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências.

Explore a ilustração apresentada na abertura desse capítulo antes de problematizá-la com os estudantes.

Ponto

Ao propor a situação inicial, verifique se os estudantes conseguem compreender a representação esquemática da posição do helicóptero, da embarcação e do posto de bombeiros em um plano cartesiano. Aproveite para explorar os pontos cardeais representados na imagem da bússola. Reserve um momento para que os estudantes tentem resolver a situação-problema utilizando suas estratégias pessoais. Depois, informe que ela será retomada mais adiante.

Represente um plano cartesiano na lousa e localize alguns pontos, destacando as condições para que o ponto pertença a um dos quadrantes, ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas.

Explore as duas questões propostas incentivando os estudantes a exemplificar suas conclusões em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares e dos quadrantes pares. Em seguida, faça com os estudantes as **atividades resolvidas R1**, **R2** e **R3**.

Ao propor as **atividades 1** e **2**, verifique as estratégias empregadas pelos estudantes para representar no plano cartesiano os pontos em que ao menos uma das coordenadas tem radical ou é uma fração. Depois, peça para que alguns deles compartilhem como procederam.

Na **atividade 3**, espera-se que os estudantes representem os pontos no plano cartesiano e concluam que não são vértices de um triângulo, pois estão alinhados, ou seja, existe uma reta que passa por eles. É possível que alguns deles justifiquem que os pontos estão alinhados, pois pertencem à reta que é gráfico da função linear $y = 2x$.

Para ampliar a **atividade 4**, pode-se solicitar aos estudantes que construam outros polígonos no plano cartesiano e troquem com um colega para que identifiquem os pares ordenados associados aos vértices.

Na **atividade 6**, os estudantes terão de elaborar uma estratégia para o cálculo da medida da distância entre dois pontos (cada ponto pertence a um dos eixos do plano cartesiano). Converse com as duplas fazendo perguntas para encaminhar o raciocínio. Esse tipo de atividade favorece o desenvolvimento da **competência específica 5**, pois leva o estudante a investigar e estabelecer conjecturas a respeito de conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração na validação das referidas conjecturas.

Para o estudo do subtópico *Medida da distância entre dois pontos*, a situação proposta no início desse capítulo é retomada. Discuta com os estudantes como poderia ser determinada a medida da distância do helicóptero até a embarcação. É possível que alguns deles reconheçam a necessidade de aplicar o teorema de Pitágoras. Depois faça com eles os cálculos necessários. Após apresentar a fórmula para o cálculo da medida da distância entre dois pontos quaisquer do plano cartesiano, dê um tempo para que respondam à questão proposta.

Antes de trabalhar a resolução da **atividade resolvida R5**, peça aos estudantes que façam um esboço, em um mesmo plano cartesiano, de todos os pontos que representem as informações: "o ponto A tem abscissa -2" e "o ponto A dista 5 u do ponto B". Espera-se que eles tracem a reta vertical por $(-2, 0)$, a circunferência de centro B e raio com comprimento medindo 5 u e identifiquem os pontos $(-2, 7)$ e $(-2, -1)$, de intersecção das linhas traçadas.

Na **atividade 11**, verifique se há necessidade de retomar com os estudantes como determinar a medida da área e do perímetro de um retângulo.

Ao propor as **atividades 12** a **16**, oriente os estudantes a fazer esboços de cada situação para compreender mais facilmente os enunciados e planejar como vão realizar cada uma.

Antes de explicar como determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta, verifique se os estudantes sabem o que é ponto médio. Após essa discussão inicial, explique como obter tais coordenadas e explore o exemplo e as **atividades resolvidas R7** e **R8**. Se achar conveniente, apresente outros exemplos para a turma.

As **atividades 17** a **21** envolvem o conceito de ponto médio de um segmento de reta. Na **atividade 18**, em dupla, os estudantes devem refletir sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada. Assim, são instigados a identificar quais dados podem ser descartados e quais são relevantes para a resolução do problema, além de interpretar os mesmos dados de diferentes maneiras, possibilitando múltiplas resoluções para o mesmo problema.

A **atividade 22** propõe a elaboração de um problema. Antes que façam a troca com um colega, peça aos estudantes que verifiquem se o problema atende à exigência e se o enunciado está claro. Se possível, ajude-os a fazer eventuais ajustes.

Antes de trabalhar a condição de alinhamento de três pontos, convém retomar com a turma o conceito de determinante e como calcular determinantes de matrizes de ordem 3, aplicando a regra de Sarrus.

Faça com a turma as **atividades resolvidas R9** e **R10**. É importante que os estudantes compreendam bem cada uma para que realizem, sem muitas dificuldades, as **atividades 23** a **27**. Caso tenham dificuldades para fazer a **atividade 28**, oriente-os a fazer um esboço da situação. A **atividade 29**, por sua vez, favorece o desenvolvimento da **competência específica 3** e da habilidade **EM13MAT301**, uma vez que utilizarão equações lineares simultâneas para modelar e resolver o problema proposto. O **item c**, em especial, possibilita aos estudantes analisar a plausibilidade dos resultados obtidos.

A **atividade 31** apresenta um algoritmo em Scratch para os estudantes interpretarem e identificarem o que falta para completá-lo de acordo com a condição de alinhamento de três pontos, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 5**. Se possível, peça aos estudantes que testem esse algoritmo no Scratch.

Reta

A questão proposta após a formalização da equação geral da reta incentiva a argumentação e o desenvolvimento da leitura crítica e minuciosa das definições pelos estudantes.

Cabe destacar que, na **atividade resolvida R11**, para $k \in \mathbb{R}$, não nulo, $k \cdot (x + 4y - 11) = 0$ representa uma "família" de equações da reta que passa por $A(-1, 3)$ e $B(3, 2)$. Embora, por conveniência, optemos pela equação que tenha os menores coeficientes inteiros, qualquer equação dessa "família" será considerada a equação geral da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Proponha aos estudantes que façam a **atividade 32** algebricamente (verificando se as coordenadas de cada ponto satisfazem a equação) e graficamente (representando a reta de equação $x - y + 2 = 0$ no plano cartesiano e verificando se os pontos A e B pertencem a essa reta). Na **atividade 34**, após a resolução algébrica, proponha a representação no plano cartesiano dos pontos A e B, da reta que passa por A e B e de pontos de abscissa igual a 1. É importante mediar a discussão para que os estudantes percebam que a resposta é a ordenada do ponto de intersecção da reta que passa por A e B com a reta vertical que passa pelo ponto (1, 0). Na **atividade 36**, cabe observar que (2, 3) é o par ordenado correspondente aos pontos A e D, ou seja, mesmo antes de resolver o sistema formado pelas equações das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, já poderíamos afirmar que o ponto (2, 3) é a intersecção.

Ao trabalhar a medida da inclinação e coeficiente angular de uma reta com a turma, você pode, em um *software* de Geometria dinâmica, representar uma reta que intercepte o eixo x, e depois ir mudando a medida de inclinação dessa reta para que os estudantes percebam o que acontece com o sinal do coeficiente angular.

Antes de explorar as resoluções das **atividades resolvidas R14**, **R15** e **R16** com a turma, peça aos estudantes que tentem fazê-las com base no que foi estudado.

Na **atividade resolvida R18**, os estudantes lidam com a interpretação da situação e a extração de informações relevantes e relacionadas ao experimento para elaborar uma estratégia de resolução. Esse trabalho os coloca em contato com um dos pilares do pensamento computacional: a **abstração**.

Aproveite as **atividades 38** a **42** para verificar se os estudantes têm alguma dificuldade e para retomar algum conceito que julgue necessário.

A abordagem do subtópico *Equação reduzida da reta* favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT401**, uma vez que envolve a conversão de representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano. Os estudantes colocam em prática essa habilidade na **atividade 45**.

Ao iniciar o estudo da posição relativa entre duas retas no plano, verifique se os estudantes conseguem, de antemão, verificar a relação entre os coeficientes angulares de retas paralelas (coincidentes ou distintas) ou concorrentes (não perpendiculares e perpendiculares). A ideia neste primeiro momento é incentivar a experimentação e o levantamento de hipóteses.

Após concluírem a **atividade 46**, incentive-os a representar as retas r e s de cada item em um mesmo plano cartesiano para que verifiquem se a resposta a que chegaram está ou não correta.

Acompanhe os estudantes durante a realização das **atividades 48** a **50** e ajude-os caso apresentem dificuldades. Na **atividade 51**, recorde que mediatriz de um segmento de reta é a reta que passa por seu ponto médio e é perpendicular a ele.

O subtópico *Vetores* suscita o estudo das grandezas escalares e das grandezas vetoriais. Antes de explorar a adição vetorial, é importante que os estudantes compreendam e se apropriem da representação geométrica de vetores.

Se julgar oportuno, na **atividade 53**, peça aos estudantes que façam a adição vetorial do **item b** sem os vetores $\vec{a}$ e $\vec{c}$. É esperado que verifiquem que o vetor resultante tem direção, sentido e módulo igual ao da resolução feita com os quatro vetores. Isso acontece porque os vetores $\vec{a}$ e $\vec{c}$ se anulam, pois têm mesma direção e mesmo módulo, mas sentidos opostos. Assim, podemos dizer que a soma entre vetores com mesma direção e mesmo módulo, mas com sentidos opostos, é nula.

Medida da distância entre ponto e reta

Esse tópico contempla a **competência específica 3** e a habilidade **EM13MAT301**, pois os estudantes deverão aplicar conceitos, definições e procedimentos matemáticos para resolver problemas que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas.

Antes de abordar o conteúdo do livro, represente um ponto e uma reta na lousa e pergunte aos estudantes qual é a medida da distância entre o ponto e a reta. Incentive-os a levantar hipóteses. Depois, comente que essa medida de distância é igual à medida da distância entre esse ponto e sua projeção ortogonal sobre a reta.

As **atividades 56** a **61** envolvem a aplicação da fórmula da medida da distância entre um ponto e uma reta. Reserve um momento para discutir as atividades coletivamente.

Para a resolução da **atividade 62**, oriente os estudantes a verificar se os quatro pontos escolhidos são, de fato, vértices de um trapézio. Se necessário, retome a definição de trapézio, ressaltando que se trata de um quadrilátero cujas retas suportes de dois de seus lados são paralelas.

Inequações do 1º grau com duas incógnitas

Esse tópico também favorece a **competência específica 3** e a habilidade **EM13MAT301**, uma vez que os estudantes continuarão aplicando conceitos, definições e procedimentos matemáticos para resolver problemas que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas.

Antes de iniciar o estudo de inequações do 1º grau com duas incógnitas, recorde os conceitos de desigualdade e de inequações do 1º grau com uma incógnita com a turma. Apresente exemplos.

Após explorar a **atividade resolvida R27**, pergunte aos estudantes por que é necessário um único ponto fora da reta $x + 2y - 6 = 0$ para verificar qual semiplano representa a inequação $x + 2y - 6 \leqslant 0$. Espera-se que eles percebam que a reta de equação $x + 2y - 6 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos; então, ao testar um ponto auxiliar fora dessa reta, é possível verificar se esse ponto pertence ou não ao semiplano $x + 2y - 6 \leqslant 0$. Se o ponto pertencer a esse semiplano, então todos os pontos do mesmo lado da reta em que está o ponto testado também pertencerão a esse semiplano; se o ponto não pertencer a esse semiplano, então todos os pontos do mesmo lado da reta em que está o ponto testado também não pertencerão a ele.

Para realizar as **atividades 63** a **65**, os estudantes vão transitar pelas representações algébrica e gráfica de inequações e sistemas de inequações, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 4**. Caso os estudantes tenham dificuldades para fazer a **atividade 66**, ajude-os a traduzir para a linguagem algébrica as informações fornecidas pelo enunciado.

Medida da área de uma superfície triangular: uma aplicação na Geometria analítica

Esse tópico favorece o desenvolvimento da **competência específica 3** e da habilidade **EM13MAT307**, pois os estudantes vão empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em diferentes situações.

Antes de propor a resolução das **atividades 67** a **70**, explore os exemplos apresentados, sanando eventuais dúvidas. Na **atividade 68**, verifique se os estudantes percebem que a medida da área do quadrilátero *OBQD* também pode ser obtida adicionando as medidas de áreas calculadas nos **itens c** e **d**, ou seja: $A_{OBQD} = A_{BAQ} + A_{CDQ} + A_{OAQC}$

Circunferência

O contexto apresentado no início deste tópico explora algumas características do acelerador de partículas brasileiro, Sirius. É sugerido aos estudantes que acessem o *site* do Laboratório Nacional de Luz Síncrotron (LNLS) para que obtenham mais informações sobre o Sirius. O LNLS faz parte do Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais (CNPEM), uma Organização Social supervisionada pelo Ministério da

Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI). Se possível, navegue no *site* com os estudantes. É importante que percebam como a luz síncrotron é usada para estudar materiais em nível atômico e molecular, ajudando a resolver problemas em diversas áreas, como medicina, meio ambiente e energia. Sugira atividades de pesquisa em grupo para que eles identifiquem exemplos práticos de estudos feitos no LNLS e discutam como essas descobertas impactam a sociedade e o desenvolvimento científico. Essa proposta corrobora um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT103**. A partir da pesquisa, espera-se que os estudantes também identifiquem o apoio ao desenvolvimento tecnológico, à pesquisa e à inovação nacionais, por meio de políticas públicas que assegurem um ambiente institucional e normativo favorável. Esse fortalecimento da pesquisa científica favorece o desenvolvimento do **ODS 9: Indústria, inovação e infraestrutura**.

A circunferência é estudada como lugar geométrico. Após definir circunferência, pergunte aos estudantes se eles conhecem outros conceitos que podem ser definidos como lugar geométrico. Eles podem responder, por exemplo, que a mediatriz de um segmento de reta pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos equidistantes das extremidades do segmento. Eles podem ainda comentar que a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos que estão à mesma medida de distância dos lados do ângulo.

Desenvolva com os estudantes os cálculos para a obtenção da equação reduzida da circunferência. Leia o exemplo com eles e, se achar necessário, apresente outros. Os estudantes podem tentar realizar as **atividades resolvidas R31**, **R32** e **R33** antes de terem contato com a resolução de cada uma.

Nas **atividades 71** a **78** os estudantes colocam em prática o que foi estudado. Aproveite a oportunidade para tirar eventuais dúvidas. Os estudantes podem realizar a **atividade 72** algebricamente (verificando se as coordenadas dos pontos satisfazem a equação da circunferência) ou graficamente (representando os pontos e a circunferência em um mesmo plano cartesiano). Propostas como essa contribuem para que os estudantes ampliem o seu reportório e estratégias de resolução de problemas e estimulam a transição entre diferentes registros de representação. Para responder à **atividade 73**, incentive os estudantes a retomar a definição de função e sua representação gráfica.

Proponha aos estudantes que desenvolvam a equação reduzida da circunferência e peça que comparem a sentença obtida com um colega. Depois, formalize o conceito de equação geral da circunferência e explore os exemplos e a **atividade resolvida R34** com a turma.

Nas **atividades 79** a **84** incentive os estudantes a explicar como fizeram para chegar às respostas.

Ao trabalhar a posição relativa entre ponto e circunferência, verifique se os estudantes reconhecem de antemão que um ponto pode ser interno, exterior ou pertencer à circunferência. Depois, proponha que, em cada caso, comparem a medida da distância d do ponto ao centro da circunferência com a medida do comprimento r do raio dela. Após esse momento inicial, trabalhe o texto do livro e as **atividades resolvidas R35** e **R36**.

Ao propor as **atividades 85** a **89**, oriente os estudantes a representar os pontos e as circunferências no plano cartesiano para entender mais facilmente o que está sendo solicitado.

Antes de trabalhar a posição relativa entre reta e circunferência, convém explorar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o assunto. Faça com eles as **atividades resolvidas R37** a **R40**.

Selecione algumas das **atividades** de **90** a **98** para que os estudantes façam como tarefa para casa. Depois, reserve uma aula para fazer a correção coletiva.

Avalie a conveniência de generalizar a questão proposta na **atividade 92** para circunferências tangentes aos eixos e com centro $C(k, k)$, na bissetriz dos quadrantes ímpares, ou $C'(-k, k)$, na bissetriz dos quadrantes pares, e raio $|k|$, $k \neq 0$. Em ambos os casos, os estudantes deverão obter $AB = |k| \cdot \sqrt{2}$.

Ao abordar a posição relativa entre duas circunferências com os estudantes, analise com eles o quadro que apresenta as diferentes posições relativas. Caso tenham dificuldades para compreender a relação entre a medida de distância d entre os centros e as medidas de comprimento dos raios (r_1 e r_2), recorra a exemplos em que as medidas de comprimento dos raios sejam conhecidas.

As **atividades 99** a **104** exploram a posição relativa entre duas circunferências. Na **atividade 99**, incentive-os a compartilhar como pensaram para identificar a posição relativa em cada item.

Observe que o enunciado da **atividade 100** é uma descrição que diz respeito a um objeto matemático que deve ser representado graficamente. Muitas vezes, essa relação não é muito evidente para os estudantes e precisa ser trabalhada de modo que possibilite seu trânsito pelos diferentes registros de representação semiótica. Questões como essa são importantes, pois possibilitam uma aprendizagem significativa e rica em diversidade de registros. Nessa situação, solicite posteriormente aos estudantes o inverso, ou seja, fornecer a representação gráfica para que eles elaborem um pequeno texto descrevendo o objeto matemático em questão. Verifique se algum estudante obteve uma resposta diferente dessa; por exemplo, com tangência interna das circunferências.

Você pode ampliar a proposta da **atividade 102** levando para a sala de aula, se possível, um disco de vinil ou um CD e solicitando aos estudantes que apoiem o disco ou CD em um pedaço de cartolina, contornem as circunferências e pintem a região entre as duas circunferências traçadas. Depois, solicite que representem um plano cartesiano sobre a figura de modo que a origem do plano coincida com os centros das circunferências. Por fim, peça-lhes que escrevam o sistema de inequações correspondente à região obtida.

Para finalizar o capítulo 7

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 8 Transformações geométricas

Objetivos

- Compreender os principais tipos de transformações isométricas (reflexão, translação e rotação) e as suas composições.
- Compreender as transformações homotéticas.
- Distinguir uma transformação isométrica de uma transformação homotética.
- Realizar transformações geométricas no plano cartesiano por meio de operações com matrizes.

Justificativa dos objetivos

As transformações geométricas podem ser observadas na natureza, em obras de arte, construções e no artesanato de povos indígenas. O estudo desse ramo da Matemática justifica-se por suas muitas aplicações nas Artes plásticas, na Arquitetura, no *Design*, na Engenharia e demais áreas do conhecimento.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC**: **1**, **2**, **3** e **5**.
- **Competências específicas e habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias**:

  Competência específica 1: **EM13MAT105**.

  Competência específica 3.

- **Competência específica e habilidade da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**:
  Competência específica 1[1]: **EM13CHS104**[2].
- **Competências específicas e habilidades da área de Linguagens e suas Tecnologias**:
  Competência específica 2[3]: **EM13LGG201**[4].
  Competência específica 6[5]: **EM13LGG601**[6] e **EM13LGG602**[7].
  Competência específica 7[8]: **EM13LGG704**[9].

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e da habilidade da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Diversidade Cultural
- Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

ODS 9 ODS 11

Orientações didáticas

A abertura deste capítulo aborda o Palácio de Alhambra. Comente que ele é um complexo de palácios e pátios e exibe arquitetura e decoração islâmicas, com padrões geométricos, azulejos pintados, piscinas refletoras e outras belezas. Aproveite para conversar sobre a importância de proteger e salvaguardar patrimônios culturais, significativos para a humanidade, destacando, nesse sentido, o **ODS 11: Cidades e comunidades sustentáveis**.

Ao longo do capítulo, trabalham-se os conceitos de transformações geométricas isométricas e homotéticas em diversos contextos, incluindo análise das produções humanas, como obras de arte, utensílios, arte indígena, Arquitetura e Engenharia, e elementos da natureza, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT105**.

Transformações geométricas

A reprodução da obra de Escher favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG601** e **EM13LGG602**, pois os estudantes poderão se apropriar do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica. Terão ainda a possibilidade de fruir e apre-

---

1 **(Competência específica 1)** Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.

2 **(EM13CHS104)** Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.

3 **(Competência específica 2)** Compreender os processos identitários, conflitos e relações de poder que permeiam as práticas sociais de linguagem, respeitando as diversidades e a pluralidade de ideias e posições, e atuar socialmente com base em princípios e valores assentados na democracia, na igualdade e nos Direitos Humanos, exercitando o autoconhecimento, a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, e combatendo preconceitos de qualquer natureza.

4 **(EM13LGG201)** Utilizar as diversas linguagens (artísticas, corporais e verbais) em diferentes contextos, valorizando-as como fenômeno social, cultural, histórico, variável, heterogêneo e sensível aos contextos de uso.

5 **(Competência específica 6)** Apreciar esteticamente as mais diversas produções artísticas e culturais, considerando suas características locais, regionais e globais, e mobilizar seus conhecimentos sobre as linguagens artísticas para dar significado e (re)construir produções autorais individuais e coletivas, exercendo protagonismo de maneira crítica e criativa, com respeito à diversidade de saberes, identidades e culturas.

6 **(EM13LGG601)** Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.

7 **(EM13LGG602)** Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

8 (**Competência específica 7)** Mobilizar práticas de linguagem no universo digital, considerando as dimensões técnicas, críticas, criativas, éticas e estéticas, para expandir as formas de produzir sentidos, de engajar-se em práticas autorais e coletivas, e de aprender a aprender nos campos da ciência, cultura, trabalho, informação e vida pessoal e coletiva.

9 **(EM13LGG704)** Apropriar-se criticamente de processos de pesquisa e busca de informação, por meio de ferramentas e dos novos formatos de produção e distribuição do conhecimento na cultura de rede.

ciar esteticamente uma manifestação artística e cultural mundial, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade, o que pode ser articulado com a **competência geral 3**. Ademais, é favorecido o desenvolvimento da **competência geral 1**, pois auxilia na valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo cultural para entender e explicar a realidade.

Isometrias

O objetivo deste tópico é que os estudantes compreendam os principais tipos de transformação isométrica (reflexão, translação e rotação) e suas composições. Em vários momentos, eles serão motivados a usar *softwares* de Geometria dinâmica. Essa estratégia é importante, pois auxilia os estudantes a compreender perspectivas e a construir e experimentar figuras que podem ser arrastadas pela tela, observando o que ocorre nas construções, preservando suas propriedades. O uso de *softwares* ajuda a motivar os estudantes, favorecendo o desenvolvimento de habilidades, como construir, experimentar e conjecturar.

Ao trabalhar a construção do simétrico de um segmento em relação a uma reta usando *software* de Geometria dinâmica, como apresentado no livro, comente com os estudantes que, em Geometria, é muito comum encontrarmos situações em que um passo a passo determina uma construção geométrica particular. Uma sequência de passos finita e bem definida como essa, destinada à realização de uma tarefa, pode ser associada a um dos pilares do pensamento computacional: o **algoritmo**. Após estudarem a construção, comente com os estudantes que alguns *softwares* de Geometria dinâmica possuem ferramentas para obter diretamente transformações geométricas. Em um *software* com essa função, para construir um segmento simétrico, bastaria selecionar a ferramenta de simetria por uma reta, depois o segmento original e o eixo de simetria.

As **atividades 1** a **5** abordam reflexão em relação a uma reta. A **atividade 4** favorece o desenvolvimento da **competência geral 2**, pois permite o exercício da curiosidade intelectual e recorre à abordagem própria das Ciências, incluindo a investigação, a reflexão em soluções de problemas, a imaginação e a criatividade para investigar causas. Se julgar oportuno, solicite aos estudantes uma pesquisa sobre a reflexão da luz em espelhos planos (disponível em: https://efisica2.if.usp.br/course/index.php?categoryid=360; acesso em: 30 out. 2024).

A **atividade 5** contribui para o desenvolvimento da **competência geral 5**, pois há um trabalho de compreensão e de utilização de tecnologias digitais.

Acompanhe descrições de observações que podem ser feitas pelos estudantes em cada movimento.

- Segmento $\overline{PQ}$: preserva a medida de comprimento e a direção e, conforme é aproximado ou afastado da reta *s*, o mesmo acontece com o segmento $\overline{P'Q'}$, mantendo a simetria em relação à reta *s*.
- Segmento $\overline{P'Q'}$: quando selecionado, não se movimenta.
- Reta *s*: preserva a direção no movimento. O segmento $\overline{P'Q'}$ movimenta-se com a reta *s*, mantendo a direção e a medida de comprimento. O segmento $\overline{PQ}$ não se movimenta. Como esperado, é preservada a condição de simetria entre os segmentos. Pode-se também, com o movimento, mudar os segmentos de semiplano em relação à reta *s*.
- Ponto da reta *s*: pode-se mudar a direção de *s* e, consequentemente, mudar a direção de $\overline{P'Q'}$, mantendo a medida de comprimento e a simetria com $\overline{PQ}$. O segmento $\overline{PQ}$ não se movimenta.
- Ponto *P*: altera-se a medida de comprimento do segmento $\overline{PQ}$, podendo também mudar sua direção no plano. O segmento $\overline{P'Q'}$ movimenta-se conforme o movimento de $\overline{PQ}$, conservando a simetria em relação à reta *s*. A reta *r* não se movimenta.
- Para ampliar a atividade, peça aos estudantes que, com o movimento do ponto *P*, façam que ele seja um ponto da reta *s* e, depois, façam que o segmento $\overline{PQ}$ seja concorrente à reta *s*. Ao pertencer à reta *s*, o ponto *P* será coincidente ao ponto *P'*. Ao fazer com que $\overline{PQ}$ seja concorrente à reta *s*, acontecerá o mesmo com $\overline{P'Q'}$, de modo a manter a simetria. Com isso, o ponto *P* estará no mesmo semiplano, em relação à reta *s*, do ponto *Q'*, oposto ao semiplano dos pontos *P'* e *Q*.

A reprodução da obra de Rza Abbasi, em *Reflexão em relação a um ponto*, favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG601** e **EM13LGG602** e da **competência geral 3**, uma vez que os estudantes poderão se apropriar de patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo sua diversidade, além de fruir e apreciar esteticamente uma manifestação artística e cultural de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

A construção do simétrico *P'* de um ponto *P* em relação a um centro de reflexão *O* em um *software* de Geometria dinâmica favorece o desenvolvimento da **competência geral 5**, pois auxilia a compreensão e a utilização de tecnologias digitais de informação. Solicite aos estudantes que façam o ponto *P* ser coincidente ao ponto *O*. Eles poderão verificar que *P* será coincidente também com *P'*.

Na **atividade 8**, verifique se os estudantes perceberam que as medidas das distâncias dos vértices do polígono *ABCD* aos vértices correspondentes do polígono *A″B″C″D″* são iguais e que o polígono *A″B″C″D″* tem a mesma orientação do polígono *ABCD* em relação ao plano. Os estudantes poderão verificar que, qualquer que tenha sido o polígono *ABCD* ou os pontos *P* e *Q* escolhidos, a conclusão será a mesma. Se possível, use um *software* de Geometria dinâmica para verificar as conclusões. Basta fazer as reflexões e depois movimentar os pontos *P* e *Q* no plano para chegar à conclusão já observada na atividade.

No subtópico *Translações*, por meio da obra *Dois pássaros*, é apresentado um tipo de transformação geométrica diferente das que foram trabalhadas até o momento. Essa obra também contribui para o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG601** e **EM13LGG602** e da **competência geral 3**.

Ainda nesse subtópico, mais adiante, é abordada a arte do povo indígena Baniwa. Caso julgue oportuno, oriente os estudantes a buscar mais informações sobre esse tema na internet. Converse com eles sobre a importância de valorizar as diversas manifestações artísticas. Esse trabalho contempla os **TCTs Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras** e **Diversidade Cultural**, além de favorecer o desenvolvimento das **competências gerais 1** e **3** e da habilidade **EM13CHS104**, pois auxilia na valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender e explicar a realidade, bem como na valorização de manifestações artísticas e culturais de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.

A **atividade 11** contribui para o desenvolvimento da **competência específica 6 da área de Linguagens e suas Tecnologias** e das habilidades **EM13LGG201** e **EM13LGG704**, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias. A pesquisa solicitada incentiva os estudantes a apropriarem-se criticamente de processos de pesquisa e busca de informação. Eles podem pesquisar "arte indígena brasileira" ou "simetria na arte indígena brasileira". No *site* de busca, peça-lhes que cliquem em imagens; há uma grande quantidade de exemplos. Se achar conveniente, organize uma exposição das fotografias impressas com os desenhos elaborados pelos estudantes.

A construção proposta em *Construção da rotação de uma figura com* software *de Geometria dinâmica* desenvolve a **competência geral 5**, pois favorece a compreensão e utilização de tecnologias digitais de informação.

As **atividades 12** a **15** exploram composições de rotações em torno de pontos distintos. Caso os estudantes apresentem dificuldades, faça alguns exemplos na lousa com o intuito de sanar as dúvidas.

A **atividade 16** propicia o desenvolvimento da **competência geral 5**, pois favorece a compreensão, utilização e criação de tecnologias digitais de informação. É importante que os estudantes percebam que a rotação se dá em torno de um dos vértices e que ela transporta um dos lados do triângulo para a posição que outro lado ocupava.

Homotetia

Neste tópico, é apresentado o fractal conhecido como triângulo de Sierpinski, com o objetivo de explicar que a homotetia é uma transformação geométrica que tem como resultado uma figura semelhante à original. Certifique-se de que os estudantes compreenderam que essa transformação mantém a razão entre as medidas de comprimento dos segmentos, as medidas de abertura de ângulos e o paralelismo entre os segmentos correspondentes.

O trabalho com o texto sobre a cerâmica marajoara contempla os **TCTs Diversidade Cultural** e **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras**, além de favorecer o desenvolvimento das **competências gerais 1** e **3** e da habilidade **EM13CHS104**, pois auxilia na valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender e explicar a realidade, bem como na valorização de manifestações artísticas e culturais de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.

Na **atividade 18**, é importante os estudantes notarem que, entre duas figuras semelhantes, nem sempre haverá um centro de homotetia. Outra forma de entender a situação seria a composição da homotetia com uma isometria, como uma rotação.

A **atividade 20** auxilia parcialmente no desenvolvimento da **competência específica 6 da área de Linguagens e suas Tecnologias** e das habilidades **EM13LGG201** e **EM13LGG704**, favorecendo a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias. A pesquisa solicitada incentiva os estudantes a apropriarem-se criticamente de processos de pesquisa e busca de informação.

Matrizes e transformações geométricas

Este tópico mostra a integração entre a Matemática e a tecnologia, explanando que, por meio de operações com matrizes, um conceito matemático, é possível fazer as animações dos objetos na tela de um jogo ou de um filme. Aproveite esse contexto para promover e conscientizar os estudantes sobre a importância do consumo inteligente de recursos necessários para a produção de tecnologias. Além disso, é importante abordar o impacto ambiental da extração de matérias-primas e a necessidade de inovação em tecnologias mais eficientes e ecológicas. Desse modo, aborda-se o **ODS 9: Indústria, inovação e infraestrutura**.

A multiplicação por matrizes a fim de realizar transformações geométricas é uma técnica que pode ser utilizada na computação gráfica. Comente com os estudantes que essa abordagem os coloca em contato com os pilares do pensamento computacional **algoritmo** e **reconhecimento de padrões**.

As **atividades 21** a **25** favorecem o desenvolvimento da **competência específica 3**, pois os estudantes poderão utilizar estratégias, definições e conceitos matemáticos e as noções de transformações geométricas na construção de figuras com o uso de matrizes em um plano cartesiano.

Para finalizar o capítulo 8

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conteúdos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza esse mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA – *Fake news* – manipulação de imagens

Objetivos

- Entender que imagens podem ser manipuladas para disseminar desinformação.
- Compreender como uma imagem digital pode ser representada por uma matriz.
- Compreender que, ao fazer operações com matrizes que estejam relacionadas com imagens digitais, a matriz resultante gera outra imagem digital.
- Fazer pesquisa reversa de imagens.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC**: **2**, **5** e **9**.
- **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias**: **3**

Os textos na íntegra das competências gerais e da competência específica da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Tema Contemporâneo Transversal

Educação em Direitos Humanos

Objetivo de Desenvolvimento Sustentável

ODS 17

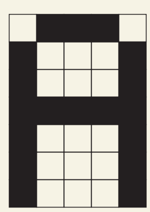
Orientações didáticas

O foco desta seção é promover a reflexão sobre a manipulação de imagens e entender como o conceito de matriz está inserido nesse contexto.

Antes de explorar o texto e os exemplos da seção, proponha aos estudantes que conversem sobre os questionamentos da **atividade 1**. Depois, comente que é cada vez mais comum a propagação de imagens antigas, manipuladas ou completamente encenadas com o intuito de disseminar desinformação. Alerte também para o fato de que a manipulação de imagens pode violar os direitos humanos e a privacidade das pessoas ao serem utilizadas de maneiras não autorizadas ou prejudiciais, contribuindo para o desenvolvimento do **TCT Educação em Direitos Humanos**.

Apresente os exemplos trazidos na seção e, se possível, exiba outros. É importante incentivar a turma a analisar criticamente as imagens manipuladas e reservar um momento para que possam discutir as possíveis intenções por trás de cada uma delas. Depois, questione o que precisaria ser feito para que imagens como essas não fossem mais propagadas. Uma possível resposta seria a colaboração entre governos, empresas de mídia, sociedade civil e outras organizações para desenvolver e implementar padrões éticos e regulamentos para garantir a precisão e a transparência na comunicação visual. Nesse sentido, a discussão pode levar ao desenvolvimento do **ODS 17: Parcerias e meios de implementação**.

Verifique se os estudantes compreenderam a relação entre os *pixels* de uma imagem digital e os elementos de uma matriz. Caso julgue necessário, apresente a imagem a seguir.



$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Chame a atenção para o fato de a imagem estar associada a uma matriz 7×5, em que os elementos são os números 0 e 1. O número 0 indica a cor preta, e o número 1, a cor branca. Esse é um exemplo de imagem digital binária, pois são utilizadas apenas duas cores. Na manipulação da imagem do leão apresentada na seção, os elementos da matriz da imagem original que formam o leão albino são iguais a 1, enquanto os elementos correspondentes na imagem manipulada são iguais a 0, formando o leão preto.

Aprofunde a explicação e comente que, para representar uma imagem colorida, é utilizado o sistema RGB (*red*, *green*, *blue*). Explique que a matriz associada a uma imagem colorida é resultante de operações feitas com três matrizes cujos elementos são números inteiros entre 0 e 255. Dessas três matrizes, uma determina a quantidade de vermelho (*red*); outra, a quantidade de verde (*green*); e a outra, a quantidade de azul (*blue*) que compõe a imagem. Dessa forma, no sistema RGB, é possível representar 16.777.216 cores diferentes, pois $256^3 = 2^{24} = 16.777.216$.

Explique como uma nova imagem digital pode ser gerada com base em outras, por meio da adição ou da subtração de matrizes. Explore os exemplos com os estudantes e proponha que façam a **atividade 2**. Incentive-os a justificar a resposta.

O foco da **atividade 3** é a pesquisa reversa de imagens. Se possível, mostre na prática como funciona esse tipo de pesquisa. Ao propor as questões do **item a**, deixe os estudantes à vontade para compartilhar suas experiências. O **item b** pode ser proposto como tarefa para casa ou ser feito na sala de informática da escola. Reserve um momento para que todos possam compartilhar as imagens que pesquisaram e as conclusões a que chegaram. Propostas como essa incentivam a investigação, a reflexão e a análise crítica, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 2**, e também promovem a utilização de tecnologias digitais de forma crítica e ética, desenvolvendo a **competência geral 5**. Por tratar-se de uma atividade que envolve diálogo, ela permite que os estudantes exercitem a empatia, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 9**.

A **atividade 4** envolve o conceito de transposta de uma matriz. Caso alguns estudantes tenham demonstrado dificuldade, apresente, na lousa, alguns exemplos de matrizes e suas respectivas transpostas. Em seguida, peça que indiquem a alternativa correta e justifiquem a resposta. É possível que alguns deles tenham dúvidas entre as **alternativas a** e **d**. Caso isso ocorra, oriente-os a acompanhar os passos a seguir.

Passo 1. Imaginar que a imagem da pera é composta de "peças" de formato quadrado e que cada uma delas se relaciona com um elemento de uma matriz.

Passo 2. Avaliar em que posição essas "peças" vão ficar na imagem representada pela matriz transposta.

A ideia é que eles percebam, por exemplo, que, se a pera fosse representada pela matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$, então a da **alternativa d** seria representada pela matriz $C = \begin{pmatrix} f & d & b \\ e & c & a \end{pmatrix}$, e C não é a transposta de A.

A **atividade 4** incentiva a investigação e a elaboração de hipóteses, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 2**, e leva os estudantes a utilizarem os conceitos de matriz e transposta de uma matriz para resolver o problema e analisar a plausibilidade da resposta, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 3**.

PESQUISA E AÇÃO – Exposição de arte

Objetivos

- Pesquisar informações sobre discriminação racial e desigualdade racial.
- Pesquisar informações acerca da Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial (1968), a Conferência de Durban (2001) e a Década Internacional de Afrodescendentes (2015-2024).
- Apreciare analisar obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira.
- Criar obra de arte inspirada nas culturas africana e afro-brasileira.
- Promover uma exposição das obras criadas para a comunidade escolar.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC**: **1**, **3**, **7**, **9** e **10**.
- **Competência específica e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias**:

  Competência específica 1: **EM13MAT102** e **EM13MAT105**.
- **Competência específica e habilidade da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**:

  Competência específica 6[1]: **EM13CHS601**[2].
- **Competência específica e habilidade da área de Linguagens e suas Tecnologias**:

  Competência específica 6[3]: **EM13LGG601**[4].

Os textos na íntegra das competências gerais, da competência específica e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

---

1 **(Competência específica 6)** Participar do debate público de forma crítica, respeitando diferentes posições e fazendo escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

2 **(EM13CHS601)** Identificar e analisar as demandas e os protagonismos políticos, sociais e culturais dos povos indígenas e das populações afrodescendentes (incluindo as quilombolas) no Brasil contemporâneo considerando a história das Américas e o contexto de exclusão e inclusão precária desses grupos na ordem social e econômica atual, promovendo ações para a redução das desigualdades étnico-raciais no país.

3 **(Competência específica 6)** Apreciar esteticamente as mais diversas produções artísticas e culturais, considerando suas características locais, regionais e globais, e mobilizar seus conhecimentos sobre as linguagens artísticas para dar significado e (re)construir produções autorais individuais e coletivas, exercendo protagonismo de maneira crítica e criativa, com respeito à diversidade de saberes, identidades e culturas.

4 **(EM13LGG601)** Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.

Temas Contemporâneos Transversais

- Diversidade Cultural
- Educação em Direitos Humanos
- Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras

Objetivo de Desenvolvimento Sustentável

ODS 10

Orientações didáticas

Esta seção favorece o desenvolvimento das **competências gerais 7**, **9** e **10**, desenvolvendo um trabalho em grupo ético, defesas de pontos de vista baseadas em dados, o exercício da responsabilidade, da empatia e da resolução de conflitos. Além disso, promove o desenvolvimento da **competência específica 1**, junto com as habilidades **EM13MAT102** e **EM13CHS601**, possibilitando desenvolver um trabalho interdisciplinar com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas no que se refere à análise das demandas políticas, sociais e culturais dos povos afrodescendentes no Brasil e à promoção de ações para reduzir as desigualdades étnico-raciais no país. Além disso, favorece o desenvolvimento das **competências gerais 1** e **3**, da **competência específica 6 da área de Linguagens e suas Tecnologias** e das habilidades **EM13MAT105** e **EM13LGG601**, ao colocar em prática noções de transformações geométricas para analisar e construir obras de arte e ao desenvolver a visão crítica e histórica dos estudantes, possibilitando que se apropriem do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares e compreendam a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade.

O trabalho e a discussão a respeito de discriminação e desigualdade racial, bem como a apreciação e a criação de obras de arte inspiradas nas culturas africana e afro-brasileira, contribuem para o desenvolvimento dos **TCTs Diversidade Cultural, Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras** e **Educação em Direitos Humanos** e, além disso, vão ao encontro do que propõem as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana (Parecer CNE/CP nº 3/2004 e Resolução CNE/CP nº 01/2004), ao combater o racismo e a discriminação, especialmente contra os negros. Essas discussões também promovem o desenvolvimento do **ODS 10: Redução das desigualdades**.

Inicie a seção promovendo uma roda de conversa com os estudantes. Proponha questões como: "O que vocês entendem da palavra *afrodescendente*? O que significa *afro-brasileiro*? Qual é a diferença entre discriminação racial e desigualdade racial? Por que é preciso valorizar a cultura dos povos afrodescendentes e proteger seus direitos? Quais formas de discriminação racial vocês conhecem? E de desigualdade racial?".

Para ampliar a reflexão, exiba aos estudantes (ou sugira que assistam em casa) o documentário *A rota do escravo: uma visão global*, produzido pela Unesco. Nele são apresentadas histórias e heranças que resultaram do comércio de pessoas escravizadas. O documentário está disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=rIfTqFmpsdI&feature=emb_title. Acesso em: 30 out. 2024.

ETAPA 1

Sane possíveis dúvidas dos estudantes e ofereça as instruções necessárias para que respondam às questões propostas. Oriente as duplas a realizar as pesquisas em fontes de informação confiáveis. Seguem alguns *sites* que podem ser sugeridos.

- Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/1950-1969/d65810.html. Acesso em: 30 out. 2024.
- Conferência e Declaração de Durban. Disponíveis em: http://www.unfpa.org.br/Arquivos/declaracao_durban.pdf. Acesso em: 30 out. 2024.
- Década Internacional de Afrodescendentes. Disponível em: http://decada-afro-onu.org/index.shtml. Acesso em: 30 out. 2024.

Resposta do **item a** da **atividade 1**: A Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial é um documento que define formas de proteger os direitos humanos de pessoas e grupos de pessoas que precisam de proteção especial, combatendo todos os tipos de discriminação racial.

Resposta do **item b** da **atividade 1**: A convenção foi adotada pela Assembleia Geral das Nações Unidas em 21 de dezembro de 1965.

Resposta do **item c** da **atividade 1**: A Conferência de Durban foi promovida pela Organização das Nações Unidas (ONU). Ela aconteceu na cidade de Durban, na África do Sul, entre 31 de agosto e 8 de setembro de 2001.

Resposta do **item d** da **atividade 1**: A Declaração e o Programa de Ação de Durban são documentos criados após a Conferência de Durban com o objetivo de eliminar o racismo, a desigualdade racial, a xenofobia e outras formas de intolerância.

Resposta do **item e** da **atividade 1**: A Década Internacional de Afrodescendentes foi proclamada pela Assembleia Geral da ONU para reconhecer que os povos afrodescendentes formam um grupo que sofre diversos tipos de discriminação e desigualdade e que precisa ter seus direitos humanos protegidos e promovidos.

Resposta do **item f** da **atividade 1**: Os principais objetivos são: "promover respeito, proteção e cumprimento de todos os direitos humanos e liberdades fundamentais das pessoas afrodescendentes [...]; promover um maior conhecimento e respeito pelo patrimônio diversificado, a cultura e a contribuição de afrodescendentes para o desenvolvimento das sociedades; adotar e reforçar os quadros jurídicos nacionais, regionais e internacionais de acordo com a Declaração e Programa de Ação de Durban e a Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial, bem como assegurar a sua plena e efetiva implementação". (NAÇÕES UNIDAS. **Programa de atividades para a implementação da Década Internacional de Afrodescendentes**. [*S. l.*, 20--]. Disponível em: http://decada-afro-onu.org/plan-action.shtml. Acesso em: 30 out. 2024.)

Se julgar oportuno, sugira aos estudantes que leiam as ações propostas no âmbito "Reconhecimento", disponíveis em: https://decada-afro-onu.org/recognition.shtml; acesso em: 30 out. 2024. Depois, converse sobre essas propostas, pois tratam da importância de conhecer, reconhecer e valorizar a cultura dos povos afrodescendentes, principal tema desta seção.

Na **atividade 2**, oriente os estudantes que dados sobre desigualdade racial e de gênero podem ser acessados no *site* do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), em "Retrato das desigualdades de gênero e raça", disponível em: https://www.ipea.gov.br/retrato/; acesso em: 30 out. 2024.

Na **atividade 3**, explore a análise e a interpretação das tabelas oriundas das pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação.

Para enriquecer o trabalho acerca do tema discriminação e desigualdade racial, sugira aos estudantes o filme *Estrelas além do tempo*. Esse filme oferece uma boa oportunidade de discutir com eles o racismo estrutural e as dificuldades enfrentadas por mulheres negras na luta por igualdade. Baseado em fatos reais, o filme conta a história de três matemáticas afro-americanas que, apesar do preconceito, contribuíram significativamente para a Nasa durante a corrida espacial dos Estados Unidos na década de 1960. Motive os estudantes a refletir sobre o impacto que o racismo tem, nos dias atuais, no acesso a educação e trabalho. Instigue-os a pensar o que mudou e o que persiste em termos de racismo e desigualdade.

ETAPA 2

Na **atividade 4**, é possível sugerir aos estudantes os *sites* a seguir.

- Geledés: Instituto da mulher negra. Kente, os tecidos dos reis africanos. Disponível em: https://www.geledes.org.br/kente-os-tecidos-dos-reis-africanos/. Acesso em: 30 out. 2024.
- Enciclopédia Itaú Cultural: Biografia e obras de Rubem Valentim. Disponível em: https://enciclopedia.itaucultural.org.br/pessoa8766/rubem-valentim. Acesso em: 30 out. 2024.
- Museu Afro Brasil. Disponível em: http://www.museuafrobrasil.org.br/o-museu/apresentacao. Acesso em: 30 out. 2024.

Na **atividade 5**, proporcione aos estudantes um momento de apreciação e conversa sobre as obras selecionadas. Mobilizar os conhecimentos a respeito de transformações geométricas com base nas obras favorece a ampliação do repertório dos estudantes, preparando-os para a criação de suas obras de arte.

ETAPA 3

Na **atividade 6**, o momento de criação das obras de arte deve ser descontraído, a fim de estimular o envolvimento e a criatividade dos estudantes, bem como valorizar e reconhecer a importância da cultura dos povos afrodescendentes. Disponibilize diferentes tipos de material, sobretudo recicláveis. Para a criação de pinturas, por exemplo, podem-se utilizar como telas caixas de *pizza* pintadas com tinta branca.

Se necessário, retome as transformações geométricas estudadas no capítulo 8. Sane possíveis dúvidas e oriente os estudantes a realizar as transformações geométricas adequadamente.

ETAPA 4

Sugira a criação de frases e textos sobre os temas que farão parte da exposição.

ETAPA 5

As perguntas a seguir podem servir de respaldo para conversar com os estudantes alguns pontos importantes: "Como foi a criação das obras de arte? Como foi a experiência de expor as obras para outras pessoas? O que acharam da exposição? Ficou evidente para os visitantes qual era o tema da exposição? Acreditam que a exposição contribuiu para conscientizar as pessoas sobre a importância de combater a discriminação e a desigualdade racial? Contribuiu também para conscientizá-los sobre a importância de conhecer e valorizar as culturas africana e afro-brasileira? A turma trabalhou de maneira colaborativa? Quais aspectos podem ser melhorados?".

PREPARE-SE PARA O ENEM E VESTIBULARES

Objetivos

- Mobilizar conceitos e procedimentos estudados no volume.
- Avaliar a aprendizagem dos estudantes.
- Ajudar os estudantes a se prepararem para os exames de larga escala que tenham a intenção de realizar.

Orientações didáticas

Após todos terem respondido às questões, reserve um momento para discutir cada uma delas coletivamente. É importante compreender o que levou alguns estudantes a assinalar uma alternativa diferente da esperada e que, na medida do possível, esses pontos sejam discutidos.

Se achar necessário, enriqueça a seção e proponha questões mais atuais do Enem e de vestibulares que contemplem os temas estudados.

RESOLUÇÕES DAS ATIVIDADES

Avaliação diagnóstica 1

1. Das figuras apresentadas, somente a da alternativa **b** é fechada e formada apenas por segmentos de retas que não se cruzam. Portanto, ela é a que representa um polígono.

   Alternativa **b**.

2. Como os ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{E}D$ têm mesma medida de abertura e os ângulos $A\hat{C}B$ e $E\hat{C}D$ são alternos internos, então os triângulos ABC e EDC são semelhantes. Assim:

   $\frac{20}{16} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 12}{16} = 15$

   $\frac{20}{16} = \frac{y}{14} \Rightarrow y = \frac{20 \cdot 14}{16} = \frac{35}{2}$

   Portanto, $x + y = 15 + \frac{35}{2} = \frac{65}{2}$

   Alternativa **c**.

3. Na figura, os ângulos $B\hat{O}D$ e $A\hat{O}B$ são consecutivos, pois compartilham o vértice O e o lado $\overrightarrow{OB}$, e são também adjacentes por não possuírem pontos internos em comum.

   Alternativa **e**.

4. A soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dada por $S_i = (n - 2) \cdot 180°$. No caso do decágono apresentado, a soma será igual a $8 \cdot 180° = 1.440°$ e, como ele é um polígono regular, a medida da abertura de cada ângulo interno será dada por $\frac{1.440°}{10} = 144°$.

   Alternativa **c**.

5. Um par de polígonos é dito equivalente quando os dois têm a mesma medida de área. Entre as superfícies poligonais apresentadas, apenas três delas têm medidas de área iguais: 2, 3 e 4, medindo 6 unidades de área. O único par de figuras que aparece como alternativa é o par 2 e 3.

   Alternativa **e**.

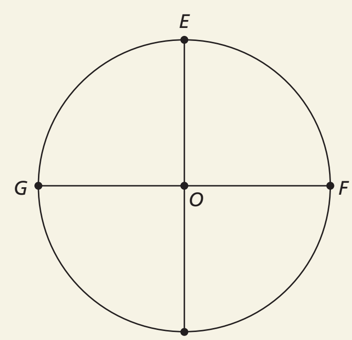
6. Da figura, observa-se que a abertura do ângulo $\hat{a}$ mede 70°, do ângulo $\hat{b}$ mede 20°, do ângulo $\hat{c}$ mede 30° e a abertura do ângulo $\hat{d}$ tem medida igual a 150°. Logo, os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são complementares, pois a soma das medidas de suas aberturas é 90°, enquanto os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{d}$ são suplementares, pois a soma das medidas de suas aberturas é 180°.

   Alternativa **a**.

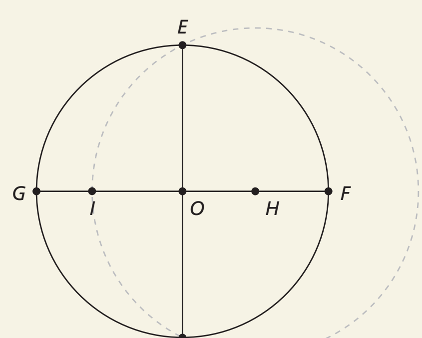
Capítulo 1 Superfícies poligonais, círculo e áreas

Atividades propostas

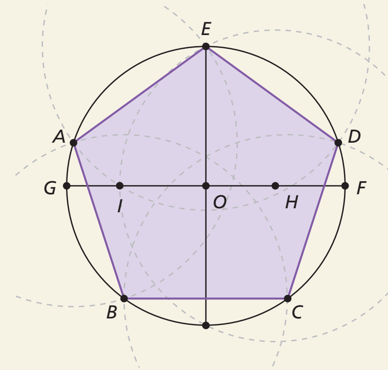
1. Exemplo de resposta: Sim, é possível construir um pentágono regular utilizando somente régua e compasso. Para começar, traçamos uma circunferência de centro O e duas retas perpendiculares passando por O. Marcamos os pontos de intersecção dessas retas com a circunferência, como na imagem a seguir.



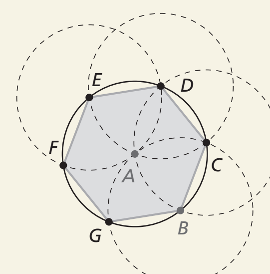
   Então, marca-se o ponto médio do segmento $\overline{OF}$ como H e traça-se uma circunferência de centro H, passando por E. O ponto de encontro dessa nova circunferência com o segmento $\overline{GO}$ será marcado como ponto I.



   Traça-se, então, uma nova circunferência, centrada no ponto E e passando por I, e marca-se o ponto A de intersecção com a circunferência original, de centro O. Centrada no ponto O, traça-se outra circunferência passando por E e marca-se o ponto B de intersecção com a circunferência original. Repetindo esse processo, obtém-se o pentágono regular $ABCDE$.



2. Exemplo de resposta: Partindo de uma circunferência de centro A, é possível desenhar um hexágono inscrito nela. Tomando um ponto B qualquer da circunferência e traçando uma circunferência centrada nele e passando por A, obtêm-se os pontos B e G na intersecção com a circunferência original. Repetindo esse processo, obtêm-se todos os pontos dos vértices do hexágono regular $BCDEFG$.



3. Em um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de medida de comprimento do raio $r = 2$ cm, temos:

   $a_3 = \frac{r}{2} \Rightarrow a_3 = 1$

   $\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow \ell_3 = 2\sqrt{3}$

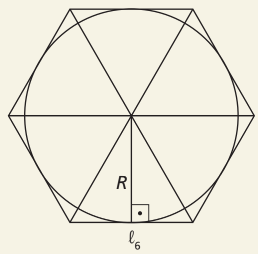
   Portanto, as medidas de comprimento do apótema e do lado desse triângulo são 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm, respectivamente.

4. Exemplo de construção:

   Repetindo os passos da construção da **atividade 2**, construímos os pontos B, C, D, E, F e G, e os segmentos que ligam cada um desses pontos ao centro A da circunferência. Em seguida, traçamos as retas perpendiculares a estes segmentos, passando por esses pontos. Da intersecção dos pares de retas que passam por pontos adjacentes, encontramos os vértices do hexágono circunscrito.

   a. $R = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow \ell_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$

b. $D = 2 \cdot \ell_6 = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}R \Rightarrow D = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$



c. $P = 6 \cdot \ell_6 = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}\,R}{3} \Rightarrow P = 4\sqrt{3}\,R$

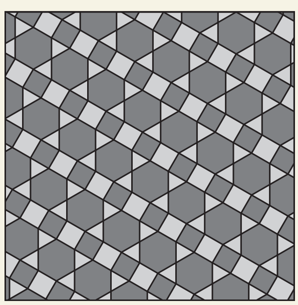
5. **a.** Buraco, pois a abertura de cada ângulo interno mede menos que 180º, então dois desses ângulos, justapostos, têm medida de abertura menor que 360º.

b. Sobreposição, pois a abertura de cada ângulo interno mede mais que 120º, então três desses ângulos, justapostos, têm medida de abertura maior que 360º.

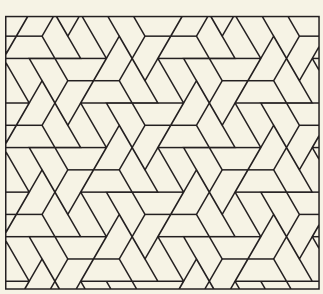
6. Exemplos de resposta: peças de marchetaria, forros de madeira, papéis de parede, estampas de tecidos, vitrais, malharias e crochês.

7. Exemplos de resposta:

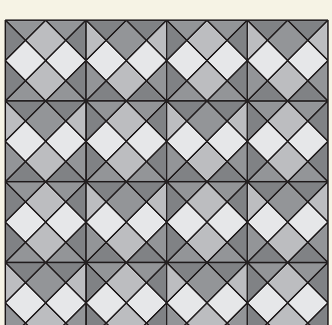
a. apenas polígonos regulares;



b. apenas polígonos não regulares;

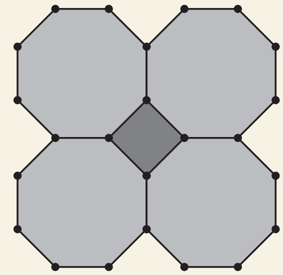


c. polígonos não regulares e polígonos regulares.



8. Respostas pessoais.

9. Exemplo de resposta: octógonos regulares e quadrados.



10. **a.** Analisando os gráficos, podemos perceber que, ao dobrar a medida do comprimento dos lados, a medida do perímetro dobra e a medida da área quadruplica.

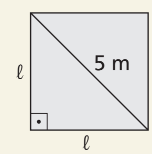
b. A função *P*, que dá a medida do perímetro, tem variação diretamente proporcional à variação da medida de comprimento do lado do quadrado.

c. $x^2 = 4 \cdot x \Rightarrow x \cdot (x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ (não convém) ou $x = 4$

$x = 4 \Rightarrow P(4) = 4 \cdot 4 = 16$ ou $A(4) = 4^2 = 16$

Portanto, o ponto comum dos gráficos, que nos dá a medida do comprimento do lado do quadrado tal que as medidas do perímetro e da área sejam iguais, é (4, 16).

11.



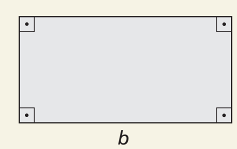
$\ell^2 + \ell^2 = 5^2 \Rightarrow 2 \cdot \ell^2 = 25 \Rightarrow \ell^2 = 12{,}5$

$A_{\text{quadrado}} = \ell^2 = 12{,}5$

Logo, a área do quadrado mede 12,5 m^2.

12. Sim, uma vez que todo quadrado é retângulo, pois tem quatro ângulos retos e lados congruentes dois a dois.

13. $2a + 2b = 12 \Rightarrow a + b = 6$ (I)



$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2a$

Substituindo em (I), obtemos:

$a + 2a = 6 \Rightarrow a = 2$ e $b = 4$

medida da área: $a \cdot b = 2 \cdot 4 = 8$

Logo, a medida da área do retângulo é 8 m^2.

14. **a.** Como $\overline{BC} \,//\, \overline{AG} \,//\, \overline{EF}$ e $\overline{AB} \,//\, \overline{CE} \,//\, \overline{GF}$, os polígonos *DCBA* e *DEFG* são paralelogramos.

Logo: $AB = CD = 10$ e $\frac{DE}{AB} = \frac{30}{10} = 3$

b. medida do perímetro (*DEFG*): $30 + 78 + 30 + 78 = 216$

medida do perímetro (*DCBA*): $10 + 26 + 10 + 26 = 72$

$\frac{\text{medida do perímetro } (DEFG)}{\text{medida do perímetro } (DCBA)} = \frac{216}{72} = 3$

c. Como percebemos nos itens anteriores que as medidas de comprimento dos lados do paralelogramo têm a mesma razão, além de terem ângulos congruentes, os dois polígonos devem ser semelhantes. Portanto, a razão entre as medidas das alturas *GH*, do paralelogramo *DEFG*, e *h*, do paralelogramo *DCBA*, também deve ser 3. Assim:

$\frac{GH}{h} = 3 \Rightarrow h = \frac{18}{3} = 6$

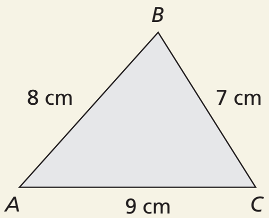
Dessa forma, podemos calcular:

$A_{DEFG} = 78 \cdot 18 = 1.404$

$A_{DCBA} = 26 \cdot 6 = 156$

$\frac{A_{DEFG}}{A_{DCBA}} = \frac{1.404}{156} = 9$

15.



$p = \frac{8 + 7 + 9}{2} = 12$

$A_{\triangle ABC} = \sqrt{12(12 - 8) \cdot (12 - 7) \cdot (12 - 9)} = 12\sqrt{5}$

Logo, a área do triângulo *ABC* mede $12\sqrt{5}$ cm^2.

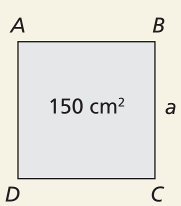
16. Traçando a altura do triângulo equilátero, percebe-se que foi formado um triângulo retângulo de hipotenusa de medida de comprimento ℓ e catetos com medidas de comprimento $\frac{\ell}{2}$ e *h*. Utilizando o teorema de Pitágoras, calculamos:

$\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

Com a medida da altura calculada, e sabendo que a base do triângulo equilátero tem medida de comprimento ℓ, obtemos:

medida da área $= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

17.

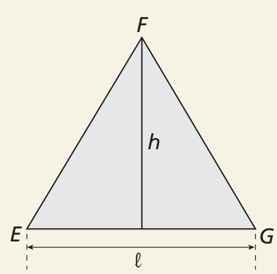


$A_{ABCD} = 150 \Rightarrow a^2 = 150 \Rightarrow a = 5\sqrt{6}$

Seja *d* a medida de comprimento da diagonal do quadrado. Assim:

$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2} \Rightarrow d = 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow d = 5\sqrt{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 10\sqrt{3} = h$



$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 20$

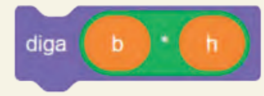
$A_{\triangle EFG} = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{\triangle EFG} = \frac{20^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{\triangle EFG} = 100\sqrt{3}$

Logo, a medida da área do triângulo equilátero é $100\sqrt{3}$ cm^2.

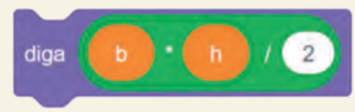
18. Exemplo de resposta:

a. Como a medida da área de um retângulo é o produto das medidas do comprimento da base e da altura, o último comando do algoritmo é:

b. Como a medida da área de um paralelogramo é o produto das medidas do comprimento da base e da altura, o último comando do algoritmo é:



c. Como a medida da área de um triângulo é o produto das medidas do comprimento da base e da altura dividido por 2, o último comando do algoritmo é:



19 a. Se $A = \frac{a}{2} \cdot \left(a - \frac{a}{7}\right)$ e $a = 2$, teremos:

$A = \frac{2}{2} \cdot \left(2 - \frac{2}{7}\right) = \frac{14 - 2}{7} = \frac{12}{7}$

A medida da área aproximada do triângulo equilátero com lados medindo 2 cm de comprimento é 1,714 cm^2.

b. Nesse caso, teremos: $A = \frac{b \cdot h}{2}$

Calculamos, então, sua medida da altura:

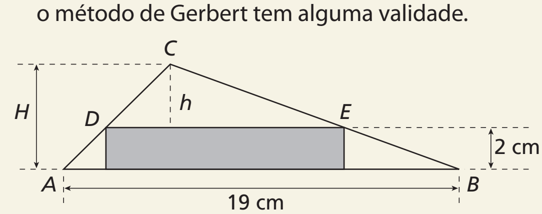
$h = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Logo:

$A = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} \simeq 1{,}732$

c. Espera-se que os estudantes concluam que as medidas de área obtidas pelos dois métodos são próximas, portanto o método de Gerbert tem alguma validade.

20.



O triângulo *ABC* é semelhante ao triângulo *DEC*.

Sendo *H* a altura do triângulo *ABC* e *h* a medida da altura do triângulo *DEC*, temos:

$\frac{AB}{DE} = \frac{H}{h} \Rightarrow \frac{19}{DE} = \frac{5}{3} \Rightarrow DE = 11{,}4$

Logo: $A_{\text{retângulo}} = 2 \cdot 11{,}4 = 22{,}8$

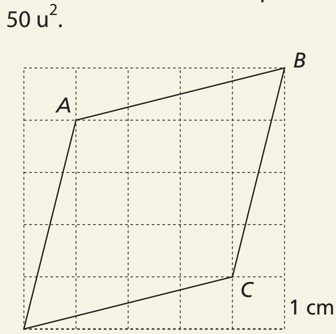
Portanto, a medida da área do retângulo é 22,8 cm^2.

21. $A_{\text{trapézio}} = \frac{(10 + 5) \cdot 10}{2} = 75$

$A_{\text{triângulo}} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$

A medida da área do trapézio é 75 u^2 e a do triângulo é 50 u^2.

22.



Como os lados dos quadrados tem medida de comprimento 1 cm, podemos calcular a medida x de suas diagonais como $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

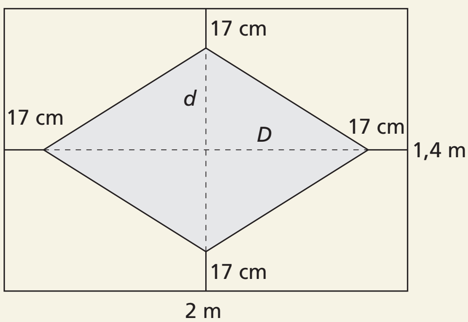
As medidas de comprimento das diagonais dos quadrados são $\sqrt{2}$ cm.

Assim, podemos determinar as diagonais do losango como $d = 3\sqrt{2}$ cm e $D = 5\sqrt{2}$ cm. Calculamos então:

$$A_{ABCD} = 3\sqrt{2}\text{ cm} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$$

A medida da área do losango é 15 cm^2.

23.



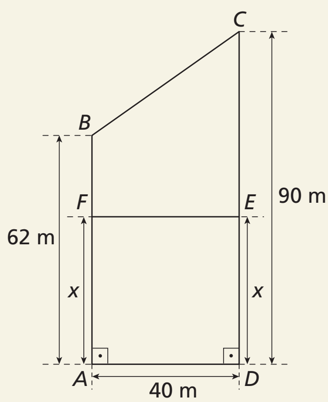
$d = 1{,}4\text{ m} - 2 \cdot 0{,}17\text{ m} \Rightarrow d = 1{,}06\text{ m} = 106\text{ cm}$

$D = 2\text{ m} - 2 \cdot 0{,}17\text{ m} \Rightarrow D = 1{,}66\text{ m} = 166\text{ cm}$

$$A_{\text{losango}} = \frac{d \cdot D}{2} = 8.798\text{ cm}^2$$

A medida da área do losango é 8.798 cm^2.

24.



$A_{\text{retângulo}} = A_{\text{trapézio}}$

$A_{ADEF} = A_{BCEF}$

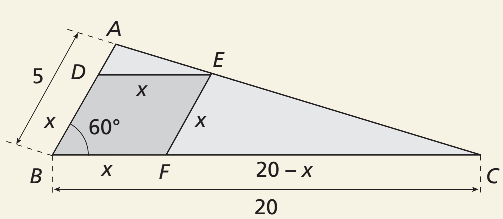
$$x \cdot 40 = \frac{(62 - x + 90 - x)40}{2} \Rightarrow 2x = 152 - 2x \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4x = 152 \Rightarrow x = 38$

Portanto, a medida da distância do lado $\overline{AD}$ até a cerca deve ser 38 m.

Alternativa **c**.

25.



$\triangle ADE \sim \triangle EFC$

$$\frac{x}{20 - x} = \frac{5 - x}{x} \Rightarrow x^2 = 100 - 25x + x^2 \Rightarrow x = 4$$

A medida da área do losango $DEFB$ é 2 vezes a medida da área do triângulo BDF:

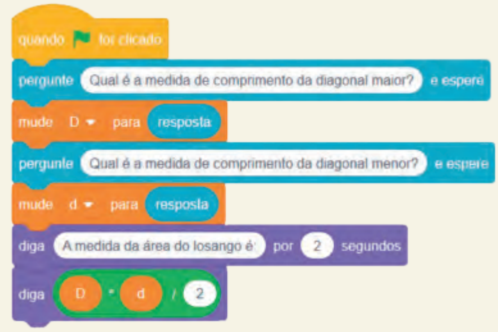
$$A_{DEFB} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \text{sen } 60°}{2} = \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

Portanto, o comprimento do lado do losango mede 4 m e a medida de sua área é $8\sqrt{3}$ m^2.

26. Exemplos de resposta:

a.

b.



SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE, EUA

27. $a_3 = \frac{r}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$

$\ell_3 = r\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \Rightarrow \ell_3 = 6$

$A_3 = p \cdot a = 9 \cdot \sqrt{3}$

Logo, a medida da área do triângulo é $9\sqrt{3}$ cm^2.

28. A soma das medidas de área dos triângulos (área da região laranja da estrela) é igual à medida de área do hexágono.

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2}$$

$$a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = \frac{2 \cdot a_6 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Assim:

$$A_{\text{hexágono}} = \frac{6 \cdot \frac{2 \cdot a_6 \cdot \sqrt{3} \cdot a_6}{3}}{2} = 2 \cdot (a_6)^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A_{\text{hexágono}} = 72\sqrt{3}$

Logo, a área da região laranja da estrela mede $72\sqrt{3}$ cm^2.

29. De acordo com o enunciado, temos: $\frac{a_6}{a_4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$a_4 = \frac{\ell_4}{2} \text{ e } a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\ell_6}{\ell_4} = \frac{\frac{2a_6}{\sqrt{3}}}{2a_4} = \frac{a_6}{a_4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

Assim:

$$\frac{A_6}{A_4} = \frac{\frac{6 \cdot \ell_6 \cdot a_6}{2}}{\frac{4 \cdot \ell_4 \cdot a_4}{2}} = \frac{6}{4} \cdot \frac{\ell_6}{\ell_4} \cdot \frac{a_6}{a_4} = \frac{6}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Logo, a razão entre as medidas de área do hexágono e do quadrado é $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

30. Dada ℓ a medida de comprimento do lado do quadrado, a medida do comprimento de seu apótema é $a = \frac{\ell}{2}$, assim temos:

$\frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow A_{\text{quadrados}} = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 \Rightarrow A_{\text{quadrados}} = 0{,}24$

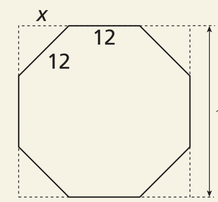
Logo, a medida da área do mosaico é 0,24 m^2.

Representando por x o valor que o artesão recebeu pelo trabalho, temos:

$$\begin{array}{lcl} 1\ m^2 & \text{———} & R\$\ 500{,}00 \\ 0{,}24\ m^2 & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = 500 \cdot 0{,}24 = 120$$

Portanto, o artesão recebeu R$ 120,00 pelo trabalho.

31. A medida do comprimento do apótema do octógono (a_8) corresponde à metade da medida do comprimento do lado do quadrado.



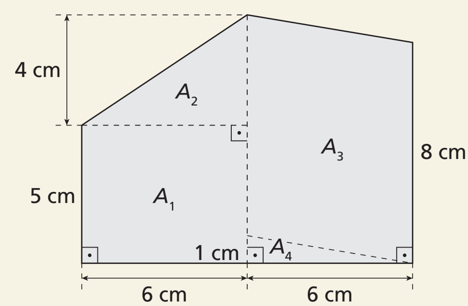
$x^2 + x^2 = 12^2 \Rightarrow 2x^2 = 144 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$

$\ell = 6\sqrt{2} + 12 + 6\sqrt{2} = 12 + 12\sqrt{2}$

$a_8 = \frac{12(1 + \sqrt{2})}{2} = 6(1 + \sqrt{2})$

Portanto, a medida do comprimento do apótema do octógono é $6(1 + \sqrt{2})$ cm.

32. a. A figura dada foi decomposta em quatro outras figuras com medidas de área A_1, A_2, A_3 e A_4.



Retângulo: $A_1 = 5 \cdot 6 \Rightarrow A_1 = 30$

Triângulo retângulo: $A_2 = \frac{6 \cdot 4}{2} \Rightarrow A_2 = 12$

Paralelogramo: $A_3 = 8 \cdot 6 = 48 \Rightarrow A_3 = 48$

Triângulo retângulo: $A_4 = \frac{6 \cdot 1}{2} \Rightarrow A_4 = 3$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 30 + 12 + 48 + 3 = 93$

Portanto, a medida da área da figura é 93 cm^2.

b. $A_{\text{quadrado}} = 6^2 = 36$

$p_{\text{triângulo}} = \frac{5 + 6 + 7}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{9(9 - 5)(9 - 6)(9 - 7)} = 6\sqrt{6}$

$A_{\text{total}} = 36 + 6\sqrt{6} = 6(6 + \sqrt{6})$

Logo, a medida da área da figura é $6(6 + \sqrt{6})$ m^2.

33. Resposta pessoal.

34. $\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 360° \end{cases}$

$6\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 60°$

medida da área $= \left(\frac{OA \cdot OB}{2} + \frac{OB \cdot OC}{2} + \frac{OC \cdot OD}{2} + \frac{OD \cdot OE}{2} + \frac{OE \cdot OF}{2} + \frac{OF \cdot OA}{2}\right) \cdot \text{sen } 60°$

medida da área $= \frac{\sqrt{3}}{4}[OA \cdot (OB + OF) + OC \cdot (OB + OD) + OE \cdot (OD + OF)]$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

---

35. $C_1 = 2\pi r$

$C_2 = 2\pi(r \cdot k) = C_1 \cdot k$

Logo, a medida do comprimento também será multiplicada por k.

36. Inicialmente, temos: $C = 2\pi r$

a. Aumentando em 1 unidade a medida de comprimento do raio:

$C_2 = 2\pi(r + 1) = 2\pi r + 2\pi$

$C_2 = C + 2\pi$

Logo, a medida do comprimento aumentará em 2π unidades.

b. Aumentando em 1 unidade sua medida de comprimento:

$C + 1 = 2\pi r_2 \Rightarrow 2\pi r + 1 = 2\pi r_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2\pi r}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} = r_2 \Rightarrow r_2 = r + \frac{1}{2\pi}$

Portanto, sua medida de comprimento do raio aumentará em $\frac{1}{2\pi}$ unidade.

37. Com essas informações, temos:

$300\pi = \pi \cdot (R_2)^2 - \pi \cdot 10^2 \Rightarrow 300\pi + 100\pi = \pi \cdot (R_2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (R_2)^2 = 400 \Rightarrow R_2 = 20$

Alternativa **e**.

38. $A_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{\pi \cdot a^2}{8} \Rightarrow a^2 = \frac{8A_1}{\pi}$

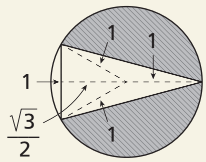
Analogamente, temos: $b^2 = \frac{8A_2}{\pi}$ e $c^2 = \frac{8A_3}{\pi}$

Do triângulo retângulo, temos:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \frac{8A_3}{\pi} = \frac{8A_1}{\pi} + \frac{8A_2}{\pi} \Rightarrow A_3 = A_1 + A_2$

Assim: $A_1 + A_2 = A_3$.

39. Vamos considerar as medidas da figura em centímetro. A altura do triângulo equilátero mede $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm, e como todos os seus ângulos têm medida de abertura igual a 60°, o setor circular que ele forma tem medida de área igual a $\frac{1}{6}$ da medida de área do círculo.



A medida de área da região hachurada é igual à medida de área do círculo menos as medidas da área do triângulo isósceles e do segmento circular.

$A_{\text{círculo}} = \pi$

$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\right)$

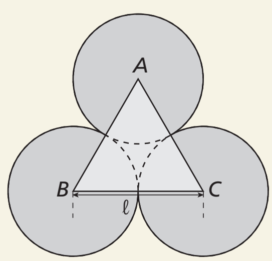
$A_{\text{segmento}} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$A_{\text{laranja}} = \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\pi - 3}{6}$

Logo, a medida de área da região pintada de laranja é $\frac{5\pi - 3}{6}$ cm^2.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

40. Medida do comprimento do raio de cada círculo: $r = \frac{\ell}{2}$



$A_{\text{triângulo}} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \ell^2 = 8 \Rightarrow \ell = 2\sqrt{2}$

Portanto: $r = \sqrt{2}$

$A_{\text{azul}} = 3 \cdot A_{\text{círculo}} - 3 \cdot A_{\text{setor circular}}$

$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 2\pi$

$A_{\text{setor circular}} = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$A_{\text{azul}} = 3 \cdot 2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{3} = 5\pi$

A medida de área da região pintada de azul é 5π cm^2.

41. Espera-se que os estudantes notem que a medida de área dos polígonos inscritos aumenta conforme a quantidade de lados aumenta, aproximando-se da medida da área do círculo.

Para finalizar o capítulo 1

Autoavaliação

Q1. Observando os polígonos, verificamos que o polígono I e o polígono V são regulares.

Alternativa **d**.

Q2. No quadrado, temos: $\ell_4 = 2a_4$

No triângulo equilátero, temos:

$\ell_3 = 2a_3\sqrt{3}$

No hexágono regular, temos:

$\ell_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}a_6$

Apótema só é definido em polígono regular, o que não é o caso do triângulo retângulo.

Alternativa **b**.

Q3. Um paralelogramo tem a mesma medida de área de um retângulo com as mesmas medidas de comprimento da base e da altura.

Alternativa **d**.

Q4. $A_4 = 4 \cdot \frac{\ell_4 \cdot a_4}{2}$ e $A_6 = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2}$

Como o quadrado e o hexágono têm o mesmo perímetro, então: $4\ell_4 = 6\ell_6$.

Assim:

$$\frac{A_6}{A_4} = \frac{\frac{6\ell_6 \cdot a_6}{2}}{\frac{4\ell_4 \cdot a_4}{2}} = \frac{a_6}{a_4}$$

Alternativa **a**.

Q5. Considere as medidas $AB = BC = GF = FE = x$ e $AH = HG = CD = DE = y$. Temos:

$A_{DBE} = A_{BAH} = \frac{x \cdot y}{2}$; $A_{ABE} = A_{AGF} = \frac{2y \cdot x}{2}$;

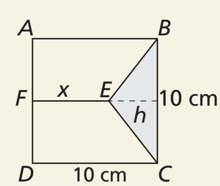
$A_{AGF} = \frac{2y \cdot x}{2} \neq A_{DBE} = \frac{x \cdot y}{2}$;

$A_{GHF} = A_{DBC} = \frac{x \cdot y}{2}$

$A_{AGF} \neq A_{BDE}$

Alternativa **c**.

Q6.



$h = 10 - x$

$A_{EBC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h \Rightarrow A_{EBC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10 - x) = 5 \cdot (10 - x)$

$A_{ABEF} = \frac{(x + 10) \cdot 5}{2}$

$A_{ABEF} = 2 \cdot A_{EBC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(x + 10) \cdot 5}{2} = 2 \cdot 5 \cdot (10 - x) \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 10 = 40 - 4x \Rightarrow x = 6$

Logo, a medida de comprimento de $\overline{FE}$ é 6 cm.

Alternativa **d**.

Q7. $A_{\text{verde}} = \frac{1}{4} \cdot A_{\text{coroa}} =$

$= \frac{1}{4}\pi\left[R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] = \frac{3\pi R^2}{16}$

$A_{\text{círculo menor}} = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi\frac{R^2}{4}$

Logo:

$$\frac{A_{\text{verde}}}{A_{\text{círculo menor}}} = \frac{3}{4}$$

Alternativa **a**.

Capítulo 2 Introdução à Geometria espacial

Atividades propostas

1. Consideremos dois pontos distintos *A* e *B*.

   Além desses dois pontos, podemos considerar infinitos outros pontos não colineares em relação a *A* e *B*. Assim, cada trio de pontos não colineares determina um plano e, portanto, obtemos infinitos planos que passam por dois pontos distintos.

   Se os três pontos distintos forem não colineares, pelo postulado P6, eles determinarão um único plano.

   Se os três pontos distintos forem colineares, infinitos planos passarão por eles.

2. Temos quatro possibilidades:

   I) Os quatro pontos são colineares. Logo, existem infinitos planos que os contêm.

   II) Dos quatro pontos, três são colineares. Logo, existe um só plano que os contém.

   III e IV) Dos quatro pontos, não há três colineares. Logo, existe um plano α determinado por três desses pontos, segundo dois casos:

   - o quarto ponto pertence ao plano α; logo, existe um só plano que contém os quatro pontos;
   - o quarto ponto não pertence ao plano α; logo, não existe nenhum plano que contenha os quatro pontos.

3. Considerando os pontos *A*, *B*, *C* e *D*, dos quais três deles nunca são colineares, podemos formar as retas:

   $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$

   Portanto, seis retas são determinadas por esse conjunto de pontos.

4. Verdadeira. Basta fixar três pontos da figura por onde passa um único plano (postulado P6) e variar o outro ponto, que é coplanar.

5. Considerando três pontos em cujos pés de uma mesa de três pernas tocam o chão, esses pontos determinam um único plano (postulado P6). Assim, a mesa de três pernas está sempre firme.

   Agora, considerando quatro pontos em cujos pés de uma mesa de quatro pernas tocam o chão, esses pontos podem determinar mais de um plano (por exemplo, o caso visto na **atividade 2**) ou podem determinar um único plano, caso os quatro pontos considerados sejam coplanares. Portanto, a mesa de quatro pernas pode, às vezes, não estar firme.

6. **a.** Verdadeira, pois duas retas são reversas quando não existe um mesmo plano que as contenha.

   b. Falsa, pois duas retas reversas não são coplanares.

   c. Falsa, pois duas retas paralelas são sempre coplanares.

   d. Verdadeira, pois dois planos são paralelos se coincidem ou se não têm nenhum ponto comum.

7. **a.** Falsa. Considere dois planos paralelos α e β e duas retas *r* e *s*, tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.

   Nesse caso, ou *r* e *s* são paralelas, ou *r* e *s* são reversas.

   Portanto, duas retas reversas podem estar em planos paralelos.

   b. Verdadeira. Duas retas *r* e *s* são paralelas ($r /\!/ s$) quando são coincidentes ($r \equiv s$) ou quando têm intersecção vazia ($r \cap s = \varnothing$) e são coplanares. Há três casos a considerar:

   - $r \equiv s$ e $s \equiv t$

     Nesse caso, as três retas são coincidentes; logo, *r* é paralela a *t*.
   - $r \equiv s$ e $s \cap t = \varnothing$ ou $r \cap s = \varnothing$ e $s \equiv t$

     Nesse caso, *r* e *t* têm intersecção vazia; logo, *r* é paralela a *t*.
   - $r \cap s = \varnothing$ e $s \cap t = \varnothing$

     Consideremos os planos α (determinado por *r* e *s*) e β (determinado por *s* e *t*). A intersecção de α e β é a reta *s*.

     Seja *P* um ponto da reta *t*.

     Por ser um ponto de *t*, *P* é um ponto de β, mas não de *s* (pois $s \cap t = \varnothing$). Como só os pontos de *s* pertencem a β e também a α, concluímos que *P* não pertence a α; logo, *P* também não pertence a *r*. Se um ponto qualquer de *t* não pertence a *r*, então $r \cap t = \varnothing$, ou seja, *r* é paralela a *t*.

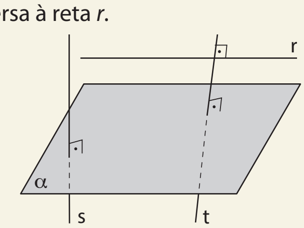
   c. Falsa. Se uma reta e um plano têm um ponto em comum, a reta *r* pode ser secante a α.

8. **a.** Essas linhas são formadas pelos rastros dos pneus na lâmina de água de chuva do chão da rua.

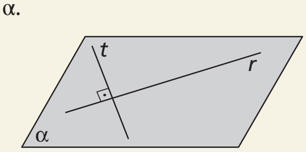
   b. Essas linhas não se cruzam, pois os sulcos dos pneus de um lado do carro mantêm sempre a mesma medida de distância dos sulcos dos pneus do outro lado do carro.

9. **a.** Falsa. Considere uma reta *t*, perpendicular a um plano α por um ponto *P*, e duas retas *r* e *s* de α, concorrentes em *P*. Assim, *r* e *s* são duas retas perpendiculares a uma mesma reta *t*, e *r* e *s* não são paralelas.

   b. Falsa, pois, se uma reta *r* e um plano α são paralelos, toda reta perpendicular ao plano α ou é perpendicular à reta *r*, ou é reversa à reta *r*.



   c. Falsa, pois, se uma reta *r* está contida em um plano α, existe pelo menos uma reta *t* perpendicular a *r* que está contida em α.



   d. Verdadeira, pois, se uma reta *r* é perpendicular a um plano α, então todo plano paralelo a α é perpendicular a *r*.

10. **a.** O fio do prumo serve para verificar a perpendicularidade de superfícies ou estruturas em relação ao solo, assegurando que estejam corretamente alinhadas na vertical.

    b. O nível de bolha serve para verificar a horizontalidade ou perpendicularidade de superfícies.

11. **a.** Cada vértice do cubo é extremo de 3 segmentos perpendiculares dois a dois.

    O cubo tem 8 vértices; logo, são 24 (8 · 3) pares de segmentos perpendiculares.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

b. Há 3 conjuntos de 4 segmentos paralelos:

- $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{HG}$
- $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$
- $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$

Cada conjunto forma 6 pares de segmentos paralelos; então 18 (6 · 3) pares de segmentos são paralelos.

12. Por um ponto *R* fora de $\overleftrightarrow{KM}$, traçamos uma paralela a $\overleftrightarrow{KM}$ passando por *P*.

Como $\overleftrightarrow{KM} \perp \overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{RP} \,//\, \overleftrightarrow{KM}$, então $\overleftrightarrow{RP}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PM}$.

Como $\overleftrightarrow{KM} \,//\, \overleftrightarrow{QS}$ e $\overleftrightarrow{KM} \,//\, \overleftrightarrow{RP}$, então $\overleftrightarrow{RP} \,//\, \overleftrightarrow{QS}$.

Como $\overleftrightarrow{QS} \perp \overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{QS} \,//\, \overleftrightarrow{RP}$, então $\overleftrightarrow{RP}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PS}$.

Então $\overleftrightarrow{RP} \perp \alpha$, pois é perpendicular a, pelo menos, duas retas concorrentes de α.

Como $\overleftrightarrow{RP} \,//\, \overleftrightarrow{KM}$ e $\overleftrightarrow{RP} \,//\, \overleftrightarrow{QS}$, temos que $\overleftrightarrow{KM} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{QS} \perp \alpha$.

13. Analisando cada proposição:

I. Se dois planos são secantes, então qualquer reta de um deles é concorrente ao outro.

Falso. Nem todas as retas de um dos planos serão concorrentes ao outro plano; apenas aquelas que não são paralelas à reta de interseção.

II. Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a infinitas retas desse plano.

Verdadeiro. Se uma reta *r* é paralela a um plano α, então *r* é paralela a todas as retas em α que não são reversas a *r*.

III. Se dois planos têm uma única reta em comum, eles são secantes.

Verdadeiro. Se dois planos têm uma única reta em comum, eles se interceptam exatamente nessa reta, portanto são secantes.

IV. Duas retas perpendiculares a uma terceira são perpendiculares entre si.

Falso. Duas retas perpendiculares a uma terceira reta não são necessariamente perpendiculares entre si; elas podem ser paralelas ou formar algum outro ângulo.

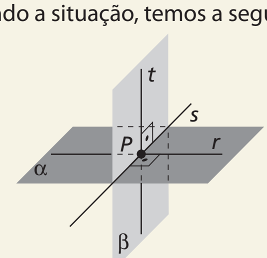
V. Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.

Falso. Se dois planos são perpendiculares, a reta de intersecção não é perpendicular a nenhum deles.

Portanto, as proposições verdadeiras são II e III.

Alternativa **a**.

14. a. Esquematizando a situação, temos a seguinte figura.



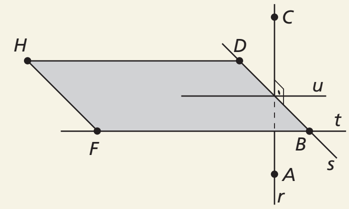
Como os planos α e β são perpendiculares, então β possui uma reta *t* perpendicular ao plano α.

Como a reta *t* é perpendicular a α e à reta *r* no ponto *P*, temos que a reta *r* é perpendicular à reta *t* e à reta *s* de intersecção entre os planos α e β.

Como a reta *r* é perpendicular a duas retas no plano β, então *r* é perpendicular ao plano β.

b. Resposta pessoal.

15. Representando o plano (*HFBD*) e a reta $\overleftrightarrow{AC}$ suporte da diagonal $\overline{AC}$ de forma conveniente, temos:



Sabemos que, se *r* e *t* são retas ortogonais, *u* é paralela à reta *t* e perpendicular à reta *r*.

Como $\overline{AC}$ é a diagonal do quadrado *ABCD*, então $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{DB}$ (que é a outra diagonal do quadrado *ABCD*).

Como $\overline{AC} \subset r$ e $\overline{DB} \subset s$, concluímos que $r \perp s$.

Como $r \perp u$ e $r \perp s$, o teorema fundamental do perpendicularismo garante que *r* é perpendicular ao plano (*HFBD*).

Logo, $\overline{AC}$ é perpendicular ao plano (*HFBD*).

16. Como *R*, *T* e *V* são pontos médios de $\overline{PB}$, $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$, respectivamente, então:

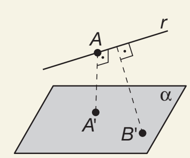
- $\overline{TV}$ é paralelo a $\overline{AC}$;
- $\overline{TR}$ é paralelo a $\overline{AB}$;
- Temos também que $\overline{PA}$ é perpendicular ao plano α, por ser perpendicular ao plano β. Assim, $\overline{PA}$ também será perpendicular ao plano (*RTV*), pois será perpendicular aos segmentos $\overline{TR}$ e $\overline{TV}$, por semelhança de triângulos.

Como $\overline{PA}$ é perpendicular aos planos α, β e (*RTV*), temos que esses planos são paralelos entre si.

Logo, o plano (*RTV*) é paralelo a β.

17. Podemos afirmar que o ponto *A* pertence ao plano α.

18. Podemos dizer que a medida da distância de qualquer ponto do plano α à reta *r* é maior que ou igual à medida da distância de qualquer ponto da reta *r* ao plano α.



19. a. A medida da distância entre $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GC}$ é 2 cm.

b. A medida da distância entre $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{HG}$ é 2 cm.

c. A medida da distância entre $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ é igual à medida da distância entre os pontos *F* e *C*, podendo ser calculada assim:

$(FC)^2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29 \Rightarrow$

$\Rightarrow FC = \sqrt{29}$

Logo, a medida da distância entre as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ é $\sqrt{29}$ cm.

d. A medida da distância entre a reta $\overleftrightarrow{EF}$ e o plano (*HGF*) é nula, pois $\overleftrightarrow{EF}$ está contida no plano (*HGF*).

e. A medida da distância entre a reta $\overleftrightarrow{EF}$ e o plano (*ABC*) é 5 cm, pois pode ser medida pela distância entre os pontos *E* e *A*.

f. A medida da distância entre os planos (*EHD*) e (*FGC*) é 3 cm, pois pode ser medida pela distância entre os pontos *E* e *F*.

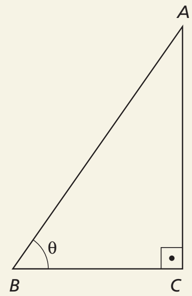
g. Os planos (*ABC*) e (*HGF*) são paralelos, e a medida da distância entre eles é $CG = FB = EA = HD = 5$ cm.

20. Como um diedro é a união de qualquer par de semiplanos não coplanares, temos da ilustração no enunciado que apenas a união $E_1 \cup E_4$ não é um diedro. Assim, temos os seguintes diedros:

$E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_3 \cup E_4$; $E_1 \cup E_3$; $E_2 \cup E_4$

21. Representando a situação, temos:

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



Queremos determinar a medida de abertura do ângulo $A\hat{B}C$.

No triângulo ABC, temos:

$\cos\theta = \dfrac{BC}{AB}$

Como $AB = 2 \cdot (BC)$, temos:

$\cos\theta = \dfrac{BC}{2BC} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2}$

Logo, a abertura do ângulo $A\hat{B}C$ mede 60°.

22. **a.** Sim, pois, se a medida de abertura dos ângulos $M\hat{A}B$ e $K\hat{A}C$ é 90°, temos que o plano (ABC), que contêm as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, é perpendicular à aresta do diedro. Portanto, $B\hat{A}C$ é um ângulo plano.

b. Não, pois não podemos garantir que as medidas de abertura dos ângulos $Q\hat{P}A$ e $B\hat{A}M$ são iguais.

23. **a.** Na projeção cilíndrica, as medidas das distâncias entre os paralelos são distorcidas, mas mantidas constantes entre cada par de paralelos. Assim, as retas suportes dos paralelos são paralelas.

b. Na projeção cilíndrica, a convergência dos meridianos nos polos não é representada, assim, as retas suportes deles são projetadas paralelas.

c. As retas suportes dos paralelos, em uma projeção cilíndrica, ficam perpendiculares às retas suportes dos meridianos.

24. Na representação cônica, os paralelos são representados como arcos de circunferência (ou circunferências, a depender do cone em cuja superfície lateral está sendo projetado) concêntricos.

Alternativa **d**.

25. Na projeção azimutal polar, tal como no globo terrestre, em que todos os meridianos convergem nos polos, apresentam-se todos os meridianos convergindo no polo localizado no centro do disco.

Alternativa **c**.

26. Como a representação no símbolo da ONU tem o polo norte como centro e apresenta a Terra como disco, foi usada uma projeção azimutal polar, ilustrada por um disco centralizado sobre o polo norte do globo terrestre.

Alternativa **a**.

Para finalizar o capítulo 2

Autoavaliação

Q1. Retas paralelas e retas reversas não se interceptam.

Alternativa **c**.

Q2. As retas paralelas são coplanares, e as reversas são não coplanares.

Alternativa **a**.

Q3. $r \perp s$ e $s \subset \alpha$

r é ortogonal a t e $t \subset \alpha$

Então, existe uma reta u paralela a t e perpendicular a r e $u \subset \alpha$.

$r \perp t$ e $r \perp u$, então $r \perp \alpha$

Alternativa **b**.

Q4. $\alpha \parallel r$ e $\alpha \parallel s$; então:

- $r \parallel s$ ou
- r é concorrente a s ou
- r é perpendicular a s ou
- r é reversa a s

Alternativa **b**.

Q5. Se a reta r é não perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r sobre α é uma reta; se a reta r é perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r é um ponto.

Alternativa **d**.

Q6. A medida da distância entre A e C é a medida da diagonal do retângulo $ABCD$ de lados $AB = DC = 4$ cm e $CB = AD = 2$ cm.

$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$

Logo, a medida da distância entre os pontos A e C é $2\sqrt{5}$ cm.

Alternativa **d**.

Q7. A medida da distância entre o ponto A e o plano (BCF) é $AB = 4$ cm.

Alternativa **b**.

Q8. A medida da distância entre o ponto A e a reta $\overleftrightarrow{GH}$ é a medida da diagonal AH do quadrado $ADEH$.

$AH = 2\sqrt{2}$ cm

Alternativa **a**.

Q9. O ponto A pertence ao plano (DHE); logo, a medida da distância entre eles é zero.

Alternativa **d**.

Q10. Se o ângulo formado por uma reta r e um plano α é nulo, então:

- a reta r está contida em α $(r \cap \alpha = r)$ ou
- a reta r é paralela a α $(r \cap \alpha = \varnothing)$

Alternativa **d**.

Q11. A figura representa um diedro.

Alternativa **c**.

Q12. A projeção de Mercador não deforma os ângulos.

Alternativa **c**.

Capítulo 3 Poliedros

Atividades propostas

1. O poliedro tem 5 faces; portanto, é um pentaedro.

2. O poliedro tem 7 faces; portanto, é um heptaedro.

3. Analisando o sólido representado, temos: 14 faces, 36 arestas e 24 vértices.

4. **a.** Poliedro não convexo.

   O poliedro tem 8 faces quadrangulares e 2 faces octogonais. Então, o número de arestas é dado por: $(8 \cdot 4 + 2 \cdot 8) : 2 = 24$

   A cada vértice chegam 3 arestas, e em cada aresta há 2 vértices; então: $V = (24 : 3) \cdot 2 = 16$

   Assim, $V = 16$, $F = 10$ e $A = 24$.

   b. Poliedro convexo.

   O poliedro tem 9 faces: 5 faces quadrangulares e 4 faces triangulares.

   Então, o número de arestas é dado por:

   $(5 \cdot 4 + 4 \cdot 3) : 2 = 16$

   Aplicando a relação de Euler, obtemos o número de vértices: $V + F - A = 2 \Rightarrow V = 16 - 9 + 2 \Rightarrow V = 9$

   Assim, $V = 9$, $F = 9$ e $A = 16$.

5. **Verificação da validade da relação de Euler para alguns poliedros convexos**

Poliedro	V	F	A	$V + F - A = 2$
I	12	8	18	$12 + 8 - 18 = 2$
II	6	8	12	$6 + 8 - 12 = 2$

   Logo, os dois poliedros satisfazem a relação de Euler.

6. Temos:

   $F = 6 \cdot 3 + 2 = 20$ $\quad A = 3 \cdot 18 = 54$ $\quad V = 2 \cdot 18 = 36$

   Aplicando a relação de Euler, temos:

   $V + F - A = 2 \Rightarrow 36 + 20 - 54 = 2 \Rightarrow 2 = 2$

   Portanto, o poliedro satisfaz a relação de Euler.

7. Temos um poliedro com 2 faces pentagonais e 5 faces quadrangulares e queremos calcular o número de vértices. Assim:

   $F = 2 + 5 \Rightarrow F = 7$

   $A = \dfrac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 4}{2} \Rightarrow A = 15$

   $V + F - A = 2 \Rightarrow V = 15 - 7 + 2 \Rightarrow V = 10$

   Portanto, o poliedro tem 10 vértices.

8. **a.** O poliedro I é côncavo, ou não convexo, pois apresenta reentrâncias.

   b. Ambos possuem o mesmo número de faces: $F = 12$

   c. Ambos possuem o mesmo número de vértices: $V = 10$

   d. Ambos possuem o mesmo número de arestas: $A = 20$

   e. $V + F - A = 2$

   $10 + 12 - 20 = 2$

   Portanto, ambos os poliedros satisfazem a relação de Euler.

9. $A = V + 6$

   $V + F - A = 2 \Rightarrow V + F - (V + 6) = 2 \Rightarrow F = 6 + 2 \Rightarrow F = 8$

   Portanto, o número de faces do poliedro é 8.

10. $V + F - A = 2 \Rightarrow V + F - 2 = A \Rightarrow$

    $\Rightarrow 11 + (x + x + 1) - 2 = (3 \cdot x + 4 \cdot x + 5 \cdot 1) : 2 \Rightarrow$

    $\Rightarrow 2 \cdot (11 + 2x + 1 - 2) = (7x + 5) \Rightarrow$

    $\Rightarrow 2 \cdot (2x + 10) = 7x + 5 \Rightarrow 4x + 20 = 7x + 5 \Rightarrow$

    $\Rightarrow 4x - 7x = 5 - 20 \Rightarrow -3x = -15 \Rightarrow x = 5$

    Assim, o número de faces é dado por:

    $x + x + 1 = 5 + 5 + 1 = 11$

11. $V + F - A = 2 \Rightarrow 10 + F - 20 = 2 \Rightarrow F = 2 + 10 \Rightarrow F = 12$

    Sendo x o número de faces triangulares e y o número de faces quadrangulares, temos:

    $$\begin{cases} x + y = 12 \\ \dfrac{(3x + 4y)}{2} = 20 \end{cases} \Rightarrow$$

    $$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 4y = 40 \end{cases} \Rightarrow$$

    $$\Rightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -36 \\ 3x + 4y = 40 \end{cases}$$

    $$y = 4$$

    Assim: $x + 4 = 12 \Rightarrow x = 8$

    Logo, são 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares.

12. Pelo enunciado, temos: $V = 9$

    Seja n o número de faces triangulares e $(n + 1)$ o número de faces quadrangulares, temos:

    $F = n + n + 1 = 2n + 1$

    $A = \dfrac{3n + 4(n + 1)}{2}$

    Aplicando a relação de Euler, temos:

    $V + F - A = 2 \Rightarrow$

    $\Rightarrow V + F - 2 = A \Rightarrow$

    $\Rightarrow 9 + 2n + 1 - 2 = \dfrac{3n + 4n + 4}{2} \Rightarrow$

    $\Rightarrow 18 + 4n - 2 = 7n + 4 \Rightarrow n = 4$

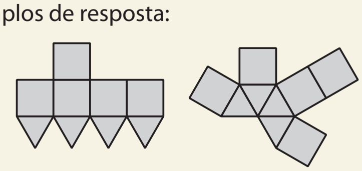
    Assim:

    $F = 4 + 5 = 9$

    $A = \dfrac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4}{2} = 16$

    Portanto, o poliedro tem 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares, totalizando 9 faces e 16 arestas.

13. **a.** Exemplos de resposta:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

    b. Não é possível, pois qualquer outro posicionamento das quatro faces triangulares resultaria em um triângulo equilátero ou um paralelogramo, respectivamente congruentes às planificações representadas.

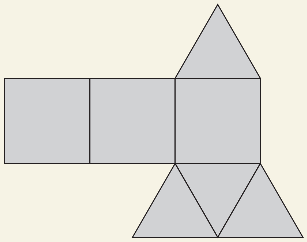
14. Um poliedro regular de faces pentagonais tem 12 faces. Como foram retiradas 3, restaram 9. O poliedro completo tinha $(5 \cdot 12) : 2$ arestas, ou seja, 30 arestas. Como foram retiradas 3, restaram 27. Aplicando a relação de Euler no poliedro completo, encontramos o número de vértices:

    $V = 2 - F + A \Rightarrow V = 2 - 12 + 30 \Rightarrow V = 20$

    Como foi retirado 1, restaram 19.

    Logo, a superfície poliédrica que restou tem 27 arestas, 9 faces e 19 vértices.

15. a. Exemplo de resposta:



b. Resposta pessoal.

16. $A = \dfrac{6 \cdot 4 + 2 \cdot 6}{2} = \dfrac{36}{2} = 18$

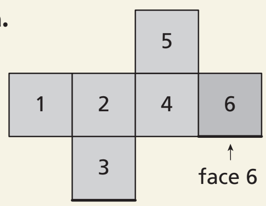
$F = 8$

$V + F - A = 2 \Rightarrow$

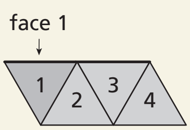
$\Rightarrow V + 8 - 18 = 2 \Rightarrow V = 12$

Portanto, o poliedro tem 18 arestas e 12 vértices.

17. a.



b.



18. Vamos calcular o número de arestas e de faces da figura:

$A = \dfrac{3 \cdot 8 + 4 \cdot 4}{2} = \dfrac{24 + 16}{2} = 20$

$F = 4 + 4 + 4 = 12$

Com a relação de Euler, temos:

$V + F - A = 2 \Rightarrow$

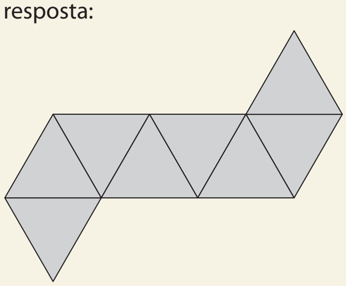
$\Rightarrow V + 12 - 20 = 2 \Rightarrow V = 10$

Assim:

$V + A = 10 + 20 = 30$

Portanto, a soma do número de arestas e do número de vértices do poliedro é 30.

19. Exemplo de resposta:

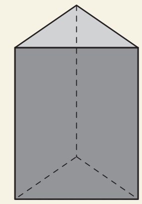


20. Os polígonos que compõem as faces laterais são retângulos, pois o fato de a reta *r* ser perpendicular aos planos garante quatro ângulos internos retos para as faces laterais.

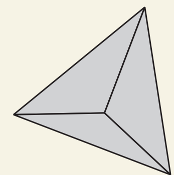
21. a. Nem todo prisma regular é um poliedro regular. Nem todo poliedro regular é um prisma regular.

b. Contraexemplos:

- Prisma regular que não é poliedro regular



- Poliedro regular que não é prisma regular



22. Todo paralelepípedo reto-retângulo tem quatro diagonais.

23. $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{3}$

24. a. Sabemos que $d = a\sqrt{3}$; assim:

$d = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow d = 15$

Logo, o comprimento da diagonal mede 15 cm.

b. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} =$

$= \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 2^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{36 + 9 + 16}{4}} = \dfrac{\sqrt{61}}{2}$

Logo, o comprimento da diagonal mede $\dfrac{\sqrt{61}}{2}$ cm.

25. Observe que o $\triangle ABH$ é retângulo em $\hat{B}$.

Logo, $A_{\triangle ABH} = \dfrac{1}{2} b \cdot h$, em que $\overline{BH}$ e $\overline{AB}$ podem ser considerados *b* e *h*, respectivamente.

Assim:

$BH = d = 4\sqrt{2}$

$AB = \ell = 4$

$A_{\triangle ABH} = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 = 8\sqrt{2}$

Portanto, a medida da área do triângulo *ABH* é $8\sqrt{2}$ cm^2.

26. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\sqrt{10} = \sqrt{a^2 + 4^2 + 7^2} \Rightarrow$

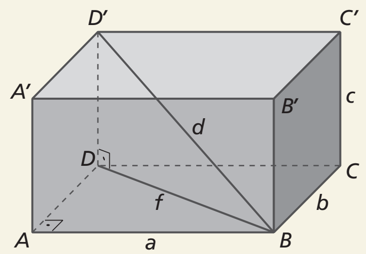
$\Rightarrow 3\sqrt{10} = \sqrt{a^2 + 65} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 \cdot 10 = a^2 + 65 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 90 - 65 \Rightarrow a = \sqrt{25} \Rightarrow a = 5$

Logo, *a* vale 5.

27. A figura representa a carroceria do caminhão, em que $a = 5$ m, $b = 2$ m e $c = 3$ m. Calcularemos a medida de comprimento *d* da diagonal do paralelepípedo para compará-la com a medida 5,9 m do comprimento do mastro de bandeira.



$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 5^2 + 2^2 + 3^2 = 38 \Rightarrow d = \sqrt{38} \simeq 6{,}16$

Como d mede 6,16 m, portanto, maior que a medida de comprimento do mastro, Rafael pode aceitar a encomenda.

28. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12} = k \Rightarrow x = 3k$, $y = 4k$ e $z = 12k$

Assim:

$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow$

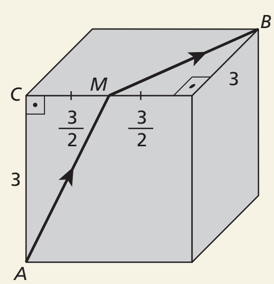
$\Rightarrow 130 = \sqrt{9k^2 + 16k^2 + 144k^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 130 = \sqrt{169k^2} = 13k \Rightarrow k = 10$

Então: $x = 30$, $y = 40$ e $z = 120$

Portanto, as medidas de comprimento das arestas são 30 cm, 40 cm e 120 cm.

29. a. Considere as medidas em centímetro apresentadas na figura.



$AM = MB$

$(AM)^2 = (CM)^2 + (AC)^2 \Rightarrow$

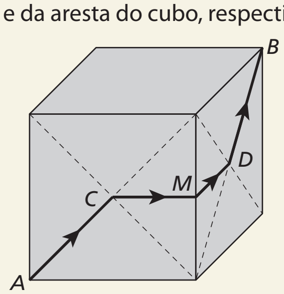
$\Rightarrow (AM)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (AM)^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow AM = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$AM + MB = 2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5}$

Portanto, o comprimento do caminho de A a B mede $3\sqrt{5}$ cm.

b. Sendo d e a as medidas de comprimento da diagonal de cada face e da aresta do cubo, respectivamente, temos:



$AC = DB = \frac{d}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$CM = MD = \frac{a}{2} = \frac{3}{2}$

$AC + CM + MD + DB =$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} =$

$= 3 + 3\sqrt{2}$

Portanto, a medida do comprimento do caminho de A a B é $3(\sqrt{2} + 1)$ cm.

30. $AJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (metade da diagonal de uma face)

$AE = a = 20$

O $\triangle AEJ$ é retângulo em $\hat{A}$. Assim:

$(EJ)^2 = (AJ)^2 + (AE)^2 \Rightarrow$

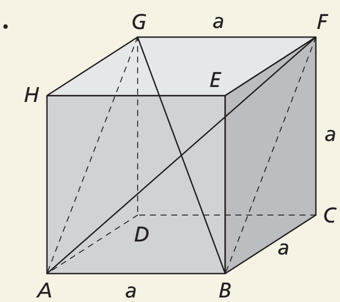
$\Rightarrow (EJ^2) = \left(\frac{20\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 20^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (EJ)^2 = 200 + 400 = 600 \Rightarrow$

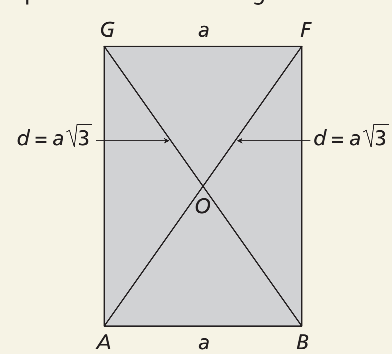
$\Rightarrow EJ = 10\sqrt{6}$

Portanto, o segmento $\overline{EJ}$ mede $10\sqrt{6}$ cm.

31.



O plano que contém as duas diagonais é $ABFG$.



O ponto O divide o segmento $\overline{AF}$ ao meio; então: $OF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Se as diagonais fossem perpendiculares, o $\triangle OGF$ seria retângulo e, portanto, poderíamos aplicar o teorema de Pitágoras. Assim:

$(OG)^2 + (OF)^2 = (GF)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{4} = a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a^2 \cdot 3}{2} = a^2$ (sentença falsa)

Portanto, o $\triangle OGF$ não é retângulo em O, e as diagonais não se cruzam perpendicularmente.

32. A resolução é obtida por meio da observação das figuras.

Alternativa **d**.

33. A resolução é obtida por meio da observação das figuras.
Alternativa **b**.

34. Exemplo de resposta:

Passo 1. Dados a e h, dimensões das faces laterais do prisma, calcula-se a medida da área de uma face lateral do prisma.

Passo 2. Multiplica-se por 6 o valor obtido no **passo 1** para calcular a medida da área lateral do prisma.

Passo 3. Dada a, medida do comprimento do lado da base do prisma hexagonal, calcula-se a medida da área da base.

Passo 4. Multiplica-se por 2 o valor obtido no **passo 3** para calcular a medida da área das bases desse prisma.

Passo 5. Calcula-se a soma dos valores obtidos nos **passos 2** e **4** para determinar a medida da área total da superfície do prisma hexagonal regular e encerra-se o algoritmo.

35. $A_{\text{total}} = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot (ab + ac + bc) =$
$= 2 \cdot (20 \cdot 10 + 20 \cdot 15 + 10 \cdot 15) = 2 \cdot 650 = 1.300$
Logo, serão necessários 1.300 cm^2 de papelão.

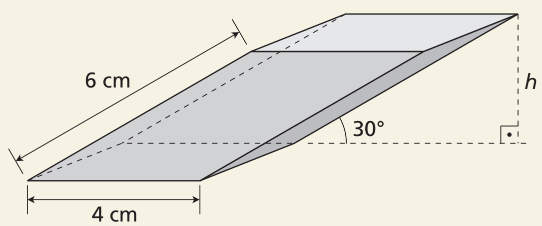
36. a. $A_{\text{base}} = \dfrac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{3 \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

$A_{\text{lateral}} = 6 \cdot b \cdot h = 6 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = 12\sqrt{3}$

$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \dfrac{9\sqrt{3}}{2} + 12\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$

Logo, a medida da área total é $21\sqrt{3}$ m^2.

b.



O prisma tem base quadrada. Assim:
$A_{\text{base}} = 4^2 = 16$
Para calcular a medida da área lateral, vamos obter a medida h da altura.
$\text{sen } 30° = \dfrac{h}{6} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{h}{6} \Rightarrow h = 3$
A área lateral é formada por dois retângulos, de dimensões 4 cm e 6 cm, e por dois paralelogramos cuja medida da base é 4 cm e cuja medida da altura é 3 cm. Assim, temos:
$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot (4 \cdot 6) + 2 \cdot (4 \cdot 3) = 72$
$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 2 \cdot 16 + 72 = 104$
Logo, a medida da área total é 104 cm^2.

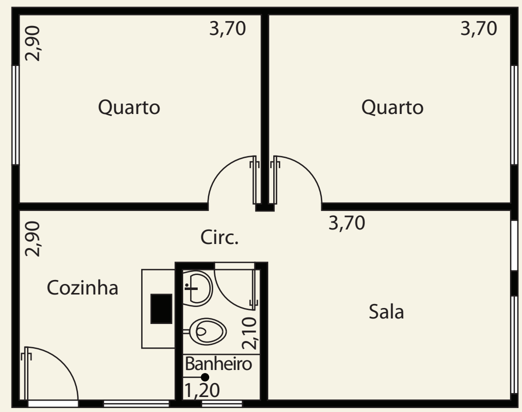
37. O segmento cujas extremidades são vértices de um cubo, de maior medida de comprimento é a diagonal. Como a diagonal do cubo B tem a mesma medida de comprimento que a aresta do cubo A e que a diagonal da face quadrada do cubo C, ele deve ter a aresta de menor medida de comprimento e, consequentemente, a menor medida de área.

38. a. Como $A_{\text{total}} = 6 \cdot a^2$, temos, em u^2:
Cubo I: $A_{\text{total}} = 6 \cdot 1^2 = 6$
Cubo II: $A_{\text{total}} = 6 \cdot 2^2 = 24$
Cubo III: $A_{\text{total}} = 6 \cdot 3^2 = 54$
Cubo IV: $A_{\text{total}} = 6 \cdot 4^2 = 96$

b. Medida da aresta: $a \Rightarrow A_{\text{total}} = 6a^2$
Medida da aresta: $2a \Rightarrow A_{\text{total}} = 6 \cdot (2a)^2 = 4 \cdot 6a^2$
Medida da aresta: $3a \Rightarrow A_{\text{total}} = 6 \cdot (3a)^2 = 9 \cdot 6a^2$
Portanto, quando a medida da aresta dobra, a medida da área total fica multiplicada por 4, ou seja, quadruplica, e, quando a medida da aresta triplica, a medida da área total fica multiplicada por 9.

c. Em um cubo de arestas medindo 2, cabem 8 cubos de aresta unitária, pois: $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8$
Em um cubo de arestas medindo 3, cabem 27 cubos de aresta unitária, pois: $3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 27$
Em um cubo de arestas medindo 4, cabem 64 cubos de aresta unitária, pois: $4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 64$

39.



a. Para um cálculo aproximado, podemos considerar um teto único, total, para a casa. Ele teria o formato de um retângulo com lados medindo 7,4 m e 5,8 m. Logo, sua medida de área é dada por $7{,}4 \cdot 5{,}8 = 42{,}92$, ou seja, aproximadamente 43 m^2. Carlos consome 43 m^2 com uma demão e 86 m^2 com duas demãos. Portanto, ele consegue dar duas demãos.

b. Lembrando que a distância entre o piso e o teto mede 2,70 m de altura, podemos calcular as medidas de área das paredes como se não houvesse portas nem janelas e depois subtrair as medidas das áreas dessas partes.
Dois quartos: $2 \cdot 2 \cdot 2{,}70 \cdot (2{,}90 + 3{,}70) = 71{,}28 \simeq 71$
Banheiro: $2 \cdot 2{,}70 \cdot (2{,}10 + 1{,}20) = 17{,}82 \simeq 18$
Cozinha e sala: $2 \cdot 2{,}70 \cdot (2{,}90 + 3{,}70 + 3{,}70 + 2{,}10) =$
$= 66{,}96 \simeq 67$
Medidas das áreas de portas, janelas e vitrôs: 14 m^2
Medida da área a ser pintada em m^2:
$(71 + 18 + 67 - 14) + 43 = 185 < 225$
Carlos consegue passar uma demão, pois a medida da área total das paredes internas é, aproximadamente, 142 m^2; adicionando o teto, fica 185 m^2. Duas demãos não são possíveis, pois 370 m^2 é maior que o rendimento máximo.

c. Duas demãos no teto (86 m^2) mais uma demão nas paredes internas (142 m^2) equivalem a 228 m^2.
Como 228 m^2 é maior que 225 m^2 (rendimento mínimo) e menor que 325 m^2 (rendimento máximo), talvez Carlos consiga fazer essa pintura.

40. Resposta pessoal.

41. $A_{\text{base}} = \dfrac{(7{,}5 + 10) \cdot 5}{2} = 43{,}75$
$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = 43{,}75 \cdot 32 = 1.400$
Assim:
$1.400 \cdot 10{,}5 = 14.700$
Portanto, a medida da massa da barra será 14.700 g.

42. $A_{total} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow 216 = 6 \cdot a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \dfrac{216}{6} \Rightarrow a = \sqrt{36} \Rightarrow a = 6$

$V_{cubo} = a^3 \Rightarrow V_{cubo} = 6^3 \Rightarrow V_{cubo} = 216$

Logo, a medida do volume do cubo é 216 m^3.

43. $A_{base\ tanque} = 15 \cdot 20 \Rightarrow A_{base\ tanque} = 300$

$V_{peça\ de\ metal} = 300 \cdot 0{,}35 \Rightarrow V_{peça\ de\ metal} = 105$

Logo, a medida do volume da peça de metal é 105 cm^3.

44. Sabemos que:

$$\begin{cases} V = a \cdot b \cdot c = 240 & \text{(I)} \\ a \cdot c = 48 \Rightarrow a = \dfrac{48}{c} & \text{(II)} \\ b \cdot c = 30 \Rightarrow b = \dfrac{30}{c} & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$a \cdot b \cdot c = 240 \Rightarrow \dfrac{48}{c} \cdot \dfrac{30}{c} \cdot c = 240 \Rightarrow c = 6$

Assim:

$a = \dfrac{48}{6} = 8$ e $b = \dfrac{30}{6} = 5$

Logo:

$A_{total} = 2(ab + ac + bc) \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot (8 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 5 \cdot 6) = 236$

Portanto, a medida da área total da superfície do paralelepípedo é 236 cm^2.

45. Sabendo que 1 mL equivale a 1 cm^3, então a medida do volume da caneca ocupado por café é 245 cm^3. Calculando a sua medida de volume total, pode-se encontrar a medida do volume do espaço vazio, que é dada por $7 \cdot 7 \cdot d$.

$V_{total} - V_{café} = V_{vazio} \Rightarrow 7 \cdot 7 \cdot 7 - 245 = 7 \cdot 7 \cdot d \Rightarrow 98 = 49d \Rightarrow$
$\Rightarrow d = 2$

Alternativa **c**.

46. $V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{(8 \cdot 2)}{2} \cdot 5 \Rightarrow V = 40$

Assim, a medida do volume dessa cunha é 40 cm^3.

47. Medida do perímetro da base: 60 m

$\ell = \dfrac{60}{4} = 15$

$A_{base} = 15^2 = 225$

$V_{reservatório} = A_{base} \cdot h = 225 \cdot 35 = 7.875$

60% de 7.875 = 4.725

Assim: 7.875 − 4.725 = 3.150

Logo, faltam 3.150 m^3 para encher o reservatório.

48. $A_{paralelepípedo} = 2(ab + ac + bc)$

$A_{cubo} = 6x^2$

$A_{paralelepípedo} = A_{cubo} \Rightarrow 2(ab + ac + bc) = 6x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(3 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7) = 6x^2 \Rightarrow 15 + 21 + 35 = 3x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{71}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{71}{3}}$

Assim:

$d_{cubo} = x\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{71}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{71}$

Portanto, a medida do comprimento da diagonal do cubo é $\sqrt{71}$ u.

49. Sabemos que:

$$\begin{cases} h = 8 \\ A_{total} = 3 \cdot A_{lateral} \end{cases}$$

Assim:

$3a \cdot \left(2h + a\sqrt{3}\right) = 3 \cdot 6 \cdot a \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a \cdot \left(2 \cdot 8 + a\sqrt{3}\right) = 18 \cdot a \cdot 8 \Rightarrow 3a \cdot \left(16 + a\sqrt{3}\right) = 144a \Rightarrow$

$\Rightarrow 48a + 3a^2\sqrt{3} - 144a = 0 \Rightarrow 3\sqrt{3}a^2 - 96a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a \cdot \left(\sqrt{3}a - 32\right) = 0 \Rightarrow a = \dfrac{32\sqrt{3}}{3}$

$A_{base} = \dfrac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \left(\dfrac{32\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} = 512\sqrt{3}$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 512\sqrt{3} \cdot 8 = 4.096\sqrt{3}$

Portanto, a medida do volume do prisma é $4.096\sqrt{3}$ cm^3.

50. Para que a medida do comprimento da vara seja a maior possível, ela deverá ser a mesma que a medida do comprimento da diagonal do cubo; assim:

$d = a\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} = 2 \Rightarrow a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Logo, $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ m.

$V_{cubo} = a^3 = \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 \Rightarrow V_{cubo} = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

Logo, $V_{cubo} = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$ m^3.

Como 1 dm^3 = 1 L, temos:

$V_{cubo} = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}\ m^3 \Rightarrow V_{cubo} = \dfrac{8.000\sqrt{3}}{9}\ dm^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cubo} = \dfrac{8.000\sqrt{3}}{9}$ L

51. $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{4} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3} \Rightarrow a = \dfrac{2b}{3} \\ \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{4} \Rightarrow c = \dfrac{4b}{3} \end{cases}$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 4\sqrt{29}$

$a^2 + b^2 + c^2 = 16 \cdot 29 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 464 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{2b}{3}\right)^2 + b^2 + \left(\dfrac{4b}{3}\right)^2 = 464 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{4b^2}{9} + b^2 + \dfrac{16b^2}{9} = 464 \Rightarrow b = \sqrt{144} \Rightarrow b = 12$

Assim:

$a = \dfrac{2 \cdot 12}{3} \Rightarrow a = 8$ e $c = \dfrac{4 \cdot 12}{3} \Rightarrow c = 16$

$A_{paralelepípedo} = 2 \cdot (ab + ac + bc) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{paralelepípedo} = 2 \cdot (8 \cdot 12 + 8 \cdot 16 + 12 \cdot 16) = 832$

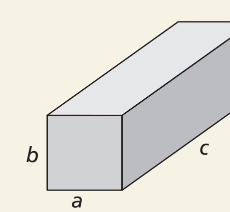
Portanto, a medida da área do paralelepípedo é 832 cm^2.

$V_{paralelepípedo} = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V_{paralelepípedo} = 1.536$

Portanto, a medida do volume do paralelepípedo é 1.536 cm^3.

52. Um cubo cujo comprimento da aresta mede 4 cm é composto de 64 cubinhos com arestas medindo 1 cm, pois $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Consideremos um paralelepípedo de dimensões medindo a, b e c formado por esses 64 cubinhos.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Os divisores de 64 (possíveis valores de a, b e c) são: 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64.

Como $a \cdot b \cdot c = 64$, há somente 7 paralelepípedos formados pelos 64 cubinhos cujas medidas das dimensões e da área total são dadas no quadro a seguir.

Possíveis medidas das dimensões e medida da área total do paralelepípedo

a	1	1	1	1	2	2	4
b	1	2	4	8	2	4	4
c	64	32	16	8	16	8	4
A_{total}	258	196	168	160	136	112	96

Portanto, o paralelepípedo de menor medida de área total de superfície tem dimensões medindo 4 cm, 4 cm e 4 cm; e o paralelepípedo de maior medida de área total da superfície tem dimensões medindo 1 cm, 1 cm e 64 cm.

53. Como as arestas do cubo medem 2 cm de comprimento, temos:

a. $V_{cubo} = a^3 = 2^3 = 8$
Assim, $V_{cubo} = 8 \text{ cm}^3$.

b. $A_{cubo} = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 2^2 = 24$
Assim, $A_{cubo} = 24 \text{ cm}^2$.

c. $V_{cubo} = a^3$; se dobrar a medida da aresta:
$V_{cubo} = (2a)^3 = 8 \cdot a^3$
Então, a medida do volume fica multiplicado por 8.

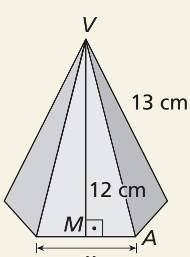
d. $A_{cubo} = 6 \cdot a^2$; se dobrar a medida da aresta:
$A_{cubo} = 6 \cdot (2a)^2 = 6 \cdot 4a^2 = 24a^2$
Então, a medida da área fica multiplicada por 4.

54. Se uma pirâmide tem uma base de 8 vértices, então ela tem 16 arestas, sendo 8 arestas da base e 8 arestas laterais. Ela tem, ainda, 1 vértice fora da base, totalizando 9 vértices.
Assim, aplicando a relação de Euler:
$V + F - A = 2 \Rightarrow 9 + F - 16 = 2 \Rightarrow F = 9$
Logo, essa pirâmide tem 9 faces.

55. Se uma pirâmide tem *n* faces laterais, então ela tem 2*n* arestas, $(n + 1)$ faces e $(n + 1)$ vértices.

56. Apenas as planificações (I) e (II) são de superfícies de pirâmides.

57.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *AMV*, temos:

$$13^2 = 12^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

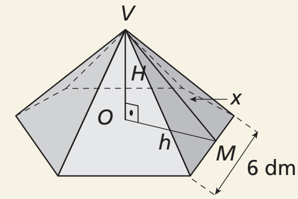
$$\Rightarrow 169 = 144 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$$

Logo, a aresta da base mede 10 cm de comprimento.

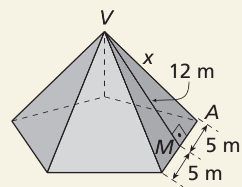
58. Como $H = 4$ dm e $\ell = 6$ dm, temos:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$



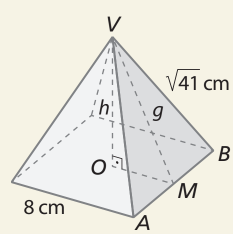
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OVM*, temos:
$x^2 = H^2 + h^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 16 + 9 \cdot 3 \Rightarrow x^2 = 16 + 27 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 43 \Rightarrow x = \sqrt{43}$
Logo, o comprimento do apótema da pirâmide mede $\sqrt{43}$ dm.

59.



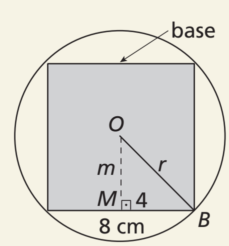
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *AMV*, temos:
$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 13$
Portanto, o comprimento da aresta lateral da pirâmide mede 13 m.

60.



Aplicando o teorema de Pitágoras:

- No triângulo *VMB*:
$\left(\sqrt{41}\right)^2 = g^2 + 4^2 \Rightarrow g^2 = 41 - 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow g = \sqrt{25} = 5$
- No triângulo *VOM*:
$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = \sqrt{25 - 16} = 3$
- No triângulo *OMB*:



$r^2 = m^2 + 4^2$

$r = \sqrt{4^2 + 4^2}$

$r = 4\sqrt{2}$

Assim, a medida de comprimento do raio da base é $4\sqrt{2}$ cm, a medida da altura é 3 cm e a medida de comprimento do apótema da pirâmide é 5 cm.

61. a. Sendo A, B e C os vértices do triângulo equilátero da base de uma pirâmide regular, m a medida de comprimento do apótema e o ponto médio do lado BC, temos:

$m = \frac{1}{3}\,AM$ e $BM = \frac{\ell}{2}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle AMB$, temos:

$(AM)^2 = (AB)^2 - (BM)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (AM)^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (AM)^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$m = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$

b. Sendo A, B, C e D os vértices da base de uma pirâmide regular, O o baricentro dessa base e M o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, temos que os triângulos OMC e ADC são semelhantes. Logo:

$\frac{OM}{AD} = \frac{MC}{DC} \Rightarrow \frac{m}{\ell} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Rightarrow m = \frac{\ell}{2}$

c. Sabe-se que O é o baricentro do hexágono $ABCDEF$ e M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Como ABCDEF é regular, o triângulo OAB é equilátero e $\overline{OM}$ é a altura, então:

$AO = \ell$ e $AM = \frac{\ell}{2}$

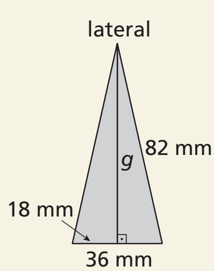
Aplicando o teorema de Pitágoras em $\triangle AMO$, temos:

$(OM)^2 = (OA)^2 - (AM)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow m^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

62.



$g^2 = 82^2 - 18^2 = 6.724 - 324 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{6.400} \Rightarrow g = 80$

$A_{\text{lateral}} = 3 \cdot \frac{80 \cdot 36}{2} = 4.320$

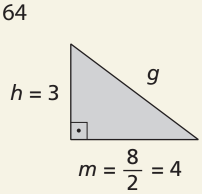
$A_{\text{base}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36^2\sqrt{3}}{4} = 324\sqrt{3}$

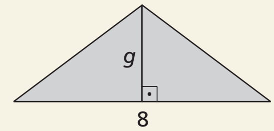
$A_{\text{total}} = 324\sqrt{3} + 4.320 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\text{total}} = 108 \cdot \left(40 + 3\sqrt{3}\right)$

Portanto, a medida da área total da superfície da pirâmide é $108 \cdot \left(40 + 3\sqrt{3}\right)$ mm^2.

63. $A_{\text{base}} = a^2 = 8^2 = 64$





$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{9 + 16} = 5$

$A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \frac{8 \cdot g}{2} = 4 \cdot \frac{8 \cdot 5}{2} = 80$

$A_{\text{total}} = 64 + 80 \Rightarrow A_{\text{total}} = 144$

Logo, a medida da área da base é 64 cm^2, a medida da área lateral é 80 cm^2, e a medida da área total é 144 cm^2.

64. Como $A_{\text{total tetraedro}} = 16\sqrt{3}$ cm^2, temos:

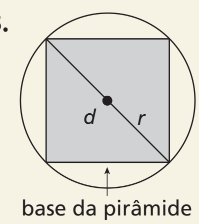
$A_{\text{total tetraedro}} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 16\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} \Rightarrow a = 4$

Logo, a medida do comprimento da aresta é 4 cm.

65.



Como $r = 6\sqrt{2}$, o comprimento da diagonal da base mede:

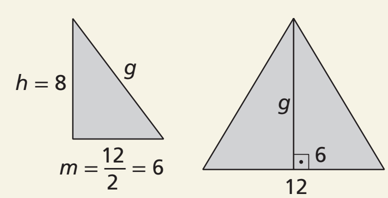
$2 \cdot 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

Como $d = a\sqrt{2}$, temos:

$12\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow a = 12$

$A_{\text{base}} = a^2 = 12^2 = 144$

A medida da área da base é 144 cm^2.



$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = \sqrt{100} \Rightarrow g = 10$

$A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \frac{12 \cdot g}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \frac{12 \cdot 10}{2} = 240$

A medida da área lateral é 240 cm^2.

$A_{\text{total}} = 144 + 240 = 384$

Logo, a medida da área total da superfície é 384 cm^2.

66. $A_{\text{base}} = a^2 = 6^2 = 36$

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow$

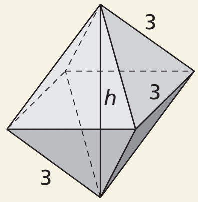
$\Rightarrow V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 \Rightarrow V_{\text{pirâmide}} = 48$

Logo, a medida do volume da pirâmide é 48 cm^3.

67. $V_{\text{tetraedro}} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{8\sqrt{2}}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

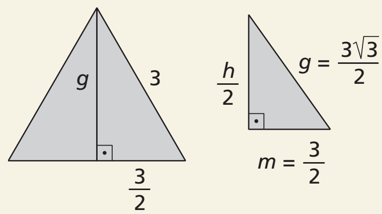
Logo, a medida do volume do tetraedro é $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm^3.

68.



$$A_{\text{total}} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\text{total}} = 8 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$$



$$3^2 = g^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^2 = 9 - \frac{9}{4} \Rightarrow g = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Medida da altura do octaedro:

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{4} = \frac{27}{4} - \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = 27 - 9 \Rightarrow h = \sqrt{18} \Rightarrow h = 3\sqrt{2}$$

O octaedro é formado por duas pirâmides quadrangulares regulares. Assim:

$$A_{\text{base pirâmide}} = a^2 = 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\text{base pirâmide}} = 9$$

$$V_{\text{octaedro}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

Portanto, a medida da área total da superfície do octaedro é $18\sqrt{3}$ cm^2, e a medida do volume é $9\sqrt{2}$ cm^3.

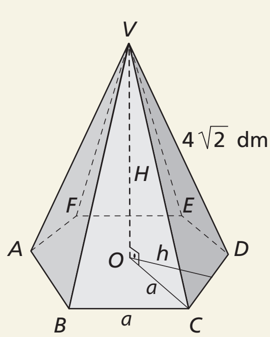
69. $A_{\text{base}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 8 = 24\sqrt{3}$$

Portanto, a medida do volume da pirâmide é $24\sqrt{3}$ cm^3.

70. $P_{\text{base}} = 24$ dm

$$a = \frac{24}{6} = 4$$



O $\triangle VOC$ é retângulo em O, e seus lados medem H, a e $4\sqrt{2}$ dm de comprimento.

$$VC^2 = OC^2 + H^2 \Rightarrow 32 = 4^2 + H^2 \Rightarrow$$

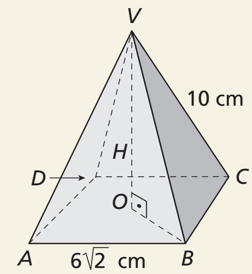
$$\Rightarrow H^2 = 16 \Rightarrow H = 4$$

$$A_{\text{base}} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 4 = 32\sqrt{3}$$

Logo, a medida do volume da pirâmide é $32\sqrt{3}$ dm^3.

71. O $\triangle OVB$ é retângulo em O.



Como a medida de $\overline{OB}$ é a metade da medida da diagonal do quadrado $ABCD$, temos:

$$OB = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$VB = 10$$

$$10^2 = 6^2 + H^2 \Rightarrow H = 8$$

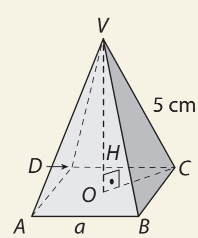
$$A_{\text{base}} = (6\sqrt{2})^2 = 36 \cdot 2 = 72$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 8 = 192$$

Portanto, a medida do volume da pirâmide é 192 cm^3.

72. $4a = 12\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

$$OC = \frac{d}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 3$$



Como o $\triangle VOC$ é retângulo em O, temos:

$$VC^2 = VO^2 + OC^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 = H^2 + 3^2 \Rightarrow H^2 = 16 \Rightarrow H = 4$$

$$A_{\text{base}} = a^2 = 18$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 4 = 24$$

Logo, a medida do volume da pirâmide é 24 cm^3.

73. **a.** $A_{\text{base}} = a^2 = 4^2 = 16$

Logo, a medida da área da base da pirâmide é 16 cm^2.

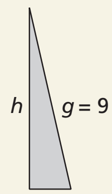
b. $A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 9}{2} = 72$

Logo, a medida da área lateral é 72 cm^2.

c. $A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 16 + 72 = 88$

Logo, a medida da área total da pirâmide é 88 cm^2.

d.



$m = \frac{4}{2} = 2$

$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 81 - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{77}$

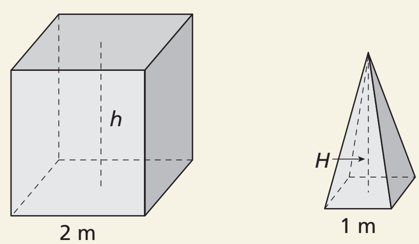
Logo, a medida da altura da pirâmide é $\sqrt{77}$ cm.

e. $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirâmide}} =$

$= 16\frac{\sqrt{77}}{3}$

Logo, a medida do volume da pirâmide é $16\frac{\sqrt{77}}{3}$ cm^3.

74.



$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = 2^2 \cdot h$

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot H}{3} = \frac{1^2 \cdot H}{3}$

$V_{\text{prisma}} = V_{\text{pirâmide}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4h = \frac{H}{3} \Rightarrow \frac{H}{h} = \frac{12}{1}$

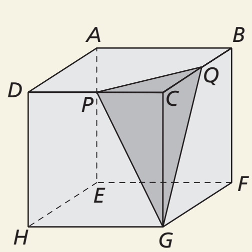
Portanto, a razão entre as medidas das alturas do prisma e da pirâmide é 1 para 12.

75. $V_{\text{prisma}} = 6 \cdot V_{\text{pirâmide}}$ e A_{base} iguais.

$A_{\text{base}} \cdot h = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H \Rightarrow h = 2 \cdot H$

Portanto, a medida da altura do prisma é o dobro da medida da altura da pirâmide.

76. A pirâmide *PQCG* tem um triedro trirretangular em que o triângulo *PQC* pode ser considerado base e $\overline{CG}$ altura da pirâmide.



$A_{\text{base}} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$

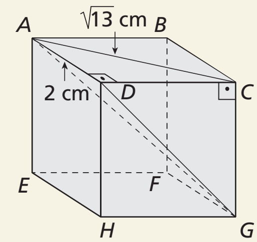
$h = 10$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{2} \cdot 10 = \frac{125}{3}$

Portanto, a medida do volume da pirâmide *PQCG* é $\frac{125}{3}$ cm^3.

77. Temos:



$AC = \sqrt{13}$ cm

$AD = 2$ cm

$CG = 3$ cm

No $\triangle ADC$:

$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13 = 2^2 + DC^2 \Rightarrow DC = 3$

$\overline{CG}$ é perpendicular ao plano que contém o $\triangle ADC$; logo, pode ser considerado altura da pirâmide *ADCG*, com base no triângulo *ADC*.

$A_{\text{base}} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ e $h = 3$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 = 3$

Portanto, a medida do volume da pirâmide *ACDG* é 3 cm^3.

78. $V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot H$

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot H}{3}$

$V_{ABCDE} = V_{\text{prisma}} - V_{DEFC} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{ABCDE} = A_{\text{base}} \cdot H - \frac{A_{\text{base}} \cdot H}{3} = \frac{2A_{\text{base}} \cdot H}{3}$

$\frac{V_{ABCDE}}{V_{DEFC}} = \frac{\frac{2}{3}A_{\text{base}} \cdot H}{\frac{A_{\text{base}} \cdot H}{3}} = \frac{2}{1}$

Portanto, a razão entre as medidas dos volumes de *ABCDE* e *DEFC* é 2 para 1.

79. Exemplo de resposta:

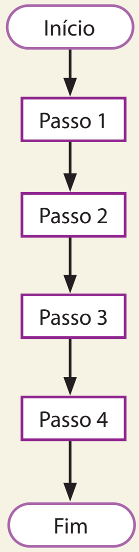
Passo 1. Dadas as medidas de comprimento da aresta lateral e das bases do tronco da pirâmide regular, calcula-se a medida da altura da face lateral do tronco.

Passo 2. Calcula-se a medida da altura do tronco da pirâmide regular.

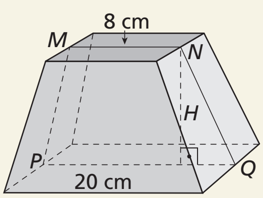
Passo 3. Por semelhança de triângulos, calcula-se a medida da altura da pirâmide regular.

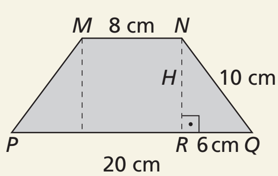
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Passo 4. Calcula-se a medida do volume do tronco da pirâmide subtraindo, da medida de volume da pirâmide original, a medida do volume da pirâmide menor, e encerra-se o algoritmo.



80.



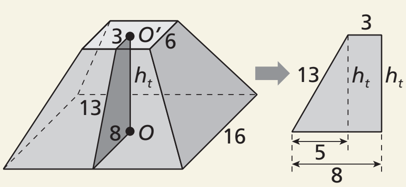


No $\triangle NQR$, temos:

$10^2 = 6^2 + H^2 \Rightarrow H = 8$

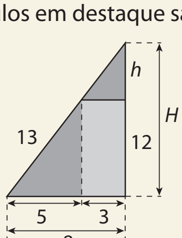
Logo, a medida da altura do tronco é 8 cm.

81.



$13^2 = h_t^2 + 5^2 \Rightarrow h_t^2 = 169 - 25 \Rightarrow h_t = \sqrt{144} \Rightarrow h_t = 12$

Os triângulos em destaque são semelhantes; logo:



$\frac{h}{12} = \frac{3}{5} \Rightarrow h = \frac{3 \cdot 12}{5} \Rightarrow h = \frac{36}{5}$

$H = h_t + h = 12 + \frac{36}{5} = \frac{96}{5}$

Então, o volume do tronco de pirâmide é dado por:

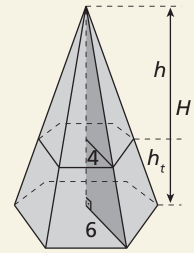
$V_t = \frac{1}{3}A_B \cdot H - \frac{1}{3}A_b \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V_t = \left(\frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot \frac{96}{5} - \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot \frac{36}{5}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_t = \frac{24.576 - 1.296}{15} = 1.552$

Logo, a medida da altura do tronco é 12 cm e sua medida do volume é 1.552 cm^3.

82. Sabemos que:



$$\begin{cases} a_1 = 4 \text{ m} \\ a_2 = 6 \text{ m} \\ V_{\text{tronco}} = 342\sqrt{3} \text{ m}^3 \end{cases}$$

$A_b = 6 \cdot \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$

$A_B = 6 \cdot \frac{a_2^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$

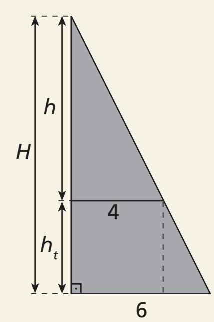
O volume do tronco é dado por:

$V_t = \frac{1}{3}A_B \cdot H - \frac{1}{3}A_b \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow 342\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 54\sqrt{3} \cdot H - \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow 342 \cdot 3 = 54 \cdot H - 24 \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow 1.026 = 54 \cdot H - 24 \cdot h$ (I)



Pela figura, temos:

$\frac{h}{H} = \frac{4}{6} \Rightarrow h = \frac{2}{3}H$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$\Rightarrow 1.026 = 54 \cdot H - 24 \cdot \frac{2}{3}H \Rightarrow$

$\Rightarrow H = \frac{1.026}{38} \Rightarrow H = 27$

Assim: $h = 18$

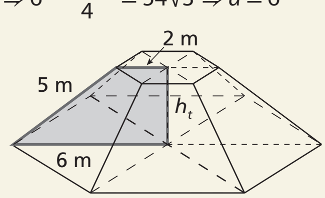
Como $h_t = H - h$, temos:

$h_t = 27 - 18 \Rightarrow h_t = 9$

Logo, a medida da altura do tronco é 9 m.

83. $A_b = 6\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$

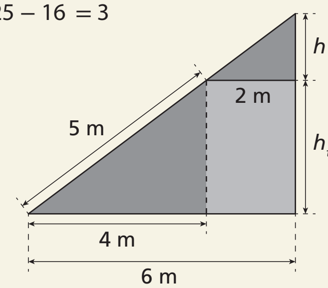
$A_B = 54\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

$5^2 = h_t^2 + 4^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_t = \sqrt{25 - 16} = 3$



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Pela figura, temos:

$\frac{h}{h_t} = \frac{2}{4} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot 3}{4} \Rightarrow h = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$H = h_t + h \Rightarrow H = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

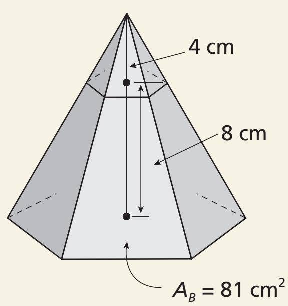
Assim:

$V_t = \frac{1}{3}A_B \cdot H - \frac{1}{3}A_b \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V_t = \frac{1}{3} \cdot 54\sqrt{3} \cdot \frac{9}{2} - \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow V_t = 78\sqrt{3}$

Portanto, a medida do volume do tronco é $78\sqrt{3}$ m^3.

84.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

$\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_b}{A_B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{4}{12}\right)^2 = \frac{A_b}{81} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{A_b}{81} \Rightarrow A_b = 9$

$V_t = \frac{1}{3}A_B \cdot H - \frac{1}{3}A_b \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V_t = \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4 = 312$

Logo, a medida do volume do tronco é 312 cm^3.

As resoluções/comentários da seção *Trabalho e juventudes – Engenheiro civil* estão nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

Para finalizar o capítulo 3

Autoavaliação

Q1. Entre as figuras, os poliedros são as figuras dos **itens a** e **d**, pois as demais figuras são corpos redondos.

Alternativas **a** e **d**.

Q2. 80 faces triangulares: 240 lados $(80 \cdot 3)$

12 faces pentagonais: 60 lados $(12 \cdot 5)$

Logo, o número de arestas é dado por:

$(240 + 60) : 2 = 150$

Assim, como $V + F - A = 2$, temos:

$V + 92 - 150 = 2 \Rightarrow V = 150 - 92 + 2 = 60$

Alternativa **b**.

Q3. $A = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{2} = 16$

$F = 4 + 5 = 9$

$V + F - A \neq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow V + 9 - 16 \neq 2 \Rightarrow V \neq 9$

Alternativa **d**.

Q4. $F = 10$

$A = \frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4}{2} = 19$

$V + F - A = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow V + 10 - 19 = 2 \Rightarrow V = 11$

Alternativa **d**.

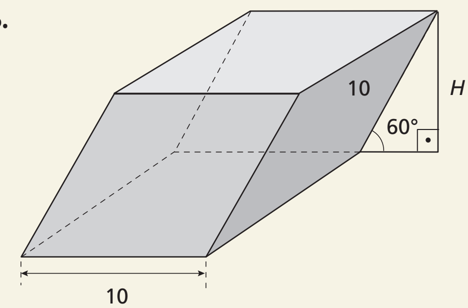
Q5. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} =$

$= \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$V_{paralelepípedo} = a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

Alternativa **c**.

Q6.

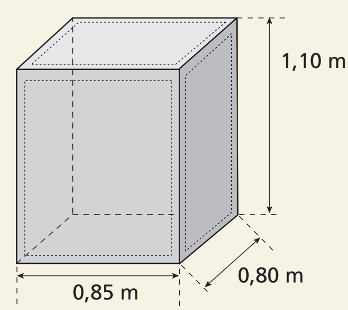


$\text{sen } 60° = \frac{H}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{10} \Rightarrow H = 5\sqrt{3}$

$V = A_{base} \cdot H = 10^2 \cdot 5\sqrt{3} = 500\sqrt{3}$

Alternativa **c**.

Q7. Se a espessura é 5 cm, devemos tirar 10 cm de cada dimensão externa para calcular a medida do volume. Assim:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

$0{,}85 \text{ m} - 0{,}1 \text{ m} = 0{,}75 \text{ m} = 7{,}5 \text{ dm}$

$0{,}80 \text{ m} - 0{,}1 \text{ m} = 0{,}7 \text{ m} = 7 \text{ dm}$

$1{,}10 \text{ m} - 0{,}1 \text{ m} = 1{,}0 \text{ m} = 10 \text{ dm}$

$V = 7{,}5 \text{ dm} \cdot 7 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 525 \text{ dm}^3$

Como 1 dm^3 = 1 L, temos 525 L.

Alternativa **c**.

Q8. $A_{base} = a^2\sqrt{\frac{3}{4}} = 2^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{total} = 8\sqrt{3}$

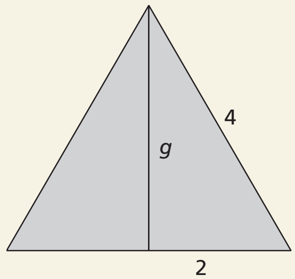
$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{prisma} = 3$

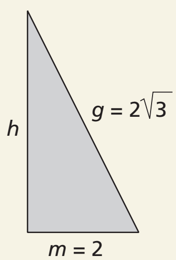
Portanto, a medida da área total do prisma é $8\sqrt{3}$ cm^2, e a medida do volume do prisma é 3 cm^3.

Alternativa **d**.

Q9.



$$4^2 = g^2 + 2^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g = \sqrt{16 - 4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g = \sqrt{12} \Rightarrow g = 2\sqrt{3}$$



$$(2\sqrt{3})^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \sqrt{12 - 4} = \sqrt{8} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = 2\sqrt{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow V = \frac{32\sqrt{2}}{3}$$

Alternativa **b**.

Capítulo 4 Corpos redondos

Atividades propostas

1. $A_{\text{total}} = 2\pi r(r + h) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\text{total}} = 2\pi \cdot 1 \cdot (1 + 0{,}5) = 3\pi$

Portanto, a medida da área total da superfície do comprimido é 3π cm^2.

2. $A_{\text{lateral}} = 2\pi rh$

$A_{\text{secção meridiana}} = 2rh$

$$\frac{A_{\text{lateral}}}{A_{\text{secção meridiana}}} = \frac{2\pi rh}{2rh} = \pi$$

Portanto, a razão pedida é π.

3. Cálculo da medida da altura: $h = 2\pi r = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$

Assim:

$A_{\text{total}} = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 5 \cdot (5 + 10\pi) = (100\pi^2 + 50\pi)$

Portanto, a medida da área total da superfície do cilindro é $(100\pi^2 + 50\pi)$ cm^2.

4. Sejam A e y, respectivamente, as medidas da área e da altura da secção meridiana.

Como a base do cilindro tem raio medindo 2 cm de comprimento, temos:

$A = 2r \cdot y \Rightarrow 20 = 4 \cdot y \Rightarrow y = 5$

Como a medida da altura da secção meridiana é igual à medida da altura do cilindro, temos: $y = h = 5$

Portanto:

$A_{\text{total}} = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 2 \cdot (2 + 5) = 28\pi$

Logo, a medida da área total da superfície do cilindro é 28π cm^2.

5. Como $h = \frac{3}{2} \cdot r$ e $A_{\text{lateral}} = 108\pi$ cm^2, temos:

$A_{\text{lateral}} = 2\pi rh \Rightarrow 108\pi = 2\pi \cdot r \cdot \frac{3}{2} \cdot r \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$

$h = \frac{3}{2} \cdot r \Rightarrow h = \frac{3}{2} \cdot 6 \Rightarrow h = 9$

Logo, a medida da altura é 9 cm, e a medida do comprimento do raio é 6 cm.

6. Resposta pessoal.

7. Sendo A_1 a medida da área da superfície da peça sem o furo e A_2 a medida da área da superfície do furo cilíndrico, temos:

$A_{1_{\text{base}}} = \pi(r_1)^2 = 10^2\pi = 100\pi$

$A_{2_{\text{base}}} = \pi(r_2)^2 = 5^2\pi = 25\pi$

$A_{\text{base da peça}} = 100\pi - 25\pi = 75\pi$

Como são duas bases, temos: $2 \cdot 75\pi = 150\pi$

$A_{1_{\text{lateral}}} = 2\pi r_1 h = 2\pi \cdot 10 \cdot 30 = 600\pi$

$A_{2_{\text{lateral}}} = 2\pi r_2 h = 2\pi \cdot 5 \cdot 30 = 300\pi$

Assim:

$A_{\text{total da peça}} = 150\pi + 600\pi + 300\pi = 1.050\pi$

Logo, a medida da área total da superfície da peça é 1.050π cm^2.

8. Como $h = 2$ cm, temos:

$\pi(r + 4)^2 h = \pi r^2 (h + 4) \Rightarrow 2\pi(r + 4)^2 = 6\pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (r^2 + 8r + 16) = 3r^2 \Rightarrow r^2 - 4r - 8 = 0$

Assim:

$$r = \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, como $r > 0$, temos $r = (2 + 2\sqrt{3})$.

Logo, a medida do comprimento do raio da base do cilindro inicial é $(2 + 2\sqrt{3})$ cm.

9. Como o cilindro é equilátero, temos: $h = 2r$

$A_{\text{total}} = 2A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}}$

$A_{\text{base}} = \pi r^2$

$A_{\text{lateral}} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$

Assim:

$A_{\text{total}} = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2$

Como $A_{\text{total}} = 24\pi$, temos:

$24\pi = 6\pi r^2 \Rightarrow r = 2$

$h = 2r = 4$

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$

Logo, a medida do volume do cilindro é 16π dm^3.

10. $r = 1$ mm

$h = 10$ cm $= 100$ mm

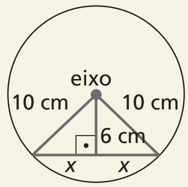
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 100 = 314$

Assim, a medida do volume é 314 mm^3.

314 mm^3 = 0,314 cm^3 = 0,314 mL

Logo, cabe 0,314 mL de tinta no reservatório da caneta.

11. De acordo com o esquema, temos:



$b_{\text{secção}} = 2x$

$x^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow x = 8$

$A_{\text{secção}} = b_{\text{secção}} \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow 80 = 16 \cdot h \Rightarrow h = 5$

$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 500\pi$

Logo, a medida do volume do cilindro é 500π cm^3.

12. Como $r = 20$ cm e $h = 60$ cm, temos:

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 20^2 \cdot 60 = 74.400$

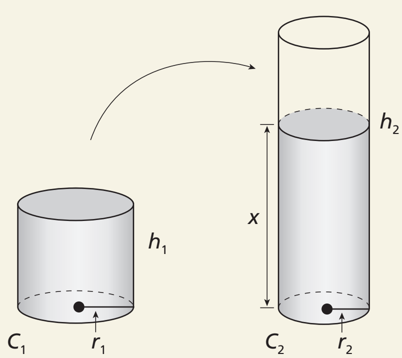
Logo, a medida do volume do botijão é 74.400 cm^3.

74.400 cm^3 = 74,400 dm^3 = 74,400 L

Duração do gás: $\dfrac{74{,}400}{3{,}1} = 24$

Portanto, o gás durará 24 dias.

13. Sendo C_1 o cilindro cheio de líquido e C_2 o cilindro para o qual o líquido será transferido, em que x é a medida da altura que o líquido atingirá, temos:



$r_1 = 10$ cm

$h_1 = 40$ cm

$r_2 = 6$ cm

$h_2 = 125$ cm

$V_{C_1} = \pi(r_1)^2 h_1 = \pi \cdot 10^2 \cdot 40 = 4.000\pi$

$4.000\pi = \pi(r_2)^2 x \Rightarrow 4.000\pi = \pi \cdot 6^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{4.000}{36} \Rightarrow x = \dfrac{1.000}{9}$

Portanto, o líquido transferido atingirá $\dfrac{1.000}{9}$ cm no cilindro C_2. Seja f a fração procurada, temos:

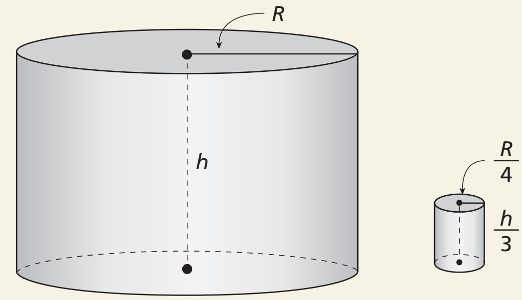
h_2 ——— 125 cm

f ——— $\dfrac{1.000}{9}$ cm

$f = \dfrac{1.000 \cdot h_2}{9 \cdot 125} = \dfrac{8}{9} h_2$

Logo, o líquido transferido ocupará $\dfrac{8}{9}$ da altura do novo cilindro.

14. As figuras a seguir representam os recipientes.



Considerando V a medida do volume do recipiente maior e v a medida do volume do recipiente menor, temos:

$V = \pi R^2 h$

$v = \dfrac{\pi R^2}{16} \cdot \dfrac{h}{3} = \dfrac{\pi R^2 h}{48}$

$\dfrac{V}{v} = \dfrac{\pi R^2 h}{\dfrac{\pi R^2 h}{48}} \Rightarrow V = 48v$

Logo, serão necessários 48 recipientes menores.

15. Sendo r a medida do comprimento do raio da base da cisterna, V a medida do volume de água consumido e H a medida da altura que a água baixará, temos:

$r = 0{,}5$ m $= 5$ dm

$V = 310$ L $= 310$ dm^3

$V = \pi r^2 H \Rightarrow 310 = 3{,}1 \cdot 5^2 \cdot H \Rightarrow 100 = 25H \Rightarrow H = 4$

Logo, o nível de água baixará 4 dm, ou seja, 40 cm.

16. **a.** Sim. No método utilizado por esses marceneiros, a medida obtida para o volume é $\left(\dfrac{2\pi r}{4}\right)^2 \cdot h = \dfrac{\pi^2}{4} \cdot r^2 \cdot h$, enquanto a medida do volume de um cilindro é $\pi r^2 h$. Como a diferença entre os fatores de multiplicação é apenas $\dfrac{\pi^2}{4} - \pi \simeq$ $\simeq 0{,}67$, ela é insignificante considerada a facilidade com que os marceneiros podem realizar o processo de cubagem da madeira.

b. Resposta pessoal. Algumas atividades que podem ser sugeridas para pesquisa são: uso de esquadro com linhas de pedreiro para determinar paredes perpendiculares; construção das tesouras na sustentação de telhado; determinação do nível de um terreno; cálculos de contabilidade, de produção agrícola e de área de terreno; construção de moldes para peças cerâmicas, metálicas ou plásticas.

17. Sendo α a medida de abertura do ângulo central, temos:

$\alpha = \dfrac{2\pi r}{g} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2 \cdot 180° \cdot 10}{60} \Rightarrow \alpha = 60°$

18. $\alpha = \dfrac{2\pi r}{g} \Rightarrow 60° = \dfrac{2 \cdot 180° \cdot r}{g} \Rightarrow g = \dfrac{360° r}{60°} \Rightarrow g = 6r$

Sendo C a medida do comprimento da circunferência da base e g a medida do comprimento da geratriz do cone, a razão k é:

$k = \dfrac{C}{g} \Rightarrow k = \dfrac{2\pi r}{6r} \Rightarrow k = \dfrac{\pi}{3}$

19. $\alpha = \frac{2\pi r}{g} \Rightarrow 120° = \frac{2 \cdot 180° \cdot 10}{g} \Rightarrow g = \frac{3.600°}{120°} \Rightarrow g = 30$

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 30^2 - 10^2 \Rightarrow h = \sqrt{800} \Rightarrow h = 20\sqrt{2}$

Logo, a medida da altura do cone é $20\sqrt{2}$ cm.

20. O cone que tem um semicírculo como planificação de sua superfície lateral é equilátero. Assim, como $g = 2r$, temos:

$g = 2r \Rightarrow 20 = 2r \Rightarrow r = 10$

Portanto, a medida de comprimento do raio da base do cone é 10 cm.

A secção meridiana é um triângulo equilátero de medida de comprimento do lado 20 cm. A medida da distância do vértice até a base é a medida da altura do triângulo equilátero.

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

Logo, a medida da distância do vértice até a base será $10\sqrt{3}$ cm.

21. **a.** $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow g = \sqrt{225} \Rightarrow g = 15$

$A_{\text{lateral}} = \pi r g = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi$

$A_{\text{total}} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 9 \cdot (9 + 15) = 216\pi$

Logo, a medida da área lateral é 135π cm^2 e a medida da área total é 216π cm^2.

b. $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 26^2 = 24^2 + r^2 \Rightarrow r = \sqrt{100} \Rightarrow r = 10$

$A_{\text{lateral}} = \pi r g = \pi \cdot 10 \cdot 26 = 260\pi$

$A_{\text{total}} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 10 \cdot (10 + 26) = 360\pi$

Logo, a medida da área lateral é 260π cm^2 e a medida da área total é 360π cm^2.

22. Considerando que cada chapéu tem o formato de um cone reto sem a base, para calcular a quantidade total de papel usado para confeccionar todos os chapéus fazemos:

$34 \cdot A_{\text{lateral cone}}$

Sendo $h = 12$ cm e $r = 8$ cm, temos:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + 8^2 \Rightarrow g = \sqrt{208} \Rightarrow g = 4\sqrt{13}$

Assim:

$34 \cdot A_{\text{lateral}} = 34 \cdot \pi r g = 34 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 4\sqrt{13} = 1.088\pi\sqrt{13}$

Portanto, são necessários $1.088\pi\sqrt{13}$ cm^2 de papel para fazer todos os chapéus.

23. As medidas da altura e do comprimento do raio da base do cilindro são iguais às medidas da altura e do comprimento do raio da base do cone nele inscrito. Então:

$h_{\text{cone}} = 5$ cm e $r_{\text{cone}} = 2$ cm

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow g = \sqrt{29}$

Medida da área total da superfície do cone:

$A_{\text{total}} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 2 \cdot (2 + \sqrt{29}) = 2\pi(2 + \sqrt{29})$

Portanto, a medida da área total da superfície do cone é $2\pi(2 + \sqrt{29})$ cm^2.

24. O cone é equilátero com $r = 5$ cm e $g = 10$ cm.

$A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} \Rightarrow A_{\text{total}} = \pi r^2 + \pi r g \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\text{total}} = \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 10 \Rightarrow A_{\text{total}} = 75\pi$

Portanto, a medida da área total da superfície é 75π cm^2.

25. Como $A_{\text{lateral}} = 600\pi$ cm^2 e $g = 30$ cm, temos:

$A_{\text{lateral}} = 600\pi = \pi r g \Rightarrow 600\pi = \pi \cdot r \cdot 30 \Rightarrow r = 20$

Assim:

$A_{\text{total}} = \pi r^2 + A_{\text{lateral}} = \pi \cdot 20^2 + 600\pi = 1.000\pi$

Portanto, a medida da área total da superfície é 1.000π cm^2.

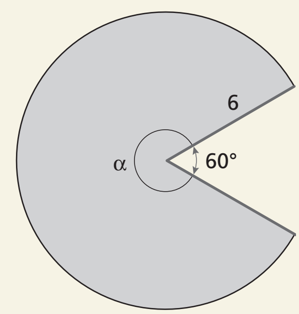
26. $\cos 30° = \frac{10}{g} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{g} \Rightarrow g = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

$A_{\text{lateral}} = \pi r g = \pi \cdot 10 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{200\sqrt{3}}{3}\pi$

Portanto, a medida da área lateral do cone é $\frac{200\sqrt{3}}{3}\pi$ cm^2.

27. Resposta pessoal.

28. Para determinar a medida do comprimento C deste arco cuja abertura do ângulo central α mede 300º, temos:



360° —— $2\pi \cdot 6$
300° —— C

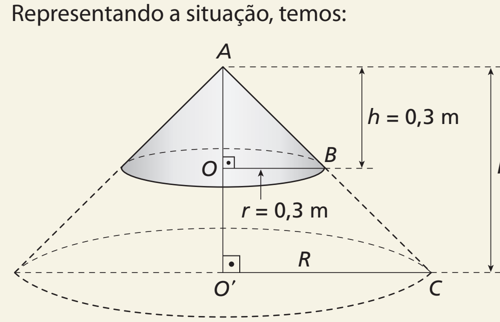
$C = \frac{300°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6 = 10\pi$

Como a medida do comprimento da circunferência da base é $2\pi r$, temos:

$2\pi r = 10\pi \Rightarrow r = 5$

Portanto, a medida do comprimento do raio da base do cone é 5 cm.

29. Representando a situação, temos:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Sendo R a medida do comprimento do raio da forma circular iluminada pelo lustre:

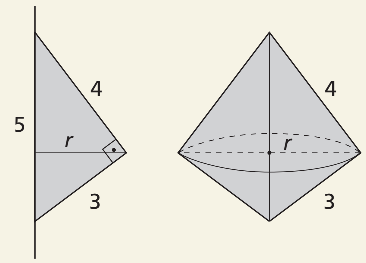
$\pi R^2 = 6{,}25\pi \Rightarrow R = 2{,}5$

Os triângulos AOB e $AO'C$ são semelhantes; então:

$\frac{h}{H} = \frac{r}{R} \Rightarrow H = \frac{R \cdot h}{r} = \frac{2{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}3} \Rightarrow H = 2{,}5$

Logo, o lustre deve ser pendurado a 2,5 m do chão.

30.



$r \cdot 5 = 4 \cdot 3 \Rightarrow r = \dfrac{12}{5}$

A medida da área da superfície do sólido é dada pela soma das medidas das áreas laterais de dois cones; assim:

$A_{L_1} = \pi r g_1 = \pi \cdot \dfrac{12}{5} \cdot 4 = \dfrac{48}{5}\pi$

$A_{L_2} = \pi r g_2 = \pi \cdot \dfrac{12}{5} \cdot 3 = \dfrac{36}{5}\pi$

$A = A_{L_1} + A_{L_2} = \dfrac{48}{5}\pi + \dfrac{36}{5}\pi = \dfrac{84}{5}\pi$

Portanto, a medida da área da superfície do sólido é $\dfrac{84}{5}\pi\ \text{dm}^2$.

31. A superfície lateral tenderia a coincidir com a base do cone; a medida da área dessa superfície tenderia a ser igual à medida da área da base do cone.

32. O lápis tem uma parte com o formato de um cone e outra com o formato de um cilindro.

- Cone: medida do comprimento do raio da base $r_1 = \dfrac{1}{2}$ cm e medida da altura $h_1 = 1$ cm
- Cilindro: medida do comprimento do raio da base $r_2 = \dfrac{1}{2}$ cm e medida da altura $h_2 = 15$ cm

Então:

$V_{\text{cone}} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r_1)^2 \cdot h_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = \dfrac{1}{12}\pi$

$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot (r_2)^2 \cdot h_2 = \pi \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 15 = \dfrac{15}{4}\pi$

$V_{\text{lápis}} = V_{\text{cone}} + V_{\text{cilindro}} = \dfrac{1}{12}\pi + \dfrac{15}{4}\pi = \dfrac{23}{6}\pi$

Portanto, a medida do volume do lápis é $\dfrac{23}{6}\pi\ \text{cm}^3$.

33. $V_{\text{cone}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow 18\sqrt{2}\,\pi = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot h \Rightarrow$

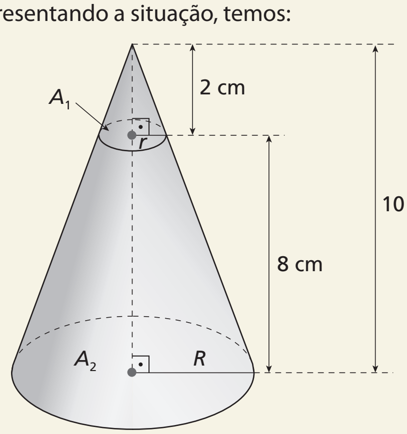
$\Rightarrow h = \dfrac{18\sqrt{2}\,\pi}{3\pi} \Rightarrow h = 6\sqrt{2}$

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow g = \sqrt{81} \Rightarrow g = 9$

$A_{\text{total}} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 3 \cdot (3 + 9) = 36\pi$

Portanto, a medida da área total da superfície do cone é $36\pi\ \text{cm}^2$.

34. Representando a situação, temos:



Para calcular a medida do comprimento do raio R da base do cone, temos:

$\dfrac{r}{R} = \dfrac{2}{10} \Rightarrow R = 5r \quad \text{(I)}$

Sabemos que:

$A_2 = A_1 + 216\pi \Rightarrow \pi R^2 = \pi r^2 + 216\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = r^2 + 216 \quad \text{(II)}$

Substituindo R por $5r$ em (II), obtemos:

$25r^2 = r^2 + 216 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$

Assim:

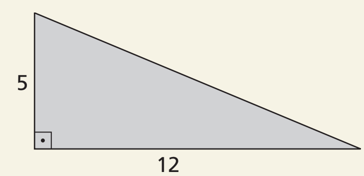
$R = 5 \cdot 3 = 15$

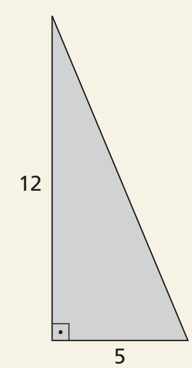
A medida do volume do cone é dado por:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 10 = 750\pi$

Portanto, a medida do volume do cone é $750\pi\ \text{cm}^3$.

35. a.





$V_1 = \dfrac{1}{3}\pi (r_1)^2 h_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 5$

Logo, $V_1 = 240\pi\ \text{cm}^3$.

$V_2 = \dfrac{1}{3}\pi (r_2)^2 h_2 = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12$

Logo, $V_2 = 100\pi\ \text{cm}^3$.

Assim:

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{240\pi\ \text{cm}^3}{100\pi\ \text{cm}^3} = \dfrac{240}{100} = 240\%$

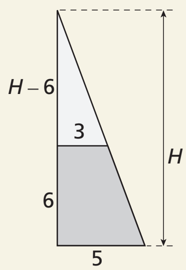
Portanto, a razão percentual entre V_1 e V_2 é 240%.

b. Para o triângulo retângulo que tem catetos com comprimento medindo x e y, temos: $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi y^2 x$ e $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi x^2 y$

Portanto:

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\dfrac{1}{3}\pi y^2 x}{\dfrac{1}{3}\pi x^2 y} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{y}{x}$

36. Representando a situação, temos:



Considerando a proporção $\frac{H}{5} = \frac{H-6}{3}$, temos $H = 15$ cm.

A medida do volume do tronco pode ser obtida subtraindo a medida V_m do volume do cone menor da medida V_M do volume do cone maior. Assim:

$V_{tronco} = V_M - V_m \Rightarrow$

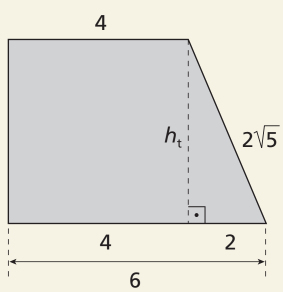
$\Rightarrow V_{tronco} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot (15-6) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco} = 125\pi - 27\pi = 98\pi$

Portanto, a medida do volume do tronco de cone é 98π cm^3.

37. $A_1 = \pi r^2 = 16\pi \Rightarrow r = \sqrt{16} \Rightarrow r = 4$

$A_2 = \pi R^2 = 36\pi \Rightarrow R = \sqrt{36} \Rightarrow R = 6$



$g_t = (h_t)^2 + 2^2 \Rightarrow (2\sqrt{5})^2 = (h_t)^2 + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (h_t)^2 = 20 - 4 \Rightarrow h_t = \sqrt{16} \Rightarrow h_t = 4$

Considerando que H é a medida da altura do triângulo formado pelo prolongamento da geratriz e da altura do tronco, temos a proporção:

$\frac{H}{6} = \frac{H-4}{4} \Rightarrow H = 12$

A medida do volume do tronco pode ser obtida subtraindo a medida do volume do cone menor da medida do volume do cone maior, gerado pelo triângulo maior. Assim:

$V_{tronco} = V_M - V_m \Rightarrow$

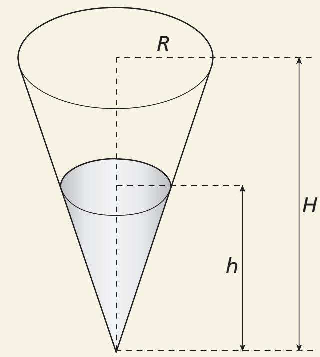
$\Rightarrow V_{tronco} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco} = 144\pi - \frac{128}{3}\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco} = \frac{304}{3}\pi$

Portanto, a medida do volume do tronco é $\frac{304}{3}\pi$ cm^3.

38.



$H = 4R$

Como h é metade de H, temos:

$h = 2R$

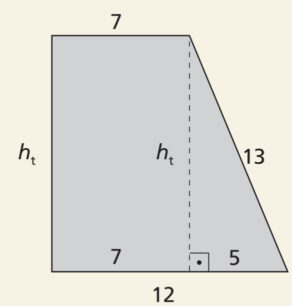
Sendo V a medida do volume de água que havia na taça cheia e V' a medida do volume de água que restou na taça, temos a seguinte razão, da **atividade resolvida R10**:

$\frac{V}{V'} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 = \left(\frac{4R}{2R}\right)^3 \Rightarrow \frac{V}{V'} = 8 \Rightarrow V' = \frac{V}{8}$

Cálculo da medida do volume da água bebida: $V - \frac{V}{8} = \frac{7}{8}V$

Portanto, foram bebidos $\frac{7}{8}$ da quantidade de água que havia na taça.

39. Para calcular a medida da altura da peça (h_t), temos:



$13^2 = (h_t)^2 + 5^2 \Rightarrow h_t = \sqrt{144} = 12$

Considerando que H é a medida da altura do triângulo formado pelo prolongamento da geratriz e da altura do tronco, temos a proporção: $\frac{H}{12} = \frac{H-12}{7} \Rightarrow H = \frac{144}{5}$

Obtemos também a medida h' da altura do cone menor:

$h' = H - h_t = \frac{144}{5} - 12 = \frac{84}{5}$

A medida do volume do tronco pode ser obtida subtraindo a medida do volume do cone menor da medida do volume do cone maior, gerado pelo triângulo maior. Assim:

$V_{tronco\ de\ cone} = V_M - V_m \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco\ de\ cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot \frac{144}{5} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7^2 \cdot \frac{84}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco\ de\ cone} = 1.108\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi \cdot 7^2 \cdot 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cilindro} = 588\pi$

Logo:

$V_{peça} = V_{tronco\ de\ cone} - V_{cilindro} \Rightarrow$

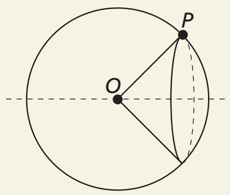
$\Rightarrow V_{peça} = 1.108\pi - 588\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{peça} = 520\pi$

Portanto, a medida do volume da peça é 520π cm^3.

40. A medida da área máxima será igual à medida da área do círculo máximo. Para uma esfera de raio de medida de comprimento r, essa medida de área máxima é igual a πr^2.

41.



a. Circunferência.

b. Superfície lateral de um cone.

c. Superfície esférica.

42. Se as superfícies são externas, temos:

$d = r_1 + r_2$

Se uma superfície for interna à outra, teremos dois casos:

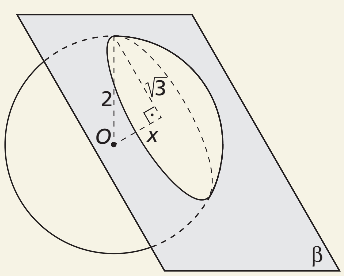
- $r_1 \geqslant r_2 \Rightarrow d = r_1 - r_2$
- $r_2 \geqslant r_1 \Rightarrow d = r_2 - r_1$

Logo, a medida da distância entre O_1 e O_2 é $r_1 + r_2$ ou $r_1 - r_2$ ou $r_2 - r_1$.

43. $R^2 = 3^2 - 1 \Rightarrow R^2 = 9 - 1 \Rightarrow R = \sqrt{8} \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$

Portanto, a medida do comprimento do raio R do círculo é $2\sqrt{2}$ cm.

44.



Assim:

$2^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

Logo, a medida da distância entre o plano β e o centro da esfera é 1 cm.

45. **a.** $A_{\text{superfície esférica}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi$

Portanto, a medida da área da superfície esférica é 36π cm^2 e a medida do volume da esfera é 36π cm^3.

b. Como a esfera tem 18 cm de medida de comprimento do diâmetro, temos $r = 9$ cm.

Assim:

$A_{\text{superfície esférica}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 = 324\pi$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 = 972\pi$

Portanto, a medida da área da superfície esférica é 324π cm^2 e a medida do volume da esfera é 972π cm^3.

46. $V_{\text{queijo}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 = \frac{4.000}{3}\pi$

$V_{\text{cilindro}} = \frac{4.000}{3}\pi \Rightarrow \pi \cdot 10^2 h = \frac{4.000}{3}\pi \Rightarrow h = \frac{40}{3}$

Portanto, a medida da altura da panela é $h = \frac{40}{3}$ cm.

47. As medidas da altura e do comprimento do paralelepípedo são iguais a $4r$, a medida da largura é igual a $2r$ e r é a medida de comprimento do raio de cada esfera.

Portanto:

$V_{\text{paralelepípedo}} = 4r \cdot 4r \cdot 2r = 32r^3$

Como a medida do volume de cada esfera é $\frac{4}{3}\pi$ cm^3, temos:

$\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r^3 = 1 \Rightarrow r = 1$

Logo:

$V_{\text{paralelepípedo}} = 32 \cdot 1^3 \Rightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = 32$

Portanto, a medida do volume do paralelepípedo é 32 cm^3.

48. Como $\alpha = 45°$, temos:

$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{90°} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 45°}{90°} = 18\pi$

$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot r^3 \cdot \alpha}{270°} = \frac{\pi \cdot 6^3 \cdot 45°}{270°} = 36\pi$

Portanto, a medida da área do fuso esférico é 18π cm^2 e a medida do volume da cunha esférica é 36π cm^3.

49. Cada gomo pode ser considerado uma cunha esférica segundo um ângulo de medida de abertura $\frac{360°}{12} = 30°$.

A medida da área da superfície total de cada gomo é igual à medida da área do círculo da face lateral mais a medida da área do fuso esférico. Assim:

$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 30°}{90°} = \frac{\pi r^2}{3}$

$A_{\text{lateral}} = \pi r^2$

$A_{\text{total}} = \frac{\pi r^2}{3} + \pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^2$

Portanto, a medida da área da superfície total de cada gomo será $\frac{4}{3}\pi r^2$ unidades de área.

50. $V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270°} = \frac{\pi \cdot 1^3 \cdot \alpha}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2\alpha}{3}$

Como a cunha esférica tem 1 m^3 de medida de volume, temos:

$1 = \frac{2\alpha}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

Assim, a abertura do ângulo que determina a cunha esférica mede $\frac{3}{2}$ radiano.

51. Vamos determinar a medida do volume de sorvete que cabe em uma casquinha de acordo com o descrito no enunciado.

$V_{\text{casquinha}} = \frac{1}{3}A_B h$, em que $A_B = \pi \cdot 2^2$ e $h = 10$

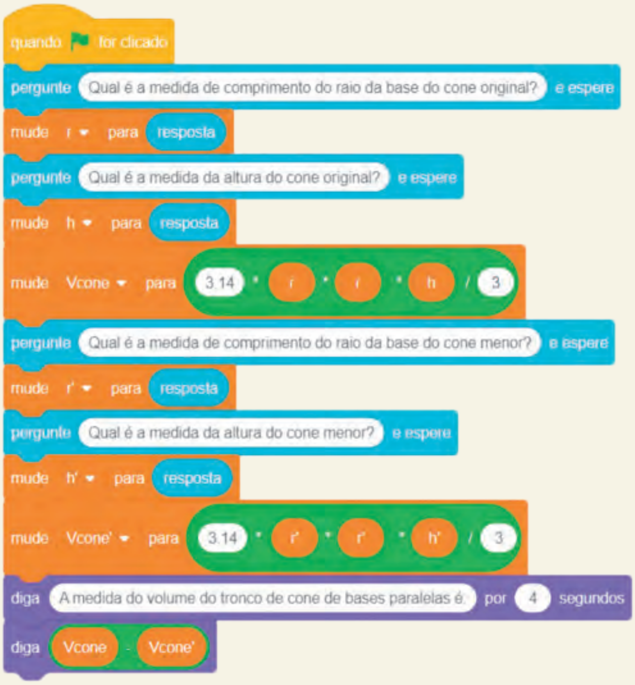
$V_{\text{casquinha}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 10 = \frac{40}{3}\pi$

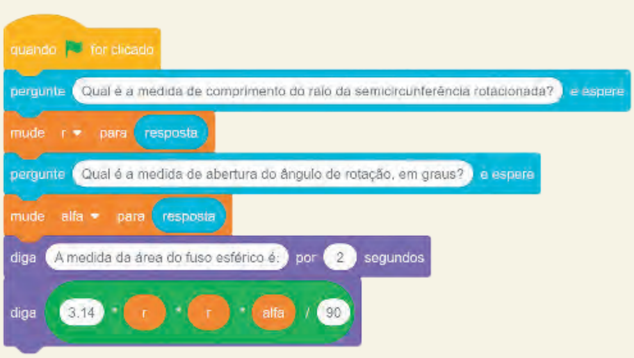
Duas conchas semiesféricas de sorvete equivalem a uma bola esférica de sorvete. Portanto, vamos determinar a medida do volume de uma bola.

$V_{\text{bola}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi$

Como $\frac{32}{3}\pi < \frac{40}{3}\pi$, o sorvete não transbordará, mesmo que derreta.

52. Exemplos de resposta:





SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE, EUA

Para finalizar o capítulo 4

Autoavaliação

Q1. $A_{\text{lateral}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 6 = 120\pi$

Portanto, a medida da área da superfície lateral do cilindro é 120π cm^2.

Alternativa **b**.

Q2. No cilindro equilátero, temos $h = 2r$. Assim:

$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h =$
$= 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2r = 2\pi r^2 + 4\pi r^2$

Alternativa **d**.

Q3. Como $r = 3 \cdot h$, temos:

$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (3h)^2 \cdot h = \pi \cdot 9h^2 \cdot h = 9\pi h^3$

Alternativa **a**.

Q4. $A_{\text{lateral}} = \pi rg$

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow g^2 = 225 \Rightarrow g = 15$

$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi$

Portanto, a área da superfície lateral do cone é 135π cm^2.

Alternativa **a**.

Q5. Como $g = 2r$, temos $r = \frac{g}{2}$. Assim:

$A_{\text{total}} = \pi r(r+g) \Rightarrow A_{\text{total}} = \pi \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{g}{2} + g\right) = \frac{3\pi g^2}{4}$

Alternativa **b**.

Q6. $V_A = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V_B = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 h = \frac{4\pi r^2 h}{3}$

Assim: $V_B = 4V_A$

Na embalagem B cabe o quádruplo do conteúdo da embalagem A.

Alternativa **d**.

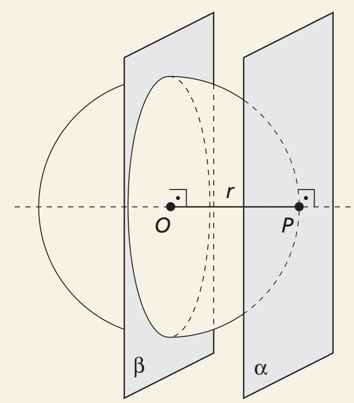
Q7. $A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = 4\pi$

Alternativa **b**.

Q8. $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \pi^3 = \frac{4}{3}\pi^4$

Alternativa **a**.

Q9. Representando a situação, temos:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Pela observação da figura, concluímos que a distância entre os planos α e β é *r*.

Alternativa **c**.

Q10. $12 \cdot A_{\text{bola maior}} = x \cdot A_{\text{bola menor}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 \cdot 4\pi(2r)^2 = x \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 48 \cdot 4\pi r^2 = x \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 48$

Logo, podem-se fazer 48 bolas menores.

Alternativa **c**.

Avaliação diagnóstica 2

1. Resolvendo a equação, tem-se:

$-15x - 30 = 70 \Rightarrow -15x = 100 \Rightarrow x = -\frac{100}{15} \Rightarrow x = -\frac{20}{3}$

Como $-\frac{20}{3}$ é um número racional, $S = \left\{-\frac{20}{3}\right\}$, considerando $U = \mathbb{Q}$.

Alternativa **c**.

2. Podemos verificar se um par ordenado (x, y) é solução de uma equação do 1º grau com duas incógnitas substituindo as incógnitas pelos valores numéricos correspondentes. Se a sentença obtida for verdadeira, o par ordenado é solução da equação. Caso contrário, não é solução.

Assim, verifica-se que $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right)$ é solução da equação $\frac{3}{2}x + 4y = 2$, pois:

$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow 2 = 2$ (sentença verdadeira)

Alternativa **b**.

3. Vamos resolver esse sistema utilizando o método da adição. Para isso, vamos multiplicar a segunda equação por 2 para, em seguida, adicionar as equações.

$$\begin{cases} -2x + 2y = 6 \\ x + y = -7 \times (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2x} + 2y = 6 \\ \cancel{2x} + 2y = -14 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 4y = -8 \quad}$$

Adicionando as equações, obtemos $4y = -8$, logo $y = -2$. Substituindo esse valor em uma das equações, tem-se:

$x + y = -7 \Rightarrow x - 2 = -7 \Rightarrow x = -5$

Então, podemos verificar que o par ordenado $(-5, -2)$ é solução desse sistema.

Alternativa **a**.

4. Resolvendo o sistema formado pelas equações dadas no enunciado pelo método da adição, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 0 = 3 \quad}$$

Como temos uma igualdade falsa, o sistema é impossível.

Alternativa **b**.

5. Resolvendo a inequação, tem-se:

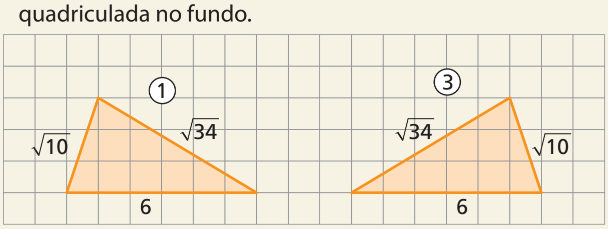
$3(x - 4) + 15 \geqslant 6(2x - 3) \Rightarrow 3x - 12 + 15 \geqslant 12x - 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 12x \geqslant -18 - 3 \Rightarrow -9x \geqslant -21 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{21}{9} \Rightarrow x \leqslant \dfrac{7}{3}$

Alternativa **e**.

6. Dos triângulos apresentados, apenas os triângulos 1 e 3 são congruentes, o que pode ser verificado pela congruência de seus lados correspondentes.

As medidas dos comprimentos dos lados podem ser obtidas pelo teorema de Pitágoras, usando como referência a malha quadriculada no fundo.



Alternativa **b**.

7. Como os polígonos são semelhantes, tem-se que:

$\dfrac{12}{x} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{24}{16} = \dfrac{y}{10}$. Assim: $\dfrac{12}{x} = \dfrac{y}{10} = \dfrac{3}{2}$.

- $\dfrac{12}{x} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$
- $\dfrac{y}{10} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 2y = 30 \Rightarrow y = 15$

Portanto, $x + y = 8 + 15 = 23$.

Alternativa **d**.

8. Um quadrado e um losango sempre apresentam simetrias de reflexão por suas diagonais, e um círculo apresenta simetria de reflexão por seu diâmetro. A mediatriz do lado de medida de comprimento diferente em um triângulo isósceles é o eixo de simetria de reflexão desse triângulo.

Um trapézio retângulo nunca apresenta eixo de simetria de reflexão, pois ele tem exatamente dois ângulos retos, um agudo e um obtuso, e os vértices dos ângulos agudo e obtuso compartilham um lado. Portanto, nenhuma reta traçada dividindo o polígono resultará em duas figuras congruentes e refletidas.

Alternativa **b**.

Capítulo 5 Matrizes e determinantes

Atividades propostas

1. **a.** 1×3 (uma linha e três colunas)
   b. 3×1 (três linhas e uma coluna)
   c. 2×1 (duas linhas e uma coluna)
   d. 2×2 (duas linhas e duas colunas)

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$

Aplicando a lei de formação, obtemos:

$a_{11} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
$a_{12} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$
$a_{13} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9$
$a_{14} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$
$a_{21} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$
$a_{22} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$
$a_{23} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$
$a_{24} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 14$
$a_{31} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11$
$a_{32} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$
$a_{33} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 15$
$a_{34} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 17$

Portanto: $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$

- Quando $i = j$, temos:
  $b_{11} = 1^2 - 1 = 0$
  $b_{22} = 2^2 - 1 = 3$
- Quando $i \neq j$, temos:
  $b_{12} = 3 \cdot 2 = 6$
  $b_{21} = 3 \cdot 1 = 3$
  $b_{31} = 3 \cdot 1 = 3$
  $b_{32} = 3 \cdot 2 = 6$

Portanto: $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |-6| & 0 & 3 \\ 8 & 7 & |-4| \\ -7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

- Para $i = j$, temos:
  $a_{11} = |-6| = 6; a_{22} = 7; a_{33} = 9$
- Para $i + j = 4$, temos:
  $a_{13} = 3; a_{22} = 7; a_{31} = -7$

5. Exemplo de resposta:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{pmatrix}$, temos:

$a_{11} = 1 = 1^1$	$a_{21} = 2 = 2^1$	$a_{31} = 3 = 3^1$
$a_{12} = 1 = 1^2$	$a_{22} = 4 = 2^2$	$a_{32} = 9 = 3^2$
$a_{13} = 1 = 1^3$	$a_{23} = 8 = 2^3$	$a_{33} = 27 = 3^3$
$a_{14} = 1 = 1^4$	$a_{24} = 16 = 2^4$	$a_{34} = 81 = 3^4$

Assim, $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, em que $a_{ij} = i^j$.

6. Não, para quaisquer valores de x, y e z, as matrizes A e B não seriam iguais, pois todos os elementos correspondentes precisam ser iguais, mas teríamos $a_{11} \neq b_{11}$.

7. Não, pois elas não são de mesma ordem.

A primeira é de ordem 5×1 (matriz coluna) e a segunda é de ordem 1×5 (matriz linha).

8. Para que as matrizes sejam iguais, devemos ter:

$$\begin{cases} a + 2b = 7 \\ -a + 3b = 8 \end{cases} \text{e} \begin{cases} 3c - 2d = 3 \\ -2c + d = -1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, obtemos:
$a = 1$, $b = 3$, $c = -1$ e $d = -3$

9. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$a_{11} = \frac{1}{1} = 1$; $a_{12} = \frac{1}{2}$; $a_{21} = \frac{2}{1} = 2$; $a_{22} = \frac{2}{2} = 1$

Portanto: $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Diagonal principal:

$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1^2 = 3$

$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2^2 = 8$

$a_{33} = 2 \cdot 3 + 3^2 = 15$

Diagonal secundária:

$a_{13} = 2 \cdot 1 + 3^2 = 11$

$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2^2 = 8$

$a_{31} = 2 \cdot 3 + 1^2 = 7$

Portanto, os elementos 3, 8 e 15 formam a diagonal principal, e os elementos 11, 8 e 7 formam a diagonal secundária.

11. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$

- Para $i = j$:
  $b_{11} = 1 + 1 = 2$
  $b_{22} = 2 + 2 = 4$
  $b_{33} = 3 + 3 = 6$
  $b_{44} = 4 + 4 = 8$
- Para $i \neq j$:
  $b_{14} = 1 - 4 = -3$
  $b_{23} = 2 - 3 = -1$
  $b_{32} = 3 - 2 = 1$
  $b_{41} = 4 - 1 = 3$

Calculando o produto dos elementos de cada diagonal, obtemos:

- diagonal principal: $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$;
- diagonal secundária: $(-3) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 = 9$.

Portanto, a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem, é: $384 - 9 = 375$.

12. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matriz identidade de ordem 2)

Se $\begin{pmatrix} k^2 & k-1 \\ -k+1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, temos:

- $k^2 = 1 \Rightarrow k = +1$ ou $k = -1$
- $k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$
- $-k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1$
- $k = 1$

Portanto, o valor de k é 1.

13. Pelo enunciado, temos: $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ e $a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j, \text{ se } i = j \\ i^{j+1}, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

Como a diagonal principal é formada pelos elementos a_{11}, a_{22} e a_{33}, temos:

$a_{11} = 1 \cdot 1 = 1$

$a_{22} = 2 \cdot 2 = 4$

$a_{33} = 3 \cdot 3 = 9$

Portanto, o traço da matriz é igual a $1 + 4 + 9 = 14$.

14. a. $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

b. $A + (B + C) = (A + B) + C =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

c. $(A + B) + I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Não é possível adicionar essas matrizes, pois elas não são de mesma ordem.

15. Resposta pessoal.

Pode-se, por exemplo, no lugar da matriz I_3, construir uma matriz $D_{3 \times 2}$.

16. a. $B - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b. $A - (B + I_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c. $B - (A + 0_{2 \times 2}) = B - A =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

17. a. $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

b. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

18. a. c_{22} é elemento da matriz $C = A + B$; logo, pode ser representado por $c_{22} = a_{22} + b_{22}$. Calculando os elementos a_{22} e b_{22}, temos:
$a_{22} = 2^2 + 2^2 = 8$ e $b_{22} = 3 \cdot 2 = 6$
Assim: $c_{22} = 8 + 6 = 14$

b. Não existe, pois, para qualquer elemento da matriz A, $a_{ij} \geqslant 2$ e, para qualquer elemento da matriz B, $b_{ij} \geqslant 3$. Portanto, qualquer elemento da matriz $C = A + B$ é tal que $c_{ij} \geqslant 5$.

19. Considerando as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, de tal modo que $B = A + A + A$ para cada par i, j, com $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, temos:

$b_{ij} = a_{ij} + a_{ij} + a_{ij} \Rightarrow b_{ij} = 3 \cdot a_{ij}$

Logo, $B = 3 \cdot A$.

Como $B = A + A + A$ e $B = 3 \cdot A$, podemos concluir que $A + A + A = 3 \cdot A$.

20. **a.** $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

b. $\frac{1}{3} \cdot (A + B) = \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right] =$

$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

c. $2 \cdot A - \frac{1}{2} \cdot B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{2} \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

d. $2 \cdot A - (B + C) =$

$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

e. $2 \cdot (A - C) + 3 \cdot (B - A) =$

$= 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right] +$

$+ 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right] =$

$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

f. $B + C - 2 \cdot I_2 =$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

21. A única igualdade matricial falsa é a apresentada no **item d**, pois $6 \cdot (A + B) = 6 \cdot A + 6 \cdot B \neq 6A + B$.

Exemplo de demonstração: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$6 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right] \neq 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$6 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -6 & 18 \\ 6 & 24 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

22. Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2X + Y = A - B \\ -3X - 2Y = B - 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X + \cancel{2Y} = \cancel{2A} - 2B \\ -3X - \cancel{2Y} = -\cancel{2A} + B \end{cases}$$
$$X = -B$$

Como $2X + Y = A - B$, então:

$2 \cdot (-B) + Y = A - B \Rightarrow Y = A + B$

Assim: $Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

Portanto: $X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

23. **a.** $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 12 & 0 + 4 \\ 1 - 6 & 0 + 2 \\ 0 + 3 & 0 - 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b. $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ não é possível

Espera-se que os estudantes percebam que o número de colunas da matriz B é diferente do número de linhas da matriz A; logo, não é possível calcular o produto $B \cdot A$.

c. $A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 \\ 2 - 2 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d. $(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -20 + (-4) \\ -10 + (-2) \\ 6 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

e. $A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 + 0 \\ -6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 28 \\ 2 - 14 \\ 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} -3 & y \\ x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 - 3y \\ 2x - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Igualando as matrizes e resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} -6 - 3y = 1 \Rightarrow y = -\frac{7}{3} \\ 2x - 6 = -5 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto: $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{7}{3}$

25. Aplicando à equação matricial as propriedades da adição, obtemos:

$A \cdot X + B + (-B) = C + (-B) \Rightarrow A \cdot X = C - B$

Calculando $C - B$: $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$

Então: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot X_{m \times n} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$

Assim, são condições para ocorrência dessa multiplicação:

- a matriz X ter duas linhas, pois a matriz A tem duas colunas;
- a matriz X ter uma coluna, pois a matriz produto tem uma coluna.

Portanto:

$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Resolvendo a equação $A \cdot X = C - B$, obtemos:

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -b \\ 3a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$

Igualando as matrizes e resolvendo o sistema, obtemos:

$\begin{cases} -b = -8 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow b = 8$ e $a = -3$

Logo: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

26. A seguir, estão as matrizes F e P, que representam a quantidade de vitórias, empates e derrotas de cada time do grupo F e a pontuação obtida por cada resultado.

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para obter a pontuação alcançada por cada time, basta realizar o produto $F \cdot P$, que multiplicará a quantidade de cada resultado pela respectiva pontuação obtida.

$$F \cdot P = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, a pontuação das seleções do grupo F foi:

Grupo F – Copa do Mundo de Futebol Feminino 2023

Seleção	Pontos
França	7
Jamaica	5
Brasil	4
Panamá	0

27. **a.** $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$

$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$A \cdot B \neq B \cdot A$, logo não vale a propriedade comutativa na multiplicação de matrizes.

b. $A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$

$A \cdot B = A \cdot C$ e $B \neq C$; logo, eliminar a matriz A nos dois membros da igualdade não é uma operação válida.

28. **a.** $X_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$

Assim, são condições para ocorrência dessa multiplicação:

- a matriz X ter duas linhas, pois a matriz produto tem duas linhas;
- a matriz X ter duas colunas, pois a matriz A tem duas linhas.

Portanto: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Teremos, então:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3a+5b & 2a+b \\ 3c+5d & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Igualando as matrizes e resolvendo os sistemas, obtemos:

- $\begin{cases} 3a + 5b = 3 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 0$
- $\begin{cases} 3c + 5d = 5 \\ 2c + d = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 0 \text{ e } d = 1$

Logo: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. Observando a matriz X obtida, podemos concluir que é a matriz identidade.

Espera-se que os estudantes percebam que a matriz identidade é a matriz tal que $X \cdot A = A$, ou seja, é o elemento neutro na multiplicação de matrizes.

29. Exemplo de resposta:

Vamos supor que $A = (4)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a. $A \cdot I_1 = (4) \cdot (1) = (4)$

$I_1 \cdot A = (1) \cdot (4) = (4)$

$B \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$I_2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$C \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$I_3 \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$D \cdot I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$I_4 \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. Os produtos obtidos são iguais, respectivamente, às matrizes inventadas.

Espera-se que os estudantes percebam que o produto de qualquer matriz pela matriz identidade (I_n), em qualquer ordem, é a própria matriz.

30. **a.** O algoritmo calcula o determinante de uma matriz quadrada de ordem 2.

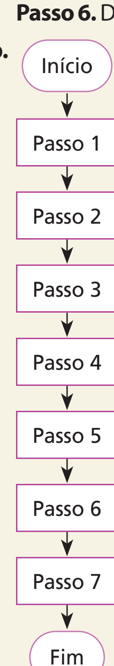
b. Espera-se que os estudantes percebam que o último passo depende de os anteriores terem sido executados, caso contrário não é possível saber o valor correto de p ou de s para determinar a diferença $p - s$; portanto não pode ser realizado antes do primeiro.

31. **a.** **Passo 4.** Determine o produto de $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$ e chame de d.

Passo 5. Determine o produto de $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$ e chame de e.

Passo 6. Determine o produto de $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ e chame de f.

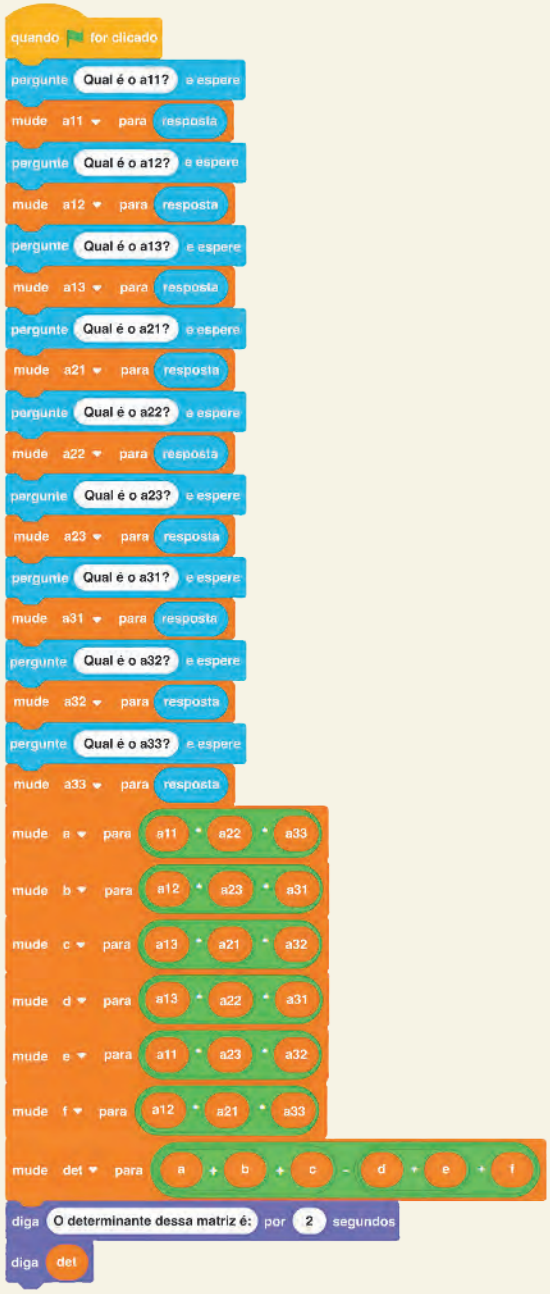
b.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE, EUA

32.



33. a. $\det A = |2| = 2$

b. $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 5$

c. $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \end{array}$$

$$-3 \quad -8 \quad 0 \qquad 0 \quad -12 \quad 0$$

Assim, obtemos:

$\det C = -12 - (-3 - 8) = -1$

34. a. Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$8 \quad 0 \quad 0 \qquad 8 \quad 0 \quad 0$$

Assim, obtemos:

$(8 + 0 + 0) - (8 + 0 + 0) = 0$

Portanto, o determinante é igual a 0.

b. Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & 0 & a & a & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & c \\ b & 0 & b & b & 0 \end{array}$$

$$abc \quad 0 \quad 0 \qquad abc \quad 0 \quad 0$$

Assim, obtemos:

$(abc) - (abc) = 0$

Portanto, o determinante é igual a 0.

35. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$

$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 8 = -14$

$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = -3$

Então:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + (-14) - (-3) = -8$

36. a. $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Então: $\det (A + B) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = -12$

b. $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = -25$

Então: $3 \cdot \det A = 3 \cdot (-25) = -75$

c. $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 21 & 12 \end{pmatrix}$

Então:

$\det 3A = \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 21 & 12 \end{vmatrix} = -3 \cdot (12) - 9 \cdot 21 = -225$

d. $\det A + \det B = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -1 \cdot 4 - 3 \cdot 7 + 0 - 1 \cdot (-3) = -22$

37. a. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -4 & -20 \end{pmatrix}$

Então:

$\det (A \cdot B) = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -4 & -20 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-20) - 10 \cdot (-4) = 20$

b. $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 16 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

Então:

$\det (B \cdot A) = \begin{vmatrix} -12 & 16 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = (-7) \cdot (-12) - 16 \cdot 4 = 20$

c. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot (-3) = 5$

$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 4 \cdot (-1) = 4$

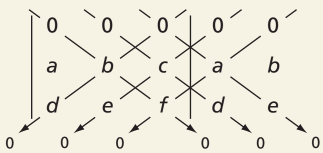
Então: $\det A \cdot \det B = 5 \cdot 4 = 20$

38. $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = -10 - (16) = -26$

$\det B = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = 30 - (-21) = 51$

Como $\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$, então:
$\det (A \cdot B) = (-26) \cdot 51 = -1.326$

39. a. Pela regra de Sarrus:



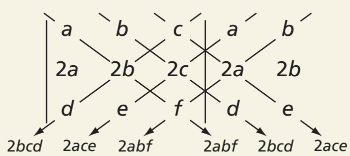
Assim, obtemos:

$0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 0$

Portanto, o determinante é igual a 0, pois uma matriz com uma linha de zeros tem determinante igual a zero.

b. • Caso em que uma linha é "o dobro de outra linha":

Pela regra de Sarrus:



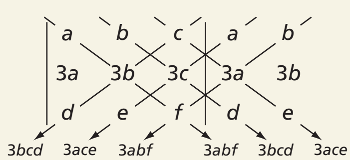
Assim, obtemos:

$(2abf + 2bcd + 2ace) - (2bcd + 2ace + 2abf) = 0$

Logo, uma matriz em que uma linha é o "dobro de outra linha" tem determinante igual a zero.

• Caso em que uma linha é "o triplo de outra linha":

Pela regra de Sarrus:



Assim, obtemos:

$(3abf + 3bcd + 3ace) - (3bcd + 3ace + 3abf) = 0$

Então, uma matriz em que uma linha é o "triplo de outra linha" tem determinante igual a zero.

c. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix} = 3ad - 3bc = 3 \cdot (ad - bc)$

$\begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} = 3ad - 3bc = 3 \cdot (ad - bc)$

Portanto, se o determinante de uma matriz de ordem 2 tem uma linha ou coluna triplicada, seu valor triplica.

d. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Logo, o determinante de uma matriz de ordem 2 é igual ao da matriz obtida dessa, trocando-se as linhas por colunas.

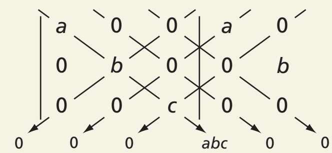
e. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$

$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$

Então, os determinantes que têm linhas ou colunas permutadas são opostos.

f. Pela regra de Sarrus:



Assim, obtemos:

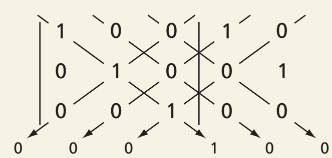
$(abc + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = abc$

Portanto, o determinante de uma matriz diagonal de ordem 3 é sempre igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

40. $\det I_1 = |\,1\,| = 1$ $\det I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

$\det I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Pela regra de Sarrus:



Assim, obtemos:

$\det I_3 = (1 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 1$

Espera-se que os estudantes respondam que o determinante de I_4 deve ser igual a 1.

41. a. Nos dois casos, quando os estudantes tentarem realizar os cálculos na planilha, obterão uma mensagem de erro.

b. No caso do determinante, isso ocorrerá porque a matriz B não é quadrada; no caso do produto $B \times A$, porque o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

Para finalizar o capítulo 5

Autoavaliação

Q1. Se uma matriz possui o número de linhas igual ao número de colunas, ela é uma matriz quadrada.

Como a matriz é de ordem 2, ou seja, é de ordem 2×2, essa matriz é quadrada.

Alternativa **b**.

Q2. De acordo com a definição, só podemos adicionar ou subtrair matrizes de mesma ordem.

Alternativa **c**.

Q3. Para $A \cdot B = X$, temos:

$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = X_{m \times n}$

Assim, é condição para ocorrência dessa multiplicação que a matriz X tenha duas linhas e duas colunas.

Para $B \cdot A = Y$, temos:

$B_{3 \times 2} \cdot A_{2 \times 3} = Y_{m \times n}$

Portanto, é condição para ocorrência dessa multiplicação que a matriz Y tenha três linhas e três colunas.

Logo, os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$ são, respectivamente, dos tipos 2×2 e 3×3.

Alternativa **d**.

Q4. As matrizes são diagonais, pois os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos.

Alternativa **d**.

Q5. Na multiplicação de matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda.

Alternativa **a**.

Q6. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$

A matriz produto terá o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz. Portanto, será de ordem 3×4.

Alternativa **a**.

Q7. Na multiplicação de matrizes, não é válida a propriedade comutativa.

Alternativa **c**.

Q8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22$

Alternativa **d**.

Q9. Só é possível calcular o determinante de uma matriz quadrada.

Alternativa **b**.

Q10. Considerando $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, obtemos $\det A = ad - bc$. Vamos examinar as situações dadas nas alternativas.

- $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$

  $\det(-A) = (-a) \cdot (-d) - (-b) \cdot (-c) = ad - bc$

  Logo: $\det(-A) = \det A = 5$

- $\dfrac{A}{10} = \dfrac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{10} & \frac{b}{10} \\ \frac{c}{10} & \frac{d}{10} \end{bmatrix}$

  $\det \dfrac{A}{10} = \dfrac{a}{10} \cdot \dfrac{d}{10} - \dfrac{b}{10} \cdot \dfrac{c}{10} = \dfrac{1}{100} \cdot (ad - bc)$

  Então: $\det \dfrac{A}{10} = \dfrac{1}{100} \cdot 5 = 0{,}05 \neq 0{,}5$

- $2A = 2 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$

  $\det 2A = 2a \cdot 2d - 2b \cdot 2c = 4 \cdot (ad - bc)$

  Logo: $\det 2A = 4 \cdot 5 = 20$

Alternativa **d**.

Capítulo 6 Sistemas lineares

Atividades propostas

1. a. Substituindo x por 1, y por 3 e z por 2 na equação dada, obtemos: $2 \cdot 1 + 3 + 3 \cdot 2 = 11$, que é uma sentença verdadeira.

Logo, o terno ordenado (1, 3, 2) é solução da equação linear $2x + y + 3z = 11$.

b. Substituindo x, y e z por 2 na equação dada, obtemos: $2 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 2 \neq 11$; portanto, a equação linear não é satisfeita.

Logo, o terno ordenado (2, 2, 2) não é solução da equação $2x + y + 3z = 11$.

2. Para que o par ordenado $(3, k)$ seja solução da equação dada, devemos ter:

$2x + 3y = 12 \Rightarrow 2 \cdot 3 + 3 \cdot k = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 + 3k = 12 \Rightarrow k = 2$

Logo, se $k = 2$, o par $(3, k)$ é solução da equação $2x + 3y = 12$.

3. Exemplos de resposta:

Os ternos (0, 0, 0), (1, −1, −1), (1, 1, 5) e (−2, 2, 2) são soluções da equação $2a + 3b - c = 0$.

4. Substituindo x por 3 e y por $\frac{2}{3}$ na equação $x - 3y = 1$, obtemos: $3 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 1$, que é uma sentença verdadeira.

Substituindo x por 3 e y por $\frac{2}{3}$ na equação $x + 3y = 5$, obtemos: $3 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 5$, que é uma sentença verdadeira.

Logo, $\left(3, \frac{2}{3}\right)$ é solução comum das duas equações dadas.

5. Resposta pessoal.

6. Para o par ordenado $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, temos: $a \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + b = 1$ (I)

Para o par ordenado (1, 2), temos: $a \cdot 1 + b = 2$ (II)

Devemos resolver o sistema formado pelas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} \frac{a}{3} + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por (−3) e adicionando as duas equações, obtemos:

$$\begin{cases} -\cancel{a} - 3b = -3 \\ \cancel{a} + b = 2 \end{cases}$$

$$-2b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Substituindo b por $\frac{1}{2}$ em (II), obtemos $a = \frac{3}{2}$.

Logo, $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$.

7. Da sentença $(2x + y) \cdot (-x + 3y) = 0$, temos $2x + y = 0$ ou $-x + 3y = 0$.

Com essas equações, formamos o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \quad \text{(I)} \\ -x + 3y = 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (II) por 2 e adicionando a equação obtida, membro a membro, à equação (I), obtemos:

$$\begin{cases} \cancel{2x} + y = 0 \\ -\cancel{2x} + 6y = 0 \end{cases}$$

$$7y = 0$$

Assim, $y = 0$ e, substituindo y por 0 na equação (I), temos:

$2x + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$

Portanto, $S = \{(0, 0)\}$.

8. A reta r passa pelos pontos (2, 0) e (0, −1).

Então: $m \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 2 \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$

A reta s passa pelos pontos (6, 0) e (0, 1).

Então: $0 + n \cdot 1 = 6 \Rightarrow n = 6$

O ponto P pertence às retas r e s; logo, suas coordenadas constituem a solução do sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \quad \text{(I)} \\ x + 6y = 6 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Vamos multiplicar a equação (II) por (−1) e adicionar a equação obtida, membro a membro, à equação (I).

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ -x - 6y = -6 \end{cases}$$
$$\overline{\quad -8y = -4 \quad}$$

Assim, $y = \frac{1}{2}$ e, substituindo y por $\frac{1}{2}$ em (I), temos:

$x - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x = 3$

Portanto, $P\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $m = 1$ e $n = 6$.

9. $\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 + y = 2 \end{cases}$

a. Exemplos de resposta:

Para $x - y = 0$:

(0, 0), (1, 1), (−2, −2)

Para $x + y = 2$:

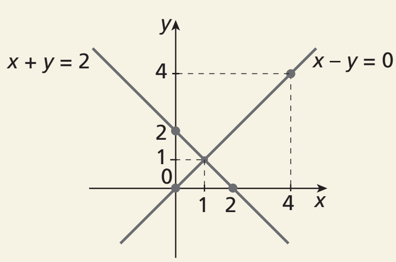
(1, 1), (2, 0), (0, 2)

b. $x - y = 0$

x	y
0	0
4	4

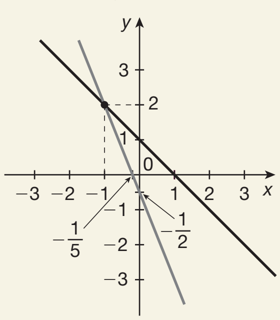
$x + y = 2$

x	y
0	2
2	0



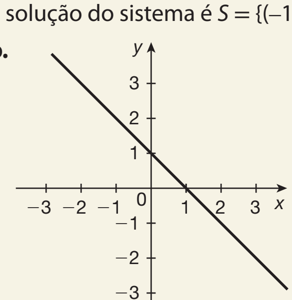
c. A solução gráfica do sistema é o ponto de intersecção das retas, ou seja, $S = \{(1, 1)\}$.

10. a.



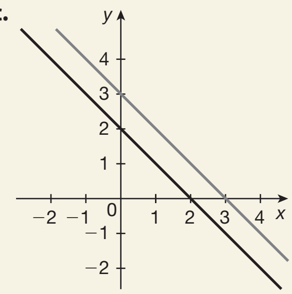
A solução do sistema é $S = \{(-1, 2)\}$.

b.



Espera-se que os estudantes percebam que as duas equações geraram duas retas coincidentes. Isso pode ser uma boa introdução a sistemas indeterminados, com infinitas soluções, tema do subtópico seguinte.

c.



Nesse caso, espera-se que os estudantes percebam que não há solução para esse sistema, pois as retas são paralelas e, consequentemente, não se cruzam.

11. Sendo x o número de meninas e y o número de meninos, representamos o problema com o sistema:

$$\begin{cases} 2(x - 5) = y \\ y - 7 = x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 10 \ \text{(I)} \\ -x + y = 2 \ \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicamos a equação (II) por 2 e adicionamos a equação obtida, membro a membro, à equação (I):

$$\begin{cases} \cancel{2x} - y = 10 \\ -\cancel{2x} + 2y = 4 \end{cases}$$
$$\overline{\quad y = 14 \quad}$$

Substituindo y por 14 em (I), obtemos:

$2x - 14 = 10 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12$

Assim, $x + y = 26$.

Portanto, no total, 26 estudantes faziam prova nessa sala.

12. Chamando de x o tipo de leite com 2% de gordura e de y o tipo com 4% de gordura, podemos formar o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ \frac{2}{100} \cdot x + \frac{4}{100} \cdot y = \frac{2{,}5}{100} \cdot 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 80 \quad \text{(I)} \\ 2x + 4y = 200 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicamos a equação (I) por (−2) e adicionamos a equação obtida, membro a membro, à equação (II):

$$\begin{cases} -\cancel{2x} - 2y = -160 \\ \cancel{2x} + 4y = 200 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 2y = 40 \quad}$$

Assim, $y = 20$ e, substituindo y por 20 em (II), obtemos:

$2x + 4 \cdot 20 = 200 \Rightarrow 2x = 200 - 80 \Rightarrow x = 60$

Portanto, foram misturados 60 L de leite com 2% de gordura e 20 L de leite com 4% de gordura.

13. Resposta pessoal.

14. a. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 3$ e $y = 0$.

Logo, o conjunto solução é $S = \{(3, 0)\}$, isto é, o sistema tem uma única solução.

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

b. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$

A segunda equação é equivalente à primeira (basta multiplicar por 2 todos os termos da primeira para obter a segunda). Algumas das infinitas soluções desse sistema são (4, 1), (1, −2), (3, 0), (0, −3), (5, 2), (−3, −6) e (−1,5; −4,5). Note que essas soluções são do tipo $(3 + \alpha, \alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Logo, $S = \{(3 + \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, e esse sistema é possível e indeterminado (SPI).

c. $\begin{cases} x - y = 3 \\ -3x + 3y = 9 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} \cancel{3x} - \cancel{3y} = 9 \\ -\cancel{3x} + \cancel{3y} = 9 \end{cases}$$
$$0x + 0y = 18 \Rightarrow 0 = 18 \text{ (sentença falsa)}$$

Não há valores reais para x e y que tornem a sentença verdadeira. Portanto, $S = \varnothing$, e esse sistema é impossível (SI).

d. $\begin{cases} x = 3 + y \\ y = x - 3 \end{cases}$

O sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Ou seja, as duas equações são idênticas. Algumas das infinitas soluções desse sistema são (4, 1), (1, −2), (3, 0) e (5, 2). Note que essas soluções são do tipo $(3 + \alpha, \alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Logo, $S = \{(3 + \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, e esse sistema é possível e indeterminado (SPI).

15. $\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ 3x - 2y + kz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ kz = 0 \end{cases}$

a. Se $k = 0$, temos um SPI.

Fazendo $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, as infinitas soluções do sistema são da forma $(2, 3, \alpha)$.

b. Se $k \neq 0$, temos um sistema possível e determinado cuja solução para o sistema é (2, 3, 0).

16. a. Multiplicando a primeira equação por (−2) e a segunda equação por 3 e somando as equações obtidas, membro a membro, obtemos:

$$\begin{cases} -\cancel{12x} - \cancel{6y} = -2a \\ \cancel{12x} + \cancel{6y} = 15 \end{cases}$$
$$0x + 0y = -2a + 15$$

Ou seja, o sistema só é possível e indeterminado se: $-2a + 15 = 0 \Rightarrow a = \frac{15}{2}$

Para $a = \frac{15}{2}$, temos: $\begin{cases} 6x + 3y = \frac{15}{2} \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

Para $y = \alpha$, temos: $4x + 2\alpha = 5 \Rightarrow x = \frac{5 - 2\alpha}{4}$

Assim, o conjunto solução do sistema pode ser dado por $S = \left\{ \left(\frac{5 - 2\alpha}{4}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

b. Do **item a**, podemos observar que uma equação é múltipla da outra. Assim, podemos concluir que não existe um valor de a que torne o sistema possível e determinado.

17. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que, para $a \neq \frac{15}{2}$, o sistema é impossível.

18. $S_1 = \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y = 6 \end{cases}$ e $S_2 = \begin{cases} 3x - y = m \\ x + y = n \end{cases}$

Resolvendo S_1, obtemos $x = 1$ e $y = 2$.

Logo, (1, 2) é solução de S_1.

Como S_1 e S_2 devem ser sistemas equivalentes, então (1, 2) também deve ser solução de S_2.

Substituindo x por 1 e y por 2 em S_2, obtemos:

$$\begin{cases} m = 3 \cdot 1 - 2 \\ n = 1 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Logo, os sistemas S_1 e S_2 serão equivalentes para $m = 1$ e $n = 3$.

19. Como o sistema é homogêneo, temos:

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \\ 2a + c = 0 \\ a + 2b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -4 \\ b = -3 \end{cases}$$

Logo, $a = 2$, $b = -3$ e $c = -4$.

20. a. $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b. $N = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

21. a. $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$

21. b. $\begin{cases} 2x + 7y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$

22. a. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$

22. b. $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ x - 4y + 7z = 0 \\ 5x - 6z = 3 \end{cases}$

23. Resposta pessoal.

24. Substituindo x por $\frac{1}{2}$ e y por $\frac{1}{5}$ na equação matricial dada, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} + (-5) \cdot \frac{1}{5} \\ 6 \cdot \frac{1}{2} + (-5) \cdot \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A igualdade obtida é uma sentença verdadeira.

Portanto, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ é solução da equação matricial dada.

25. a. Substituindo x, y e z por 1, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade obtida é uma sentença falsa.

Logo, (1, 1, 1) não é solução da equação matricial dada.

b. Substituindo x, y e z por 0, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade obtida é uma sentença verdadeira.

Logo, (0, 0, 0) é solução da equação matricial dada.

c. Substituindo x por (-3), y por 1 e z por 2, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade obtida é uma sentença verdadeira.

Logo, $(-3, 1, 2)$ é solução da equação matricial dada.

d. Substituindo x por 3, y por (-1) e z por (-2), obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade obtida é uma sentença verdadeira.

Portanto, $(3, -1, -2)$ é solução da equação matricial dada.

e. Substituindo x por (-1), y por 1 e z por 0, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade obtida é uma sentença falsa.

Logo, $(-1, 1, 0)$ não é solução da equação matricial dada.

Portanto, os ternos das alternativas **b**, **c** e **d** são soluções da equação dada.

26. a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \quad\ \ y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Portanto, $S = \{(2, 8)\}$.

b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad\ \ y + z = 5 \\ \quad\quad\quad z = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 6 - 2 - 3 = 1$$

Portanto, $S = \{(1, 2, 3)\}$.

27. $S_1 = \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 1$

$S_2 = \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ b - a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 1$

Portanto, para que os sistemas sejam equivalentes, devemos ter $a = 0$ e $b = 1$.

28. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

O sistema correspondente a essa equação matricial é:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos o conjunto solução $S = \{(2, 1)\}$.

Substituindo x por 2 e y por 1 em $\begin{pmatrix} m & 5 \\ 4 & -n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} m & 5 \\ 4 & -n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolvendo, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2m + 5 \\ 8 - n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2m + 5 = 0 \\ 8 - n = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{5}{2} \\ n = 3 \end{cases}$$

Portanto, para que essas equações matriciais representem sistemas lineares equivalentes, devemos ter $m = -\frac{5}{2}$ e $n = 3$.

29. $S_3 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 \quad (G) \\ \quad\quad\ \ y + 2z = 0 \quad (H) \\ \quad\quad\quad\quad 6z = 6 \quad (I) \end{cases}$

Pela equação (I), temos:

$6z = 6 \Rightarrow z = 1$

Substituindo z por 1 na equação (H), obtemos:

$y = -2 \cdot 1 = -2$

Substituindo z por 1 e y por (-2) na equação (G), obtemos:

$-x - 2 \cdot (-2) - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

Logo, a solução de S_3 é $(2, -2, 1)$.

Substituindo x por 2, y por (-2) e z por 1 nos sistemas S_1 e S_2, obtemos:

$$S_1 = \begin{cases} -2 - 2 \cdot (-2) - 1 = 1 \quad \text{(verdadeira)} \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = -2 \quad \text{(verdadeira)} \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 1 = 3 \quad \text{(verdadeira)} \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} -2 - 2 \cdot (-2) - 1 = 1 \quad \text{(verdadeira)} \\ -2 + 2 \cdot 1 = 0 \quad \text{(verdadeira)} \\ -4 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = 6 \quad \text{(verdadeira)} \end{cases}$$

Logo, $(2, -2, 1)$ também é solução de S_1 e S_2.

30. a. Resolvendo pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} -2x + 4y = 8 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases} \Rightarrow y = 5 \text{ e } x = 6$$

Logo, $S = \{(6, 5)\}$.

b. Exemplo de resposta:

Multiplicando a primeira equação de S_1 por $\frac{1}{2}$ e adicionando à segunda, obtemos:

$$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$$
$$\overline{\quad x - y = 1 \quad}$$

$$S_2 = \begin{cases} x - 2y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

c. Resolvendo o possível sistema S_2, obtido no **item b**, pelo método da adição, obtemos:

$$S_2 = \begin{cases} x - 2y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad y = 5$ e $x = 6$

Assim, $S = \{(6, 5)\}$

Portanto, $S_1 \sim S_2$.

31. Resposta pessoal.

32. a. $\begin{cases} -3x + 5y = -11 \quad (I) \\ \quad\quad\quad 2y = -2 \quad (II) \end{cases}$

Da equação (II), obtemos $y = -1$.

Substituindo y por (-1) na equação (I), obtemos $x = 2$.

Assim, $S = \{(2, -1)\}$.

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

b. $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ \quad\quad y - z = 0 \end{cases}$

O sistema possui duas equações e três incógnitas.

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} 3x - y + \alpha = 3 & \text{(I)} \\ \quad\; y - \alpha = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = \alpha$. Substituindo y por α na equação (I), obtemos: $3x - \alpha + \alpha = 3 \Rightarrow x = 1$

Atribuindo valores reais a α, obtemos as soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 2$, obtemos o terno (1, 2, 2) que satisfaz o sistema. Assim, a solução do sistema é $S = \{(1, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Como α representa um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções.

Portanto, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

c. $$\begin{cases} x - y - z = 2 & \text{(I)} \\ \quad - 2y + z = 3 & \text{(II)} \\ \qquad - 4z = 4 & \text{(III)} \end{cases}$$

Da equação (III), obtemos $z = -1$. Substituindo z por (-1) na equação (II), obtemos $y = -2$. Substituindo y por (-2) e z por (-1) na equação (I), obtemos $x = 3$.

Assim, $S = \{(3, -2, -1)\}$

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

d. $$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ \quad\; y + 3z = 1 \end{cases}$$

O sistema possui duas equações e três incógnitas.

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} x + 2y - \alpha = -2 & \text{(I)} \\ \quad\; y + 3\alpha = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = 1 - 3\alpha$. Substituindo y por $(1 - 3\alpha)$ na equação (I), obtemos:

$x + 2(1 - 3\alpha) - \alpha = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2 - 6\alpha - \alpha = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 7\alpha - 4$

A solução do sistema é do tipo $(7\alpha - 4, 1 - 3\alpha, \alpha)$. Atribuindo valores reais a α, obtemos as soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 1$, obtemos o terno (3, −2, 1) que satisfaz o sistema.

Assim, a solução do sistema é $S = \{(7\alpha - 4, 1 - 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Como α representa um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções.

Portanto, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

33. a. $$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (−2) e a adicionamos à segunda.

Assim, temos o sistema original escalonado:

$$\begin{cases} x + y = 5 & \text{(I)} \\ \quad - 3y = -9 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = 3$.

Substituindo y por 3 na equação (I), obtemos $x = 2$.

Logo, $S = \{(2, 3)\}$.

b. $$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

Para simplificar, escrevemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (−2) e a adicionamos à segunda.

Assim, temos o sistema original escalonado:

$$\begin{cases} x - 3y = 6 & \text{(I)} \\ \quad 8y = -8 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = -1$.

Substituindo y por (−1) na equação (I), obtemos $x = 3$.

Logo, $S = \{(3, -1)\}$.

c. $$\begin{cases} 4x - 2y = 34 \\ x + 6y = 2 \end{cases}$$

Escrevendo o sistema de forma equivalente, temos:

$$\begin{cases} x + 6y = 2 & \text{(I)} \\ 4x - 2y = 34 & \text{(II)} \end{cases}$$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (−4) e a adicionamos à segunda.

Assim, temos o sistema original escalonado:

$$\begin{cases} x + 6y = 2 & \text{(I)} \\ \quad - 26y = 26 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = -1$.

Substituindo y por (−1) na equação (I), obtemos $x = 8$.

Logo, $S = \{(8, -1)\}$.

d. $$\begin{cases} x + y = -4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (−3) e a adicionamos à segunda.

Assim, temos o sistema original escalonado:

$$\begin{cases} x + y = -4 & \text{(I)} \\ \quad -5y = 15 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = -3$.

Substituindo y por (−3) na equação (I), obtemos $x = -1$.

Logo, $S = \{(-1, -3)\}$.

34. Com os dados do enunciado, e chamando de x, y e z os preços por quilo, em real, do arroz, do feijão, e do macarrão, respectivamente, podemos montar o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 40 - 4 \\ 2x + 3y + 3z = 40 - 7{,}3 \\ 2x + 2y + 2z = 30 - 5{,}4 \end{cases}$$

Multiplicando a terceira equação por $\frac{1}{2}$, podemos escrever o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y + z = 12{,}3 \\ 2x + 3y + 3z = 32{,}7 \\ 3x + 2y + 4z = 36 \end{cases}$$

Multiplicando então a primeira equação por (−2) e por (−3), e somando à segunda e à terceira equações, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 12{,}3 \\ \quad y + z = 8{,}1 \\ \quad -y + z = -0{,}9 \end{cases}$$

Somando a segunda equação à terceira, obtemos o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + y + z = 12{,}3 \\ \quad y + z = 8{,}1 \\ \qquad 2z = 7{,}2 \end{cases}$$

Logo, $z = 3{,}6$, $y = 4{,}5$ e $x = 4{,}2$. Como o amigo "A" comprou 1 kg de arroz e 2 kg de macarrão para sua vizinha, ela deverá pagar a ele R\$ 4,20 + 2 · R\$ 3,60 = R\$ 11,40.

Alternativa **c**.

35. a. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (−1) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (−5) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -2y = -6 \\ -3y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \quad \text{(I)} \\ -y = -3 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = 3$.

Substituindo y por 3 na equação (I), obtemos $x = 1$.

Logo, $S = \{(1, 3)\}$, e o sistema é SPD.

b. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Escrevemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por (−2) e a adicionamos à segunda.

Adicionamos a primeira equação à terceira.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3y = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Como pela segunda equação obtemos $y = \frac{1}{3}$ e, pela terceira, obtemos $y = -2$, o sistema não admite solução.

Logo, $S = \varnothing$, e o sistema é SI.

c. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 3 \\ 3x + 4y + 4z = 4 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (−2) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (−3) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 3 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por (−1) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 3 \\ 0y + 0z = 1 \end{cases}$$

Como a terceira equação é uma sentença falsa, o sistema não admite solução.

Logo, $S = \varnothing$, e o sistema é impossível (SI).

d. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (−2) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (−1) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y + 0z = -2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Escrevemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + z + y = 1 \\ z + y = 0 \\ -y = -2 \end{cases}$$

Da terceira equação, obtemos $y = 2$.

Substituindo y por 2 na segunda equação, obtemos: $z = -2$.

Substituindo y por 2 e z por (−2) na primeira equação, obtemos $x = 1$.

Logo, $S = \{(1, 2, -2)\}$, e o sistema é SPD.

e. $\begin{cases} -x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + z = 13 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por 2 e a adicionamos à segunda.

$$\begin{cases} -x + 2y - z = -2 \\ 5y - z = 9 \end{cases}$$

O sistema possui duas equações e três incógnitas. Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, α real, temos:

$$\begin{cases} -x + 2y - \alpha = -2 \\ 5y - \alpha = 9 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $y = \frac{9 + \alpha}{5}$. Substituindo o valor de y na primeira equação, obtemos $x = \frac{28 - 3\alpha}{5}$.

A solução do sistema é do tipo $\left(\frac{28 - 3\alpha}{5}, \frac{9 + \alpha}{5}, \alpha\right)$.

Atribuindo valores reais a α, obtemos as soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 1$, obtemos o terno (5, 2, 1) que satisfaz o sistema.

Logo, seu conjunto solução é:

$S = \left\{\left(\frac{28 - 3\alpha}{5}, \frac{9 + \alpha}{5}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$, e o sistema é SPI.

f. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 5x + 2y + z = 3 \\ 6x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (−5) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (−6) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y - 4z = -17 \\ -3y - 4z = -17 \end{cases}$$

A segunda e a terceira equação são idênticas. Então, podemos escrever o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y - 4z = -17 \end{cases}$$

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, α real, temos:

$$\begin{cases} x + y + \alpha = 4 \\ -3y - 4\alpha = -17 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $y = \frac{17 - 4\alpha}{3}$ e, substituindo esse valor de y na primeira equação, obtemos: $x = \frac{\alpha - 5}{3}$.

A solução do sistema é do tipo $\left(\frac{\alpha - 5}{3}, \frac{17 - 4\alpha}{3}, \alpha\right)$.

Atribuindo valores reais a α, obtemos as soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 5$, obtemos o terno $(0, -1, 5)$ que satisfaz o sistema.

Logo, o conjunto solução é:

$$S = \left\{\left(\frac{\alpha - 5}{3}, \frac{17 - 4\alpha}{3}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$, e o sistema é SPI.

> As resoluções/comentários da seção *Trabalho e juventudes – Farmacêutico* estão nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

Para finalizar o capítulo 6

Autoavaliação

Q1. Somente a equação $y - z = 0$ compõe um sistema linear 2×3 com $2x + 2y = 2$.
Alternativa **a**.

Q2. A solução de um sistema linear 2×2 possível e determinado são as coordenadas do ponto de intersecção entre duas retas concorrentes.
Alternativa **e**.

Q3. A solução do primeiro sistema é $(4, 1)$. Substituindo x por 4 e y por 1 na primeira equação do segundo sistema, obtemos:
$2 \cdot 4 + 1 = a \Rightarrow a = 9$
Alternativa **c**.

Q4. Todo sistema linear homogêneo tem todos os termos independentes iguais a zero.
Alternativa **d**.

Q5. $a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$
Alternativa **d**.

Q6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$$

Alternativa **b**.

Q7. No primeiro sistema, vamos trocar as equações de lugar para que a primeira tenha 1 como coeficiente de x.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x - 2y = 5 \\ x + y + 2z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 2x + y - z = 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$$

Escalonando o sistema obtido, obtemos o segundo sistema dado.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ -y - 5z = -17 \\ -6y - 8z = -35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ y + 5z = 17 \\ 22z = 67 \end{cases}$$

Portanto, os sistemas são equivalentes.
Alternativa **b**.

Q8. $\begin{cases} A + B = 55 \Rightarrow B = 55 - A \text{ (I)} \\ A + C = 50 \Rightarrow C = 50 - A \text{ (II)} \\ B + C = 45 \Rightarrow B + C = 45 \text{ (III)} \end{cases}$

Substituindo B e C na equação (III) por (55 − A) e (50 − A), respectivamente, temos:
$55 - A + 50 - A = 45$
$-2A = -60$
$A = 30$
Assim, $B = 25$ e $C = 20$.
$A + B + C = 75$

Portanto, a soma dos preços dos artigos A, B e C é R$ 75,00.
Alternativa **c**.

Q9. Representando cada preço pela letra inicial do nome de cada peça, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2l + 2f = 130 \\ 2l + 2c = 256 \\ 1l + 1f + 1c = 143 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} l + f + c = 143 \\ -2f = -30 \\ -2c = -156 \end{cases}$$

De $-2c = -156$, obtemos $c = 78$.
Portanto, o preço unitário da colcha é R$ 78,00.
Alternativa **c**.

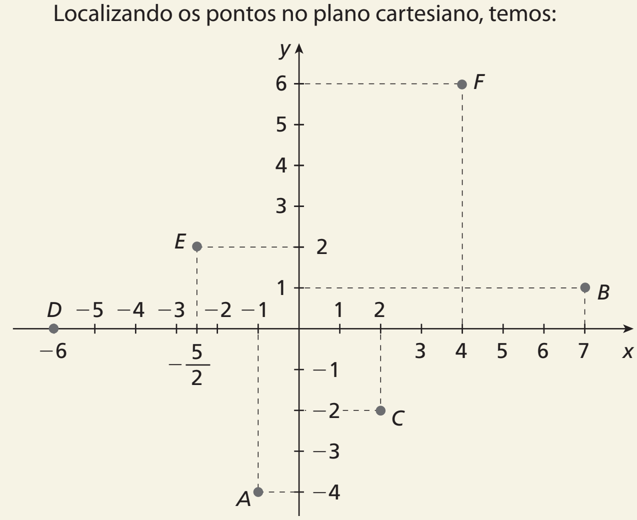
Capítulo 7 Geometria analítica

Atividades propostas

1. Temos:

- coordenadas do ponto A:
$x_A = -1$ e $y_A = -4$
- coordenadas do ponto B:
$x_B = 7$ e $y_B = 1$
- coordenadas do ponto C:
$x_C = 2$ e $y_C = -2$
- coordenadas do ponto D:
$x_D = -6$ e $y_D = 0$
- coordenadas do ponto E:
$x_E = -\frac{5}{2}$ e $y_E = 2$
- coordenadas do ponto F:
$x_F = 4$ e $y_F = 6$

Localizando os pontos no plano cartesiano, temos:

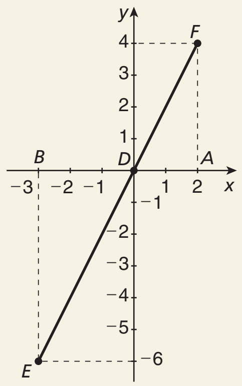


2. a. Temos $x > 0$ e $y < 0$, pois $x = 3$ e $y = -\sqrt{2}$. Então, o ponto $(3, -\sqrt{2})$ pertence ao 4º quadrante.

b. Temos $x < 0$ e $y < 0$, pois $x = -\pi$ e $y = -4$. Então, o ponto $(-\pi, -4)$ pertence ao 3º quadrante.

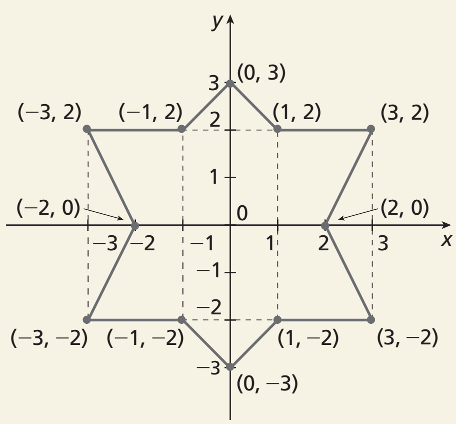
c. Temos $x > 0$ e $y > 0$, pois $x = \frac{\sqrt{7}}{2}$ e $y = \pi$. Então, o ponto $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \pi\right)$ pertence ao 1º quadrante.

d. Temos $x < 0$ e $y > 0$, pois $x = -1$ e $y = 1$. Então, o ponto $(-1, 1)$ pertence ao 2º quadrante.

3. 

Os pontos D, E e F estão alinhados, portanto não são vértices de um triângulo.

4. a. Os pares ordenados associados aos vértices são: (0, 3), (1, 2), (3, 2), (2, 0), (3, −2), (1, −2), (0, −3), (−1, −2), (−3, −2), (−2, 0), (−3, 2) e (−1, 2).



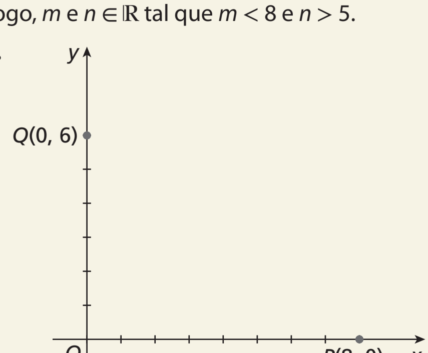
b. Não, nenhum desses vértices pertence a alguma das bissetrizes do plano cartesiano, pois nenhum vértice tem abscissa igual ou oposta à ordenada.

5. Os pontos pertencentes ao 2º quadrante têm coordenadas $x < 0$ e $y > 0$. Então, para obter os valores de m, devemos fazer $m - 8 < 0$ e, para obter os valores de n, devemos fazer $n - 5 > 0$. Assim:

$m - 8 < 0 \Rightarrow m < 8$

$n - 5 > 0 \Rightarrow n > 5$

Logo, m e $n \in \mathbb{R}$ tal que $m < 8$ e $n > 5$.

6. a. 

b. Observando o plano do **item a**, temos: $d_{P,O} = 8$

c. Observando o plano do **item a**, temos: $d_{Q,O} = 6$

d. Espera-se que os estudantes (em duplas) percebam que a medida do segmento de reta determinado pelos pontos P e Q, ou seja, a medida de distância $d_{P,Q}$, é a medida do comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo OPQ. E, por meio da aplicação do teorema de Pitágoras, obtenham a medida de distância $d_{P,Q}$.

e. $(d_{P,Q})^2 = 8^2 + 6^2 = 100$; logo, $d_{P,Q} = -10$ ou $d_{P,Q} = 10$. Como a medida da distância é um valor positivo, $d_{P,Q} = 10$.

f. Como no **item d**, espera-se que os estudantes percebam que os pontos A, B e a origem do plano formam um triângulo retângulo. Assim, utilizando o teorema de Pitágoras, podem obter a seguinte igualdade:

$$d_{A,B} = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

7. a. Pontos da reta vertical que passa pelo ponto (4, 0).

b. Pontos da reta horizontal que passa pelo ponto (0, −3).

c. Pontos da reta horizontal que passa pelo ponto (0, 5).

d. Pontos da reta vertical que passa pelo ponto (−4, 0).

8. a. Temos: $A(2, 1)$ e $B(5, 5)$

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{A,B} = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Logo, a medida da distância entre A e B é igual a 5 u.

b. Temos: $A(0, 0)$ e $B(-1, 3)$

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{A,B} = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Logo, a medida da distância entre A e B é igual a $\sqrt{10}$ u.

c. Temos: $D(-4, -2)$ e $E(0, 7)$

$$d_{D,E} = \sqrt{(x_E - x_D)^2 + (y_E - y_D)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{D,E} = \sqrt{(0+4)^2 + (7+2)^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$$

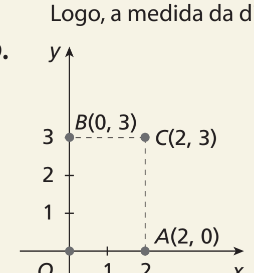
Logo, a medida da distância entre D e E é igual a $\sqrt{97}$ u.

d. Temos: $C(4\sqrt{3}, 5)$ e $B(6\sqrt{3}, 3)$

$$d_{C,B} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{C,B} = \sqrt{(6\sqrt{3} - 4\sqrt{3})^2 + (3-5)^2} = \sqrt{12+4} = 4$$

Logo, a medida da distância entre C e B é igual a 4 u.

9. 

a. $d_{C,O} = \sqrt{(x_C - 0)^2 + (y_C - 0)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow d_{C,O} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Logo, a medida da distância do ponto C à origem é $\sqrt{13}$ u.

b. A medida da distância de um ponto ao eixo das ordenadas é dada pela medida da distância ao ponto do eixo que tem mesma ordenada. Assim:

$$d_{C,B} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{C,B} = \sqrt{(0-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$$

Logo, a medida da distância do ponto C ao eixo das ordenadas é 2 u.

c. A medida da distância de um ponto ao eixo das abscissas é dada pela medida da distância ao ponto do eixo que tem mesma abscissa. Assim:

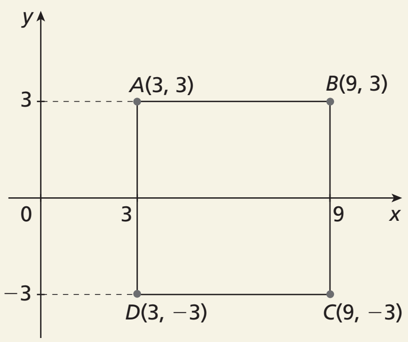
$d_{C,\,A} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_{C,\,A} = \sqrt{(2-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$

Logo, a medida da distância do ponto *C* ao eixo das abscissas é 3 u.

10. A medida da distância entre os pontos corresponde à medida do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo. Assim, a medida dessa distância pode ser calculada usando o teorema de Pitágoras.

11.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$d_{A,\,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{6^2 + 0} = 6$

$d_{B,\,C} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$

$d_{C,\,D} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{6^2 + 0} = 6$

$d_{A,\,D} = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{0 + 6^2} = 6$

As medidas das distâncias são iguais; portanto, *ABCD* é um quadrado.

a. $A_{ABCD} = 6 \cdot 6 = 36$

Portanto, a medida da área desse quadrilátero é 36 u^2.

b. Medida do perímetro: $4 \cdot 6 = 24$

Portanto, a medida do perímetro desse quadrilátero é 24 u.

c. $d^2 = 6^2 + 6^2 = 2 \cdot 6^2 \Rightarrow d = 6\sqrt{2}$

Portanto, a medida de comprimento de sua diagonal é $6\sqrt{2}$ u.

12. Sendo o ponto $P(x_P, y_P)$ equidistante de *A*(6, 8) e de *B*(2, 5) e *P* um ponto no eixo das ordenadas, temos $x_P = 0$. Assim:

$d_{P,\,A} = d_{P,\,B}$

$\sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (6-0)^2 + (8 - y_P)^2 = (2-0)^2 + (5 - y_P)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 36 + 64 - 16y_P + y_P^2 = 4 + 25 - 10y_P + y_P^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6y_P = 71 \Rightarrow y_P = \dfrac{71}{6}$

Logo, $P\left(0, \dfrac{71}{6}\right)$.

13. Para provar que esse triângulo é retângulo, vamos calcular as medidas de comprimento de seus lados e verificar se essas medidas satisfazem o teorema de Pitágoras.

$d_{A,\,B} = \sqrt{(-4+2)^2 + (-1+5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$d_{B,\,C} = \sqrt{(4+4)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$

$d_{A,\,C} = \sqrt{(4+2)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$(d_{A,\,C})^2 = (d_{A,\,B})^2 + (d_{B,\,C})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 100 = 80 + 20$ (sentença verdadeira)

Portanto, o triângulo *ABC* é retângulo.

14. Vamos calcular a medida dos comprimentos dos lados de cada triângulo para verificar se ele é equilátero, escaleno ou isósceles.

a. $d_{A,\,B} = \sqrt{(1-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$d_{A,\,C} = \sqrt{(1-4)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$d_{B,\,C} = \sqrt{(2-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

Dois lados de mesma medida de comprimento.

Logo, esse triângulo é isósceles.

b. $d_{A,\,B} = \sqrt{(7-10)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$d_{A,\,C} = \sqrt{(7-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$

$d_{B,\,C} = \sqrt{(10-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

Três lados de medidas de comprimento diferentes.

Portanto, esse triângulo é escaleno. Temos ainda:

$(\sqrt{18})^2 + (\sqrt{32})^2 = (\sqrt{50})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 18 + 32 = 50$ (sentença verdadeira)

Portanto, esse é um triângulo retângulo.

c. $d_{A,\,B} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$d_{A,\,C} = \sqrt{(0-4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4$

$d_{B,\,C} = \sqrt{(2-4)^2 + (2\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

Três lados de mesma medida de comprimento.

Portanto, esse triângulo é equilátero.

15. Se o triângulo *ABC* é equilátero, então:

$d_{A,\,B} = d_{A,\,C} = d_{B,\,C}$

Fazendo *C*(*a*, *b*), temos:

(I) $d_{A,\,B} = d_{A,\,C}$

$\sqrt{(2-3)^2 + (-5+4)^2} = \sqrt{(2-a)^2 + (-5-b)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 1 = 4 - 4a + a^2 + 25 + 10b + b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + b^2 - 4a + 10b = -27$

(II) $d_{A,\,C} = d_{B,\,C}$

$\sqrt{(2-a)^2 + (-5-b)^2} = \sqrt{(3-a)^2 + (-4-b)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - 4a + \cancel{a^2} + 25 + 10b + \cancel{b^2} =$

$= 9 - 6a + \cancel{a^2} + 16 + 8b + \cancel{b^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -4a + 10b + 6a - 8b = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a + 2b = -4 \Rightarrow b = -2 - a$

Substituindo *b* por $-2 - a$ em (I), obtemos:

$a^2 + (-2-a)^2 - 4a + 10(-2-a) = -27 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + 4 + \cancel{4a} + a^2 - \cancel{4a} - 20 - 10a = -27 \Rightarrow$

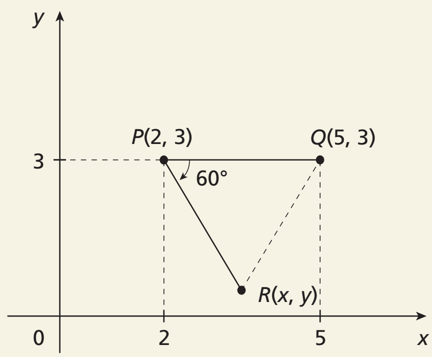
$\Rightarrow 2a^2 - 10a + 11 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \dfrac{10 \pm \sqrt{12}}{4} = \dfrac{10 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{2}$

$b = -2 - \left(\dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{-9 \pm \sqrt{3}}{2}$

Logo: $C\left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-9-\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $C\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-9+\sqrt{3}}{2}\right)$.

16. a.



b. $d_{P,Q} = 3$ e $d_{P,R} = 3$.

Podemos perceber que o segmento $\overline{PR}$ foi obtido pela rotação do segmento $\overline{PQ}$; portanto, os dois segmentos têm a mesma medida de comprimento.

c. Como $m(\hat{P}) = 60°$, e $PR = PQ = 3$, o $\triangle PQR$ é semelhante a outros triângulos equiláteros, pelo caso LAL, e portanto também é um triângulo equilátero.

d. $d_{P,Q} = d_{P,R} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 = \sqrt{(2-x)^2 + (3-y)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - 4x + x^2 + \cancel{9} - 6y + y^2 = \cancel{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ (I)

$d_{P,R} = d_{Q,R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{(5-x)^2 + (3-y)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2-x)^2 + \cancel{(3-y)^2} = (5-x)^2 + \cancel{(3-y)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - 4x + \cancel{x^2} = 25 - 10x + \cancel{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x = 21 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

Substituindo x por $\frac{7}{2}$ em (I), obtemos:

$\frac{49}{4} + y^2 - 14 - 6y + 4 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y + \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow$

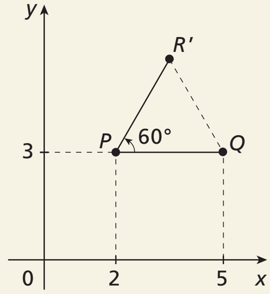
$\Rightarrow y = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{2}$ ou $y = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}$

Sabendo que y é menor que 3, pois a rotação de $\overline{PQ}$ foi no sentido horário, temos: $y = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}$

Logo, as coordenadas de R são:

$\left(\frac{7}{2}, \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}\right)$

e. Na rotação de $\overline{PQ}$ no sentido anti-horário, o segmento obtido, $\overline{PR'}$, terá medida de comprimento 3.



O triângulo PQR' é equilátero.

Podemos concluir que as coordenadas do ponto R' serão $\left(\frac{7}{2}, \frac{6 + 3\sqrt{3}}{2}\right)$, ou seja, o valor de y será o outro valor encontrado no **item d**.

17. Sendo $M(x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ nos casos apresentados, temos:

a. $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4$

$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$

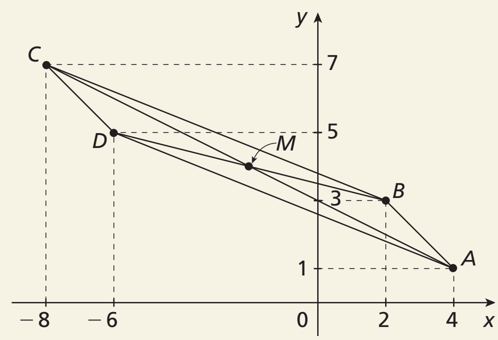
Logo, o ponto médio é $M(4, 3)$.

b. $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3 + (-7)}{2} = -5$

$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4 + 0}{2} = -2$

Logo, o ponto médio é $M(-5, -2)$.

18. Representando o paralelogramo no plano cartesiano, temos:



a. Como M é o ponto médio das diagonais do paralelogramo $ABCD$, temos:

$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{2 + (-6)}{2} = -2$

$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4$

Logo, $M(-2, 4)$.

b. Na resolução do **item a**, obtivemos M sem usar os dados das coordenadas de A e de C; logo, esses dados são desnecessários, e a resposta $M(-2, 4)$ seria a mesma.

Poderíamos também ter empregado as coordenadas de A e de C para obter o mesmo ponto médio M; então, não seriam necessários os dados das coordenadas dos vértices B e D, ou seja, conhecendo A e C, os dados de B e D são desnecessários.

c. Retirada a palavra "consecutivos", $\overline{AD}$ poderia ser um lado ou então uma diagonal do paralelogramo. No caso de ser diagonal, teríamos:

$x_M = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{4 - 6}{2} = -1$

$y_M = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3$

Portanto, o ponto médio seria $M(-1, 3)$, enquanto o novo vértice $C(-4, 3)$ seria um dado desnecessário.

Logo, a resposta do **item a** não seria a mesma.

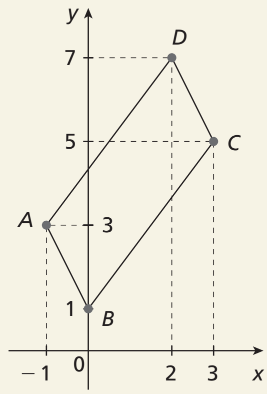
19. a. M é ponto de intersecção das diagonais do paralelogramo $ABCD$, então M é ponto médio de $\overline{AC}$ e de $\overline{BD}$. Assim:

$$\left(\frac{-1 + x_C}{2}, \frac{3 + y_C}{2}\right) = (1, 4) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1 + x_C}{2} = 1 \\ \frac{3 + y_C}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 5 \end{cases}$$

$$\left(\frac{0 + x_D}{2}, \frac{1 + y_D}{2}\right) = (1, 4) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_D}{2} = 1 \\ \frac{1 + y_D}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 7 \end{cases}$$

As coordenadas dos vértices C e D são (3, 5) e (2, 7), respectivamente.



b. Vamos agora calcular a medida do perímetro do paralelogramo:

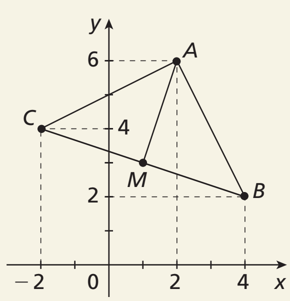
$d_{A,B} = d_{D,C} = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$d_{A,D} = d_{B,C} = \sqrt{(0-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

Medida do perímetro: $5 + 5 + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 10 + 2\sqrt{5}$

Portanto, a medida do perímetro do paralelogramo é $\left(10 + 2\sqrt{5}\right)$ u.

20.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Calculando suas coordenadas, temos:

$x_M = \dfrac{-2+4}{2} = 1$

$y_M = \dfrac{4+2}{2} = 3$

Assim, temos: $M(1, 3)$

$d_{A,M} = \sqrt{(2-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

Portanto, a medida do comprimento da mediana é $\sqrt{10}$ u.

21. Considerando os pontos A, B e C vértices do triângulo, temos:

- $P(-1, 4)$ como ponto médio de $\overline{AB}$; então:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = -1 \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = -2 & \text{(I)} \\ y_A + y_B = 8 & \text{(II)} \end{cases}$$

- $Q(2, -1)$ como ponto médio de $\overline{AC}$; então:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_C}{2} = 2 \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 4 & \text{(III)} \\ y_A + y_C = -2 & \text{(IV)} \end{cases}$$

- $R(-2, 2)$ como ponto médio de $\overline{BC}$; então:

$$\begin{cases} \dfrac{x_B + x_C}{2} = -2 \\ \dfrac{y_B + y_C}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B + x_C = -4 & \text{(V)} \\ y_B + y_C = 4 & \text{(VI)} \end{cases}$$

De (III) e de (V), temos: $x_A = 4 - x_C$ e $x_B = -4 - x_C$

Substituindo esses valores em (I), obtemos:

$\cancel{4} - x_C - \cancel{4} - x_C = -2 \Rightarrow -2x_C = -2 \Rightarrow x_C = 1$

Então: $x_A = 3$ e $x_B = -5$.

De (IV) e de (VI), temos: $y_A = -2 - y_C$ e $y_B = 4 - y_C$.

Substituindo esses valores em (II), obtemos:

$-2 - y_C + 4 - y_C = 8 \Rightarrow -2y_C = 6 \Rightarrow y_C = -3$

Então: $y_A = 1$ e $y_B = 7$.

Portanto: $A(3, 1)$, $B(-5, 7)$ e $C(1, -3)$.

22. Resposta pessoal.

23. **a.** Vamos calcular o determinante da matriz D:

$$\det D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 3 + 6 - 5 + 6 + 6 = 0$$

Como $\det D = 0$, os pontos são colineares.

b. Vamos calcular o determinante da matriz D:

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 - 3 - 12 + 1 - 6 = -10$$

Como $\det D \neq 0$, os pontos não são colineares.

24. Para que exista o triângulo ABC, os pontos A, B e C não podem ser colineares.

Assim:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -3x - x - 1 + 2x + 3x + 3 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

Logo, o triângulo ABC existe para $x \neq -2$.

25. Vamos calcular o determinante da matriz D:

$$\det D = \begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4m + 10 - 12 + 5 - 2m = 6 - 6m$$

a. Para que os pontos $A(-1, m)$, $B(2, -3)$ e $C(-4, 5)$ sejam colineares, devemos ter $\det D = 0$. Assim:

$6 - 6m = 0 \Rightarrow 6m = 6 \Rightarrow m = 1$

b. Para que eles sejam vértices de um triângulo, devemos ter $\det D \neq 0$. Assim:

$6 - 6m \neq 0 \Rightarrow 6m \neq 6 \Rightarrow m \neq 1$

26. Os pontos que estão alinhados com os pontos $A(1, 4)$ e $B(0, 3)$ têm coordenadas (x, y) tais que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x - y + 3 + 4x = 0 \Rightarrow x = y - 3$$

Assim, há infinitos pontos alinhados com os pontos A e B. Todos esses pontos podem ser representados pelo par ordenado $(y - 3, y)$.

Por exemplo:

- Para $y = 2$, temos o ponto $P(-1, 2)$.
- Para $y = 5$, temos o ponto $Q(2, 5)$.

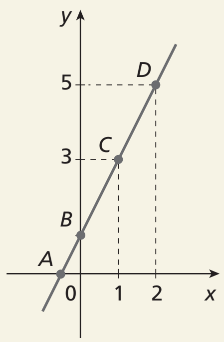
27. Para que $P(x, y)$ esteja alinhado com $A(2, 3)$ e $B(5, 4)$, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 5y + 8 - 15 - 4x - 2y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -x + 3y - 7 = 0 \Rightarrow x - 3y + 7 = 0$

Logo, a relação é $x - 3y + 7 = 0$.

28.



- Se A pertence ao eixo das abscissas, então $y_A = 0$; assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ x_A & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x_A - 1 = 0 \Rightarrow x_A = -\frac{1}{2}$$

Portanto: $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

- Se B pertence ao eixo das ordenadas, então $x_B = 0$; assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_B - 1 = 0 \Rightarrow y_B = 1$$

Portanto: $B(0, 1)$

29. a. Se $P(x, y)$ é a intersecção das duas estradas, então P está alinhado com A e B e com C e D. Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - y + 2 = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

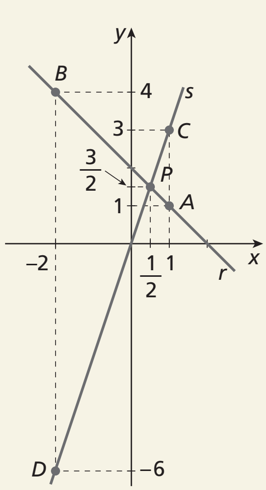
$$-x - 3x + 2 = 0 \Rightarrow -4x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

E assim: $y = \frac{3}{2}$

Logo, $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

b. O ponto P pode ser determinado impondo a condição de alinhamento de três pontos para P, A e B e para P, C e D.

c.



30. Como $P(x_P, y_P)$ está alinhado com os pontos $A(5, 3)$ e $B(-2, 1)$, temos:

$$\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x_P - 7y_P + 11 = 0$$

a. Para que P pertença ao eixo x, devemos ter $y_P = 0$; então:

$$2x_P - 7 \cdot 0 + 11 = 0 \Rightarrow x_P = -\frac{11}{2}$$

Assim, teríamos $P\left(-\frac{11}{2}, 0\right)$.

b. Para que P pertença ao eixo y, devemos ter $x_P = 0$; então:

$$2 \cdot 0 - 7y_P + 11 = 0 \Rightarrow y_P = \frac{11}{7}$$

Assim, teríamos $P\left(0, \frac{11}{7}\right)$.

c. Para que P pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares, devemos ter $x_P = y_P$; então:

$$2x_P - 7x_P + 11 = 0 \Rightarrow x_P = y_P = \frac{11}{5}$$

Assim, teríamos $P\left(\frac{11}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

d. Para que P pertença à bissetriz dos quadrantes pares, devemos ter $x_P = -y_P$; então:

$$2 \cdot (-y_P) - 7y_P + 11 = 0 \Rightarrow y_P = \frac{11}{9} \text{ e } x_P = -\frac{11}{9}$$

Assim, teríamos $P\left(-\frac{11}{9}, \frac{11}{9}\right)$.

e. Para que $y_P = 2x_P$; então:

$$2x_P - 7 \cdot 2x_P + 11 = 0 \Rightarrow x_P = \frac{11}{12} \text{ e } y_P = \frac{11}{6}$$

Assim, teríamos $P\left(\frac{11}{12}, \frac{11}{6}\right)$.

31. Como a primeira saída do condicional apresentado no algoritmo é para o caso em que det $D = 0$, então a frase que completa o penúltimo **diga** é "Os pontos A, B e C estão alinhados". Assim, a frase que completa o último comando **diga** deve ser "Os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo".

32. $s: x - y + 2 = 0$

a. $2 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow 1 = 0$ (sentença falsa)

Portanto, $A(2, 3)$ não pertence à reta s.

b. $1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (sentença verdadeira)

Portanto, $B(1, 3)$ pertence à reta s.

33. a. $\begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 - 20 + 4 + 6 - 20 = -40$

Como $-40 \neq 0$, A, B e C não são colineares.

b. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{2} + 10 - \frac{15}{2} - 5 = 12{,}5 - 12{,}5 = 0$

Como o determinante é igual a zero, os pontos A, B e C são colineares.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + y - 5 - 3y = 0 \Rightarrow 5x - 2y - 5 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(3, 5)$, $B(1, 0)$ e $C\left(2, \frac{5}{2}\right)$ é:

$5x - 2y - 5 = 0$

34. Para que $C(1, m)$ pertença à reta que passa pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 4)$, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4 + 2 + 3m - 4 + m - 6 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4m - 12 = 0 \Rightarrow m = 3$

Logo, para os pontos A, B e C serem colineares, devemos ter $m = 3$.

35. O ponto P, em que a reta de equação

$x + 3y + 1 = 0$ intercepta o eixo x, tem $y = 0$.

Assim: $x + 3 \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Logo, $P(-1, 0)$.

O ponto Q, em que a reta de equação

$x + 3y + 1 = 0$ intercepta o eixo y, tem $x = 0$.

Assim: $0 + 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

Logo, $Q\left(0, -\frac{1}{3}\right)$.

Portanto, os pontos de intersecção são $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ e $(-1, 0)$.

36. **a.** $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 17 = 0$

b. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 3y - 11 = 0$

c. $\begin{cases} 4x + 3y - 17 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 17 = 0 \\ \underline{-x - 3y + 11 = 0} \end{cases}$

$3x + 0y - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$

Substituindo x por 2 em uma das equações, obtemos:

$2 + 3y - 11 = 0 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$

Logo, o ponto de intersecção é o ponto $(2, 3)$.

Veja que $(2, 3)$ são as coordenadas dos pontos A e D, ou seja, mesmo antes de resolver o sistema formado pelas equações das retas, já poderíamos afirmar que o ponto $(2, 3)$ é a intersecção.

37. Os vértices do triângulo ABC são $A(-4, 5)$, $B(0, -3)$ e $C(4, 3)$.

a. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x + 4y + 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + y + 3 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6x + 4y + 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 2y - 6 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 8y - 32 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 4y - 16 = 0$

b. Considerando o ponto médio M de $\overline{AB}$, N de $\overline{BC}$ e P de $\overline{AC}$, temos:

M: $\left(\frac{-4 + 0}{2}, \frac{5 - 3}{2}\right) = (-2, 1)$

N: $\left(\frac{0 + 4}{2}, \frac{-3 + 3}{2}\right) = (2, 0)$

P: $\left(\frac{-4 + 4}{2}, \frac{5 + 3}{2}\right) = (0, 4)$

Vamos determinar as equações das retas suportes das medianas.

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + 6y - 10 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -7x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 3y + 5 = 0$

c. Vamos determinar as equações das retas suportes de $\overline{MN}$, $\overline{NP}$ e $\overline{MP}$.

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 4y - 2 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x - 2y + 8 = 0 \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 8 = 0$

38. **a.** $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 2}{-1 - (-1)} = \frac{3}{-1 + 1} = \frac{3}{0}$ (indefinida)

Portanto, não existe o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(-1, 5)$.

b. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 0}{4 - 3} = \frac{0}{1} = 0$

c. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 2}{-2 - 1} = \frac{-3}{-3} = 1$

d. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - \left(-\frac{1}{7}\right)}{0 - \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{14}$

39. O coeficiente angular é: $m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

A reta procurada tem coeficiente angular $m = \sqrt{3}$ e passa pelo ponto $A(1, -6)$.

Assim:

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - (-6) = \sqrt{3}(x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3}x - y - 6 - \sqrt{3} = 0$

Portanto, $\sqrt{3}x - y - 6 - \sqrt{3} = 0$ é a equação geral da reta r.

40. **a.** O coeficiente angular é:

$m = \text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

A reta tem coeficiente angular $m = -\sqrt{3}$ e passa pelo ponto $(5, 0)$. Assim:

$y - 0 = -\sqrt{3} \cdot (x - 5) \Rightarrow \sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$

Logo, a equação geral da reta r é:

$\sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$

b. O coeficiente angular é:

$m = \text{tg } 45° = 1$

A reta tem coeficiente angular $m = 1$ e passa pelo ponto $(-3, 0)$. Assim:

$y - 0 = 1 \cdot (x + 3) \Rightarrow x - y + 3 = 0$

Logo, a equação geral da reta s é:

$x - y + 3 = 0$

41. Sim. Espera-se que os estudantes percebam que, conhecendo o coeficiente angular da reta, é possível obter sua equação a partir de qualquer um de seus pontos.

42. Vamos determinar a equação da reta do gráfico.

$m = \frac{40 - 30}{20 - 0} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 30 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2y + 60 = 0$

a. Quando a medida da temperatura for 70 °C, vamos ter $x = 70$.

Assim:

$70 - 2y + 60 = 0 \Rightarrow 2y = 130 \Rightarrow y = 65$

Logo, a medida da temperatura indicada pelo termômetro com escala H será 65 °H.

b. Fazendo $x = y = t$, obtemos:

$t - 2t + 60 = 0 \Rightarrow t = 60$

Logo, o valor 60 coincide nas duas escalas:

60 °C = 60 °H

43. a. $\sqrt{3}x - 5y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{5}x + \frac{2}{5}$

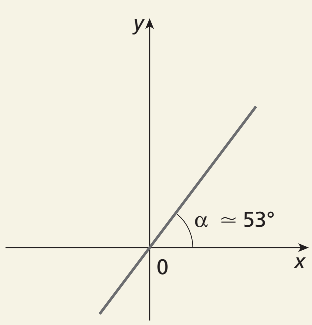
Logo: $m = \frac{\sqrt{3}}{5}$ e $n = \frac{2}{5}$.

b. $-\frac{1}{2}x + \sqrt{2}y - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{16}$

Logo: $m = \frac{\sqrt{2}}{4}$ e $n = \frac{\sqrt{2}}{16}$.

44. Como 30% = 0,3, temos:

$y = x + 0{,}3x \Rightarrow y = 1{,}3x$



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, a função $y = 1{,}3x$ representa uma reta de coeficiente linear 0, ou seja, sua intersecção com o eixo y é o ponto (0, 0) e seu coeficiente angular é 1,3.

Assim: $m = 1{,}3$

$\text{tg } \alpha = 1{,}3 \Rightarrow \alpha \cong 53°$

45. A reta r tem coeficiente angular $m_r = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$ e passa pelo ponto (0, −2); então:

$r: y + 2 = \sqrt{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 2$

A reta s tem coeficiente angular $m_s = \text{tg } 135° = -1$ e passa pelo ponto (0, 4); então:

$s: y - 4 = (-1) \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -x + 4$

Logo, as equações reduzidas das retas r e s são $y = \sqrt{3}x - 2$ e $y = -x + 4$, respectivamente.

46. a. $r: x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -x + 3$

$m_r = -1$ e $n_r = 3$

$s: x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1$

$m_s = 1$ e $n_s = 1$

$m_r \neq m_s$; logo: r e s são concorrentes.

$m_r \cdot m_s = (-1) \cdot 1 = -1$; logo: r e s são perpendiculares.

Portanto, r e s são concorrentes perpendiculares.

b. $r: 3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

$m_r = \frac{3}{2}$ e $n_r = \frac{1}{2}$

$s: y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

$m_s = -\frac{1}{2}$ e $n_s = -\frac{3}{2}$

$m_r \neq m_s$ e $m_r \cdot m_s = -\frac{3}{4}$

Portanto, r e s são retas concorrentes.

c. $r: y = 2 + x$

$m_r = 1$ e $n_r = 2$

$s: -x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = x + 3$

$m_s = 1$ e $n_s = 3$

$m_r = m_s = 1$ e $n_r \neq n_s$

Portanto, r e s são retas paralelas distintas.

d. $r: 2x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2x + 2$

$m_r = 2$ e $n_r = 2$

$s: x - \frac{1}{2}y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 2$

$m_s = 2$ e $n_s = 2$

$m_r = m_s$ e $n_r = n_s$

Logo, r e s são retas paralelas coincidentes.

47. a. $r: 2x - 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

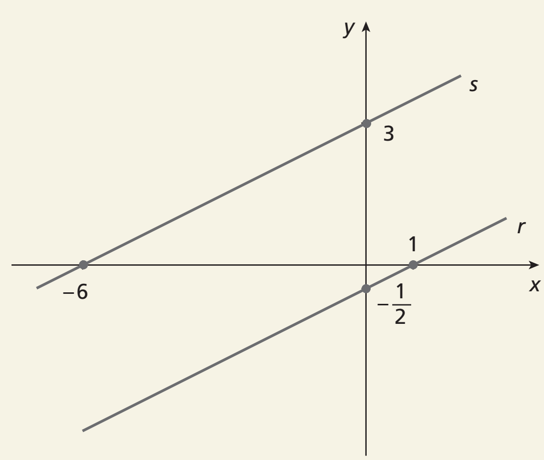
$s: y = \frac{1}{2}x + 3$

Pontos da função *r*

x	y
0	$-\frac{1}{2}$
1	0

Pontos da função *s*

x	y
0	3
−6	0



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

b. Observando a representação no **item a**, nota-se que r e s são retas paralelas distintas.

c. $\left.\begin{array}{l} m_r = \frac{1}{2} \text{ e } n_r = -\frac{1}{2} \\ m_s = \frac{1}{2} \text{ e } n_s = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s$

Portanto, r e s são paralelas distintas.

48. **a.** Como a reta r é paralela à reta de equação $5x - y + 2 = 0$, então $m_r = 5$.

Como r passa pelo ponto (0, 0), então:

$y - 0 = 5 \cdot (x - 0) \Rightarrow 5x - y = 0$

Logo, a equação geral da reta r é $5x - y = 0$.

b. s: $5x + y + 2 = 0 \Rightarrow y = -5x - 2$

$m_s = -5$

$r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_r = \frac{1}{5}$

Como r passa pelo ponto (0, 0), então:

$y - y_0 = m_r(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{5}(x - 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{1}{5}x \Rightarrow x - 5y = 0$

Portanto, a equação geral da reta r é $x - 5y = 0$.

49. Como r e s são perpendiculares, temos:

$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow 3 \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{3}$

Como a reta s passa pelo ponto P, temos:

$y - 1 = -\frac{1}{3} \cdot (x + 3) \Rightarrow 3(y - 1) = -(x + 3) \Rightarrow x + 3y = 0$

Logo, a equação da reta s é $x + 3y = 0$.

50. $r: 4x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + \frac{1}{2}$

$m_r = 2$

t: $2x - y + 3 = 0$

Na intersecção de t com o eixo das ordenadas, temos $x = 0$. Assim:

$2 \cdot 0 - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

Logo, o ponto (0, 3) é a intersecção de t com o eixo y.

Queremos a equação da reta que tem coeficiente angular 2 e passa pelo ponto (0, 3). Então:

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 3$

51. **a.** Seja P o ponto médio de $\overline{AB}$; então:

P: $\left(\frac{-5-1}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (-3, 1)$

$m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{3+1}{-1+5} = \frac{4}{4} = 1$

s é a reta mediatriz do lado $\overline{AB}$; então:

$m_s \cdot m_{\overleftrightarrow{AB}} = -1 \Rightarrow m_s = -1$

s: $y - y_0 = m_s(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -1(x + 3) \Rightarrow y = -x - 2$

Seja Q o ponto médio de $\overline{BC}$; então:

Q: $\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{3-3}{2}\right) = (0, 0)$

$m_{\overleftrightarrow{BC}} = \frac{6}{-2} = -3$

r é a reta mediatriz do lado $\overline{BC}$; então:

$m_r \cdot m_{\overleftrightarrow{BC}} = -1 \Rightarrow m_r = \frac{1}{3}$

$r: y - y_0 = m_r(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x$

Seja S o ponto médio de $\overline{AC}$; então:

S: $\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{-1-3}{2}\right) = (-2, -2)$

$m_{\overleftrightarrow{AC}} = \frac{-1+3}{-5-1} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$

t é a reta mediatriz do lado $\overline{AC}$; então:

$m_t \cdot m_{\overleftrightarrow{BC}} = -1 \Rightarrow m_t = 3$

t: $y - y_0 = m_t(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = 3(x + 2) \Rightarrow y = 3x + 4$

b. As equações reduzidas das mediatrizes dos lados desse triângulo são:

s: $y = -x - 2$

r: $y = \frac{1}{3}x$

t: $y = 3x + 4$

Substituindo y por $\frac{1}{3}x$ na equação da reta t, obtemos:

$\frac{1}{3}x = 3x + 4 \Rightarrow \frac{9-1}{3}x = -4 \Rightarrow \frac{8}{3}x = -4 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Assim: $y = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

Portanto: $O\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

52. **a.** Temos: $A(1, 1)$, $B(5, -1)$, $C(x_C, y_C)$ e $D(2, 3)$.

Para determinar as coordenadas do ponto C, vamos determinar o ponto de intersecção das retas suportes de $\overline{CD}$ e de $\overline{BC}$, que é o ponto C.

$m_{\overleftrightarrow{AD}} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AD}} = 2 \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{BC}} = 2$

A reta $\overleftrightarrow{BC}$ passa pelo ponto $(5, -1)$; então:

$\overleftrightarrow{BC}$: $y + 1 = 2(x - 5) \Rightarrow y = 2x - 11$ (I)

$m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{1+1}{1-5} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AB}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{CD}} = -\frac{1}{2}$

A reta $\overleftrightarrow{CD}$ passa pelo ponto (2, 3); então:

$\overleftrightarrow{CD}$: $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$2x - 11 = -\frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow x = 6$

Substituindo x por 6 em (I), obtemos:

$y = 2 \cdot 6 - 11 \Rightarrow y = 1$

Portanto: $C(6, 1)$

b. Como y_A e y_C são iguais, a reta suporte da diagonal $\overline{CA}$ é paralela ao eixo x; logo, seu coeficiente angular é 0, ou seja, $m_{\overleftrightarrow{CA}} = 0$.

$\overleftrightarrow{CA}$: $y - 1 = 0(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 0$

Logo, a equação da reta suporte da diagonal $\overline{CA}$ é $y - 1 = 0$.

$m_{\overleftrightarrow{BD}} = \frac{-1-3}{5-2} = -\frac{4}{3}$

$\overleftrightarrow{BD}$: $y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 2) \Rightarrow 4x + 3y - 17 = 0$

Logo, a equação da reta suporte da diagonal $\overline{BD}$ é $4x + 3y - 17 = 0$.

c. $A = AB \cdot BC = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} \cdot \sqrt{(6-5)^2 + (1+1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \sqrt{16+4} \cdot \sqrt{1+4} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 10$

Logo, a medida da área do retângulo é 10 u^2.

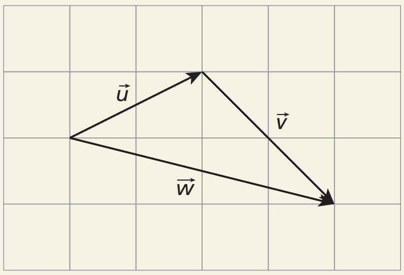
d. $P = 2 \cdot BC + 2 \cdot AB = 2(BC + AB) \Rightarrow$

$\Rightarrow P = 2\left(\sqrt{20} + \sqrt{5}\right) = 2\left(2\sqrt{5} + \sqrt{5}\right) = 2 \cdot 3\sqrt{5} \Rightarrow$

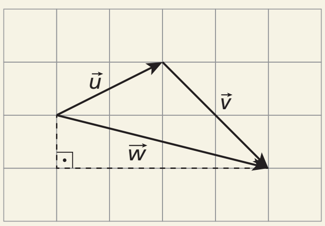
$\Rightarrow P = 6\sqrt{5}$

Logo, a medida do perímetro do retângulo é $6\sqrt{5}$ u.

53. a. Para determinar o vetor $\vec{w}$ que será o vetor soma, deslocamos o vetor $\vec{u}$ de modo que ele tenha sua extremidade na origem do vetor $\vec{v}$. Assim, o vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ terá origem coincidente com a origem do vetor $\vec{u}$ e a extremidade coincidente com a extremidade do vetor $\vec{v}$.



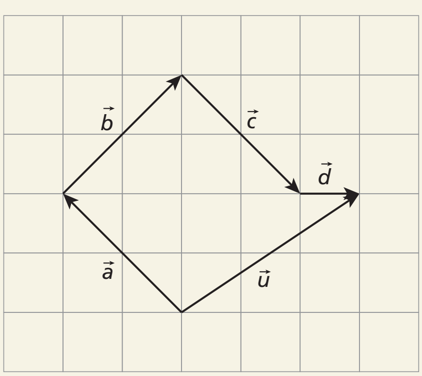
O módulo de $\vec{w}$ pode ser calculado com o teorema de Pitágoras, conforme a indicação na figura a seguir.



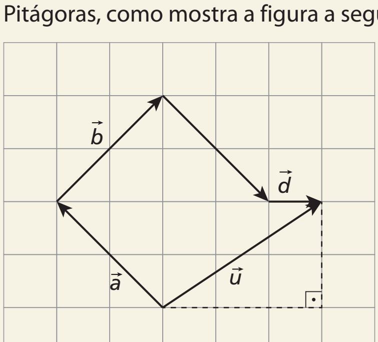
$w^2 = 1^2 + 4^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow w^2 = 1 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow w^2 = 17 \Rightarrow$
$\Rightarrow w = \sqrt{17}$

Portanto, o módulo do vetor soma é $\sqrt{17}$ u.

b. Para determinar o vetor $\vec{u}$ que será o vetor soma, deslocamos os vetores formando uma poligonal de modo que a extremidade de um vetor coincida com a origem do outro. O vetor $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ deve ter sua origem coincidente com a origem da poligonal e sua extremidade coincidente com a extremidade da poligonal, conforme a figura a seguir.



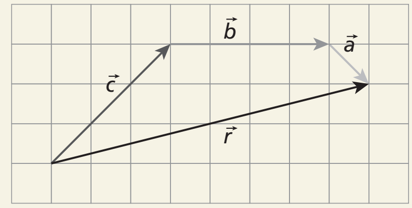
O módulo de $\vec{u}$ pode ser calculado com o teorema de Pitágoras, como mostra a figura a seguir.

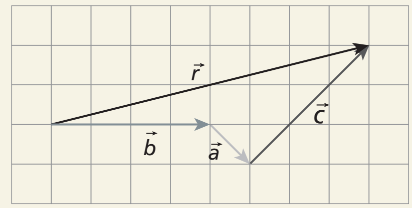


$u^2 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow u^2 = 4 + 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow u^2 = 13 \Rightarrow$
$\Rightarrow u = \sqrt{13}$

Portanto, o módulo do vetor soma é $\sqrt{13}$ u.

54. Como pode ser verificado nas situações a seguir, poderíamos deslocar os outros vetores e o resultado seria o mesmo.





55. a. Se a origem de $\vec{a}$ coincidisse com a origem do plano, sua extremidade estaria em (1, –1). Como a origem de $\vec{b}$ estaria na extremidade de $\vec{a}$, e o vetor é paralelo ao eixo das abscissas com módulo igual a 4, sua extremidade seria (5, –1). O vetor $\vec{c}$ acrescentaria três unidades aos valores das abscissas e das ordenadas e, assim, teria como extremidade o ponto (8, 2).

b. Espera-se que os estudantes respondam que calculariam a medida da distância entre os pontos (0, 0) e (8, 2), assim obtendo: $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(8-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{17}$

56. $d_{O,r} = \dfrac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|-4|}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5}$

Portanto, a medida da distância da reta de equação $3x + 4y - 4 = 0$ à origem do plano cartesiano é $\frac{4}{5}$ u.

57. Vamos determinar a equação da reta suporte do lado $\overline{BC}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 3y - 6 = 0$$

A medida da altura procurada é a medida da distância entre o ponto $A(2, 0)$ e a reta $\overleftrightarrow{BC}$.

$$d_{A,\overleftrightarrow{BC}} = \frac{|1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-6)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{A,\overleftrightarrow{BC}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Portanto, a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$ é $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ u.

58. Chamemos de r a reta de equação $2x - 3y + 5 = 0$ e de s a reta de equação $4x - 6y - 1 = 0$.

Vamos calcular as coordenadas de um ponto P qualquer da reta r.

Para $x = 2$, temos: $2 \cdot 2 - 3y + 5 = 0 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$

Assim, tomamos o ponto $P(2, 3)$.

Agora, basta calcular a medida da distância entre P e a reta s.

$$d_{r,s} = d_{P,s} = \frac{|4 \cdot 2 - 6 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{52}} = \frac{11\sqrt{52}}{52} = \frac{11\sqrt{13}}{26}$$

Portanto, a medida da distância entre as retas r e s é $\frac{11\sqrt{13}}{26}$ u.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

59. **a.** $A(-1, 2)$

$m_r = \text{tg } 45° = 1$ e r passa por $B(2, 0)$

$r: y - y_0 = m_r(x - x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 0 = 1(x - 2) \Rightarrow x - y - 2 = 0$

b. Como A é vértice do quadrado e r é reta suporte de um dos lados do quadrado, a medida do comprimento ℓ do seu lado é:

$$\ell = d_{A,\,r} = \frac{|-1 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $\ell = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ u.

c. $d = \ell\sqrt{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 5$

Portanto, a medida do comprimento da diagonal desse quadrado é 5 u.

d. Medida da área: $\ell^2 = \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{2}$

Medida do perímetro: $= 4 \cdot \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

Portanto, a medida da área é $\dfrac{25}{2}$ u^2, e a medida do perímetro é $10\sqrt{2}$ u.

60. • Vamos considerar um ponto $P(x, y)$ equidistante das retas r e s.

• $d_{P,\,r} = d_{P,\,s} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|\,2x + 5y - 4\,|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{|\,5x - 2y + 8\,|}{\sqrt{5^2 + 2^2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |\,2x + 5y - 4\,| = |\,5x - 2y + 8\,|$

• Então:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 4 = 5x - 2y + 8 \Rightarrow 3x - 7y + 12 = 0 \\ \text{ou} \\ 2x + 5y - 4 = -(5x - 2y + 8) \Rightarrow 7x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$$

61. Do gráfico, temos que os pontos B e C são os pontos de intersecção do gráfico da função $f(x) = -2x + 6$ com os eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente. Assim, temos $B(x_B, 0)$ e $C(0, y_C)$; logo:

$-2x_B + 6 = 0 \Rightarrow x_B = 3$

$y_C = -2 \cdot 0 + 6 \Rightarrow y_C = 6$

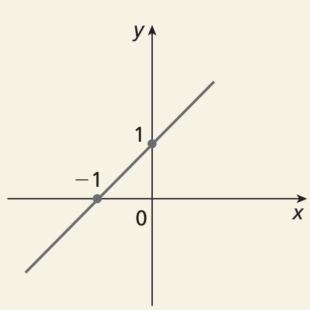
Assim, $B(3, 0)$ e $C(0, 6)$, e então:

$d_{B,\,C} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Alternativa **b**.

62. Resposta pessoal.

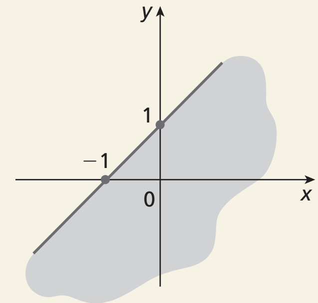
63. **a.** A reta $x - y + 1 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos.



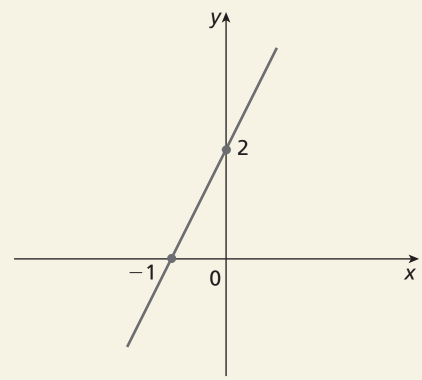
Testando o ponto auxiliar $P(0, 0)$, temos:

$x - y + 1 \geqslant 0 \Rightarrow 0 - 0 + 1 \geqslant 0$ (sentença verdadeira)

Portanto, podemos representar graficamente a inequação $x - y + 1 \geqslant 0$:



b. A reta $2x - y + 2 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos.

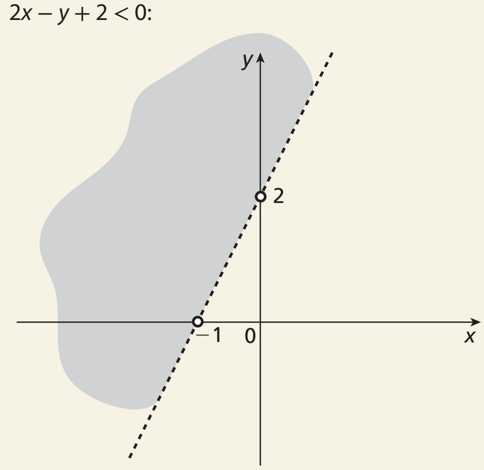


Testando o ponto auxiliar $P(0, 0)$, temos:

$2x - y + 2 < 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 - 0 + 2 < 0$ (sentença falsa)

Portanto, P não pertence ao semiplano que representa $2x - y + 2 < 0$.

Assim, podemos representar graficamente a inequação $2x - y + 2 < 0$:



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

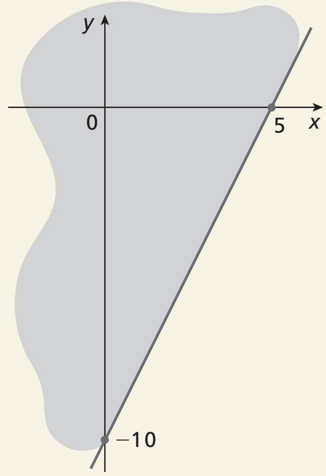
64. Vamos escrever a equação da reta que delimita o semiplano. Ela passa pelos pontos (0, 3) e (2, 0):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$$

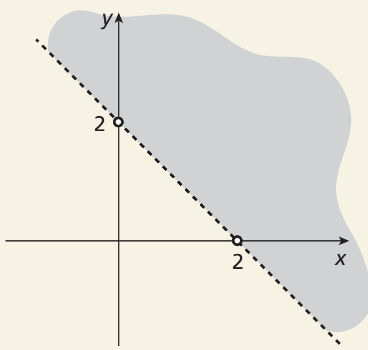
Da representação gráfica no enunciado, percebemos que o ponto (0, 0) pertence à solução da inequação. Como $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 = -6 \leqslant 0$, temos que a inequação deve ser $3x + 2y - 6 \leqslant 0$.

65. Primeiro, vamos representar graficamente as inequações:

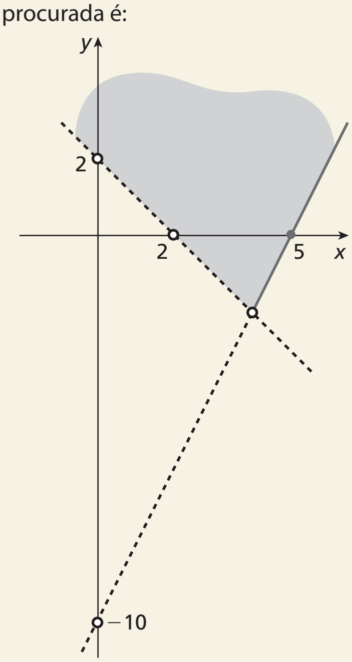
$2x - y - 10 \leqslant 0$



$x + y - 2 > 0$



A região procurada é:



66. **a.** $30x + 70y = 4.200$

Para $x = y$, temos:

$30x + 70x = 4.200 \Rightarrow 100x = 4.200 \Rightarrow$

$x = 42 \Rightarrow y = 42$

Portanto, são confeccionadas 84 calças por dia.

b. Não, pois x e y representam a quantidade de calças dos tipos A e B, respectivamente, produzidas diariamente; portanto, x e y são números naturais.

c. $30x + 70y = 6.300$

O valor máximo para x será quando $y = 0$; então:

$30x = 6.300 \Rightarrow x = 210$

O valor máximo para y será quando $x = 0$; então:

$70y = 6.300 \Rightarrow y = 90$

d. $p \leqslant 6.300 \Rightarrow 30x + 70y \leqslant 6.300 \Rightarrow$

$\Rightarrow 30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$, com $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$

Não, pois, como o problema só faz sentido para $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$, a representação gráfica da inequação é um conjunto finito de pontos do semiplano $30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$.

67. A área do quadrilátero *ABCD* pode ser calculada pela soma das áreas dos triângulos *ABC* e *CDA*. Então:

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 35 - 20 = 23$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\left| D_{ABC} \right| = \frac{1}{2}\left| 23 \right| = \frac{23}{2}$$

$$D_{CDA} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 4 - 5 = 11$$

$$A_{CDA} = \frac{1}{2}\left| D_{CDA} \right| = \frac{1}{2}\left| 11 \right| = \frac{11}{2}$$

$$A_{\text{quadrilátero}} = A_{ABC} + A_{CDA} = \frac{23}{2} + \frac{11}{2} = 17$$

Logo, a medida da área do quadrilátero é 17 u^2.

68. **a.** Do gráfico no enunciado, percebemos que os pontos *A* e *B* são os pontos em que as retas s e r interceptam o eixo *y*, respectivamente, enquanto os pontos *C* e *D* são os pontos em que as retas interceptam o eixo *x*. Assim, $x_A = x_B = 0$ e $y_C = y_D = 0$, e calculamos:

$x = 0$

r: $y_B = -3 \cdot 0 + 6 = 6 \Rightarrow B(0, 6)$

s: $y_A = -\dfrac{0}{2} + 2 = 2 \Rightarrow A(0, 2)$

$y = 0$

r: $0 = -3 \cdot x_C + 6 \Rightarrow x_C = \dfrac{6}{3} = 2 \Rightarrow C(2, 0)$

s: $0 = -\dfrac{x_D}{2} + 2 \Rightarrow x_D = 4 \Rightarrow D(4, 0)$

b. Em *Q*, devemos ter:

$-3x + 6 = -\dfrac{x}{2} + 2$

$\dfrac{5x}{2} = 4 \Rightarrow x = \dfrac{8}{5}$

$y = -3 \cdot \dfrac{8}{5} + 6 = \dfrac{-24 + 30}{5} = \dfrac{6}{5}$

Portanto: $Q\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$

c. A medida da área da figura azul é dada pela soma das medidas das áreas dos triângulos *BAQ* e *CDQ*. Então:

$$D_{BAQ} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{vmatrix} = \frac{32}{5}$$

$$A_{BAQ} = \frac{1}{2}\left|D_{BAQ}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{32}{5}\right| = \frac{16}{5}$$

$$D_{CDQ} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{vmatrix} = \frac{12}{5}$$

$$A_{CDQ} = \frac{1}{2}\left|D_{CDQ}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{12}{5}\right| = \frac{6}{5}$$

$$A_{\text{figura}} = A_{BAQ} + A_{CDQ} = \frac{16}{5} + \frac{6}{5} = \frac{22}{5}$$

Portanto, a medida da área da figura azul é $\frac{22}{5}$ u^2.

d. $A_{OAQC} = A_{OAQ} + A_{QCO} = \frac{1}{2} \cdot \left(|D_{OAQ}| + |D_{QCO}|\right)$

$$D_{OAQ} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{16}{5} \Rightarrow |D_{OAQ}| = \frac{16}{5}$$

$$D_{QCO} = \begin{vmatrix} \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{12}{5} \Rightarrow |D_{QCO}| = \frac{12}{5}$$

Assim:

$$A_{OAQC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{5} + \frac{12}{5}\right) = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$$

Portanto, a medida da área do quadrilátero *OAQC* é $\frac{14}{5}$ u^2.

e. Vamos obter a medida da área do polígono *OBQD* somando as medidas das áreas do quadrilátero *OAQC* e da figura azul, calculada no **item c**.

$$A_{OBQD} = A_{\text{figura}} + A_{OAQC} = \frac{22}{5} + \frac{14}{5} = \frac{36}{5}$$

Logo, a medida da área do polígono *OBQD* é $\frac{36}{5}$ u^2.

69. Se *C* pertence à equação $2x + y - 1 = 0$, devemos ter: $y_C = -2x_C + 1$; então:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_C + y_C$$

Assim:

$$6 = \frac{1}{2} \cdot |D| \Rightarrow 12 = |x_C + y_C| \Rightarrow 12 = |x_C + (-2x_C + 1)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 = |-x_C + 1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_C + 1 = 12 \\ \text{ou} \\ -x_C + 1 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = -11 \text{ e } y_C = 23 \\ \text{ou} \\ x_C = 13 \text{ e } y_C = -25 \end{cases}$$

Portanto: $C(-11, 23)$ ou $C(13, -25)$.

70. Resposta pessoal.

71. Comparando a equação dada em cada item com a equação reduzida da circunferência, temos:

a. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$

Como $a = 1$ e $b = 2$, então $C(1, 2)$.

Como $r^2 = 100$, então $r = 10$.

Portanto, o centro é $C(1, 2)$ e a medida do comprimento do raio é $r = 10$.

b. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$x^2 + (y - 3)^2 = 5$

Como $a = 0$ e $b = 3$, então $C(0, 3)$.

Como $r^2 = 5$, então $r = \sqrt{5}$.

Portanto, o centro é $C(0, 3)$ e a medida do comprimento do raio é $r = \sqrt{5}$.

c. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 5)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

Como $a = 5$ e $b = 0$, então $C(5, 0)$.

Como $r^2 = \frac{1}{2}$, então $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, o centro é $C(5, 0)$ e a medida do raio é $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

72. Na circunferência de equação $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$:

- Para $P(-2, 1)$, temos $x = -2$ e $y = 1$. Assim:
  $(-2 + 3)^2 + (1 - 1)^2 = 5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 1^2 + 0^2 = 5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 1 = 5$ (sentença falsa)
  Logo, *P* não pertence à circunferência.
- Para $Q(-1, 3)$, temos $x = -1$ e $y = 3$. Assim:
  $(-1 + 3)^2 + (3 - 1)^2 = 5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 8 = 5$ (sentença falsa)
  Logo, *Q* não pertence à circunferência.
- Para $R(-2, 3)$, temos $x = -2$ e $y = 3$. Assim:
  $(-2 + 3)^2 + (3 - 1)^2 = 5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 5 = 5$ (sentença verdadeira)
  Logo, *R* pertence à circunferência.
- Para $S(0, 1)$, temos $x = 0$ e $y = 1$. Assim:
  $(0 + 3)^2 + (1 - 1)^2 = 5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 3^2 + 0^2 = 5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 9 = 5$ (sentença falsa)
  Logo, *S* não pertence à circunferência.
- Para $T(-1, 0)$, temos $x = -1$ e $y = 0$. Assim:
  $(-1 + 3)^2 + (0 - 1)^2 = 5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2^2 + (-1)^2 = 5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 5 = 5$ (sentença verdadeira)
  Logo, *T* pertence à circunferência.

Portanto, apenas os pontos *R* e *T* pertencem à circunferência da equação dada.

73. Não, pois para alguns valores de *x* há dois valores de *y* correspondentes.

74. O lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que distam 3 u do ponto $C(2, -1)$ é a circunferência de medida de comprimento do raio $r = 3$ e centro $C(2, -1)$.

Como $a = 2$ e $b = -1$, temos:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

Essa é a equação reduzida da referida circunferência.

75. a. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é:

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

b. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 0)^2 + (y + 0)^2 = 4^2$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é:

$x^2 + y^2 = 16$

76. Se o diâmetro é $\overline{RS}$, tal que $R(3, 0)$ e $S(-3, 3)$, o centro dessa circunferência é o ponto médio de $\overline{RS}$; então:

$$C\left(\frac{3 + (-3)}{2}, \frac{0 + 3}{2}\right) = C\left(0, \frac{3}{2}\right)$$

Como o centro da circunferência é $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$, então $a = 0$ e $b = \frac{3}{2}$.

$\overline{CS}$ corresponde à medida do comprimento do raio da circunferência; então:

$$d_{C,S} = r \Rightarrow r = \sqrt{(0 + 3)^2 + \left(\frac{3}{2} - 3\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow r = \sqrt{9 + \frac{9}{4}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{45}{4}}$$

Substituindo os valores encontrados na equação reduzida da circunferência, obtemos:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{45}{4}}\right)^2 \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$

77. a. De acordo com a figura, o centro da circunferência é $C(0, 0)$; então, $a = 0$ e $b = 0$.

Calculamos a medida de comprimento do raio:

$r = d_{C,P} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Substituindo os valores necessários, obtemos a seguinte equação reduzida da circunferência:

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$

b. De acordo com a figura, o centro da circunferência é $C(2, 1)$; então, $a = 2$ e $b = 1$.

O raio é a distância de $C(2, 1)$ ao ponto de coordenadas $(5, 0)$. Assim:

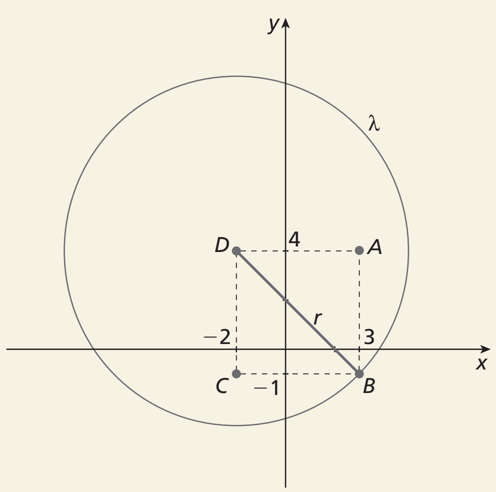
$r = \sqrt{(5 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

Substituindo os valores necessários, obtemos a seguinte equação reduzida da circunferência:

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$

78. Vamos representar essa situação no plano cartesiano.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Como podemos observar na figura acima e de acordo com o enunciado, $D(-2, 4)$ é o centro de λ; então, $a = -2$ e $b = 4$.

A medida de comprimento do raio de λ será:

$r = d_{B,D} = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$

Substituindo os valores obtidos na equação, obtemos:

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 50$.

79. a. Vamos formar trinômios quadrados perfeitos e verificar se é possível determinar o centro $C(a, b)$ e a medida do raio r da circunferência.

$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 0 + 1 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

Portanto, o centro dessa circunferência é $C(1, -1)$ e a medida de comprimento do raio é $r = \sqrt{2}$.

b. $(x + 1)^2 - (y - 2)^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - y^2 + 4y - 4 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2x + 4y - 12 = 0$

Como o coeficiente de y^2 é -1, não é possível determinar o centro nem a medida de comprimento do raio, já que essa equação não representa uma circunferência.

80. $4x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 9 = 0$

Vamos dividir ambos os membros dessa equação por 4 para que os coeficientes de x^2 e de y^2 tornem-se 1:

$x^2 + y^2 + 1x + 2y + \frac{9}{4} = 0$

Agora, vamos comparar essa equação com a equação geral da circunferência, igualando os coeficientes para obter a, b e r:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$-2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$-2b = 2 \Rightarrow b = -1$

$a^2 + b^2 - r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 - r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{4} + 1 - \frac{9}{4} \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow r = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

Logo, a equação dada não representa uma circunferência.

81. Primeiro, vamos calcular o centro e a medida de comprimento do raio da circunferência completando os quadrados:

$x^2 + y^2 - 6x + 18y + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 18y + 81 = -8 + 9 + 81 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 9)^2 = 82$

Portanto, o centro dessa circunferência é $C(3, -9)$ e a medida de comprimento do raio $r = \sqrt{82}$.

Agora, vamos fazer os cálculos analisando os coeficientes:

$x^2 + y^2 - 6x + 18y + 8 = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$-2a = -6 \Rightarrow a = 3$

$-2b = 18 \Rightarrow b = -9$

$a^2 + b^2 - r^2 = 8 \Rightarrow 3^2 + (-9)^2 - r^2 = 8 \Rightarrow r = \sqrt{82}$

Portanto, o centro dessa circunferência é $C(3, -9)$ e a medida de comprimento do raio $r = \sqrt{82}$.

82. a. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

b. $(x - 0)^2 + (y + 5)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 10y + 25 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10y + 20 = 0$

83. Vamos comparar a equação dada com a equação geral da circunferência:

$x^2 + y^2 + x + y + \frac{p}{2} = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$-2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$-2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

$a^2 + b^2 - r^2 = \frac{p}{2} \Rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - \frac{p}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{p}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{p}{2}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1 - p}{2}}$

Portanto, concluímos que a condição é:

$1 - p > 0 \Rightarrow p < 1$

84. a. Como o ponto A pertence à circunferência, suas coordenadas obedecem à relação $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Portanto, para $x = 2$, temos:

$2^2 + y^2 - 5 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 1$ ou $y = -1$ (não serve)

Logo, a ordenada do ponto A é 1.

O valor $y = -1$ não serve como ordenada do ponto A porque é um ponto do primeiro quadrante, mas serve como ordenada do ponto D, que também tem abscissa igual a 2 e está no quarto quadrante.

b. Como vimos no item anterior, as coordenadas do ponto D são $x = 2$ e $y = -1$. Portanto, $D(2, -1)$.

Como o ponto B tem ordenada igual a 1 e B pertence à circunferência, temos:

$x^2 + 1^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$ (não convém)

Logo, a abscissa do ponto B é -2 e, portanto, $B(-2, 1)$.

Como o ponto C tem ordenada igual a -1 e C pertence à circunferência, temos:

$x^2 + (-1)^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$ (não serve)

Logo, a abscissa do ponto C é -2 e, portanto, $C(-2, -1)$.

c. Sim. A medida da área da região alaranjada pode ser calculada pela diferença entre a medida da área do círculo de medida de comprimento do raio $r = \sqrt{5}$ e a medida da área do retângulo $ABCD$ de medida de comprimento 4 e medida de altura 2.

$A_{\text{região alaranjada}} = A_{\text{círculo}} - A_{\text{retângulo}} = \pi \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot 2$

Logo: $A_{\text{região alaranjada}} = (5\pi - 8)\ u^2$

85. Para saber a posição que o ponto P ocupa em relação a cada circunferência, devemos calcular a medida da distância entre esse ponto e o centro de cada circunferência:

a. $d_{C,P} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (3 - 2)^2} \Rightarrow d_{C,P} = \sqrt{10}$

Como $\sqrt{10} > 3$, então $d_{C,P} > r$; logo, o ponto P é exterior à circunferência.

b. $d_{C,P} = \sqrt{(-2 + 1)^2 + (2 - 2)^2} \Rightarrow d_{C,P} = 1$

Como $1 < 2$, $d_{C,P} < r$; logo, o ponto P é interior à circunferência.

c. $d_{C,P} = \sqrt{(-3 + 1)^2 + (1 - 2)^2} \Rightarrow d_{C,P} = \sqrt{5}$

Como $d_{C,P} = r$, o ponto P pertence à circunferência.

86. a. Pela equação da circunferência $x^2 + (y - 3)^2 = 4$, temos centro $C(0, 3)$ e comprimento do raio medindo 2.

Calculando a medida da distância CP, temos:

$d_{C,P} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-1 - 3)^2} \Rightarrow d_{C,P} = \sqrt{20}$

Como $\sqrt{20} > 2$, então $d_{C,P} > r$; logo, o ponto $P(2, -1)$ é exterior à circunferência.

b. Pela equação da circunferência $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, temos centro $C(2, 0)$ e comprimento do raio medindo 2.

Calculando a medida da distância CP, temos:

$d_{C,P} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (2 - 0)^2} \Rightarrow d_{C,P} = 2$

Como $d_{C,P} = r$, o ponto $P(2, 2)$ pertence à circunferência.

c. Vamos determinar o centro e o raio da circunferência comparando a equação dada com a equação geral da circunferência:

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$-2a = 2 \Rightarrow a = -1$

$-2b = -2 \Rightarrow b = 1$

$a^2 + b^2 - r^2 = -2 \Rightarrow r^2 = (-1)^2 + 1^2 + 2 \Rightarrow r = 2$

Logo, o centro é $C(-1, 1)$ e a medida de comprimento do raio é 2.

Calculando a medida da distância CP, temos:

$d_{C,P} = \sqrt{(-1 + 1)^2 + (1 - 0)} \Rightarrow d_{C,P} = 1$

Como $1 < 2$, então $d_{C,P} < r$; logo, o ponto $P(-1, 0)$ é interior à circunferência.

87. a. Para que o ponto $P(k, 1)$ esteja na circunferência, devemos ter:

$k^2 + 1^2 - 6 \cdot k - 2 \cdot 1 + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 - 6k + 8 = 0 \Rightarrow k = 4$ ou $k = 2$

b. Para que o ponto $P(k, 1)$ esteja no interior da circunferência, devemos ter:

$k^2 + 1^2 - 6 \cdot k - 2 \cdot 1 + 9 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 - 6k + 8 < 0 \Rightarrow 2 < k < 4$

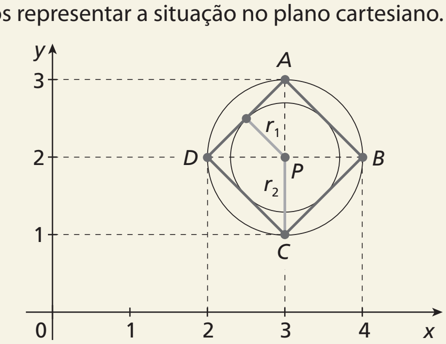
88. Calculando a medida da distância entre o ponto P e o centro C da circunferência, temos:

$d_{CP} = \sqrt{(5 - 3)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{8}$

Assim, como a medida d_{CP} é menor que a medida de comprimento do raio da circunferência e maior que 0, temos que o ponto P é interno, mas não coincidente com o centro.

Alternativa **b**.

89. Vamos representar a situação no plano cartesiano.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

O ponto P é o centro das circunferências inscrita e circunscrita ao quadrado $ABCD$.

O ponto P é o ponto médio das diagonais do quadrado $ABCD$. Assim:

$P\left(\dfrac{3 + 3}{2}, \dfrac{1 + 3}{2}\right) \Rightarrow P(3, 2)$

a. A medida de comprimento do raio da circunferência inscrita no quadrado é igual à metade da medida do comprimento do lado desse quadrado. Assim:

$r = \dfrac{d_{A,B}}{2} = \dfrac{\sqrt{(3 - 4)^2 + (3 - 2)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, a equação da circunferência inscrita no quadrado é $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \dfrac{1}{2}$.

b. A medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita ao quadrado é igual à metade da medida do comprimento da diagonal desse quadrado. Assim:

$r = \dfrac{d_{A,C}}{2} = \dfrac{\sqrt{(3 - 3)^2 + (3 - 1)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{4}}{2} = 1$

Logo, a equação da circunferência circunscrita ao quadrado é $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

c. Usando S para denotar a medida da área da coroa circular formada pelas circunferências, S_i para denotar a medida da área da circunferência inscrita e S_c para a medida da área da circunferência circunscrita ao quadrado $ABCD$, temos:

$$S = S_c - S_i \Rightarrow S = \pi \cdot 1^2 - \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \pi \cdot 1 - \pi \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{\pi}{2}$$

Logo, a medida da área da coroa circular é $\frac{\pi}{2}$ u^2.

90. a. Pela equação da circunferência, sabemos que o centro é $C(1, 1)$ e a medida do raio é $r = 2\sqrt{2}$.

Agora, vamos calcular a medida da distância do centro da circunferência à reta $s: x + y = 6$

$$d_{C,\,s} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Como $d_{C,s} = r$, então a reta e a circunferência são tangentes.

Vamos determinar o ponto de tangência resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - y \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos $y^2 - 6y + 9 = 0$ e, portanto, $y = 3$. Substituindo y por 3 na equação $x = 6 - y$, obtemos $x = 3$.

Portanto, o ponto de tangência é $P(3, 3)$.

b. Os pontos comuns à reta e à circunferência, se houver, são as soluções do sistema formado por suas equações:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Para $x = 0$, temos $y = -1$.

Para $x = 1$, temos $y = 0$.

Portanto, encontramos duas soluções para o sistema: $A(1, 0)$ e $B(0, -1)$.

Assim, a reta e a circunferência são secantes e os pontos de intersecção são $A(1, 0)$ e $B(0, -1)$.

c. Os pontos comuns à reta e à circunferência, se houver, são as soluções do sistema formado por suas equações:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 4x + 9 = 0$$

O discriminante da equação $2x^2 + 4x + 9 = 0$ é $\Delta = -56 < 0$, o que nos indica que o sistema não tem solução.

Logo, a reta é exterior à circunferência.

91. Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} y = x + k \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Substituindo y por $x + k$ na equação da circunferência, obtemos:

$x^2 + (x + k)^2 - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2kx + k^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2kx + k^2 - 4 = 0$

$\Delta = (2k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 4) = -4k^2 + 32$

Para que a reta e a circunferência sejam tangentes, deve haver apenas uma solução para o sistema; então, devemos ter $\Delta = 0$. Assim:

$-4k^2 + 32 = 0 \Rightarrow k = -2\sqrt{2}$ ou $k = 2\sqrt{2}$

92. No ponto A, temos $y = 0$; então:

$x^2 + 0^2 - 8x - 8 \cdot 0 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$

Portanto, $A(4, 0)$.

No ponto B, temos $x = 0$; então:

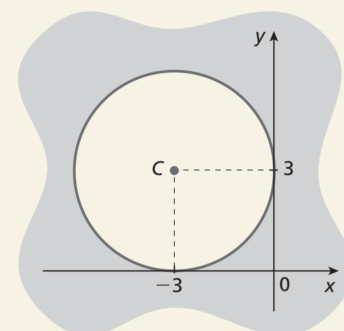
$0^2 + y^2 - 8 \cdot 0 - 8y + 16 = 0 \Rightarrow y^2 - 8y + 16 = 0 \Rightarrow y = 4$

Portanto, $B(0, 4)$.

$AB = d_{A,\,B} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

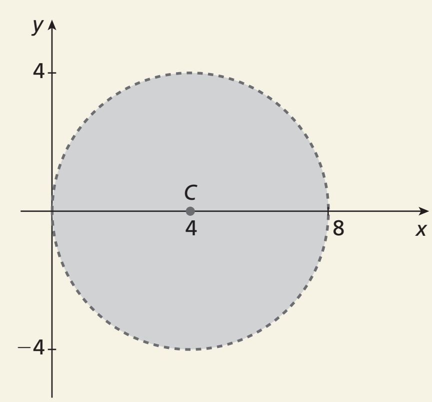
Logo, o comprimento de $\overline{AB}$ mede $4\sqrt{2}$ u.

93. a. A inequação $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 \geqslant 9$ representa a reunião de todos os pontos da circunferência $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ com todos os pontos exteriores a ela. Como a circunferência tem centro $C(-3, 3)$ e medida de comprimento do raio $r = 3$, obtemos o seguinte gráfico:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

b. A inequação $(x - 4)^2 + y^2 < 16$ representa todos os pontos interiores à circunferência $(x - 4)^2 + y^2 = 16$. Como a circunferência tem centro $C(4, 0)$ e medida de comprimento do raio $r = 4$, obtemos o seguinte gráfico:



94. A medida da área do círculo representado pela inequação $x^2 + (y - 1)^2 - 1 \leqslant 0$ é dada por $A = \pi \cdot r^2$, em que r é a medida do raio da circunferência $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, que tem centro $C(0, 1)$ e medida de comprimento do raio $r = 1$.

Assim: $A = \pi \cdot 1^2 \Rightarrow A = \pi$

Logo, a medida da área do círculo dado é π u^2.

95. A medida do comprimento da circunferência representada pela equação $x^2 + y^2 = 25$ é $C = 2\pi r$, em que r é a medida de comprimento de comprimento do raio da circunferência.

De acordo com a equação da circunferência, $r = 5$.

Assim: $C = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$

Logo, a medida do comprimento da circunferência é 10π u.

96. a. No gráfico está representada a reunião de todos os pontos da circunferência de centro $C(2, 3)$ e medida de comprimento do raio $r = \sqrt{13}$, com todos os pontos interiores a ela.

A equação da circunferência é:

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$

Então, a inequação correspondente ao gráfico será:
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 13$

b. No gráfico estão representados todos os pontos de intersecção do semiplano situado acima da reta $x + y = -2$, incluindo a própria reta, com os pontos do interior da circunferência de centro $C(-2, -2)$ e medida do comprimento do raio 2, cuja equação é $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$, incluindo os da circunferência.

O sistema que corresponde ao gráfico é:

$$\begin{cases} y \geqslant -x - 2 \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 4 \end{cases}$$

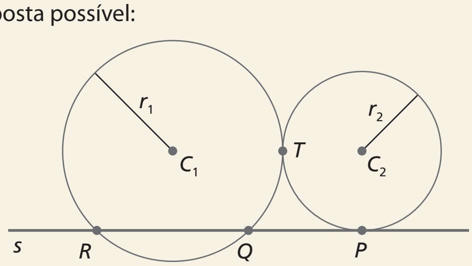
97.
- Quando $\Delta > 0$, a equação do 2º grau tem duas soluções distintas, ou seja, a reta e a circunferência se interceptam em dois pontos distintos (são secantes).
- Quando $\Delta = 0$, a equação do 2º grau tem duas soluções coincidentes, ou seja, a reta e a circunferência se interceptam em um único ponto (são tangentes).
- Quando $\Delta < 0$, a equação do 2º grau não tem solução real, ou seja, a reta e a circunferência não se interceptam.

Portanto: se $\Delta > 0$, a reta é secante à circunferência;
se $\Delta = 0$, a reta é tangente à circunferência;
se $\Delta < 0$, a reta é exterior à circunferência.

98. Resposta pessoal.

99. a. Tangentes interiores, pois: $d = |r_1 - r_2|$
b. Secantes, pois: $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$
c. Tangentes exteriores, pois: $d = r_1 + r_2$
d. Disjuntas interiores, pois: $d < |r_1 - r_2|$
e. Concêntricas, pois: $d = 0$.
f. Disjuntas exteriores, pois: $d > r_1 + r_2$

100. Resposta possível:



Na figura há duas circunferências, com centros C_1 e C_2 e medidas dos raios r_1 e r_2.

T é o ponto de tangência das circunferências.

P, Q e R são os pontos de intersecção da reta s com as circunferências.

101. Vamos determinar os centros C_1 e C_2 e as medidas de comprimento dos raios r_1 e r_2 de cada circunferência.
- Como $x^2 + y^2 - 4x = 0$, então:
  $C_1(2, 0)$ e $r_1 = 2$
- Como $x^2 + y^2 - 16x = 48$, então:
  $C_2(8, 0)$ e $r_2 = 4\sqrt{7}$

Vamos calcular a distância d entre os centros.

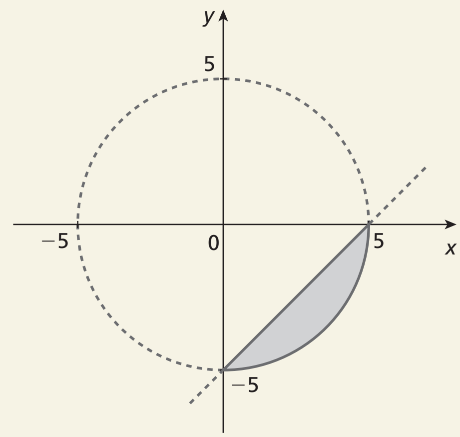
$$d = \sqrt{(8 - 2)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{6^2} = 6$$

Logo, $0 \leqslant d < |r_1 - r_2|$; então, as circunferências são disjuntas internas e não há pontos de intersecção (pontos comuns) entre elas.

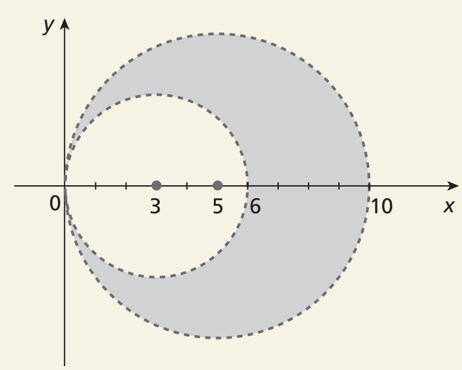
102. O gráfico representa a intersecção de todos os pontos interiores à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 36$ com todos os pontos exteriores à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, inclusive os pontos da circunferência.
Logo, o sistema abaixo pode representar essa situação:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 36 \\ x^2 + y^2 \geqslant 4 \end{cases}$$

103. a.

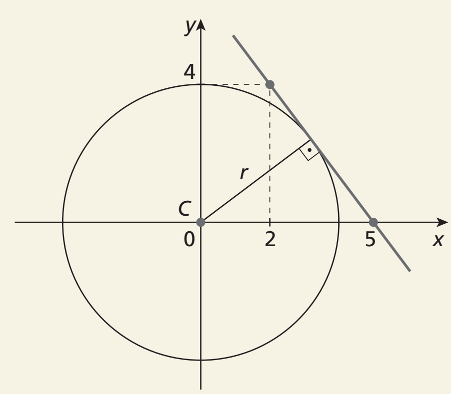


b.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

104. Vamos representar a situação graficamente:



A reta tangente é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Logo, temos:

$$r = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 20|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

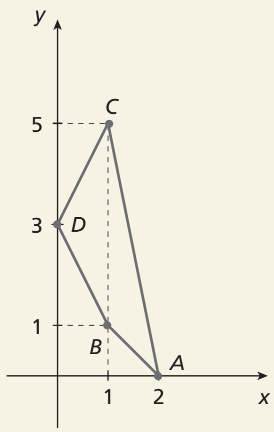
Medida da área da região delimitada pela circunferência:
$A = \pi \cdot r^2 = 16\pi$

Assim, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 16$, e a medida da área da região delimitada pela circunferência é 16π u^2.

Para finalizar o capítulo 7

Autoavaliação

Q1.



O polígono é um quadrilátero.

Alternativa **c**.

Q2. $d_{A,B} = \sqrt{(6-1)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

Alternativa **a**.

Q3. $m_r = \dfrac{3-1}{3-(-1)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$r // s \Rightarrow m_s = \dfrac{1}{2}$

Alternativa **b**.

Q4. $y = \dfrac{1}{2}x + 11 \Rightarrow m_1 = \dfrac{1}{2}$ e $n_1 = 11$

$y = -2x - 6 \Rightarrow m_2 = -2$ e $n_2 = -6$

$m_1 \neq m_2$ e $m_1 \cdot m_2 = -1$.

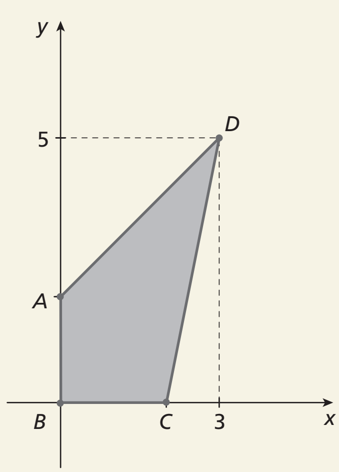
Logo, as retas são concorrentes perpendiculares.

Alternativa **a**.

Q5. $d_{A,r} = \dfrac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Alternativa **c**.

Q6.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{CDA}$

$A_{ABC} = \dfrac{2 \cdot 2}{2} = 2$

$A_{CDA} = \dfrac{1}{2} \cdot |D|$

$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \Rightarrow A_{CDA} = \dfrac{1}{2} \cdot 12 = 6$

Portanto:

$A_{ABCD} = 2 + 6 = 8 = 2^3$

Alternativa **c**.

Q7. Vamos comparar a equação dada com a equação geral da circunferência:

$x^2 + y^2 - 6x = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} -2a = -6 \Rightarrow a = 3 \\ -2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(3, 0)$

$a^2 + b^2 - r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = 3^2 - 0^2 \Rightarrow r = 3$

Alternativa **a**.

Q8. Na equação geral da circunferência, os coeficientes de x^2 e de y^2 devem ser iguais. Assim, $m = 4$.

Alternativa **b**.

Q9. Na figura está representada a intersecção de todos os pontos do semiplano situado abaixo da reta $x - y = -1$, incluindo a própria reta, com todos os pontos do interior da circunferência $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, incluindo a circunferência.

Logo, o sistema que corresponde à representação gráfica é:

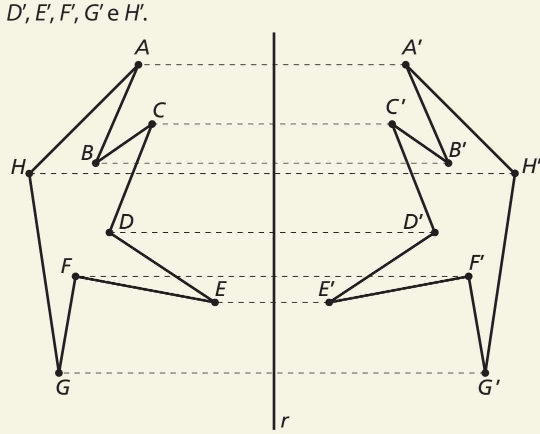
$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \end{cases}$

Alternativa **a**.

Capítulo 8 Transformações geométricas

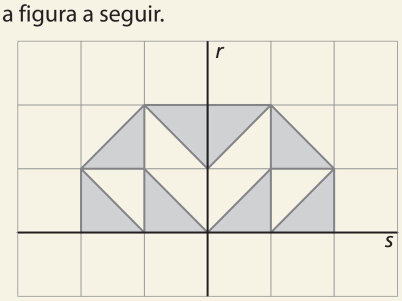
Atividades propostas

1. Primeiro, nomeamos os vértices da figura como *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H* e os vértices da figura simétrica como *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'*, *F'*, *G'* e *H'*. Como a reta *r* é o eixo de simetria, é também a mediatriz de um segmento que tem como extremidades um ponto qualquer da figura *ABCDEFGH* e seu simétrico da figura transformada *A'B'C'D'E'F'G'H'*. Assim, podemos construir a figura simétrica com a determinação dos vértices *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'*, *F'*, *G'* e *H'*.

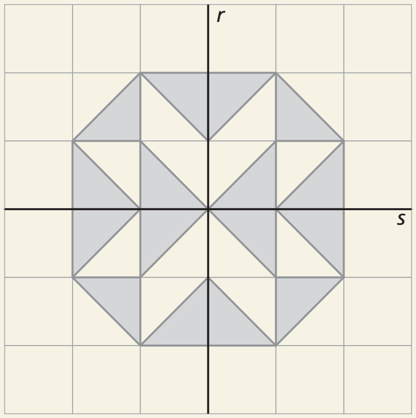


Alternativa **c**.

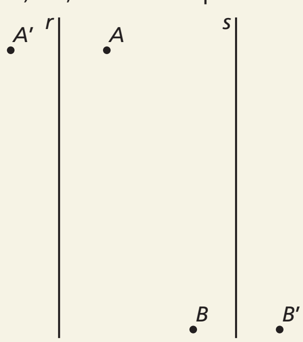
2. Primeiro, o *designer* fez a reflexão em relação ao eixo *r*, obtendo a figura a seguir.



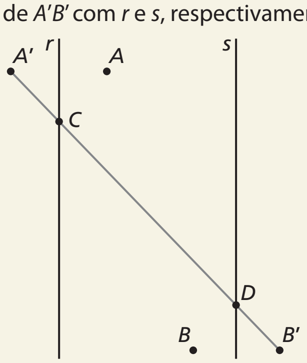
Depois, fez a reflexão em relação ao eixo *s* e obteve o logotipo conforme a figura a seguir.



3. Os passos para determinar a trajetória do feixe são os seguintes: Com um compasso, construímos *A'*, simétrico do ponto *A* em relação à reta *r*, e *B'*, simétrico do ponto *B* em relação à reta *s*.

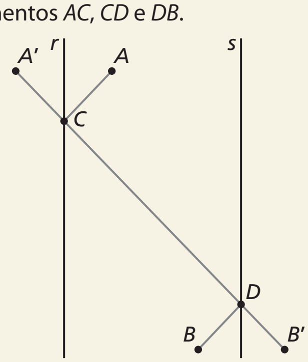


Depois, traçamos o segmento $\overline{A'B'}$. Sejam *C* e *D* os pontos de intersecção de $\overline{A'B'}$ com *r* e *s*, respectivamente.



Por fim, traçamos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$.

Portanto, a trajetória percorrida pelo feixe de *A* a *B* é formada pelos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$.



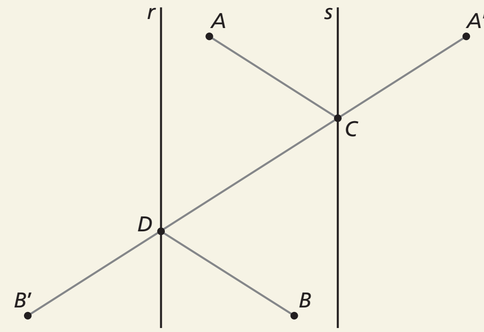
A resolução pode ser justificada pelo seguinte fato:

$AC + CD + DB = A'C + CD + DB' = A'B'$

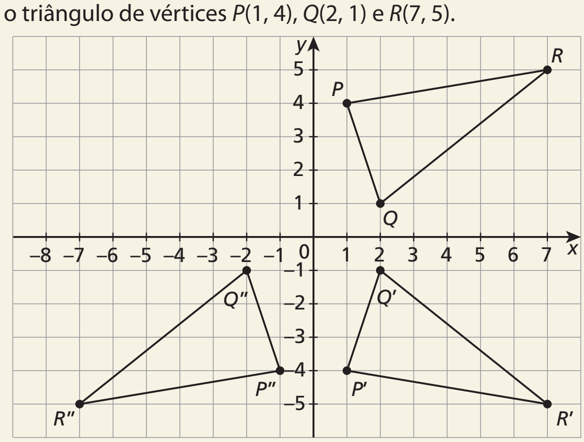
O problema pode também ser pensado da seguinte maneira: Faz-se a reflexão do ponto *A* em relação à reta *s*, obtendo-se o ponto *A'*, e a reflexão do ponto *B* em relação à reta *r*, obtendo-se o ponto *B'*.

Depois, traça-se o segmento $\overline{A'B'}$, determinando os pontos *C* em *s* e *D* em *r*.

A trajetória do feixe pode também ser formada pelos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$.



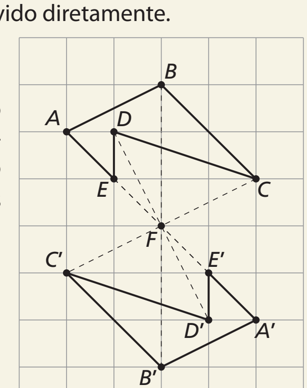
4. Os pontos *P''*, *Q''* e *R''* encontram-se no terceiro quadrante do plano cartesiano, pois as abscissas e as ordenadas desses pontos são negativas. Com a reflexão do triângulo *P''Q''R''* em relação ao eixo das ordenadas, obtemos o triângulo de vértices *P'*(1, −4), *Q'*(2, −1) e *R'*(7, −5). Agora, refletindo o triângulo *P'Q'R'* em relação ao eixo das abscissas, obtemos o triângulo de vértices *P*(1, 4), *Q*(2, 1) e *R*(7, 5).



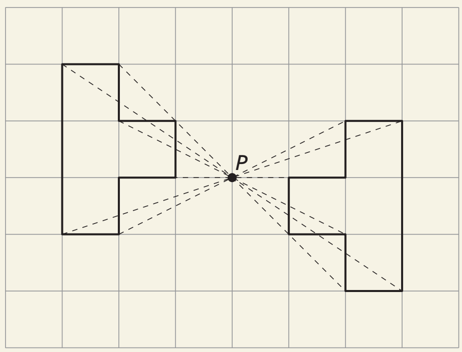
Portanto, os pontos *P*, *Q* e *R* têm coordenadas (1, 4), (2, 1) e (7, 5), respectivamente.

5. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que qualquer movimentação realizada é refletida no segmento $\overline{P'Q'}$ para manter a simetria com o segmento $\overline{PQ}$. Além disso, o segmento $\overline{P'Q'}$ não pode ser movido diretamente, e o segmento $\overline{PQ}$ permanece fixo, exceto nos casos em que ele ou um de seus pontos é movido diretamente.

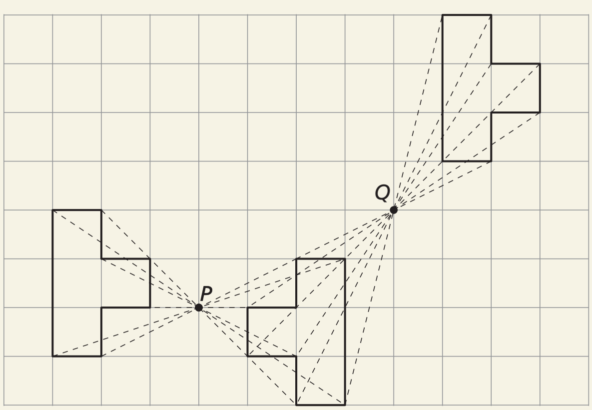
6. A alternativa em que a figura *A'B'C'D'E'* é simétrica à figura *ABCDE* em relação ao ponto *F* é a alternativa **a**, pois apenas nesse caso o ponto *F* é o ponto médio dos segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$. Alternativa **a**.



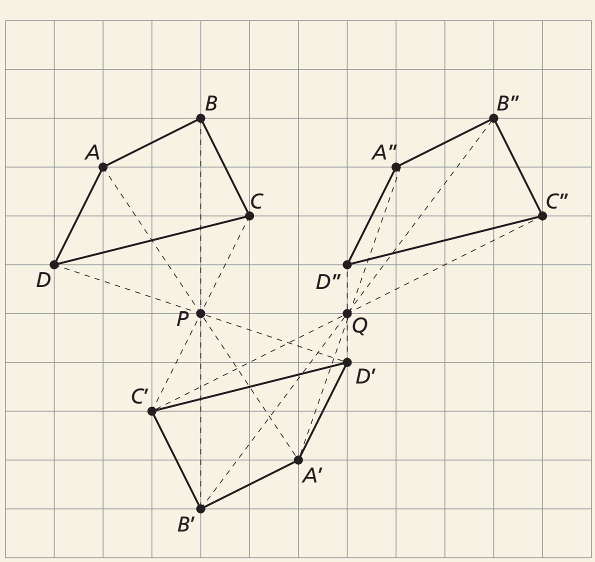
7. Para determinar a figura simétrica em relação ao ponto *P*, construímos segmentos de reta com extremidades em cada um dos vértices da figura original, todos passando pelo ponto *P*, de modo que *P* seja o ponto médio desses segmentos. As outras extremidades dos segmentos serão os vértices da figura simétrica.



Agora, construímos segmentos de reta que tenham como extremidades os vértices da figura obtida e passem por *Q*, de modo que o ponto *Q* seja o ponto médio. As outras extremidades desses segmentos construídos formarão a nova figura, conforme a representação a seguir.

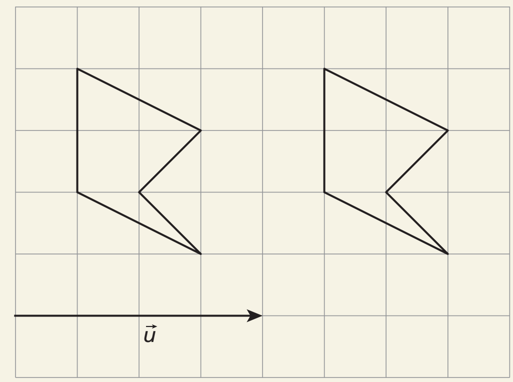


8. Exemplo de resposta:

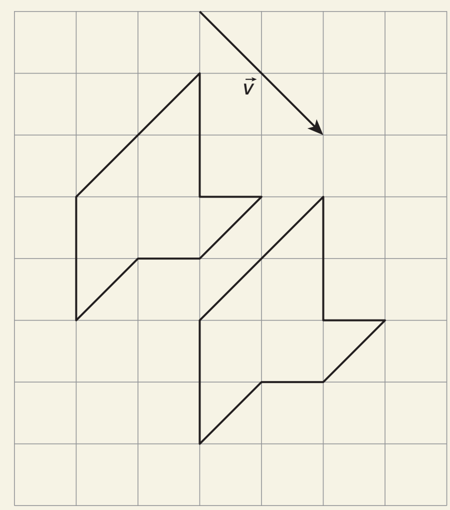


Os estudantes devem perceber que as medidas das distâncias dos vértices do polígono *ABCD* aos vértices correspondentes do polígono *A″B″C″D″* são iguais, e que os dois polígonos têm a mesma orientação em relação ao plano.

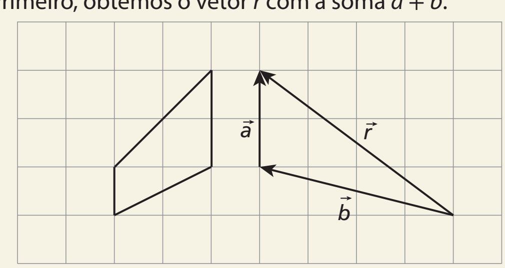
9. a. O vetor $\vec{u}$, que tem como módulo 4 unidades, determina a translação. Cada vértice da nova figura dista 4 unidades da malha do seu correspondente na figura original.



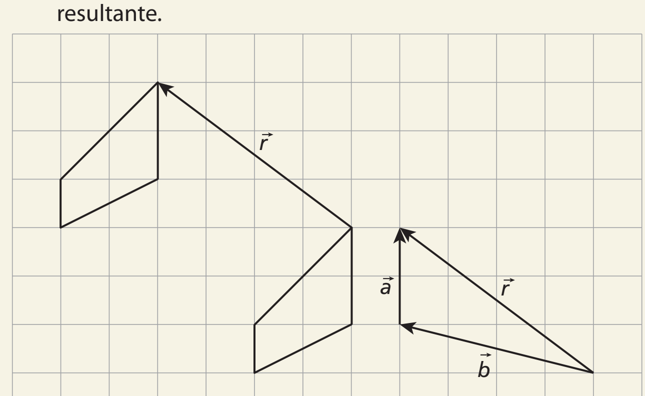
b. O vetor $\vec{v}$, que tem como módulo $2\sqrt{2}$, define a translação.



10. Primeiro, obtemos o vetor $\vec{r}$ com a soma $\vec{a} + \vec{b}$.

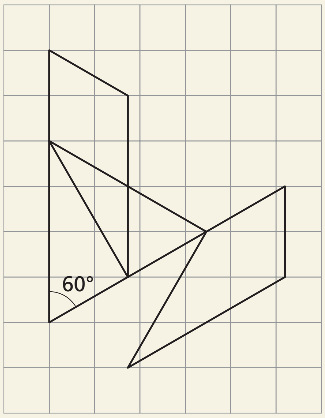


E, em seguida, transladamos a figura, conforme o vetor resultante.

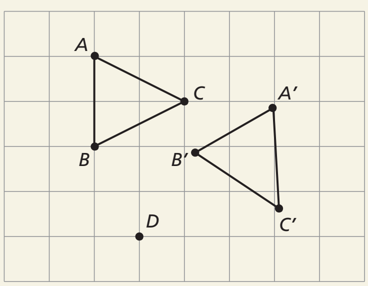


11. Resposta pessoal.

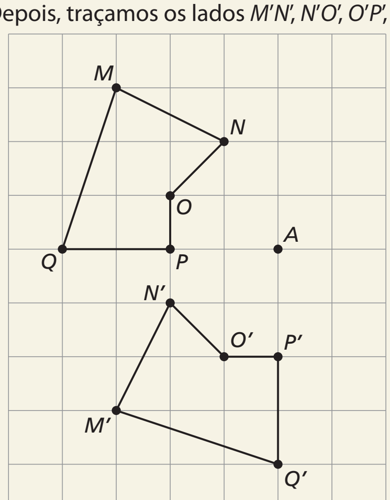
12. Na figura, podemos perceber que um vértice de cada quadrilátero corresponde a um dos vértices de cada triângulo equilátero que forma o hexágono. Assim, verificamos que a medida de abertura do ângulo com que cada quadrilátero foi rotacionado foi de 60°, tal qual a medida de abertura dos ângulos internos de um triângulo equilátero.



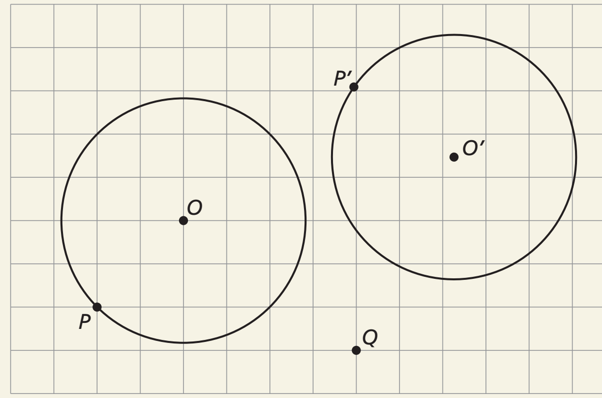
13. a. Para obter o triângulo $A'B'C'$, fazemos uma rotação no sentido horário com medida de abertura igual a 60º nos vértices A, B e C, em torno do centro de rotação D, resultando nos vértices A', B' e C', respectivamente. Depois, traçamos os lados $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{A'C'}$.



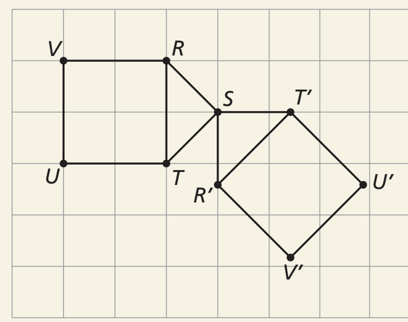
b. Para obter a figura $M'N'O'P'Q'$, fazemos uma rotação no sentido anti-horário com medida de abertura igual a 90º nos vértices M, N, O, P e Q, em torno do centro de rotação A, resultando nos vértices M', N', O', P' e Q', respectivamente. Depois, traçamos os lados $\overline{M'N'}$, $\overline{N'O'}$, $\overline{O'P'}$, $\overline{P'Q'}$ e $\overline{Q'M'}$.



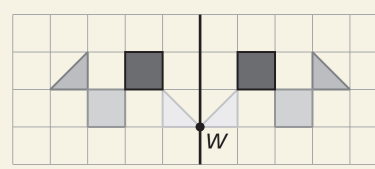
c. Para obter a circunferência de centro O' e ponto P', fazemos uma rotação no sentido horário com medida de abertura igual a 80º nos pontos O e P, em torno do centro de rotação Q, resultando no centro O' e no ponto da circunferência P', respectivamente. Depois, traçamos a circunferência de centro O' e raio $\overline{O'P'}$.



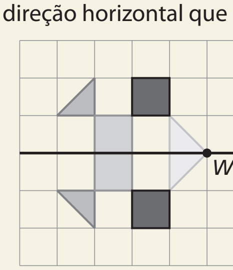
d. Para obter a figura $R'ST'U'V'$, fazemos uma rotação no sentido anti-horário com medida de abertura igual a 135º nos vértices R, T, U e V, em torno do centro de rotação S, resultando nos vértices R', T', U' e V', respectivamente. Depois, traçamos os segmentos $\overline{R'S}$, $\overline{ST'}$, $\overline{T'U'}$, $\overline{U'V'}$ e $\overline{V'R'}$.



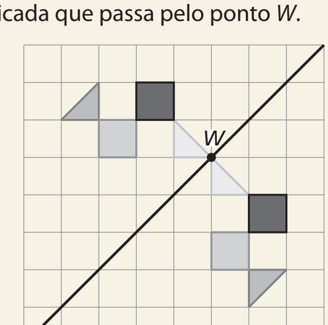
14. Na alternativa **a**, está representada uma simetria em relação a uma reta na direção vertical que passa pelo ponto W.



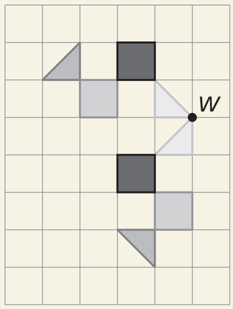
Na alternativa **b**, está representada uma simetria em relação a uma reta na direção horizontal que passa pelo ponto W.



Na alternativa **c**, está representada uma simetria em relação à reta indicada que passa pelo ponto W.

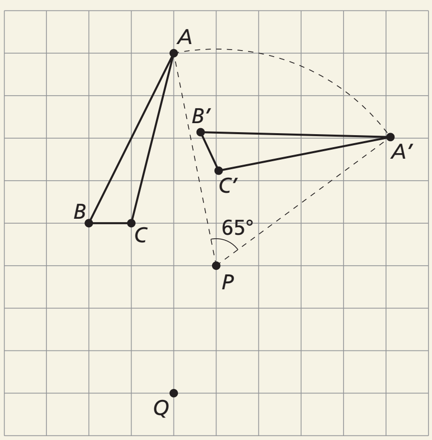


Na alternativa **d**, está representada uma rotação da figura original com medida de abertura igual a 90° no sentido anti-horário, em torno do centro de rotação *W*.

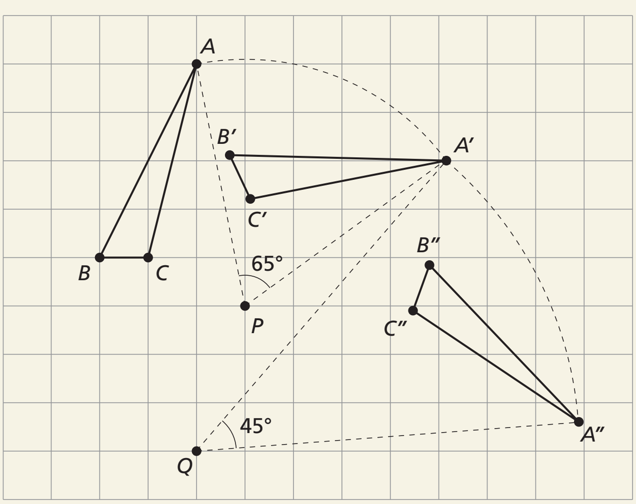


Alternativa **d**.

15. 1ª rotação:

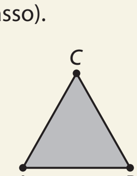


2ª rotação:

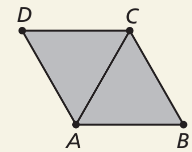


16. Exemplo de resposta:

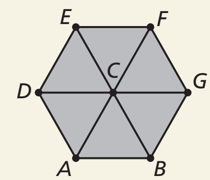
Passo 1. Construir um triângulo *ABC* com a ferramenta Polígono regular (se houver no *software* utilizado; caso contrário, seguir os passos de construção de um triângulo equilátero com régua e compasso).



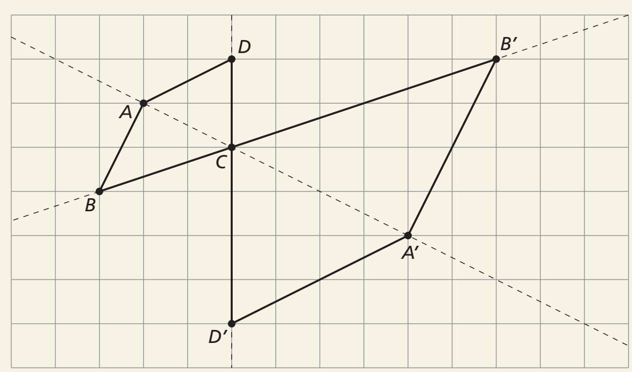
Passo 2. Rotacionar o triângulo *ABC* em torno do ponto *C* com uma medida de abertura de 60° no sentido horário, obtendo o triângulo *DAC*.



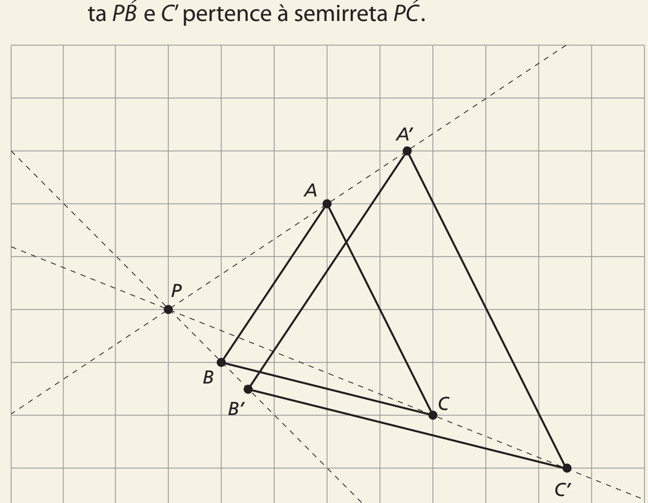
Passo 3. Repetir as rotações, com mesma medida de abertura, em torno do ponto *C*, de cada novo triângulo obtido, terminando, assim, com os triângulos *EDC*, *FEC*, *GFC* e *BGC*, completando o hexágono regular *BADEFG*.



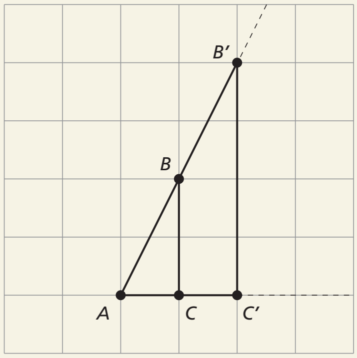
17. a. Para construir a figura *A′B′CD′*, homotética à figura *ABCD*, com centro da homotetia *C* e razão −2, temos uma figura invertida em relação à original e fazemos $CA' = 2CA$, $CB' = 2CB$ e $CD' = 2CD$ com *C* pertencendo aos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{DD'}$.



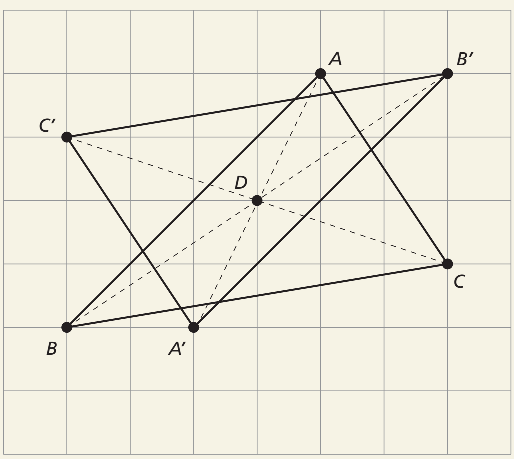
b. Para construir a figura *A′B′C′*, homotética à figura *ABC*, com centro da homotetia *P* e razão $\frac{3}{2}$, fazemos $PA' = \frac{3}{2}PA$, $PB' = \frac{3}{2}PB$ e $PC' = \frac{3}{2}PC$. Como a razão de homotetia é maior que 0, *A′* pertence à semirreta $\overrightarrow{PA}$, *B′* pertence à semirreta $\overrightarrow{PB}$ e *C′* pertence à semirreta $\overrightarrow{PC}$.



c. Para construir a figura $AB'C'$, homotética à figura ABC, com centro da homotetia A e razão 2, fazemos $AB' = 2AB$ e $AC' = 2AC$. Como a razão de homotetia é maior que 0, B' pertence à semirreta $\overrightarrow{AB}$ e C' pertence à semirreta $\overrightarrow{AC}$.

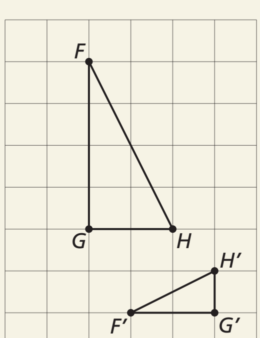


d. Para construir a figura $A'B'C'$, homotética à figura ABC, com centro de homotetia D e razão -1, fazemos $DA' = DA$, $DB' = DB$ e $DC' = DC$. Como a razão de homotetia é menor que 0, temos uma figura invertida em relação à original e D pertencendo aos segmentos $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ e $\overline{CC''}$.

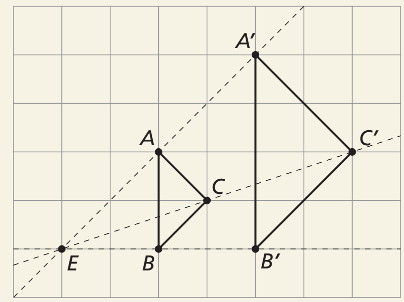


18. Exemplo de resposta:

O triângulo FGH, representado a seguir, é semelhante ao triângulo $F'G'H'$, mas eles não são homotéticos, pois não há centro de homotetia. Podemos comprovar isso traçando as retas $\overleftrightarrow{FF'}$, $\overleftrightarrow{GG'}$ e $\overleftrightarrow{HH'}$.

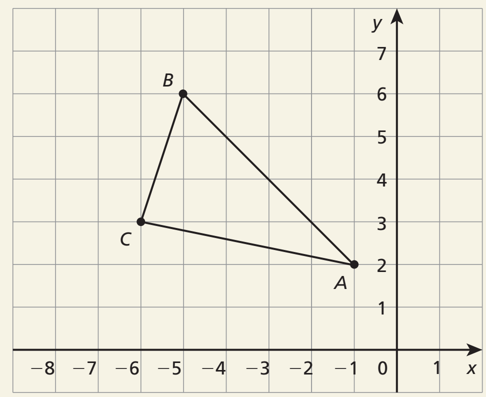


19. Para determinar o centro da homotetia, traçamos as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$. A intersecção dessas retas será o centro de homotetia, que chamamos de E. Como a distância de um ponto P qualquer da figura original ao ponto E é igual à metade da distância do ponto P', homotético de P, ao ponto E, e A' pertence à semirreta $\overrightarrow{EA}$, B' pertence à semirreta $\overrightarrow{EB}$ e C' pertence à semirreta $\overrightarrow{EC}$, a razão é igual a 2.

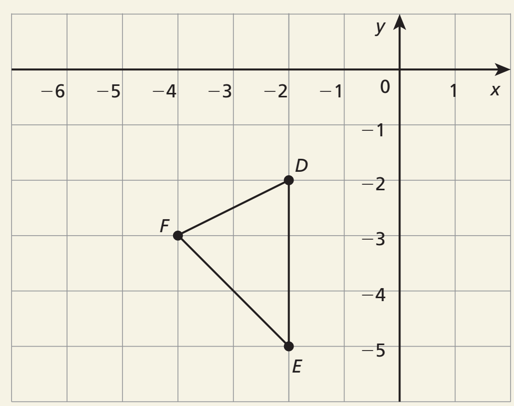


20. Resposta pessoal.

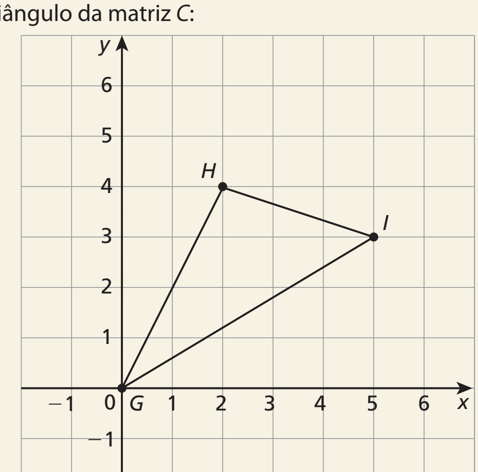
21. Triângulo da matriz A:



Triângulo da matriz B:



Triângulo da matriz C:



22. A matriz que representa o deslocamento do triângulo é $B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Precisamos determinar uma matriz $X = (x_{ij})_{2 \times 3}$, tal que $X + B = A$.

$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$,

daí temos: $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

23. Matriz A:

Reflexão em relação ao eixo y:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Reflexão em relação ao eixo x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz B:

Reflexão em relação ao eixo y:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Reflexão em relação ao eixo x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz C:

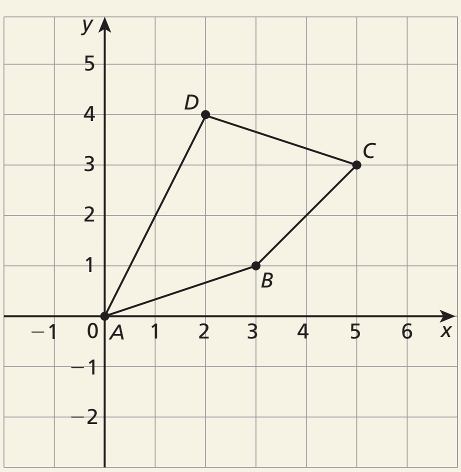
Reflexão em relação ao eixo y:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Reflexão em relação ao eixo x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

24. a.



b. Determinamos a matriz que representa a rotação com medida de abertura igual a 90º no sentido anti-horário do quadrilátero $ABCD$ em torno da origem com o produto a seguir.

$$\begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen } 90° \\ \text{sen } 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

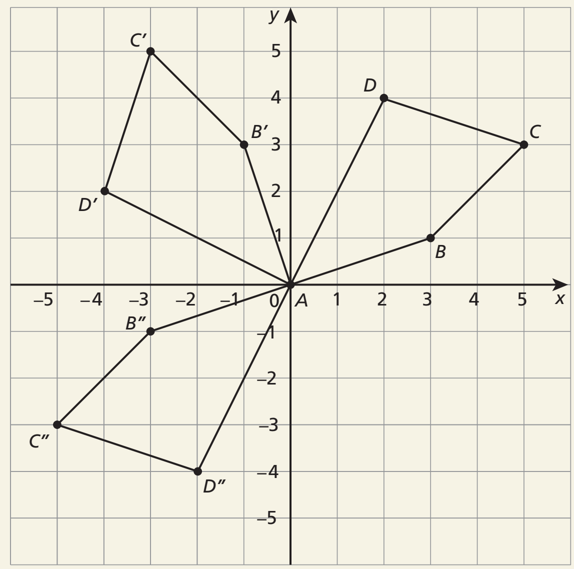
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

c. Determinamos a matriz que representa a rotação com medida de abertura igual a 180º no sentido anti-horário do quadrilátero $ABCD$ em torno da origem com o produto a seguir.

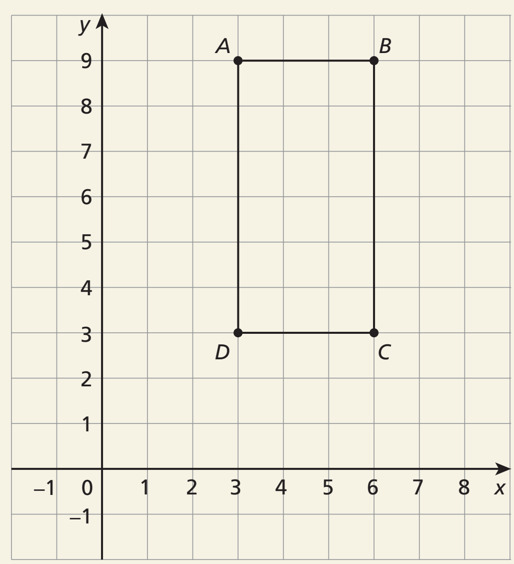
$$\begin{pmatrix} \cos 180° & -\text{sen } 180° \\ \text{sen } 180° & \cos 180° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

d. Com os vértices $A(0, 0)$, $B'(-1, 3)$, $C'(-3, 5)$, $D'(-4, 2)$ e $B''(-3, -1)$, $C''(-5, -3)$ e $D''(-2, -4)$ determinados, construímos os quadriláteros.



25. a.



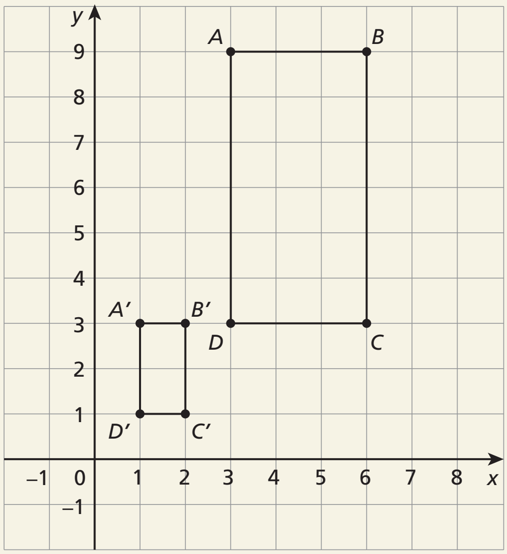
b. Para determinar a matriz que representa os vértices do retângulo, compomos a primeira linha com as abscissas dos pontos e a segunda linha com as ordenadas dos pontos. Cada coluna da matriz representa um par ordenado. Assim, com os pontos $A(3, 9)$, $B(6, 9)$, $C(6, 3)$ e $D(3, 3)$, obtemos a matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

c. Para determinar a matriz, fazemos o seguinte produto:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Para construir o novo retângulo que representa a transformação por escala na razão $\frac{1}{3}$ nas direções horizontal e vertical, obtemos as coordenadas da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Assim, $A'(1, 3)$, $B'(2, 3)$, $C'(2, 1)$ e $D'(1, 1)$.

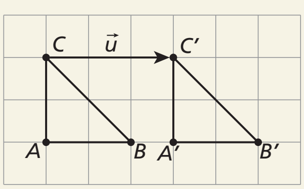


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Para finalizar o capítulo 8

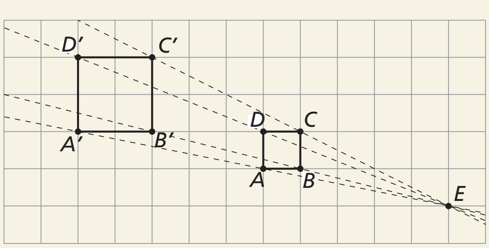
Autoavaliação

Q1. A figura da primeira alternativa representa uma translação, pois existe um vetor $\vec{u}$ que determina a translação da figura ABC para a figura $A'B'C'$.



Alternativa **a**.

Q2. A segunda figura representa uma homotetia, pois, ao traçar as retas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$, obtemos o centro da homotetia E.

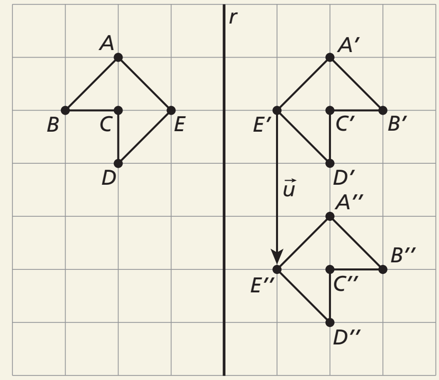


Alternativa **b**.

Q3. Uma transformação homotética de um polígono preserva a razão entre as medidas de comprimento dos segmentos correspondentes, as medidas de abertura dos ângulos correspondentes e o paralelismo entre os segmentos correspondentes. Uma transformação isométrica preserva a medida da distância entre os pontos.

Alternativa **c**.

Q4. O polígono $A'B'C'D'E'$ é simétrico do polígono $ABCDE$ em relação à reta r e o polígono $A''B''C''D''E''$ é uma translação do polígono $A'B'C'D'E'$ pelo vetor $\vec{u}$.



Alternativa **d**.

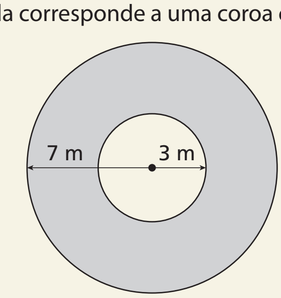
Q5. A matriz que devemos adicionar à matriz que representa um ponto no plano cartesiano para que ele seja transladado 5 unidades na direção vertical e no sentido de baixo para cima é a matriz representada pela alternativa **a**, pois, dado o ponto $A(a, b)$, podemos ver que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b+5 \end{pmatrix}$, a abscissa do ponto A se mantém e à ordenada são adicionados 5 unidades, deslocando o ponto na direção vertical e no sentido de baixo para cima.

Alternativa **a**.

As resoluções/orientações das atividades das seções *Educação midiática – Fake news – manipulação de imagens* e *Pesquisa e Ação – Exposição de arte* encontram-se nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

Prepare-se para o Enem e vestibulares

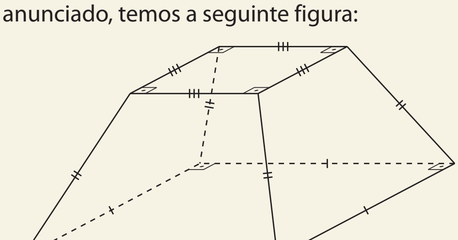
1. Como a medida do comprimento do diâmetro do círculo vai ser aumentado de 6 metros para 14 metros, a região a ser pavimentada corresponde a uma coroa circular.



Para calcular a medida da sua área, em metro quadrado, fazemos: $\pi \cdot (7^2 - 3^2) = 40\pi \simeq 40 \cdot 3 = 120$
Logo, o material disponível em estoque para pavimentar 100 m^2 não será suficiente.

Alternativa **e**.

2. Do anunciado, temos a seguinte figura:



Podemos perceber que os 4 lados das bases superior e inferior do tronco são congruentes; assim, são 2 quadrados. As 4 faces laterais, por outro lado, têm base maior e base menor de medidas de comprimento diferentes, enquanto seus segmentos laterais têm mesma medida de comprimento; portanto, são 4 trapézios isósceles.

Alternativa **c**.

3. Seja V a medida do volume, em centímetro cúbico, de massa da receita-base para a produção de 50 docinhos de formato esférico com 2 cm de medida de comprimento do diâmetro. Assim, temos:

$$V = 50 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = \frac{200 \cdot \pi}{3}$$

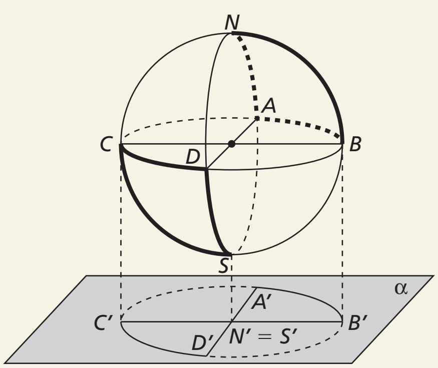
Para a encomenda de 150 desses docinhos, com 4 cm de medida de diâmetro, devemos ter:

$$150 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \frac{600}{3} \cdot \pi \cdot 8 = 24 \cdot \frac{200 \cdot \pi}{3} = 24 \cdot V$$

Logo, a cozinheira deve preparar 24 porções da receita-base para atender esse cliente.

Alternativa **e**.

4.



As projeções ortogonais dos pontos N, A, B, S, C e D no plano α são os pontos N', A', B', S', C' e D', respectivamente.

Assim, a projeção ortogonal sobre o plano α das duas trajetórias é mostrada na figura da alternativa **e**.

Alternativa **e**.

5. Sendo x, y e z as medidas das massas de cada camiseta, calça e sapato, respectivamente, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 12x + 4y + 3z = 10 & \text{(I)} \\ 18x + 3y + 2z = 10 & \text{(II)} \\ kx + 2y + z = 10 & \text{(III)} \end{cases}$$

em que k é a quantidade máxima de camisetas que a pessoa poderá levar. Do sistema, temos:

(II) – (I): $6x - y - z = 0$ (IV)

(II) – (III): $(18 - k)x + y + z = 0$ (V)

Somando (IV) e (V), obtemos:

$(18 - k + 6)x = 0$

Como $x \neq 0$, temos: $18 - k + 6 = 0 \Rightarrow k = 24$

Alternativa **b**.

6. Da figura apresentada, temos os pontos $A(20, 40)$ e $B(50, 20)$ representando as cidades A e B, respectivamente. Podemos obter o ponto $B'(50, -20)$, simétrico da cidade B em relação à rodovia 003. Podemos então encontrar um ponto colinear a A e B' passando pelo eixo x (rodovia 003), que seria o ponto de menor medida de distância percorrida pelas cidades A e B para chegar à rodovia 003. Chamando de P o ponto no eixo x, temos:

$$\begin{vmatrix} 20 & 40 & 1 \\ 50 & -20 & 1 \\ x_P & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 60x_P - 2\,400 = 0 \Rightarrow x_P = 40$$

Logo, $P(40, 0)$ é o ponto de menor medida de deslocamento para as duas cidades; portanto, a localização a ser escolhida é a IV.

Alternativa **d**.

7. Sendo $Q(3, 7)$, $R(6, 7)$ e $S(5, 3)$ as posições dos usuários e $R_Q = 3$, $R_R = 2$ e $R_S = 5$ as medidas de comprimento de seus respectivos raios de abrangência, para o bar I temos:

$$d_{IQ} = \sqrt{(3-5)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{5} < 3 = R_Q$$

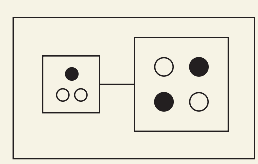
$$d_{IR} = \sqrt{(6-5)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{2} < 2 = R_R$$

$$d_{IS} = \sqrt{(5-5)^2 + (3-6)^2} = 3 < 5 = R_S$$

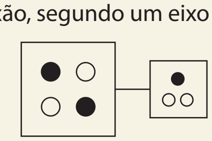
Logo, o bar I está no raio dos 3 usuários compatíveis com P. Podemos ainda perceber que a distância do usuário R aos outros bares é maior que seu raio de abrangência; portanto, o bar I é a única opção possível.

Alternativa **a**.

8. Dada a figura inicial:



Ao fazer a reflexão, segundo um eixo vertical, temos:



Alternativa **a**.

ISBN 978-85-16-13976-6

9 788516 139766